

## Modellazione e Controllo

In questa sezione ci proponiamo di derivare , mediante semplici considerazioni di carattere geometrico , il modello matematico associato al robot a cui intendiamo applicare un controllo , un unicycle a trazione differenziale. In particolare prima di passare all'esempio specifico , faremo una serie di considerazioni a carattere del tutto generale , applicabili di fatto a qualsiasi sistema meccanico soggetto a vincoli.

Supponiamo a tal proposito , di considerare un sistema meccanico soggetto a  $k$  vincoli cinematici in forma Pfaffiana

$$a_i(q(t))^T \dot{q}(t) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

o , in forma matriciale

$$A^T(q(t))\dot{q}(t) = 0$$

I campi  $h_i: \mathcal{C} \rightarrow R^n$  vengono assunti essere di classe  $C^\infty$  e linearmente indipendenti.

Avendo ipotizzato che i campi siano fra loro linearmente indipendenti , notiamo come ad ogni istante di tempo , il precedente set di equazioni definisce il sottospazio  $n - k$  dimensionale a cui il vettore delle velocità generalizzate deve appartenere , ovvero , il sottospazio nullo della matrice  $A(q(t))^T$

$$\text{Ker} \left( A(q(t))^T \right)$$

Con un po' di ricordi verso l'algebra lineare , scelta allora una base per il nullo

$$\text{Ker} \left( A(q(t))^T \right) = \text{span} \left( g_1(q(t)), g_2(q(t)), \dots, g_{n-k}(q(t)) \right)$$

il vettore delle velocità dovrà allora esprimersi come combinazione lineare della base precedente, e quindi di fatto , possiamo definire le traiettorie ammissibili per il nostro sistema meccanico come le soluzioni del seguente sistema differenziale

$$\dot{q}(t) = G(q(t))u = \sum_{i=1}^{n-k} g_i(q(t))u_i$$

Si noti , come dando a  $u$  , l'interpretazione di ingresso per il sistema vi è l'assenza di deriva (driftless system) in quanto  $\dot{q}(t) = 0$  , quando l'ingresso è nullo. Potremmo di fatto interpretare l'assenza di deriva come l'assenza di una dinamica libera in un generico sistema dinamico.

Dall'algebra è noto che la scelta della base per un generico spazio non è unica , di fatto a diverse scelte della base corrispondono diverse rappresentazioni del vettore delle velocità , ovvero diversi valori per il vettore  $u$ . Di fatto , dunque , il vettore  $u$  potrebbe non essere direttamente legato alle cause che generano il moto (forze generalizzate) , ed è per questa ragione che al precedente modello si associa il nome di modello cinematico per il sistema meccanico. Infatti , in funzione della base scelta , il precedente modello potrebbe fornire soltanto una descrizione geometrica dei moti ammissibili, senza però mettere in relazione gli effetti con le cause che li generano.

Oltre che alla definizione dei moti istantaneamente ammissibili , il precedente sistema può di fatto essere utilizzato per studiare il carattere olonomo o meno dei vincoli a cui il sistema è soggetto. La olonomia , infatti può essere stabilita studiando la controllabilità / raggiungibilità del precedente sistema.

Dalla Teoria dei Sistemi Dinamici , si ricordi infatti come la raggiungibilità è una proprietà direttamente legata all'insieme degli stati raggiungibili per applicazione di ingressi ammissibili a partire da una generica condizione iniziale. Di fatto dunque se il sistema

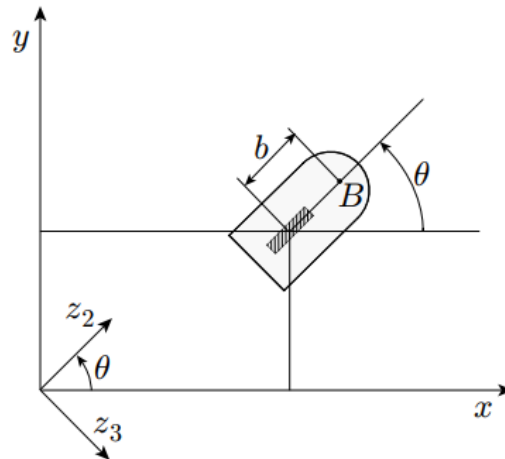
$$\dot{q}(t) = G(q(t))u$$

è raggiungibile (completa raggiungibilità) , date due generiche configurazioni esisterà sempre un ingresso che permetterà di effettuare tale transizione di stato. Se ne conclude dunque il carattere strettamente non integrabile dei precedenti vincoli, in quanto come ricordiamo dalla sezione precedente il carattere dei vincoli anolonomi è quello di limitare i moti istantaneamente ammissibili ma non ridurre lo spazio delle configurazioni accessibili.

