

# Università della Calabria

---

Dipartimento di Ingegneria  
Informatica , Modellistica , Elettronica e Sistemistica



Corso di Laurea Magistrale in  
Ingegneria Robotica e dell'Automazione

*Tesi di Laurea*

*“Controllo LPV di un robot unicycle con sistema di localizzazione basato su Filtri  
Bayesiani”*

*Relatore*

Prof. Luigi D'Alfonso

*Candidato*

Nicola Corea  
Matr. 235279

---

Anno Accademico 2022/2023



Dedicata ai miei Genitori,  
fonte di sostegno e di coraggio.



# Indice

---

<b>1. Introduzione .....</b>	<b>8</b>
1.1 Vincoli Cinematici .....	10
1.2 Condizioni Di Integrabilità .....	16
 <b>2. Modellazione e Controllo .....</b>	<b>22</b>
2.1 Modello Cinematico .....	23
2.2 Uniciclo .....	25
2.3 Uniciclo a Trazione Differenziale .....	28
2.4 Estensione Dinamica .....	29
2.5 Pianificazione del Moto .....	32
2.6 Feedback Control .....	35
2.7 Lyapunov Design .....	38
2.8 Linearizzazione .....	43
Conclusioni .....	46
 <b>3. Sistemi LPV e Controllo Gain Scheduling .....</b>	<b>48</b>
3.1 Incertezza Parametrica .....	49
3.2 LDI – Linear Differential Inclusion .....	50
3.3 Controllo a Guadagno Schedulato .....	55

<b>4. Stima Ricorsiva dello Stato .....</b>	<b>61</b>
4.1 Robotica Probabilistica .....	64
4.2 Filtro di Bayes .....	68
4.3 Filtri Gaussiani .....	71
4.4 Filtro di Kalman .....	71
4.5 Filtro di Kalman Esteso .....	79
4.6 Localizzazione Odometrica .....	81
 <b>5. Risultati Sperimentali .....</b>	 <b>85</b>
5.1 Simulazioni Controllo Gain Scheduling .....	86
5.2 Risultati Filtro di Kalman Esteso .....	93
5.3 Localizzazione Mediante Beacons .....	99

**Conclusioni**

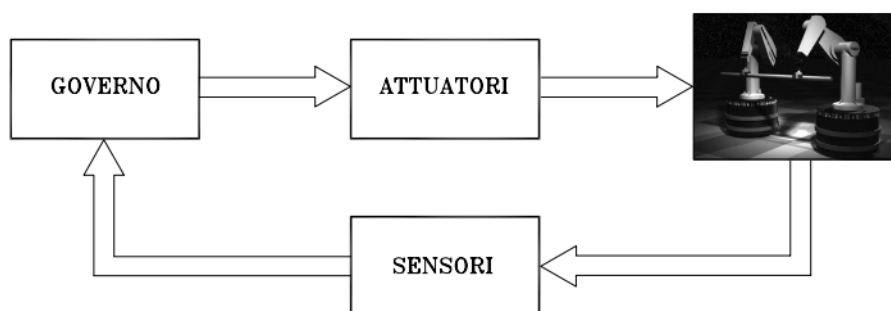
**Riferimenti**



## Introduzione

---

Un robot da un punto di vista teorico , può essere definito come una macchina capace di apportare modifiche all'ambiente, esplicando azioni condizionate da un insieme di regole di comportamento nonché da un insieme di informazioni acquisite sullo stato del robot (sensori propriocettivi) e sullo stato dell'ambiente stesso (sensori esteroceettivi). Di fatto , la robotica studia la connessione intelligente tra percezione e azione.

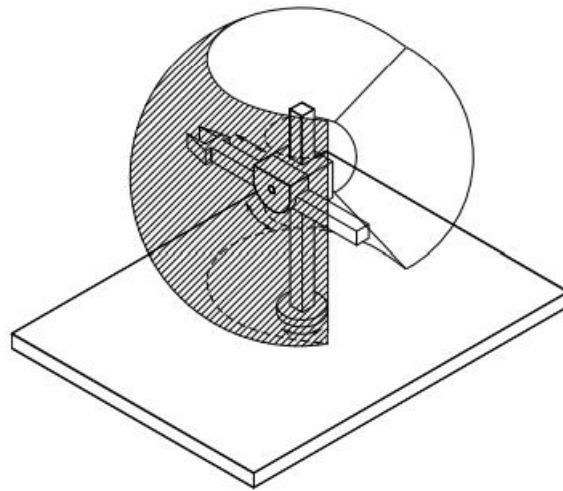


**Figura 1.1** Schema Rappresentativo

Dalla figura sopra riportato salta subito all'occhio il carattere interdisciplinare della robotica. Il 90% della robotica industriale è caratterizzata dall'impiego di robot manipolatori , ovvero robot a base fissa. Senza entrare troppo nei dettagli , da un punto di vista meccanico , un manipolatore , può essere semplicemente definito come una catena cinematica data dalla interconnessione di bracci (link) per mezzo di giunti rotoidali o prismatici. Ma qual è la conseguenza principale nell'adottare un robot a base fissa? Lo svantaggio è che lo spazio di lavoro , inteso come la porzione dell'ambiente accessibile dall'organo terminale (pinza , etc..) è limitata. La sua forma ed il suo volume sono funzione della distribuzione dei gradi di libertà lungo la

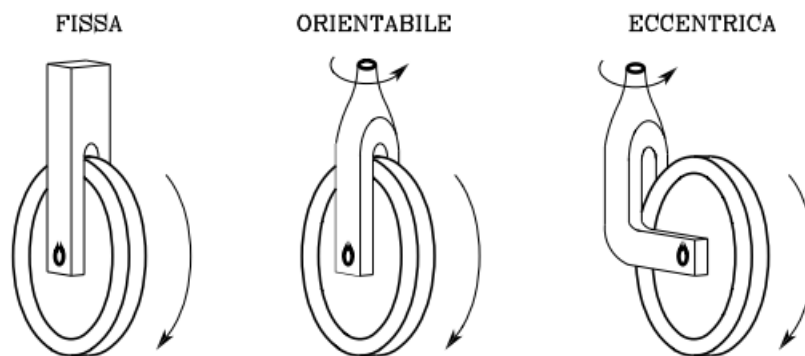


struttura portante del robot stesso. Ad esempio nella figura sottostante si riporta lo spazio di lavoro con riferimento ad un robot manipolatore sferico,



**Figura 1.2** Spazio di Lavoro Manipolatore Sferico

si noti come lo spazio di lavoro coincide con una semplice sfera cava. L'introduzione di una base semovente, e quindi dare la capacità al robot di muoversi liberamente nell'ambiente, fa dello spazio di lavoro, uno spazio tendenzialmente illimitato. Dalle considerazioni fatte fino a questo punto, possiamo definire un robot mobile, un robot costituito da uno o più corpi rigidi, dotato di un sistema di locomozione. Fra tutti i sistemi possibili, la locomozione mediante ruote è di fatto la modalità di movimentazione più utilizzata in pratica. Possiamo individuare tre tipi di ruote convenzionali



**Figura 1.3** Tipologie di ruote maggiormente utilizzate

La ruota fissa , con un solo asse di rotazione ortogonale al piano contenente la ruota stessa , la ruota orientabile e la ruota eccentrica con due assi di rotazione , di cui uno verticale , che da alla ruota la possibilità di orientarsi. Si noti come nella terza

tipologia , il secondo asse di rotazione non passa per il centro della ruota stessa , ma è traslato di una quantità fissa (offset). Questa disposizione da alla ruota la funzione di punto di appoggio per il bilanciamento statico senza influenzare in nessun modo la mobilità della base. Ma se da una parte danno la capacità al robot di intervento autonomo , ampliamento della regione di operatività , dall'altra, i veicoli su ruote sono soggetti a vincoli cinematici che ne limitano la mobilità locale, o meglio , ne limitano i moti istantaneamente ammissibili. Sappiamo , che seppur possiamo portare un automobile in qualsiasi configurazione (posa) , ad ogni istante di tempo non possiamo ottenere moti nella direzione ortonormale all'asse sagittale del veicolo; tradotto , il vettore velocità ad ogni istante è ortogonale alla direzione in cui si muove il veicolo. E' necessario di fatto avere a disposizione gli strumenti per analizzare la struttura dei vincoli a cui il nostro sistema è sottoposto.

## Vincoli Cinematici

Siano a tal proposito  $(q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t))$  le  $n$  coordinate generalizzate rappresentati la configurazione  $q(t) \in R^n$  del nostro robot nello spazio delle configurazioni  $\mathcal{C}$ . L'evoluzione nel tempo del vettore  $q(t)$  può essere soggetto a vincoli. Nel seguito faremo soprattutto riferimento a vincoli bilaterali scleronomi, cioè espressi per mezzo di eguaglianze e non dipendenti esplicitamente dal tempo.

Una importante classificazione sulla natura dei vincoli può essere fatta in merito alla loro dipendenza o meno dal vettore delle velocità generalizzate  $\dot{q}(t)$ .

Iniziamo la nostra discussione sulla natura dei vincoli , partendo dalla seguente definizione

### Definizione 1.1 (Vincolo Cinematico)

Si definisce vincolo cinematico , il vincolo

$$a_i(q(t), \dot{q}(t)) = 0$$

dipendente sia dal vettore delle coordinate generalizzate che da quello delle velocità.

I vincoli cinematici sono in genere espressi in forma Pfaffiana , ovvero lineari nel vettore delle velocità generalizzate

$$a_i^T(q(t))\dot{q}(t) = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

con  $a_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  campi vettoriali di classe  $\mathcal{C}^\infty$  e linearmente indipendenti.

Ma analizziamo più in dettaglio la struttura di tali vincoli

$$a_i(q(t))^T \dot{q}(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij}(q(t)) \dot{q}_j(t) = \sum_{j=1}^n a_i(q(t)) \frac{\partial q(t)}{\partial t} = 0$$

ma se ,

$$\sum_{j=1}^n a_i(q(t)) \frac{\partial q(t)}{\partial t} = 0$$

allora

$$\sum_{j=1}^n a_i(q(t)) \partial q(t) = 0$$

Questa banale osservazione , ci mostra che in realtà i vincoli cinematici in forma Pfaffiana sono delle forme differenziali lineari.

### Teorema

Sia  $f:A \rightarrow R$  con  $A \subseteq R^n$  aperto e  $f \in C^1$  su  $A$ . Allora ,  $f$  è differenziabile su tutto  $A$  , ed il suo differenziale è dato da

$$df = \nabla f(x)^T dx = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

Il precedente teorema , ben noto risultato dell'Analisi matematica , ci mostra come di fatto il differenziale di una funzione scalare è una forma differenziale lineare. Tuttavia il viceversa non è vero in generale

“ Non tutte le forme differenziali lineari sono il differenziale di una funzione scalare”

Si noti come le forme differenziali lineari generalizzano la definizione di primitiva al caso multi-variabile.

Prendiamo in considerazione una generica forma differenziale lineare del tipo

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i = 0$$

ed in particolare , ipotizziamo sia una forma differenziale esatta , ovvero il differenziale di una qualche funzione scalare  $f$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x) dx_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i = 0$$

Interpretando le variazioni parziali come componenti di un campo di forze , la precedente espressione può essere considerata come il lavoro impiegato dal campo per uno spostamento infinitesimale  $dx$ . Il lavoro totale compiuto dal campo di forze su un percorso  $\gamma$  sarà allora dato da

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} dW &= \int_{\gamma} \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \right) = \int_{t_0}^t \left( \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} \right) dt = \\ &= \int_{t_0}^t \frac{\partial f(x(t))}{\partial t} dt = f(x(t)) - f(x(t_0)) \end{aligned}$$

Il penultimo passaggio deriva immediatamente dalla derivata di funzione composta. Come notiamo il lavoro dipende soltanto dal punto iniziale e finale , di conseguenza il campo di forze è conservativo , e di fatto , esprimibile come gradiente di una funzione scalare  $f$  , nota in letteratura con il nome di potenziale del campo.

Dalle considerazioni precedenti concludiamo immediatamente che se il vincolo cinematico in forma pfaffiana è una forma differenziale esatta , questo può essere integrato ed espresso nella seguente forma

$$h_i(q(t)) = c$$

con  $h_i : R^n \rightarrow R$  differenziabile tale che

$$a_{ij}(q(t)) = \frac{\partial h_i(q(t))}{\partial q_j} \quad j = 1, \dots, k$$

e  $c$  costante di integrazione.

Ma di fatto non tutte le forme differenziali sono esatte. E frequente nel caso di robot mobili su ruote il caso in cui la forma differenziale

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}(q(t)) \partial q_j(t) = 0$$

non sia integrabile, però di fatto potrebbe esistere un opportuno fattore  $\gamma(q(t)) \neq 0$ , noto come fattore di integrazione, tale per cui il vincolo

$$\sum_{j=1}^n \gamma(q(t)) a_{ij}(q(t)) \partial q_j(t) = 0$$

sia esatto (forma differenziale), in questo caso il vincolo potrà essere integrato e ricondotto alla forma

$$h_i(q(t)) = c$$

con  $h_i: C \rightarrow R^n$  differenziabile tale che

$$\frac{\partial h(q)}{\partial q_j} = \gamma(q) a_{ij}(q) \quad j = 1, \dots, n$$

In questo caso si parla di olonomaticità del vincolo, come specificato dalla definizione seguente

### Definizione 1.3 (Vincolo Olonomo)

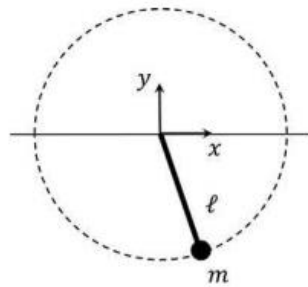
Si definisce olonomo un vincolo cinematico riducibile (integrabile) alla forma

$$h_i(q(t)) = 0 \quad i = 1, \dots, k$$

Vediamo un esempio molto semplice di un sistema soggetto a vincoli olonomi.

### Esempio 1.1 (Pendolo)

Si consideri a tal proposito un corpo di massa  $m$  legato alla estremità di una asta rigida di lunghezza  $l$ , incernierata all'origine di un sistema di assi ortogonali



**Figura 1.4** Pendolo

Le coordinate  $(x, y)$  della massa  $m$  sono tali per cui il seguente vincolo (olonomo)

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0$$

che limita il moto del corpo ad una circonferenza di raggio  $l$ .

Come notiamo l'effetto di un vincolo olonomo è quello di ridurre lo spazio delle configurazioni accessibili, in quanto il moto è vincolato ad appartenere ad una ben definita superficie di livello della funzione scalare  $h$ .

Di contro, nella ipotesi di non integrabilità, come è ben visibile, l'effetto di tale vincolo è quello di limitare i moti istantaneamente ammissibili, in quanto il vettore delle velocità generalizzate è vincolato ad appartenere ad un ben definito sottospazio di dimensione  $n - 1$ , e cioè al

$$\text{Ker} \left( a(q(t))^T \right)$$

Però, notiamo, non si ha nessuna riduzione sullo spazio delle configurazioni accessibili. Ovviamente, le conclusioni tratte per un singolo vincolo si generalizzano immediatamente alla presenza di  $k$  vincoli cinematici.

Introdotta la struttura dei vincoli, deriviamo, sfruttando semplici conoscenze di analisi matematica, condizioni necessarie alla integrabilità dei vincoli a cui è soggetto un sistema meccanico. In particolare la condizione presentata / derivata è una semplice conseguenza delle funzioni due volte differenziabili con continuità, noto in letteratura come Teorema di Schwarz.

## Condizioni Di Integrabilità

---

Consideriamo a tal proposito la seguente del tutto generale forma differenziale lineare esatta

$$w = a(x, y)dx + b(x, y)dy$$



e sia  $h: C \rightarrow R^n$  una sua primitiva , ovvero ricordiamolo

$$\frac{\partial h}{\partial x} = a(x, y) , \quad \frac{\partial h}{\partial y} = b(x, y)$$

se i coefficienti della forma differenziale sono due volte differenziabili con continuità  $C^2$  , dal teorema di Schwarz segue immediatamente che le derivate parziali miste devono coincidere, ovvero

$$\frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x} = \frac{\partial a(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial b(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}$$

Abbiamo di fatto ricavato una semplice ma importante condizione necessaria alla integrabilità. Riportiamo il precedente risultato al caso dei vincoli cinematici in forma Pfaffiana,

$$a(q(t))^T \dot{q}(t) = \sum_{j=1}^n a_j(q(t)) \dot{q}_j(t) = 0$$

affinché esso sia integrabile deve esistere una funzione scalare (potenziale)  $h: C \rightarrow R^n$  , ed un fattore di integrazione  $\gamma(q(t)) \neq 0$  tale che il gradiente

$$\frac{\partial h(t)}{\partial q} = \gamma(q(t)) a(q(t))^T$$

se aggiungiamo l'ipotesi che i coefficienti  $a_{ij}(q(t)) \in C^\infty$  , deve necessariamente essere verificato

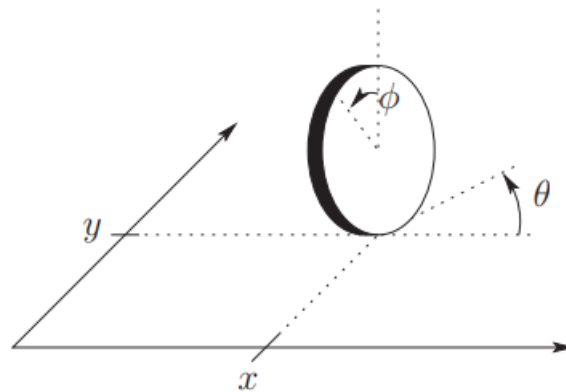
$$\frac{\partial (\gamma(q)a_i(q))}{\partial q_j} = \frac{\partial (\gamma(q)a_j(q))}{\partial q_i} \quad \forall i \neq j$$

Se l'unica soluzione al sistema si ha per  $\gamma(q) = 0$ , per quanto detto fino a questo punto, il vincolo non risulterà essere integrabile.

Concludiamo la sezione con la presentazione di un semplice esempio molto importante per il capitolo successivo

### Esempio 1.2

Consideriamo un disco che rotola senza slittare su un piano orizzontale, mantenendo il proprio piano sagittale in direzione verticale, come riportato nella figura seguente



**Figura 1.5** Disco su piano orizzontale

La configurazione del disco è completamente descritta dal vettore delle coordinate generalizzate

$$q(t) = [x(t), y(t), \theta(t), r\phi(t)]^T$$

dove  $x(t), y(t)$  fanno riferimento alla posizione cartesiana del disco ,  $\theta(t)$  ne rappresenta l'orientamento del disco rispetto all'asse  $x$ . Mentre  $r$  e  $\phi(t)$  fanno riferimento rispettivamente al raggio della ruota e l'angolo che la ruota forma con l'asse verticale passante per il centro della ruota stessa.

Imponendo il vincolo di puro rotolamento della ruota rispetto al piano , otteniamo

$$\dot{x}(t) - r\dot{\phi}(t) \cos(\theta(t)) = 0$$

$$\dot{y}(t) - r\dot{\phi}(t) \sin(\theta(t)) = 0$$

Indicando con

$$A(q(t))^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\cos(\theta(t)) \\ 0 & 1 & 0 & -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix}$$

i vincoli sono esprimibili in forma Pfaffiana come segue

$$A(q(t))^T \dot{q}(t) = 0$$

Si noti come la terza componente del vettore velocità è libera, a differenza delle altre tre vincolate ad appartenere ad un ben definito sottospazio. Di fatto se tralasciamo l'ultima coordinata , ovvero non ci preoccupiamo dell'orientamento della ruota rispetto al piano verticale , il vincolo di puro rotolamento può essere ricondotto a

$$\dot{x}(t) \sin(\theta(t)) - \dot{y}(t) \cos(\theta(t)) = 0$$

che , osserviamo bene , impone che il vettore velocità non abbia componenti lungo la direzione normale al piano sagittale del veicolo.

