1

Introduzione

Un robot da un punto di vista teorico , può essere definito come una macchina capace di apportare modifiche all'ambiente, esplicando azioni condizionate da un insieme di regole di comportamento nonché da un insieme di informazioni acquisite sullo stato del robot (sensori propriocettivi) e sullo stato dell'ambiente stesso (sensori esterocettivi). Di fatto , la robotica studia la connessione intelligente tra percezione e azione.

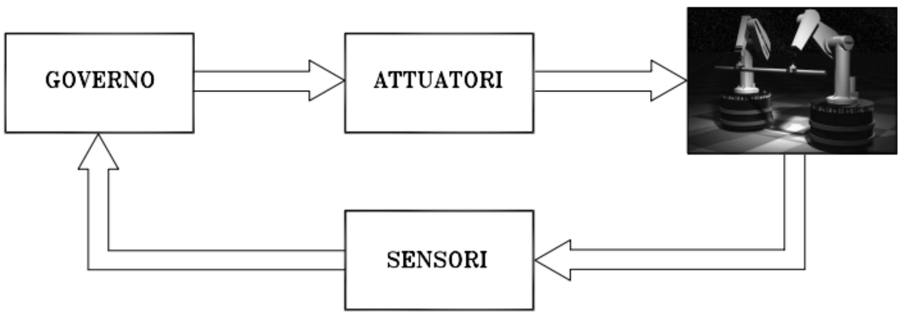

Figura 1.1 Schema Rappresentativo

Dalla figura sopra riportato salta subito all'occhio il carattere interdisciplinare della robotica. Il 90% della robotica industriale è caratterizzata dall'impiego di robot manipolatori , ovvero robot a base fissa. Senza entrare troppo nei dettagli , da un punto di vista meccanico , un manipolatore , può essere semplicemente definito come una catena cinematica data dalla interconnessione di bracci (link) per mezzo di giunti rotoidali o prismatici. Ma qual è la conseguenza principale nell'adottare un robot a base fissa? Lo svantaggio è che lo spazio di lavoro , inteso come la porzione dell'ambiente accessibile dall'organo terminale (pinza , etc..) è limitata. La sua forma ed il suo volume sono funzione della distribuzione dei gradi di libertà lungo la struttura portante del robot stesso. Ad esempio nella figura sottostante si riporta lo spazio di lavoro con riferimento ad un robot manipolatore antropomorfo,

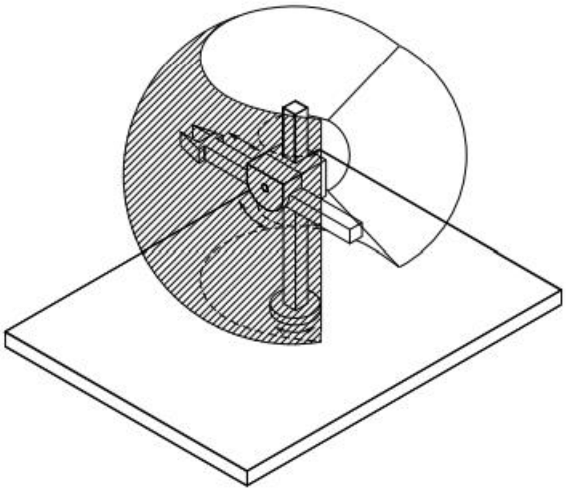

Figura 1.2 Spazio di Lavoro Manipolatore Antropomorfo

si noti come lo spazio di lavoro coincide con una semplice sfera cava. L'introduzione di una base semovente , e quindi dare la capacità al robot di muoversi liberamente nell'ambiente , fa dello spazio di lavoro , uno spazio tendenzialmente illimitato. Dalle considerazione fatte fino a questo punto , possiamo definire un robot mobile , un robot costituito da uno o più corpi rigidi , dotato di un sistema di locomozione. Fra tutti i sistemi possibili , la locomozione mediante ruote è di fatto la modalità di movimentazione più utilizzata in pratica. Possiamo individuare tre tipi di ruote convenzionali

