

# Steuerung und Regelung eines Doppelpendels

Projektseminar von Tobias Gebhard und Frederik Tesar  
Tag der Einreichung: 9. Oktober 2020

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski  
2. Gutachten: Dr.-Ing. Eric Lenz  
Darmstadt



TECHNISCHE  
UNIVERSITÄT  
DARMSTADT

REGELUNGSTECHNIK  
UND MECHATRONIK

**rtm**

Fachbereich Elektrotechnik  
und Informationstechnik

Steuerung und Regelung eines Doppelpendels

Projektseminar von Tobias Gebhard und Frederik Tesar

1. Gutachten: Prof. Dr.-Ing. Ulrich Konigorski

2. Gutachten: Dr.-Ing. Eric Lenz

Tag der Einreichung: 9. Oktober 2020

Darmstadt

---

## **Erklärung zur Abschlussarbeit**

### **gemäß §22 Abs. 7 und §23 Abs. 7 APB der TU Darmstadt**

---

Hiermit versichere ich, Tobias Gebhard und Frederik Tesar, die vorliegende projektseminar ohne Hilfe Dritter und nur mit den angegebenen Quellen und Hilfsmitteln angefertigt zu haben. Alle Stellen, die Quellen entnommen wurden, sind als solche kenntlich gemacht worden. Diese Arbeit hat in gleicher oder ähnlicher Form noch keiner Prüfungsbehörde vorgelegen.

Mir ist bekannt, dass im Fall eines Plagiats (§38 Abs. 2 APB) ein Täuschungsversuch vorliegt, der dazu führt, dass die Arbeit mit 5,0 bewertet und damit ein Prüfungsversuch verbraucht wird. Abschlussarbeiten dürfen nur einmal wiederholt werden.

Bei der abgegebenen Thesis stimmen die schriftliche und die zur Archivierung eingereichte elektronische Fassung gemäß §23 Abs. 7 APB überein.

Bei einer Thesis des Fachbereichs Architektur entspricht die eingereichte elektronische Fassung dem vorgestellten Modell und den vorgelegten Plänen.

Darmstadt, 9. Oktober 2020

---

T. Gebhard F. Tesar

---

# Inhaltsverzeichnis

---

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>5</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>6</b>
2.1	MPC . . . . .	6
2.2	Simulation . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Modellierung</b>	<b>7</b>
3.1	Modell des Schlitten-Pendel-Systems . . . . .	7
3.1.1	Koordinaten . . . . .	7
3.1.2	Herleitung der Bewegungsgleichungen . . . . .	8
3.1.3	Coulomb-Reibung . . . . .	9
3.1.4	Zustandsraummodell . . . . .	9
3.1.5	Ruhelagen . . . . .	9
3.2	Motor-Modell . . . . .	9
3.2.1	Spannungs-Strom-Wandler . . . . .	10
3.2.2	Gleichstrommotor . . . . .	10
3.2.3	Getriebe . . . . .	11
3.3	Modellparameter . . . . .	12
3.4	Aufbau in SIMULINK . . . . .	12
3.5	Implementierung in MATLAB . . . . .	12
<b>4</b>	<b>Arbeitspunkt-Regelung</b>	<b>13</b>
4.1	Einleitung . . . . .	13
4.2	Aufbau in SIMULINK . . . . .	13
4.3	Implementierung in MATLAB . . . . .	13
4.4	Anfangswert-Tests . . . . .	13
4.5	QR Parameter Tests . . . . .	13
4.6	System Parameter Tests . . . . .	13



---

# 1 Einleitung

---

Hallo Pendel



---

## 2 Grundlagen

---

### 2.1 MPC

---

### 2.2 Simulation

---

---

## 3 Modellierung

---

In diesem Kapitel wird die Modellierung des Gesamtsystems erläutert und auf dessen Implementierung in SIMULINK eingegangen.

---

### 3.1 Modell des Schlitten-Pendel-Systems

---

Die Modellierung des Schlitten-Pendel-Systems orientiert sich zunächst an den Modellen der vergangenen Arbeiten. Diese bezogen sich auf die Herleitung von **[modpen]**. Dabei gibt es die Variante *Kraftsystem*, das als Eingang die Kraft annimmt, welche am Schlitten wirkt, sowie das vereinfachte *Beschleunigungssystem*, das direkt die Beschleunigung des Schlittens als Eingang erhält.

