

Università della Calabria

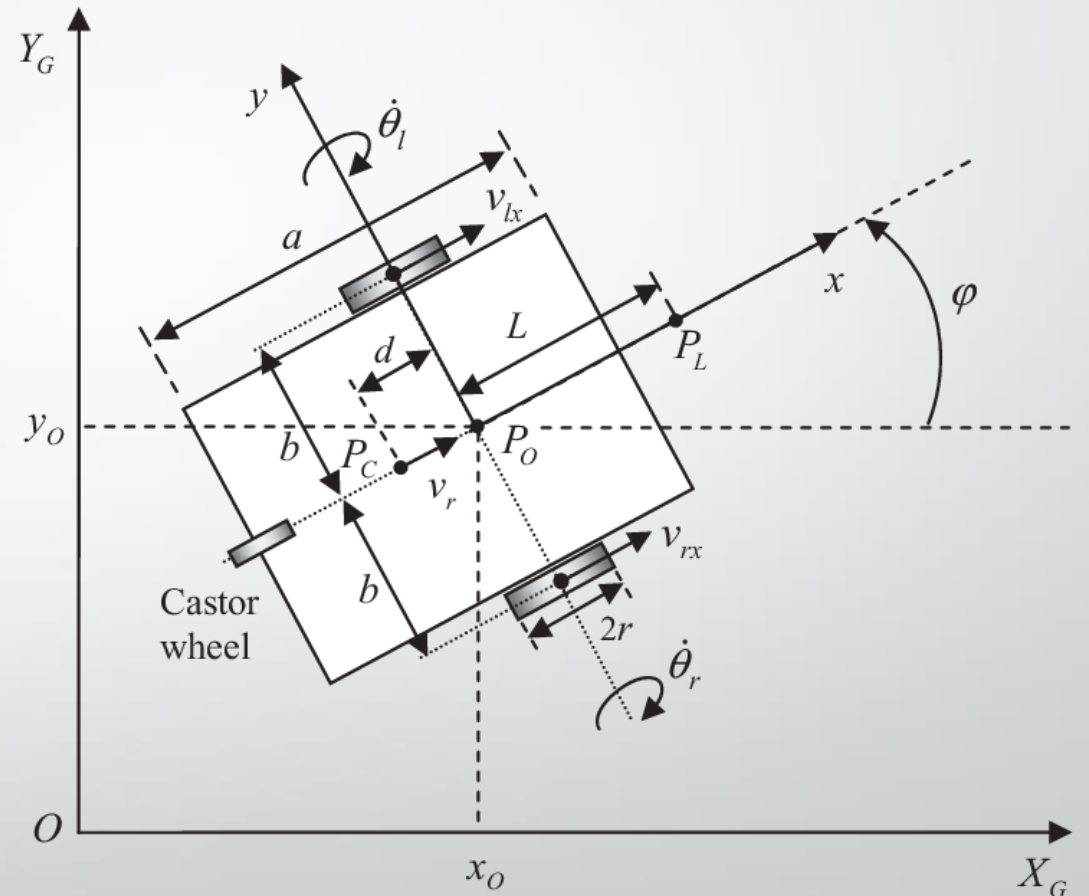
Dipartimento di Ingegneria Informatica , Modellistica , Elettronica e Sistemistica

Robotica Mobile

Modellazione , Pianificazione e Controllo

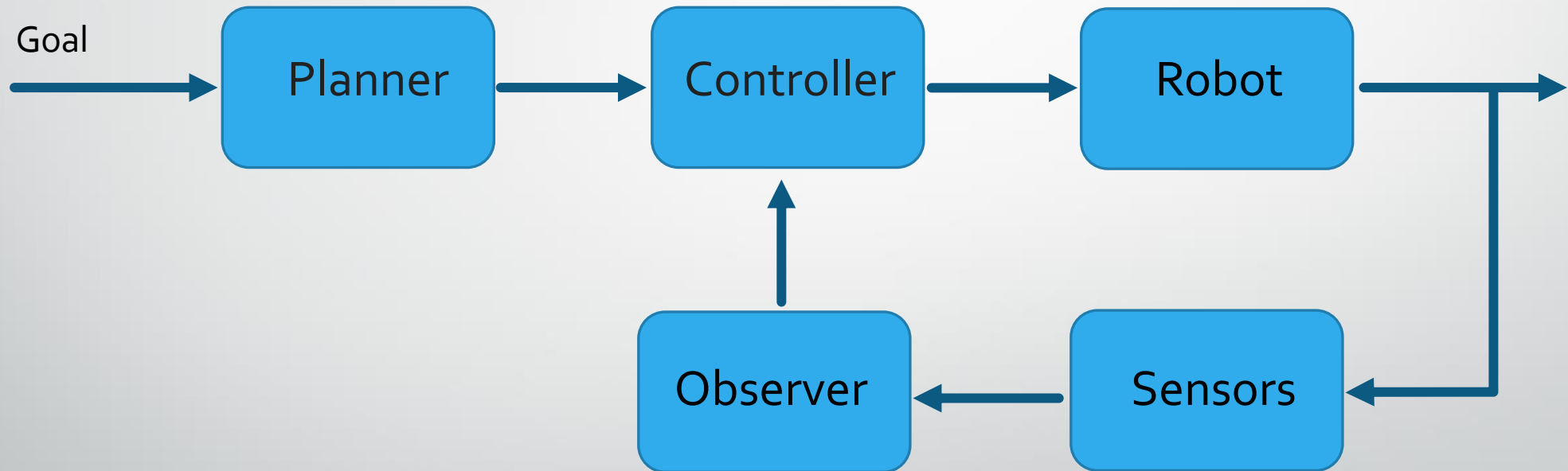
Contenuto della Presentazione

- Robot Mobili
- Vincoli Cinematici
- Modello Cinematico
- Pianificazione Del Moto
- Controllo Del Moto
- Positioning
- Simulazioni



Schema Pianificazione e Controllo

Dato un robot mobile , determinare un percorso ed una azione di controllo che guidi il robot da una configurazione iniziale q_0 ad una configurazione finale q_f .



Obiettivo: portare il robot da q_0 a q_f evitando collisioni con gli ostacoli presenti nell'ambiente

Robot Mobili

I robot mobili vanno assumendo sempre più importanza a causa delle loro potenzialità di intervento autonomo.