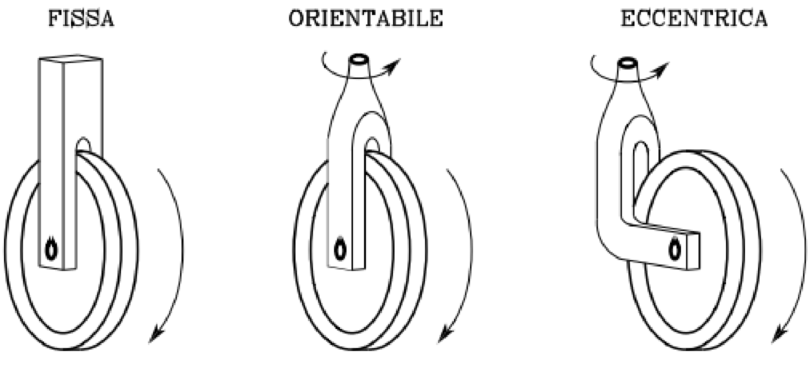

Figura 1.3 Tipologie di ruote maggiormente utilizzate

La ruota fissa , con un solo asse di rotazione ortogonale al piano contenente la ruota stessa , la ruota orientabile e la ruota eccentrica con due assi di rotazione , di cui uno verticale , che da alla ruota la possibilità di orientarsi. Si noti come nella terza tipologia , il secondo asse di rotazione non passa per il centro della ruota stessa , ma è traslato di una quantità fissa (offset). Questa disposizione da alla ruota la funzione di punto di appoggio per il bilanciamento statico senza influenzare in nessun modo la mobilità della base. Ma se da una parte danno la capacità al robot di intervento autonomo , ampliamento della regione di operatività , dall'altra, i veicoli su ruote sono soggetti a vincoli cinematici che ne limitano la mobilità locale, o meglio , ne limitano i moti istantaneamente ammissibili. Sappiamo , che seppur possiamo portare un automobile in qualsiasi configurazione (posa) , ad ogni istante di tempo non possiamo ottenere moti nella direzione ortonormale all'asse sagittale del veicolo; tradotto , il vettore velocità ad ogni istante è ortogonale alla direzione in cui si muove il veicolo. E' necessario di fatto avere a disposizione gli strumenti per analizzare la struttura dei vincoli a cui il nostro sistema è sottoposto.

Siano a tal proposito $\left(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)\right)$ le n coordinate generalizzate rappresentati la configurazione $q(t) \in R^n$ del nostro robot nello spazio delle configurazioni C. L'evoluzione nel tempo del vettore $q(t)$ può essere soggetto a vincoli. Nel seguito faremo soprattutto riferimento a vincoli bilaterali scleronomi, cioè espressi per mezzo di eguaglianze e non dipendenti esplicitamente dal tempo.

Una importante classificazione sulla natura dei vincoli può essere fatta in merito alla loro dipendenza o meno dal vettore delle velocità generalizzate $\dot{q}(t)$.

Iniziamo la nostra discussione sulla natura dei vincoli , partendo dalla seguente definizione

<u>Definizione 1.1</u> (Vincolo Cinematico)

Si definisce vincolo cinematico , il vincolo

$$a_i\left(q(t), \dot{q}(t)\right) = 0$$

dipendente sia dal vettore delle coordinate generalizzate che da quello delle velocità.

I vincoli cinematici sono in genere espressi in forma Pfaffiana , ovvero lineari nel vettore delle velocità generalizzate

$$a_i^T\big(q(t)\big)\dot{q}(t) = 0 \quad i = 1\,, \dots \;, k$$

con $a_i : C \to R^n$ campi vettoriali di classe C^∞ e linearmente indipendenti.