Infatti se

$$[\cos(\theta(t)) \sin(\theta) \ 0]$$

individua il piano sagittale della ruota , il vettore

$$[\sin(\theta(t)) \ -\cos(\theta(t)) \ 0]$$

individuera il piano normale al piano sagittale in quanto come ben vediamo

$$[\sin(\theta(t)) \ -\cos(\theta(t)) \ 0][\cos(\theta(t)) \ \sin(\theta) \ 0]^T = 0$$

Il precedente vincolo è esprimibile in forma Pfaffiana come segue

$$[\sin(\theta(t)) \ -\cos(\theta(t)) \ 0] \dot{q}(t) = 0$$

Con riferimento al vincolo precedente dimostriamo dunque il suo carattere non olonomo facendo uso della condizione necessaria derivata nel precedente paragrafo; in particolare dimostriamo come l'unica soluzione al seguente sistema

$$\begin{cases} \sin(\theta) \frac{\partial \gamma}{\partial y} = -\cos(\theta) \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \cos(\theta) \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \gamma \sin(\theta) \\ \sin(\theta) \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = -\gamma \cos(\theta) \end{cases}$$

si ottiene per  $\gamma = 0$ . Infatti quadrando e sommando le ultime due equazioni si ottiene  $\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \pm \gamma$ . Prendendo ad esempio  $\frac{\partial \gamma}{\partial \theta} = \gamma$ , si ha

$$\begin{cases} \sin(\theta) \frac{\partial \gamma}{\partial y} &= -\cos(\theta) \frac{\partial \gamma}{\partial x} \\ \gamma \cos(\theta) &= \gamma \sin(\theta) \\ \gamma \sin(\theta) &= -\gamma \cos(\theta) \end{cases}$$

che ha come unica soluzione  $\gamma = 0$ . Il vincolo non riduce lo spazio delle configurazioni accessibili  $\mathcal{C} = R^3$ , ma di fatto ne limita i moti istantaneamente ammissibili.

Questo esempio sarà di fondamentale importanza nel capitolo seguente per la definizione del modello cinematico del robot mobile a cui faremo riferimento nel proseguo.

## Modellazione e Controllo

---

In questa sezione ci proponiamo di derivare , mediante semplici considerazioni di carattere geometrico , il modello matematico associato al robot a cui intendiamo applicare un controllo , un unicycle a trazione differenziale. In particolare prima di passare all'esempio specifico , faremo una serie di considerazioni a carattere del tutto generale , applicabili di fatto a qualsiasi sistema meccanico soggetto a vincoli.

Supponiamo a tal proposito , di considerare un sistema meccanico soggetto a  $k$  vincoli cinematici in forma Pfaffiana

$$a_i(q(t))^T \dot{q}(t) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

o , in forma matriciale

$$A^T(q(t))\dot{q}(t) = 0$$

I campi  $h_i: \mathcal{C} \rightarrow R^n$  vengono assunti essere di classe  $C^\infty$  e linearmente indipendenti.

## Modello Cinematico

---

Avendo ipotizzato che i campi siano fra loro linearmente indipendenti , notiamo come ad ogni istante di tempo , il precedente set di equazioni definisce il sottospazio  $n - k$  dimensionale a cui il vettore delle velocità generalizzate deve appartenere , ovvero , il sottospazio nullo della matrice  $A(q(t))^T$

$$\text{Ker} \left( A(q(t))^T \right)$$

Con un po' di ricordi verso l'algebra lineare , scelta allora una base per il nullo

$$\text{Ker} \left( A(q(t))^T \right) = \text{span} \left( g_1(q(t)), g_2(q(t)), \dots, g_{n-k}(q(t)) \right)$$

il vettore delle velocità dovrà allora esprimersi come combinazione lineare della base precedente, e quindi di fatto , possiamo definire le traiettorie ammissibili per il nostro sistema meccanico come le soluzioni del seguente sistema differenziale

$$\dot{q}(t) = G(q(t))u = \sum_{i=1}^{n-k} g_i(q(t))u_i$$

Si noti , come dando a  $u$  , l'interpretazione di ingresso per il sistema vi è l'assenza di deriva (driftless system) in quanto  $\dot{q}(t) = 0$  , quando l'ingresso è nullo. Potremmo di fatto interpretare l'assenza di deriva come l'assenza di una dinamica libera in un generico sistema dinamico.

Dall'algebra è noto che la scelta della base per un generico spazio non è unica , di fatto a diverse scelte della base corrispondono diverse rappresentazioni del vettore delle velocità , ovvero diversi valori per il vettore  $u$ . Di fatto , dunque ,

il vettore  $u$  potrebbe non essere direttamente legato alle cause che generano il moto (forze generalizzate) , ed è per questa ragione che al precedente modello si associa il nome di modello cinematico per il sistema meccanico. Infatti , in funzione della base scelta , il precedente modello potrebbe fornire soltanto una descrizione geometrica dei moti ammissibili, senza però mettere in relazione gli effetti con le cause che li generano.

Oltre che alla definizione dei moti istantaneamente ammissibili , il precedente sistema può di fatto essere utilizzato per studiare il carattere olonomo o meno dei vincoli a cui il sistema è soggetto. La olonomia , infatti può essere stabilita studiando la controllabilità / raggiungibilità del precedente sistema.

Dalla Teoria dei Sistemi Dinamici , si ricordi infatti come la raggiungibilità è una proprietà direttamente legata all'insieme degli stati raggiungibili per applicazione di ingressi ammissibili a partire da una generica condizione iniziale. Di fatto dunque se il sistema

$$\dot{q}(t) = G(q(t))u$$

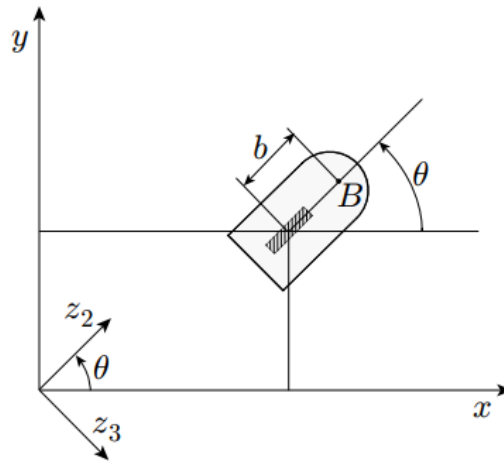
è raggiungibile (completa raggiungibilità) , date due generiche configurazioni esisterà sempre un ingresso che permetterà di effettuare tale transizione di stato. Se ne conclude dunque il carattere strettamente non integrabile dei precedenti vincoli, in quanto come ricordiamo dalla sezione precedente il carattere dei vincoli anolonomi è quello di limitare i moti istantaneamente ammissibili ma non ridurre lo spazio delle configurazioni accessibili.

Fatte queste semplici considerazioni di carattere puramente geometrico , proseguiamo la discussione con l'applicazione dei precedenti concetti ad un caso specifico : l'uniciclo.



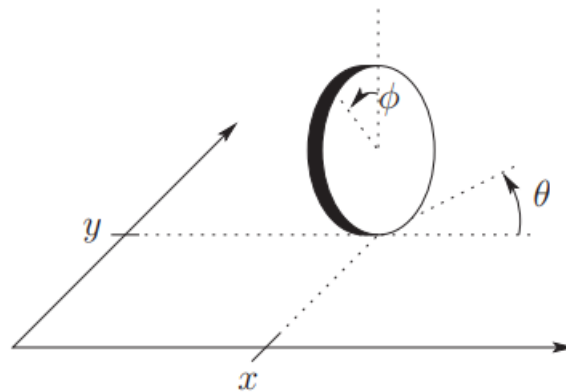
## Uniciclo – Modello Cinematico

Con riferimento ad una possibile classificazione delle ruote fatta nel precedente capitolo , un uniciclo , è un robot mobile costituito da una singola ruota orientabile.



**Figura 2.1** Uniciclo

La configurazione di un uniciclo è completamente descritta dal vettore delle coordinate generalizzate  $(x(t), y(t), \theta(t), r\phi(t))$  , dove  $x(t), y(t)$  fanno riferimento alla posizione cartesiana ,  $\theta(t)$  definisce l'orientamento della ruota rispetto all'asse  $x$ ; infine  $r$  e  $\phi(t)$  fanno riferimento rispettivamente al raggio della ruota e all'angolo della ruota misurato rispetto alla verticale passante per il centro della ruota stessa. Si faccia riferimento alla figura 2.2 per una migliore comprensione di quanto esposto.



**Figura 2.2** Ruota orientabile su piano cartesiano

Ricordiamo come , con riferimento alla condizione di puro rotolamento i vincoli possano essere espressi in forma Pfaffiana come segue

$$A(q(t))^T \dot{q}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\cos(\theta(t)) \\ 0 & 1 & 0 & -\sin(\theta(t)) \end{bmatrix} \dot{q}(t) = 0$$

Con riferimento alla precedente matrice  $A(q(t))^T$  è immediato verificare come il set dei seguenti vettori , per ogni istante di tempo  $t$

$$w_1(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} , \quad w_2(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

definiscano una base per il

$$\text{Ker} \left( A(q(t))^T \right)$$

Tutte le velocità generalizzate ammissibili saranno allora espresse come combinazione lineare di tale base. Il modello cinematico dello unicycle sarà allora dato da

$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \omega$$

Di fatto se tralasciamo l'orientamento della ruota rispetto al piano verticale, quindi di fatto tralasciamo la presenza di  $\phi(t)$  ,

il vincolo di puro rotolamento può essere ricondotto nel richiedere che

$$[\sin(\theta(t)) \quad -\cos(\theta(t)) \quad 0] \dot{q}(t) = 0$$

il vettore velocità generalizzate non abbia componenti lungo la direzione normale al piano sagittale del veicolo , ed il modello cinematico si riduce a

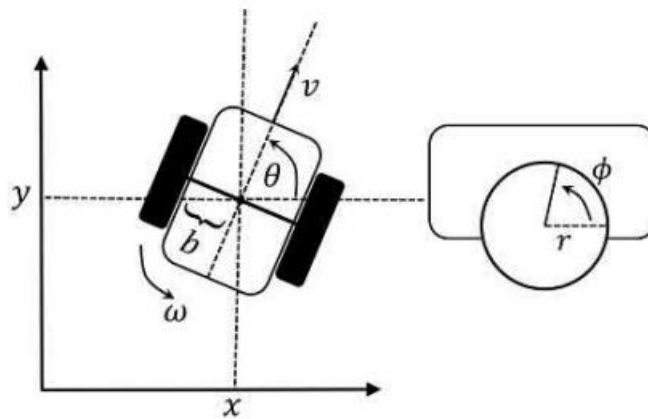
$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega$$

Ai coefficienti  $u_1, u_2$  si associa in maniera immediata l'interpretazione di velocità di trazione , cioè il modulo (con segno) del vettore velocità del punto di contatto tra la ruota e il suolo , e quella di velocità di sterzo pari alla velocità angolare della ruota intorno al suo asse verticale.

Nel proseguo faremo riferimento al secondo modello , ovvero tralascieremo la presa in considerazione della rotazione della ruota rispetto al suo piano verticale.

## Uniciclo a Trazione Differenziale

Da un punto di vista pratico è chiaro che un uniciclo è un veicolo che presenta gravi problemi di stabilità statica. Si ricorre allora ad altre strutture cinematiche equivalenti ma più stabili da un punto di vista meccanico. Tra queste , la più utilizzata in pratica è il differential drive. Ma cerchiamo di capire perché il modello cinematico dello uniciclo descrive completamente anche il veicolo a trazione differenziale mostrato in Figura 2.3.



**Figura 2.3** Uniciclo a Trazione Differenziale

Come mostrato nella Figura 2.3 un Differential Drive è composto da uno chassis e due ruote indipendenti controllate. Il problema della stabilizzazione statica è risolto mediante l'introduzione di una ruota eccentrica. Sempre con riferimento alla Figura 2.3 , semplici considerazioni geometriche ci danno la possibilità di legare le velocità angolari delle singole ruote alla velocità di trazione e di sterzo. Infatti , detti rispettivamente  $\phi_L(t)$  ,  $\phi_R(t)$  gli angoli che le ruote sinistra e destra formano con i rispettivi assi verticali , si ha che

$$v(t) = \frac{r}{2} (\dot{\phi}_L(t) + \dot{\phi}_R(t)) , \quad \omega(t) = \frac{r}{2b} (\dot{\phi}_R(t) - \dot{\phi}_L(t))$$

o in forma matriciale

$$\begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ \frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi}_R(t) \\ \dot{\phi}_L(t) \end{bmatrix}$$

La matrice precedente è invertibile , quindi di fatto la relazione esistente tra le velocità di trazione e di sterzo e le velocità delle singole ruote è biunivoca. Questa è la ragione per cui un unicycle e un Differential Drive sono geometricamente equivalenti e quindi rappresentabili dal medesimo modello cinematico

$$\dot{q}(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \\ 0 \end{bmatrix} v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \omega$$

## Estensione Dinamica

---

Anche se , per ragioni che saranno chiarite più avanti , baseremo i nostri controlli sul modello cinematico , il modello dinamico dello unicycle è facilmente ottenibile. Infatti con riferimento alla seconda legge di Newton sia per moti di traslazione che di rotazione

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m \vec{a} \\ \sum T &= I \dot{\omega} \end{aligned}$$

dette rispettivamente  $\tau_R, \tau_L$  le coppie generate dai motori destro e sinistro , otteniamo

$$m \dot{v} = \frac{1}{r} (\tau_R + \tau_L)$$

$$I \dot{\omega} = \frac{b}{r} (\tau_R - \tau_L)$$

posto  $\tau_1 = \frac{1}{mr}(\tau_R + \tau_L)$  e  $\tau_2 = \frac{b}{rI}(\tau_R - \tau_L)$ , una semplice estensione dinamica al precedente modello cinematico è data da

$$\dot{x}(t) = v \cos(\theta(t))$$

$$\dot{y}(t) = v \sin(\theta(t))$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega$$

$$\dot{v} = \tau_1$$

$$\dot{\omega} = \tau_2$$

Nel ricavare le precedenti equazioni si è fatto uso della ben nota convenzione di considerare positive le rotazioni in senso antiorario.

Si introduce soltanto a scopo di completezza nella trattazione, senza scendere troppo nei dettagli, come il precedente modello cinematico del secondo ordine possa facilmente essere ottenuto a partire dalla riformulazione di Lagrange della seconda legge di Newton

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = \xi$$

nella forma

$$B(q)\ddot{q} + n(q, \dot{q}) = S(q)\tau + \lambda A(q)$$

$$A(q(t))^T \dot{q}(t) = 0$$

il modello dinamico del sistema vincolato sarà espresso dalle equazioni precedenti. Imponendo

è

$$\ddot{q} = \dot{G}(q)u + G(q)\dot{u}$$

moltiplicando a sinistra per  $G(q)^T$  ( $G(q)^T A(q) = 0$ ) , nella ipotesi che la matrice  $G(q)^T S(q)$  sia invertibile , infatti , con la scelta del controllo (feedback linearizing controller)

$$u = (G(q)^T S(q))^{-1} (G(q)^T n(q, \dot{q}) + G(q)^T B(q)G(q)v + G(q)^T B(q)G(q)u)$$

si ottiene a partire dal modello cinematico , la seguente e semplice estensione dinamica

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G(q)u \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} v$$

è si noti che ora la deriva è presente. Il vettore  $v$  è definito vettore delle pseudo accelerazioni.

Una volta ottenuto il modello cinematico del primo e del secondo ordine (estensione dinamica) , passiamo ad analizzare uno dei problemi cardine della robotica mobile , quello della pianificazione del moto

## Pianificazione del Moto

---

La pianificazione del moto per robot mobili soggetti a vincoli , di fatto la definizione di percorsi che conducono il robot da un equilibrio ad un altro , presenta un maggior grado di difficoltà rispetto al suo omologo per manipolatori industriali. Infatti , oltre a dover soddisfare le condizioni al contorno , il cammino ottenuto deve essere conforme ai vincoli presenti sul sistema , per garantire che poi esso sia effettivamente percorribile dal robot preso in considerazione. Si noti che quando parliamo della pianificazione del moto stiamo di fatto facendo riferimento alle geometrie non alle dinamiche, quindi da ora in poi faremo riferimento al solo modello cinematico dello uniciclo.

Anche se il problema della pianificazione per robot soggetti a vincoli non integrabili si complica notevolmente , molti modelli cinematici , tra cui l'uniciclo , godono di una proprietà molto rilevanti per la pianificazione delle traiettorie: la **piattezza differenziale**.

La piattezza differenziale di fatto è una proprietà che semplifica notevolmente il processo di definizione di traiettorie ammissibili per il robot.

L'idea alla base della piattezza differenziale è , dato un sistema con  $n$  stati e  $m$  ingressi , determinare un insieme di  $m$  uscite tale che lo stato e gli ingressi del modello possano essere espressi in funzione di tali uscite e delle loro derivate. Più precisamente ,

### Definizione 2.1

---

Un sistema non lineare , nella forma

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \quad x \in R^n, u \in R^m$$

gode della proprietà di piattezza differenziale se , esiste un vettore di uscite  $y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t))$  con la stessa dimensione del vettore di ingresso , soddisfacente le seguenti condizioni:

- esiste un intero non negativo  $\alpha$  tale che
$$y_i(t) = h_i(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(\alpha)}) \quad \forall i = 1 \dots m$$



- esistono funzioni regolari  $\phi, \psi$  tali che
 
$$x(t) = \phi(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)})$$

$$y(t) = \psi(y, \dot{y}, \dots, y^{(r)})$$

nella definizione precedente , le componenti del vettore  $y$  sono chiamate **uscite piate** del modello.

Come ribadito in precedenza , la proprietà di piatezza differenziale fa riferimento all'esistenza di uscite tali che lo stato e l'ingresso possano essere espressi in funzione delle uscite stesse e delle loro derivate. Questo , in particolare , vuol dire che una volta assegnata una traiettoria delle uscite nel tempo , risultano determinate in corrispondenza anche le traiettorie dello stato e dell'ingresso del processo.

### Esempio 2.1

Nel caso dello unicycle le coordinate cartesiane  $x, y$  costituiscono appunto delle uscite piate. Considerato un cammino cartesiano  $(x(t), y(t))$  , dal vincolo

$$\dot{x}(t) \sin(\theta(t)) - \dot{y}(t) \cos(\theta(t)) = 0$$

o in maniera equivalente

$$\tan(\theta(t)) = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)}$$

la traiettoria di stato (ammissibile) ad essa associata è individuata dal vettore  $q(t) = [x(t), y(t), \theta(t)]$  , con

$$\theta(t) = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \right)$$

gli ingressi corrispondenti sono facilmente ottenibili dalle equazioni del modello cinematico dell'uniciclo

$$v(t) = \pm \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$$

$$\omega(t) = \frac{\ddot{y}(t)\dot{x}(t) - \ddot{x}(t)\dot{y}(t)}{v(t)^2}$$

Se un robot ammette delle uscite piatte , queste possono essere utilizzate per risolvere in modo efficiente il problema della pianificazione. Infatti , è possibile utilizzare un qualsiasi schema di interpolazione per pianificare il cammino di tali uscite in modo da soddisfare le condizioni al contorno. L'evoluzione delle altre variabili di configurazione e di ingresso potranno poi essere calcolata algebricamente a partire dalle uscite piatte del modello.

Individuato il riferimento il passo successivo è la definizione di una azione di controllo che mantenga lo stato del nostro differential drive prossimo a quello assegnato.

Il problema del controllo del moto per un robot mobile viene usualmente risolto con riferimento al modello cinematico. Si ricordi a tal proposito che alla fine la stima dello stato sarà affidata ad un **Filtro di Kalman** , di fatto dunque non vi sarà nessuna differenza nel basare il controllo sul modello cinematico invece che su quello dinamico; basterà aumentare la varianza del rumore di processo rispetto a quello di misura. In maniera del tutto informale e privo di rigore , stiamo di fatto dicendo al filtro di fidarsi di più delle misure che dell'odometria.

Il tutto sarà chiarito meglio nei capitoli successivi.

Basando il controllo sul modello cinematico , stiamo di fatto supponendo che gli ingressi agiscano direttamente sul vettore delle velocità generalizzate. Nel caso dello uniciclo ciò corrisponde di fatto a determinare valori adeguati per i vettori  $v$  e  $\omega$ . Data la corrispondenza biunivoca tra  $v$ ,  $\omega$  e  $\dot{\phi}_R, \dot{\phi}_L$  saranno automaticamente individuati i valori per le rispettive ruote. Si lascerà poi a dei controllori di basso livello (di

solito dei PID) fare in modo che la velocità delle ruote coincida con quello del riferimento.

Il problema del controllo del moto , può essere di fatto diviso in due diversi sotto problemi:

- Inseguimento Di Traiettoria: Il robot deve riprodurre asintoticamente una traiettoria cartesiana ammissibile desiderata a partire da una generica configurazione iniziale  $q_0$
- Regolazione Di Configurazione: il robot in questo caso dovrà raggiungere una configurazione assegnata e fermarsi a partire da una generica configurazione iniziale.

Sebbene il secondo possa essere considerato un caso particolare del primo , in quanto basta pianificare una traiettoria che tende asintoticamente a fermarsi nella configurazione desiderata , vedremo di seguito come , i controlli non lineari soluzioni al primo problema non possano essere estesi nella risoluzione del secondo.