La **Locomozione Mediante Ruote** è di fatto la modalità di movimentazione più diffusa per i robot mobili.



La presenza di ruote fa sì che il robot sia soggetto a **vincoli cinematici** di natura **non integrabili**



Riduzione Mobilità Locale

Vincoli Cinematici

Si consideri da adesso in poi un robot , un sistema meccanico la cui configurazione è descritta per mezzo del vettore $q(t) \in C$ delle coordinate generalizzate.

Nel seguito si considereranno soltanto vincoli **bilaterali scleronomi**.

$$\alpha_i(q(t), \dot{q}(t)) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, l$$

in forma Pfaffiana

$$\alpha_i(q(t))\dot{q}(t) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, l$$

con $\alpha_i : C \rightarrow R^n$ campi di classe C^∞ e linearmente indipendenti

$$\alpha_i(q(t))\dot{q}(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(q(t))\dot{q}_j(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(q(t))\frac{dq_j(t)}{dt} = 0$$

in particolare da

$$\alpha_i(q(t))\dot{q}(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(q(t))\dot{q}_j(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(q(t))\frac{dq_j(t)}{dt} = 0$$

segue

$$\alpha_i(q(t))\dot{q}(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(q(t))\dot{q}_j(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(q(t))dq_j(t) = 0$$

con un po' di ricordi verso l'Analisi Matematica 2 , segue immediatamente

I vincoli cinematici in forma pfaffiana , ossia lineari nel vettore delle velocità sono delle
Forme Differenziali Lineari

Notiamo brevemente un fatto molto importante per la continuazione

Sia $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A aperto e $f \in C^1(A) \rightarrow f$ differenziabile su tutto A

$$df(x) = \nabla f(x)^T dx = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$$

in un intorno sufficientemente piccolo di un generico punto $x \in A$.

Se f è differenziabile in $x \in A$, $df(x)$  è una forma differenziale lineare

Non tutte le forme differenziali lineari sono il differenziale di una funzione scalare

consideriamo una forma differenziale lineare generica

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i = 0$$

in particolare ipotizziamo che sia il differenziale di qualche funzione scalare ,

$$dW = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i$$

possiamo pensare ai coefficienti moltiplicativi come alle componenti di un campo vettoriale , e dunque interpretare la forma differenziale come un lavoro differenziale svolto dal campo per uno spostamento dx

$$\int_{\gamma} dW = \int_{\gamma} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx_i \right) = \int_{t_0}^t \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right) dt = \int_{t_0}^t \frac{\partial f(x(t))}{\partial t} dt = f(x(t)) - f(x(t_0))$$

Il campo è conservativo e la funzione scalare il cui campo ne è il gradiente è definita **potenziale**

Nella ipotesi in cui il vincolo cinematico è una forma differenziale lineare esatta

$$a_i(q(t))^T \dot{q}(t) = \sum_{i=1}^n a_i(q(t)) dq_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial h(q)}{\partial q_i} dq_i = 0$$

questo può essere integrato e portato nella forma

$$h(q(t)) = c$$

con c costante di integrazione legata direttamente alle condizioni iniziali $h(q(t_0))$.

Può capitare che il vincolo non sia integrabile, però

$$\sum_{i=1}^n \gamma(q(t)) a_i(q(t)) dq_i = 0, \gamma(q(t)) \neq 0$$

per un opportuno fattore $\gamma(q(t))$ diventi un differenziale esatto, e quindi integrabile

$$\exists h : \frac{\partial h(q)}{\partial q_i} = \gamma(q(t)) a_i(q(t))$$

$\gamma(q(t)) \neq 0$ si definisce **fattore di integrazione**.

Se il vincolo cinematico risulta integrabile , e quindi riconducibile a

$$h(q(t)) = c$$

l'effetto su un sistema meccanico è quello di vincolare il vettore delle coordinate generalizzate ad una determinata superficie di livello della funzione scalare h , riducendo così l'insieme delle configurazioni ammissibili.

Se invece , per nessuna ragione , il differenziale può essere reso esatto , il vincolo cinematico rimane

$$a_i(q(t))^T \dot{q}(t) = 0$$

L'effetto di tale vincolo è quello di limitare la mobilità locale del robot , in quanto ad ogni istante il vettore delle velocità generalizzate è vincolato ad appartenere ad un ben determinato sottospazio

$$\dot{q}(t) \in Ker \left(a_i(q(t)) \right)$$

Nel primo caso si parlerà di integrabilità dei vincoli (**olonomi**) , nel secondo di non integrabilità (**anonomi**)

Condizione di Integrabilità

Consideriamo la seguente forma differenziale lineare esatta

$$w = a(x, y)dx + b(x, y)dy$$

sia $h: C \rightarrow R$ una sua primitiva ,

$$\frac{\partial h}{\partial x} = a(x, y) , \frac{\partial h}{\partial y} = b(x, y)$$

ipotizzando i coefficienti della forma differenziale , funzioni di classe C^2

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} = \frac{\partial b(x, y)}{\partial x}$$

abbiamo ricavato una condizione necessaria all'integrabilità

$$\frac{\partial a(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial b(x, y)}{\partial x}$$

applichiamo la teoria vista il precedenza al caso dei vincoli cinematici , in particolare derivando condizioni necessarie alla olonomicità dei vincoli

$$a_i(q(t))^T \dot{q}(t) = \sum_{i=1}^n a_i(q(t)) dq_i(t) = 0$$

affinchè esso sia integrabile , deve essere una forma differenziale esatta

$\exists h : C \rightarrow R$, $\exists \gamma(q(t)) \neq 0$:

$$\frac{\partial h(q(t))}{\partial q_i} = \gamma(q(t)) a_i(q(t))$$

avendo ipotizzato nella precedente slide che i coefficienti $a_i \in C^\infty$, deve valere

$$\frac{\partial(\gamma(q) a_i(q))}{\partial q_j} = \frac{\partial(\gamma(q) a_j(q))}{\partial q_i} \quad i \neq j$$

le derivate parziali miste devono coincidere. Si ottiene così un sistema di equazioni. Se l'unica soluzione si ottiene per $\gamma(q(t)) = 0$, per tutto quello che abbiamo detto , il vincolo pfaffiano non risulterà essere integrabile , in quanto per nessun fattore di integrazione lo si riesce a rendere una forma differenziale lineare esatta.