Ma analizziamo più in dettaglio la struttura di tali vincoli

$$a_i\big(q(t)\big)^T \dot{q}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\big(q(t)\big)\dot{q}_j(t) = \sum_{j=1}^{n} a_i\big(q(t)\big)\frac{\partial q(t)}{\partial t} = 0$$

ma se ,

$$\sum_{j=1}^{n} a_i\big(q(t)\big)\frac{\partial q(t)}{\partial t} = 0$$

allora

$$\sum_{j=1}^{n} a_i\big(q(t)\big)\partial q(t) = 0$$

Questa banale osservazione , ci mostra che in realtà i vincoli cinematici in forma Pfaffiana sono delle forme differenziali lineari.

Teorema

Sia $f : A \to R$ con $A \subseteq R^n$ aperto e $f \in C^1$ su A. Allora , f è differenziabile su tutto A , ed il suo differenziale è dato da

$$df = \nabla f(x)^T dx = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i$$

Il precedente teorema , ben noto risultato dell'Analisi matematica , ci mostra come di fatto il differenziale di una funzione scalare è una forma differenziale lineare. Tuttavia il viceversa non è vero in generale

" Non tutte le forme differenziali lineari sono il differenziale di una funzione scalare"

Si noti come le forme differenziali lineari generalizzano la definizione di primitiva al caso multi-variabile.

Prendiamo in considerazione una generica forma differenziale lineare del tipo

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i = 0$$

ed in particolare , ipotizziamo sia una forma differenziale esatta , ovvero il differenziale di una qualche funzione scalare f

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x) dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$$

Interpretando le variazioni parziali come componenti di un campo di forze , la precedente espressione può essere considerata come il lavoro impiegato dal campo per uno spostamento infinitesimale dx. Il lavoro totale compiuto dal campo di forze su un percorso γ sarà allora dato da

$$\int_{\gamma} dW = \int_{\gamma} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) = \int_{t_0}^{t} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right) dt =$$

$$= \int_{t_0}^{t} \frac{\partial f\big(x(t)\big)}{\partial t} dt = f\big(x(t)\big) - f\big(x(t_0)\big)$$

Il penultimo passaggio deriva immediatamente dalla derivata di funzione composta. Come notiamo il lavoro dipende soltanto dal punto iniziale e finale , di conseguenza il campo di forze è conservativo , e di fatto , esprimibile come gradiente di una funzione scalare f , nota in letteratura con il nome di potenziale del campo.

Dalle considerazioni precedenti concludiamo immediatamente che se il vincolo cinematico in forma pfaffiana è una forma differenziale esatta , questo può essere integrato ed espresso nella seguente forma

$$h_i\big(q(t)\big) = c$$

con $h_i : R^n \to R$ differenziabile tale che

$$a_{ij}\big(q(t)\big) = \frac{\partial h_i\big(q(t)\big)}{\partial q_j} \quad j = 1 , \dots , k$$

e c costante di integrazione.

Ma di fatto non tutte le forme differenziali sono esatte. E frequente nel caso di robot mobili su ruote il caso in cui la forma differenziale

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\big(q(t)\big)\partial q_j(t) = 0$$

non sia integrabile , però di fatto potrebbe esistere un opportuno fattore $\gamma\big(q(t)\big) \neq 0,$ noto come fattore di integrazione, tale per cui il vincolo

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma\big(q(t)\big) a_{ij}\big(q(t)\big)\partial q_j(t) = 0$$

sia esatto (forma differenziale) , in questo caso il vincolo potrà essere integrato è ricondotto alla forma

$$h_i\big(q(t)\big) = c$$

con $h_i : C \to R^n$ differenziabile tale che

$$\frac{\partial h(q)}{\partial q_j} = \gamma(q)a_{ij}(q) \quad j = 1 , \dots \ , n$$

In questo caso si parla di olonomicità del vincolo, come specificato dalla definizione seguente

Definizione 1.3 (Vincolo Olonomo)

Si definisce olonomo un vincolo cinematico ricoducibile (integrabile) alla forma

$$h_i\big(q(t)\big) = 0 \quad i = 1 , \dots \ , k$$

Vediamo un esempio molto semplice di un sistema soggetto a vincoli olonomi.