## Feedback Control

---

Dalle considerazioni fatte nella sezione precedente , appare evidente come il problema dell'inseguimento di traiettoria , nonché di regolazione di configurazione , possa essere tradotto in un problema di stabilizzazione. Procediamo per gradi.

Supponiamo di avere a disposizione la traiettoria cartesiana desiderata per l'uniciclo  $(x_d(t), y_d(t))$ . Il vincolo anolonomo definisce direttamente la traiettoria di stato corrispondente  $q_d(t) = [x_d(t), y_d(t), \theta_d(t)]$  con

$$\theta_d(t) = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)} \right)$$

con riferimento al modello cinematico dell'uniciclo

$$\dot{x}_d(t) = v_d \cos(\theta_d(t))$$

$$\dot{y}_d(t) = v_d \sin(\theta_d(t))$$

$$\dot{\theta}_d(t) = \omega_d$$

e sfruttando la piattezza delle uscite , si ottengono i controlli corrispondenti

$$v_d(t) = \pm \sqrt{\dot{x}_d(t)^2 + \dot{y}_d(t)^2}$$

$$\omega_d(t) = \frac{\dot{y}_d(t)\dot{x}_d(t) - \ddot{x}_d(t)\dot{y}_d(t)}{v_d(t)^2}$$

Confrontando la traiettoria di stato desiderata  $q_d(t)$  con quella attuale  $q(t)$  si può definire un errore di inseguimento

$$e(t) = q_d(t) - q(t)$$

e di fatto tradurre il problema dell'inseguimento in un problema di stabilizzazione.

Tuttavia piuttosto che considerare direttamente la differenza tra  $q_d(t)$  e  $q(t)$  , conviene definire l'errore di inseguimento come

$$e(t) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_d - x \\ y_d - y \\ \theta_d - \theta \end{bmatrix}$$

Essendo le matrici di rotazione per costruzione ortogonali , si noti come tale matrice di fatto definisca una trasformazione

isometrica; se ne modifica la direzione ma non la norma del vettore stesso.

Derivandolo rispetto al tempo si ottiene facilmente

$$\dot{e}_x = v_d \cos(e_\theta) - v + e_y \omega$$

$$\dot{e}_y = v_d \sin(e_\theta) - e_x \omega$$

$$\dot{e}_\theta = \omega_d - \omega$$

Ponendo

$$v = v_d \cos(e_\theta) - u_1$$

$$\omega = \omega_d - u_2$$

si ottiene il seguente modello descrivente la dinamica dell'errore di inseguimento

$$\dot{e}_x = e_y \omega + u_1$$

$$\dot{e}_y = v_d \sin(e_\theta) - e_x \omega$$

$$\dot{e}_\theta = u_2$$

Con la definizione del seguente modello , il problema dell'inseguimento si è tradotto nel rendere il punto  $e = 0$  , un equilibrio asintoticamente stabile.

## Lyapunov Design

---

Proseguiamo dunque la nostra discussione con la definizione di un controllore stabilizzante. L'azione di controllo risultante è basata su una semplice applicazione di una condizione sufficiente dovuta a Lyapunov, espressa dalla seguente proposizione

### Proposizione

---

Sia  $V: W \subseteq R^n \rightarrow R$  una funzione definita positiva continuamente differenziabile su  $W$ . Lo 0 è un equilibrio asintoticamente stabile per il sistema

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) \quad , \quad f(0) = 0$$

se

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial t} = \nabla V(x(t))^T \dot{x}(t) = \nabla V(x(t))^T f(x(t)) < 0 \quad \forall x \in W$$

Il secondo metodo di Lyapunov di fatto riconduce l'analisi della stabilità asintotica di un generico punto di equilibrio allo studio di opportune funzioni scalari e alle variazioni di tali lungo le traiettorie del sistema.

La tecnica che useremo di seguito è molto interessante in quanto ottenuta l'azione di controllo che rende l'equilibrio un punto asintoticamente stabile allo stesso tempo ci fornisce la candidata di Lyapunov per verificarlo.

A tal proposito con riferimento al modello non lineare

$$\dot{e}_x = e_y \omega + u_1$$

$$\dot{e}_y = v_d \sin(e_\theta) - e_x \omega$$

$$\dot{e}_\theta = u_2$$

Scegliamo come candidata di Lyapunov la quadratica

$$V(e(t)) = (\alpha e_x(t)^2 + \beta e_y(t)^2 + \gamma e_\theta(t)^2)$$

con  $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ .

Andiamo a determinare le variazioni di tale funzione lungo le traiettorie del nostro sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(e(t))}{\partial t} &= \nabla V(e(t)) \dot{e}(t) = \alpha e_x \dot{e}_x(t) + \beta e_y(t) \dot{e}_y(t) + \gamma e_\theta(t) \dot{e}_\theta(t) = \\ &= 2\alpha e_x(t) e_y(t) \omega + 2\alpha e_x(t) u_1 + 2\beta e_y(t) v_d \sin(e_\theta(t)) - 2\beta e_y(t) e_x(t) \omega \\ &\quad + 2\gamma e_\theta(t) u_2 \end{aligned}$$

ponendo  $\alpha = \beta$ , vanno via alcuni termini non definiti in segno, ottenendo

$$2\alpha e_x(t) u_1 + 2\beta e_y(t) v_d \sin(e_\theta(t)) + 2\gamma e_\theta(t) u_2$$

ponendo  $\alpha = \beta = \gamma = \frac{1}{2}$  otteniamo

$$e_x(t) u_1 + e_y(t) v_d \sin(e_\theta(t)) + e_\theta(t) u_2$$

scegliendo allora

$$\begin{aligned} u_1 &= -e_x(t) \\ u_2 &= -e_\theta(t) - \frac{1}{e_\theta(t)} e_y(t) v_d \sin(e_\theta(t)) \end{aligned}$$

la variazione della funzione le traiettorie del sistema sarà pari a

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial t} = -e_x(t)^2 - e_\theta(t)^2 \leq 0$$

che è semi-definita negativa. Lyapunov ci permette di concludere sulla stabilità semplice, ma non sulla stabilità asintotica del punto di equilibrio.

La dinamica dell'errore ad anello chiuso sarà alla fine data da

$$\begin{aligned} \dot{e}_x(t) &= e_y \omega - e_x(t) \\ \dot{e}_y(t) &= v_d \sin(e_\theta(t)) - e_x \omega \\ \dot{e}_\theta(t) &= -e_\theta(t) - \frac{1}{e_\theta(t)} e_y(t) v_d \sin(e_\theta(t)) \end{aligned}$$

e la candidata di Lyapunov

$$V(e(t)) = \frac{1}{2} (e_x(t)^2 + e_y(t)^2 + e_\theta(t)^2)$$

la cui variazione lungo le traiettorie del sistema è data da

$$\dot{V}(e(t)) = -e_x(t)^2 - e_\theta(t)^2$$

che è semi-definita in un qualsiasi intorno dell'origine. Si noti tuttavia che essendo

$$V(e(t)) \geq 0$$



limitata inferiormente e monotona decrescente , il limite per

$$\lim_{t \rightarrow \infty} V(e(t)) = V(e(\infty)) < \infty$$

è finito. Possiamo passare allora all'integrale ambo i membri ottenendo

$$\int_0^\infty \frac{\partial V(x(t))}{\partial t} dt = - \int_0^\infty e_x(t)^2 + e_\theta(t)^2 dt$$

ovvero,

$$V(x(0)) - V(x(\infty)) = \int_0^\infty e_x(t)^2 + e_\theta(t)^2 dt < \infty$$

necessariamente allora si deve avere

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e_x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e_\theta(t) = 0$$

da questo e dalle equazioni del sistema è possibile dimostrare che anche

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v_d^2(t) + \omega_d^2(t)) e_y(t)^2 = 0$$

e dunque anche  $e_y(t)$  tende asintoticamente ad annullarsi nella ipotesi di persistenza di almeno uno degli ingressi di riferimento.

Con riferimento alla nozione di coercività di una funzione , nella ipotesi di traiettorie di stato persistenti concludiamo la stabilità globale dell'equilibrio in zero.

Alla fine , gli ingressi effettivi di velocità di trazione  $v$  e di velocità di sterzo  $\omega$  , dovranno poi essere ricostruiti per mezzo delle relazioni

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_d - u_2 \\ v &= v_d \cos(e_\theta(t)) - u_1\end{aligned}$$

Un altro approccio utilizzabile alla definizione di un controllo per l'inseguimento di traiettoria , può essere ottenuto attingendo ad un altro risultato dovuto al Lyapunov , in letteratura noto come Lyapunov sul Linearizzato.

#### Proposizione

Sia  $x = 0$  un equilibrio per il sistema autonomo  $\dot{x}(t) = f(x(t))$  , con  $f$  differenziabile con continuità in un intorno dell'origine. Sia,

$$F = \left. \frac{\partial f(x(t))}{\partial x} \right|_{x=0}$$

lo Jacobiano di  $f$  in zero. Allora,

- L'origine è asintoticamente stabile per il sistema non lineare se  $F$  è di Hurwitz (o Schur nel caso TD).
- Se esiste un autovalore a parte reale strettamente positiva l'origine è instabile.

Prima di proseguire diamo una breve definizione di che cosa intendiamo per persistenza nella traiettoria cartesiana e di stato.

Una traiettoria cartesiana parametrizzata per via della coppia  $(x_d(t), y_d(t))$  è persistente se detto

$$v_d(t) = \sqrt{\dot{x}_d(t)^2 + \dot{y}_d(t)^2}$$

il vettore tangente alla curva ad ogni istante di tempo (velocità di trazione per intenderci) si ha

$$v_d(t) > 0 \quad \forall t \geq 0$$

Di fatto non vi possono essere soste o inversioni di marcia lungo il cammino.

Nel caso di traiettoria di stato, si parla di persistenza di traiettoria nell'ipotesi che la coppia di ingressi

$$(v_d(t), \omega_d(t))$$

non sia mai nulla contemporaneamente.

## Linearizzazione

---

In accordo alla proposizione precedente, un altro approccio per la definizione di un controllore consiste nell'utilizzare l'approssimazione lineare della dinamica dell'errore di inseguimento intorno alla traiettoria di riferimento, sulla quale  $e(t) = 0$ .

A partire dal modello

$$\dot{e}_x = e_y \omega + u_1$$

$$\dot{e}_y = v_d \sin(e_\theta) - e_x \omega$$

$$\dot{e}_\theta = u_2$$

con la trasformazione degli ingressi

$$\omega = \omega_d - u_2$$

$$v = v_d \cos(e_\theta(t)) - u_1$$

si ottiene la seguente rappresentazione per la dinamica dell'errore di inseguimento

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(e_\theta(t)) \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 1 & -e_y \\ 0 & e_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Ricordando che linearizzare in zero equivale a troncare semplicemente la serie di Taylor al primo ordine , ovvero porre

$$\sin(e_\theta(t)) \approx e_\theta(t)$$

si ottiene la linearizzazione cercata

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A(t)e(t) + Bu(t)$$

Tuttavia si noti che la linearizzazione non è un sistema LTI , ma tempo variante.

In accordo alla nozione di invarianza dello spettro del sottosistema non raggiungibile , si noti come a partire da tutti e due gli ingressi , il sistema è completamente raggiungibile , di fatto è possibile scegliere una retroazione

$$u(t) = K e(t)$$

tale per cui il sistema a ciclo chiuso abbia gli autovalori desiderati.

Si consideri a tal proposito , il controllo

$$u(t) = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} e(t)$$

che conduce alla seguente dinamica closed-loop per l'errore di inseguimento

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} -k_1 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix} e(t) = (A(t) + BK)e(t)$$

Il polinomio caratteristico è dato da

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda + k_1)(\lambda + k_3) + \omega_d^2(\lambda + k_3) + v_d k_2(\lambda + k_1)$$

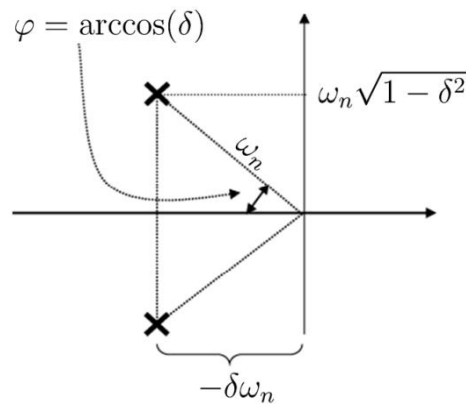
scegliendo allora,

$$k_1 = k_3 = 2\zeta\alpha, k_2 = \frac{\alpha^2 - \omega_d^2}{v_d}$$

con  $\zeta \in (0,1)$  e  $\alpha > 0$  si ottiene

$$p(\lambda) = (\lambda + 2\zeta\alpha)(\lambda^2 + 2\zeta\alpha\lambda + \alpha^2)$$

Con riferimento al trinomio campione , al sistema closed-loop sarò associato una coppia di autovalori complessi coniugati a parte reale negativa , con pulsazione  $\alpha$  ( $\omega_n$  in figura) e smorzamento  $\zeta$  ( $\delta$  in figura)



ed un autovalore a parte reale negativa pari a  $-2\zeta\alpha$ .

## Conclusione

---

In questa prima fase , abbiamo derivato due semplici azioni di controllo , una direttamente ottenuta lavorando sul sistema non lineare e l'altra passando per il linearizzato. Questi controlli sono stati ottenuti con un determinato scopo, e cioè notare come tali azioni di controllo richiedano rispettivamente la persistenza della traiettoria di stato e della traiettoria cartesiana. Infatti con riferimento al secondo controllo ottenuto

$$k_2 = \frac{\alpha^2 - \omega_d^2}{v_d}$$

si noti come il guadagno diverge quando  $v_d$  tende ad annullarsi. Allo stesso modo , abbiamo analizzato come  $e(t)$  tende ad annullarsi nell'ipotesi di persistenza di almeno uno dei due ingressi.

Si ricordi inoltre che il secondo controllore è valido soltanto nella ipotesi di stazionarietà del processo.

Nel capitolo successivo si vedrà come il problema legato alla non stazionarietà del processo possa essere risolto trattando il modello linearizzato della dinamica dell'errore di inseguimento come un sistema incerto.

Data la nozione di stabilità quadratica , obiettivo del prossimo capitolo è la definizione di una retroazione stabilizzante il modello qualunque sia la realizzazione dell'incertezza , ossia qualunque

sia la realizzazione della coppia  $v_d, \omega_d$  all'interno degli intervalli chiusi e limitati

$$[ \underline{v}_d ; \overline{v}_d ]$$

$$[ \underline{\omega}_d ; \overline{\omega}_d ]$$

Tuttavia , anche se l'approccio considerato , risolve il problema legato alla tempo varianza , non risolve il problema legato alla persistenza della traiettoria di stato.

Se infatti per assurdo entrambi gli ingressi passassero per lo zero , la matrice diventerebbe la matrice nulla , e con due soli ingressi non riusciamo ad allocare tutti gli autovalori a ciclo chiuso, in quanto il sistema non è completamente raggiungibile.

Se da una parte risolviamo il problema legato alla tempo varianza , dall'altra dobbiamo necessariamente richiedere la persistenza della traiettoria di stato.

In realtà , la difficoltà di individuare schemi di controllo in grado di garantire l'inseguimento anche per traiettorie che si arrestano è strutturale. Si può infatti dimostrare che , a causa della anolonomia del sistema , l'uniciclo non ammette alcun controllore universale.

I problemi di inseguimento di traiettoria e di configurazioni devono pertanto essere trattati come due problemi distinti.

Di fatto dunque si proseguirà la trattazione supponendo che per almeno uno degli ingressi , gli estremi dell'intervallo dovranno avere necessariamente segno concorde , ma mai entrambi gli estremi dei due intervalli segno discorde.

## Sistemi LPV e Controllo Gain-Scheduling

---

Nella sezione precedente abbiamo derivato diverse strategie di controllo , con l'obiettivo di rendere l'origine del seguente sistema dinamico non lineare

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(e_\theta(t)) \\ 0 \end{bmatrix} v_d + \begin{bmatrix} 1 & -e_y \\ 0 & e_x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

un equilibrio asintoticamente stabile. Tra le diverse soluzioni proposte , una , passava per il linearizzato in zero del precedente sistema

$$\dot{e}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \omega_d & 0 \\ -\omega_d & 0 & v_d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} e(t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = A(t)e(t) + Bu(t)$$

Nella precedente sezione abbiamo visto che , anche se la retroazione in stato

$$u(t) = K e(t)$$

dove  $K = \begin{bmatrix} -k_1 & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & -k_3 \end{bmatrix}$  rappresenta il guadagno del controllore con



$$k_1 = k_3 = 2\zeta\alpha, k_2 = \frac{\alpha^2 - \omega_d^2}{v_d}$$

sia tale per cui gli autovalori closed - loop stiano nel semipiano sinistro aperto, questo di fatto non è sufficiente a garantire la stabilità asintotica del sistema linearizzato , a causa della sua natura tempo variante.

La precedente soluzione va bene soltanto nel far muovere il nostro robot su traiettorie in cui  $v_d$  e  $\omega_d$  risultino costanti nel tempo.

L'idea alla base della soluzione proposta è quella di aggirare la tempo varianza dei parametri , trattando il sistema come un sistema incerto.

## Incertezza Parametrica

---

Un modello matematico rappresenta soltanto una approssimazione al comportamento reale del processo. Le discrepanze possono essere causate dalla presenza di disturbi, dinamiche non modellate oppure dalla presenza di parametri di cui non se ne conosce esattamente il valore , ma soltanto il range di variabilità.

Se nella definizione dell'azione di controllo non tenessimo conto di tali discrepanze , l'azione di controllo così individuata , non solo potrebbe non garantire il raggiungimento delle performance desiderate , ma addirittura potrebbe non garantire la stabilità a ciclo chiuso.

L'obiettivo del controllo robusto è quello di progettare azioni di controllo tali per cui , il soddisfacimento delle performance , nonché la stabilità , siano garantite qualunque sia la realizzazione dell'incertezza.

Di seguito faremo riferimento all'incertezza parametrica , in particolare supporremo che i seguenti parametri

- Velocità di trazione  $v_d$
- Velocità di sterzo  $\omega_d$

non siano perfettamente noti , ma ad essere noto sarà il loro range di variabilità

$$v_d(t) \in [ \underline{v}_d ; \overline{v}_d ]$$

$$\omega_d(t) \in [ \underline{\omega}_d ; \overline{\omega}_d ]$$

La limitatezza è una ipotesi al quanto ragionevole. Infatti , alla fine la locomozione sarà data dall'impiego di motori (tipicamente in continua a spazzole); di fatto dunque gli ingressi non potranno mai assumere valori infiniti , ricadranno sempre all'interno di un intervallo chiuso e limitato.

Di fatto dunque , non vi è nessuna perdita di generalità al discorso.

Come discusso in precedenza , nella definizione dell'azione di controllo bisogna prendere in considerazione esplicitamente la presenza di incertezza sul modello.

Nella sintesi di un controllore robusto è necessario la presa in considerazione dell'incertezza di modello, tramite le cosiddette rappresentazioni di stato incerte.

## LDI – Linear Differential Inclusion

---

Supponiamo che nel modello vi sia la presenza di alcuni parametri incerti , racchiusi all'interno del vettore  $p(t)$ . La dipendenza dal tempo è dovuta al fatto che alcuni di tali parametri possano variare nel tempo.

Si consideri la seguente rappresentazione nello spazio di stato per un sistema dinamico

$$x(t + 1) = A(p(t))x(t) , x \in R^n$$

e sia  $x(0) = x_0$  lo stato iniziale del processo. Come si nota la matrice del sistema è funzione del vettore dei parametri incerti. Al variare di  $p(t)$  all'interno della regione ammissibile  $P$  , si hanno differenti matrici , e quindi di fatto , differenti sistemi dinamici lineari.

In particolare , tutte le matrici , appartengono all'insieme di incertezza

$$\Omega := \{ A(p) \mid p \in P \}$$

$\Omega$  rappresenta una famiglia di sistemi dinamici. Il valore che lo stato del sistema assume al tempo  $t + 1$  , dipende dalla particolare realizzazione del vettore  $p(t)$ . Di conseguenza , al tempo  $t + 1$  per il valore dello stato del sistema  $x(t + 1)$  abbiamo un insieme di possibili valori assunti , ciascuno associata ad una particolare realizzazione dell'incertezza.

$$x(t + 1) \in \Omega x(t) , x(0) = x_0$$

$\Omega$  rappresenta una Linear Differential Inclusion , la definizione matematica di una famiglia di sistemi dinamici.

Qual è la proprietà fondamentale delle LDI. Di fatto , se noi siamo in grado di dimostrare che ogni traiettoria  $x(t)$  dell'inclusione differenziale converge a zero asintoticamente , essendo la traiettoria del sistema reale una fra le tante , allora abbiamo dimostrato la convergenza a zero della traiettoria reale del processo sotto analisi.

