Jakýsi úvod do diskrétní matematiky

Áďa Klepáčovic

15. června 2023

Obsah

1 | Teorie grafů

Velkou část moderní matematiky (zcela jistě topologii, geometrii i algebru) tvoří studium „struktur“. Toto obecně nedefinované slovo obvykle značí množinu s nějakou další informací o vztahu mezi jejími prvky – tím obvykle bývá operace nebo třeba, jako v případě grafů, relace.

Tato kapitola zároveň značí jakýsi milník ve vývoji matematického myšlení, především algebraickým směrem. Můžeme se totiž začít bavit o speciálních zobrazeních, které zachovávají strukturu na množinách, mezi kterými vedou, tzv. *homomorfismech*; pochopit, že je dobré mít více popisů stejné struktury ekvivalentních v tom smyslu, že poskytují stejné množství informací, přestože se o žádné bijekci nedá formálně hovořit; uvidět, že je užitečné dva různé grafy (či obecně dvě různé struktury) považovat za stejné, když se liší pouze zanedbatelně.

Jednou, avšak zdaleka ne *jedinou*, motivací pro teorii grafů je schopnost analyzovat struktury tvořené množinou „uzlů“, mezi některýmiž vedou „spojnice“. Takováto struktura úspěšně modeluje až neuvěřitelné množství přírodních i společenských úkazů. Mezi nimi jmenujmež

- návrhy elektrických obvodů, kde uzly jsou elektrická zařízení a spojnice jsou kabely mezi nimi vedoucí;
- lingvistické modely, kde uzly jsou slova a spojnice vede mezi těmi syntakticky souvisejícími;
- studium molekul, kde uzly jsou atomy a spojnice vazby mezi nimi;
- analýza šíření fámy v sociologii, kde uzly jsou lidské komunity a spojnice vede mezi komunitami s bezprostředním kontaktem.

Snad pro to, že uzly a spojnice grafu se obvykle kreslí jako body a úsečky v prostoru, ujaly se pro ně názvy *vrcholy* a *hrany* (jako v mnohoúhelnících), respektive. Struktura zvaná *graf* tedy sestává ze dvou údajů:

(1) množiny (obvykle konečné) vrcholů značené V a

(2) množiny hran E, která je spjata s množinou vrcholů; toto „sepětí“ se však definuje různě, v závislosti na vkusu a aplikaci. My si ukážeme tři z jistě většího množství různých definic.

Asi prvním přirozeným kandidátem pro „strukturu" je množina s relací. To je také první způsob, jak si budeme definovat pojem *graf*. Je to také ten nejobecnější v tom smyslu, že jeho pouze drobné modifikace nám umožní definovat i obdobné struktury, jež také zmateně slují *grafy*, byť s připojeným atributem.

Abychom úsečky mezi body mohli popsat jako relaci, čili pomocí uspořádaných dvojic bodů, zcela jistě budeme požadovat, aby nevedly úsečky z bodu do něho samého. Úsečku délky 0 lze totiž triviálně ztotožnit s bodem. Dále, úsečka z bodu A do bodu B je jistě tatáž, kterak úsečka z bodu B do bodu A. Tento fakt musí rovněž relace E odrážet.

První vlastností relace se, snad nepřekvapivě, říká *antireflexivita*. Čili, relace E na V je *antireflexivní*, když hrana $(v, v) \notin E$ pro každý vrchol $v \in V$.

Druhou vlastnost už jsme potkali a nazvali ji symetrií. Požadujeme, aby s hranou $(v, w) \in E$ obsahovala E též hranu $(w, v) \in E$ pro každé dva vrcholy $v, w \in V$.

Definice 1.0.1 (Graf poprvé)**.** Dvojici $G := (V, E)$, kde V je konečná množina a E je relace na V, nazveme *grafem*, pokud je E **antireflexivní** a **symetrická**.

Poznámka. Z hlediska ryze formálního neodpovídá tato definice dokonale naší geometrické představě. My jsme totiž pouze požadovali, aby E obsahovala jak úsečku z v do w, tak úsečku z w do v, ale nikoli, aby se jednalo o *tutéž* úsečku. Tedy, jedna úsečka mezi body je v množině E reprezentována dvěma dvojicemi.

Nápravou by bylo definovat navíc ještě relaci R na E, kde (v, v') je v relaci R s (w, w') právě tehdy, když $(w, w') = (v', v)$ nebo $(w, w') = (v, v')$. Jinak řečeno, úsečka z bodu v do bodu v' je v relaci sama se sebou a s úsečkou z bodu v' do bodu v.

