

Stima Ricorsiva Dello Stato

Tutti i controlli sviluppati nella sezione precedente , si fondando sulla ipotesi di una perfetta e completa conoscenza dell’intero stato del sistema ad ogni istante di tempo. Tuttavia , lo stato di un sistema dinamico , non sempre è completamente misurabile , a volte soltanto alcune delle componenti sono direttamente misurabili , altre invece no. Nasce allora il problema della stima asintotica dello stato del sistema a partire da misurazioni ingresso uscita. In particolare a partire dalla seguente rappresentazione in stato per sistemi lineari tempo invarianti

si ricordi come condizione necessaria e sufficiente all’esistenza di uno stimatore asintotico dello stato è che il sottospazio non osservabile della coppia di matrici sia asintoticamente stabile (modi ad esso associati asintoticamente convergenti a zero). In particolare se la vedessimo in termini di sistemi duale , si ricordi come l’esistenza dello stimatore si traduce nella condizione di stabilizzabilità della coppia

Sebbene in linea teorica , un semplice stimatore di Luenberger del tipo

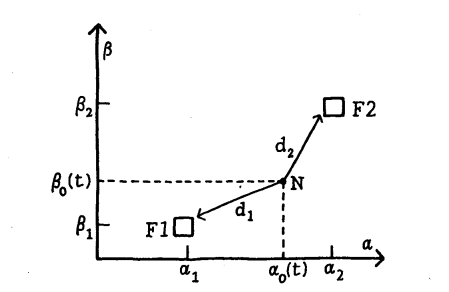
con guadagno dell’osservatore tale che il sistema

sia asintoticamente stabile , sia sufficiente a risolvere il problema posto , in pratica , le misurazioni provenienti dai sensori di cui è equipaggiato il robot , sono soggette a rumori di misura.

Si consideri ad esempio il seguente problema , noto in letteratura con il nome di “Problema del Navigatore”.

Esempio 4.1 (Problema del Navigatore)

Per stabilire la posizione in cui si trova , un navigatore invia dei segnali a due radiofari come illustrato dalla seguente figura.



**Figura 4.1** Segnali e RadioFari

Nota la posizione dei due radiofari , il navigatore cerca di stabilire la sua posizione sulla base dei tempi di andata e ritorno impiegati dai segnali nei tragitto navigatore – radiofaro e viceversa.

Se il navigatore è fermo , le distanze dai due radiofari sono costanti. In particolare noti i tempi di andata e ritorno dei due segnali , segue

Queste due equazioni di carattere puramente algebrico , danno il legame tra osservazioni ed il vettore delle variabili incognite . Il problema della stima richiede “semplicemente” la risoluzione delle precedenti equazioni rispetto alle due incognite .

Nella realtà però , il problema è molto più complesso , perché in generale misurazioni diverse portano a risultati diversi. Le sorgenti di incertezza nella misura , possono di fatto essere dovute a diversi fattori , quali ad esempio l’influenza sulla velocità di propagazione del segnale da parte delle condizioni atmosferiche.

Per tenere conto delle varie cause di incertezza , si può modificare la precedente espressione , introducendo un termine aggiuntivo

dove rappresenta l’errore nella misura , che varia casualmente. Data la variabilità del rumore di misura , non noto a priori , al generico istante di tempo , il valore assunto dalla variabile non può essere determinato in maniera univoca. Il particolare valore assunto dipenderà da una particolare condizione atmosferico , e quindi dal verificarsi o meno di un determinato evento.

Da questo punto di vista allora , la generica misura al tempo , sarà modellata come una grandezza stocastica (variabile aleatoria ) con una determinata distribuzione di probabilità. Più precisamente , data la dipendenza dal tempo , le misure saranno modellate mediante processi stocastici.

Come conseguenza , ad ogni istante di tempo ci si dovrà accontentare di un insieme di valori possibili per ; la dispersione sarà legata all’entità dell’errore

La modellazione matematica di grandezze incerte , quali misurazioni, sarà fornita da tutti gli strumenti teorici messi a disposizione dall’Analisi Probabilistica.

Questo semplice esempio ci serve da introduzione al paragrafo successivo.

Robotica Probabilistica

La robotica probabilista tiene conto in maniera esplicita di eventuali incertezze sia nelle misure che nelle azioni del robot , sfruttando strumenti teorici della Analisi Probabilistica. Nella robotica probabilista quantità come misurazioni provenienti da sensori , azioni di controllo , e stati che il robot può assumere , sono modellati attraverso grandezze aleatorie. Le variabili aleatorie assumono valori continui e discreti in accordo a qualche legge probabilistica.

Al cuore della robotica probabilistica vi è l’idea di stimare lo stato di un sistema a partire da misure sensoriali. Data la natura incerta delle quantità in questione , il problema a cui cerca di dare una soluzione , è di fatto un problema di inferenza probabilistica. Ovvero, il processo con cui si cerca di stimare le leggi di probabilità di alcune grandezze incerte a partire dalla conoscenza di altre grandezze aleatorie , quali ad esempio le misure sensoriali.