L'idea delle inclusioni differenziali , come rappresentazione dei sistemi incerti e di fatto quella di considerare tutte le possibili

realizzazioni dell'incertezza del modello. È una sorta di “worst - case approach”.

Fra tutte le possibili strutture di  $\Omega$  , nel proseguo faremo riferimento per la descrizione dell'incertezza , ad una rappresentazione politopica.

La nostra inclusione differenziale , sarà allora data dai modelli lineari

$$\dot{x}(t) = A(p(t))x(t) + B(p(t))u(t)$$

con  $[A(p(t)); B(p(t))] \in \Omega \forall t \geq 0$  , dove

$$\Omega := \left\{ [A(p(t)); B(p(t))] : [A(p); B(p)] = \sum_{i=1}^L p_i [A_i; B_i] , p_i \geq 0 , \sum p_i = 1 \right\}$$

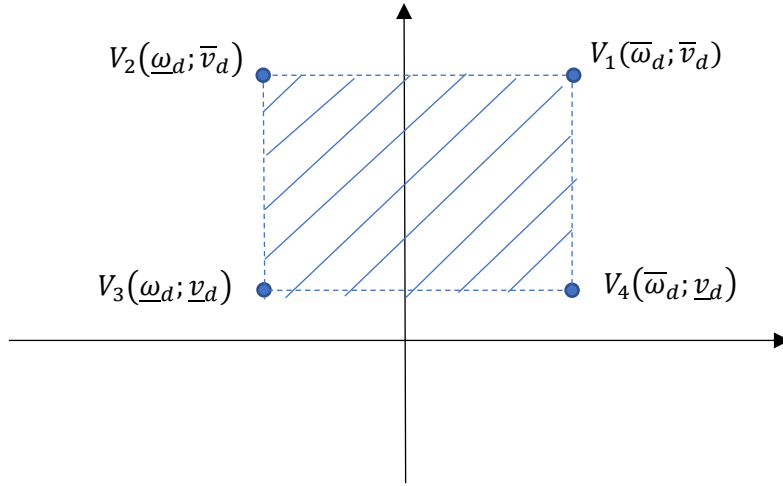
ad ogni istante di tempo dunque , la coppia delle matrici di sistema sarà una combinazione convessa degli  $L$  vertici del politopo.

Il primo passo è dunque cercare di capire come costruire la rappresentazione politopica del nostro sistema incerto. Come era naturale aspettarsi , ipotizzeremo che i parametri incerti del modello siano la velocità di trazione e di sterzo. Si ipotizzi inoltre che per tali parametri si abbiano i seguenti range di variabilità

$$v_d(t) \in [ \underline{v}_d ; \bar{v}_d ]$$

$$\omega_d(t) \in [ \underline{\omega}_d ; \bar{\omega}_d ]$$

Portiamo le coppie di estremi  $(v_d, \omega_d)$  in un sistema di assi ortogonali



La regione sbarrata rappresenta l'insieme dei valori ammissibili per l'incertezza, di fatto data dalla chiusura convessa dei vertici  $(V_1, V_2, V_3, V_4)$ . La regione di incertezza sarà

$$\Delta_p := \left\{ \begin{bmatrix} v_d \\ \omega_d \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} v_d \\ \omega_d \end{bmatrix} = p_1 \begin{bmatrix} \bar{v}_d \\ \bar{\omega}_d \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} \bar{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix} + p_3 \begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \bar{\omega}_d \end{bmatrix} + p_4 \begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix} \right\}$$

con  $p$  appartenente allo unitary simplex

$$P := \left\{ p \mid p_i \geq 0, \sum p_i = 1 \right\}$$

Allora, per linearità, si ha che

$$\begin{aligned} A \left( \begin{bmatrix} v_d \\ \omega_d \end{bmatrix} \right) &= A \left( p_1 \begin{bmatrix} \bar{v}_d \\ \bar{\omega}_d \end{bmatrix} + p_2 \begin{bmatrix} \bar{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix} + p_3 \begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \bar{\omega}_d \end{bmatrix} + p_4 \begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix} \right) = \\ &= p_1 A \left( \begin{bmatrix} \bar{v}_d \\ \bar{\omega}_d \end{bmatrix} \right) + p_2 A \left( \begin{bmatrix} \bar{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix} \right) + p_3 A \left( \begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \bar{\omega}_d \end{bmatrix} \right) + p_4 A \left( \begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

definendo allora con

$$A_1 = A \left( \begin{bmatrix} \bar{v}_d \\ \bar{\omega}_d \end{bmatrix} \right), A_2 = A \left( \begin{bmatrix} \bar{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix} \right), A_3 = A \left( \begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \bar{\omega}_d \end{bmatrix} \right), A_4 = A \left( \begin{bmatrix} \underline{v}_d \\ \underline{\omega}_d \end{bmatrix} \right)$$

otteniamo la rappresentazione cercata.

Nel seguito si tenga conto del fatto che soltanto la matrice della dinamica è dipendete dal vettore dei parametri incerti  $p(t)$ .

Una possibile scelta per i parametri del vettore  $p(t)$  potrebbe essere la seguente

$$p_1(t) = \left( \frac{v_d(t) - \underline{v}_d}{\bar{v}_d - \underline{v}_d} \right) \left( \frac{\omega_d(t) - \underline{\omega}_d}{\bar{\omega}_d - \underline{\omega}_d} \right), \quad p_2(t) = \left( \frac{\bar{v}_d - v_d(t)}{\bar{v}_d - \underline{v}_d} \right) \left( \frac{\omega_d(t) - \underline{\omega}_d}{\bar{\omega}_d - \underline{\omega}_d} \right)$$

$$p_3(t) = \left( \frac{\bar{v}_d - v_d(t)}{\bar{v}_d - \underline{v}_d} \right) \left( \frac{\bar{\omega}_d - \omega_d(t)}{\bar{\omega}_d - \underline{\omega}_d} \right), \quad p_4(t) = \left( \frac{v_d(t) - \underline{v}_d}{\bar{v}_d - \underline{v}_d} \right) \left( \frac{\bar{\omega}_d - \omega_d(t)}{\bar{\omega}_d - \underline{\omega}_d} \right)$$

con ,  $p_i(t) \geq 0$  ,  $\sum p_i(t) = 1 \quad \forall t \geq 0$ .

Notiamo dalle precedenti definizioni come di fatto il vettore dei parametri incerti  $p(t)$  dipenda ad ogni istante di tempo dal valore delle grandezze  $v_d(t)$  ,  $\omega_d(t)$ .

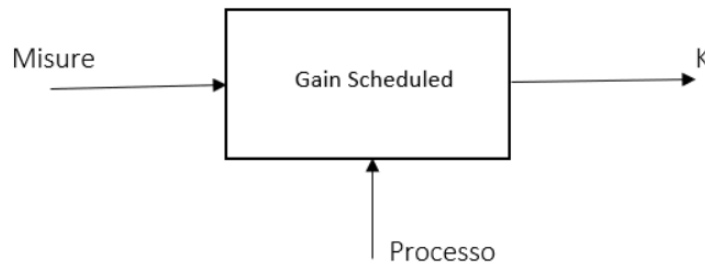
Di fatto noi, ad ogni istante di tempo siamo conosciamo il valore del riferimento , e quindi , siamo in grado ad ogni istante di tempo di misurare il valore del vettore dei parametri incerti  $p(t)$ .

La possibilità di poter misurare ad ogni istante di tempo il valore del vettore dei parametri incerti , ci da la possibilità di trattare il nostro sistema , non come un semplice sistema incerto , ma come un sistema LPV , ed in particolare la possibilità di introdurre un controllo a guadagno schedulato.

## Controllo a Guadagno Schedulato

---

La tecnica di controllo a Guadagno Schedulato è stata introdotta con l'obiettivo di migliorare le deboli prestazioni di un controllore robusto. L'idea alla base del controllo "Gain – Scheduling" è quella di modificare il valore del guadagno  $K$  sulla base di misurazioni prese in "real-time".



Oltre alle misure , il controllo a guadagno schedulato sfrutta la conoscenza di tutte le informazioni che ha disposizione sullo impianto da controllare.

Queste misure , modificano la struttura del controllore e di fatto il segnale di comando. Come conseguenze i controlli a guadagno schedulato offrono prestazioni superiori rispetto a controlli robusti a guadagno costante , in quanto ora si tiene in considerazione della possibile natura tempo variante del processo.

I controlli a guadagno schedulato sono di fatto una naturale estensione del controllo robusto , quando facciamo riferimento alle classi dei sistemi dinamici LPV (Linear Parameters Varying) e Quasi-LPV.

I Sistemi LPV sono delle rappresentazioni in stato le cui matrici  $(A,B,C,D)$  dipendono esplicitamente da un vettore dei parametri  $p(t)$  le cui componenti sono misurabili in tempo reale

$$\dot{x}(t) = A(p(t))x(t) + B(p(t))u(t)$$

$$y(t) = C(p(t))x(t) + D(p(t))u(t)$$

con  $p(t) \in R^l$  misurabile.

Si noti che se  $p(t) = p^* \forall t \geq 0$ , il precedente sistema LPV, diventa un sistema LTI.

Proseguiamo la nostra discussione fornendo la definizione di stabilità asintotica per un sistema LPV. Si ricordi che la stabilità è una proprietà legata solo ed esclusivamente alla risposta libera del sistema, non dipenda dal controllo.

Quindi, di fatto la definizione di stabilità asintotica è data con riferimento al seguente sistema LPV autonomo

$$\dot{x}(t) = A(p(t))x(t)$$

con  $p(t)$  misurabile e  $p(t) \in P \forall t \geq 0$ . Inoltre si fa riferimento nel proseguo ad una rappresentazione politopica

$$A(p(t)) \in \Omega := \left\{ A(p) \mid A(p) = \sum_{i=1}^L p_i(t) A_i, p_i(t) \geq 0, \sum p_i(t) = 1 \right\}$$

#### Definizione

Il sistema LPV autonomo è asintoticamente stabile se  $\forall x_0 \in R^n, \forall p(t) \in P \ t \geq 0$  si ha che

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0_x$$

Si ricordi che condizione sufficiente alla stabilità asintotica è la stabilità quadratica, più semplice da verificare.



### Definizione

---

Il sistema LPV è stabile in senso quadratico se esiste una funzione quadratica

$$V(x(t)) = x(t)^T P x(t) \quad , \quad P = P^T > 0$$

tale che

$$\frac{\partial V(x(t))}{\partial t} < 0, \quad \forall p \in P$$

Un sistema quadraticamente stabile è anche asintoticamente stabile , ma il viceversa non è vero in generale , tranne che per i sistemi LTI.

Obiettivo della sezione è la definizione di una azione di controllo

$$u(t) = K(p(t))x(t)$$

con ,

$$K(p(t)) = \sum p_i(t) K_i$$

e  $p(t)$  misurabile , tale per cui il sistema a ciclo chiuso sia quadraticamente stabile.

Di fatto , in accordo alla definizione precedente questo si traduce nel richiedere l'esistenza di una matrice  $P = P^T > 0$  tale che

$$[A(p(t)) + B(p(t))K(p(t))]^T P + P [A(p(t)) + B(p(t))K(p(t))] < 0, \forall p \in P$$

ricordando che una trasformazione di congruenza non altera il segno della disuguaglianza , possiamo pre e post moltiplicare per  $P^{-1}$  , ottenendo

$$[A(p(t))P^{-1} + B(p(t))K(p(t))P^{-1}]^T + [A(p(t))P^{-1} + B(p(t))K(p(t))P^{-1}] < 0, \forall p \in P$$

poniamo poi  $X = P^{-1}$ , ottenendo

$$XA(p(t)) + XK(p(t))^T B(p(t)) + A(p(t))X + B(p(t))K(p(t))X < 0, \forall p \in P$$

sempre con riferimento ad una descrizione politopica dell'incertezza , sostituendo le relative espressioni per  $A(p(t))$  e per  $B(p(t))$

$$A(p(t)) = \sum p_i(t)A_i$$

$$B(p(t)) = \sum p_i(t)B_i$$

con  $p_i(t) \geq 0, \sum p_i = 1, \forall t \geq 0$  , otteniamo

$$X \left( \sum p_i A_i \right)^T + X \left( \sum p_j K_j \right)^T \left( \sum p_i B_i \right)^T + \left( \sum p_i A_i \right) X + \left( \sum p_i B_i \right) \left( \sum p_j K_j \right) X < 0$$

detti  $K_i = W_i X^{-1}$  ,

$$X \left( \sum p_i A_i \right)^T + X \left( \sum p_j W_j X^{-1} \right)^T \left( \sum p_i B_i \right)^T + \left( \sum p_i A_i \right) X + \left( \sum p_i B_i \right) \left( \sum p_j W_j X^{-1} \right) X < 0$$

ricordando poi che

$$\sum p_j = 1$$

la precedente espressione può essere così riscritta

$$\sum_i \sum_j p_i p_j [XA_i^T + W_j^T B_i^T + A_i X + B_i W_j] < 0, \quad \forall p_i, p_j$$

fissato  $p_i$  la precedente espressione è lineare in  $p_j$  e quindi convessa in  $p_j$ , di conseguenza in accordo al seguente risultato

#### Proposizione

Sia  $f : \Omega \subseteq R^n \rightarrow R$  con  $f$  convessa su  $\Omega$  insieme compatto e convesso, allora

$$f(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{se e solo se} \quad f(x) < 0 \quad \forall x \in \Omega_E$$

è sufficiente verificare la precedente espressione soltanto sui vertici del politopo

$$[XA_i^T + W_j B_j^T + A_i X + B_i W_j] < 0 \quad i = 1, \dots, L, j = 1, \dots, L$$

in totale dunque  $L^2$  diseuguaglianze matriciali lineari (LMI).

Quella di prima è di fatto la dimostrazione della seguente proposizione

#### Proposizione

Il sistema LPV politopico

$$\dot{x}(t) = A(p(t))x(t) + B(p(t))u(t)$$

è quadraticamente stabilizzabile attraverso una retroazione

$$u(t) = K(p(t))x(t)$$

con

$$K(p(t)) = \sum p_i K_i$$

se  $\exists X = X^T > 0, \exists W_1, W_2, \dots, W_L$  tale che

$$(A_i X + B_i W_j)^T + (A_i X + B_i W_j) < 0, i = 1 \dots L, j = 1 \dots L$$

Se esiste una soluzione , i controllori corrispondenti saranno allora dati da

$$K_i = W_i X^{-1}$$

Definita l'azione di controllo , rimane il problema della stima dello stato ad ogni istante di tempo. Problema che verrà risolto nel capitolo successivo.

## Stima Ricorsiva Dello Stato

---

Tutti i controlli sviluppati nella sezione precedente , si fondando sulla ipotesi di una perfetta e completa conoscenza dell'intero stato del sistema ad ogni istante di tempo. Tuttavia , lo stato di un sistema dinamico , non sempre è completamente misurabile , a volte soltanto alcune delle componenti sono direttamente misurabili , altre invece no. Nasce allora il problema della stima asintotica dello stato del sistema a partire da misurazioni ingresso uscita. In particolare a partire dalla seguente rappresentazione in stato per sistemi lineari tempo invarianti

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

si ricordi come condizione necessaria e sufficiente all'esistenza di uno stimatore asintotico dello stato è che il sottospazio non osservabile della coppia di matrici  $(A, C)$  sia asintoticamente stabile (modi ad esso associati asintoticamente convergenti a zero). In particolare se la vedessimo in termini di sistemi duale , si ricordi come l'esistenza dello stimatore si traduce nella condizione di stabilizzabilità della coppia  $(A^T, C^T)$ .

Sebbene in linea teorica , un semplice stimatore di Luenberger del tipo

$$\dot{x}_s(t) = (A + LC)x_s(t) + Bu(t) - Ly(t)$$

con  $L$  guadagno dell'osservatore tale che il sistema

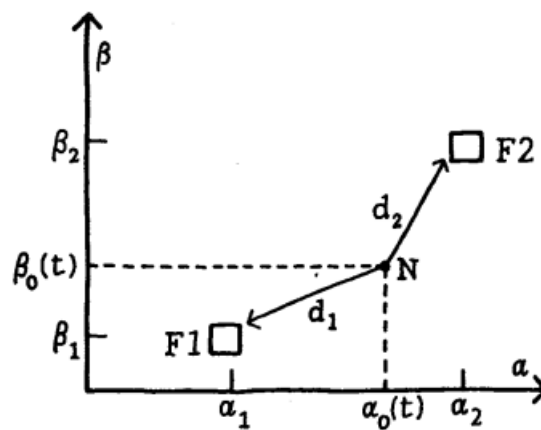
$$\dot{e}(t) = (A + LC)e(t)$$

$e(t) = x(t) - x_s(t)$  sia asintoticamente stabile , sia sufficiente a risolvere il problema posto , in pratica , le misurazioni provenienti dai sensori di cui è equipaggiato il robot , sono soggette a rumori di misura.

Si consideri ad esempio il seguente problema , noto in letteratura con il nome di “Problema del Navigatore”.

#### Esempio 4.1 (Problema del Navigatore)

Per stabilire la posizione in cui si trova , un navigatore invia dei segnali a due radiofari  $F_1, F_2$  come illustrato dalla seguente figura.



**Figura 4.1** Segnali e RadioFari

Nota la posizione dei due radiofari , il navigatore cerca di stabilire la sua posizione sulla base dei tempi di andata e ritorno impiegati dai segnali nel tragitto navigatore – radiofaro e viceversa.

Se il navigatore è fermo , le distanze dai due radiofari  $d_1(t), d_2(t)$  sono costanti. In particolare noti i tempi  $\tau_i$   $i = 1,2$  di andata e ritorno dei due segnali , segue

$$\tau_i = \frac{2d_i(t)}{c} = \frac{2}{c} \sqrt{(\alpha_i - \alpha_0)^2 + (\beta_i - \beta_0)^2} \quad i = 1,2$$

Queste due equazioni di carattere puramente algebrico , danno il legame tra osservazioni ed il vettore delle variabili incognite  $\theta(t) = [\alpha_0; \beta_0]$ . Il problema della stima richiede “semplicemente” la risoluzione delle precedenti equazioni rispetto alle due incognite  $\alpha_0, \beta_0$ .

Nella realtà però , il problema è molto più complesso , perché in generale misurazioni diverse portano a risultati diversi. Le sorgenti di incertezza nella misura , possono di fatto essere dovute a diversi fattori , quali ad esempio l'influenza sulla velocità di propagazione del segnale da parte delle condizioni atmosferiche.

Per tenere conto delle varie cause di incertezza , si può modificare la precedente espressione , introducendo un termine aggiuntivo

$$\tau_i = \frac{2d_i(t)}{c} + w_i(t) \quad i = 1,2$$

dove  $w_i(t)$  rappresenta l'errore nella misura , che varia casualmente. Data la variabilità del rumore di misura , non noto a priori , al generico istante di tempo  $t$  , il valore assunto dalla variabile  $\tau_i$  non può essere determinato in maniera univoca. Il particolare valore assunto dipenderà da una particolare condizione atmosferico , e quindi dal verificarsi o meno di un determinato evento.

Da questo punto di vista allora , la generica misura al tempo  $t$  , sarà modellata come una grandezza stocastica (variabile aleatoria ) con una determinata distribuzione di probabilità. Più precisamente , data la dipendenza dal tempo , le misure saranno modellate mediante processi stocastici.

Come conseguenza , ad ogni istante di tempo ci si dovrà accontentare di un insieme di valori possibili per  $\theta(t)$ ; la dispersione sarà legata all'entità dell'errore  $w_i$ .

La modellazione matematica di grandezze incerte , quali misurazioni, sarà fornita da tutti gli strumenti teorici messi a disposizione dall'Analisi Probabilistica.

Questo semplice esempio ci serve da introduzione al paragrafo successivo.

## Robotica Probabilistica

---

La robotica probabilista tiene conto in maniera esplicita di eventuali incertezze sia nelle misure che nelle azioni del robot , sfruttando strumenti teorici della Analisi Probabilistica. Nella robotica probabilista quantità come misurazioni provenienti da sensori , azioni di controllo , e stati che il robot può assumere , sono modellati attraverso grandezze aleatorie. Le variabili aleatorie assumono valori continui e discreti in accordo a qualche legge probabilistica.

Al cuore della robotica probabilistica vi è l'idea di stimare lo stato di un sistema a partire da misure sensoriali. Data la natura incerta delle quantità in questione , il problema a cui cerca di dare una soluzione , è di fatto un problema di inferenza probabilistica. Ovvero, il processo con cui si cerca di stimare le leggi di probabilità di alcune grandezze incerte a partire dalla conoscenza di altre grandezze aleatorie , quali ad esempio le misure sensoriali.