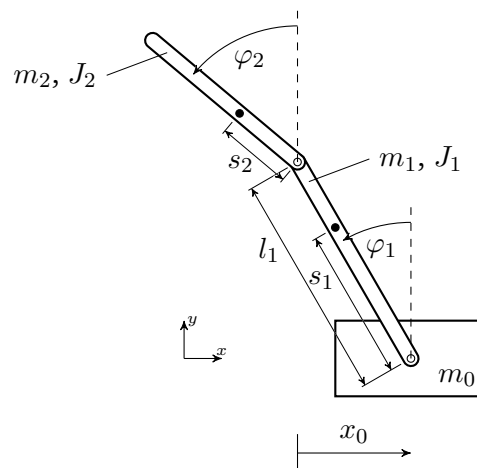


Abbildung 3.1: Doppel-Pendel

#### 3.1.1 Koordinaten

Das System aus Schlitten und Doppelpendel hat 3 Freiheitsgrade, die mit den Minimal-Koordinaten

$$q_0 = x_0$$

$$q_1 = \varphi_1$$

$$q_2 = \varphi_2$$

beschrieben werden. Die Koordinaten sind nach Abbildung 3.1 definiert.

---

Die Koordinaten der Schwerpunkte der Pendelstäbe ergeben sich zu

$$x_1 = x_0 - s_1 \sin \varphi_1$$

$$y_1 = s_1 \cos \varphi_1$$

$$x_2 = x_0 - l_1 \sin \varphi_1 - s_2 \sin \varphi_2$$

$$y_2 = l_1 \cos \varphi_1 + s_2 \cos \varphi_2 .$$

### 3.1.2 Herleitung der Bewegungsgleichungen

Um auf die Bewegungsgleichungen des Systems zu gelangen, wird in [modpen] der *Lagrange*-Formalismus verwendet. Dazu werden zunächst die kinetische und potentielle Energie des Gesamtsystems bestimmt sowie die nicht-konservativen Kräfte/Momente. Mit dem Formalismus ergeben sich die 3 *gekoppelten* Bewegungsgleichungen für die Koordinaten. Um nach den zweiten Ableitungen aufzulösen, muss allerdings noch das Gleichungssystem gelöst werden.

Die Berechnung der Ableitungen und das Lösen des Gleichungssystems geschah bisher händisch, was im Allgemeinen fehleranfällig ist. In dieser Arbeit werden die Bewegungsgleichungen mithilfe der symbolischen Toolbox von MATLAB gelöst. Diese Vorgehensweise ist nicht nur weniger fehleranfällig, dadurch lässt sich das System auch sehr flexibel modifizieren.

Die kinetische Gesamtenergie ergibt sich zu

$$T = \frac{1}{2} m_0 \dot{x}_0^2 + \frac{1}{2} m_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) + \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2$$

und die potentielle Energie beträgt

$$U = m_1 g y_1 + m_2 g y_2 .$$

Die nicht-konservativen Kräfte/Momente setzen sich aus der Antriebskraft  $F$  am Schlitten (in  $x_0$  - Richtung) und den Reibungs-Kräften/Momenten zusammen und lauten

$$Q_0^* = F + F_d + F_c$$

$$Q_1^* = M_{d1} + M_{c1} - M_{d2} - M_{c2}$$

$$Q_2^* = M_{d2} + M_{c2}$$

mit den viskosen Dämpfungen

$$F_d = -d_0 \cdot \dot{x}_0$$

$$M_{d1} = -d_1 \cdot \dot{\varphi}_1$$

$$M_{d2} = -d_2 \cdot (\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1) .$$



---

### 3.1.3 Coulomb-Reibung

Da die Coulomb-Reibung sowohl des Schlittens als auch der Pendelstäbe einen wesentlichen Einfluss zu haben scheint, darf diese nicht vernachlässigt werden. In den bisherigen Modellierungen wurde höchstens die Coulomb-Reibung des Schlittens berücksichtigt. Da jedoch durch die Neukonstruktion des Doppel-Pendels die Messsignalübertragung (zur Vermeidung einer Kabelaufwicklung) über einen Schleifring realisiert wurde, besteht die Vermutung, dass dieser für eine erhöhte Coulomb-Reibung verantwortlich ist. Dies würde das System bereits um einen sehr kleinen Arbeitsbereich nicht-linear machen, was die Regelung erschwert.

Im vorigen Projektseminar [ribeiro] wurde die Reibung der Pendelstäbe mittels Identifikation ermittelt, aufgeteilt auf den viskosen und den Coulombanteil.

Die Formel der Gleitreibung lautet eigentlich

$$F_c = F_{c0} \cdot \text{sign}(\dot{x}) ,$$

allerdings führt diese Implementierung aufgrund der signum-Funktion zu Komplikationen in der Simulation. Daher wird der Verlauf bei sehr niedrigen Geschwindigkeiten mit der tanh Funktion angenähert.

$$F_c = -F_{c0} \cdot \tanh\left(\frac{\dot{x}_0}{\dot{x}_{0,c76}}\right) \quad (3.1)$$

$$M_{c1} = -M_{c10} \cdot \tanh\left(\frac{\dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_{1,c76}}\right) \quad (3.2)$$

$$M_{c2} = -M_{c20} \cdot \tanh\left(\frac{\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1}{\dot{\varphi}_{2,c76}}\right) \quad (3.3)$$

Dabei ist  $\dot{x}_{0,c76}$  gerade die Geschwindigkeit, bei der  $\tanh(1) = 0.7616$  von  $F_{c0}$  erreicht ist.

