3

Sistemi LPV e Controllo Gain-Scheduling

Nella sezione precedente abbiamo derivato diverse strategie di controllo , con l'obiettivo di rendere l'origine del seguente sistema dinamico non lineare

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\big(e_\theta(t)\big) \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 1 & -e_y \\ 0 & e_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

un equilibrio asintoticamente stabile. Tra le diverse soluzioni proposte , una , passava per il linearizzato in zero del precedente sistema

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A(t)e(t) + Bu(t)$$

Nella precedente sezione abbiamo visto che , anche se la retroazione in stato

$$u(t) = K\,e(t)$$

dove $K = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix}$ rappresenta il guadagno del controllore con

$$k_1 = k_3 = 2\zeta\alpha \;\; , k_2 = \frac{\alpha^2 - \omega_d^2}{v_d}$$

sia tale per cui gli autovalori closed - loop stiano nel semipiano sinistro aperto, questo di fatto non è sufficiente a garantire la stabilità asintotica del sistema linearizzato , a causa della sua natura tempo variante.

La precedente soluzione va bene soltanto nel far muovere il nostro robot su traiettorie in cui v_d e ω_d risultino costanti nel tempo.

L'idea alla base della soluzione proposta è quella di raggirare la tempo varianza dei parametri , trattando il sistema come un sistema incerto.

Incertezza Parametrica

Un modello matematico rappresenta soltanto una approssimazione al comportamento reale del processo. Le discrepanze possono essere causate dalla presenza di disturbi, dinamiche non modellate oppure dalla presenza di parametri di cui non se ne conosce esattamente il valore , ma soltanto il range di variabilità.

Se nella definizione dell'azione di controllo non tenessimo conto di tali discrepanze , l'azione di controllo così individuata , non solo potrebbe non garantire il raggiungimento delle performance desiderate , ma addirittura potrebbe non garantire la stabilità a ciclo chiuso.

L'obiettivo del controllo robusto è quello di progettare azioni di controllo tali per cui , il soddisfacimento delle performance , nonché la stabilità , siano garantite qualunque sia la realizzazione dell'incertezza.

Di seguito faremo riferimento all'incertezza parametrica , in particolare supporremo che i seguenti parametri

- Velocità di trazione v_d
- Velocità di sterzo ω_d

non siano perfettamente noti , ma ad essere noto sarà il loro range di variabilità

$$v_d(t) \in [\ \underline{v}_d \ ;\ \overline{v}_d\ ]$$

$$\omega_d(t) \in [\ \underline{\omega}_d \ ;\ \overline{\omega}_d\ ]$$

La limitatezza è una ipotesi al quanto ragionevole. Infatti , alla fine la locomozione sarà data dall'impiego di motori (tipicamente in continua a spazzole); di fatto dunque gli ingressi non potranno mai assumere valori infiniti , ricadranno sempre all'interno di un intervallo chiuso e limitato.

Di fatto dunque , non vi è nessuna perdita di generalità al discorso.

Come discusso in precedenza , nella definizione dell'azione di controllo bisogna prendere in considerazione esplicitamente la presenza di incertezza sul modello.

Nella sintesi di un controllore robusto è necessario la presa in considerazione dell'incertezza di modello, tramite le cosiddette rappresentazioni di stato incerte.

LDI – Linear Differential Inclusion

Supponiamo che nel modello vi sia la presenza di alcuni parametri incerti , racchiusi all'interno del vettore $p(t)$. La dipendenza dal tempo è dovuta al fatto che alcuni di tali parametri possano variare nel tempo.

Si consideri la seguente rappresentazione nello spazio di stato per un sistema dinamico

$$x(t+1) = A\big(p(t)\big)x(t) \ \ , x \in R^n$$

e sia $x(0) = x_0$ lo stato iniziale del processo. Come si nota la matrice del sistema è funzione del vettore dei parametri incerti. Al variare di $p(t)$ all'interno della regione ammissibile P , si hanno differenti matrici , e quindi di fatto , differenti sistemi dinamici lineari.