Uvážíme-li pak jako hrany grafu G nikoli množinu E, ale její třídy ekvivalence podle R (**Ověřte, že R je ekvivalence!**), dostaneme již přesnou množinovou paralelu bodů a úseček.

My však budeme v zájmu přehlednosti tento nedostatek ignorovat, protože není pro pochopení ani rozvoj teorie relevantní.

Cesta k druhé možné definici grafu není od první daleká. Stačí vlastně relaci E interpretovat trochu jinak. Přece, antireflexivní a symetrická relace je „totéž“ jako množina dvouprvkových podmnožin V.

Vskutku, vezměme nějakou $E' \subseteq \binom{V}{2}$. Relaci E z definice 1.0.1 sestrojíme tak, že z množiny $\{v, w\} \in E'$ vyrobíme dvojice (v, w) a (w, v). Protože prvky v množině nejsou uspořádané a nemohou se opakovat, dává tato konstrukce opravdu antireflexivní a symetrickou relaci. Vizuálně odpovídá rozdělení úsečky mezi v a w na šipku z v do w a šipku z w do v.

Z druhé strany, mějme nějakou antireflexivní a symetrickou relaci E na V. Protože s dvojicí (v, w) obsahuje E i dvojici (w, v), můžeme z těchto dvojic ztvárnit množinu $\{v, w\}$. Relace E je antireflexivní, čili se nemůže stát, že $v = w$, a množina $\{v, w\}$ je pročež vždy dvouprvková. Posbíráme-li všechny množiny $\{v, w\}$ do jedné velké množiny E', bude platit $E' \subseteq \binom{V}{2}$. Vizuálně odpovídá tato konstrukce slepení šipky z v do w a šipky z w do v do jedné úsečky mezi v a w.

Výstraha. Mezi množinami E a E' **nemůže existovat bijekce**, třeba jen pro to, že $\#E = 2\#E'$. Co konstrukce v předchozích dvou odstavcích ukazují, je pouze fakt, že pro naše účely definují E a E' stejnou strukturu na množině V.

Ovšem, uvážili-li bychom místo E pouze třídy ekvivalence jejích prvků podle relace R popsané v poznámce pod definicí 1.0.1, pak bychom skutečně tímto způsobem našli bijekci s množinou E'.

Definice 1.0.2 (Graf podruhé)**.** Dvojici $G \coloneqq (V, E')$, kde V je konečná množina a $E' \subseteq \binom{V}{2}$, nazveme *grafem*.

Třetí pohled na hrany v grafu je více „kategoriální“. Zatímco množiny E a E' jsou závislé ve své definici na množině V, třetí množina hran E'', kterou si zde definujeme, bude libovolná konečná množina.

Tento popis grafové struktury bude odpovídat trochu jiné představě; konkrétně takové, kdy začínáme s množinou bodů V a s množinou šipek E (jež jsou od sebe naprosto odděleny) a oba konce každé šipky zapíchneme do dvou různých bodů z V. Toto „zapíchnutí“ realizují zobrazení $s, t : E'' \to V$ (z angl. **s**ource a **t**arget), která zobrazují šipky z E'' do bodů z V. Přičemž budeme trvat na tom, aby $s(e) \neq t(e)$ pro všechny šipky $e \in E''$ a navíc, aby pro každou $e \in E''$ existovala šipka $e' \in E''$ taková, že $s(e) = t(e')$, $t(e) = s(e')$. Lidsky řečeno, nesmíme zapíchnout konce šipky do téhož vrcholu a, když zapíchneme začátek šipky do bodu v a její konec do bodu w, pak musíme vzít další šipku, jejíž začátek zapíchneme do w a konec do v.

Je snadné si rozmyslet, že z množiny šipek E'' zrekonstruujeme množinu E z definice 1.0.1 tak, že z šipky $e \in E''$ vytvoříme dvojici $(s(e), t(e)) \in E$. Podmínky kladené na zobrazení s a t zaručují, že vzniklá množina E je relace na V, která je antireflexivní a symetrická. V tomto případě dává uvedená konstrukce dokonce bijekci $E \cong E''$, čili jsme opět definovali tutéž strukturu na V.

Tato struktura bude zvlášť užitečná, až budeme probírat *toky v síti*.

Definice 1.0.3 (Graf potřetí)**.** Čtveřici $G := (V, E'', s, t)$, kde V a E'' jsou konečné množiny a s a t jsou zobrazení $E'' \to V$ nazveme *grafem*, pokud

(a) $s(e) \neq t(e)\ \forall e \in E''$ a

(b) $\forall e \in E''\ \exists e' \in E'' : s(e) = t(e') \wedge t(e) = s(e')$.