### 3.1.4 Zustandsraummodell

Mit den Bewegungsgleichungen ergibt sich das nichtlineare Zustandsraummodell wie folgt:

### 3.1.5 Ruhelagen

---

## 3.2 Motor-Modell

---

Das Motormodell besteht aus den drei Baugruppen Spannungs-Strom-Wandler, Gleichstrommotor und Getriebe. Die Modellierung der Baugruppen basiert auf den in Franke [franke] erstmalig aufgestellten Gleichungen, die auch in den nachfolgenden Arbeiten zum Versuchsstand weiterhin angewendet wurden. Das Modell des Gleichstrommotors wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit nun zusätzlich um die Berücksichtigung der Selbstinduktion des Motors erweitert.

Im Folgenden wird auf die mathematische Modellierung der drei Baugruppen näher eingegangen.

### 3.2.1 Spannungs-Strom-Wandler

Beim am Versuchsstand eingesetzten Spannungs-Strom-Wandler handelt es sich um einen Servoverstärker, der ursprünglich zur Drehzahlregelung von Gleichstrommotoren vorgesehen ist. Entsprechend folgt der pulswidenmoduliert arbeitende Verstärker dem Prinzip einer übergeordneten Drehzahlregelung mit unterlagerter Stromregelung. Für die Anwendung am Versuchsstand ist der übergeordnete Drehzahlregelkreis jedoch aufgetrennt und in einen Spannungs-Strom-Wandler umfunktioniert worden. Dieser dient der Vorgabe eines konstanten Stromes durch Pulsweitenmodulation der Zwischenkreisspannung am Ausgang des Wandlers proportional zur Steuerspannung am Eingang. Das stationäre Verhalten kann aus diesem Grund durch einen Proportionalitätsfaktor  $K_{UI}$  beschrieben werden

$$I_{Motor} = K_{UI} \cdot U_{Steuer}.$$

Gemäß Franke [franke] lässt sich die Dynamik des Wandlers durch ein  $PT_1$ -Glied modellieren, sodass sich für den Wandler im Laplace-Bereich insgesamt die Gleichung

$$I_{Motor}(s) = \frac{K_{UI}}{1 + T_{UI}s} \cdot U_{Steuer}(s)$$

ergibt.

### 3.2.2 Gleichstrommotor

Bei dem verwendeten Motor handelt es sich um eine fremderregte Gleichstrommaschine, wobei die magnetische Erregung durch einen Permanentmagneten erzeugt wird [franke]. Das elektromagnetische Drehmoment des Gleichstrommotors ist näherungsweise proportional zum Ankerstrom [binder]. Hierbei wird vorausgesetzt, dass keine magnetische Sättigung vorliegt.

$$M_e = K_I \cdot I_a$$

Neben dem elektromagnetischen Drehmoment sind außerdem parasitäre Reibmomente zu berücksichtigen. Die Modellierung der Reibung von Motor und Getriebe wird zusammen mit der Schlittenreibung in Kapitel 3.1 behandelt. Ein rückwirkendes Moment durch die Federkraft des Riemens wird auf Grund der Annahme unendlicher Riemensteifigkeit vernachlässigt.

Weiterhin wird das Drehmoment durch die Selbstinduktion des Motors geschwächt. Dieser Effekt ist in den Motormodellen von Franke [franke] und den Nachfolgearbeiten bisher nicht berücksichtigt worden. Da die Erfahrung am realen Versuchsstand jedoch gezeigt hat, dass eine Modellierung der Selbstinduktion sinnvoll erscheint, wird diese im Rahmen dieser Arbeit in das Motormodell integriert.

Zum besseren Verständnis des Effekts wird zunächst das physikalische Prinzip der Selbstinduktion bzw. Gegeninduktion vergegenwärtigt. Fließt ein Strom durch den im Magnetfeld der Permanentmagneten ruhenden Anker des Motors, wirkt senkrecht zur Stromrichtung und zur Richtung des Magnetfeldes die Lorentzkraft auf die im Leiter der Ankerwicklung befindlichen Ladungsträger (Drei-Finger-Regel bzw. Rechte-Hand-Regel in technischer Stromrichtung). Es entsteht ein Drehmoment auf die Wicklung und der Anker beginnt sich zu drehen. Durch die Drehung bewegen sich die Ladungsträger nun zusätzlich zur Stromrichtung auch in Drehrichtung des Ankers. Auf diese Bewegungskomponente kann erneut das Prinzip der Lorentzkraft angewendet werden. Die resultierende zusätzliche Kraftkomponente, die in

Abhängigkeit der Drehgeschwindigkeit auf die Ladungsträger wirkt, zeigt nun gegen die Stromrichtung (Lenzsche Regel). Auf Grund der Proportionalität zum Ankerstrom, wird das Drehmoment dadurch reduziert.