Fatte queste semplici considerazioni di carattere puramente geometrico , proseguiamo la discussione con l'applicazione dei precedenti concetti ad un caso specifico : l'uniciclo.

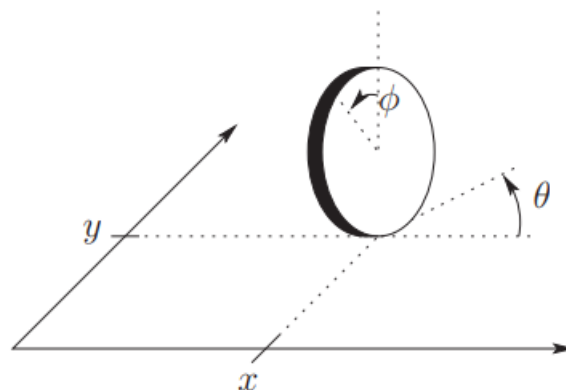
## Uniciclo – Modello Cinematico

Con riferimento ad una possibile classificazione delle ruote fatta nel precedente capitolo , un uniciclo , è un robot mobile costituito da una singola ruota orientabile.



**Figura 2.1** Uniciclo

La configurazione di un uniciclo è completamente descritta dal vettore delle coordinate generalizzate  $(x(t), y(t), \theta(t), r\phi(t))$  , dove  $x(t), y(t)$  fanno riferimento alla posizione cartesiana ,  $\theta(t)$  definisce l'orientamento della ruota rispetto all'asse  $x$ ; infine  $r$  e  $\phi(t)$  fanno riferimento rispettivamente al raggio della ruota e all'angolo della ruota misurato rispetto alla verticale passante per il centro della ruota stessa. Si faccia riferimento alla figura 2.2 per una migliore comprensione di quanto esposto.



**Figura 2.2** Ruota orientabile su piano cartesiano

Ricordiamo come , con riferimento alla condizione di puro rotolamento i vincoli possano essere espressi in forma Pfaffiana come segue

$$A(q(t))^T \dot{q}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\cos(\theta(t)) \\ 0 & 1 & 0 & -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix} \dot{q}(t) = 0$$

Con riferimento alla precedente matrice  $A(q(t))^T$  è immediato verificare come il set dei seguenti vettori , per ogni istante di tempo  $t$

$$w_1(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad w_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

definiscano una base per il

$$\text{Ker} \left( A(q(t))^T \right)$$

Tutte le velocità generalizzate ammissibili saranno allora espresse come combinazione lineare di tale base. Il modello cinematico dello unicycle sarà allora dato da

$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega$$

Di fatto se tralasciamo l'orientamento della ruota rispetto al piano verticale , quindi di fatto tralasciamo la presenza di  $\phi(t)$  , il vincolo di puro rotolamento può essere ricondotto nel richiedere che

$$[\sin(\theta(t)) \quad -\cos(\theta(t)) \quad 0] \dot{q}(t) = 0$$

il vettore velocità generalizzate non abbia componenti lungo la direzione normale al piano sagittale del veicolo , ed il modello cinematico si riduce a

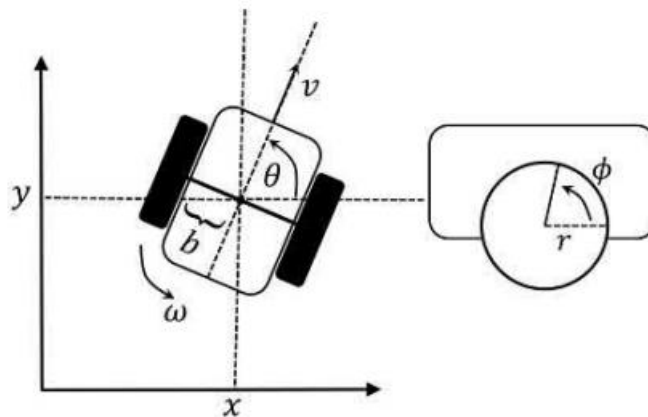
$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega$$

Ai coefficienti  $u_1, u_2$  si associa in maniera immediata l'interpretazione di velocità di trazione , cioè il modulo (con segno) del vettore velocità del punto di contatto tra la ruota e il suolo , e quella di velocità di sterzo pari alla velocità angolare della ruota intorno al suo asse verticale.

