

Stima Ricorsiva Dello Stato

Tutti i controlli sviluppati nella sezione precedente , si fondando sulla ipotesi di una perfetta e completa conoscenza dell'intero stato del sistema ad ogni istante di tempo. Tuttavia , lo stato di un sistema dinamico , non sempre è completamente misurabile , a volte soltanto alcune delle componenti sono direttamente misurabili , altre invece no. Nasce allora il problema della stima asintotica dello stato del sistema a partire da misurazioni ingresso uscita. In particolare a partire dalla seguente rappresentazione in stato per sistemi lineari tempo invarianti

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

si ricordi come condizione necessaria e sufficiente all'esistenza di uno stimatore asintotico dello stato è che il sottospazio non osservabile della coppia di matrici (A, C) sia asintoticamente stabile (modi ad esso associati asintoticamente convergenti a zero). In particolare se la vedessimo in termini di sistemi duale , si ricordi come l'esistenza dello stimatore si traduce nella condizione di stabilizzabilità della coppia (A^T, C^T) .

Sebbene in linea teorica , un semplice stimatore di Luenberger del tipo

$$\dot{x}_s(t) = (A + LC)x_s(t) + Bu(t) - Ly(t)$$

con L guadagno dell'osservatore tale che il sistema

$$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t)$$

$e(t) = x(t) - x_s(t)$ sia asintoticamente stabile , sia sufficiente a risolvere il problema posto , in pratica , le misurazioni provenienti dai sensori di cui è equipaggiato il robot , sono soggette a rumori di misura.

Si consideri ad esempio il seguente problema , noto in letteratura con il nome di "Problema del Navigatore".

Esempio 4.1 (Problema del Navigatore)

Per stabilire la posizione in cui si trova , un navigatore invia dei segnali a due radiofari F_1, F_2 come illustrato dalla seguente figura.

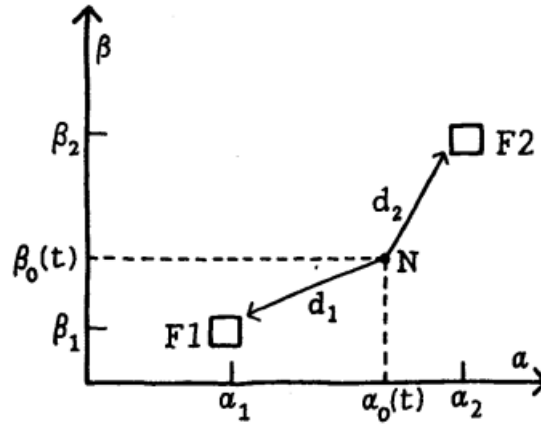


Figura 4.1 Segnali e RadioFari

Nota la posizione dei due radiofari , il navigatore cerca di stabilire la sua posizione sulla base dei tempi di andata e ritorno impiegati dai segnali nel tragitto navigatore – radiofaro e viceversa.

Se il navigatore è fermo , le distanze dai due radiofari $d_1(t), d_2(t)$ sono costanti. In particolare noti i tempi τ_i $i = 1,2$ di andata e ritorno dei due segnali , segue

$$\tau_i = \frac{2d_i(t)}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{(\alpha_i - \alpha_0)^2 + (\beta_i - \beta_0)^2} \quad i = 1,2$$

Queste due equazioni di carattere puramente algebrico , danno il legame tra osservazioni ed il vettore delle variabili incognite $\theta(t) = [\alpha_0; \beta_0]$. Il problema della stima richiede “semplicemente” la risoluzione delle precedenti equazioni rispetto alle due incognite α_0, β_0 .

Nella realtà però , il problema è molto più complesso , perché in generale misurazioni diverse portano a risultati diversi. Le sorgenti di incertezza nella misura , possono di fatto essere dovute a diversi fattori , quali ad esempio l'influenza sulla velocità di propagazione del segnale da parte delle condizioni atmosferiche.