Am Versuchsstand wird dieser induzierte Gegenstrom bei geringen Winkelgeschwindigkeiten des Motors durch den Stromregler des Spannungs-Strom-Wandlers ausgeregelt. Ab einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit und einem konstantem Sollstrom ist der induzierte Gegenstrom größer als die Stellstromreserve, sodass er nicht mehr ausgeregelt werden kann. Nun nimmt der Strom und damit das Drehmoment mit steigender Winkelgeschwindigkeit ab bis die Leerlaufdrehzahl erreicht ist.

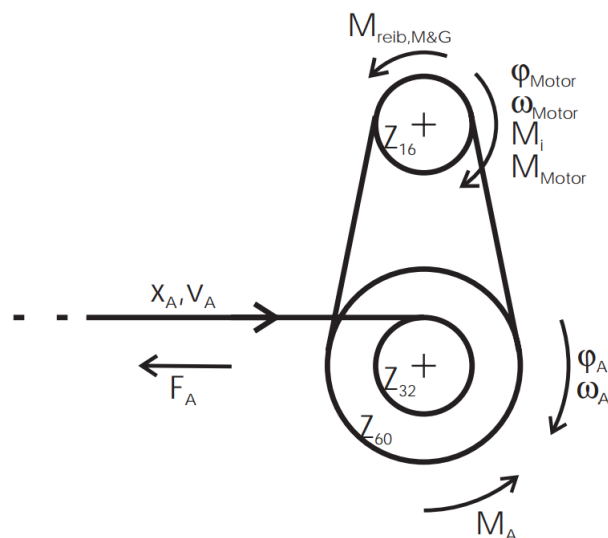
#### ABBILDUNG I(w)-Kennlinie

Auf Grund der im Wandler integrierten Strombegrenzung zum Schutz von Motor und Verstärker ist der Stellstrom der Reglers zusätzlich begrenzt. Es wird im Rahmen dieser Arbeit idealisierend angenommen, dass der begrenzte Maximalstrom des Wandlers konstant gestellt werden kann bis zum Schnittpunkt mit der Stromkennlinie der Gegeninduktion. An dieser Stelle tritt ein „Knick“ im von der Winkelgeschwindigkeit abhängigen Stromverlauf auf. Damit wird für die Modellierung vereinfachend angenommen, dass der Regler von der Strombegrenzung nicht betroffen ist und den Begrenzungsstrom noch bis zum „Knick“ ausregeln kann.

#### ABBILDUNG Ersatzschaltbild-Gleichstrommotor

Die zu modellierende Kennlinie wird bis zur

### 3.2.3 Getriebe



**Abbildung 3.2:** Getriebe [franke] - DUMMY

Die Rotorbewegung des Motors wird über das in Abbildung 3.2 dargestellte Getriebe und das Antriebszahnrad auf den Zahnriemen weitergegeben. Auf Grund der hohen Steifigkeit des mit eingebetteten Stahlseilen unterstützten Riemens wird dieser wie in Apprich [apprich] als unendlich starr angenommen,

---

sodass die Verbindung von Motor und Schlitten ohne Federkopplung durch eine Übersetzungskonstante modelliert werden kann.

$$\dot{x} = K_G \cdot \omega_{Motor}$$

Die Übersetzungskonstante  $K_G$  zwischen der Winkelgeschwindigkeit des Motors und der Schlittengeschwindigkeit wird über das Zahnverhältnis und den Antriebsradius berechnet.

$$K_G = \frac{Z_{16}}{Z_{60}} \cdot r_{32}.$$

Der Antriebsradius  $r_{32}$  ist dabei der Abstand zwischen der neutralen Phase des Riemens und der Drehachse.

---

### 3.3 Modellparameter

---

Apprich [**apprich**]

Chang [**chang**]

Brehl [**brehl**]

Ribeiro [**ribeiro**]

---

### 3.4 Aufbau in SIMULINK

---

---

### 3.5 Implementierung in MATLAB

---

---

## 4 Arbeitspunkt-Regelung

---

In diesem Kapitel wird die Modellierung des Gesamtsystems erläutert und auf dessen Implementierung in Simulink eingegangen.

---

### 4.1 Einleitung

---

---

### 4.2 Aufbau in SIMULINK

---

---

### 4.3 Implementierung in MATLAB

---

---

### 4.4 Anfangswert-Tests

---

---

### 4.5 QR Parameter Tests

---

---

### 4.6 System Parameter Tests

---