Nel proseguo faremo riferimento al secondo modello , ovvero tralasceremo la presa in considerazione della rotazione della ruota rispetto al suo piano verticale.

## Uniciclo a Trazione Differenziale

Da un punto di vista pratico è chiaro che un uniciclo è un veicolo che presenta gravi problemi di stabilità statica. Si ricorre allora ad altre strutture cinematiche equivalenti ma più stabili da un punto di vista meccanico. Tra queste , la più utilizzata in pratica è il differential drive. Ma cerchiamo di capire perché il modello cinematico dello uniciclo descrive completamente anche il veicolo a trazione differenziale mostrato in Figura 2.3.



**Figura 2.3** Uniciclo a Trazione Differenziale

Come mostrato nella Figura 2.3 un Differential Drive è composto da uno chassis e due ruote indipendenti controllate , conferendo al Differential Drive i tre gradi di libertà  $x, y$  e  $\theta$ . Il problema della stabilizzazione statica è risolto mediante l'introduzione di una ruote eccentrica. Sempre con riferimento alla Figura 2.3 , semplici considerazioni geometriche ci danno la possibilità di legare le velocità angolari delle singole ruote alla velocità di trazione e di sterzo. Infatti , detti rispettivamente  $\phi_L(t), \phi_R(t)$  gli angoli che le ruote sinistra e destra formano con i rispettivi assi verticali , si ha che

$$v(t) = \frac{r}{2} (\dot{\phi}_L(t) + \dot{\phi}_R(t)) , \quad \omega(t) = \frac{r}{2b} (\dot{\phi}_R(t) - \dot{\phi}_L(t))$$

o in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_R(t) \\ \dot{\phi}_L(t) \end{bmatrix}$$

La matrice precedente è invertibile , quindi di fatto la relazione esistente tra le velocità di trazione e di sterzo e le velocità delle singole ruote è biunivoca. Questa è la ragione per cui un unicycle e un Differential Drive sono geometricamente equivalenti e quindi rappresentabili dal medesimo modello cinematico

$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega$$

Anche se , per ragioni che saranno chiarite più avanti , baseremo i nostri controlli sul modello cinematico , il modello dinamico dello unicycle è facilmente ottenibile. Infatti con riferimento alla seconda legge di Newton sia per moti di traslazione che di rotazione

$$\sum \vec{F} = m \vec{a}$$

$$\sum T = I \dot{\omega}$$

dette rispettivamente  $\tau_R, \tau_L$  le coppie generate dai motori destro e sinistro , otteniamo

$$m \dot{v} = \frac{1}{r} (\tau_R + \tau_L)$$

$$I \dot{\omega} = \frac{b}{r} (\tau_R - \tau_L)$$

posto  $\tau_1 = \frac{1}{mr} (\tau_R + \tau_L)$  e  $\tau_2 = \frac{b}{rI} (\tau_R - \tau_L)$  , una semplice estensione dinamica al precedente modello cinematico è data da

$$\dot{x}(t) = v \cos(\theta(t))$$

$$\dot{y}(t) = v \sin(\theta(t))$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega$$

$$\dot{v} = \tau_1$$

$$\dot{\omega} = \tau_2$$

Nel ricavare le precedenti equazioni si è fatto uso della ben nota convenzione di considerare positive le rotazioni in senso antiorario .

Si introduce soltanto a scopo di completezza nella trattazione , senza scendere troppo nei dettagli, come il precedente modello cinematico del secondo ordine possa facilmente essere ottenuto a partire dalla riformulazione di Lagrange della seconda legge di Newton

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \xi$$

nella forma

$$B(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}) = S(q)\tau + \lambda A(q)$$

$$A(q(t))^T \dot{q}(t) = 0$$

il modello dinamico del sistema vincolato sarà espresso dalle equazioni precedenti. Imponendo

$$\ddot{q} = \dot{G}(q)u + G(q)\dot{u}$$

moltiplicando a sinistra per  $G(q)^T$  ( $G(q)^T A(q) = 0$ ) , nella ipotesi che la matrice  $G(q)^T S(q)$  sia invertibile , infatti , con la scelta del controllo (feedback linearizing controller)

$$u = (G(q)^T S(q))^{-1} (G(q)^T n(q, \dot{q}) + G(q)^T B(q)G(q)v + G(q)^T B(q)G(q)u)$$

si ottiene a partire dal modello cinematico , la seguente e semplice estensione dinamica

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(q)u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} v$$

è si noti che ora la deriva è presente. Il vettore  $v$  è definito vettore delle pseudo accelerazioni.