Ipoteticamente , un robot mobile potrebbe tenere traccia di tutte le informazioni passate. In particolare , un robot equipaggiato di sensori ha accesso a due particolari tipi di dati:

* **Sensor Data :** forniscono informazioni in merito ad un momentaneo stato dell’ambiente in cui il robot si trova. I dati sensoriali al tempo saranno indicati con

In particolare la notazione

denoterà l’insieme delle informazioni sensoriali acquisite nell’intervallo temporale

* **Control Data :** le quali portano informazioni circa il cambiamento dello stato del robot. Nella robotica mobile , ma non solo , un tipico esempio di tali dati sono le velocità del robot. Il generico dato di controllo al tempo sarà indicato con

mentre , con la notazione

faremo riferimento all’insieme dei dati di controllo acquisiti durante l’intervallo

Prima di passare alla caratterizzazione delle leggi probabilistiche che regolano l’evoluzione dello stato e delle misure , diamo dapprima la nozione di completezza dello stato.

Definizione (Completezza)

Uno stato è definito completo , se informazioni addizionali riguardanti stati passati , misure e dati di controllo , non portano nessuna informazione aggiuntiva che dovrebbe aiutarci nel predire lo stato futuro più accuratamente.

Processi temporali che danno per buona la precedente definizione sono meglio conosciuti come processi di Markov.

Come già asserito in precedenza , lo stato e le misure saranno rappresentate attraverso variabili aleatorie. Si ricordi che il comportamento di una grandezza aleatoria è completamente descritto a partire dalla sua funzione densità. Di seguito si parlerà arbitrariamente di densità e di distribuzione di probabilità , tuttavia si ricordi che non vi assoluta differenza , in quanto la seconda è la primitiva della prima.

In particolare di seguito, l’evoluzione dello stato sarà fatta dipendere da tutte le misurazioni passate , di fatto dunque , l’evoluzione sarà governata da una densità di probabilità condizionata del tipo

Tuttavia però , se è completo , allora segue immediatamente dalla definizione di completezza che

nota in letteratura con il nome di “state – transition – probability”. Come possiamo ben notare specifica come lo stato evolve in funzione del controllo .

Allo stesso modo , essendo le misurazioni quantità incerte , aleatorie , a senso specificare per tali grandezze leggi probabilistiche che ne caratterizzano completamante l’evoluzione. In particolare ancora una volta , come nel caso precedente , condizioneremo la generica misura al tempo alle informazioni passate , di fatto dunque , l’evoluzione sarà governata da una densità del tipo

assunta ancora una volta valida l’ipotesi di completezza dello stato , si ha

nota come “measurement – probability “. Lo stato è dunque sufficiente per predire la misurazione .

Note queste due leggi probabilistiche condizionali , esse come già anticipato , descrivono completamente l’evoluzione del sistema dinamico stocastico del robot e del suo ambiente.

Un altro concetto chiave della robotica probabilistica è quello della “belief”. La belief di fatto riflette la conoscenza interna del robot del suo stato. Più precisamente

modella dunque la probabilità a posteriori sullo stato del sistema condizionata alla misure passate disponibili.

In particolare si noti come dalla precedente definzione , la probabilità a posteriore è fatta dipendere dalle misure raccolte dai sensori sullo stato dell’ambiente fino al tempo , ovvero dipende da

Nella pratica , si preferisce dapprima calcolare la probabilità a posteriori prima della misura , subito dopo aver applicato l’azione di controllo

Questa distribuzione di probabilità di fatto rappresenta una **predizione** sullo , prima dell’arrivo delle misure.

La presa in considerazione della misura , e quindi , il calcolo di a partire da , costituisce la **correzione** alla predizione.

Il tutto sarà chiarito meglio nel seguito , con l’introduzione dei filtri Gaussiani , dove appunto si mostrerà come l’ultima misura verrà utilizzata per correggere la predizione sullo stato futuro del robot fornitaci dall’odometria.

Date queste definizioni , siamo pronti per introdurre il famoso Filtro di Bayes.

Filtro Di Bayes

L’algoritmo più generale per il calcolo della belief , è dato dal Filtro di Bayes. L’algoritmo determina la a partire dai dati sensoriali e di controllo .

Più precisamente , il filtro bayesiano è un algoritmo di stima probabilistico ricorsivo , nel senso che la belief al tempo verrà calcolata sulla base della belief al tempo

Nel derivare tale algorimo , seguiamo un approccio costruttivo.

L’obiettivo è determinare

sfruttando la ben nota regola di Bayes

la belief al tempo può essere così riscritta

sfruttando ancora una volta l’ipotesi di completezza dello stato , si ottiene

ed in accordo a tutte le considerazioni fatte il merito al concetto di belief , si ha

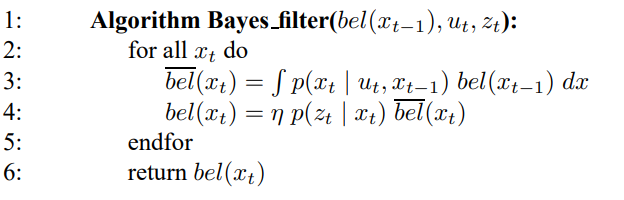
che rappresenta appunto la correzione alla predizione attravero la misura .

Il passo successivo richiede l’utilizzo di un ben noto risultato del calcolo probabilistico : il teorema della probabilità totale. Ricordando appunto come una grandezza aleatoria assume ad ogni istante di tempo uno ed un solo valore (sistema di alternative), si ha

sfruttando ancora una volta l’ipotesi di Markov , si ottiene

concludendo così la dimostrazione del famoso algoritmo di Bayes per la stima ricorsiva della belief.

Si riporta dunque di seguito il Filtro Bayesiano , la cui correttezza è stata verificata in precedenza.



Come detto in precedenza e come mostrato dall’algoritmo qui sopra riportato , il Filtro di Bayes consiste di fatto in due step : una fase di **predizione** ed una di **correzione**.