Jen pár náhodných úloh ze semináře. Některé s řešením.

Něco k relacím

Připomínám, že relaci R na množině A nazveme *transitivní*, když $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$ pro všechna $x, y, z \in A$.

Dál připomínám, že pokud jsou R, S relace na A, pak jejich *složení* $R \circ S$ je relace definovaná jako

$$R \circ S \coloneqq \{(x, z) \mid \exists y \in A : xRy \wedge ySz\},$$

tedy relace, která je vlastně „slepením“ R a S přes nějaký prostřední prvek y.

Ať je R teďka **libovolná** relace na A (tedy ne nutně transitivní). Relaci, kterou dostanu, když složím R samu se sebou k-krát, čili $\underbrace{R \circ R \circ R \circ \cdots \circ R}_{k\text{-krát}}$, označím zkráceně jako R^k. Definuju si relaci na A předpisem

$$T \coloneqq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i = (R) \cup (R \circ R) \cup (R \circ R \circ R) \cup \ldots$$

Lidsky řečeno, T je relace, která obsahuje R složenou samu se sebou k-krát pro každé přirozené číslo $k \in \mathbb{N}$.

1. Dokažte, že T je transitivní.
2. Dokažte, že každá transitivní relace S na A obsahuje (myšleno „je nadmnožinou“) R právě tehdy, když obsahuje T.
3. Dokažte, že pokud $\#X = n$, pak

   $$T = \bigcup_{i=1}^{n-1} R^i,$$

   tedy že všechny složené relace R^k pro $k \geq n$ už jsou obsaženy v nějaké složené relaci R^l pro $l \leq n - 1$.

Částečné řešení:

1. Tady vidím dva možné důkazy. Jeden přímo a jeden užitím cvičení, které jsme dokázali na kroužku, že T je transitivní právě tehdy, když $T \circ T \subseteq T$. Napíšu tu ten přímý a napovím, jak na ten druhý.

   Z definice transitivity předpokládáme, že máme prvky $x, y, z \in A$, které splňují $xTy \wedge yTz$. Chceme odtud odvodit, že xTz. No, T je přece sjednocením všech složení R se sebou samou, takže tu dvojici $(x, y) \in T$ musím najít v nějakém složení R^k, kde $k \in \mathbb{N}$ a taky dvojici (y, z) musím najít v nějakém složení R^l, kde $k, l \in \mathbb{N}$. Pak ale najdu dvojici (x, z) ve složení $R^k \circ R^l = R^{k+l}$ (dosaďte si do definice složení relací za R to R^k a za S to R^l, uvidíte to hned), které je z definice podmnožinou T. Čili $(x, z) \in T$, jak jsem chtěl.

V tom nepřímém důkazu chce člověk ukázat, že $T \circ T \subseteq T$, pak bude vědět, že T je transitivní. Když si to rozepíšeme, dostaneme

$$T \circ T = \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \right) \circ \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \right).$$

Na to, aby mohl jeden tvrdit, že $T \circ T \subseteq T$, stačí ověřit, že

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \right) \circ \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \right) = \bigcup_{i=1}^{\infty} (R^i \circ R^i),$$

protože $R^i \circ R^i = R^{2i}$ leží pro každé $i \in \mathbb{N}$ uvnitř T, takže tam leží i celé to sjednocení nahoře. Ověřit tu rovnost si můžete zkusit sami.

2. Všimněte si, že to tvrzení je (logická) ekvivalence. Chci dokázat konkrétně, že
$$R \subseteq S \Leftrightarrow T \subseteq S$$
pro danou transitivní relaci S. Když dokazuju ekvivalenci, obvykle dokazuju dvě implikace, tu zleva doprava a tu zprava doleva. Ta zprava doleva je v tomhle případě samozřejmá. Relace R je podmnožinou T, takže když $T \subseteq S$, pak $R \subseteq T \subseteq S$, čili celkem $R \subseteq S$. Ta zleva doprava je těžší, takže je spravedlivě na vás.

Něco k indukci

Na kroužku jsem ukazoval důkaz indukcí, že $F_n \leq ((1 + \sqrt{5})/2)^{n-1}$ pro všechna $n \geq 0$, kde F_n je n-tý člen Fibonacciho posloupnosti, která je definovaná:

$F_0 = 0, F_1 = 1$ a všechny další členy vzorcem $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$.

Dělal jsem to trochu narychlo, tak to tu radši zopáknu.

První indukční krok: Když $n = 0$, pak máme

$$F_0 = 0 \leq \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{0-1} = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{-1} = \frac{2}{1 + \sqrt{5}},$$

což je samozřejmě pravda, už jen pro to, že to číslo napravo je kladné. Takže všechno v okeju.

Druhý indukční krok: Předpokládám, že platí

$$F_k \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$$

pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ a všechna menší přirozená čísla. Odtud chci odvodit, že

$$F_{k+1} \leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k}.$$

Ještě si označím $\varphi := (1+\sqrt{5})/2$, abych se neupsal. Uvidíte, že na číselné hodnotě φ záleží vlastně až úplně na konci důkazu. Vím, že $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$ a předpokládám, že

$$F_k \leq \varphi^{k-1} \quad \text{a} \quad F_{k-1} \leq \varphi^{k-2}.$$

Když ta čísla sečtu dohromady, dostanu, že

$$F_{k+1} \leq F_k + F_{k-1} \leq \varphi^{k-1} + \varphi^{k-2}.$$

Z toho výrazu napravo můžu vytknout φ^{k-2}, protože

$$\varphi^{k-1} = \varphi^{k-2} \cdot \varphi.$$

Pak mi zůstane

$$\varphi^{k-1} + \varphi^{k-2} = \varphi^{k-2}(\varphi + 1).$$

Dokazuju, že $F_{k+1} \leq \varphi^k$ a vím (z předpokladu), že $F_k \leq \varphi^{k-2}(\varphi+1)$. Jinak řečeno, potřebuju ověřit nerovnost

$$\varphi^{k-2}(\varphi+1) \leq \varphi^k.$$

Ještě předtím, než dosadím zpátky za φ to číslo, uvědomím si, že můžu zkrátit tu nerovnici φ^{k-2}, jelikož $\varphi^k = \varphi^{k-2}\varphi^2$. Teď už to prostě dopočítám.

$$\begin{aligned}
\varphi^{k-2}(\varphi+1) &\leq \varphi^k \\
\varphi^{k-2}(\varphi+1) &\leq \varphi^{k-2}\varphi^2 \\
\varphi + 1 &\leq \varphi^2 \\
\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 &\leq \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \\
\frac{3+\sqrt{5}}{2} &\leq \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} \\
\frac{3+\sqrt{5}}{2} &\leq \frac{6+2\sqrt{5}}{4} \\
\frac{3+\sqrt{5}}{2} &\leq \frac{3+\sqrt{5}}{2},
\end{aligned}$$

čímž mám důkaz hotov.

Všimněte si, jen pro zajímavost, že jsem na konci dokázal, že $\varphi + 1 = \varphi^2$, čili číslo φ je řešením rovnice $x^2 - x - 1 = 0$.