Ipoteticamente , un robot mobile potrebbe tenere traccia di tutte le informazioni passate. In particolare , un robot equipaggiato di sensori ha accesso a due particolari tipi di dati:



- **Sensor Data** : forniscono informazioni in merito ad un momentaneo stato dell'ambiente in cui il robot si trova. I dati sensoriali al tempo  $t$  saranno indicati con

$$z_t$$

In particolare la notazione

$$z_{t_1:t_2}$$

denoterà l'insieme delle informazioni sensoriali acquisite nell'intervallo temporale  $[t_1; t_2]$ .

- **Control Data** : le quali portano informazioni circa il cambiamento dello stato del robot. Nella robotica mobile , ma non solo , un tipico esempio di tali dati sono le velocità del robot. Il generico dato di controllo al tempo  $t$  sarà indicato con

$$u_t$$

mentre , con la notazione

$$u_{t_1:t_2}$$

faremo riferimento all'insieme dei dati di controllo acquisiti durante l'intervallo  $[t_1; t_2]$ .

Prima di passare alla caratterizzazione delle leggi probabilistiche che regolano l'evoluzione dello stato e delle misure , diamo dapprima la nozione di completezza dello stato.

#### Definizione (Completezza)

Uno stato  $x_t$  è definito completo , se informazioni aggiuntive riguardanti stati passati , misure e dati di controllo , non portano nessuna informazione aggiuntiva che dovrebbe aiutarci nel predire lo stato futuro più accuratamente.

Processi temporali che danno per buona la precedente definizione sono meglio conosciuti come processi di Markov.

Come già asserito in precedenza , lo stato e le misure saranno rappresentate attraverso variabili aleatorie. Si ricordi che il comportamento di una grandezza aleatoria è completamente descritto a partire dalla sua funzione densità. Di seguito si parlerà arbitrariamente di densità e di funzione di distribuzione o di ripartizione di probabilità , tuttavia si ricordi che non vi è assoluta differenza , in quanto la seconda è la primitiva della prima.

In particolare di seguito, l'evoluzione dello stato sarà fatta dipendere da tutte le misurazioni passate , di fatto dunque , l'evoluzione sarà governata da una densità di probabilità condizionata del tipo

$$p(x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

Tuttavia però , se  $x_t$  è completo , allora segue immediatamente dalla definizione di completezza che

$$p(x_t | x_{0:t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(x_t | x_{t-1}, u_t)$$

nota in letteratura con il nome di “state – transition – probability”. Come possiamo notare , specifica come lo stato evolve in funzione del controllo  $u_t$ .

Allo stesso modo , essendo le misurazioni quantità incerte , aleatorie , a senso specificare per tali grandezze leggi probabilistiche che ne caratterizzano completamente l'evoluzione. In particolare ancora una volta , come nel caso precedente , condizioneremo la generica misura al tempo  $t$  alle informazioni passate , di fatto dunque , l'evoluzione sarà governata da una densità del tipo

$$p(z_t | x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

assunta ancora una volta valida l'ipotesi di completezza dello stato , si ha

$$p(z_t | x_{0:t}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) = p(z_t | x_t)$$

nota come “measurement – probability “. Lo stato  $x_t$  è dunque sufficiente per predire la misurazione  $z_t$ .

Note queste due leggi probabilistiche condizionali , esse come già anticipato , descrivono completamente l'evoluzione del sistema dinamico stocastico del robot e del suo ambiente.

Un altro concetto chiave della robotica probabilistica è quello della “belief”. La belief di fatto riflette la conoscenza interna del robot del suo stato. Più precisamente

$$bel(x_t) = p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t})$$

modella dunque la probabilità a posteriori sullo stato del sistema condizionata alle misure passate disponibili.

In particolare si noti come dalla precedente definizione , la probabilità a posteriore è fatta dipendere dalle misure raccolte dai sensori sullo stato dell'ambiente fino al tempo  $t$  , ovvero dipende da  $z_t$ .

Nella pratica , si preferisce dapprima calcolare la probabilità a posteriori prima della misura  $z_t$  , subito dopo aver applicato l'azione di controllo  $u_t$

$$\overline{bel}(x_t) = p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

Questa distribuzione di probabilità di fatto rappresenta una **predizione** sullo , prima dell'arrivo delle misure.

La presa in considerazione della misura  $z_t$  , e quindi , il calcolo di  $bel(x_t)$  a partire da  $\overline{bel}(x_t)$  , costituisce la **correzione** alla predizione.

Il tutto sarà chiarito meglio nel seguito , con l'introduzione dei filtri Gaussiani , dove appunto si mostrerà come l'ultima misura verrà utilizzata per correggere la predizione sullo stato futuro del robot fornitaci dall'odometria.

Date queste definizioni , siamo pronti per introdurre il famoso Filtro di Bayes.

## Filtro Di Bayes

L'algoritmo più generale per il calcolo della belief , è dato dal Filtro di Bayes. L'algoritmo determina la  $bel(x_t)$  a partire dai dati sensoriali e di controllo .

Più precisamente , il filtro bayesiano è un algoritmo di stima probabilistico ricorsivo , nel senso che la belief  $bel(x_t)$  al tempo  $t$  verrà calcolata sulla base della belief  $bel(x_{t-1})$  al tempo  $t - 1$ .

Nel derivare tale algoritmo , seguiamo un approccio costruttivo.

L'obiettivo è determinare

$$bel(x_t) = p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t})$$

sfruttando la ben nota regola di Bayes

$$p(x | y, z) = \frac{p(y | x, z) p(x | z)}{p(y | z)}$$

la belief al tempo  $t$  può essere così riscritta

$$\begin{aligned} p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t}) &= \frac{p(z_t | x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})}{p(z_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})} = \\ &= \eta p(z_t | x_t, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t}) \end{aligned}$$

sfruttando ancora una volta l'ipotesi di completezza dello stato , si ottiene

$$p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t}) = \eta p(z_t | x_t) p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t})$$

ed in accordo a tutte le considerazioni fatte il merito al concetto di belief , si ha

$$bel(x_t) = \eta p(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t)$$

che rappresenta appunto la correzione alla predizione attraverso la misura  $z_t$ .

Il passo successivo richiede l'utilizzo di un ben noto risultato del calcolo probabilistico : il teorema della probabilità totale. Ricordando appunto come una grandezza aleatoria assume ad ogni istante di tempo uno ed un solo valore (sistema di alternative), si ha

$$\begin{aligned} \overline{bel}(x_t) &= p(x_t | z_{1:t-1}, u_{1:t}) \\ &= \int p(x_t | x_{t-1}, z_{1:t-1}, u_{1:t}) p(x_{t-1} | z_{1:t-1}, u_{1:t-1}) dx_{t-1} \end{aligned}$$

sfruttando ancora una volta l'ipotesi di Markov , si ottiene

$$\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t | x_{t-1}, u_t) bel(x_{t-1}) dx_{t-1}$$

concludendo così la dimostrazione del famoso algoritmo di Bayes per la stima ricorsiva della belief.

Si riporta dunque di seguito il Filtro Bayesiano , la cui correttezza è stata verificata in precedenza.

```
1:   Algorithm Bayes_filter( $bel(x_{t-1}), u_t, z_t$ ):  
2:     for all  $x_t$  do  
3:        $\overline{bel}(x_t) = \int p(x_t | u_t, x_{t-1}) bel(x_{t-1}) dx$   
4:        $bel(x_t) = \eta p(z_t | x_t) \overline{bel}(x_t)$   
5:     endfor  
6:     return  $bel(x_t)$ 
```

Come detto in precedenza e come mostrato dall'algoritmo qui sopra riportato , il Filtro di Bayes consiste di fatto in due step : una fase di **predizione** ed una di **correzione**.

Per calcolare la belief ricorsivamente , l'algoritmo richiede una distribuzione iniziale  $bel(x_0)$ . Se uno è interamente ignaro del valore iniziale di  $x_0$  ,  $bel(x_0)$  potrebbe essere inizializzata attraverso una distribuzione uniforme di probabilità. Conoscenze parziali su  $x_0$  si traducono , naturalmente , attraverso distribuzioni non uniformi.

## Filtri Gaussiani

---

Questo paragrafo descrive una famiglia molto importante di stimatori ricorsivi dello stato, i filtri Gaussiani. Storicamente i filtri gaussiani costituiscono la prima implementazione trattabile del filtro di Bayes per grandezze aleatorie continue.

Le tecniche gaussiane condividono tutte la stessa ipotesi, è cioè che le distribuzioni di probabilità

$$bel(x_t) = p(x_t | z_{1:t}, u_{1:t})$$

siano delle distribuzioni normali multivariate, cioè

$$p(x) = \det(2\pi\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (x - \mu)^T \Sigma^{-1} (x - \mu)\right\}$$

si noti come la densità precedente sia completamente caratterizzata da due fattori, la matrice di covarianza  $\Sigma$  e il vettore valore atteso  $\mu$ .

L'implementazione più nota del filtro Bayesiano è di certo il Filtro di Kalman.

## Filtro Di Kalman

---

L'invenzione del Filtro di Kalman risale al 1950, grazie al lavoro di Rudolf Kalman, come strumento per la risoluzione di problemi di filtraggio e stima nel caso di sistemi lineari.

Il Filtro di Kalman, usa una rappresentazione a momenti della belief. Al generico istante di tempo  $t$ , la belief è rappresentata per mezzo del suo valore atteso (vettore)  $\mu_t$  e dalla sua matrice di covarianza  $\Sigma_t$ .

L'ipotesi alla base della Teoria Di Kalman , è che le dinamiche dello stato del processo nonché le misurazioni , siano lineari Gaussiane , ovvero : lineari nei loro argomenti con un rumore Gaussiano additivo.

Nel proseguo , ipotizzeremo che il nostro fenomeno sia rappresentato nello spazio di stato dal seguente modello tempo discreto

$$x_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t + \varepsilon_t$$

$$z_t = C_t x_t + \delta_t$$

con

- $\varepsilon_t$  vettore aleatorio Gaussiano , modellante la randomicità nella transizione di stato , con valore atteso e matrice di covarianza rispettivamente date da

$$E[\varepsilon_t] = 0$$

$$E[\varepsilon_t \varepsilon_t^T] = R_t$$

- $\delta_t$  descrivente il rumore di misura al tempo  $t$  , caratterizzato da una distribuzione normale multivariata con media e matrice di covarianza rispettivamente date da

$$E[\delta_t] = 0$$

$$E[\delta_t \delta_t^T] = Q_t$$

Dalle precedenti ipotesi , segue che

$$p(x_t | x_{t-1}, u_t)$$



è una distribuzione normale multivariata , ovvero

$$p(x_t | x_{t-1}, u_t) = \\ = (2\pi R_t)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t))^T R_t^{-1} (x_t - (A_t x_{t-1} + B_t u_t)) \right\}$$

con media  $A_t x_{t-1} + B_t u_t$  e matrice covarianza  $R_t$ .

Allo stesso modo , la “measurement – probability”

$$p(z_t | x_t)$$

sarà caratterizzata da una densità di probabilità della forma

$$p(z_t | x_t) = \\ = (2\pi Q_t)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (z_t - C_t x_t)^T Q_t^{-1} (z_t - C_t x_t) \right\}$$

di media  $C_t x_t$  e matrice di covarianza  $Q_t$ .

Con l'ulteriore ipotesi che la distribuzione iniziale sia gaussiana ,  
ovvero

$$bel(x_0) = (2\pi \Sigma_0)^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (x_0 - \mu_0)^T \Sigma_0^{-1} (x_0 - \mu_0) \right\}$$

, si può dimostrare come tali assunzioni siano sufficienti a  
garantire che ad ogni generico istante temporale  $t$  la  
distribuzione

$$bel(x_t)$$

è una distribuzione normale multivariata.

Avendo scelto come rappresentazione , una rappresentazione a momenti , il filtro di Kalman , sarà un algoritmo di stima ricorsiva che ci fornirà ad ogni iterazione media e covarianza di  $bel(x_t)$  in funzione dei momenti di  $bel(x_{t-1})$ .

```

1:      Algorithm Kalman_filter( $\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$ ):
2:           $\bar{\mu}_t = A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$ 
3:           $\bar{\Sigma}_t = A_t \Sigma_{t-1} A_t^T + R_t$ 
4:           $K_t = \bar{\Sigma}_t C_t^T (C_t \bar{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1}$ 
5:           $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t (z_t - C_t \bar{\mu}_t)$ 
6:           $\Sigma_t = (I - K_t C_t) \bar{\Sigma}_t$ 
7:          return  $\mu_t, \Sigma_t$ 

```

Notiamo ancora una volta nel precedente algoritmo una fase di predizione ed una di correzione. Nei passi 2 e 3 dell'algoritmo vengono determinati i momenti  $\bar{\mu}_t$  e  $\bar{\Sigma}_t$  della belief  $\overline{bel}(x_t)$  sulla base dell'azione di controllo  $u_t$ . In particolare si noti come la media è aggiornata considerando la funzione di transizione di stato deterministica. Nei passi 5 , 6 la  $\overline{bel}(x_t)$  è trasformata nella belief desiderata  $bel(x_t)$  sfruttando la misura al tempo  $t, z_t$ .

Maggiore attenzione deve essere rivolta alla differenza al passo 5

$$e_t = z_t - C_t \bar{\mu}_t$$

l'**innovazione** , rappresenta tutto ciò che non siamo riusciti a predire su  $z_t$  a partire dalla predizione  $\bar{\mu}_t$ . Di fatto rappresenta il reale contenuto informativo innovativo portato dalla misura  $z_t$ .

Al passo 4 dell'algoritmo viene determinato il Guadagno del Filtro o **Guadagno di Kalman**. In particolare come messo in evidenza nella equazione successiva, pesa in un certo modo il grado in cui la misura influenza la stima finale.

Ma cerchiamo di fare un po' di chiarezza prima di proseguire con l'introduzione del Filtro di Kalman Esteso.

Fino a questo punto l'obiettivo è stato quello di stimare quantità incerte , lo stato del sistema , a partire da grandezze incerte , quali misure sensoriali e dati di controllo.

Per dare un significato alle equazioni caratterizzanti la soluzione di Kalman al problema della stima, cerchiamo di dare una risposta al seguente quesito:

"Data una grandezza incerta  $X$  chi è il miglior stimatore della grandezza stessa".

Per rispondere alla domanda precedente , bisogna dapprima stabilire che cosa intendiamo per miglior stimatore. Ricordiamo come oltre al fatto che uno stimatore debba essere baricentrato sulla quantità da stimare (condizione di non polarizzazione) , di fatto lo stimatore ottimo di una grandezza incerta è quello la cui dispersione delle sue realizzazioni intorno alla sua media è minima: cioè , lo stimatore a minima varianza.

Chiarito questo concetto , ci chiediamo allora

"Data una grandezza incerta  $X$  chi è per  $X$  lo stimatore a minima varianza".

Con riferimento a variabili scalari , il problema sopra posto è di fatto del tutto equivalente alla ricerca della costante  $c$  tale per cui la seguente quantità

$$E[(X - c)^2]$$

sia minima.

Con un po' di ricordi verso l'analisi matematica , la costante cercata è soluzione di

$$\frac{\partial E[(X - c)^2]}{\partial c} = 0$$

cioè , ricordando la linearità dell'operatore valore atteso ,

$$c = E[X].$$

Queste semplici considerazioni di carattere analitico ci danno la possibilità di concludere che il miglior stimatore , nel senso dello scarto quadratico medio , per una grandezza incerta  $X$  è il suo valore atteso.

La varianza , ci fornisce informazioni sull'errore , di fatto sulla dispersione delle possibili realizzazioni intorno alla sua media. Di fatto però essendo quadratica non è direttamente confrontabile con  $X, E[X]$ . Per tale ragione si introduce la radice della varianza , nota come deviazione standard  $\sigma_x$ .

Alla luce delle precedenti considerazioni , possiamo concludere che , data una grandezza incerta  $X$  , possiamo scrivere

$$X = E[X] \pm \sigma_x$$

nel senso che data  $X$  , possiamo approssimarla con il suo valore atteso  $E[X]$  con delle oscillazione che sono più o meno dell'ordine della deviazione standard.

Però , nei problemi di inferenza probabilistica ciò che si cerca di fare , come ribadito in precedenza , è cercare di stimare quantità incerte a partire da altre grandezza incerte , i dati provenienti ad esempio dai sensori.

In questo lo stimatore della grandezza incerta sarà funzione dei dati

$$\hat{\theta} = h(d)$$

è sarà tanto migliore quanto più la variabile  $\hat{\theta}$  sarà vicina alla variabile causale  $\theta$  da stimare. Ancora una volta lo stimatore che stiamo cercando è quello tale per cui

$$E \left[ (\theta - h(d))^2 \right]$$

sia minima. Si può dimostrare che tale stimatore esiste , noto in letteratura come stimatore Bayesiano , ed è

$$E[\theta | d = x]$$

il valore atteso condizionato al fatto che le misure abbiano assunto il particolare valore  $x$ .

Si può dimostrare , senza scendere troppo nei dettagli , come nel caso in cui l'incognita nonché i dati siano congiuntamente gaussiani , lo stimatore Bayesiano è dato da

$$\hat{\theta} = \theta_m + \frac{\lambda_{\theta d}}{\lambda_{dd}}(d - d_m)$$

con  $\theta_m = E[\theta]$  ,  $d_m = E[d]$ . Nel caso vettoriale ,

$$\hat{\theta} = \theta_m + \Lambda_{\theta d} \Lambda_{dd}^{-1} (d - d_m)$$

Tutto ciò perché si può verificare che le precedenti equazioni del Filtro di Kalman , altro non sono che una versione ricorsiva dello stimatore precedente.

Alla luce di tutte queste considerazioni possiamo allora dare una interpretazione ai momenti dati in output dall'algoritmo. Ad ogni iterazione ciò che ci restituisce il Filtro di Kalman è (nell'ipotesi di Gaussianità) la migliore stima sulla grandezza incerta , nonché l'errore commesso nell'approssimarla con il suo valore atteso.

Per una maggiore comprensione su ciò che da in output il Filtro di Kalman , riscriviamo il precedente algoritmo come segue

$$\hat{x}_t = A_t x_{t-1} + B_t u_t \quad (\text{prediction})$$

$$\hat{\Sigma}_t = A_t \Sigma_t A_t^T + R_t$$

$$K_t = \hat{\Sigma}_t C_t^T (C_t \hat{\Sigma}_t C_t^T + Q_t)^{-1} \quad (\text{kalman gain})$$

$$x_t = \hat{x}_t + K_t (z_t - C_t \hat{x}_t) \quad (\text{correction})$$

$$\Sigma_t = (I - K_t C_t) \hat{\Sigma}_t$$

In particolare si noti come la predizione sulla grandezza di stato a partire dalle azioni di controllo (odometria) sia fatta sulla base del modello di transizione di stato privo di incertezza.

## Filtro di Kalman Esteso

---

L'ipotesi alla base della derivazione del filtro di Kalman è che il fenomeno sia caratterizzato da una rappresentazione in stato, in cui sia la funzione di transizione che di misura sono lineari nei loro argomenti con l'aggiunta di un rumore gaussiano.

Tuttavia, questa assunzione è raramente soddisfatta nella pratica. Ad esempio la caratterizzazione del moto di un robot su una traiettoria circolare passa attraverso l'impiego di funzioni trascendenti, non lineari.

Queste limitazioni, rendono il tradizionale Filtro di Kalman applicabile ad un numero estremamente ridotto di situazioni pratiche.

Il **Filtro di Kalman Esteso** (EKF), elimina una delle precedenti assunzioni: la linearità.

Quindi da ora in poi prenderemo in considerazione fenomeni la cui funzione di transizione nonché di misura siano non lineari nei loro argomenti

$$x_t = g(x_{t-1}, u_t) + \varepsilon_t$$

$$z_t = h(x_t) + \delta_t$$

la funzione  $g(\cdot, \cdot)$  rimpiezerà il ruolo delle matrici  $A_t, B_t$  mentre  $h(\cdot)$  giocherà il ruolo della matrice  $C_t$ .

L'idea chiave dietro il Filtro di Kalman Esteso è la linearizzazione, in particolare lo EKF, sfrutta l'espansione in serie di Taylor delle precedenti funzioni arrestato al primo ordine.

Fatto ciò, è di fatto possibile riapplicare tutta la teoria vista in precedenza con riferimento al tradizionale Filtro di Kalman per sistemi lineari Gaussiani.

Tuttavia si ricordi come lo EKF è di fatto ottenuto considerando le linearizzazioni delle seguenti funzioni

$$g(x_t, u_t)$$

$$h(x_t)$$

in corrispondenza all'ultima stima effettuata dello stato ,  $\mu_{t-1}$ .