In particolare , tutte le matrici , appartengono all'insieme di incertezza

$$\Omega \coloneqq \{ A(p) \mid p \ \in P \}$$

Ω rappresenta una famiglia di sistemi dinamici. Il valore che lo stato del sistema assume al tempo $t+1$, dipende dalla particolare realizzazione del vettore $p(t)$. Di conseguenza , al tempo $t+1$ per il valore dello stato del sistema $x(t+1)$ abbiamo un insieme di possibili valori assunti , ciascuno associata ad una particolare realizzazione dell'incertezza.

$$x(t+1) \in \Omega \, x(t) \, , x(0) = x_0$$

Ω rappresenta una Linear Differential Inclusion , la definizione matematica di una famiglia di sistemi dinamici.

Qual è la proprietà fondamentale delle LDI. Di fatto , se noi siamo in grado di dimostrare che ogni traiettoria $x(t)$ dell'inclusione differenziale converge a zero asintoticamente , essendo la traiettoria del sistema reale una fra le tante , allora abbiamo dimostrato la convergenza a zero della traiettoria reale del processo sotto analisi.

L'idea delle inclusioni differenziali , come rappresentazione dei sistemi incerti e di fatto quella di considerare tutte le possibili realizzazioni dell'incertezza del modello. È una sorta di "worst - case approach".

Fra tutte le possibili strutture di Ω , nel proseguo faremo riferimento per la descrizione dell'incertezza , ad una rappresentazione politopica.

La nostra inclusione differenziale , sarà allora data dai modelli lineari

$$\dot{x}(t) = A\big(p(t)\big)x(t) + B\big(p(t)\big)u(t)$$

con $\big[A\big(p(t)\big); B\big(p(t)\big)\big] \in \Omega \; \forall \; t \geq 0$, dove

$$\Omega := \left\{ \big[A\big(p(t)\big); B\big(p(t)\big)\big] : \; [A(p); B(p)] = \sum_{i=1}^{L} p_i [A_i; B_i] \; , p_i \; \geq 0 \, , \sum p_i = 1 \right\}$$

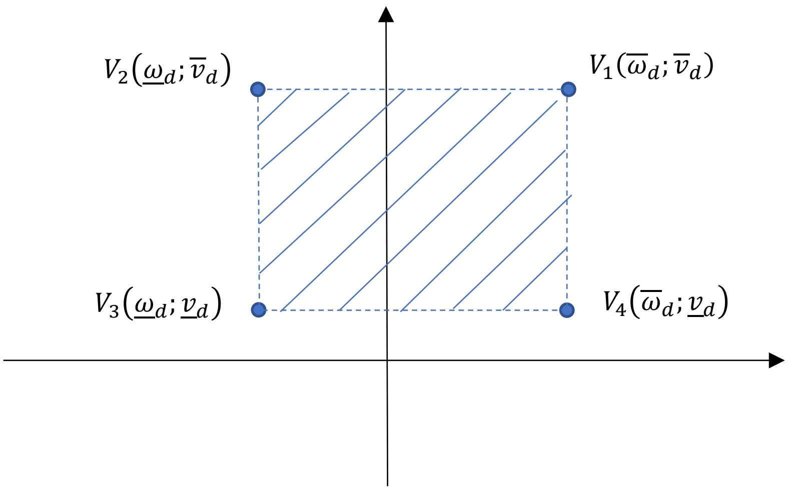
ad ogni istante di tempo dunque , la coppia delle matrici di sistema sarà una combinazione convessa degli L vertici del politopo.

Il primo passo è dunque cercare di capire come costruire la rappresentazione politopica del nostro sistema incerto. Come era naturale aspettarsi , ipotizzeremo che i parametri incerti del modello siano la velocità di trazione e di sterzo. Si ipotizzi inoltre che per tali parametri si abbiamo i seguenti range di variabilità

$$v_d(t) \in [\ \underline{v}_d\ \ ;\ \overline{v}_d\ ]$$

$$\omega_d(t) \in [\ \underline{\omega}_d\ ;\ \ \overline{\omega}_d\ ]$$

Portiamo le coppie di estremi (v_d, ω_d) in un sistema di assi ortogonali



La regione sbarrata rappresenta l'insieme dei valori ammissibili per l'incertezza , di fatto data dalla chiusura convessa dei vertici (V_1, V_2, V_3, V_4). La regione di incertezza sarà

