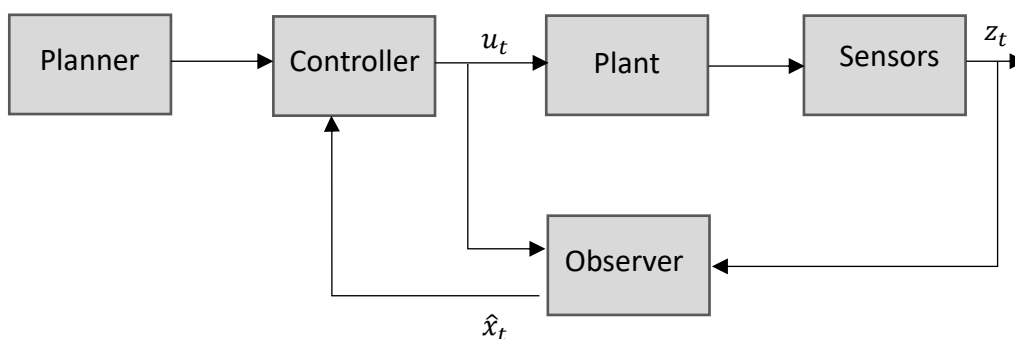


Risultati Sperimentali

Nei capitoli precedenti abbiamo descritto in maniera esaustiva tutti gli elementi caratterizzanti l'anello



di controllo sopra riportato. In questa sezione presentiamo i risultati degli esperimenti svolti in ambiente simulativo. Inizieremo dapprima riportando i risultati ottenuti per applicazione delle azioni di controllo discusse nei Capitoli 2 , 3 , ipotizzando in prima battuta di avere una completa conoscenza ad ogni istante di tempo dello stato del sistema.

Successivamente , si presenteranno i risultati ottenuti con l'applicazione delle tecniche di stima presentate nel Capitolo 4. In particolare , simuleremo sia applicazioni outdoor , in cui la stima dello stato è supportata da sistemi di localizzazione GNSS (Global Navigation Satellite Systems) , nonché applicativi in ambito indoor , in cui la stima ricorsiva della configurazione del robot è supportata dall'impiego di Beacons.

Quindi di fatto nel proseguo ipotizzeremo che il nostro robot sia dotato di moduli di ricezione appositi per gli scenari sopra descritti.

Tutti i risultati qui riportati sono stati ottenuti con l'ausilio del software Matlab.

Simulazioni Controllo Gain Scheduling

In questa prima fase di simulazione , andremo ad analizzare i risultati ottenuti dall'applicazione del controllore presentato nel Capitolo 3 , il controllo a guadagno schedulato. In particolare , come già ribadito in precedenza si assume in questa prima fase che la configurazione del robot

$$q(t) = [x(t); y(t); \theta(t)]^T$$

sia nota ad ogni istante di tempo; di fatto , in prima battuta trascuriamo la presenza dello stimatore dello stato del nostro differential drive.

Si ricordi come l'obiettivo di tale controllore è quello di eliminare le limitazioni imposte dal controllore sul linearizzato (Capitolo 2) , e cioè non richiedere la costanza del vettore delle velocità

$$[v_d(t); \omega_d(t)]^T$$

Iniziamo la nostra discussione , graficando in primis l'andamento del percorso desiderato nel piano cartesiano , per il nostro differential drive

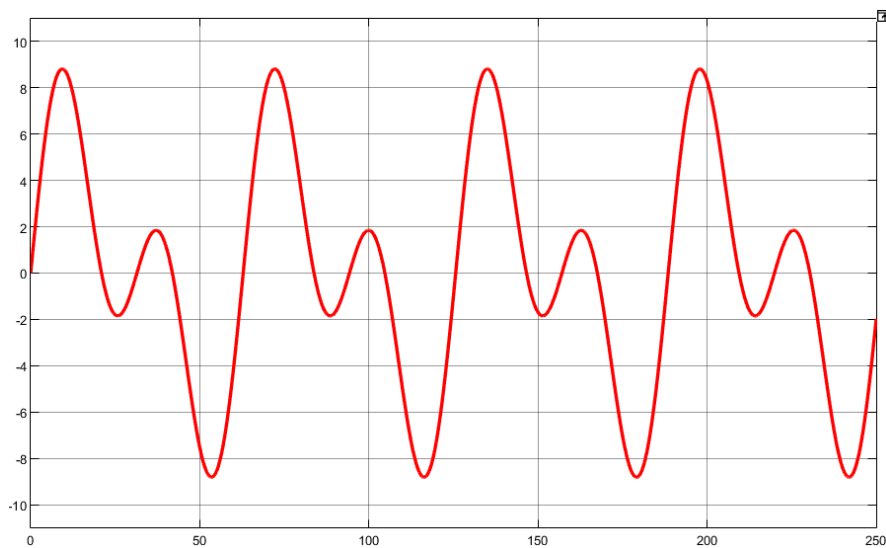


Figura 5.1 Riferimento nel piano.

Volendo essere più espliciti , la parametrizzazione del precedente cammino desiderato è data da

$$\begin{aligned} x_d(t) &= t; \\ y_d(t) &= 5 \sin(0.1 t) + 5 \sin(0.2 t); \end{aligned}$$

L'obiettivo del seguente riferimento è quello di avere riferimenti di velocità tempo varianti.

Si ricordi che il percorso deve essere ammissibile per il nostro differential drive , alla traiettoria cartesiana desiderata $(x_d(t), y_d(t))$, corrisponde di fatto la seguente traiettoria di stato

$$q_d(t) = [x_d(t); y_d(t); \theta_d(t)]^T$$

con

$$\theta_d(t) = \tan^{-1} \left(\frac{\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)} \right)$$

Sfruttando la piattezza differenziale come ribadito nel Capitolo 2 , è immediato determinare i riferimenti di velocità per il percorso desiderato , infatti

$$v_d(t) = \pm \sqrt{\dot{x}_d(t)^2 + \dot{y}_d(t)^2}$$

$$\omega_d(t) = \frac{\ddot{y}_d(t)\dot{x}_d(t) - \ddot{x}_d(t)\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)^2 + \dot{y}_d(t)^2}$$

Si riportano di seguito gli andamenti dei riferimenti di velocità con lo scopo di individuare limiti superiori e inferiori per la definizione dell'azione di controllo

