Jakýsi úvod do diskrétní matematiky

Áďa Klepáčovic

8. července 2023

Obsah

1 | Teorie grafů

Velkou část moderní matematiky (zcela jistě topologii, geometrii i algebru) tvoří studium „struktur“. Toto obecně nedefinované slovo obvykle značí množinu s nějakou další informací o vztahu mezi jejími prvky – tím obvykle bývá operace nebo třeba, jako v případě grafů, relace.

Tato kapitola zároveň značí jakýsi milník ve vývoji matematického myšlení, především algebraickým směrem. Můžeme se totiž začít bavit o speciálních zobrazeních, které zachovávají strukturu na množinách, mezi kterými vedou, tzv. *homomorfismech*; pochopit, že je dobré mít více popisů stejné struktury ekvivalentních v tom smyslu, že poskytují stejné množství informací, přestože se o žádné bijekci nedá formálně hovořit; uvidět, že je užitečné dva různé grafy (či obecně dvě různé struktury) považovat za stejné, když se liší pouze zanedbatelně.

Jednou, avšak zdaleka ne *jedinou*, motivací pro teorii grafů je schopnost analyzovat struktury tvořené množinou „uzlů“, mezi některýmiž vedou „spojnice“. Takováto struktura úspěšně modeluje až neuvěřitelné množství přírodních i společenských úkazů. Mezi nimi jmenujmež

- návrhy elektrických obvodů, kde uzly jsou elektrická zařízení a spojnice jsou kabely mezi nimi vedoucí;
- lingvistické modely, kde uzly jsou slova a spojnice vede mezi těmi syntakticky souvisejícími;
- studium molekul, kde uzly jsou atomy a spojnice vazby mezi nimi;
- analýza šíření fámy v sociologii, kde uzly jsou lidské komunity a spojnice vede mezi komunitami s bezprostředním kontaktem.

Snad pro to, že uzly a spojnice grafu se obvykle kreslí jako body a úsečky v prostoru, ujaly se pro ně názvy *vrcholy* a *hrany* (jako v mnohoúhelnících), respektive. Struktura zvaná *graf* tedy sestává ze dvou údajů:

(1) množiny (obvykle konečné) vrcholů značené V a

(2) množiny hran E, která je spjata s množinou vrcholů; toto „sepětí“ se však definuje různě, v závislosti na vkusu a aplikaci. My si ukážeme tři z jistě většího množství různých definic.

Asi prvním přirozeným kandidátem pro „strukturu“ je množina s relací. To je také první způsob, jak si budeme definovat pojem *graf*. Je to také ten nejobecnější v tom smyslu, že jeho pouze drobné modifikace nám umožní definovat i obdobné struktury, jež také zmateně slují *grafy*, byť s připojeným atributem.

Abychom úsečky mezi body mohli popsat jako relaci, čili pomocí uspořádaných dvojic bodů, zcela jistě budeme požadovat, aby nevedly úsečky z bodu do něho samého. Úsečku délky 0 lze totiž triviálně ztotožnit s bodem. Dále, úsečka z bodu A do bodu B je jistě tatáž, kterak úsečka z bodu B do bodu A. Tento fakt musí rovněž relace E odrážet.

První vlastností relace se, snad nepřekvapivě, říká *antireflexivita*. Čili, relace E na V je *antireflexivní*, když hrana $(v, v) \notin E$ pro každý vrchol $v \in V$.

Druhou vlastnost už jsme potkali a nazvali ji symetrií. Požadujeme, aby s hranou $(v, w) \in E$ obsahovala E též hranu $(w, v) \in E$ pro každé dva vrcholy $v, w \in V$.

Definice 1.0.1 (Graf poprvé)**.** Dvojici $G := (V, E)$, kde V je konečná množina a E je relace na V, nazveme *grafem*, pokud je E **antireflexivní** a **symetrická**.

Poznámka. Z hlediska ryze formálního neodpovídá tato definice dokonale naší geometrické představě. My jsme totiž pouze požadovali, aby E obsahovala jak úsečku z v do w, tak úsečku z w do v, ale nikoli, aby se jednalo o *tutéž* úsečku. Tedy, jedna úsečka mezi body je v množině E reprezentována dvěma dvojicemi.

Nápravou by bylo definovat navíc ještě relaci R na E, kde (v, v') je v relaci R s (w, w') právě tehdy, když $(w, w') = (v', v)$ nebo $(w, w') = (v, v')$. Jinak řečeno, úsečka z bodu v do bodu v' je v relaci sama se sebou a s úsečkou z bodu v' do bodu v.

Uvážíme-li pak jako hrany grafu G nikoli množinu E, ale její třídy ekvivalence podle R (**Ověřte, že R je ekvivalence!**), dostaneme již přesnou množinovou paralelu bodů a úseček.