Per tenere conto delle varie cause di incertezza , si può modificare la precedente espressione , introducendo un termine aggiuntivo

$$\tau_i = \frac{2d_i(t)}{c} + w_i(t) \quad i = 1,2$$

dove $w_i(t)$ rappresenta l'errore nella misura , che varia casualmente. Data la variabilità del rumore di misura , non noto a priori , al generico istante di tempo t , il valore assunto dalla variabile τ_i non può essere determinato in maniera univoca. Il particolare valore assunto dipenderà da una particolare condizione atmosferico , e quindi dal verificarsi o meno di un determinato evento.

Da questo punto di vista allora , la generica misura al tempo t , sarà modellata come una grandezza stocastica (variabile aleatoria) con una determinata distribuzione di probabilità. Più precisamente , data la dipendenza dal tempo , le misure saranno modellate mediante processi stocastici.

Come conseguenza , ad ogni istante di tempo ci si dovrà accontentare di un insieme di valori possibili per $\theta(t)$; la dispersione sarà legata all'entità dell'errore w_i .

La modellazione matematica di grandezze incerte , quali misurazioni, sarà fornita da tutti gli strumenti teorici messi a disposizione dall'Analisi Probabilistica.

Questo semplice esempio ci serve da introduzione al paragrafo successivo.

Robotica Probabilistica

La robotica probabilista tiene conto in maniera esplicita di eventuali incertezze sia nelle misure che nelle azioni del robot , sfruttando strumenti teorici della Analisi Probabilistica. Nella robotica probabilista quantità come misurazioni provenienti da sensori , azioni di controllo , e stati che il robot può assumere , sono modellati attraverso grandezze aleatorie. Le variabili aleatorie assumono valori continui e discreti in accordo a qualche legge probabilistica.

Al cuore della robotica probabilistica vi è l'idea di stimare lo stato di un sistema a partire da misure sensoriali. Data la natura incerta delle quantità in questione , il problema a cui cerca di

dare una soluzione , è di fatto un problema di inferenza probabilistica. Ovvero, il processo con cui si cerca di stimare le leggi di probabilità di alcune grandezze incerte a partire dalla conoscenza di altre grandezze aleatorie , quali ad esempio le misure sensoriali.

Ipoteticamente , un robot mobile potrebbe tenere traccia di tutte le informazioni passate. In particolare , un robot equipaggiato di sensori ha accesso a due particolari tipi di dati:

- **Sensor Data** : forniscono informazioni in merito ad un momentaneo stato dell'ambiente in cui il robot si trova. I dati sensoriali al tempo t saranno indicati con

$$z_t$$

In particolare la notazione

$$z_{t_1:t_2}$$

denoterà l'insieme delle informazioni sensoriali acquisite nell'intervallo temporale $[t_1; t_2]$.

- **Control Data** : le quali portano informazioni circa il cambiamento dello stato del robot. Nella robotica mobile , ma non solo , un tipico esempio di tali dati sono le velocità del robot. Il generico dato di controllo al tempo t sarà indicato con

$$u_t$$

mentre , con la notazione

$$u_{t_1:t_2}$$

faremo riferimento all'insieme dei dati di controllo acquisiti durante l'intervallo $[t_1; t_2]$.

Prima di passare alla caratterizzazione delle leggi probabilistiche che regolano l'evoluzione dello stato e delle misure , diamo dapprima la nozione di completezza dello stato.

Definizione (Completezza)

Uno stato x_t è definito completo , se informazioni addizionali riguardanti stati passati , misure e dati di controllo , non portano nessuna informazione aggiuntiva che dovrebbe aiutarci nel predire lo stato futuro più accuratamente.

Processi temporali che danno per buona la precedente definizione sono meglio conosciuti come processi di Markov.

Come già asserito in precedenza , lo stato e le misure saranno rappresentate attraverso variabili aleatorie. Si ricordi che il comportamento di una grandezza aleatoria è completamente descritto a partire dalla sua funzione densità. Di seguito si parlerà arbitrariamente di densità e di funzione di distribuzione o di ripartizione di probabilità , tuttavia si ricordi che non vi è assoluta differenza , in quanto la seconda è la primitiva della prima.