Poznámka. Opět, aby definice 1.0.3 odpovídala představě bodů a úseček (nebo oboustranných šipek), museli bychom definovat relaci R na E tak, aby e a e' byly v R, právě když $s(e) = s(e')$ a $t(e) = t(e')$ nebo $s(e) = t(e')$ a $t(e) = s(e')$. V takovém případě bychom mohli sestrojit bijekci mezi E'' a E' z definice 1.0.2.

Příklad. Ať $V := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a

(1) $E := \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (1,4), (4,1), (1,5), (5,1), (2,3), (3,2), (4,5), (5,4)\}$;

(2) $E' := \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \{2,3\}, \{4,5\}\}$;

(3) $E'' := \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_1', e_2', e_3', e_4', e_5', e_6'\}$, kde

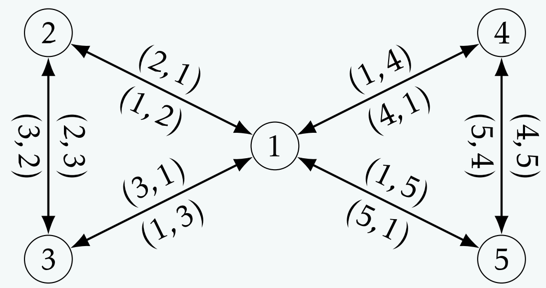
   (a) $s(e_1) = s(e_2) = s(e_3) = s(e_4) = 1$, $s(e_5) = 2$, $s(e_6) = 4$,

(b) $t(e_1) = 2$, $t(e_2) = t(e_5) = 3$, $t(e_3) = 4$, $t(e_4) = t(e_6) = 5$ a

(c) $(s(e_i), t(e_i)) = (t(e_i'), s(e_i'))$ pro všechna $i \leq 6$.

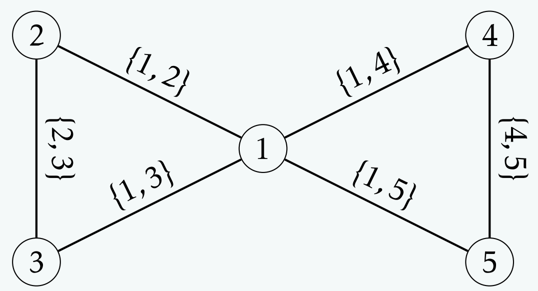
Není těžké nahlédnout, že E, E' i (E'', s, t) definují tutéž strukturu na V. Nakreslíme si grafy $G = (V, E), G' = (V, E')$ a $G'' = (V, E'', s, t)$. Přičemž hrany z E budeme kreslit jako oboustranné šipky, ty z E' jako prosté úsečky a ty z E'' rozdělíme na dvě protichůdné šipky, abychom vyjádřili rozdíly v interpretaci těchto grafových struktur.

Graf $G = (V, E)$ vypadá například takto. Pomněte, že například oboustranná šipka mezi vrcholy 1 a 2 představuje ve skutečnosti **dvě** dvojice – $(1, 2)$ a $(2, 1)$ z relace E.



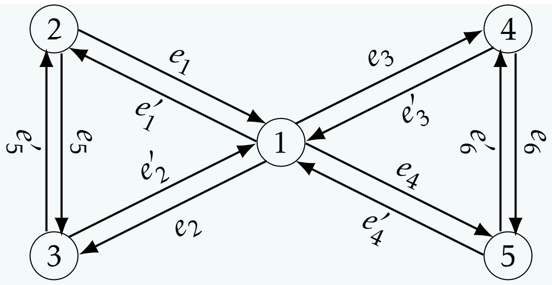
Obrázek 1: Graf jako množina V s relací E.

Zcela stejně vypadá i graf $G' = (V, E')$.



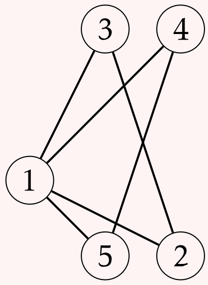
Obrázek 2: Graf jako množiny V a $E' \subseteq \binom{V}{2}$.

Konečně, $G'' = (V, E'', s, t)$ můžeme načrtnout taktéž velmi podobně.



Obrázek 3: Graf jako množina V s trojicí (E'', s, t).

Výstraha. Grafová struktura je obecně zcela nezávislá na jejím nakreslení. Například graf $G = (V, E')$ z předchozího příkladu lze ekvivalentně vyobrazit třeba následovně.



Obrázek 4: Graf $G = (V, E')$ nakreslený jinak.