$$\Delta_p := \left\{ \begin{bmatrix} v_d \\ \omega_d \end{bmatrix} :\ \begin{bmatrix} v_d \\ \omega_d \end{bmatrix} = p_1 \begin{bmatrix} \overline{v}_d \\ \overline{\omega}_d \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} \overline{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix} + p_3 \begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix} + p_4 \begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \overline{\omega}_d \end{bmatrix} \right\}$$

con p appartenente allo unitary simplex

$$P := \left\{ p \mid p_i \geq 0\, , \sum p_i = 1 \right\}$$

Allora , per linearità , si ha che

$$A\left(\begin{bmatrix} v_d \\ \omega_d \end{bmatrix}\right) = A\left(p_1 \begin{bmatrix} \overline{v}_d \\ \overline{\omega}_d \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} \overline{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix} + p_3 \begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix} + p_4 \begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \overline{\omega}_d \end{bmatrix}\right) =$$

$$= p_1 A\left(\begin{bmatrix} \overline{v}_d \\ \overline{\omega}_d \end{bmatrix}\right) + p_2 A\left(\begin{bmatrix} \overline{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix}\right) + p_3 A\left(\begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix}\right) + p_4 A\left(\begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \overline{\omega}_d \end{bmatrix}\right)$$

definendo allora con

$$A_1 = A\left(\begin{bmatrix} \overline{v}_d \\ \overline{\omega}_d \end{bmatrix}\right)\ , A_2 = A\left(\begin{bmatrix} \overline{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix}\right)\, , A_3 = A\left(\begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix}\right)\, , A_4 = A\left(\begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \overline{\omega}_d \end{bmatrix}\right)$$

otteniamo la rappresentazione cercata.

Nel seguito si tenga conto del fatto che soltanto la matrice della dinamica è dipendete dal vettore dei parametri incerti $p(t)$.

Una possibile scelta per i parametri del vettore $p(t)$ potrebbe essere la seguente

$$p_1(t) = \left(\frac{v_d(t) - \underline{v}_d}{\overline{v}_d - \underline{v}_d}\right)\left(\frac{\omega_d(t) - \underline{\omega}_d}{\overline{\omega}_d - \underline{\omega}_d}\right) \quad , \quad p_2(t) = \left(\frac{\overline{v}_d - v_d(t)}{\overline{v}_d - \underline{v}_d}\right)\left(\frac{\omega_d(t) - \underline{\omega}_d}{\overline{\omega}_d - \underline{\omega}_d}\right)$$

$$p_3(t) = \left(\frac{\overline{v}_d - v_d(t)}{\overline{v}_d - \underline{v}_d}\right)\left(\frac{\overline{\omega}_d - \omega_d(t)}{\overline{\omega}_d - \underline{\omega}_d}\right) \quad , \quad p_4(t) = \left(\frac{v_d(t) - \underline{v}_d}{\overline{v}_d - \underline{v}_d}\right)\left(\frac{\overline{\omega}_d - \omega_d(t)}{\overline{\omega}_d - \underline{\omega}_d}\right)$$

con , $p_i(t) \geq 0$,$\sum p_i(t) = 1 \;\; \forall t \geq 0.$

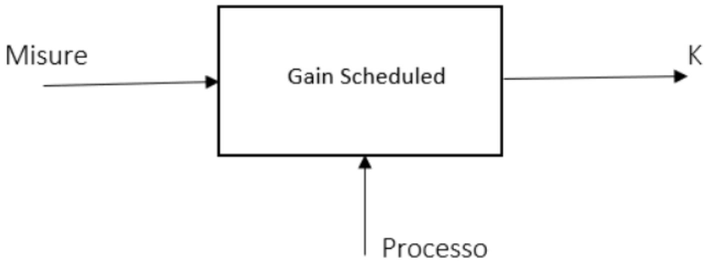
Notiamo dalle precedenti definizioni come di fatto il vettore dei parametri incerti $p(t)$ dipenda ad ogni istante di tempo dal valore delle grandezze $v_d(t)$, $\omega_d(t)$.