In particolare di seguito, l'evoluzione dello stato sarà fatta dipendere da tutte le misurazioni passate , di fatto dunque , l'evoluzione sarà governata da una densità di probabilità condizionata del tipo

$$p(x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

Tuttavia però , se x_t è completo , allora segue immediatamente dalla definizione di completezza che

$$p(x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_t | x_{t-1}, u_t)$$

nota in letteratura con il nome di "state – transition – probability". Come possiamo notare , specifica come lo stato evolve in funzione del controllo u_t .

Allo stesso modo , essendo le misurazioni quantità incerte , aleatorie , a senso specificare per tali grandezze leggi probabilistiche che ne caratterizzano completamente l'evoluzione. In particolare ancora una volta , come nel caso precedente , condizioneremo la generica misura al tempo t alle

informazioni passate , di fatto dunque , l'evoluzione sarà governata da una densità del tipo

$$p(z_t | x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

assunta ancora una volta valida l'ipotesi di completezza dello stato , si ha

$$p(z_t | x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(z_t | x_t)$$

nota come “measurement – probability “. Lo stato x_t è dunque sufficiente per predire la misurazione z_t .

Note queste due leggi probabilistiche condizionali , esse come già anticipato , descrivono completamente l'evoluzione del sistema dinamico stocastico del robot e del suo ambiente.

Un altro concetto chiave della robotica probabilistica è quello della “belief”. La belief di fatto riflette la conoscenza interna del robot del suo stato. Più precisamente

$$bel(x_t) = p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t})$$

modella dunque la probabilità a posteriori sullo stato del sistema condizionata alle misure passate disponibili.

In particolare si noti come dalla precedente definizione , la probabilità a posteriore è fatta dipendere dalle misure raccolte dai sensori sullo stato dell'ambiente fino al tempo t , ovvero dipende da z_t .

Nella pratica , si preferisce dapprima calcolare la probabilità a posteriori prima della misura z_t , subito dopo aver applicato l'azione di controllo u_t

$$\overline{bel}(x_t) = p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

Questa distribuzione di probabilità di fatto rappresenta una **predizione** sullo , prima dell'arrivo delle misure.

La presa in considerazione della misura z_t , e quindi, il calcolo di $bel(x_t)$ a partire da $\overline{bel}(x_t)$, costituisce la **correzione** alla predizione.

Il tutto sarà chiarito meglio nel seguito, con l'introduzione dei filtri Gaussiani, dove appunto si mostrerà come l'ultima misura verrà utilizzata per correggere la predizione sullo stato futuro del robot fornitaci dall'odometria.

Date queste definizioni, siamo pronti per introdurre il famoso Filtro di Bayes.

Filtro Di Bayes

L'algoritmo più generale per il calcolo della belief, è dato dal Filtro di Bayes. L'algoritmo determina la $bel(x_t)$ a partire dai dati sensoriali e di controllo.

Più precisamente, il filtro bayesiano è un algoritmo di stima probabilistico ricorsivo, nel senso che la belief $bel(x_t)$ al tempo t verrà calcolata sulla base della belief $bel(x_{t-1})$ al tempo $t - 1$.

Nel derivare tale algoritmo, seguiamo un approccio costruttivo.

L'obiettivo è determinare

$$bel(x_t) = p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t})$$

sfruttando la ben nota regola di Bayes

$$p(x | y, z) = \frac{p(y | x, z) p(x | z)}{p(y | z)}$$

la belief al tempo t può essere così riscritta

$$\begin{aligned} p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t}) &= \frac{p(z_t | x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})}{p(z_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})} = \\ &= \eta p(z_t | x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t}) \end{aligned}$$

sfruttando ancora una volta l'ipotesi di completezza dello stato , si ottiene

$$p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t}) = \eta p(z_t | x_t) p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

ed in accordo a tutte le considerazioni fatte il merito al concetto di belief , si ha

$$bel(x_t) = \eta p(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t)$$

che rappresenta appunto la correzione alla predizione attraverso la misura z_t .