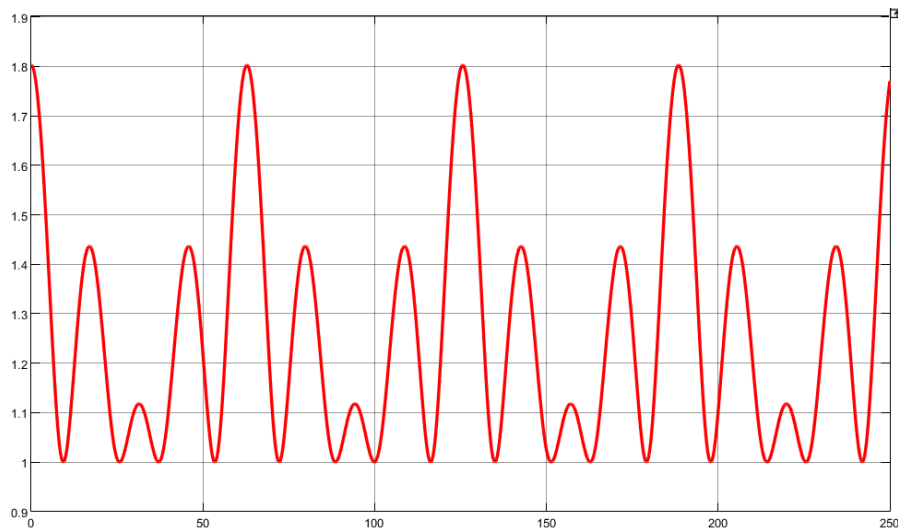


Figura 5.2 Andamento nel tempo velocità di trazione $v_d(t)$

Di seguito invece l'andamento nel tempo per quanto riguarda la velocità di sterzo $\omega_d(t)$.

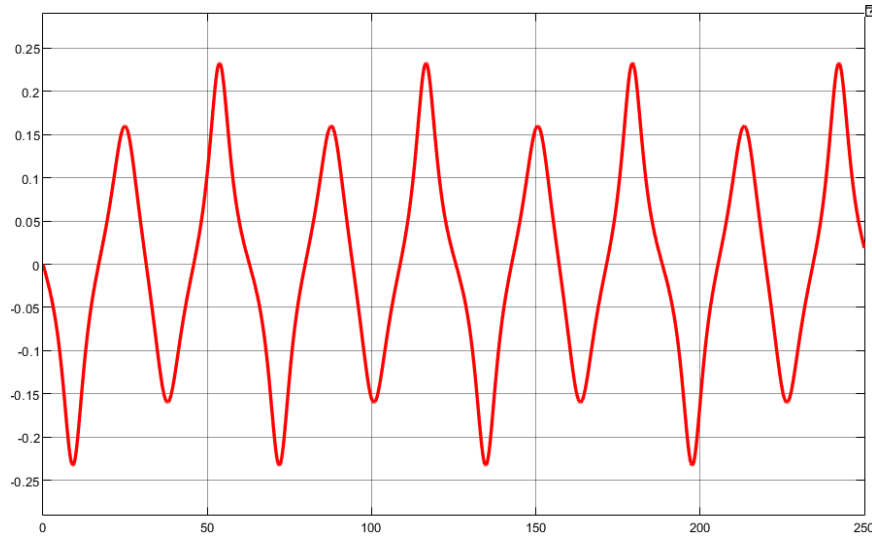


Figura 5.3 Andamento nel tempo velocità di sterzo $\omega_d(t)$.

Si ricordi come la definizione dell'azione di controllo a guadagno schedulato , si fonda su una caratterizzazione dei limiti inferiori e superiori dei parametri incerti. In particolare , come ribadito nel Capitolo 3 , come parametri incerti consideriamo le due velocità , ed in particolare scegliamo i seguenti valori per i limiti

$$\bar{v}_d(t) = 5;$$

$$\underline{v}_d(t) = 1;$$

$$\bar{\omega}_d(t) = 5;$$

$$\underline{\omega}_d(t) = -5;$$

Definiti i vertici del politopo , il passo successivo è la risoluzione delle LMIs per l'individuazione dei 4 guadagni che caratterizzano l'azione di controllo a guadagno schedulato

$$K(p(t)) = \sum p_i(t)K_i$$

con

$$p_1(t) = \left(\frac{v_d(t) - \underline{v}_d}{\bar{v}_d - \underline{v}_d} \right) \left(\frac{\omega_d(t) - \underline{\omega}_d}{\bar{\omega}_d - \underline{\omega}_d} \right) , \quad p_2(t) = \left(\frac{\bar{v}_d - v_d(t)}{\bar{v}_d - \underline{v}_d} \right) \left(\frac{\omega_d(t) - \underline{\omega}_d}{\bar{\omega}_d - \underline{\omega}_d} \right)$$

$$p_3(t) = \left(\frac{\bar{v}_d - v_d(t)}{\bar{v}_d - \underline{v}_d} \right) \left(\frac{\bar{\omega}_d - \omega_d(t)}{\bar{\omega}_d - \underline{\omega}_d} \right) , \quad p_4(t) = \left(\frac{v_d(t) - \underline{v}_d}{\bar{v}_d - \underline{v}_d} \right) \left(\frac{\bar{\omega}_d - \omega_d(t)}{\bar{\omega}_d - \underline{\omega}_d} \right)$$

come notiamo tali che

$$p_i(t) \geq 0, i = 1,2,3,4 \quad \sum p_i(t) = 1$$

e cioè interno allo unitary simplex $\forall t \geq 0$.

Si mostrano di seguito i risultati ottenuti con l'applicazione di tale azione di controllo , in particolare iniziamo con il sovrapporre all'andamento desiderato la traiettoria percorsa dall'uniciclo controllato.

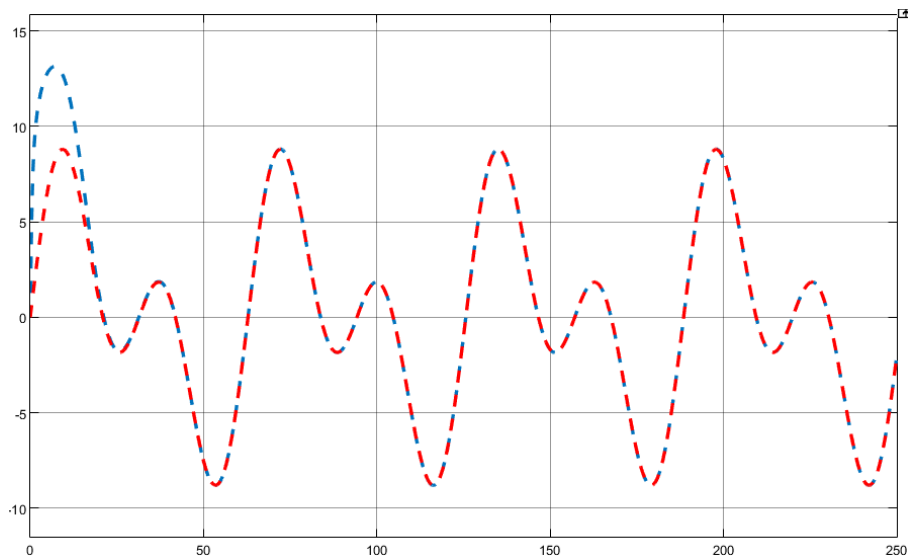


Figura 5.4 Controllo Gain Scheduling

In particolare la Figura 5.4 evidenzia in rosso il riferimento , ed in blue riporta l'andamento della traiettoria seguita dal robot. Si noti come dopo un leggero transitorio , l'errore a regime è nullo.