Uniciclo

Un uniciclo è un veicolo su una singola ruota orientabile. La sua configurazione è completamente descritta da un vettore di tre coordinate generalizzate

$$q(t) = [x(t), y(t), \theta(t)]^T$$

imponendo ad ogni istante di tempo che il vettore delle velocità non può contenere componenti nella direzione ortonormale all'asse sagittale della ruota, si ha il seguente vincolo cinematico

$$\dot{x}(t) \sin(\theta(t)) - \dot{y}(t) \cos(\theta(t)) = [\sin(\theta(t)) \quad -\cos(\theta(t)) \quad 0] \dot{q}(t) = 0$$

in maniera del tutto equivalente

$$\tan(\theta(t)) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

ma questo vincolo limita la mobilità locale o riduce la dimensione dello spazio delle configurazioni accessibili?

scegliamo come analisi all'integrabilità del vincolo , quella analitica

$$\dot{x}(t) \sin(\theta(t)) - \dot{y}(t) \cos(\theta(t)) = 0$$

ricordando che condizione necessaria all'integrabilità è

$$\frac{\partial(\gamma(q)a_i(q))}{\partial q_j} = \frac{\partial(\gamma(q)a_j(q))}{\partial q_i} \quad i \neq j$$

ammetta soluzione per $\gamma(q(t)) \neq 0$, si ottiene il seguente sistema di equazioni

$$\sin(\theta(t)) \frac{\partial \gamma}{\partial y} = -\cos(\theta(t)) \frac{\partial \gamma}{\partial x}$$

$$\cos(\theta(t)) \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \gamma \sin(\theta(t))$$

$$\sin(\theta(t)) \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = -\gamma \cos(\theta(t))$$

quadrando le ultime due equazioni

$$\cos^2(\theta(t)) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right)^2 = \gamma^2 \sin^2(\theta(t))$$

$$\sin^2(\theta(t)) \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right)^2 = \gamma^2 \cos^2(\theta(t))$$

sommando ambo i membri ,

$$\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} \right)^2 = \gamma^2$$

da cui si ottiene

$$\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \pm \gamma$$

per $\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \gamma$ si ha

$$\gamma \cos(\theta(t)) = \gamma \sin(\theta(t))$$

$$\gamma \sin(\theta(t)) = -\gamma \cos(\theta(t))$$

che ha come unica soluzione $\gamma = 0$. Nell'altro caso si ottiene il medesimo risultato , quindi se ne conclude la non integrabilità del vincolo cinematico

Modello Cinematico

Supponiamo che sul sistema meccanico agiscano k linearmente indipendenti vincoli cinematici in forma pfaffiana

$$A(q(t))^T \dot{q}(t) = 0$$

notiamo come il vettore delle coordinate generalizzate ad ogni istante / configurazione sia vincolato ad appartenere ad un ben determinato sottospazio

$$\dot{q}(t) \in \text{Ker} \left(A(q(t))^T \right), \dim \left(\text{Ker} \left(A(q(t))^T \right) \right) = n - k$$

sceita allora una base per $\text{Ker} \left(A(q(t))^T \right) := \text{span} \{ g_1(q), g_2(q), \dots, g_{n-k}(q) \}$

$$\dot{q}(t) = G(q(t))u$$

sistema dinamico non lineare , privo di deriva.

La scelta degli ingressi è arbitraria , ogni scelta per ogni opportuna base individuata. Per tale ragione a tale modello si associa il nome di **modello cinematico** del sistema meccanico.

nel caso dell'uniciclo abbiamo il solo vincolo cinematico non integrabile

$$a_i(q(t))^T \dot{q}(t) = [\sin(\theta(t)) \quad -\cos(\theta(t)) \quad 0] \dot{q}(t) = 0$$

sceita allora una base per $a_i(q(t))^T$

$$G(q(t)) = [g_1(q) \quad g_2(q)] = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

per come è stata scelta la base , divengono automaticamente definiti gli ingressi

$$\dot{q}(t) = G(q)u = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = \begin{cases} \dot{x}(t) = v(t)\cos(\theta(t)) \\ \dot{y}(t) = v(t)\sin(\theta(t)) \\ \dot{\theta}(t) = w(t) \end{cases}$$

abbiamo così ottenuto il modello cinematico per il nostro **uniciclo a trazione differenziale**.

Pianificazione del Moto

Supponiamo di voler guidare il nostro robot unicycle da una configurazione iniziale q_0 ad una configurazione finale q_f

Il problema della pianificazione potrebbe allora tradursi nello individuare una traiettoria , una curva $q(t)$ nello spazio delle configurazioni tale che

$$q(t_0) = q_0 , q(t_f) = q_f$$

Il problema non è così semplice , perché ad ogni istante di tempo dobbiamo tenere a mente la presenza di moti non ammissibili per l'unicycle.

Un modo per ottenere traiettorie ammissibili è quello di sfruttare le **uscite piatte dello unicycle**.

Ovvero la possibilità di ricostruire stato e ingressi del sistema a partire da misurazioni di un insieme di uscite.

Nel caso dello unicycle e suoi derivanti , trazione differenziale o sincrona , le uscite piatte sono proprio le coordinate cartesiane x , y .

Definito un cammino cartesiano $\{x_d(t), y_d(t)\}$, il vincolo non olonamico definisce direttamente la traiettoria di stato ad essa associata

$$q(t) = [x_d(t), y_d(t), \theta_d(t)]$$

con

$$\theta_d(t) = \text{atan}_2\left(\frac{\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)}\right) + k\pi$$

facendo riferimento al modello cinematico differenziale dello uniciclo

$$\begin{cases} \dot{x}_d(t) = v(t)\cos(\theta(t)) \\ \dot{y}_d(t) = v(t)\sin(\theta(t)) \\ \dot{\theta}_d(t) = w(t) \end{cases}$$

si ottengono facilmente per sostituzione gli ingressi di controllo

$$v(t) = \pm \sqrt{\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2}$$

$$w(t) = \frac{\ddot{y}_d(t)\dot{x}_d(t) - \ddot{x}_d(t)\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)^2 + \dot{y}_d(t)^2}$$

Tuttavia in questo modo abbiamo tralasciato un fatto molto importante , ovvero la presenza di ostacoli nell'ambiente.