Il passo successivo richiede l'utilizzo di un ben noto risultato del calcolo probabilistico : il teorema della probabilità totale. Ricordando appunto come una grandezza aleatoria assume ad ogni istante di tempo uno ed un solo valore (sistema di alternative), si ha

$$\overline{bel}(x_t) = p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

$$= \int p(x_t | x_{t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_{t-1} | z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) dx_{t-1}$$

sfruttando ancora una volta l'ipotesi di Markov , si ottiene

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t | x_{t-1}, u_t) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

concludendo così la dimostrazione del famoso algoritmo di Bayes per la stima ricorsiva della belief.

Si riporta dunque di seguito il Filtro Bayesiano , la cui correttezza è stata verificata in precedenza.


```

1:   Algorithm Bayes_filter(bel( $x_{t-1}$ ),  $u_t$ ,  $z_t$ ):
2:     for all  $x_t$  do
3:        $\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t \mid u_t, x_{t-1}) \overline{bel}(x_{t-1}) dx$ 
4:        $bel(x_t) = \eta p(z_t \mid x_t) \overline{bel}(x_t)$ 
5:     endfor
6:     return bel( $x_t$ )

```

Come detto in precedenza e come mostrato dall'algoritmo qui sopra riportato, il Filtro di Bayes consiste di fatto in due step: una fase di **predizione** ed una di **correzione**.

Per calcolare la belief ricorsivamente, l'algoritmo richiede una distribuzione iniziale $bel(x_0)$. Se uno è interamente ignaro del valore iniziale di x_0 , $bel(x_0)$ potrebbe essere inizializzata attraverso una distribuzione uniforme di probabilità. Conoscenze parziali su x_0 si traducono, naturalmente, attraverso distribuzioni non uniformi.

Filtri Gaussiani

Questo paragrafo descrive una famiglia molto importante di stimatori ricorsivi dello stato, i filtri Gaussiani. Storicamente i filtri gaussiani costituiscono la prima implementazione trattabile del filtro di Bayes per grandezze aleatorie continue.

Le tecniche gaussiane condividono tutte la stessa ipotesi, è cioè che le distribuzioni di probabilità

$$bel(x_t) = p(x_t \mid z_{1:t}, u_{1:t})$$

siano delle distribuzioni normali multivariate, cioè

$$p(x) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right\}$$

si noti come la densità precedente sia completamente caratterizzata da due fattori, la matrice di covarianza Σ e il vettore valore atteso μ .

L'implementazione più nota del filtro Bayesiano è di certo il Filtro di Kalman.

Filtro Di Kalman

L'invenzione del Filtro di Kalman risale al 1950 , grazie al lavoro di Rudolf Kalman, come strumento per la risoluzione di problemi di filtraggio e stima nel caso di sistemi lineari.

Il Filtro di Kalman , usa una rappresentazione a momenti della belief. Al generico istante di tempo t , la belief è rappresentata per mezzo del suo valore atteso (vettore) μ_t e dalla sua matrice di covarianza Σ_t .

L'ipotesi alla base della Teoria Di Kalman , è che le dinamiche dello stato del processo nonché le misurazioni , siano lineari Gaussiane , ovvero : lineari nei loro argomenti con un rumore Gaussiano additivo.

Nel proseguo , ipotizzeremo che il nostro fenomeno sia rappresentato nello spazio di stato dal seguente modello tempo discreto

$$\begin{aligned}x_t &= A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t \\z_t &= C_t x_t + \delta_t\end{aligned}$$

con

- ε_t vettore aleatorio Gaussiano , modellante la randomicità nella transizione di stato , con valore atteso e matrice di covarianza rispettivamente date da

$$\begin{aligned}E[\varepsilon_t] &= 0 \\E[\varepsilon_t \varepsilon_t^T] &= R_t\end{aligned}$$

- δ_t descrivente il rumore di misura al tempo t , caratterizzato da una distribuzione normale multivariata con media e matrice di covarianza rispettivamente date da

$$\begin{aligned}E[\delta_t] &= 0 \\E[\delta_t \delta_t^T] &= Q_t\end{aligned}$$

Dalle precedenti ipotesi , segue che

$$p(x_t | x_{t-1}, u_t)$$

è una distribuzione normale multivariata , ovvero

$$p(x_t | x_{t-1}, u_t) = (2\pi R_t)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t))^T R_t^{-1} (x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t)) \right\}$$

con media $A_t x_{t-1} + B_t u_t$ e matrice covarianza R_t .