My však budeme v zájmu přehlednosti tento nedostatek ignorovat, protože není pro pochopení ani rozvoj teorie relevantní.

Cesta k druhé možné definici grafu není od první daleká. Stačí vlastně relaci E interpretovat trochu jinak. Přece, antireflexivní a symetrická relace je „totéž“ jako množina dvouprvkových podmnožin V.

Vskutku, vezměme nějakou $E' \subseteq \binom{V}{2}$. Relaci E z definice 1.0.1 sestrojíme tak, že z množiny $\{v,w\} \in E'$ vyrobíme dvojice (v,w) a (w,v). Protože prvky v množině nejsou uspořádané a nemohou se opakovat, dává tato konstrukce opravdu antireflexivní a symetrickou relaci. Vizuálně odpovídá rozdělení úsečky mezi v a w na šipku z v do w a šipku z w do v.

Z druhé strany, mějme nějakou antireflexivní a symetrickou relaci E na V. Protože s dvojicí (v,w) obsahuje E i dvojici (w,v), můžeme z těchto dvojic ztvárnit množinu $\{v,w\}$. Relace E je antireflexivní, čili se nemůže stát, že $v = w$, a množina $\{v,w\}$ je pročež vždy dvouprvková. Posbíráme-li všechny množiny $\{v,w\}$ do jedné velké množiny E', bude platit $E' \subseteq \binom{V}{2}$. Vizuálně odpovídá tato konstrukce slepení šipky z v do w a šipky z w do v do jedné úsečky mezi v a w.

Výstraha. Mezi množinami E a E' **nemůže existovat bijekce**, třeba jen pro to, že $\#E = 2\#E'$. Co konstrukce v předchozích dvou odstavcích ukazují, je pouze fakt, že pro naše účely definují E a E' stejnou strukturu na množině V.

Ovšem, uvážili-li bychom místo E pouze třídy ekvivalence jejích prvků podle relace R popsané v poznámce pod definicí 1.0.1, pak bychom skutečně tímto způsobem našli bijekci s množinou E'.

Definice 1.0.2 (Graf podruhé)**.** Dvojici $G := (V, E')$, kde V je konečná množina a $E' \subseteq \binom{V}{2}$, nazveme *grafem*.

Třetí pohled na hrany v grafu je více „kategoriální“. Zatímco množiny E a E' jsou závislé ve své definici na množině V, třetí množina hran E'', kterou si zde definujeme, bude libovolná konečná množina.

Tento popis grafové struktury bude odpovídat trochu jiné představě; konkrétně takové, kdy začínáme s množinou bodů V a s množinou šipek E (jež jsou od sebe naprosto odděleny) a oba konce každé šipky zapíchneme do dvou různých bodů z V. Toto „zapíchnutí“ realizují zobrazení $s, t : E'' \to V$ (z angl. **s**ource a **t**arget), která zobrazují šipky z E'' do bodů z V. Přičemž budeme trvat na tom, aby $s(e) \neq t(e)$ pro všechny šipky $e \in E''$ a navíc, aby pro každou $e \in E''$ existovala šipka $e' \in E''$ taková, že $s(e) = t(e')$, $t(e) = s(e')$. Lidsky řečeno, nesmíme zapíchnout konce šipky do téhož vrcholu a, když zapíchneme začátek šipky do bodu v a její konec do bodu w, pak musíme vzít další šipku, jejíž začátek zapíchneme do w a konec do v.

Je snadné si rozmyslet, že z množiny šipek E'' zrekonstruujeme množinu E z definice 1.0.1 tak, že z šipky $e \in E''$ vytvoříme dvojici $(s(e), t(e)) \in E$. Podmínky kladené na zobrazení s a t zaručují, že vzniklá množina E je relace na V, která je antireflexivní a symetrická. V tomto případě dává uvedená konstrukce dokonce bijekci $E \cong E''$, čili jsme opět definovali tutéž strukturu na V.

Tato struktura bude zvlášť užitečná, až budeme probírat *toky v síti*.

Definice 1.0.3 (Graf potřetí)**.** Čtveřici $G := (V, E'', s, t)$, kde V a E'' jsou konečné množiny a s a t jsou zobrazení $E'' \to V$ nazveme *grafem*, pokud

(a) $s(e) \neq t(e)\ \forall e \in E''$ a

(b) $\forall e \in E''\ \exists e' \in E'' : s(e) = t(e') \wedge t(e) = s(e')$.