Di fatto noi, ad ogni istante di tempo siamo conosciamo il valore del riferimento , e quindi , siamo in grado ad ogni istante di tempo di misurare il valore del vettore dei parametri incerti $p(t)$.

La possibilità di poter misurare ad ogni istante di tempo il valore del vettore dei parametri incerti , ci da la possibilità di trattare il nostro sistema , non come un semplice sistema incerto , ma come un sistema LPV , ed in particolare la possibilità di introdurre un controllo a guadagno schedulato.

Controllo a Guadagno Schedulato

La tecnica di controllo a Guadagno Schedulato è stata introdotta con l'obiettivo di migliorare le deboli prestazioni di un controllore robusto. L'idea alla base del controllo "Gain – Scheduling" è quella di modificare il valore del guadagno K sulla base di misurazioni prese in "real-time".



Oltre alle misure , il controllo a guadagno schedulato sfrutta la conoscenza di tutte le informazioni che ha disposizione sullo impianto da controllare.

Queste misure , modificano la struttura del controllore e di fatto il segnale di comando. Come conseguenze i controlli a guadagno schedulato offrono prestazioni superiori rispetto a controlli robusti a guadagno costante , in quanto ora si tiene in considerazione della possibile natura tempo variante del processo.

I controlli a guadagno schedulato sono di fatto una naturale estensione del controllo robusto , quando facciamo riferimento alle classi dei sistemi dinamici LPV (Linear Parameters Varying) e Quasi-LPV.

I Sistemi LPV sono delle rappresentazioni in stato le cui matrici (A, B, C, D) dipendono esplicitamente da un vettore dei parametri $p(t)$ le cui componenti sono misurabili in tempo reale

$$\dot{x}(t) = A\big(p(t)\big)x(t) + B\big(p(t)\big)u(t)$$

$$y(t) = C\big(p(t)\big)x(t) + D\big(p(t)\big)u(t)$$

con $p(t) \in R^l$ misurabile.

Si noti che se $p(t) = p^* \ \forall t \geq 0$, il precedente sistema LPV , diventa un sistema LTI.

Proseguiamo la nostra discussione fornendo la definizione di stabilità asintotica per un sistema LPV. Si ricordi che la stabilità è una proprietà legata solo ed esclusivamente alla risposta libera del sistema, non dipenda dal controllo.

Quindi , di fatto la definizione di stabilità asintotica è data con riferimento al seguente sistema LPV autonomo

$$\dot{x}(t) = A\big(p(t)\big)x(t)$$

con $p(t)$ misurabile e $p(t) \in P\ \forall t \geq\ 0.$ Inoltre si fa riferimento nel proseguo ad una rappresentazione politopica

$$A\big(p(t)\big) \in \Omega := \left\{ \mathrm{A(p)} \mid \mathrm{A(p)} = \sum_{i=1}^{L} p_i(t)A_i \ \ , p_i(t) \geq 0, \sum p_i(t) = 1 \right\}$$

Definizione

Il sistema LPV autonomo è asintoticamente stabile se $\forall x_o \in R^n$, $\forall\ p(t) \in P\ \ t \geq 0$ si ha che

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0_x$$

Si ricordi che condizione sufficiente alla stabilità asintotica è la stabilità quadratica , più semplice da verificare.

Definizione

Il sistema LPV è stabile in senso quadratico se esiste una funzione quadratica

$$V\big(x(t)\big) = x(t)^T P x(t) \ \ , \qquad P = P^T > 0$$

tale che

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial t} < 0\,, \qquad \forall\ p\ \in P$$

Un sistema quadraticamente stabile è anche asintoticamente stabile , ma il viceversa non è vero in generale , tranne che per i sistemi LTI.

Obiettivo della sezione è la definizione di una azione di controllo

$$u(t) = K\big(p(t)\big)x(t)$$

con ,

$$K\big(p(t)\big) = \sum p_i(t)K_i$$

e $p(t)$ misurabile , tale per cui il sistema a ciclo chiuso sia quadraticamente stabile.