Allo stesso modo , la “measurement – probability” ,

$$p(z_t | x_t)$$

sarà caratterizzata da una densità di probabilità della forma

$$p(z_t | x_t) = (2\pi Q_t)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (z_t - C_t x_t)^T Q_t^{-1} (z_t - C_t x_t) \right\}$$

di media $C_t x_t$ e matrice di covarianza Q_t .

Con l'ulteriore ipotesi che la distribuzione iniziale sia gaussiana ,
ovvero

$$bel(x_0) = (2\pi \Sigma_0)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_0 - \mu_0)^T \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0) \right\}$$

, si può dimostrare come tali assunzioni siano sufficienti a garantire che ad ogni generico istante temporale t la distribuzione

$$bel(x_t)$$

è una distribuzione normale multivariata.

Avendo scelto come rappresentazione , una rappresentazione a momenti , il filtro di Kalman , sarà un algoritmo di stima ricorsiva che ci fornirà ad ogni iterazione media e covarianza di $bel(x_t)$ in funzione dei momenti di $bel(x_{t-1})$.

```

1:      Algorithm Kalman_filter( $\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$ ):
2:           $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$ 
3:           $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$ 
4:           $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$ 
5:           $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$ 
6:           $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$ 
7:          return  $\mu_t, \Sigma_t$ 

```

Notiamo ancora una volta nel precedente algoritmo una fase di predizione ed una di correzione. Nei passi 2 e 3 dell'algoritmo vengono determinati i momenti $\bar{\mu}_t$ e $\bar{\Sigma}_t$ della belief $\overline{bel}(x_t)$ sulla base dell'azione di controllo u_t . In particolare si noti come la media è aggiornata considerando la funzione di transizione di stato deterministica. Nei passi 5 , 6 la $\overline{bel}(x_t)$ è trasformata nella belief desiderata $bel(x_t)$ sfruttando la misura al tempo t, z_t .

Maggiore attenzione deve essere rivolta alla differenza al passo 5

$$e_t = z_t - C_t \bar{\mu}_t$$

l'**innovazione** , rappresenta tutto ciò che non siamo riusciti a predire su z_t a partire dalla predizione $\bar{\mu}_t$. Di fatto rappresenta il reale contenuto informativo innovativo portato dalla misura z_t .

Al passo 4 dell'algoritmo viene determinato il Guadagno del Filtro o **Guadagno di Kalman**. In particolare come messo in evidenza nella equazione successiva, pesa in un certo modo il grado in cui la misura influenza la stima finale.

Ma cerchiamo di fare un po' di chiarezza prima di proseguire con l'introduzione del Filtro di Kalman Esteso.

Fino a questo punto l'obiettivo è stato quello di stimare quantità incerte , lo stato del sistema , a partire da grandezze incerte , quali misure sensoriali e dati di controllo.

Per dare un significato alle equazioni caratterizzanti la soluzione di Kalman al problema della stima, cerchiamo di dare una risposta al seguente quesito:

“Data una grandezza incerta X chi è il miglior stimatore della grandezza stessa”.

Per rispondere alla domanda precedente , bisogna dapprima stabilire che cosa intendiamo per miglior stimatore. Ricordiamo come oltre al fatto che uno stimatore debba essere baricentrato sulla quantità da stimare (condizione di non polarizzazione) , di fatto lo stimatore ottimo di una grandezza incerta è quello la cui dispersione delle sue realizzazioni intorno alla sua media è minima: cioè , lo stimatore a minima varianza.

Chiarito questo concetto , ci chiediamo allora

“Data una grandezza incerta X chi è per X lo stimatore a minima varianza”.