Si riporta di seguito l'andamento degli errori , definiti ricordiamolo come

$$e_x(t) = x(t) - x_d(t)$$

$$e_y(t) = y(t) - y_d(t)$$

$$e_\theta(t) = \theta(t) - \theta_d(t)$$

Di seguito l'andamento dei tre errori nel tempo.

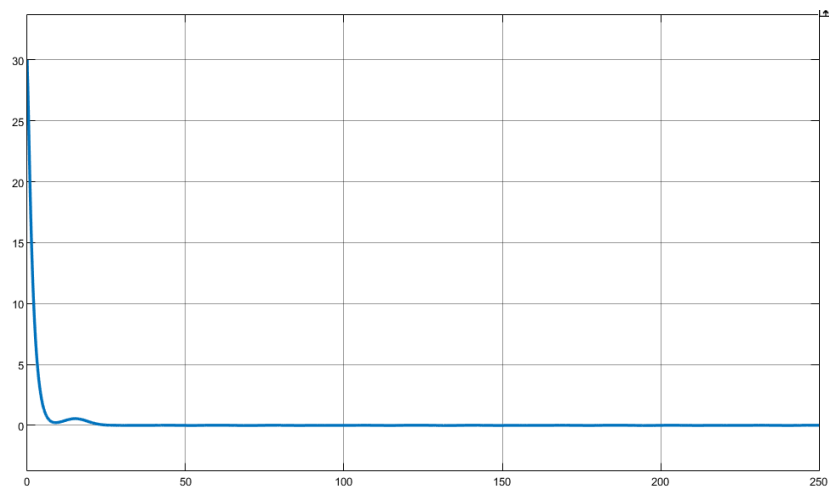


Figura 5.5 Andamento nel tempo di $e_x(t)$.

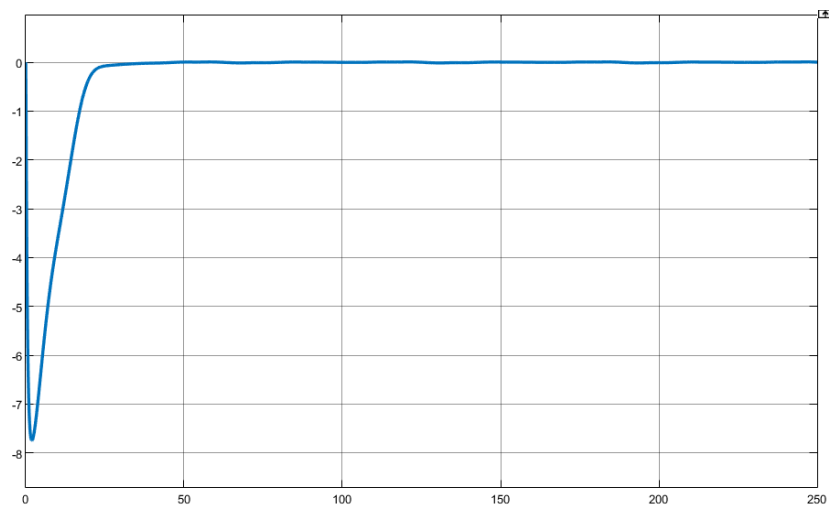


Figura 5.6 Andamento nel tempo di $e_y(t)$

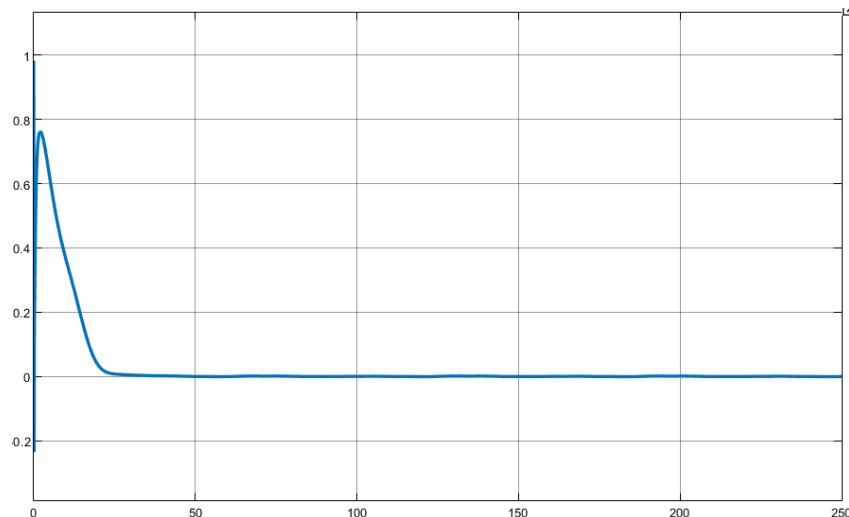


Figura 5.7 Andamento nel tempo di $e_\theta(t)$.

Conclusa questa prima fase di simulazione , si passa ora ad analizzare i risultati in simulazione, sfruttando le tecniche di localizzazione discusse nel Capitolo 4. Cioè da ora in poi consideriamo la presenza all'interno dell'anello di controllo di uno stimatore dello stato a partire da misurazioni ingresso uscita.

Risultati Filtro Kalman Esteso

Fino a questo punto abbiamo ipotizzato di conoscere ad ogni istante di tempo la corretta configurazione del robot. Questa situazione si discosta molto dalla realtà. In applicazioni pratiche non sempre lo stato è completamente noto; nasce allora l'esigenza di stimarlo a partire da misurazioni ingresso uscita.

Come ampiamente discusso nel Capitolo 4 , una prima tecnica di localizzazione ci è fornita dal dead reckoning o odometria. L'idea alla base dell'odometria , è ricordiamolo , una semplice integrazione numerica del modello cinematico del differential drive.

Ricordiamo come il metodo di Eulero in avanti presuppone costante l'orientamento del robot all'interno dell'intervallo di campionamento.