Abbiamo determinato traiettorie e rispettivi ingressi di controllo nella ipotesi semplificativa che lo spazio di lavoro del robot sia libero.



In presenza di ostacoli nello spazio di lavoro del robot , diviene necessario generare un movimento che consenta al robot di eseguire la traslazione assegnata senza entrare in collisione con gli ostacoli.



Problema della Pianificazione Del Moto

Piano Movers' Problem

Consideriamo il nostro uniciclo U . Supponiamo per semplicità che lo spazio di lavoro coincida con il piano euclideo $W = R^2$.

Supponiamo che nello spazio di lavoro siano presenti k ostacoli O_1, O_2, \dots, O_k fissi in W

Inoltre, supponiamo a noi nota la posa del robot e degli ostacoli nello spazio di lavoro

Ipotesi Molto Importante!

Supponiamo che il robot sia in **moto libero**: ovvero supponiamo l'assenza di vincoli cinematici non integrabili.

Problema:

Data una postura iniziale q_0 una postura finale del robot q_f determinare se esiste un cammino, una successione di posture consecutive, che porti il robot da q_0 a q_f senza entrare in collisione con gli ostacoli presenti nello spazio di lavoro.

Uno schema efficiente per la pianificazione si ottiene rappresentando il robot come un punto materiale nello **spazio delle configurazioni**.

Al fine di escludere traiettorie di collisione , vengono riportati nello spazio delle configurazioni le immagini degli ostacoli presenti nello spazio di lavoro.

Ovviamente ad ogni configurazione in tale spazio corrisponderà una particolare postura nello spazio di lavoro.

Coordinate Generalizzate Uniciclo:

$$q(t) = [x(t) ; y(t) ; \theta(t)]$$

$\{ x(t) ; y(t) \}$ costituiscono le coordinate cartesiane
 $\{ \theta(t) \}$ costituisce le coordinate rotazionali

Indipendentemente dalla rappresentazione , le coordinate rotazionali assumono valori $SO(m)$, gruppo speciale ortonormale delle matrici reali. Una parametrizzazione minima necessita $\frac{m(m-1)}{2}$ parametri.

Nel nostro caso $W = R^2$, una sola coordinata rotazione $m = 2 \rightarrow$ parametrizzazione minima richiede esattamente 1 parametro $\theta(t)$.

Lo spazio delle configurazioni allora coinciderà con $C = R^2 \times SO(2)$ con dimensione 3

Come asserito in precedenza i cammini devono essere privi di collisione, di conseguenza è necessario riportare nello spazio delle configurazioni l'immagine degli ostacoli presenti nello spazio di lavoro : **C-obstacles**.

$$\forall O_i \in W$$

$$CO_i := \{ q \in C \mid B(q) \cap O_i \neq \emptyset \}$$

detta CO l'unione di tutti i C-ostacoli

$$CO = \bigcup CO_i$$

lo spazio libero delle configurazioni sarà dato da

$$C_{free} := C \setminus CO$$

La costruzione dei C-obstacles può essere così semplificata

Nel caso preso in esame $W = R^2$ ipotizzo che il robot sia una circonferenza



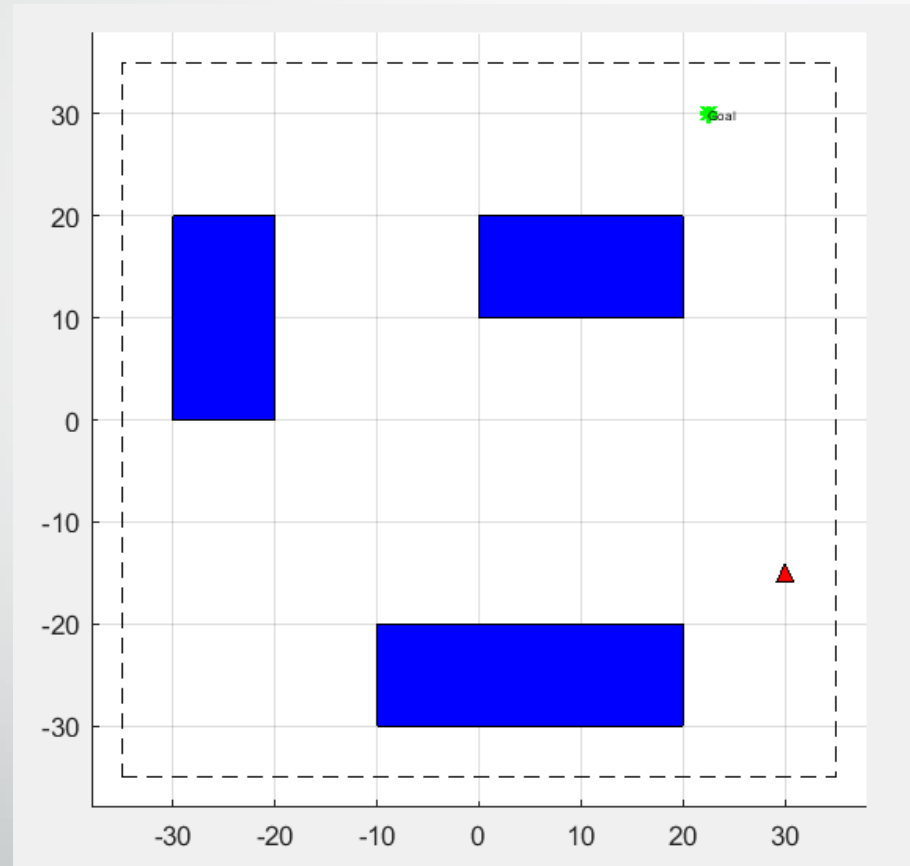
Lo spazio delle configurazioni **coincide** con lo spazio di Lavoro



La definizione dei **C-ostacoli** allora è molto semplice , ovvero la costruzione della loro immagine nello spazio di lavoro **si ottiene** per una semplice operazione di **accrescimento** in direzione radiale di una **distanza** pari al **raggio** della **circonferenza** contenente il nostro uniciclo a trazione differenziale.

Pianificazione Mediante Grafo Di Visibilità

Iniziamo la nostra discussione , definendo innanzitutto lo spazio di lavoro ed evidenziando la presenza di ostacoli nell'ambiente.