Con riferimento a variabili scalari , il problema sopra posto è di fatto del tutto equivalente alla ricerca della costante c tale per cui la seguente quantità

$$E[(X - c)^2]$$

sia minima.

Con un po' di ricordi verso l'analisi matematica , la costante cercata è soluzione di

$$\frac{\partial E[(X - c)^2]}{\partial c} = 0$$

cioè , ricordando la linearità dell'operatore valore atteso ,

$$c = E[X].$$

Queste semplici considerazioni di carattere analitico ci danno la possibilità di concludere che il miglior stimatore , nel senso dello scarto quadratico medio , per una grandezza incerta X è il suo valore atteso.

La varianza , ci fornisce informazioni sull'errore , di fatto sulla dispersione delle possibili realizzazioni intorno alla sua media. Di fatto però essendo quadratica non è direttamente confrontabile con X , $E[X]$. Per tale ragione si introduce la radice della varianza , nota come deviazione standard σ_x .

Alla luce delle precedenti considerazioni , possiamo concludere che , data una grandezza incerta X , possiamo scrivere

$$X = E[X] \pm \sigma_x$$

nel senso che data X , possiamo approssimarla con il suo valore atteso $E[X]$ con delle oscillazione che sono più o meno dell'ordine della deviazione standard.

Però , nei problemi di inferenza probabilistica ciò che si cerca di fare , come ribadito in precedenza , è cercare di stimare quantità incerte a partire da altre grandezza incerte , i dati provenienti ad esempio dai sensori.

In questo lo stimatore della grandezza incerta sarà funzione dei dati

$$\hat{\theta} = h(d)$$

è sarà tanto migliore quanto più la variabile $\hat{\theta}$ sarà vicina alla variabile causale θ da stimare. Ancora una volta lo stimatore che stiamo cercando è quello tale per cui

$$E \left[(\theta - h(d))^2 \right]$$

sia minima. Si può dimostrare che tale stimatore esiste , noto in letteratura come stimatore Bayesiano , ed è

$$E[\theta | d = x]$$

il valore atteso condizionato al fatto che le misure abbiano assunto il particolare valore x .

Si può dimostrare , senza scendere troppo nei dettagli , come nel caso in cui l'incognita nonché i dati siano congiuntamente gaussiani , lo stimatore Bayesiano è dato da

$$\hat{\theta} = \theta_m + \frac{\lambda_{\theta d}}{\lambda_{dd}}(d - d_m)$$

con $\theta_m = E[\theta]$, $d_m = E[d]$. Nel caso vettoriale ,

$$\hat{\theta} = \theta_m + \Lambda_{\theta d} \Lambda_{dd}^{-1}(d - d_m)$$

Tutto ciò perché si può verificare che le precedenti equazioni del Filtro di Kalman , altro non sono che una versione ricorsiva dello stimatore precedente.

Alla luce di tutte queste considerazioni possiamo allora dare una interpretazione ai momenti dati in output dall'algoritmo. Ad ogni iterazione ciò che ci restituisce il Filtro di Kalman è (nell'ipotesi di Gaussianità) la migliore stima sulla grandezza incerta , nonché l'errore commesso nell'approssimarla con il suo valore atteso.

Per una maggiore comprensione su ciò che da in output il Filtro di Kalman , riscriviamo il precedente algoritmo come segue

$$\begin{aligned}\hat{x}_t &= A_t x_{t-1} + B_t u_t && (prediction) \\ \hat{\Sigma}_t &= A_t \Sigma_t A_t^T + R_t \\ K_t &= \hat{\Sigma}_t C_t^T (C_t \hat{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1} && (kalman \ gain) \\ x_t &= \hat{x}_t + K_t (z_t - C_t \hat{x}_t) && (correction) \\ \Sigma_t &= (I - K_t C_t) \hat{\Sigma}_t\end{aligned}$$

In particolare si noti come la predizione sulla grandezza di stato a partire dalle azioni di controllo (odometria) sia fatta sulla base del modello di transizione di stato privo di incertezza.