Una volta ottenuto il modello cinematico del primo e del secondo ordine (estensione dinamica) , passiamo ad analizzare uno dei problemi cardine della robotica mobile , quello della pianificazione del moto

## Pianificazione del Moto

---

La pianificazione del moto per robot mobili soggetti a vincoli , di fatto la definizione di percorsi che conducono il robot da un equilibrio ad un altro , presenta un maggior grado di difficoltà rispetto al suo omologo per manipolatori industriali. Infatti , oltre a dover soddisfare le condizioni al contorno , il cammino ottenuto deve essere conforme ai vincoli presenti sul sistema , per garantire che poi esso sia effettivamente percorribile dal robot preso in considerazione. Si noti che quando parliamo della pianificazione del moto stiamo di fatto facendo riferimento alle geometrie non alle dinamiche, quindi da ora in poi faremo riferimento al solo modello cinematico dello uniciclo.

Anche se il problema della pianificazione per robot soggetti a vincoli non integrabili si complica notevolmente , molti modelli cinematici , tra cui l'uniciclo , godono di una proprietà molto rilevanti per la pianificazione delle traiettorie: la **piattezza differenziale**.

La piattezza differenziale di fatto è una proprietà che semplifica notevolmente il processo di definizione di traiettorie ammissibili per il robot.

L'idea alla base della piattezza differenziale è , dato un sistema con  $n$  stati e  $m$  ingressi , determinare un insieme di  $m$  uscite tale che lo stato e gli ingressi del modello possano essere espressi in funzione di tali uscite e delle loro derivate. Più precisamente ,

### Definizione 2.1

---

Un sistema non lineare , nella forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad x \in R^n, u \in R^m$$

gode della proprietà di piattezza differenziale se , esiste un vettore di uscite  $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$  con la stessa dimensione del vettore di ingresso , soddisfacente le seguenti condizioni:

- esiste un intero non negativo  $\alpha$  tale che
$$y_i(t) = h_i(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \quad \forall i = 1 \dots m$$
- esistono funzioni regolari  $\phi, \psi$  tali che
$$x(t) = \phi(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)})$$
$$y(t) = \psi(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)})$$



nella definizione precedente , le componenti del vettore  $y$  sono chiamate **uscite piate** del modello.

Come ribadito in precedenza , la proprietà di piatezza differenziale fa riferimento all'esistenza di uscite tali che lo stato e l'ingresso possano essere espressi in funzione delle uscite stesse e delle loro derivate. Questo , in particolare , vuol dire che una volta assegnata una traiettoria delle uscite nel tempo , risultano determinate in corrispondenza anche le traiettorie dello stato e dell'ingresso del processo.

### Esempio 2.1

Nel caso dello unicycle le coordinate cartesiane  $x, y$  costituiscono appunto delle uscite piate. Considerato un cammino cartesiano  $(x(t), y(t))$  , dal vincolo

$$\dot{x}(t) \sin(\theta(t)) - \dot{y}(t) \cos(\theta(t)) = 0$$

o in maniera equivalente

$$\tan(\theta(t)) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

la traiettoria di stato (ammissibile) ad essa associata è individuata dal vettore  $q(t) = [x(t), y(t), \theta(t)]$  , con

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \right)$$

gli ingressi corrispondenti sono facilmente ottenibili dalle equazioni del modello cinematico dell'unicycle

$$v(t) = \pm \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$$
$$\omega(t) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{v(t)^2}$$

Se un robot ammette delle uscite piate , queste possono essere utilizzate per risolvere in modo efficiente il problema della pianificazione. Infatti , è possibile utilizzare un qualsiasi schema di interpolazione per pianificare il cammino di tali uscite in modo da soddisfare le condizioni al contorno. L'evoluzione delle altre variabili di configurazione e di ingresso potranno poi essere calcolata algebricamente a partire dalle uscite piate del modello.