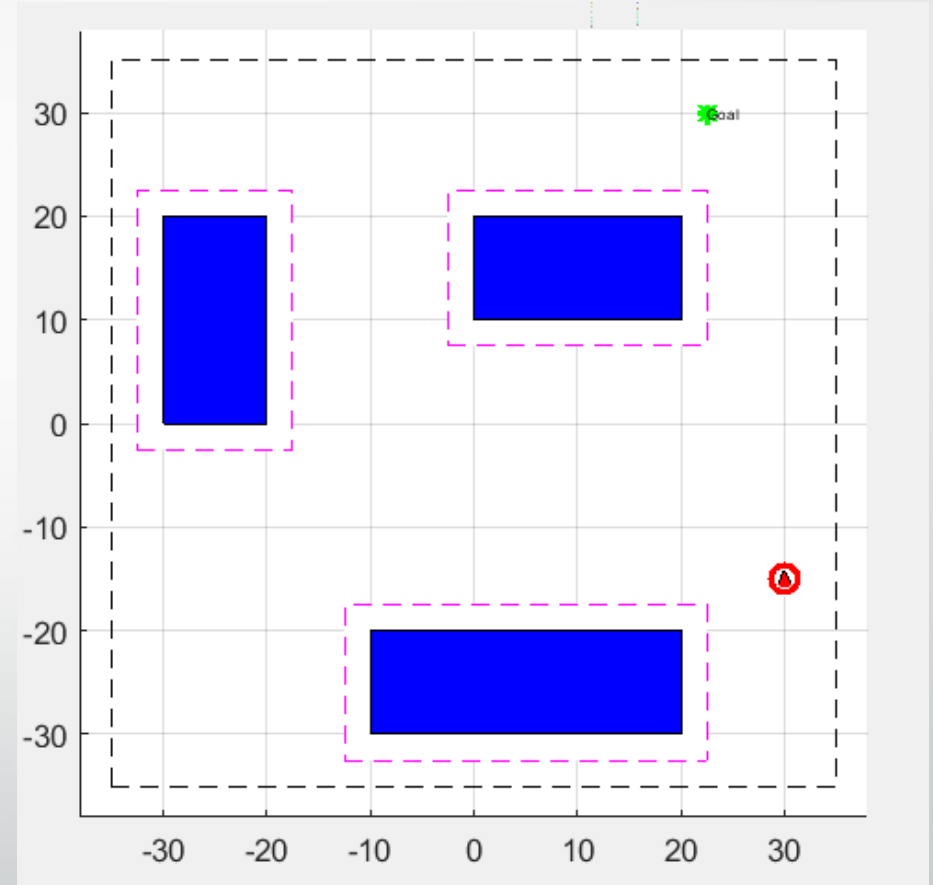


Ipotizzando di rappresentare il nostro robot con una circonferenza, lo spazio di lavoro e lo spazio delle configurazioni coincidono.

Ricordiamo come in questo caso la definizione dei **C-ostacoli** è relativamente semplice in quanto l'immagine nello spazio delle configurazioni è semplicemente ottenuta mediante una operazione di **accrescimento**.

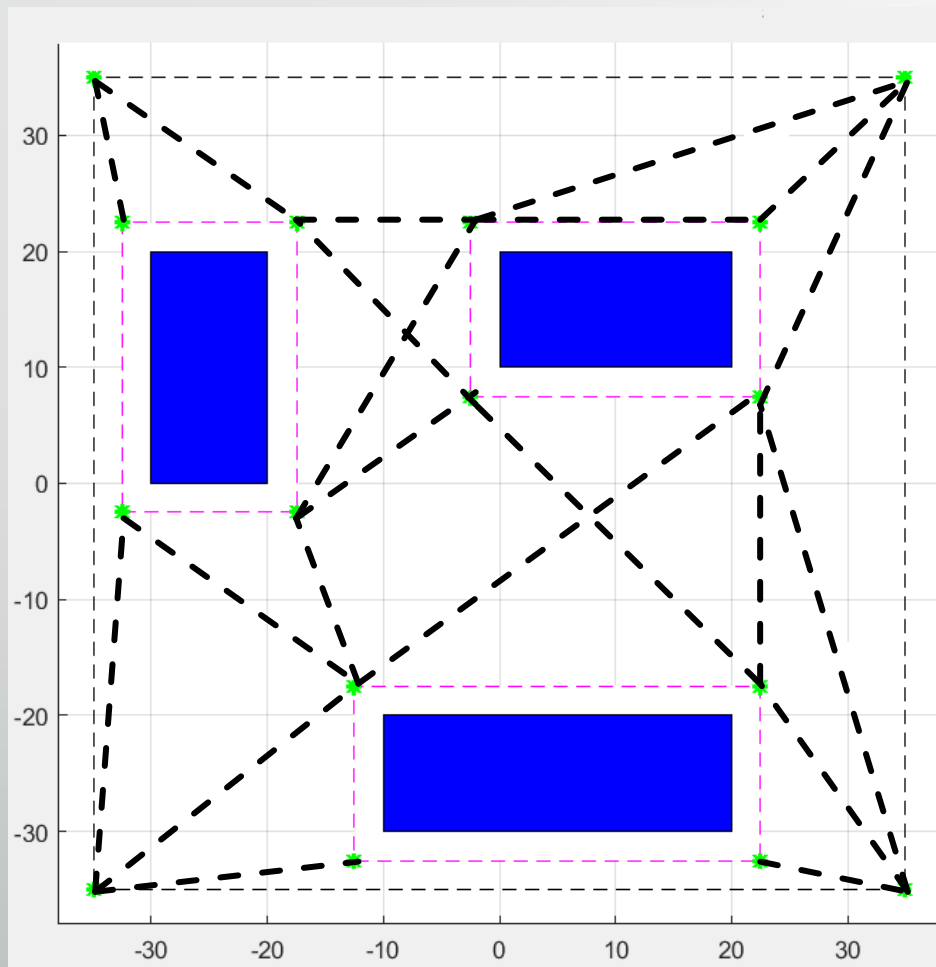
La frontiera di ogni ostacolo aumentato sarà per costruzione l'insieme delle configurazioni dello uniciclo in cui è in contatto con l'ostacolo stesso, e può essere costruita come la superficie descritta dal punto rappresentativo del robot (centro asse posteriore) quanto questo scorre sulla frontiera dell'ostacolo di partenza.