Si riportano di seguito , per il sistema preso in considerazione , le equazioni caratterizzanti il Filtro di Kalman Esteso

```

1:   Algorithm Extended_Kalman_filter( $\mu_{t-1}, \Sigma_{t-1}, u_t, z_t$ ):
2:      $\bar{\mu}_t = g(u_t, \mu_{t-1})$ 
3:      $\bar{\Sigma}_t = G_t \Sigma_{t-1} G_t^T + R_t$ 
4:      $K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$ 
5:      $\mu_t = \bar{\mu}_t + K_t(z_t - h(\bar{\mu}_t))$ 
6:      $\Sigma_t = (I - K_t H_t) \bar{\Sigma}_t$ 
7:     return  $\mu_t, \Sigma_t$ 

```

E notiamo subito la differenza principale. Si noti appunto come in questo caso le predizioni sullo stato , nonché le misurazioni sono valutate a partire dalla funzioni non lineari caratterizzanti la rappresentazione in stato del fenomeno in esame.

	Kalman filter	EKF
state prediction (Line 2)	$A_t \mu_{t-1} + B_t u_t$	$g(u_t, \mu_{t-1})$
measurement prediction (Line 5)	$C_t \bar{\mu}_t$	$h(\bar{\mu}_t)$

Tuttavia c'è da ricordare che avendo considerato delle linearizzazioni , e quindi di fatto delle approssimazioni delle precedenti funzioni , le densità così ottenute

$$p(x_t | x_{t-1}, u_t)$$

$$p(z_t | x_t)$$



non sono le vere distribuzioni a posteriori , ma di fatto ne costituiscono una approssimazione.

Il Filtro di Kalman Esteso alla fine , determina soltanto una approssimazione della vera belief

$$bel(x_t)$$

Ultimo cosa da prendere in considerazione sulla soluzione dello EKF , riguarda la convergenza del filtro. Avendo troncato la serie di Taylor al primo ordine, abbiamo perso tutte le proprietà del Filtro di Kalman. A conti fatti non esiste nessuna garanzia di convergenza del filtro , nessuno ci garantisce che l'innovazione tende al rumore di misura.

## Localizzazione Odometrica

Si ricordi come il filtro di stima ricorsivo Bayesiano sia caratterizzato da due fasi principali : una di predizione a partire dai dati controllo ed una di correzione sulla base dell'ultima misura ricevuta.

In particolare nella fase di predizione , si cerca a partire dall'ultima stima e dall'azione di controllo

$$\mu_{t-1} , u_t$$

di determinare l'evoluzione dello stato del nostro sistema un passo in avanti.

Spostiamoci ora dal caso generale al particolare. Il robot a cui stiamo facendo riferimento è un unicycle a trazione differenziale , la cui modellazione nello spazio di stato è

$$\dot{x}(t) = v_t \cos(\theta(t))$$

$$\dot{y}(t) = v_t \sin(\theta(t))$$

$$\dot{\theta}(t) = \omega_t$$

con  $q(t) = [x(t), y(t), \theta(t)]^T$  vettore delle coordinate generalizzate caratterizzante la configurazione del robot al tempo  $t$ .

Si consideri a tal proposito un unicycle a trazione differenziale che si muove sotto l'azione di un sistema di controllo digitale, tale per cui i comandi di velocità sia di trazione che di orientamento rimangano costanti all'interno del periodo di campionamento  $T_s$ .

Supponendo di conoscere la configurazione corrente del robot al tempo  $t$ ,  $q(t) = q_t$ , e noti i comandi di velocità sull'intervallo  $[t, t + 1]$ , il valore delle variabili di configurazione al tempo  $t + 1$ ,  $q(t + 1) = q_{t+1}$ , può essere ottenuto per integrazione in avanti del modello cinematico

$$x_{t+1} = x_t + v_t T_s \cos(\theta_t)$$

$$y_{t+1} = y_t + v_t T_s \sin(\theta_t)$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + T_s \omega_t$$

Tuttavia si noti come l'utilizzo del metodo di Eulero in avanti per l'integrazione numerica presuppone che l'orientamento del veicolo nell'intervallo di tempo  $[t, t + 1]$  rimane costante.

Se l'accuratezza del metodo di Eulero risulta inadeguata, si può utilizzare a parità del tempo di campionamento  $T_s$ , la seguente stima

$$x_{t+1} = x_t + v_t T_s \cos\left(\theta_t + \frac{\omega_t T_s}{2}\right)$$

$$y_{t+1} = y_t + v_t T_s \sin\left(\theta_t + \frac{\omega_t T_s}{2}\right)$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + T_s \omega_t$$

che corrisponde all'utilizzo del metodo di Runge-Kutta del secondo ordine per l'integrazione numerica. Si noti come ora nelle prime due equazioni compare l'orientamento medio dell'uniciclo nell'intervallo di campionamento.

Nelle formule precedenti , tuttavia si è assunto di disporre degli ingressi  $v_t, \omega_t$  applicati durante l'intervallo di campionamento. Vista la non idealità di qualunque sistema di attuazione , in pratica piuttosto che utilizzare i valori di comando , conviene ricostruire tali valori sulla base di sensori propriocettivi.

Ipotizzando che il robot sia dotato di encoder ottici , è possibile ottenere la variazione angolare delle due ruote su tutto il periodo di campionamento

$$\Delta\phi_R, \Delta\phi_L$$

a partire dalla conoscenza di tali quantità è possibile stabilire il valore di

$$v_t = \frac{\Delta s}{T_s}, \omega_t = \frac{\Delta\theta}{T_s}$$

Con

$$\Delta s = \frac{r}{2}(\Delta\phi_R + \Delta\phi_L), \Delta\theta = \frac{r}{d}(\Delta\phi_R - \Delta\phi_L)$$

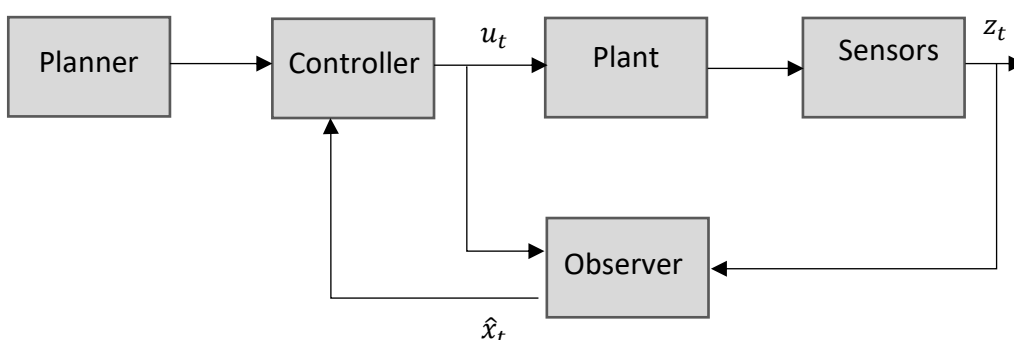
L'integrazione in avanti del modello cinematico sulla base dei comandi di velocità ricostruiti a partire dalle misurazioni provenienti dai sensori propriocettivi viene definita localizzazione odometrica o passiva o dead reckoning.

Questa tecnica , ovviamente fornisce dei risultati poco attendibili sulla stima dello stato del processo , in quanto ricordiamolo è sempre basato su tecniche di integrazione numeriche. Indipendentemente dal tipo di integrazione utilizzato , l'odometria è soggetta in pratica a un errore che si accumula nel tempo (deriva) e diviene non trascurabile su percorsi abbastanza lunghi.

Una soluzione a questo problema è offerta dal Filtro di Kalman (localizzazione attiva) , il quale cerca di correggere la stima passiva a partire dal confronto tra le misurazioni attese (basate sulle predizioni) e quelle effettivamente rilevate da sensori eterocettivi. La differenza tra queste due quantità costituisce quella che in precedenza è stata definita innovazione.

## Risultati Sperimentali

Nei capitoli precedenti abbiamo descritto in maniera esaustiva tutti gli elementi caratterizzanti l'anello



di controllo sopra riportato. In questa sezione presentiamo i risultati degli esperimenti svolti in ambiente simulativo. Inizieremo dapprima riportando i risultati ottenuti per applicazione delle azioni di controllo discusse nei Capitoli 2 , 3 , ipotizzando in prima battuta di avere una completa conoscenza ad ogni istante di tempo dello stato del sistema.

Successivamente , si presenteranno i risultati ottenuti con l'applicazione delle tecniche di stima presentate nel Capitolo 4. In particolare , simuleremo sia applicazioni outdoor , in cui la stima dello stato è supportata da sistemi di localizzazione GNSS (Global Navigation Satellite Systems) , nonché applicativi in ambito indoor , in cui la stima ricorsiva della configurazione del robot è supportata dall'impiego di Beacons.

Quindi di fatto nel proseguo ipotizzeremo che il nostro robot sia dotato di moduli di ricezione appositi per gli scenari sopra descritti.

Tutti i risultati qui riportati sono stati ottenuti con l'ausilio del software Matlab.

## Simulazioni Controllo Gain Scheduling

---

In questa prima fase di simulazione , andremo ad analizzare i risultati ottenuti dall'applicazione del controllore presentato nel Capitolo 3 , il controllo a guadagno schedulato. In particolare , come già ribadito in precedenza si assume in questa prima fase che la configurazione del robot

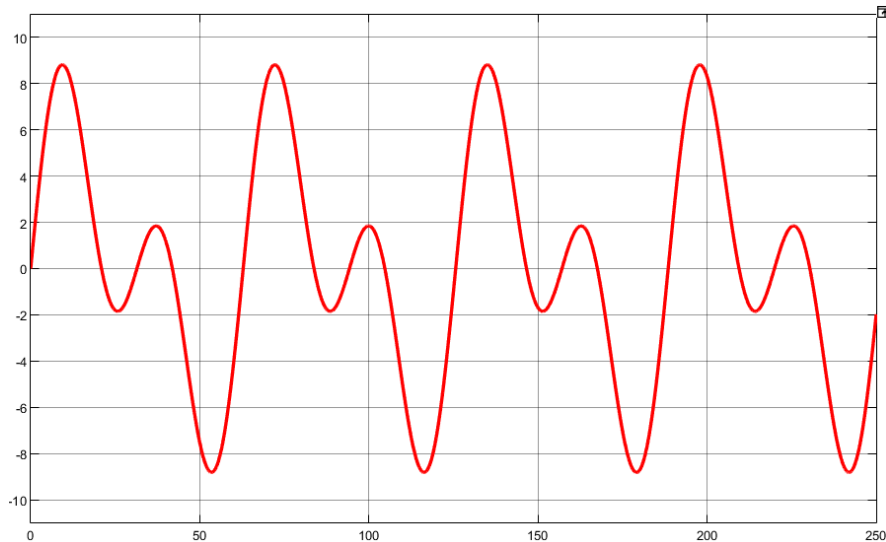
$$q(t) = [x(t); y(t); \theta(t)]^T$$

sia nota ad ogni istante di tempo; di fatto , in prima battuta trascuriamo la presenza dello stimatore dello stato del nostro differential drive.

Si ricordi come l'obiettivo di tale controllore è quello di eliminare le limitazioni imposte dal controllore sul linearizzato (Capitolo 2) , e cioè non richiedere la costanza del vettore delle velocità

$$[v_d(t); \omega_d(t)]^T$$

Iniziamo la nostra discussione , graficando in primis l'andamento del percorso desiderato nel piano cartesiano , per il nostro differential drive



**Figura 5.1** Riferimento nel piano.

Volendo essere più espliciti , la parametrizzazione del precedente cammino desiderato è data da

$$\begin{aligned} x_d(t) &= t; \\ y_d(t) &= 5 \sin(0.1 t) + 5 \sin(0.2 t); \end{aligned}$$

L'obiettivo del seguente riferimento è quello di avere riferimenti di velocità tempo varianti.

Si ricordi che il percorso deve essere ammissibile per il nostro differential drive , alla traiettoria cartesiana desiderata  $(x_d(t), y_d(t))$  , corrisponde di fatto la seguente traiettoria di stato

$$q_d(t) = [x_d(t); y_d(t); \theta_d(t)]^T$$

Con

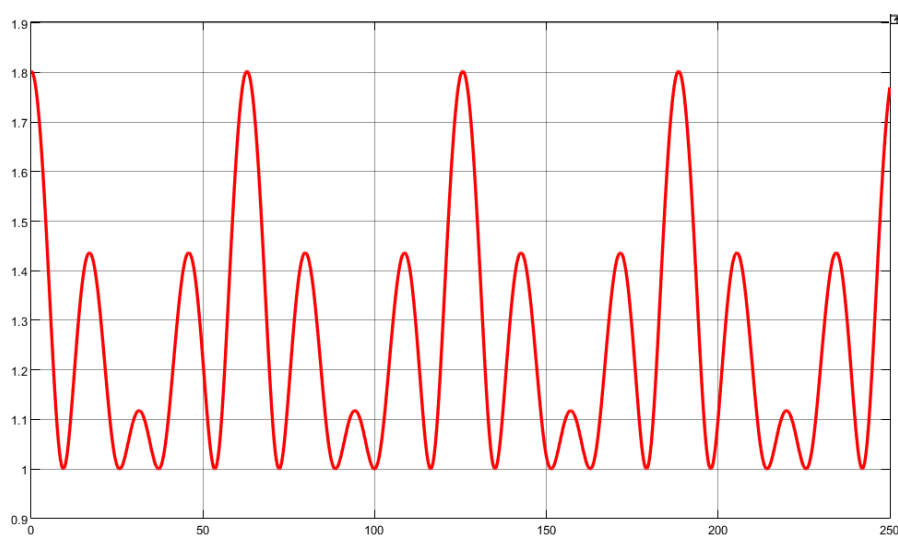
$$\theta_d(t) = \tan^{-1} \left( \frac{\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)} \right)$$

Sfruttando la piattezza differenziale come ribadito nel Capitolo 2 , è immediato determinare i riferimenti di velocità per il percorso desiderato , infatti

$$v_d(t) = \pm \sqrt{\dot{x}_d(t)^2 + \dot{y}_d(t)^2}$$

$$\omega_d(t) = \frac{\ddot{y}_d(t)\dot{x}_d(t) - \ddot{x}_d(t)\dot{y}_d(t)}{\dot{x}_d(t)^2 + \dot{y}_d(t)^2}$$

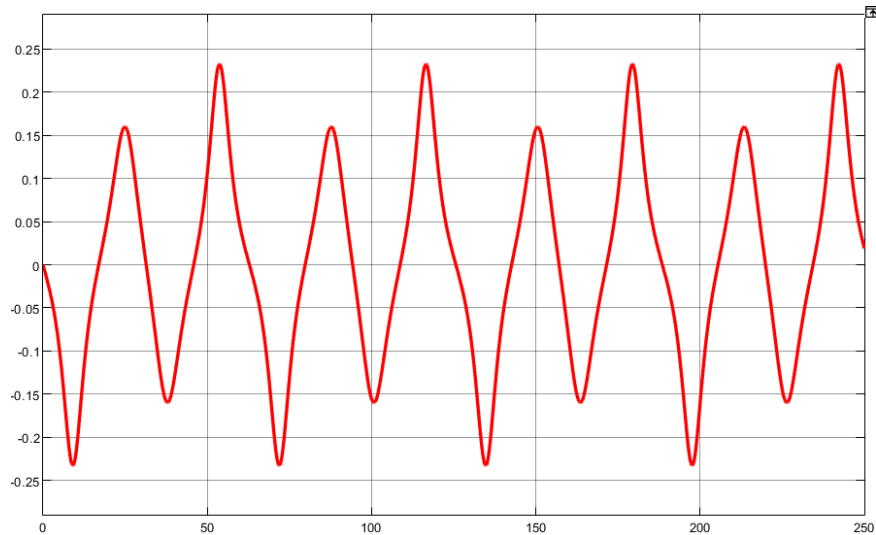
Si riportano di seguito gli andamenti dei riferimenti di velocità con lo scopo di individuare limiti superiori e inferiori per la definizione dell'azione di controllo



**Figura 5.2** Andamento nel tempo velocità di trazione  $v_d(t)$

Di seguito invece l'andamento nel tempo per quanto riguarda la velocità di sterzo  $\omega_d(t)$ .





**Figura 5.3** Andamento nel tempo velocità di sterzo  $\omega_d(t)$ .

Si ricordi come la definizione dell'azione di controllo a guadagno schedulato , si fonda su una caratterizzazione dei limiti inferiori e superiori dei parametri incerti. In particolare , come ribadito nel Capitolo 3 , come parametri incerti consideriamo le due velocità , ed in particolare scegliamo i seguenti valori per i limiti

$$\bar{v}_d(t) = 5;$$

$$\underline{v}_d(t) = 1;$$

$$\bar{\omega}_d(t) = 5;$$

$$\underline{\omega}_d(t) = -5;$$

Definiti i vertici del politopo , il passo successivo è la risoluzione delle LMIs per l'individuazione dei 4 guadagni che caratterizzano l'azione di controllo a guadagno schedulato

$$K(p(t)) = \sum p_i(t)K_i$$

con

$$p_1(t) = \left( \frac{v_d(t) - \underline{v}_d}{\bar{v}_d - \underline{v}_d} \right) \left( \frac{\omega_d(t) - \underline{\omega}_d}{\bar{\omega}_d - \underline{\omega}_d} \right) , \quad p_2(t) = \left( \frac{\bar{v}_d - v_d(t)}{\bar{v}_d - \underline{v}_d} \right) \left( \frac{\omega_d(t) - \underline{\omega}_d}{\bar{\omega}_d - \underline{\omega}_d} \right)$$

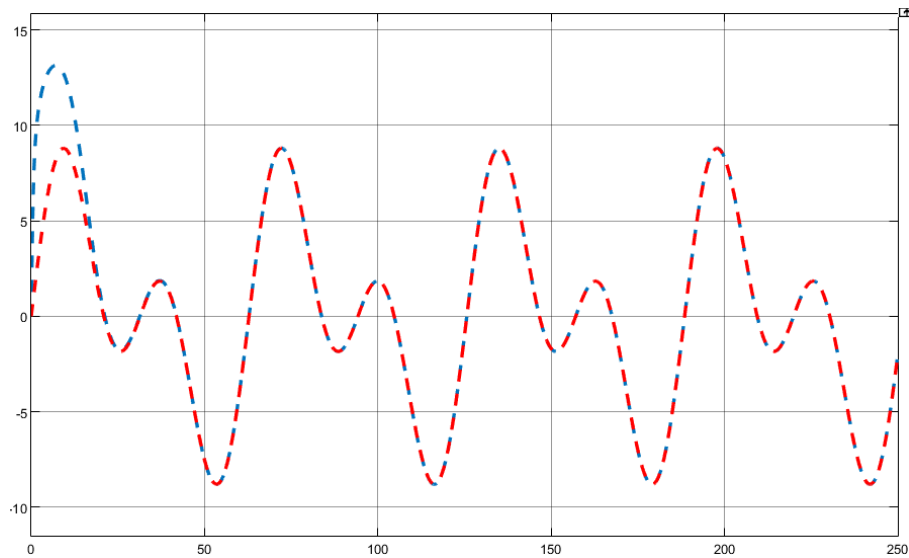
$$p_3(t) = \left( \frac{\bar{v}_d - v_d(t)}{\bar{v}_d - \underline{v}_d} \right) \left( \frac{\bar{\omega}_d - \omega_d(t)}{\bar{\omega}_d - \underline{\omega}_d} \right) , \quad p_4(t) = \left( \frac{v_d(t) - \underline{v}_d}{\bar{v}_d - \underline{v}_d} \right) \left( \frac{\bar{\omega}_d - \omega_d(t)}{\bar{\omega}_d - \underline{\omega}_d} \right)$$

come notiamo tali che

$$p_i(t) \geq 0, i = 1,2,3,4 \quad \sum p_i(t) = 1$$

e cioè interno allo unitary simplex  $\forall t \geq 0$ .

Si mostrano di seguito i risultati ottenuti con l'applicazione di tale azione di controllo , in particolare iniziamo con il sovrapporre all'andamento desiderato la traiettoria percorsa dall'uniciclo controllato.



**Figura 5.4** Controllo Gain Scheduling

In particolare la Figura 5.4 evidenzia in rosso il riferimento , ed in blue riporta l'andamento della traiettoria seguita dal robot. Si noti come dopo un leggero transitorio , l'errore a regime è nullo.