Poznámka. Opět, aby definice 1.0.3 odpovídala představě bodů a úseček (nebo oboustranných šipek), museli bychom definovat relaci R na E tak, aby e a e' byly v R, právě když $s(e) = s(e')$ a $t(e) = t(e')$ nebo $s(e) = t(e')$ a $t(e) = s(e')$. V takovém případě bychom mohli sestrojit bijekci mezi E'' a E' z definice 1.0.2.

Příklad. Ať $V := \{1, 2, 3, 4, 5\}$ a

(1) $E := \{(1,2),(2,1),(1,3),(3,1),(1,4),(4,1),(1,5),(5,1),(2,3),(3,2),(4,5),(5,4)\}$;

(2) $E' := \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{1,5\},\{2,3\},\{4,5\}\}$;

(3) $E'' := \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5, e'_6\}$, kde

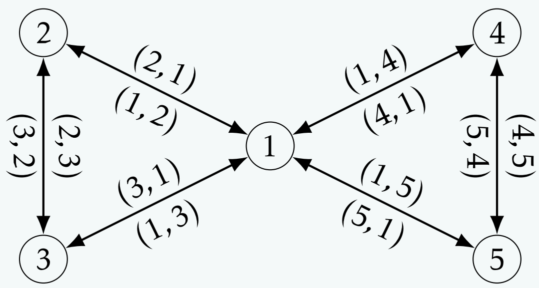
   (a) $s(e_1) = s(e_2) = s(e_3) = s(e_4) = 1$, $s(e_5) = 2$, $s(e_6) = 4$,

(b) $t(e_1) = 2$, $t(e_2) = t(e_5) = 3$, $t(e_3) = 4$, $t(e_4) = t(e_6) = 5$ a

(c) $(s(e_i), t(e_i)) = (t(e_i'), s(e_i'))$ pro všechna $i \leq 6$.

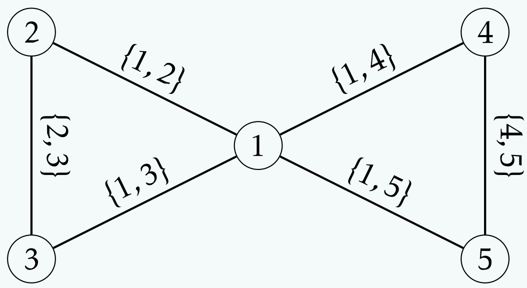
Není těžké nahlédnout, že E, E' i (E'', s, t) definují tutéž strukturu na V. Nakreslíme si grafy $G = (V, E), G' = (V, E')$ a $G'' = (V, E'', s, t)$. Přičemž hrany z E budeme kreslit jako oboustranné šipky, ty z E' jako prosté úsečky a ty z E'' rozdělíme na dvě protichůdné šipky, abychom vyjádřili rozdíly v interpretaci těchto grafových struktur.

Graf $G = (V, E)$ vypadá například takto. Pomněte, že například oboustranná šipka mezi vrcholy 1 a 2 představuje ve skutečnosti **dvě** dvojice – $(1, 2)$ a $(2, 1)$ z relace E.



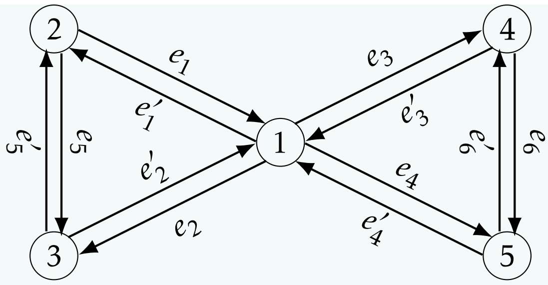
Obrázek 1: Graf jako množina V s relací E.

Zcela stejně vypadá i graf $G' = (V, E')$.



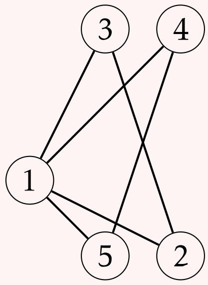
Obrázek 2: Graf jako množiny V a $E' \subseteq \binom{V}{2}$.

Konečně, $G'' = (V, E'', s, t)$ můžeme načrtnout taktéž velmi podobně.



Obrázek 3: Graf jako množina V s trojicí (E'', s, t).

Výstraha. Grafová struktura je obecně zcela nezávislá na jejím nakreslení. Například graf $G = (V, E')$ z předchozího příkladu lze ekvivalentně vyobrazit třeba následovně.



Obrázek 4: Graf $G = (V, E')$ nakreslený jinak.

V následujícím textu spojíme všechny tři interpretace dohromady a pro $v, w \in V$ budeme hranu mezi v a w značit zjednodušeně jako vw. Pokud nehrozí nedorozumění, budeme pod tímto zápisem rozumět hranu, jejíž začátek je v a konec w, čili $s(vw) = v$ a $t(vw) = w$. Avšak, kdykoli se nám to bude hodit, ztotožníme ji bez okolků s hranou wv s obrácenými konci.