Ogni C-obstacle è costruito accrescendo l'ostacolo in partenza isotropicamente del raggio del robot.



Grafo di Visibilità

La filosofia principale è che se vedo quel punto allora posso raggiungerlo.



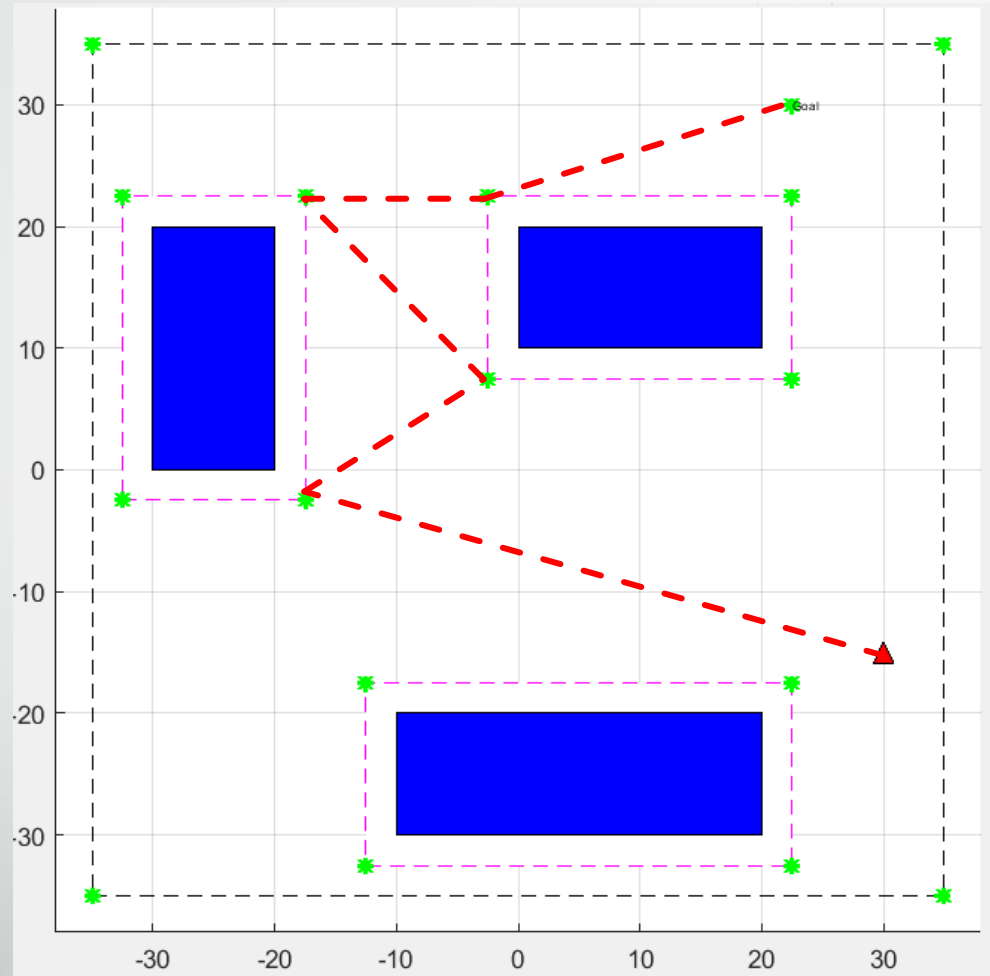
Identificati i vertici dell'ambiente e degli ostacoli , si vanno a tracciare tutti i segmenti che collegano un vertice ad un altro e non tagliano gli ostacoli.

Fatto ciò , il risultato è un grafo i cui nodi altro non sono che i vertici degli ostacoli e dell'ambiente e gli archi sono i segmenti che li collegano individuati in precedenza.

Quello che ci resta da fare è aggiungere al grafo di visibilità i nodi di inizio e di destinazione , tracciare ancora una volta i segmenti con vertici tali per cui non si hanno intersezioni con i C-obstacles.

Con l'introduzione di tale tecnica , allora il problema della pianificazione si è tradotto nella ricerca di un cammino su un grafo, problema di cui si conoscono molte soluzioni in merito.

Nella ipotesi in cui non si definisce una politica ottimale, tutti i cammini che conducono dal nodo di partenza a quello di destinazione sono fra loro equivalenti.



Come detto in precedenza , l'ipotesi che il robot sia in moto libero fa sì che i cammini così individuati possano non essere del tutto ammissibile per il nostro **differential drive**.

Si ricordi infatti che il vincolo cinematico **non olonamico** impone che in ogni configurazione , il vettore velocità non può avere componenti nella direzione normale all'asse saggittale , nota anche come **linea a spostamento nullo**.

Prendiamo ad esempio il percorso individuato dal metodo del grafo di visibilità. Il cammino così ottenuto è una serie di spezzate.

$$w(t) = \frac{\ddot{y}_d(t)\dot{x}_d(t) - \ddot{x}_d(t)\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)^2 + \dot{y}_d(t)^2}$$
$$v(t) = \pm \sqrt{\dot{x}_d^2 + \dot{y}_d^2}$$

Si noti appunto come tale equazioni non possano essere usate per definire la traiettoria desiderata.

Ad ogni punto di discontinuità , il robot si dovrebbe fermare e riorientarsi nella direzione della spezzata seguente.

Controllo Del Moto

Si ricordi sempre che le traiettoria individuate nella fase di pianificazione del moto sono state individuate sotto l'ipotesi semplificativa che il robot sia in moto libero.