Individuato il riferimento il passo successivo è la definizione di una azione di controllo che mantenga lo stato del nostro differential drive prossimo a quello assegnato.

Il problema del controllo del moto per un robot mobile viene usualmente risolto con riferimento al modello cinematico. Si ricordi a tal proposito che alla fine la stima dello stato sarà affidata ad un **Filtro di Kalman**, di fatto dunque non vi sarà nessuna differenza nel basare il controllo sul modello cinematico invece che su quello dinamico; basterà aumentare la varianza del rumore di processo rispetto a quello di misura. In maniera del tutto informale e privo di rigore, stiamo di fatto dicendo al filtro di fidarsi di più delle misure che dell'odometria.

Il tutto sarà chiarito meglio nei capitoli successivi.

Basando il controllo sul modello cinematico, stiamo di fatto supponendo che gli ingressi agiscano direttamente sul vettore delle velocità generalizzate. Nel caso dello unicycle ciò corrisponde di fatto a determinare valori adeguati per i vettori  $v$  e  $\omega$ . Data la corrispondenza biunivoca tra  $v, \omega$  e  $\dot{\phi}_R, \dot{\phi}_L$  saranno automaticamente individuati i valori per le rispettive ruote. Si lascerà poi a dei controllori di basso livello (di solito dei PID) fare in modo che la velocità delle ruote coincida con quello del riferimento.

Il problema del controllo del moto, può essere di fatto diviso in due diversi sotto problemi:

- Inseguimento Di Traiettoria: Il robot deve riprodurre asintoticamente una traiettoria cartesiana ammissibile desiderata a partire da una generica configurazione iniziale  $q_0$
- Regolazione Di Configurazione: il robot in questo caso dovrà raggiungere una configurazione assegnata e fermarsi a partire da una generica configurazione iniziale.

Sebbene il secondo possa essere considerato un caso particolare del primo, in quanto basta pianificare una traiettoria che tende asintoticamente a fermarsi nella configurazione desiderata, vedremo di seguito come, i controlli non lineari soluzioni al primo problema non possano essere estesi nella risoluzione del secondo.

## Feedback Control

---

Dalle considerazioni fatte nella sezione precedente , appare evidente come il problema dell'inseguimento di traiettoria , nonché di regolazione di configurazione , possa essere tradotto in un problema di stabilizzazione. Procediamo per gradi.

Supponiamo di avere a disposizione la traiettoria cartesiana desiderata per l'uniciclo  $(x_d(t), y_d(t))$ . Il vincolo anolonomo definisce direttamente la traiettoria di stato corrispondente  $q_d(t) = [x_d(t), y_d(t), \theta_d(t)]$  con

$$\theta_d(t) = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)} \right)$$

con riferimento al modello cinematico dell'uniciclo

$$\dot{x}_d(t) = v_d \cos(\theta_d(t))$$

$$\dot{y}_d(t) = v_d \sin(\theta_d(t))$$

$$\dot{\theta}_d(t) = \omega_d$$

e sfruttando la piattezza delle uscite , si ottengono i controlli corrispondenti

$$v_d(t) = \pm \sqrt{\dot{x}_d(t)^2 + \dot{y}_d(t)^2}$$

$$\omega_d(t) = \frac{\dot{y}_d(t)\dot{x}_d(t) - \ddot{x}_d(t)\dot{y}_d(t)}{v_d(t)^2}$$

Confrontando la traiettoria di stato desiderata  $q_d(t)$  con quella attuale  $q(t)$  si può definire un errore di inseguimento

$$e(t) = q_d(t) - q(t)$$

e di fatto tradurre il problema dell'inseguimento in un problema di stabilizzazione.

Tuttavia piuttosto che considerare direttamente la differenza tra  $q_d(t)$  e  $q(t)$  , conviene definire l'errore di inseguimento come

$$e(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix}$$

Essendo le matrici di rotazione per costruzione ortogonali , si noti come tale matrice di fatto definisca una trasformazione

isometrica; se ne modifica la direzione ma non la norma del vettore stesso.