Tento neformální přístup k popisu hran se může zdát jako nebezpečný, ale jak uvidíme, ve skutečnosti velmi zjednodušuje zápis a újma na rigorozitě je obecně minimální. Kompletněji řečeno, hranou mezi dvěma vrcholy $v, w \in V$ myslíme buď dvojici $(v, w) \in E$ nebo dvojici $(w, v) \in E$ nebo množinu $\{v, w\} \in E'$ nebo prvek $e \in E''$ takový, že $s(e) = v$ a $t(e) = w$, nebo prvek $e' \in E''$ takový, že $s(e') = w$ a $t(e') = v$, a je nám to u ...

Obecně, v teorii grafů se velmi často pracuje s konečnými posloupnostmi (či n-ticemi, chcete-li) vrcholů a hran. Zavedeme proto zjednodušené značení $x_1x_2\cdots x_n$ pro uspořádanou n-tici $(x_1,\dots,x_n)$. Kdyby hrozil konflikt se zápisem součinu prvků $x_1,\dots,x_n$, samozřejmě tento úzus dočasně opustíme.

Cvičení 1.0.1. Nakreslete graf $G = (V, E)$, kde

- $V = \{1,\dots,5\}, E = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\},\{2,3\},\{3,4\},\{4,5\}\}$.
- $V = \{1,\dots,5\}$, $E = \binom{V}{2}$.
- $V = \{1,\dots,8\}$, $E = \{e_1,\dots,e_8\}$ a
  - $t(e_i) = s(e_{i+1}) = i+1$ pro všechna $i \leq 7$,
  - $t(e_8) = s(e_1) = 1$.

Cvičení 1.0.2. Popište všechny grafy $G = (V, E)$, kde E je relace na V, která je antireflexivní, symetrická (to je součástí definice grafu) a navíc **transitivní**.

Cvičení 1.0.3. Ať V je konečná množina a E je relace na V, která je antireflexivní a symetrická. Definujme navíc na E další relaci $\sim$ předpisem

$$(v,v') \sim (w,w') \Leftrightarrow (v,v') = (w,w') \vee (v,v') = (w',w).$$

Dokažte, že pak existuje bijekce mezi $[E]_\sim$ a množinou

$$E' := \{\{v,v'\} \mid (v,v') \in E\},$$

čili mezi množinou tříd ekvivalence E podle $\sim$ a množinou, kterou dostanu tak, že z uspořádaných dvojic v E udělám neuspořádané dvojice, tj. dvouprvkové podmnožiny. Pro intuici vizte poznámku pod definicí 1.0.1.

Cvičení 1.0.4. Spočtěte, kolik existuje grafů na n vrcholech.

1.1 Kreslení grafů

Čtenáře může překvapit, že *kreslení* grafů je matematicky formální postup. Na druhou stranu to však divné není, neboť mnoho aplikací grafů plyne právě z přirozeného vnímání grafu jako množiny bodů v rovině spojených úsečkami.

Naší zábavou v této závěrečné sekci bude prezentovat onen postup a po té se rozhovoříme o tzv. *rovinných* grafech, grafech, jež lze nakreslit, aniž se křivky představující úsečky v rovině kříží.

Více prakticky orientované čtenáře, kterým, stejně jako i ostatním vedlejším vrstvám akademické komunity, je tento text samozřejmě též určen, by snad zajímalo, k čemu je kreslení grafů dobré.

Jedním konkrétním příkladem ze stavby počítačů je návrh logických obvodů v procesorech. Je v zájmu výrobců procesorů snížit počet křížení logických obvodů na naprosté minimum, neboť každé křížení znamená nutnost zvýšit procesor o další vrstvu zlata a silikonu, což zhoršuje rychlost přenosu a zvedá cenu výroby.

Více matematické aplikace pak zahrnují mimo mnohé další například (stále nevyřešený!) Brick Factory Problem nebo též různé úlohy v teorii uzlů.

První netriviální výzvou je dojít k rozumné definici kreslení grafu. Potřebujeme nějakým způsobem přenést množinu vrcholů V grafu G na body v rovině a hrany na křivky spojující tyto body. Záměrně jsme použili slovo „křivka“ místo „úsečka“, neboť není těžké si rozmyslet (a my to později též učiníme), že mnoho grafů lze nakreslit bez křížení hran, pokud tyto kreslíme jako křivky či oblouky, ale nikoli kreslíme-li je jako úsečky.