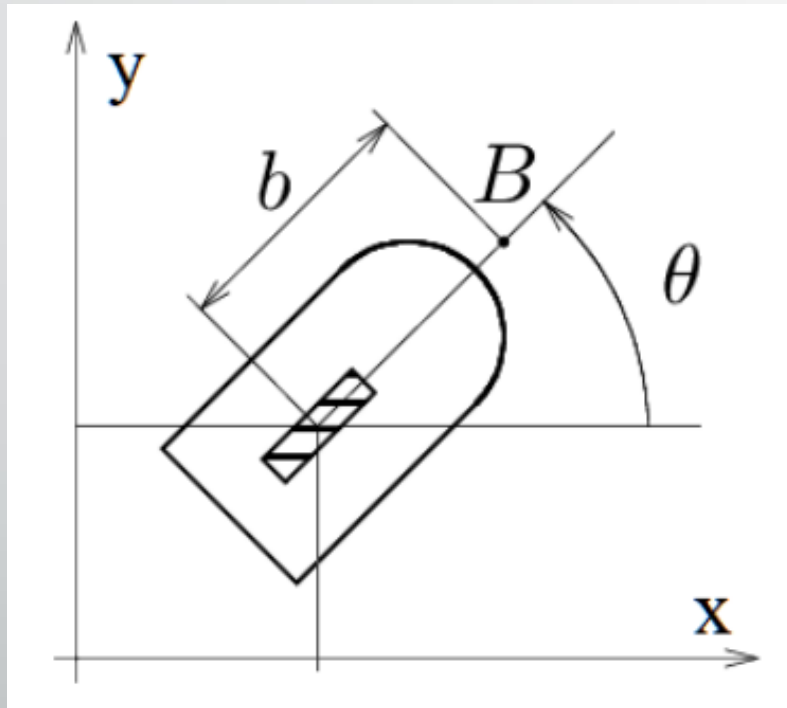
Tuttavia a lezione è stata presentata una tecnica di controllo straordinaria che ci viene in aiuto e risolve tutti i problemi di ammissibilità della traiettoria individuata: **feedback linearization**.

Con questa tecnica di controllo , la traiettoria cartesiana desiderata per il punto B sul robot può essere qualsiasi , può essere completamente arbitraria ed in particolare il cammino ad essa associato può presentare punti isolati di discontinuità per la tangente (spezzate) senza che sia necessario fermare e riorientare il robot in tali punti.

Motivo di ciò è che $b \neq 0$, ovvero la traiettoria non si applica al punto di contatto ruota suolo , la cui velocità come detto in precedenza non può avere componenti nella direzione ortonormale all'asse sagittale della ruota.

Feedback Linearization

Dalla teoria è noto che un approccio sistematico al progetto di controllori per l'inseguimento di traiettorie è quello basato sulla linearizzazione mediante retroazione.



si considerino le seguenti uscite

$$\begin{cases} y_1(t) = x + b \cos(\theta(t)) \\ y_2(t) = y + b \sin(\theta(t)) \end{cases}$$

con $b \neq 0$

Le derivate nel tempo di tali quantità risultano pari a

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & -b \sin(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) & b \cos(\theta(t)) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = T(\theta(t)) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix}$$

Si osservi come la matrice $T(\theta(t))$ risulta sempre invertibile indipendentemente dai valori di $\theta(t)$.

si consideri allora la seguente trasformazione di ingressi

$$\begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = T(\theta(t))^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) \\ -\frac{\sin \theta(t)}{b} & \frac{\cos(\theta(t))}{b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

segue immediatamente allora

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = T(\theta(t)) \begin{bmatrix} v \\ w \end{bmatrix} = T(\theta(t))T(\theta(t))^{-1} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

le equazioni dell'uniciclo diventano allora

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = & u_1 \\ \dot{y}_2 = & u_2 \\ \dot{\theta} = \frac{u_2 \cos(\theta) - u_1 \sin(\theta)}{b} \end{cases}$$

basta allora scegliere il controllore

$$\begin{cases} u_1 = \dot{y}_{1d} + k_1(y_{1d} - y_1) \\ u_2 = \dot{y}_{2d} + k_2(y_{2d} - y_2) \end{cases}$$

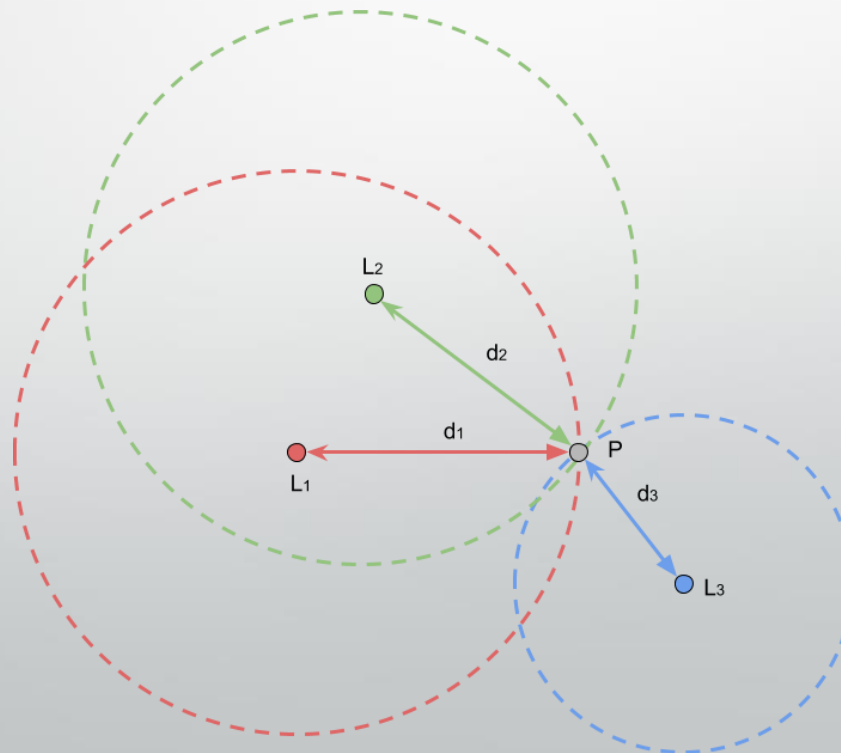
$$k_1 > 0, k_2 > 0$$

Positioning

L'implementazione di un qualsiasi controllore in retroazione richiede istante per istante la disponibilità della configurazione del robot. Nel nostro caso , istante per istante è richiesta la conoscenza della **posizione cartesiana** del robot nello spazio di lavoro.

E' necessario dunque **disporre** di una **procedura di localizzazione** , cioè di stima in tempo reale della posizione cartesiana dello uniciclo a trazione differenziale.