Esempio 1.1 (Pendolo)

Si consideri a tal proposito un corpo di massa m legato alla estremità di una asta rigida di lunghezza l , incernierata all'origine di un sistema di assi ortogonali

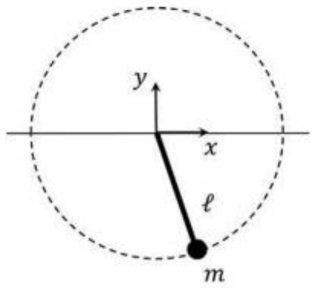

Figura 1.4 Pendolo

Le coordinate (x, y) della massa m sono tali per cui il seguente vincolo (olonomo)

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

che limita il moto del corpo ad una circonferenza di raggio l.

Come notiamo l'effetto di un vincolo olonomo è quello di ridurre lo spazio delle configurazioni accessibili , in quanto il moto è vincolato ad appartenere ad una ben definita superficie di livello della funzione scalare h.

Di contro , nella ipotesi di non integrabilità , come è ben visibile , l'effetto di tale vincolo è quello di limitare i moti istantaneamente ammissibili , in quanto il vettore delle velocità generalizzate è vincolato ad appartenere ad un ben definito sottospazio di dimensione $n - 1$, e cioè al

$$Ker \left(a\big(q(t)\big)^T\right)$$

Però , notiamo , non si ha nessuna riduzione sullo spazio delle configurazioni accessibili. Ovviamente , le conclusioni tratte per un singolo vincolo si generalizzano immediatamente alla presenza di k vincoli cinematici.

Introdotta la struttura dei vincoli , deriviamo , sfruttando semplici conoscenze di analisi matematica , condizioni necessarie alla integrabilità dei vincoli a cui è soggetto un sistema meccanico. In particolare la condizione presentata / derivata è una semplice conseguenza delle funzioni due volte differenziabili con continuità , noto in letteratura come Teorema di Schwarz.

Consideriamo a tal proposito la seguente del tutto generale forma differenziale lineare esatta

$$w = a(x,y)dx + b(x,y)dy$$

e sia $h: C \to R^n$ una sua primitiva , ovvero ricordiamolo

$$\frac{\partial h}{\partial x} = a(x,y) \ , \ \frac{\partial h}{\partial y} = b(x,y)$$

se i coefficienti della forma differenziale sono due volte differenziabili con continuità C^2 , dal teorema di Schwarz segue immediatamente che le derivate parziali miste devono coincidere, ovvero

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\ a(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\ b(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$$

Abbiamo di fatto ricavato una semplice ma importante condizione necessaria alla integrabilità. Riportiamo il precedente risultato al caso dei vincoli cinematici in forma Pfaffiana,

$$a\big(q(t)\big)^T \dot{q}(t) = \sum_{j=1}^{n} a_j\big(q(t)\big)\partial q_j(t) = 0$$

affinché esso sia integrabile deve esistere una funzione scalare (potenziale) $h: C - R^n$, ed un fattore di integrazione $\gamma\big(q(t)\big) \neq 0$ tale che il gradiente

$$\frac{\partial h(t)}{\partial q} = \gamma\big(q(t)\big)a\big(q(t)\big)^T$$

se aggiungiamo l'ipotesi che i coefficienti $a_{ij}\big(q(t)\big) \in C^\infty$, deve necessariamente essere verificato

$$\frac{\partial\ \big(\gamma(q)a_i(q)\big)}{\partial q_j} = \frac{\partial\ \big(\gamma(q)a_j(q)\big)}{\partial q_i} \quad \forall\ i\ \neq j$$

Se l'unica soluzione al sistema si ha per $\gamma(q) = 0$, per quanto detto fino a questo punto , il vincolo non risulterà essere integrabile.