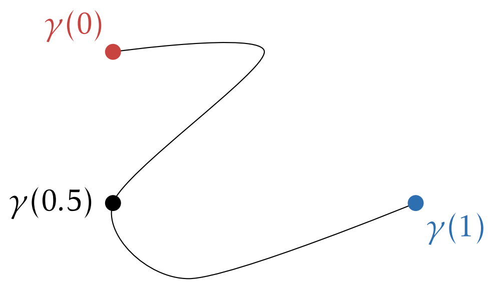
Doufáme, že čtenáři jsou si touto dobou již dostatečně navykli na způsob formalizace vágních pojmů typu *přenést*, *vnímat jako*, *interpretovat* apod. Všechny obyčejně směřují přímo k zobrazením. Tak je tomu i nyní. Zkrátka množinu vrcholů V grafu $G = (V, E)$ **zobrazíme** do roviny a množinu hran E zobrazíme do jakési množiny **křivek** v rovině, kterýžto pojem si právě definujeme.

Korektní definice křivky patří spíše do oblasti matematické analýzy, ale není nijak složitá a, soudíme, i velmi intuitivní. Je přímým překladem aktu *nakreslení* libovolné souvislé neprotínající se čáry na papír do jazyka matematiky. Ten vyžaduje nějaký čas, řekněme pro jednoduchost 1 vteřinu, ale konkrétní hodnota je irelevantní. V čase 0, tedy než začneme kreslit, je tužka položená na papíře – nachází se v jednom konkrétním bodě roviny. Podobně, v čase 1, když skončíme s kreslením, je tužka opět položená na papíře v nějakém jiném bodě. Tak je tomu ovšem úplně v libovolném momentu kreslení, po uplynutí libovolně dlouhé doby kratší než jedna vteřina. Totiž, tužka je při kreslení v každém momentu času na jednom konkrétním místě na papíře, neboli v jednom bodě roviny.

O něco více formálně řečeno, křivka je zobrazení z intervalu $[0,1]$, představujícího čas, do roviny $\mathbb{R}^2$, představující papír, takové, že vzniklý tvar je souvislý a neprotíná se. Naprosto korektní definice následuje.

Definice 1.1.1 (Křivka v rovině)**.** *Křivkou v rovině* nazveme libovolné zobrazení $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, které je **spojité** (čára je souvislá) a **prosté** (čára se neprotíná). Množinu všech křivek v rovině označíme písmenem Γ, tj.

$$\Gamma := \{\gamma \mid \gamma \text{ je křivka v rovině.}\}$$



Obrázek 5: Křivka γ v rovině.

Výstraha. V definici křivky **není** nikde psáno, že by zobrazení γ mělo být v jakémkoli smyslu lineární, tedy, že $\gamma(0.5)$ je bod přesně uprostřed nakreslené čáry. Klidně může být definované třeba tak, že v prvních 9 desetinách vteřiny se skoro nepohnu a ve zbylém čase čáru dokreslím.

Definovat linearitu v tomto smyslu navíc není vůbec triviální úloha vyžadující mimo jiné schopnost počítat délky křivek v rovině (integrální počet) a pojem reparametrizace. Operaci normalizace křivek, která je činí jakoby „lineární“ se v diferenciální geometrii nazývá *pa-*

rametrizace obloukem.

Už se blížíme finální definici *nakreslení grafu*, je třeba si jen rozmyslet pár maličkostí. Primárně, samotným nakreslením bude dvojice zobrazení (p,c) (z angl. **p**oints a **c**urves), kde p vede z V do $\mathbb{R}^2$ a c z E do Γ, tedy p přiřazuje vrcholům body roviny a c přiřazuje hranám křivky v rovině.

Požadujeme navíc, aby

- různým vrcholům odpovídaly různé body v rovině (to je hádám celkem logiš);
- křivka $\gamma(uv)$ pro $uv \in E$ začíná v u a končí ve v;
- křivky odpovídající hranám pouze začínají nebo končí ve vrcholech, neprocházejí jimi (v opačném případě by bylo nemožné rozlišit třeba hranu uw od dvojice hran uv a vw, pokud by první procházela vrcholem v).

Formalizaci těchto podmínek přináší následující definice.

Definice 1.1.2 (Nakreslení grafu)**.** Ať $G = (V,E)$ je graf. Jeho *nakreslením* myslíme dvojici zobrazení (p,c), kde $p : V \to \mathbb{R}^2$ a $c : E \to \Gamma$ takových, že

- p je prosté (různým vrcholům odpovídají různé body);
- pro každou $e \in E$ platí $\gamma(e)(0) = p(s(e))$ a $\gamma(e)(1) = p(t(e))$ (křivky odpovídající hranám začínají a končí v obrazech příslušných vrcholů);
- pro každou $e \in E$ platí $\#(\operatorname{im}\gamma(e) \cap \operatorname{im} p) = 2$ (to spolu s předchozí podmínkou znamená, že každá křivka prochází pouze svým počátečním a koncovým vrcholem).