Di fatto , in accordo alla definizione precedente questo si traduce nel richiedere l'esistenza di una matrice $P = P^T > 0$ tale che

$$[\,A(p(t)) + B(p(t))K(p(t))]^T P + P\,[\,(A(p(t)) + B(p(t))K(p(t))] < 0, \forall p \in P$$

ricordando che una trasformazione di congruenza non altera il segno della diseguaglianza , possiamo pre e post moltiplicare per P^{-1} , ottenendo

$$[A(p(t))P^{-1} + B(p(t))K(p(t))P^{-1}]^T + [A(p(t))P^{-1} + B(p(t))K(p(t))P^{-1}] < 0\,, \forall\, p \in P$$

poniamo poi $X = P^{-1}$, ottenendo

$$XA(p(t)) + XK(p(t))^T B(p(t)) + A(p(t))X + B(p(t))K(p(t))X < 0, \forall p \in P$$

sempre con riferimento ad una descrizione politopica dell'incertezza , sostituendo le relative espressioni per $A(p(t))$ e per $B(p(t))$

$$A(p(t)) = \sum p_i(t)A_i$$

$$B(p(t)) = \sum p_i(t)B_i$$

con $p_i(t) \geq 0\,, \sum p_i = 1\,, \forall t \geq 0$, otteniamo

$$X\left(\sum p_i A_i\right)^T + X\left(\sum p_j K_j\right)^T \left(\sum p_i B_i\right)^T + \left(\sum p_i A_i\right)X + \left(\sum p_i B_i\right)\left(\sum p_j K_j\right)X < 0$$

detti $K_i = W_i X^{-1}$,

$$X\left(\sum p_i A_i\right)^T + X\left(\sum p_j W_j X^{-1}\right)^T \left(\sum p_i B_i\right)^T + \left(\sum p_i A_i\right)X + \left(\sum p_i B_i\right)\left(\sum p_j W_j X^{-1}\right)X < 0$$

ricordando poi che

$$\sum p_j = 1$$

la precedente espressione può essere così riscritta

$$\sum_i \sum_j p_i p_j [XA_i^T + W_j^T B_i^T + A_i X + B_i W_j] < 0\,, \ \ \forall p_i, p_j$$

fissato p_i la precedente espressione è lineare in p_j e quindi convessa in p_j , di conseguenza in accordo al seguente risultato

Proposizione

Sia $f : \Omega \subseteq R^n \to R$ con f convessa su Ω insieme compatto e convesso , allora

$$f(x) < 0 \;\; \forall x \in \Omega \;\; se\ e\ solo\ se\ f(x) < 0 \;\forall\; x \in \Omega_E$$

è sufficiente verificare la precedente espressione soltanto sui vertici del politopo

$$\left[XA_i^T + W_i B_j^T + A_i X + B_i W_j\right] < 0 \;\; i = 1 , \dots \;\; , L , j = 1, \dots L$$

in totale dunque L^2 diseguaglianze matriciali lineari (LMI).

Quella di prima è di fatto la dimostrazione della seguente proposizione

Proposizione

Il sistema LPV politopico

$$\dot{x}(t) = A\big(p(t)\big)x(t) + B\big(p(t)\big)u(t)$$

è quadraticamente stabilizzabile attraverso una retroazione

$$u(t) = K\big(p(t)\big)x(t)$$

con

$$K\big(p(t)\big) = \sum p_i K_i$$

se $\exists\; X = X^T > 0 , \exists\; W_1, W_2, \dots \;\; , W_L$ tale che

$$\left(A_i X + B_i W_j\right)^T + \left(A_i X + B_i W_j\right) < 0 \;, i = 1 \,..\, L \;, j = 1 \dots L$$

Se esiste una soluzione , i controllori corrispondenti saranno allora dati da

$$K_i = W_i X^{-1}$$

Definita l’azione di controllo , rimane il problema della stima dello stato ad ogni istante di tempo. Problema che verrà risolto nel capitolo successivo.