

Ústní zkouška

z Úvodu do matematické analýzy, části první

Verze: r3kt

Přednášející: His Divine Wisdom Sir Adam Clypatch

19. ledna 2024

**NENÍ-LI ŘEČENO JINAK, VŠECHNY POJMY A DŮKAZY FORMULUJTE
PEČLIVĚ S DŮRAZEM NA FORMÁLNÍ SPRÁVNOST.**

Část	Hodnocení
Základní definice	0 / 0
Lehké úlohy a důkazy	/ 6
Těžké úlohy a důkazy	/ 12

Základní definice (0 bodů)

Neznalost základních definic znamená bezpodmínečné nesložení zkoušky.

- (1) Okruh a těleso.
- (2) Racionální číslo.
- (3) Konvergentní posloupnost.
- (4) Rozšířená reálná osa.
- (5) Interval a typy intervalů.

Lehké úlohy a důkazy (6 bodů)

Pojmy užívané v úlohách nemusíte definovat. Používáte-li k řešení úlohy nebo k důkazu předchozí tvrzení, zformulujte je.

- (1) Dokažte, že každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.
- (2) Dokažte, že \mathbb{Q} jsou hustá v \mathbb{R} , tedy že pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $r \in \mathbb{Q}$ splňující $|x - r| < \varepsilon$.

Hint: Využijte definici \mathbb{R} jako tříd ekvivalence konvergentních racionálních posloupností.

- (3) Spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

Ověřte předpoklady všech tvrzení, která k výpočtu používáte.

Nemusíte dokonale zformulovat svá řešení. Obecná idea rozvinutá důležitými detaily postačuje.

- (1) Ať $c > 0$ a $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ je posloupnost dána rekurentním vztahem

$$a_0 := \sqrt{c},$$

$$a_{n+1} := \sqrt{a_n + c}.$$

Spočtěte $\lim a$. Návod:

- (a) Dokažte, že posloupnost a je dobře definovaná. To znamená, že $a_n \in \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
- (b) Dokažte, že a je rostoucí.
- (c) Dokažte, že a je shora omezená.
- (d) Z bodů (b) a (c) plyne (užitím věty o limitě monotónní posloupnosti), že a má limitu. Označme ji A . Spočtěte tuto limitu pomocí vhodné kvadratické rovnice využívše rovnost

$$a_{n+1}^2 = a_n + c, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = A \quad \text{a} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + c) = A + c.$$

- (2) Dokažte *Borelovu větu*: Ať I je **uzavřený** interval a $\{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je množina **otevřených** intervalů splňující $I \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$. Pak existuje **konečná** množina $F \subseteq \mathbb{N}$ taková, že $I \subseteq \bigcup_{i \in F} S_i$.

Návod (vřele doporučujeme si při důkaze kreslit):

- (a) Označme $I = [a, b]$. Ať M je množina takových prvků $x \in [a, b]$, pro něž existuje konečná $F_x \subseteq \mathbb{N}$ taková, že $[a, x] \subseteq \bigcup_{i \in F_x} S_i$. Uvědomte si, že pro důkaz Borelové věty stačí ukázat, že $b \in M$.
- (b) Dokažte, že M má supremum, které leží v \mathbb{R} . K tomu je třeba ukázat, že není prázdná a že je shora omezená. Existence suprema pak plyne z úplnosti \mathbb{R} . Položme $y := \sup M$. Nyní je třeba ukázat, že $y \in M$ a $y = b$.
- (c) Z předpokladu $y \in I \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i$, a tedy existuje **otevřený** interval S_j takový, že $y \in S_j$. Ovšem, protože je tento interval otevřený, y nemůže být jeho minimem. Dokažte, že z tohoto plyne existence prvku $z \in M \cap S_j$ (nezapomeňte, že y je supremem M).
- (d) Pro tento prvek z definice M existuje konečná množina F_z taková, že $[a, z] \subseteq \bigcup_{i \in F_z} S_i$. Dokažte, že

$$x \in \left(\bigcup_{i \in F_z} S_i \right) \cup S_j$$

pro každé $x \in [a, y]$. Argumentujte, že tento fakt již znamená, že $y \in M$.

- (e) Dokážeme, že $y = b$. Předpokládejme pro spor, že $y < b$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $y + \varepsilon < b$, což znamená, že umíme najít (proč?) otevřený interval S_k takový, že $[y, y + \varepsilon] \subseteq S_k$. Užitím faktu, že $y \in M$, najdete konečnou množinu $\mathcal{S} \subseteq \{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ otevřených intervalů takovou, že $[a, y + \varepsilon] \subseteq \mathcal{S}$ (nezapomeňte, že takové množiny umíte triviálně najít zvlášť pro $[a, y]$ a $[y, y + \varepsilon]$).
- (f) Argumentujte, že existence \mathcal{S} z bodu (e) je sporem s definicí y jako suprema M . Tedy, $y = b$ a důkaz je hotov.