Jelikož značení $\gamma(e)$ a $p(v)$ jsou poněkud komplikovaná, budeme obraz hrany e při zobrazení γ značit zkrátka $\gamma_e \in \Gamma$. Podobně, obrazem vrcholu $v \in V$ při zobrazení p bude bod $p_v \in \mathbb{R}^2$.

1.1.1 Jordanova věta o kružnici

Zásadním nástrojem pro studium rovinných grafů – grafů, jež lze kreslit bez křížení hran – je tzv. *Jordanova věta o kružnici*, dlejíc opět spíše v bydle matematické analýzy. Je zdárným příkladem faktu, že matematický jazyk není vždy v souladu s lidskou intuicí. Jedná se totiž, čtenáři jistě budou souhlasit, o intuitivně zřejmé tvrzení, které není však zdaleka snadné (avšak ani příliš náročné) dokázat.

Jordanova věta o kružnici říká zjednodušeně to, že nakreslíme-li v rovině kružnici a poté ji vyjmeme, rozdělíme rovinu na dvě oblastě – jednu omezenou (vnitřek kružnice) a jednu neomezenou (vnějšek kružnice). Jistá potíž skrývá sebe ve faktu, že zde *kružnicí* nemyslíme onu krásnou buclatou pravidelně kulatou ... no ... kružnici, ale libovolnou souvislou čáru, která se neprotíná a je uzavřená, tj. začíná tam, kde končí. Takové kružnici se říká třeba *topologická*, ale spíš jí nikdo žádné zvláštní jmě nedává. Je to vlastně křivka v rovině s tím rozdílem, že není zcela prostá, neboť se její koncové body shodují. Vypovídavše se pokračujeme již formální definicí.

Definice 1.1.3 (Topologická kružnice). *Topologickou kružnicí* nazveme libovolné **spojité** zobrazení $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ takové, že

- $\kappa(0) = \kappa(1)$ a
- κ je prosté na $(0,1)$.

Než trpělivé čtenáře seznámíme s formálním zněním Jordanovy věty o kružnici, musíme zmínit, co znamená, že nějaká podmnožina $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ je *oblast*. Toto adjektivum s sebou obvykle nese dvě vlastnosti:

- otevřenost (každý bod Ω má kolem sebe okolí, tj. nekonečně mnoho bodů nekonečně blízko sebe; též se dá říct, že Ω „nemá hranici“),
- souvislost (z každého bodu se dá po křivce dostat do každého).

Není těžké si všimnout (aspoň v případě kulaté kružnice), že hranicí jejího vnějšku i vnitřku je právě ona. Když ji vyjmeme, obě množiny přijdou o svou hranici a stanou se oblastmi.

Konečně, *omezenost* podmnožiny $\mathbb{R}^2$ znamená, že existuje horní limit na vzdálenost mezi dvěma jejími body.

Věta 1.1.4 (Jordanova o kružnici)**.** Ať κ je topologická kružnice. Pak se $\mathbb{R}^2 \setminus \operatorname{im} \kappa$ rozpadá na dvě disjunktní oblasti – jednu omezenou a jednu neomezenou.

Jak jsme již zmiňovali, důkaz Jordanovy věty je kvítí ve vínku matematické analýzy a my je zde uvádět nebudeme. Pouze ji v dalším textu občas použijeme.

1.1.2 Rovinné grafy

Přívlastek „rovinný“ jsme v kontextu kreslení grafů zmínili již několikrát a neformálně jsme uvedli, že grafu řekneme rovinný, když se dá nakreslit bez křížení hran. Formulace „dá nakreslit“ je zde zásadního významu. Libovolný graf, který má aspoň dvě hrany, lze vždy nakreslit tak, aby se tyto křížily. Nás však zajímá pouze, zda existuje **nějaké** nakreslení takového grafu, ve kterém se žádné hrany nekříží.

Obecně, minimální nutný počet křížení hran v nakreslení grafu je bohatě nejvíce studovaná vlastnost z celé oblasti kreslení grafů. Definice křížení (nebo absence téhož) v nakreslení grafu není výrazně odlišná od té intuitivní. Zkrátka, řekneme, že dvě hrany se nekříží, když v průniku jejich obrazů leží pouze nakreslené vrcholy (tam se samozřejmě hrany křížit mohou a některé musejí).

Definice 1.1.5 (Rovinný graf)**.** Graf $G = (V, E)$ nazveme *rovinným*, když existuje jeho nakreslení (p, c) takové, že pro každé dvě různé hrany $e, e' \in E$ platí

$$\operatorname{im} \gamma_e \cap \operatorname{im} \gamma_{e'} \subseteq \operatorname{im} p.$$

Každé nakreslení rovinného grafu, které splňuje tuto podmínku, nazveme též *rovinným*.