Derivandolo rispetto al tempo si ottiene facilmente

$$\dot{e}_x = v_d \cos(e_\theta) - v + e_y \omega$$

$$\dot{e}_y = v_d \sin(e_\theta) - e_x \omega$$

$$\dot{e}_\theta = \omega_d - \omega$$

ponendo

$$v = v_d \cos(e_\theta) - u_1$$

$$\omega = \omega_d - u_2$$

si ottiene il seguente modello descrivente la dinamica dell'errore di inseguimento

$$\dot{e}_x = e_y \omega + u_1$$

$$\dot{e}_y = v_d \sin(e_\theta) - e_x \omega$$

$$\dot{e}_\theta = u_2$$

Con la definizione del seguente modello , il problema dell'inseguimento si è tradotto nel rendere il punto  $e = 0$  , un equilibrio asintoticamente stabile.

## Lyapunov Design

Proseguiamo dunque la nostra discussione con la definizione di un controllore stabilizzante. L'azione di controllo risultante è basata su una semplice applicazione di una condizione sufficiente dovuta a Lyapunov , espressa dalla seguente proposizione

### Proposizione

Sia  $V: W \subseteq R^n \rightarrow R$  una funzione definita positiva continuamente differenziabile su  $W$ . Lo 0 è un equilibrio asintoticamente stabile per il sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad , \quad f(0) = 0$$

se

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial t} = \nabla V(x(t))^T \dot{x}(t) = \nabla V(x(t))^T f(x(t)) < 0 \quad \forall x \in W$$

Il secondo metodo di Lyapunov di fatto riconduce l'analisi della stabilità asintotica di un generico punto di equilibrio allo studio di opportune funzioni scalari e alle variazioni di tali lungo le traiettorie del sistema.

La tecnica che useremo di seguito è molto interessante in quanto ottenuta l'azione di controllo che rende l'equilibrio un punto asintoticamente stabile allo stesso tempo ci fornisce la candidata di Lyapunov per verificarlo.

A tal proposito con riferimento al modello non lineare

$$\begin{aligned}\dot{e}_x &= e_y \omega + u_1 \\ \dot{e}_y &= v_d \sin(e_\theta) - e_x \omega \\ \dot{e}_\theta &= u_2\end{aligned}$$

Scegliamo come candidata di Lyapunov la quadratica

$$V(e(t)) = (\alpha e_x(t)^2 + \beta e_y(t)^2 + \gamma e_\theta(t)^2)$$

con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ .

Andiamo a determinare le variazioni di tale funzione lungo le traiettorie del nostro sistema

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(e(t))}{\partial t} &= \nabla V(e(t)) \dot{e}(t) = \alpha e_x \dot{e}_x(t) + \beta e_y(t) \dot{e}_y(t) + \gamma e_\theta(t) \dot{e}_\theta(t) = \\ &= 2\alpha e_x(t) e_y(t) \omega + 2\alpha e_x(t) u_1 + 2\beta e_y(t) v_d \sin(e_\theta(t)) - 2\beta e_y(t) e_x(t) \omega \\ &\quad + 2\gamma e_\theta(t) u_2\end{aligned}$$

ponendo  $\alpha = \beta$ , vanno via alcuni termini non definiti in segno, ottenendo

$$2\alpha e_x(t) u_1 + 2\beta e_y(t) v_d \sin(e_\theta(t)) + 2\gamma e_\theta(t) u_2$$

ponendo  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$  otteniamo

$$e_x(t) u_1 + e_y(t) v_d \sin(e_\theta(t)) + e_\theta(t) u_2$$

scegliendo allora

$$\begin{aligned} u_1 &= -e_x(t) \\ u_2 &= -e_\theta(t) - \frac{1}{e_\theta(t)} e_y(t) v_d \sin(e_\theta(t)) \end{aligned}$$

la variazione della funzione le traiettorie del sistema sarà pari a

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial t} = -e_x(t)^2 - e_\theta(t)^2 \leq 0$$

che è semi-definita negativa. Lyapunov ci permette di concludere sulla stabilità semplice, ma non sulla stabilità asintotica del punto di equilibrio.