Abbiamo analizzato come risultati migliori in pratica si ottengono sommando all'angolo $\theta(t)$, l'orientamento medio dell'uniciclo nell'intervallo $[t, t + T_s]$

$$x_{t+1} = x_t + v_d T_s \cos\left(\theta(t) + \frac{\omega_d T_s}{2}\right)$$

$$y_{t+1} = y_t + v_d T_s \sin\left(\theta(t) + \frac{\omega_d T_s}{2}\right)$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \omega_d T_s$$

che ricordiamo corrispondere all'uso di Runge – Kutta al secondo ordine per l'integrazione.

Si riporta di seguito l'andamento della traiettoria percorsa dal robot , sfruttando come tecnica di localizzazione l'odometria.

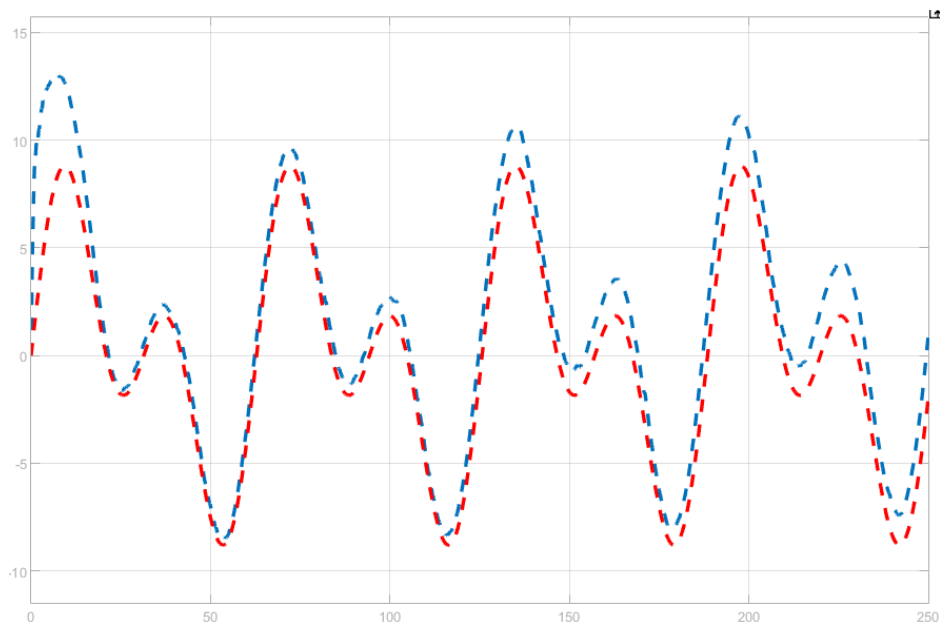


Figura 5.8 Risultati con Localizzazione Odometrica Runge-Kutta.

La Figura 5.8 mette bene in evidenza il problema della localizzazione odometrica. Indipendentemente dalla tecnica di integrazione numerica utilizzata , l'odometria è soggetta in pratica a un errore accumula nel tempo (deriva) e diviene non trascurabile su lunghi percorsi.

Abbiamo visto nel Capitolo 4 , che una soluzione più robusta al problema della stima dello stato è fornita dalle tecniche di localizzazione attiva , quali il Filtro di Kalman.

Ricordiamolo , il Filtro di Kalman , caso particolare del più generale Filtro Bayesiano , nella fase di correzione , sulla base delle informazioni sensoriali registrate al tempo t fornisce una correzione alla stima ottenuta tramite l'odometria.

In questa parte del capitolo , ipotizzeremo che ogni istante di tempo t , ci venga fornita una stima sulla posizione corrente del robot , il vettore

$$[\hat{x}_t; \hat{y}_t]$$

e la corrispondente matrice di covarianza Q_t .

Si noti che questa ipotesi è frequente in molte applicazioni pratiche , ad esempio , nel caso di applicazioni outdoor , con robot dotati di moduli GPS. Tuttavia un riscontro pratico di tali situazione si ha anche in ambienti indoor, ad esempio attraverso tecniche di localizzazione , quali il fingerprinting.

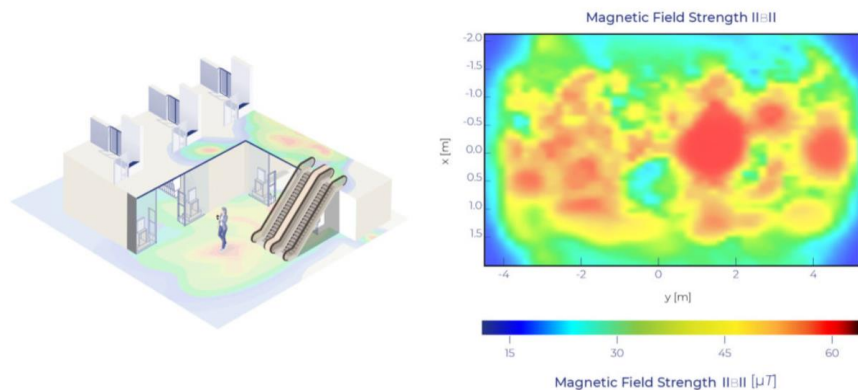


Figura 5.9 FingerPrinting Indoor Localization

Sulla base dell'intensità ad esempio del campo magnetico registrato in determinate posizioni (x,y) , in una prima fase di raccolta dati; si può poi sfruttare questa mappatura per stimare in una fase online la possibile posizione del robot.

Arrivati a questo andiamo a vedere come il Filtro di Kalman Esteso fornisce una correzione attiva al problema dell'odometria.

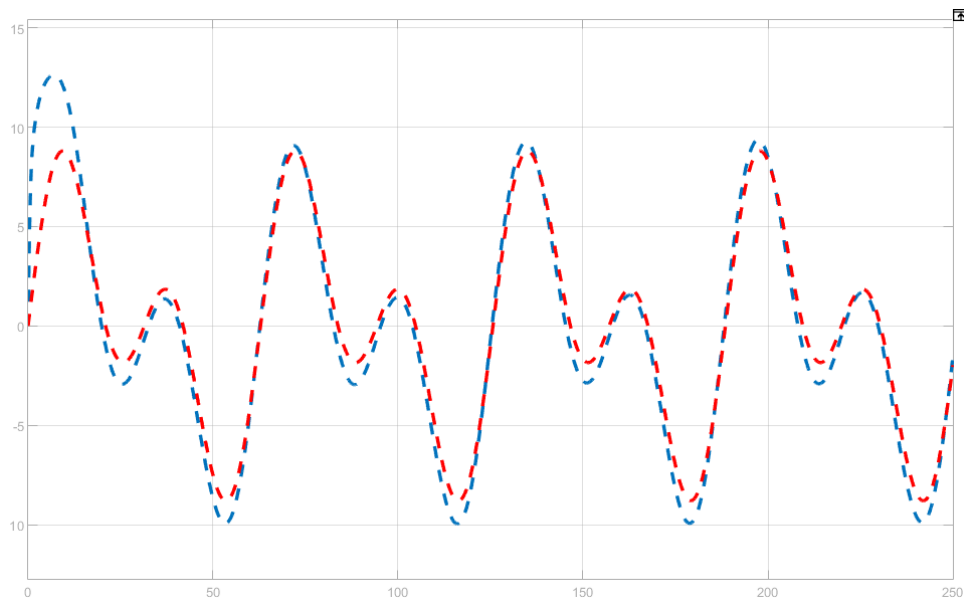


Figura 5.10 Localizzazione con EKF.