Ve zbytku kapitoly nás čekají jeden snadný a dva těžké úkoly.

(1) Definovat několik základních operací na vrcholech a hranách grafu, které přijdou vhod v dalším textu.

(2) Zformulovat a dokázat několik základních vlastností rovinných grafů.

(3) Dokázat Kuratowskiho větu, která dokonale klasifikuje rovinné grafy, tj. poskytuje konkrétní přímočaré kritérium, podle nějž lze poznat, zda je graf rovinný, či nikoliv.

Začněme bodem (1). Budeme potřebovat zavést operace přidání a odebrání vrcholů a hran a konečně operaci dělení hrany. Význam prvních čtyř je snad jasný z názvu, pátá operace vyžaduje vlastně přidání vrcholu doprostřed nějaké hrany. Dá se pomocí prvních čtyř vyjádřit jako

- odebrání dlouhé hrany,
- přidání vrcholu,
- přidání dvou hran vedoucích z tohoto vrcholu do počátečního a koncového vrcholu původní odebrané hrany.

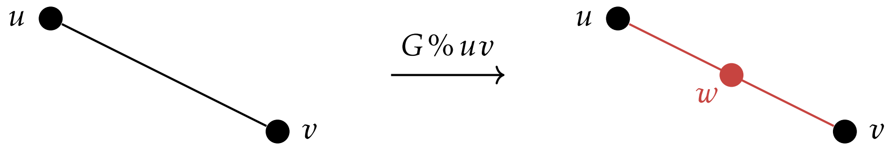
I když intuitivně se operace pojímají snadno, formální definice není naprosto přímočará. Spěšně si rozmyslíme, jak se dají formalizovat.

Definice 1.1.6 (Základní grafové operace)**.** Ať $G = (V, E)$ je graf. Definujeme následující operace na množinách V a E:

- operace přidání vrcholu, zapisujeme
$$G + v := (V \cup \{v\}, E).$$
- operace odebrání vrcholu (zde je třeba **odebrat i všechny hrany, které do tohoto vrcholu vedou**), pro $v \in V$ zapisujeme
$$G - v := (V \setminus \{v\}, E \setminus \{e \in E \mid v \in e\}).$$
- operace přidání hrany, pro $u, v \in V$ takové, že $uv \notin E$, zapisujeme
$$G + uv := (V, E \cup \{uv\}).$$
- operace odebrání hrany, pro $uv \in E$ zapisujeme
$$G - uv := (V, E \setminus \{uv\}).$$

- operace dělení hrany, pro $uv \in E$ zapisujeme

$$G \% uv := (V \cup \{w\}, (E \setminus \{uv\}) \cup \{uw\} \cup \{wv\}) \\ = (((G - uv) + w) + uw) + wv.$$



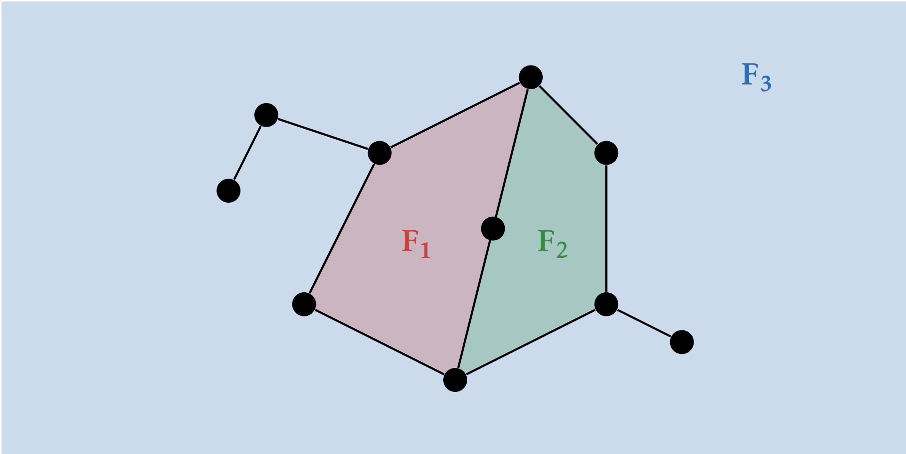
Obrázek 6: Operace dělení hrany uv.

Pokračujeme bodem (2). Asi není příliš překvapivé, že rovinné grafy nemohou mít příliš mnoho hran (vzhledem k počtu vrcholů). Čím víc hran do grafu přidám, tím se snižuje šance, že každou další hranu zvládnu nakreslit bez křížení s ostatními.