La dinamica dell'errore ad anello chiuso sarà alla fine data da

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) &= e_y \omega - e_x(t) \\ \dot{e}_y(t) &= v_d \sin(e_\theta(t)) - e_x \omega \\ \dot{e}_\theta(t) &= -e_\theta(t) - \frac{1}{e_\theta(t)} e_y(t) v_d \sin(e_\theta(t)) \end{aligned}$$

e la candidata di Lyapunov

$$V(e(t)) = \frac{1}{2} (e_x(t)^2 + e_y(t)^2 + e_\theta(t)^2)$$

la cui variazione lungo le traiettorie del sistema è data da

$$\dot{V}(e(t)) = -e_x(t)^2 - e_\theta(t)^2$$

che è semi-definita in un qualsiasi intorno dell'origine. Si noti tuttavia che essendo

$$V(e(t)) \geq 0$$

limitata inferiormente e monotona decrescente, il limite per

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(e(t)) = V(e(\infty)) < \infty$$

è finito. Possiamo passare allora all'integrale ambo i membri ottenendo

$$\int_0^\infty \frac{\partial V(x(t))}{\partial t} dt = - \int_0^\infty e_x(t)^2 + e_\theta(t)^2 dt$$

ovvero,

$$V(x(0)) - V(x(\infty)) = \int_0^\infty e_x(t)^2 + e_\theta(t)^2 dt < \infty$$

necessariamente allora si deve avere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\theta(t) = 0$$

da questo e dalle equazioni del sistema è possibile dimostrare che anche

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v_d^2(t) + \omega_d^2(t)) e_y(t)^2 = 0$$

e dunque anche  $e_y(t)$  tende asintoticamente ad annullarsi nella ipotesi di persistenza di almeno uno degli ingressi di riferimento.

Con riferimento alla nozione di coercività di una funzione, nella ipotesi di traiettorie di stato persistenti concludiamo la stabilità globale dell'equilibrio in zero.

Alla fine, gli ingressi effettivi di velocità di trazione  $v$  e di velocità di sterzo  $\omega$ , dovranno poi essere ricostruiti per mezzo delle relazioni

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_d - u_2 \\ v &= v_d \cos(e_\theta(t)) - u_1\end{aligned}$$

Un altro approccio utilizzabile alla definizione di un controllo per l'inseguimento di traiettoria, può essere ottenuto attingendo ad un altro risultato dovuto al Lyapunov, in letteratura noto come Lyapunov sul Linearizzato.

### Proposizione

Sia  $x = 0$  un equilibrio per il sistema autonomo  $\dot{x}(t) = f(x(t))$ , con  $f$  differenziabile con continuità in un intorno dell'origine. Sia,

$$F = \left. \frac{\partial f(x(t))}{\partial x} \right|_{x=0}$$

lo Jacobiano di  $f$  in zero. Allora,

- L'origine è asintoticamente stabile per il sistema non lineare se  $F$  è di Hurwitz (o Schur nel caso TD).
- Se esiste un autovalore a parte reale strettamente positiva l'origine è instabile.

Prima di proseguire diamo una breve definizione di che cosa intendiamo per persistenza nella traiettoria cartesiana e di stato.

Una traiettoria cartesiana parametrizzata per via della coppia  $(x_d(t), y_d(t))$  è persistente se detto

$$v_d(t) = \sqrt{\dot{x}_d(t)^2 + \dot{y}_d(t)^2}$$

il vettore tangente alla curva ad ogni istante di tempo (velocità di trazione per intenderci) si ha

$$v_d(t) > 0 \quad \forall t \geq 0$$

Di fatto non vi possono essere soste o inversioni di marcia lungo il cammino.

Nel caso di traiettoria di stato, si parla di persistenza di traiettoria nell'ipotesi che la coppia di ingressi

$$(v_d(t), \omega_d(t))$$

non sia mai nulla contemporaneamente.

## Linearizzazione

---

In accordo alla proposizione precedente, un altro approccio per la definizione di un controllore consiste nell'utilizzare l'approssimazione lineare della dinamica dell'errore di inseguimento intorno alla traiettoria di riferimento, sulla quale  $e(t) = 0$ .

A partire dal modello

$$\dot{e}_x = e_y \omega + u_1$$

$$\dot{e}_y = v_d \sin(e_\theta) - e_x \omega$$

$$\dot{e}_\theta = u_2$$

con la trasformazione degli ingressi

$$\omega = \omega_d - u_2$$

$$v = v_d \cos(e_\theta(t)) - u_1$$

si ottiene la seguente rappresentazione per la dinamica dell'errore di inseguimento

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(e_\theta(t)) \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 1 & -e_y \\ 0 & e_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$



Ricordando che linearizzare in zero equivale a troncare semplicemente la serie di Taylor al primo ordine , ovvero porre

$$\sin(e_\theta(t)) \approx e_\theta(t)$$

si ottiene la linearizzazione cercata

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A(t)e(t) + Bu(t)$$

Tuttavia si noti che la linearizzazione non è un sistema LTI , ma tempo variante.