Notiamo come ora l'errore introdotto dalle tecniche di localizzazione odometrica viene corretto sfruttando le misurazioni ottenute al generico istante di tempo t .

In particolare, nell'ottenere i precedenti risultati, aumentando la covarianza del modello rispetto alle misure, abbiamo "detto" al Filtro di Kalman di fidarsi di più delle misure che delle predizioni fatte a partire dal modello.

Prima di lasciare la sezione, facciamo delle piccole considerazioni riguardanti ad esempio la funzione di misura

$$z_t = h(x_t) + \delta_t$$

per quanto riguarda la funzione $h(\cdot)$, disponendo delle misure sulla posizione cartesiana del robot, di fatto coincide con la matrice

$$C_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ultima osservazione riguarda la non divergenza dei guadagni del filtro, il cui andamento è riportato in Figura 5.11.

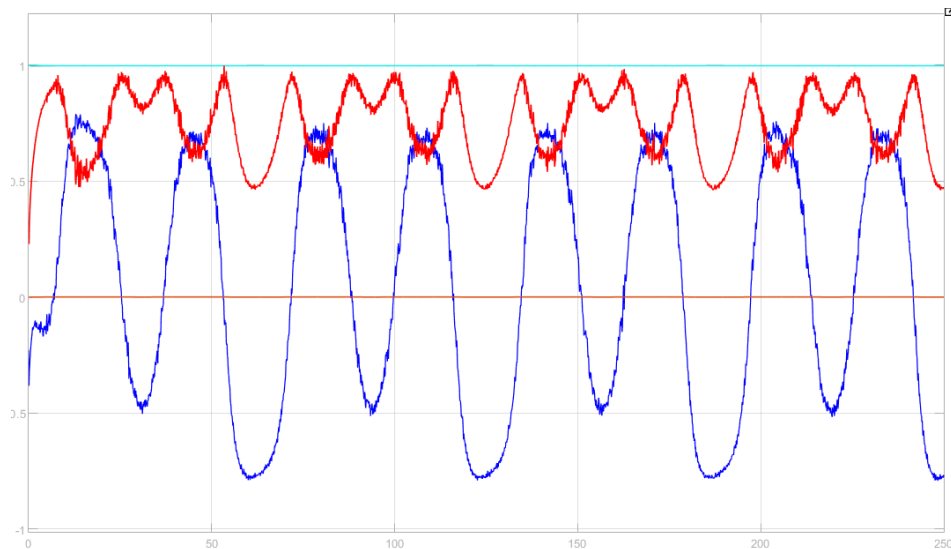


Figura 5.11 Andamento guadagni Filtro Kalman Esteso

La non divergenza del guadagno di Kalman , implica la non divergenza della soluzione dell'equazione di Riccati , che fornisce la matrice di covarianza dell'errore di predizione di stato. La non divergenza si traduce perciò nella capacità del predittore di fornire una stima dello stato con un errore di entità limitata (in senso probabilistico).

Si riporta infine l'andamento degli errori

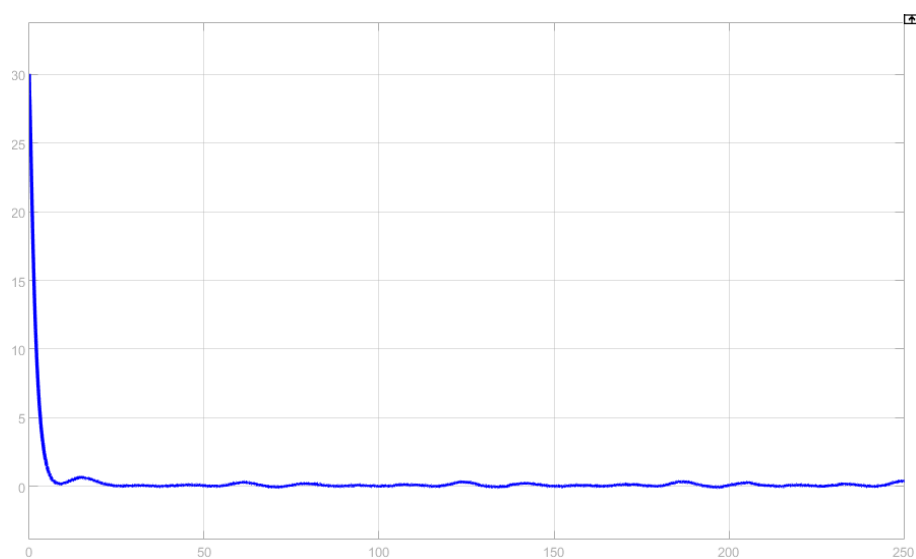


Figura 5.12 Andamento nel tempo errore $e_x(t)$.

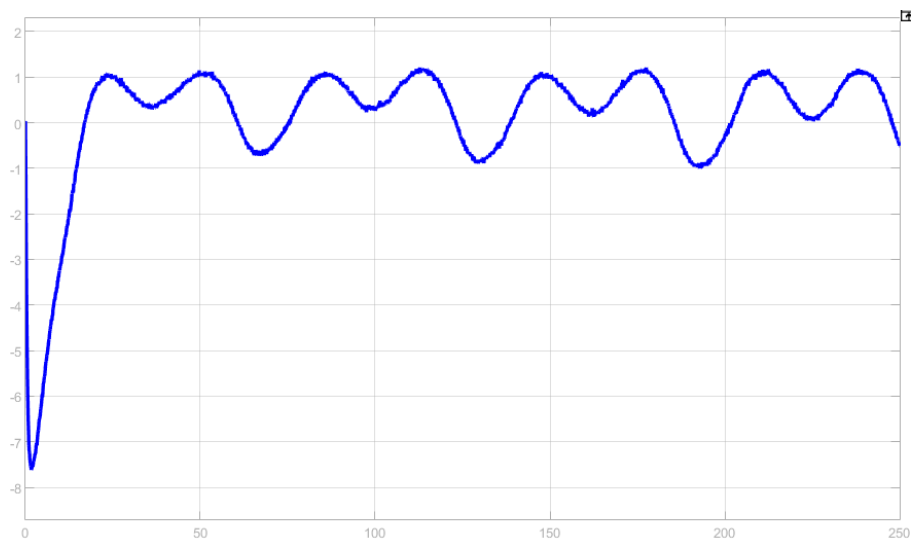


Figura 5.13 Andamento nel tempo errore $e_y(t)$.