Concludiamo la sezione con la presentazione di un semplice esempio molto importante per il capitolo successivo

Esempio 1.2

Consideriamo un disco che rotola senza slittare su un piano orizzontale , mantenendo il proprio piano sagittale in direzione verticale , come riportato nella figura seguente

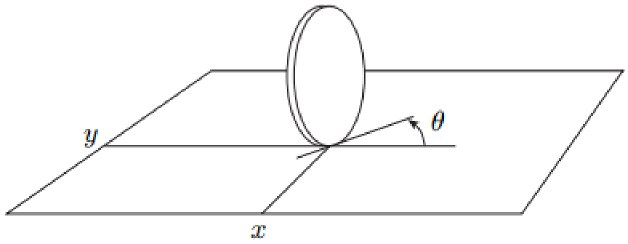

Figura 1.5 Disco su piano orizzontale

In accordo ad una rappresentazione minima , essendo in R^2 il numero di variabili necessarie a descrivere il suo orientamento è pari a $\frac{m(m-1)}{2}|_{m=2} = 1$, i questo caso $\theta(t)$. Di fatto dunque la sua configurazione è completamente descritta dal vettore

$$q(t) = [\, x(t)\; y(t)\; \theta(t)]^T$$

Individuiamo in prima battuta il seguente vettore, caratterizzante la direzione normale al piano sagittale del veicolo

$$\left[\sin(\theta(t)) \;\; -\cos(\theta(t)) \;\; 0\right]^T$$

l'ottenimento di tale vettore è immediato , basta scegliere una direzione a prodotto scalare nullo con il vettore

$$\left[\cos(\theta(t)) \;\; \sin(\theta(t)) \;\; 0\right]^T$$

che individua la direzione sagittale del veicolo , infatti si ottiene immediatamente

$$\left[\sin(\theta(t)) - \cos(\theta(t)) \;\; 0\right]\left[\cos(\theta(t)) \;\; \sin(\theta(t)) \;\; 0\right]^T = 0$$

Il vincolo di puro rotolamento impone che il vettore delle velocità non possa avere componenti lungo tale direzione , di fatto dunque

$$[\, \dot{x}(t)\; \dot{y}(t)\; \dot{\theta}(t)]\left[\sin(\theta(t)) \;\; -\cos(\theta(t)) \;\; 0\right]^T =$$
$$= \dot{x}(t)\sin(\theta(t)) - \dot{y}(t)\cos(\theta(t)) = 0$$

Si noti come la terza componente del vettore velocità è libera, a differenza delle altre due.

Dimostriamo dunque la non integrabilità del vincolo precedente , mostrando come l'unica soluzione al seguente sistema

$$\begin{cases} \sin(\theta)\dfrac{\partial\gamma}{\partial y} = -\cos(\theta)\dfrac{\partial\gamma}{\partial x} \\ \cos(\theta)\dfrac{\partial\gamma}{\partial\theta} = \gamma\sin(\theta) \\ \sin(\theta)\dfrac{\partial\gamma}{\partial\theta} = -\gamma\cos(\theta) \end{cases}$$

si ottiene per $\gamma = 0$. Infatti quadrando e sommando le ultime due equazioni si ottiene $\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} = \pm\gamma$. Prendendo ad esempio $\frac{\partial\gamma}{\partial\theta} = \gamma$, si ha

$$\begin{cases} \sin(\theta)\dfrac{\partial\gamma}{\partial y} = -\cos(\theta)\dfrac{\partial\gamma}{\partial x} \\ \gamma\cos(\theta) = \gamma\sin(\theta) \\ \gamma\sin(\theta) = -\gamma\cos(\theta) \end{cases}$$

che ha come unica soluzione $\gamma = 0$. Il vincolo non riduce lo spazio delle configurazioni accessibili $C = R^3$, ma di fatto ne limita i moti istantaneamente ammissibili.

Questo esempio sarà utile nel capitolo seguente per la definizione del modello cinematico del robot mobile a cui faremo riferimento nel proseguo. Trattasi di fatto di un uniciclo a trazione differenziale, meglio noto nella letteratura con il nome di "Differential-Drive".