La tecnica di localizzazione scelta in questo progetto è la **Trilaterazione**.



come si nota nella slide precedente sono necessari almeno $N = 3$ Beacons per determinare la posizione del robot nel piano.

Siano $B_i(x_i, y_i)$ le posizioni note dei Beacons, e siano d_i le distanze misurate da ciascun Beacon

$$\begin{cases} ||P - B_1||_2 = d_1 \\ ||P - B_2||_2 = d_2 \\ \vdots \\ ||P - B_N||_2 = d_N \end{cases}$$

in particolare, detta $F : R^3 \rightarrow R^N$ e $D = [d_1, d_2, \dots, d_N]$ il problema può essere così riformulato

Determina P :

$$F(P) = D$$

Supponendo di avere una soluzione iniziale P_o e considerando lo sviluppo di Taylor di F nell'intorno di P_o

$$D = F(P) \cong F(P_o) + \frac{\partial F(P)}{\partial P} \Big|_{P=P_o} (P - P_o)$$

Proposizione

Si consideri il seguente sistema di equazioni

$$A x = b$$

nell'incognita $x \in R^n$.

Se Z è la pseduoinversa di Moore Penrose di A , $\forall b$ il vettore $x = Zb$ è, fra i vettori che minimizzano $\|Ax - b\|$, quello di norma minima.

Detta allora Z , la pseudoinversa di Moore Penrose di $\frac{\partial F(P)}{\partial P}$, abbiamo che

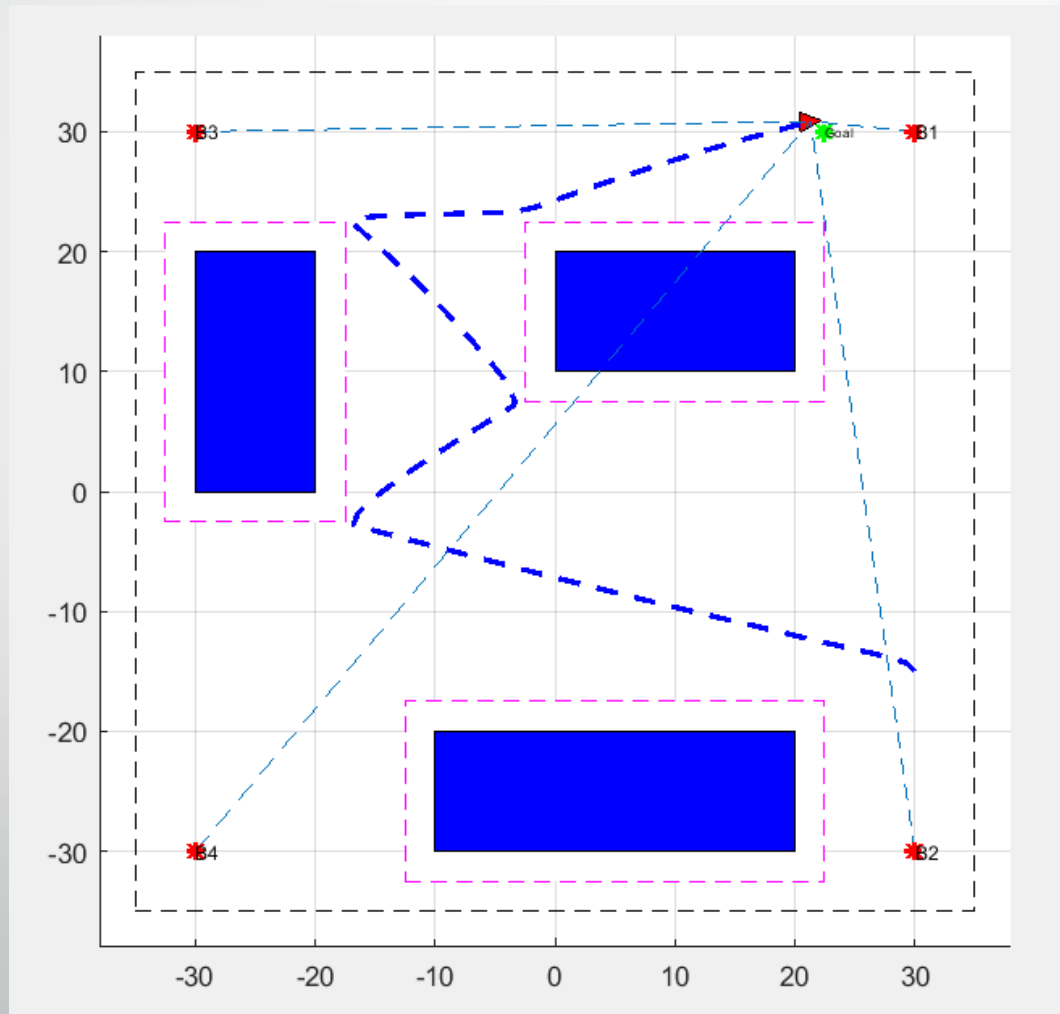
$$P \cong P_o + Z(D - F(P_o))$$

Ed abbiamo così ad ogni istante di tempo una stima della posizione cartesiana del nostro uniciclo.

Nel seguito ipotizzeremo di sporcare le misure provenienti dai Beacons, sommando alle distanze determinate un rumore.

Simulazione

Si riporta di seguito la simulazione del nostro uniciclo avendo scelto come controllore un feedback linearization e come tecnica di positioning la trilaterazione.



Riepilogo

Nella seguente presentazione abbiamo accennato alla modellazione alla pianificazione ed al controllo di un particolare robot mobile , l'uniciclo. In particolare abbiamo visto come la locomozione mediante le ruote introduce vincoli di natura non integrabili , andandone a limitare le traiettorie ammissibili. Fatto ciò siamo passati al problema della pianificazione , ed in particolare abbiamo visto come il problema della non ammissibilità delle traiettorie sia stato risolto scegliendo come controllo la linearizzazione mediante retroazione. Si è conclusa la sezione presentando una particolare tecnica di stima della posizione del robot , la trilaterazione mediante Beacons.

Riferimenti:

- Robotica , Bruno Siciliano , Giuseppe Oriolo , Terza Edizione , McGraw Hill
- MobileRobotics , Luigi D'Alfonso , Dimes Unical.
- Fusco , Marcellini , Sbordone , Analisi Matematica 2 , Liguori Editore