V následujícím textu spojíme všechny tři interpretace dohromady a pro $v, w \in V$ budeme hranu mezi v a w značit zjednodušeně jako vw. Pokud nehrozí nedorozumění, budeme pod tímto zápisem rozumět hranu, jejíž začátek je v a konec w, čili $s(vw) = v$ a $t(vw) = w$. Avšak, kdykoli se nám to bude hodit, ztotožníme ji bez okolků s hranou wv s obrácenými konci.

Tento neformální přístup k popisu hran se může zdát jako nebezpečný, ale jak uvidíme, ve skutečnosti velmi zjednodušuje zápis a újma na rigorozitě je obecně minimální. Kompletněji řečeno, hranou mezi dvěma vrcholy $v, w \in V$ myslíme buď dvojici $(v, w) \in E$ nebo dvojici $(w, v) \in E$ nebo množinu $\{v, w\} \in E'$ nebo prvek $e \in E''$ takový, že $s(e) = v$ a $t(e) = w$, nebo prvek $e' \in E''$ takový, že $s(e') = w$ a $t(e') = v$, a je nám to u ...

Obecně, v teorii grafů se velmi často pracuje s konečnými posloupnostmi (či n-ticemi, chcete-li) vrcholů a hran. Zavedeme proto zjednodušené značení $x_1 x_2 \cdots x_n$ pro uspořádanou n-tici $(x_1, \ldots, x_n)$. Kdyby hrozil konflikt se zápisem součinu prvků $x_1, \ldots, x_n$, samozřejmě tento úzus dočasně opustíme.

Cvičení 1.0.1. Nakreslete graf $G = (V, E)$, kde

- $V = \{1, \ldots, 5\}, E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\}\}$.
- $V = \{1, \ldots, 5\}$, $E = \binom{V}{2}$.
- $V = \{1, \ldots, 8\}$, $E = \{e_1, \ldots, e_8\}$ a
  - $t(e_i) = s(e_{i+1}) = i + 1$ pro všechna $i \leq 7$,
  - $t(e_8) = s(e_1) = 1$.

Cvičení 1.0.2. Popište všechny grafy $G = (V, E)$, kde E je relace na V, která je antireflexivní, symetrická (to je součástí definice grafu) a navíc **transitivní**.

Cvičení 1.0.3. Ať V je konečná množina a E je relace na V, která je antireflexivní a symetrická. Definujme navíc na E další relaci $\sim$ předpisem

$$(v, v') \sim (w, w') \Leftrightarrow (v, v') = (w, w') \vee (v, v') = (w', w).$$

Dokažte, že pak existuje bijekce mezi $[E]_\sim$ a množinou

$$E' := \{\{v, v'\} \mid (v, v') \in E\},$$

čili mezi množinou tříd ekvivalence E podle $\sim$ a množinou, kterou dostanu tak, že z uspořádaných dvojic v E udělám neuspořádané dvojice, tj. dvouprvkové podmnožiny. Pro intuici vizte poznámku pod definicí 1.0.1.

Cvičení 1.0.4. Spočtěte, kolik existuje grafů na n vrcholech.

1.1 Kreslení grafů

Čtenáře může překvapit, že *kreslení* grafů je matematicky formální postup. Na druhou stranu to však divné není, neboť mnoho aplikací grafů plyne právě z přirozeného vnímání grafu jako množiny bodů v rovině spojených úsečkami.

Naší zábavou v této závěrečné sekci bude prezentovat onen postup a po té se rozhovoříme o tzv. *rovinných* grafech, grafech, jež lze nakreslit, aniž se křivky představující úsečky v rovině kříží.

Více prakticky orientované čtenáře, kterým, stejně jako i ostatním vedlejším vrstvám akademické komunity, je tento text samozřejmě též určen, by snad zajímalo, k čemu je kreslení grafů dobré.

Jedním konkrétním příkladem ze stavby počítačů je návrh logických obvodů v procesorech. Je v zájmu výrobců procesorů snížit počet křížení logických obvodů na naprosté minimum, neboť každé křížení znamená nutnost zvýšit procesor o další vrstvu zlata a silikonu, což zhoršuje rychlost přenosu a zvedá cenu výroby.

Více matematické aplikace pak zahrnují mimo mnohé další například (stále nevyřešený!) Brick Factory Problem nebo též různé úlohy v teorii uzlů.

První netriviální výzvou je dojít k rozumné definici kreslení grafu. Potřebujeme nějakým způsobem přenést množinu vrcholů V grafu G na body v rovině a hrany na křivky spojující tyto body. Záměrně jsme použili slovo „křivka“ místo „úsečka“, neboť není těžké si rozmyslet (a my to později též učiníme), že mnoho grafů lze nakreslit bez křížení hran, pokud tyto kreslíme jako křivky či oblouky, ale nikoli kreslíme-li je jako úsečky.