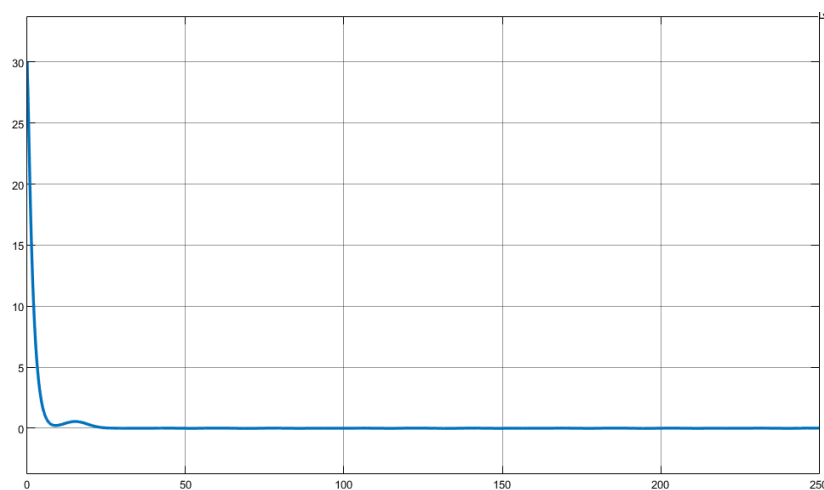
Si riporta di seguito l'andamento degli errori , definiti ricordiamolo come

$$e_x(t) = x(t) - x_d(t)$$

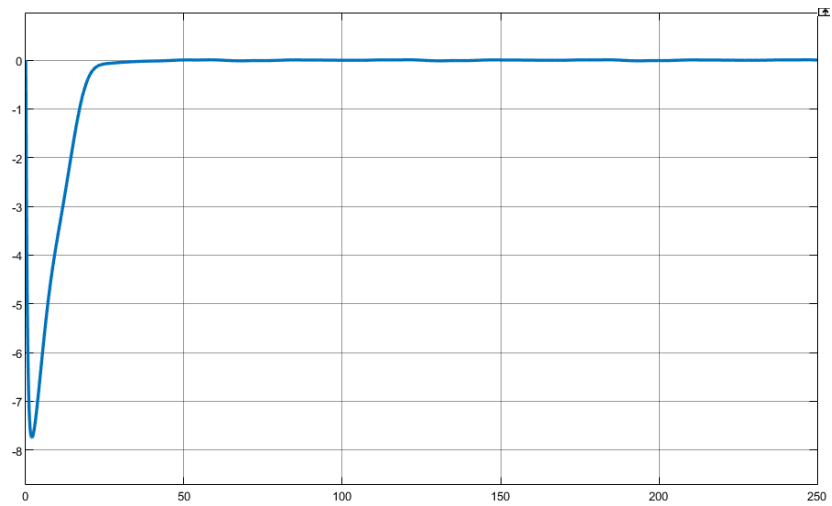
$$e_y(t) = y(t) - y_d(t)$$

$$e_\theta(t) = \theta(t) - \theta_d(t)$$

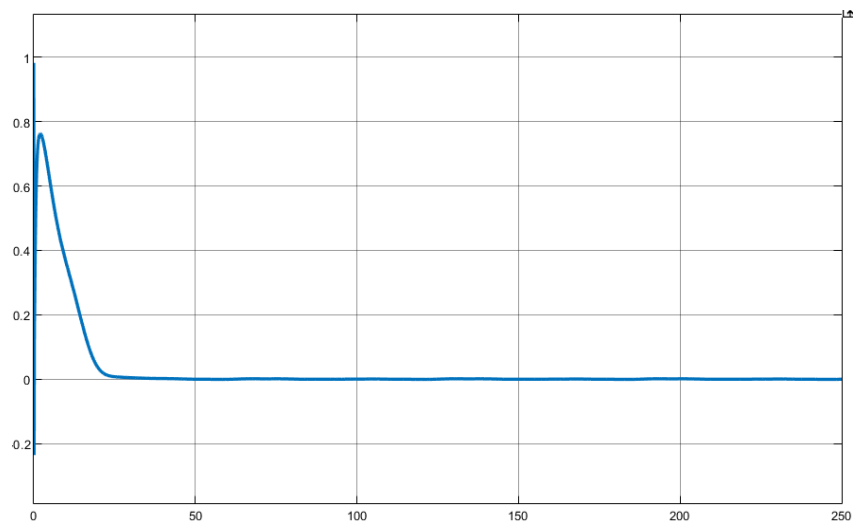
Di seguito l'andamento dei tre errori nel tempo.



**Figura 5.5** Andamento nel tempo di  $e_x(t)$ .



**Figura 5.6** Andamento nel tempo di  $e_y(t)$



**Figura 5.7** Andamento nel tempo di  $e_\theta(t)$ .

Conclusa questa prima fase di simulazione , si passa ora ad analizzare i risultati in simulazione, sfruttando le tecniche di localizzazione discusse nel Capitolo 4. Cioè da ora in poi consideriamo la presenza all'interno dell'anello di controllo di uno stimatore dello stato a partire da misurazioni ingresso uscita.

## Risultati Filtro Kalman Esteso

---

Fino a questo punto abbiamo ipotizzato di conoscere ad ogni istante di tempo la corretta configurazione del robot. Questa situazione si discosta molto dalla realtà. In applicazioni pratiche non sempre lo stato è completamente noto; nasce allora l'esigenza di stimarlo a partire da misurazioni ingresso uscita.

Come ampiamente discusso nel Capitolo 4 , una prima tecnica di localizzazione ci è fornita dal dead reckoning o odometria. L'idea alla base dell'odometria , è ricordiamolo , una semplice integrazione numerica del modello cinematico del differential drive.

Ricordiamo come il metodo di Eulero in avanti presuppone costante l'orientamento del robot all'interno dell'intervallo di campionamento.

Abbiamo analizzato come risultati migliori in pratica si ottengono sommando all'angolo  $\theta(t)$ , l'orientamento medio dell'uniciclo nell'intervallo  $[t, t + T_s]$

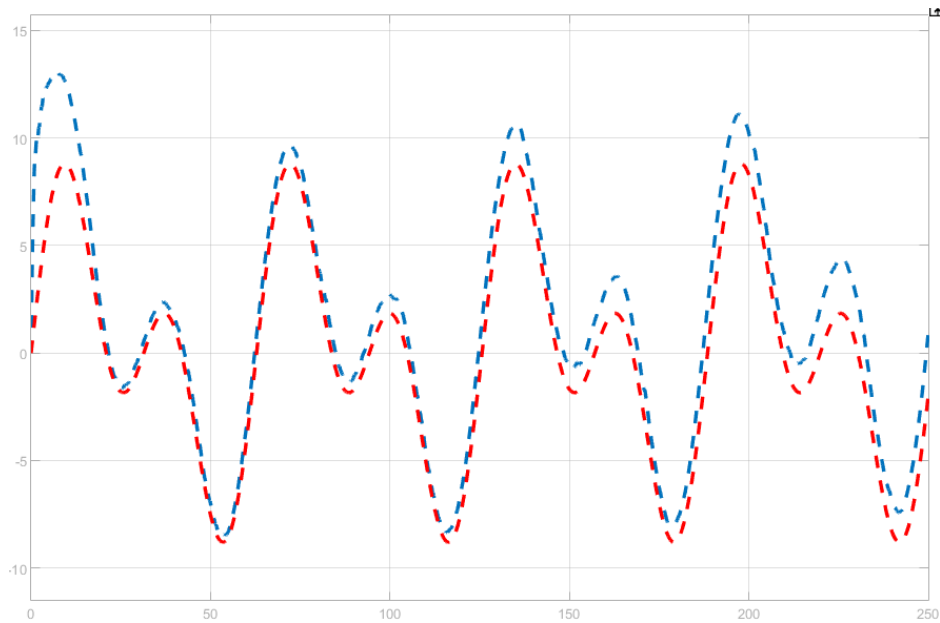
$$x_{t+1} = x_t + v_d T_s \cos\left(\theta(t) + \frac{\omega_d T_s}{2}\right)$$

$$y_{t+1} = y_t + v_d T_s \sin\left(\theta(t) + \frac{\omega_d T_s}{2}\right)$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \omega_d T_s$$

che ricordiamo corrispondere all'uso di Runge – Kutta al secondo ordine per l'integrazione.

Si riporta di seguito l'andamento della traiettoria percorsa dal robot , sfruttando come tecnica di localizzazione l'odometria.



**Figura 5.8** Risultati con Localizzazione Odometrica Runge-Kutta.

La Figura 5.8 mette bene in evidenza il problema della localizzazione odometrica. Indipendentemente dalla tecnica di integrazione numerica utilizzata, l'odometria è soggetta in pratica a un errore accumulato nel tempo (deriva) e diviene non trascurabile su lunghi percorsi.

Abbiamo visto nel Capitolo 4, che una soluzione più robusta al problema della stima dello stato è fornita dalle tecniche di localizzazione attiva, quali il Filtro di Kalman.

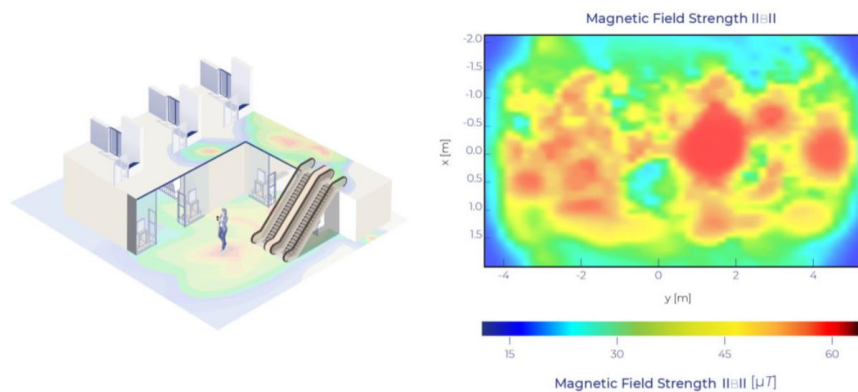
Ricordiamolo, il Filtro di Kalman, caso particolare del più generale Filtro Bayesiano, nella fase di correzione, sulla base delle informazioni sensoriali registrate al tempo  $t$  fornisce una correzione alla stima ottenuta tramite l'odometria.

In questa parte del capitolo, ipotizzeremo che ogni istante di tempo  $t$ , ci venga fornita una stima sulla posizione corrente del robot, il vettore

$$[\hat{x}_t; \hat{y}_t]$$

e la corrispettiva matrice di covarianza  $Q_t$ .

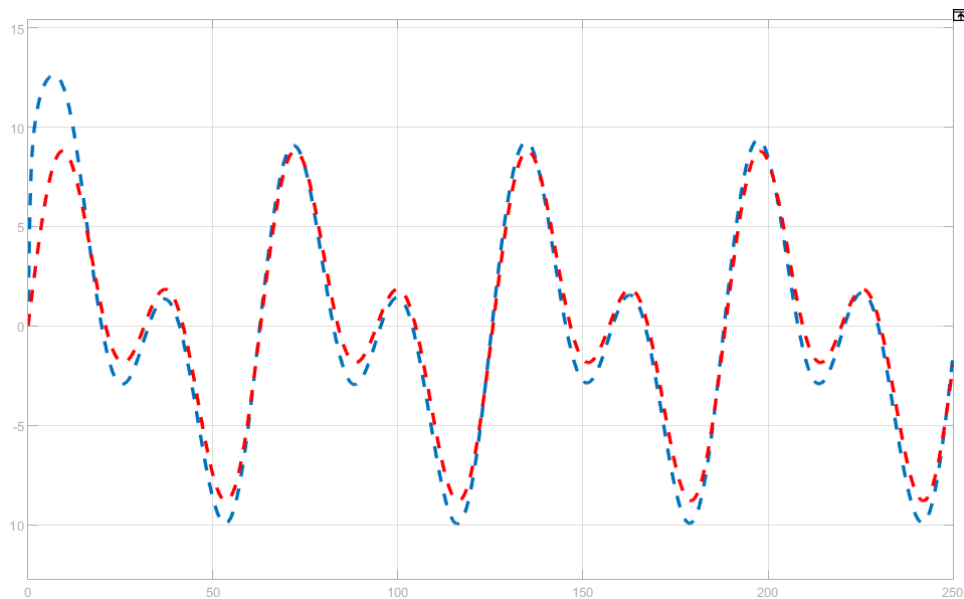
Si noti che questa ipotesi è frequente in molte applicazioni pratiche, ad esempio, nel caso di applicazioni outdoor, con robot dotati di moduli GPS. Tuttavia un riscontro pratico di tali situazione si ha anche in ambienti indoor, ad esempio attraverso tecniche di localizzazione, quali il fingerprinting.



**Figura 5.9** FingerPrinting Indoor Localization

Sulla base dell'intensità ad esempio del campo magnetico registrato in determinate posizioni  $(x,y)$ , in una prima fase di raccolta dati; si può poi sfruttare questa mappatura per stimare in una fase online la possibile posizione del robot.

Arrivati a questo andiamo a vedere come il Filtro di Kalman Esteso fornisce una correzione attiva al problema dell'odometria.



**Figura 5.10** Localizzazione con EKF.

Notiamo come ora l'errore introdotto dalle tecniche di localizzazione odometrica viene corretto sfruttando le misurazioni ottenute al generico istante di tempo  $t$ .

In particolare , nell'ottenere i precedenti risultati , aumentando la covarianza del modello rispetto alle misure , abbiamo “detto” al Filtro di Kalman di fidarsi di più delle misure che delle predizioni fatte a partire dal modello.

Prima di lasciare la sezione , facciamo delle piccole considerazioni riguardanti ad esempio la funzione di misura

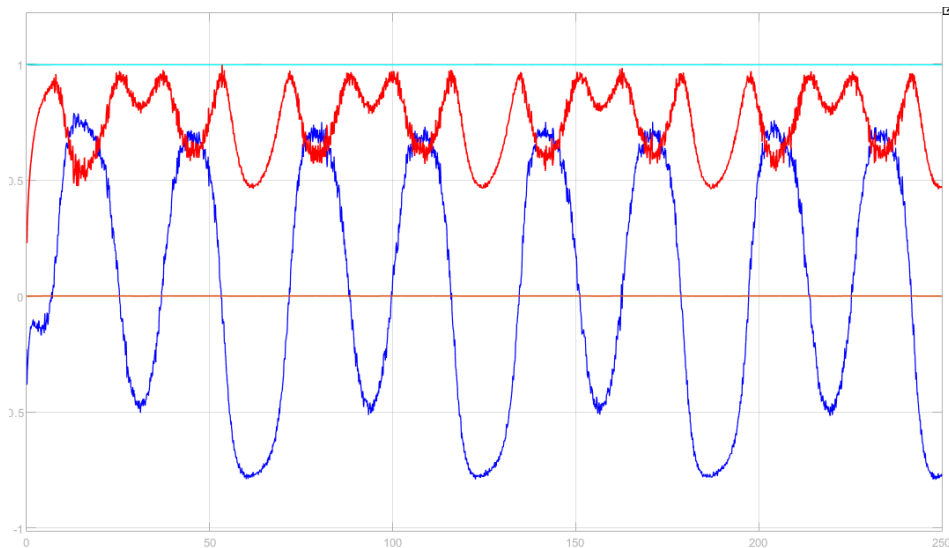
$$z_t = h(x_t) + \delta_t$$

per quanto riguarda la funzione  $h(\cdot)$  , disponendo delle misure sulla posizione cartesiana del robot , di fatto coincide con la matrice

$$C_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



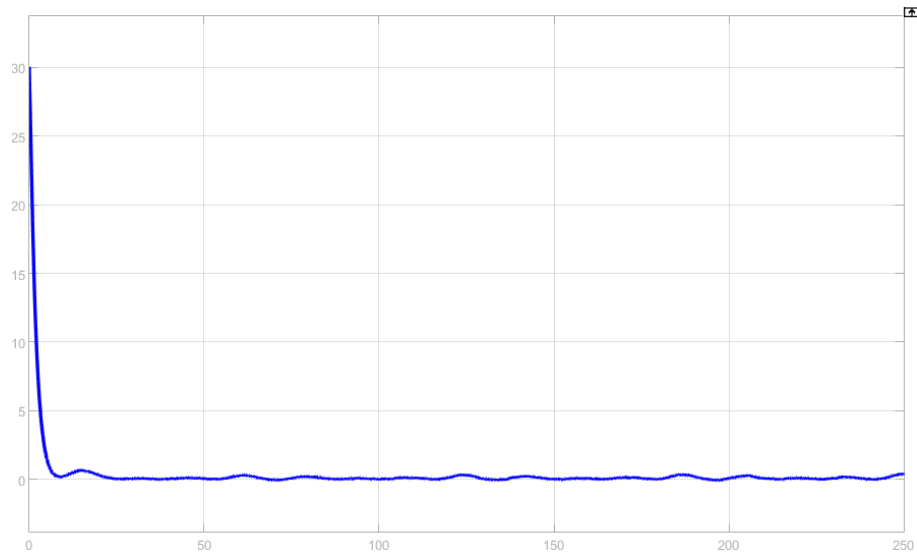
Ultima osservazione riguarda la non divergenza dei guadagni del filtro , il cui andamento è riportato in Figura 5.11.



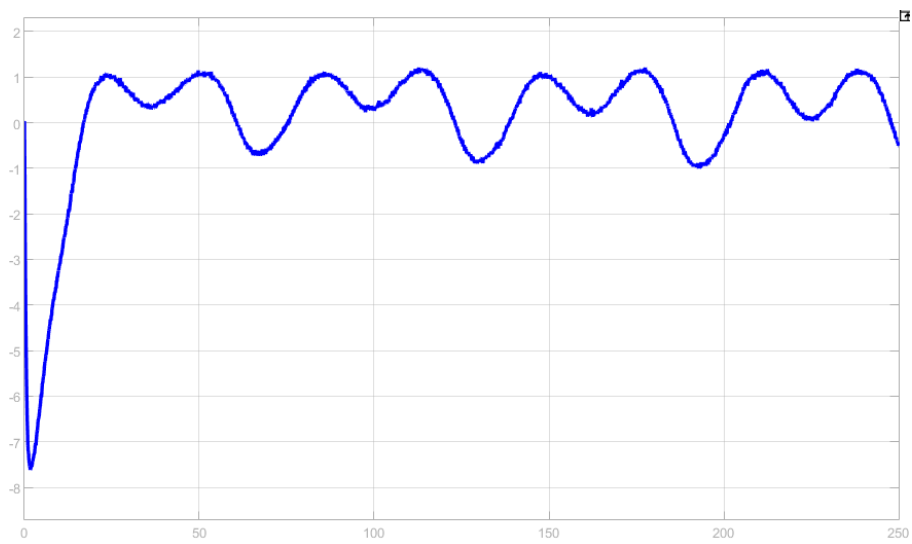
**Figura 5.11** Andamento guadagni Filtro Kalman Esteso

La non divergenza del guadagno di Kalman , implica la non divergenza della soluzione dell'equazione di Riccati , che fornisce la matrice di covarianza dell'errore di predizione di stato. La non divergenza si traduce perciò nella capacità del predittore di fornire una stima dello stato con un errore di entità limitata (in senso probabilistico).