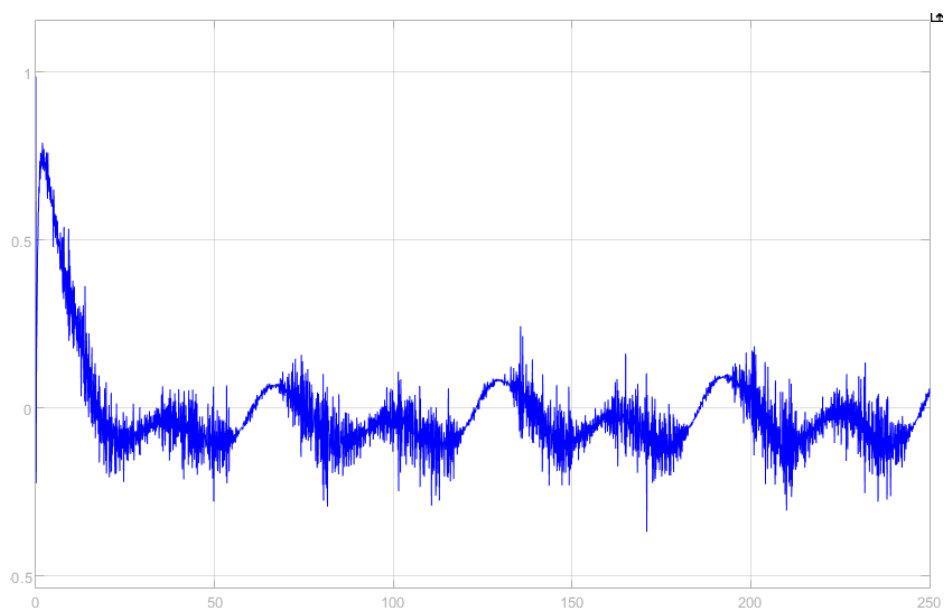


Figura 5.14 Andamento nel tempo errore $e_\theta(t)$.

Localizzazione Mediante Beacons

In questa ultima parte del capitolo , ipotizzeremo che all'interno dell'ambiente , sono presenti dei trasmettitori , i beacons. In particolare ipotizzeremo la presenza di 4 Beacons , disposti come mostrato nella figura seguente.

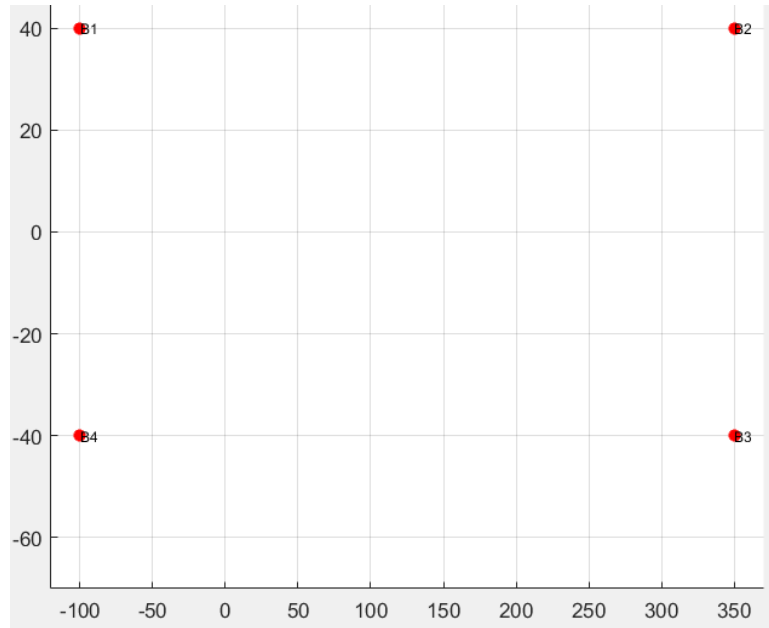


Figura 5.15 Posizionamento Beacons Nel Piano

Si tratta di trasmettitori , che forniscono informazioni sulla propria posizione , nonché sulla distanza del robot dal ricevitore; ad esempio il calcolo della distanza potrebbe essere basato sul tempo di andata del segnale , nell'ipotesi che sul beacons vi sia un meccanismo di time stamp.

Si ricordi , come la relazione tra posizione dei Beacons e distanze è data dalle seguenti equazioni

$$d_1 = \sqrt{(x_r - x_{B1})^2 + (y_r - y_{B1})^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x_r - x_{B2})^2 + (y_r - y_{B2})^2}$$

$$d_3 = \sqrt{(x_r - x_{B3})^2 + (y_r - y_{B3})^2}$$

$$d_4 = \sqrt{(x_r - x_{B4})^2 + (y_r - y_{B4})^2}$$

Di fatto quello che rappresentano queste relazioni è la struttura della funzione di misura per ogni uscita del robot

$$z_t = h_i(x_t) = \sqrt{(x_r - x_{Bi})^2 + (y_r - y_{Bi})^2}$$

Quindi si presuppone che ad ogni istante di tempo il robot riceve tutte e quattro le misurazioni da parte dei Beacons come illustrato nella figura seguente

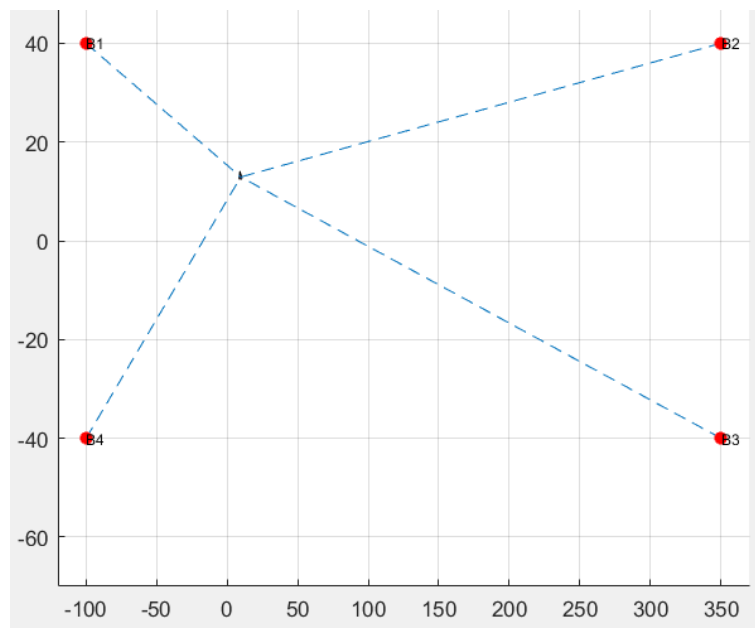


Figura 5.16 Ricezione Segnali Beacons

Ancora una volta sfrutteremo il Filtro di Kalman Esteso per risolvere il problema legato alla stima della configurazione del robot

$$q(t) = [x(t); y(t); \theta(t)]^T$$

Ricordiamolo , il Filtro di Kalman , è caratterizzato da due fasi ,una predizione ed una di correzione.