Filtro di Kalman Esteso

L'ipotesi alla base della derivazione del filtro di Kalman è che il fenomeno sia caratterizzato da una rappresentazione in stato , in cui sia la funzione di transizione che di misura sono lineari nei loro argomenti con l'aggiunta di un rumore gaussiano.

Tuttavia , questa assunzione è raramente soddisfatta nella pratica. Ad esempio la caratterizzazione del moto di un robot su una traiettoria circolare passa attraverso l'impiego di funzioni trascendenti , non lineari.

Queste limitazioni , rendono il tradizionale Filtro di Kalman applicabile ad un numero estremamente ridotto di situazioni pratiche.

Il **Filtro di Kalman Esteso** (EKF) , elimina una delle precedenti assunzioni : la linearità.

Quindi da ora in poi prenderemo in considerazione fenomeni la cui funzione di transizione nonché di misura siano non lineari nei loro argomenti

$$x_t = g(x_{t-1}, u_t) + \varepsilon_t$$

$$z_t = h(x_t) + \delta_t$$

la funzione $g(\cdot, \cdot)$ rimpiezerà il ruolo delle matrici A_t, B_t mentre $h(\cdot)$ giocherà il ruolo della matrice C_t .

L'idea chiave dietro il Filtro di Kalman Esteso è la linearizzazione, in particolare lo EKF, sfrutta l'espansione in serie di Taylor delle precedenti funzioni arrestato al primo ordine.

Fatto ciò, è di fatto possibile riapplicare tutta la teoria vista in precedenza con riferimento al tradizionale Filtro di Kalman per sistemi lineari Gaussiani.

Tuttavia si ricordi come lo EKF è di fatto ottenuto considerando le linearizzazioni delle seguenti funzioni

$$g(x_t, u_t)$$

$$h(x_t)$$

in corrispondenza all'ultima stima effettuata dello stato, μ_{t-1} .

Si riportano di seguito, per il sistema preso in considerazione, le equazioni caratterizzanti il Filtro di Kalman Esteso

```

1:      Algorithm Extended_Kalman_filter( $\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$ ):
2:           $\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$ 
3:           $\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$ 
4:           $K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$ 
5:           $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - h(\bar{\mu}_t))$ 
6:           $\Sigma_t = (I - K_t H_t) \bar{\Sigma}_t$ 
7:          return  $\mu_t, \Sigma_t$ 

```

E notiamo subito la differenza principale. Si noti appunto come in questo caso le predizioni sullo stato, nonché le misurazioni sono valutate a partire dalle funzioni non lineari caratterizzanti la rappresentazione in stato del fenomeno in esame.

	Kalman filter	EKF
state prediction (Line 2)	$A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$	$g(u_t, \mu_{t-1})$
measurement prediction (Line 5)	$C_t \bar{\mu}_t$	$h(\bar{\mu}_t)$

Tuttavia c'è da ricordare che avendo considerato delle linearizzazioni , e quindi di fatto delle approssimazioni delle precedenti funzioni , le densità così ottenute

$$p(x_t | x_{t-1}, u_t)$$

$$p(z_t | x_t)$$

non sono le vere distribuzioni a posteriori , ma di fatto ne costituiscono una approssimazione.

Il Filtro di Kalman Esteso alla fine , determina soltanto una approssimazione della vera belief

$$bel(x_t)$$

Ultimo cosa da prendere in considerazione sulla soluzione dello EKF , riguarda la convergenza del filtro. Avendo troncato la serie di Taylor al primo ordine, abbiamo perso tutte le proprietà del Filtro di Kalman. A conti fatti non esiste nessuna garanzia di convergenza del filtro , nessuno ci garantisce che l'innovazione tende al rumore di misura.

Localizzazione Odometrica

Si ricordi come il filtro di stima ricorsivo Bayesiano sia caratterizzato da due fasi principali : una di predizione a partire dai dati controllo ed una di correzione sulla base dell'ultima misura ricevuta.

In particolare nella fase di predizione , si cerca a partire dall'ultima stima e dall'azione di controllo

$$\mu_{t-1}, u_t$$

di determinare l'evoluzione dello stato del nostro sistema un passo in avanti.