Nejprve objasníme, k čemu nám vlastně slouží Jordanova věta o kružnici. Totiž, kromě křivek a bodů reprezentujících hrany a vrcholy, získává nakreslení **rovinných** grafů ještě jednu strukturu – stěny. Lidsky řečeno, stěny daného nakreslení jsou oblasti roviny ohraničené hranami, přesněji cestami. Nahlédneme, že v důsledku Jordanovy věty se po vynětí všech hran nakreslení daného grafu $G = (V, E)$ rozpadne roviny na několik omezených oblastí (tzv. „vnitřní stěny") a jednu neomezenou (tzv. „vnější stěna"). Každou z těchto oblastí nazveme *stěnou* grafu G a množinu všech stěn označíme písmenem F (z angl. **f**ace).

Poznámka. Všimněte si, že pojem *stěny* definujeme pouze pro **rovinné** grafy. To má vlastně dva důvody. Zaprvé, stěny, které mají na svých hranicích průsečíky nakreslených hran neodpovídající žádným vrcholům grafu, vytvářejí strukturu nezávislou na grafu $G = (V, E)$, jejž kreslíme. To je algebraicky zcela nepřirozené.

Druhý důvod je více praktický. Totiž, jak jsme již zmínili, hrany můžeme kreslit tak, aby vznikl libovolný počet křížení. To zároveň znamená, že můžeme vytvořit libovolný počet stěn v daném nakreslení. Zásadní výsledek pro rovinné grafy (který si dokážeme) říká, že počet stěn v každém jeho rovinném nakreslení závisí pouze na počtu vrcholů a hran, a **nikoli na volbě samotného rovinného nakreslení**. To je překvapivě velmi hluboký výsledek, neboť ukazuje, že v principu



Obrázek 7: Nakreslení grafu s vnitřními stěnami $\mathbf{F_1}$ a $\mathbf{F_2}$ a vnější stěnou $\mathbf{F_3}$.

geometrická struktura stěn je v případě rovinných grafů naprosto kompatibilní s jeho v principu algebraickou strukturou hran.

Abychom mohli tvrdit, že graf vůbec má nějaké stěny, potřebujeme si rozmyslet, že nakreslený cyklus je topologická kružnice. To je intuitivně zřejmé, zkrátka za sebe spojíme nakreslené hrany a ta poslední bude končit tam, kde ta první začala. Rozmyslet si tento fakt formálně je mírně složitější úloha.

Potřebujeme definovat spojení dvou křivek γ_1, γ_2 takových, že $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$ a dokázat, že za předpokladu, že se neprotínají nikde jinde, se jedná rovněž o křivku v rovině. Princip definice je velmi přímočarý – nová křivka γ bude zkrátka v čase od 0 do 1/2 sledovat křivku γ_1 a od 1/2 do 1 sledovat křivku γ_2. Formálně lze toto nové zobrazení $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ definovat například následovně.

Definice 1.1.7 (Spojení křivek)**.** Ať γ_1, γ_2 jsou dvě křivky v rovině, které se neprotínají, a platí $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Potom definujeme jejich *spojení*, zapisované často zkrátka $\gamma_1\gamma_2$ předpisem

$$\gamma_1\gamma_2(t) := \begin{cases} \gamma_1(2t), & \text{pokud } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \gamma_2(2t-1), & \text{pokud } t \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Lemma 1.1.8. Ať γ_1, γ_2 jsou křivky v rovině, které se neprotínají, a $\gamma_1(1) = \gamma_2(0)$. Potom je spojení $\gamma_1\gamma_2$ dobře definované a je to křivka v rovině.

Důkaz. „Dobrá definovanost" $\gamma_1\gamma_2$ zkrátka znamená, že jsme nenapsali žádný nesmysl, tj. že to je opravdu *zobrazení* (to je zde zřejmé) a že jsme při jeho definici například neuvažovali body mimo domény zobrazení γ_1 a γ_2. To je velmi snadné ověřit, neboť pro $t \in [0, 1/2]$ je $2t \in [0, 1]$ a pro $t \in [1/2, 1]$ je $2t - 1 \in [0, 1]$. V čase spojení $t = 1/2$ máme

$$\gamma_1(2t) = \gamma_1(1) = \gamma_2(0) = \gamma_2(2t - 1),$$

tedy vše funguje, jak má.

Fakt, že $\gamma_1\gamma_2$ je křivka v rovině, je též snadno vidět. Totiž, zcela jistě je to zobrazení $[0, 1] \to \mathbb{R}^2$. Dále, je spojité, ježto γ_1 i γ_2 jsou spojitá a plynule na sebe navazují. Je též prosté, neboť γ_1 i γ_2 jsou prostá a z předpokladu se neprotínají. $\square$