Per quanto il modello sulla base del quale predire lo stato futuro in funzione dell'azione di controllo (odometria) , come nel caso precedente faremo riferimento all'integrazione di Runge Kutta al secondo ordine

$$\begin{aligned}
x_{t+1} &= x_t + v_d T_s \cos\left(\theta(t) + \frac{\omega_d T_s}{2}\right) \\
y_{t+1} &= y_t + v_d T_s \sin\left(\theta(t) + \frac{\omega_d T_s}{2}\right) \\
\theta_{t+1} &= \theta_t + \omega_d T_s
\end{aligned}$$

Si ricordi tuttavia , come lo EKF si basa una espansione in serie di Taylor arrestata al primo ordine delle precedenti equazioni , valutata in corrispondenza dell'ultima stima ottenuta. Si riporta di seguito la struttura dello Jacobiano

$$J_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_d T_s \sin\left(\hat{\theta}(t) + \frac{\omega_d T_s}{2}\right) \\ 0 & 1 & v_d T_s \cos\left(\hat{\theta}(t) + \frac{\omega_d T_s}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ottenuta la predizione al tempo t sulla configurazione del sistema,

$$\hat{q}(t) = [\hat{x}(t); \hat{y}(t); \hat{\theta}(t)]^T$$

e ipotizzando di disporre delle quattro misurazioni d_1, d_2, d_3, d_4 da parte dei beacons , possiamo determinare l'innovazione

$$e(t) = [d_1 - h_1(\hat{q}); d_2 - h_2(\hat{q}); d_3 - h_3(\hat{q}); d_4 - h_4(\hat{q})]^T$$

rappresentante tutto ciò che non siamo riusciti a predire circa le distanza del robot ai beacons.

Si noti in particolare come in questo caso , il guadagno del filtro di Kalman sarà una matrice

$$K_t \in R^{3 \times 4}$$

Si ricordi che il calcolo del guadagno del filtro passa attraverso la seguente equazione

$$K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$$

con

$$H_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial h_4}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}$$

valutata in corrispondenza dell'ultima stima ottenuta.

Determinata l'innovazione ed il guadagno di Kalman , il passo successivo è la correzione all'odometria

fatta , ricordiamo , in accordo alla seguente equazione di aggiornamento

$$q_t = \hat{q}_t + K_t(d - h(\hat{q}_t)) = \hat{q}_t + K_t e_t$$

Ancora una volta giocando sulle matrici di covarianze , "diremo" al filtro di Kalman di fidarsi di più delle misurazioni che delle predizioni , con l'obiettivo di ridurre l'errore introdotto dalle tecniche di integrazione numerica.

Si riportano nelle pagine a seguire tutti i risultati sperimentali ottenuti con il controllo e le tecnica di localizzazione discussa in precedenza.

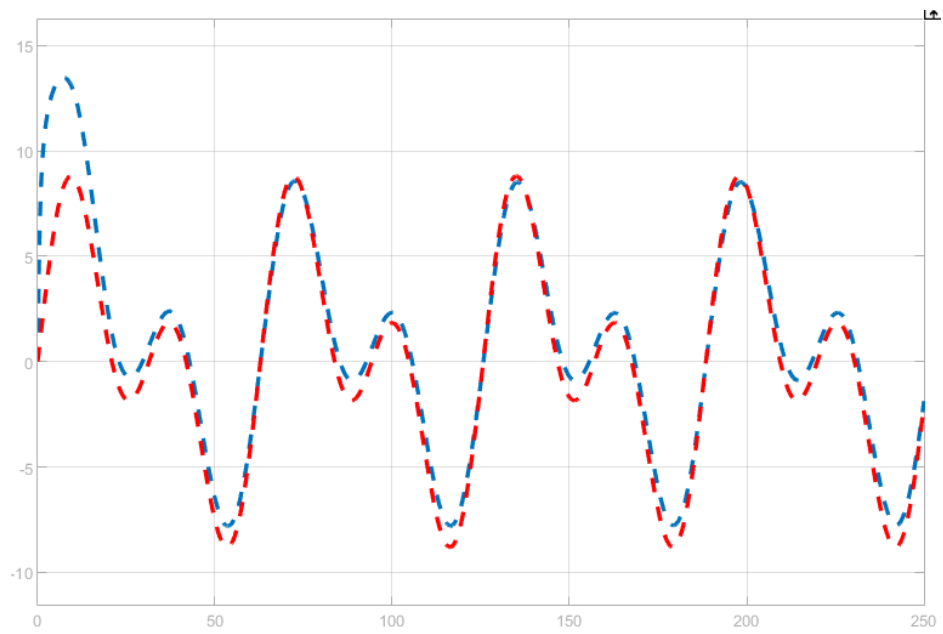


Figura 5.17 Risultati Numerici Ottenuti

Si riporta di seguito l'andamento degli errori e dei guadagni del filtro.

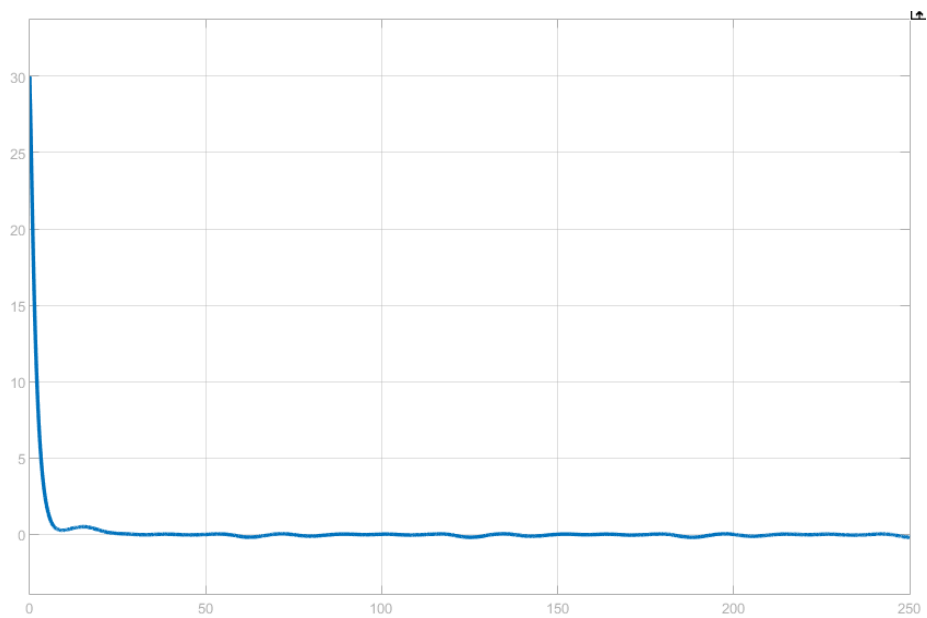


Figura 5.18 Andamento nel tempo errore $e_x(t)$.