Spostiamoci ora dal caso generale al particolare. Il robot a cui stiamo facendo riferimento è un unicycle a trazione differenziale , la cui modellazione nello spazio di stato è

$$\dot{x}(t) = v_t \cos(\theta(t))$$

$$\dot{y}(t) = v_t \sin(\theta(t))$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega_t$$

con $q(t) = [x(t), y(t), \theta(t)]^T$ vettore delle coordinate generalizzate caratterizzante la configurazione del robot al tempo t .

Si consideri a tal proposito un unicycle a trazione differenziale che si muove sotto l'azione di un sistema di controllo digitale , tale per cui i comandi di velocità sia di trazione che di orientamento rimangano costanti all'interno del periodo di campionamento T_s .

Supponendo di conoscere la configurazione corrente del robot al tempo t , $q(t) = q_t$, e noti i comandi di velocità sull'intervallo $[t, t + 1)$, il valore delle variabili di configurazione al tempo $t + 1$, $q(t + 1) = q_{t+1}$, può essere ottenuto per integrazione in avanti del modello cinematico

$$x_{t+1} = x_t + v_t T_s \cos(\theta_t)$$

$$y_{t+1} = y_t + v_t T_s \sin(\theta_t)$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + T_s \omega_t$$

Tuttavia si noti come l'utilizzo del metodo di Eulero in avanti per l'integrazione numerica presuppone che l'orientamento del veicolo nell'intervallo di tempo $[t, t + 1]$ rimane costante.

Se l'accuratezza del metodo di Eulero risulta inadeguata , si può utilizzare a parità del tempo di campionamento T_s , la seguente stima

$$x_{t+1} = x_t + v_t T_s \cos\left(\theta_t + \frac{\omega_t T_s}{2}\right)$$

$$y_{t+1} = y_t + v_t T_s \sin\left(\theta_t + \frac{\omega_t T_s}{2}\right)$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + T_s \omega_t$$

che corrisponde all'utilizzo del metodo di Runge-Kutta del secondo ordine per l'integrazione numerica. Si noti come ora nelle prime due equazioni compare l'orientamento medio dell'uniciclo nell'intervallo di campionamento.

Nelle formule precedenti , tuttavia si è assunto di disporre degli ingressi v_t, ω_t applicati durante l'intervallo di campionamento. Vista la non idealità di qualunque sistema di attuazione , in pratica piuttosto che utilizzare i valori di comando , conviene ricostruire tali valori sulla base di sensori propriocettivi.

Ipotizzando che il robot sia dotato di encoder ottici , è possibile ottenere la variazione angolare delle due ruote su tutto il periodo di campionamento

$$\Delta\phi_R, \Delta\phi_L$$

a partire dalla conoscenza di tali quantità è possibile stabilire il valore di

$$v_t = \frac{\Delta s}{T_s}, \omega_t = \frac{\Delta\theta}{T_s}$$

con

$$\Delta s = \frac{r}{2}(\Delta\phi_R + \Delta\phi_L), \Delta\theta = \frac{r}{d}(\Delta\phi_R - \Delta\phi_L)$$

L'integrazione in avanti del modello cinematico sulla base dei comandi di velocità ricostruiti a partire dalle misurazioni provenienti dai sensori propriocettivi viene definita localizzazione odometrica o passiva o dead reckoning.

Questa tecnica , ovviamente fornisce dei risultati poco attendibili sulla stima dello stato del processo , in quanto ricordiamolo è sempre basato su tecniche di integrazione numeriche. Indipendentemente dal tipo di integrazione utilizzato , l'odometria è soggetta in pratica a un errore che si accumula del tempo (deriva) e diviene non trascurabile su percorsi abbastanza lunghi.

Una soluzione a questo problema è offerta dal Filtro di Kalman (localizzazione attiva) , il quale cerca di correggere la stima passiva a partire dal confronto tra le misurazioni attese (basate sulle predizioni) e quelle effettivamente rilevate da sensori eterocettivi. La differenza tra queste due quantità costituisce quella che in precedenza è stata definita innovazione.