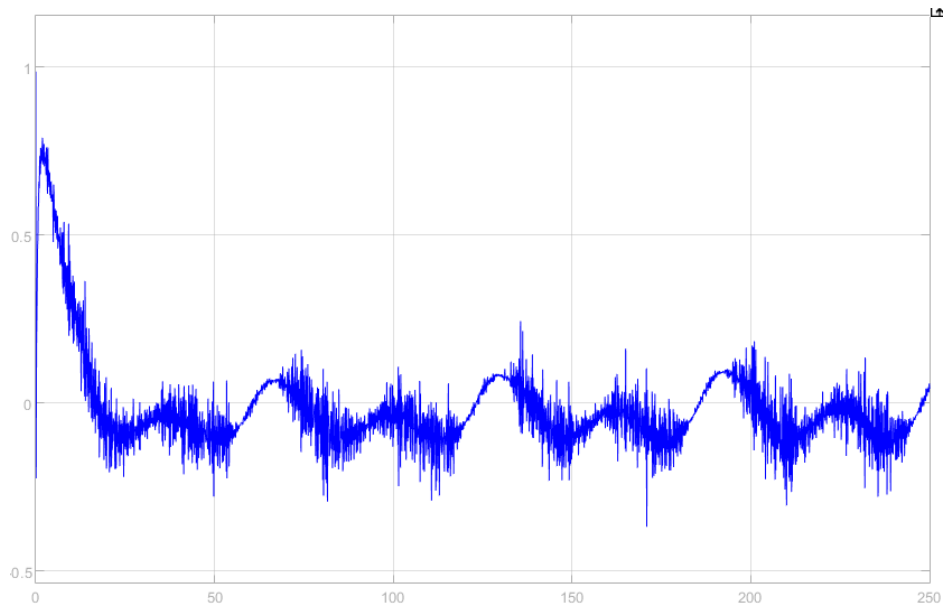
Si riporta infine l'andamento degli errori



**Figura 5.12** Andamento nel tempo errore  $e_x(t)$ .



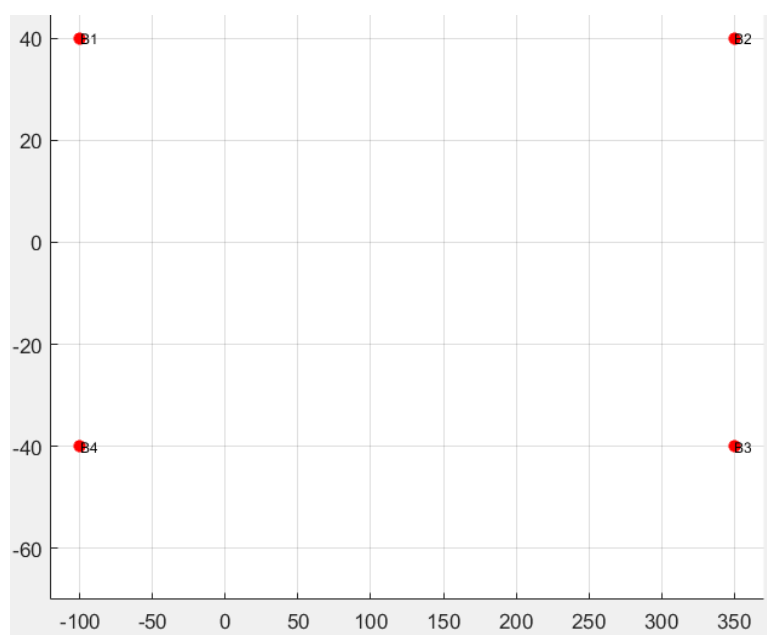
**Figura 5.13** Andamento nel tempo errore  $e_y(t)$ .



**Figura 5.14** Andamento nel tempo errore  $e_{\theta}(t)$ .

## Localizzazione Mediante Beacons

In questa ultima parte del capitolo , ipotizzeremo che all'interno dell'ambiente , sono presenti dei trasmettitori , i beacons. In particolare ipotizzeremo la presenza di 4 Beacons , disposti come mostrato nella figura seguente.



**Figura 5.15** Posizionamento Beacons Nel Piano

Si tratta di trasmettitori , che forniscono informazioni sulla propria posizione , nonché sulla distanza del robot dal ricevitore; ad esempio il calcolo della distanza potrebbe essere basato sul tempo di andata del segnale , nell'ipotesi che sui beacons vi sia un meccanismo di time stamp.

Si ricordi , come la relazione tra posizione dei Beacons e distanze è data dalle seguenti equazioni

$$d_1 = \sqrt{(x_r - x_{B1})^2 + (y_r - y_{B1})^2}$$

$$d_2 = \sqrt{(x_r - x_{B2})^2 + (y_r - y_{B2})^2}$$

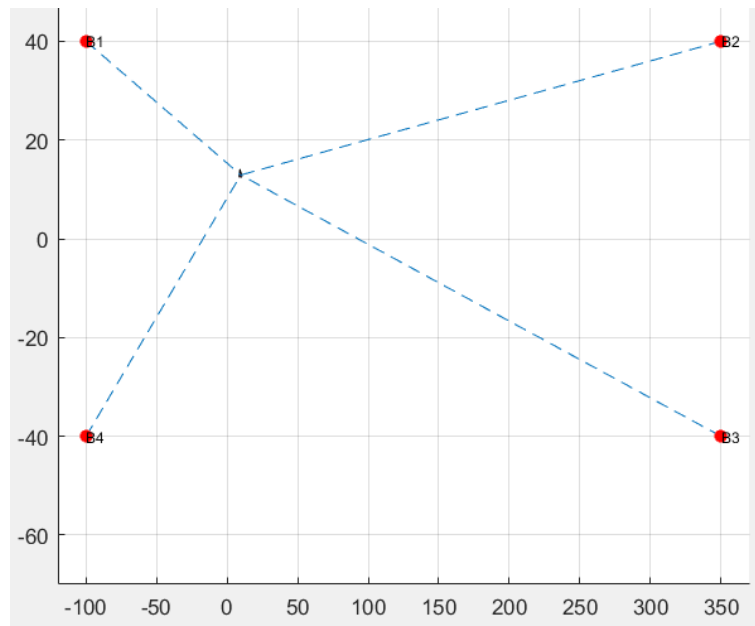
$$d_3 = \sqrt{(x_r - x_{B3})^2 + (y_r - y_{B3})^2}$$

$$d_4 = \sqrt{(x_r - x_{B4})^2 + (y_r - y_{B4})^2}$$

Di fatto quello che rappresentano queste relazioni è la struttura della funzione di misura per ogni uscita del robot

$$z_t = h_i(x_t) = \sqrt{(x_r - x_{Bi})^2 + (y_r - y_{Bi})^2}$$

Quindi si presuppone che ad ogni istante di tempo il robot riceve tutte e quattro le misurazioni da parte dei Beacons come illustrato nella figura seguente



**Figura 5.16** Ricezione Segnali Beacons

Ancora una volta sfrutteremo il Filtro di Kalman Esteso per risolvere il problema legato alla stima della configurazione del robot

$$q(t) = [x(t); y(t); \theta(t)]^T$$

Ricordiamolo , il Filtro di Kalman , è caratterizzato da due fasi ,una predizione ed una di correzione.

Per quanto il modello sulla base del quale predire lo stato futuro in funzione dell'azione di controllo (odometria) , come nel caso precedente faremo riferimento all'integrazione di Runge Kutta al secondo ordine

$$x_{t+1} = x_t + v_d T_s \cos\left(\theta(t) + \frac{\omega_d T_s}{2}\right)$$

$$y_{t+1} = y_t + v_d T_s \sin\left(\theta(t) + \frac{\omega_d T_s}{2}\right)$$

$$\theta_{t+1} = \theta_t + \omega_d T_s$$

Si ricordi tuttavia , come lo EKF si basa una espansione in serie di Taylor arrestata al primo ordine delle precedenti equazioni , valutata in corrispondenza dell'ultima stima ottenuta. Si riporta di seguito la struttura dello Jacobiano

$$J_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -v_d T_s \sin\left(\hat{\theta}(t) + \frac{\omega_d T_s}{2}\right) \\ 0 & 1 & v_d T_s \cos\left(\hat{\theta}(t) + \frac{\omega_d T_s}{2}\right) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ottenuta la predizione al tempo  $t$  sulla configurazione del sistema,

$$\hat{q}(t) = [\hat{x}(t); \hat{y}(t); \hat{\theta}(t)]^T$$

e ipotizzando di disporre delle quattro misurazioni  $d_1, d_2, d_3, d_4$  da parte dei beacons , possiamo determinare l'innovazione

$$e(t) = [d_1 - h_1(\hat{q}); d_2 - h_2(\hat{q}); d_3 - h_3(\hat{q}); d_4 - h_4(\hat{q})]^T$$

rappresentante tutto ciò che non siamo riusciti a predire circa la distanza del robot ai beacons.

Si noti in particolare come in questo caso , il guadagno del filtro di Kalman sarà una matrice

$$K_t \in R^{3 \times 4}$$

Si ricordi che il calcolo del guadagno del filtro passa attraverso la seguente equazione

$$K_t = \bar{\Sigma}_t H_t^T (H_t \bar{\Sigma}_t H_t^T + Q_t)^{-1}$$

con

$$H_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial h_4}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & 0 \end{bmatrix}$$

valutata in corrispondenza dell'ultima stima ottenuta.

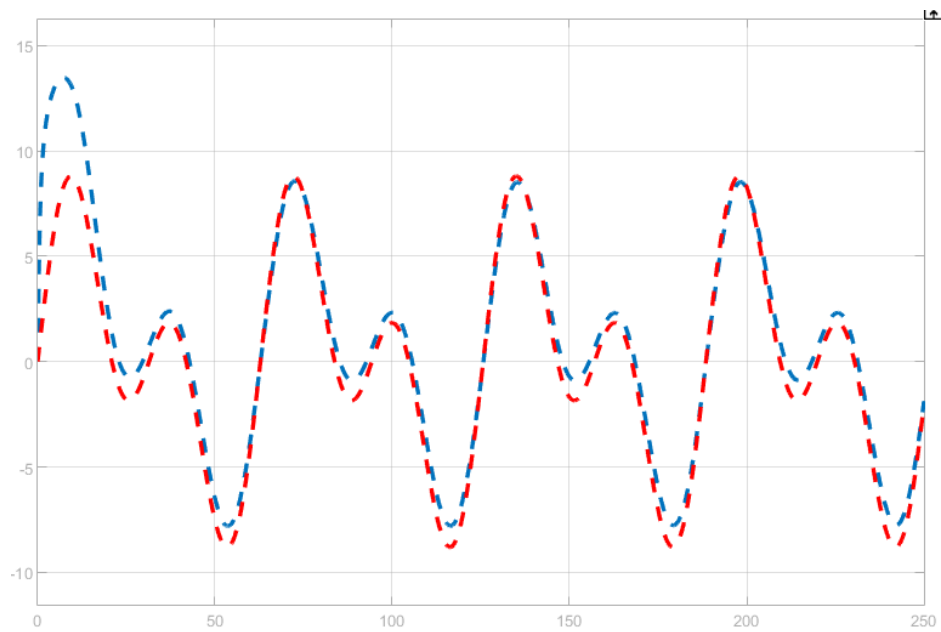
Determinata l'innovazione ed il guadagno di Kalman , il passo successivo è la correzione all'odometria

fatta , ricordiamo , in accordo alla seguente equazione di aggiornamento

$$q_t = \hat{q}_t + K_t(d - h(\hat{q}_t)) = \hat{q}_t + K_t e_t$$

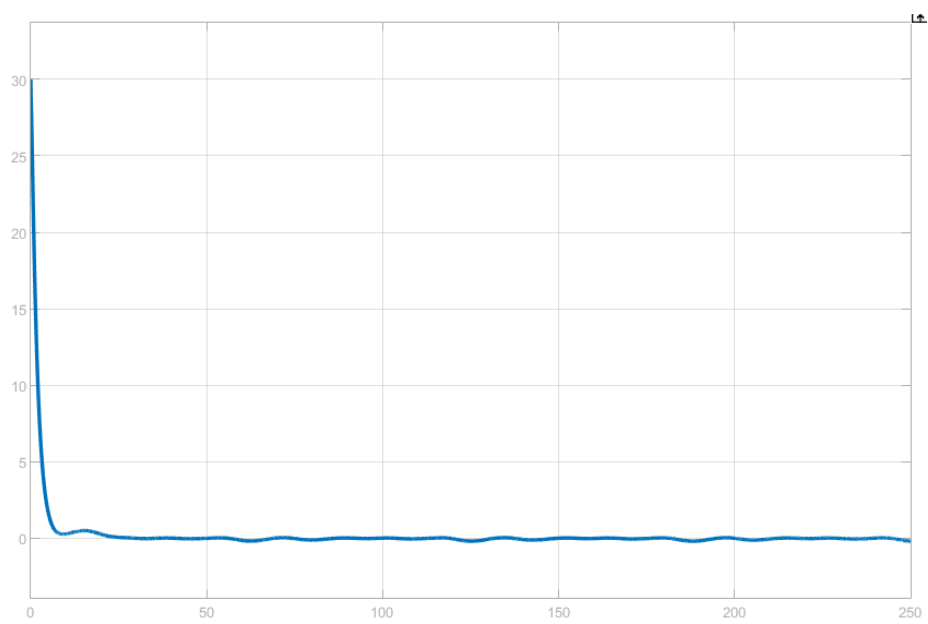
Ancora una volta giocando sulle matrici di covarianze , “diremo” al filtro di Kalman di fidarsi di più delle misurazioni che delle predizioni , con l'obiettivo di ridurre l'errore introdotto dalle tecniche di integrazione numerica.

Si riportano nelle pagine a seguire tutti i risultati sperimentali ottenuti con il controllo e le tecnica di localizzazione discussa in precedenza.



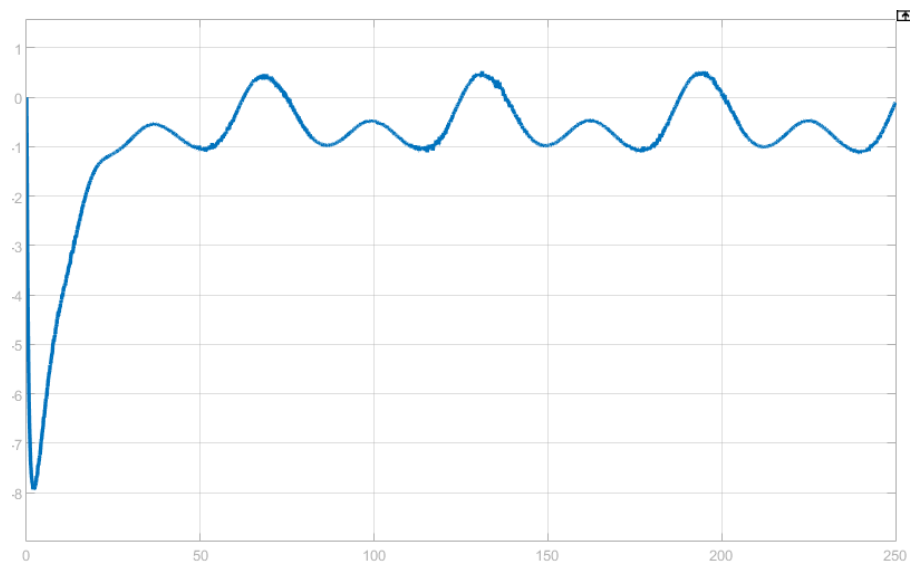
**Figura 5.17** Risultati Numerici Ottenuti

Si riporta di seguito l'andamento degli errori e dei guadagni del filtro.

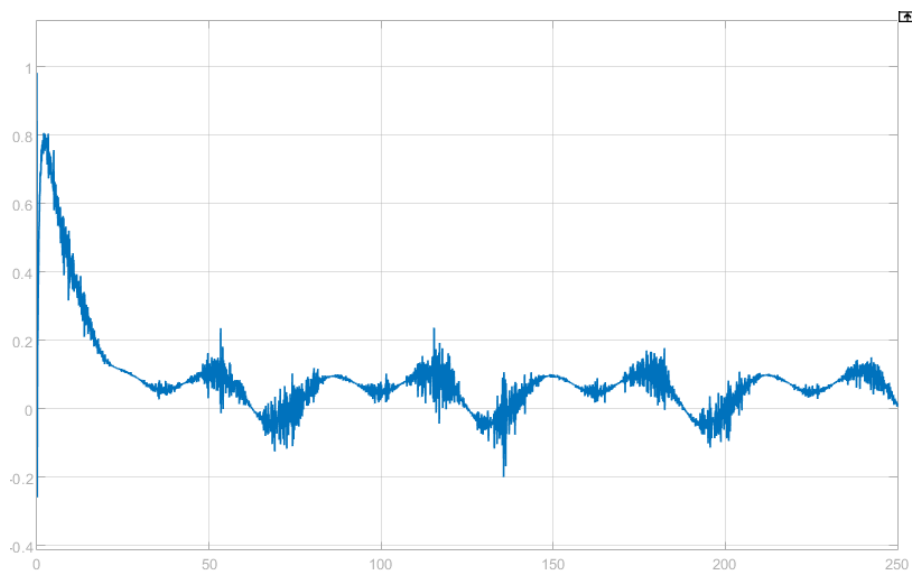


**Figura 5.18** Andamento nel tempo errore  $e_x(t)$ .

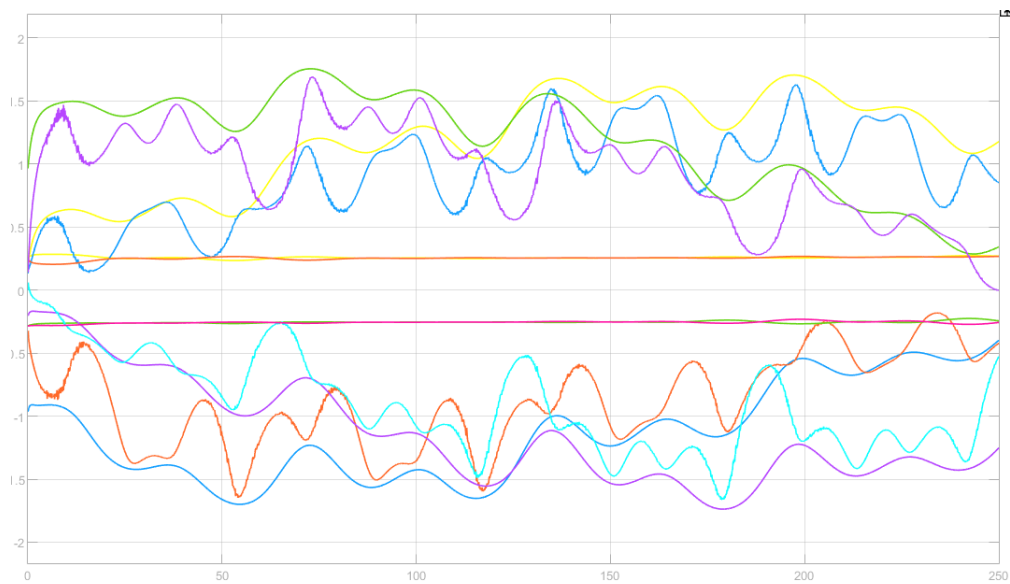




**Figura 5.19** Andamento nel tempo di  $e_y(t)$ .



**Figura 5.20** Andamento nel tempo di  $e_\theta(t)$ .



**Figura 5.21** Andamento nel tempo Guadagni del filtro

Ancora una volta , la non divergenza si traduce perciò nella capacità del predittore di fornire una stima dello stato con un errore di entità limitata (in senso probabilistico).

## Conclusioni

---

In questo lavoro di tesi abbiamo proposto una soluzione alternativa sia al problema del controllo che al problema della stima della configurazione del nostro robot uniciclo a trazione differenziale. In particolare abbiamo visto come il problema legato alla tempo varianza del modello viene praticamente risolto trattando il modello cinematico come un sistema incerto. La possibilità di misurare il vettore dei parametri incerti ci ha dato l'ulteriore vantaggio di poter implementare un controllo a guadagno schedulato migliorando le prestazioni di un controllo semplicemente robusto. Il problema della stima della configurazione è stato risolto attraverso l'utilizzo di stimatori asintotici gaussiani. L'utilizzo di sistemi GNSS nonché dei Beacons ci ha dato la possibilità di ottenere una ottima correzione alla stima odometrica , fornendoci una soluzione sia per scenari indoor che all'aperto.

## Riferimenti

---

- [1]B. Siciliano , L. Sciavicchio , L. Villani , G. Oriolo , “Robotica, Modellazione Pianificazione e Controllo” , 3ª Edizione , McGraw-Hill.
- [2]L. D'Alfonso , W. Lucia , P. Muraca , P. Pugliese , “Mobile robot localization via EKF and UKF : A comparison based on real data” , Robotics and Autonomous Systems , Elsevier , 2015.
- [3]C. Canudas de Wit , H. Khenrouf , C. Samson , O. J. Sordalen , “Nonlinear control design for mobile robotics” , in *Recent Trends in Mobile Robots* , Y. F. Zheng , (Ed.) , pp. 121-156, World Scientific Publisher , Singapore , 1993.
- [4]M. W. Spong , S. Hutchinson , M. Vidyasagar , “Robot Modeling and Control” , 2ª Edizione , Wiley.
- [5]M. Spivak , “A comprehensive introduction to differential geometry” , Publish or Perish , Inc. , Berkeley , CA , 2ª Edizione , 1979.
- [6]Hassan K. Khalil , “Nonlinear Control” , Global Edition , Pearson , 2015.
- [7]K. Zhou , J. C. Doyle , K. Glover , “Robust and Optimal Control” , Prentice Hall , Englewood Cliffs , New Jersey 07632.
- [8]Guang-Ren Duan , Hai-Hua Yu , “LMIs in Control Systems , Analysis , Design and Applications” , CRC Press.
- [9]E. Fornasini , P. Marchesini , “Appunti di Teoria Dei Sistemi” , Edizioni Libreria Progetto Padova.
- [10]S. Bittanti , “Teoria Della Predizione e Del Filtraggio” , Pitagora Editrice , Bologna.
- [11]S. Thrun , W. Burgard , D. Fox , “Probabilistic Robotics” , Early Draft , Not For Distribution , 1999-2000.
- [12]C. Bonivento , C. Melchiorri , R. Zanasi , “Sistemi di Controllo Digitale” , Progetto Leonardo , Bologna.