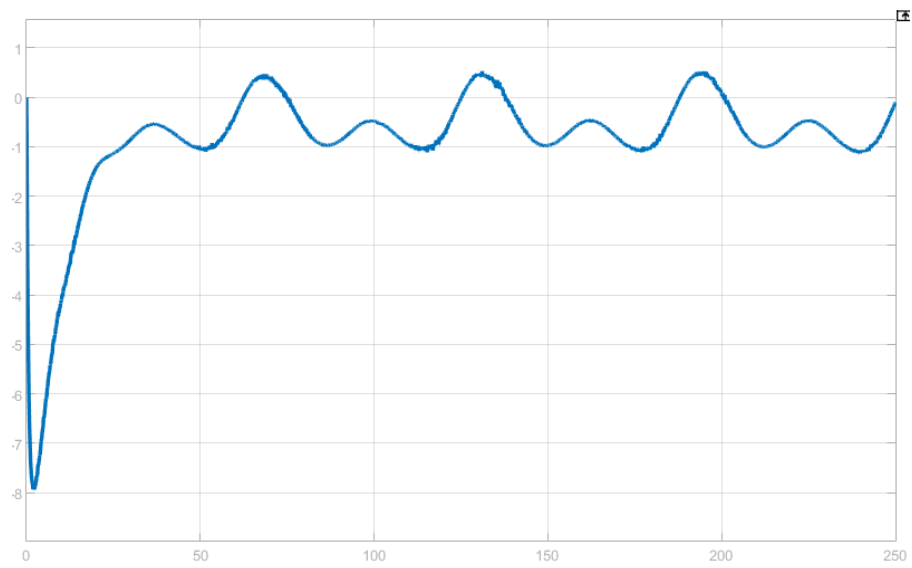


Figura 5.19 Andamento nel tempo di $e_y(t)$.

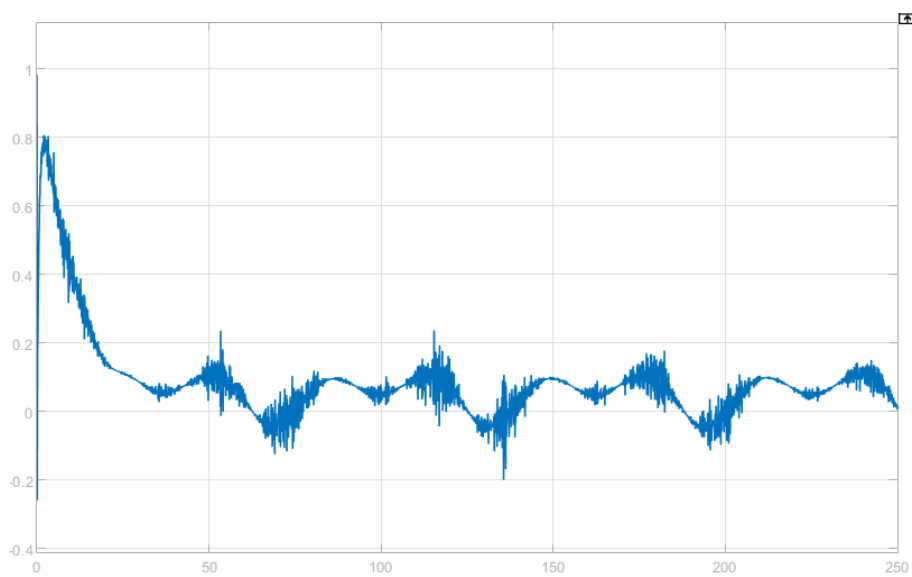


Figura 5.20 Andamento nel tempo di $e_\theta(t)$.

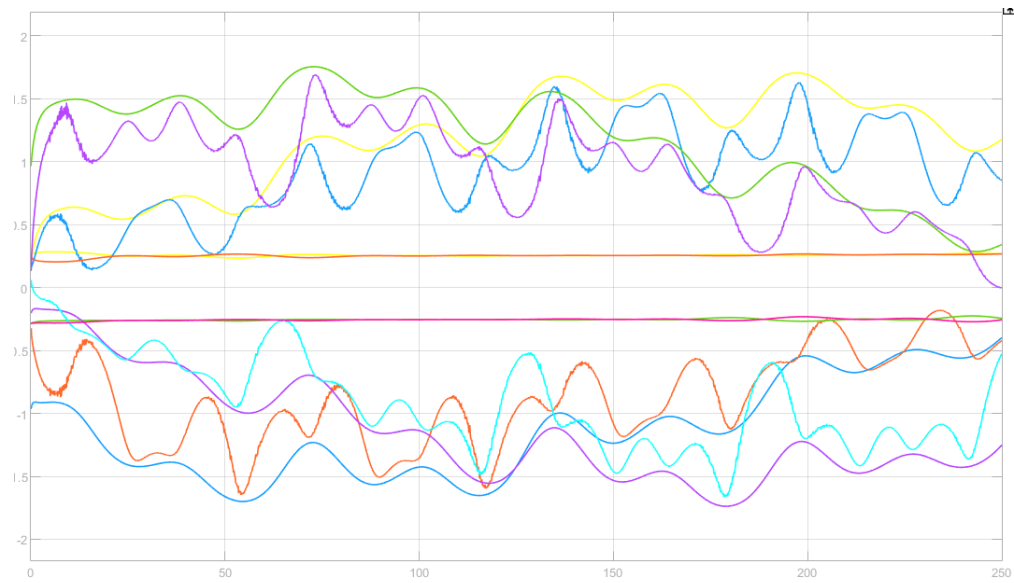


Figura 5.21 Andamento nel tempo Guadagni del filtro

Ancora una volta , la non divergenza si traduce perciò nella capacità del predittore di fornire una stima dello stato con un errore di entità limitata (in senso probabilistico).