Si noti che considerando un solo ingresso non abbiamo la completa raggiungibilità. Data la nozione di sequenza di Krylov e di Sottospazio Ciclico , nessuno dei vettori colonna  $b_1$  della matrice  $B$  può essere considerato singolarmente per assegnare arbitrariamente tutti gli autovalori del sistema , in accordo al Lemma di Heymann.

In accordo alla nozione di invarianza dello spettro del sottosistema non raggiungibile , si noti come a partire da tutti e due gli ingressi , il sistema è completamente raggiungibile , di fatto è possibile scegliere una retroazione

$$u(t) = K e(t)$$

tale per cui il sistema a ciclo chiuso abbia gli autovalori desiderati.

Si consideri a tal proposito , il controllo

$$u(t) = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} e(t)$$

che conduce alla seguente dinamica closed-loop per l'errore di inseguimento

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} e(t) = (A(t) + BK)e(t)$$

Il polinomio caratteristico è dato da

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda + k_1)(\lambda + k_3) + \omega_d^2(\lambda + k_3) + v_d k_2(\lambda + k_1)$$

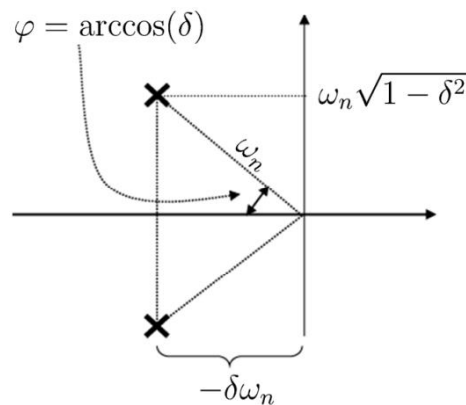
scegliendo allora,

$$k_1 = k_3 = 2\zeta\alpha, k_2 = \frac{\alpha^2 - \omega_d^2}{v_d}$$

con  $\zeta \in (0,1)$  e  $\alpha > 0$  si ottiene

$$p(\lambda) = (\lambda + 2\zeta\alpha)(\lambda^2 + 2\zeta\alpha\lambda + \alpha^2)$$

Con riferimento al trinomio campione , al sistema closed-loop sarò associato una coppia di autovalori complessi coniugati a parte reale negativa , con pulsazione  $\alpha$  ( $\omega_n$  in figura) e smorzamento  $\zeta$  ( $\delta$  in figura)



ed un autovalore a parte reale negativa pari a  $-2\zeta\alpha$ .

## Conclusione

In questa prima fase , abbiamo derivato due semplici azioni di controllo , una direttamente ottenuta lavorando sul sistema non lineare e l'altra passando per il linearizzato. Questi controlli sono stati ottenuti con un determinato scopo, e cioè notare come tali azioni di controllo richiedano rispettivamente la persistenza della traiettoria di stato e della traiettoria cartesiana. Infatti con riferimento al secondo controllo ottenuto

$$k_2 = \frac{\alpha^2 - \omega_d^2}{v_d}$$

si noti come il guadagno diverge quando  $v_d$  tende ad annullarsi. Allo stesso modo , abbiamo analizzato come  $e(t)$  tende ad annullarsi nell'ipotesi di persistenza di almeno uno dei due ingressi.

Si ricordi inoltre che il secondo controllore è valido soltanto nella ipotesi di stazionarietà del processo.

Nel capitolo successivo si vedrà come il problema legato alla non stazionarietà del processo possa essere risolto trattando il modello linearizzato della dinamica dell'errore di inseguimento come un sistema incerto.

Data la nozione di stabilità quadratica , obiettivo del prossimo capitolo è la definizione di una retroazione stabilizzata il modello qualunque sia la realizzazione dell'incertezza , ossia qualunque sia la realizzazione della coppia  $v_d, \omega_d$  all'interno degli intervalli chiusi e limitati

$$[ \underline{v}_d ; \bar{v}_d ]$$

$$[ \underline{\omega}_d ; \bar{\omega}_d ]$$