Gymnázium Evolution Jižní Město

Jakýsi úvod do matematické analýzy

Áďula vod Klepáčů

6. června 2024

Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předšedších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.

Obsah

Kapitola 1

Elementární funkce

Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávejte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.

Jisté speciální funkce v matematické analýze si vysloužily přízvisko *elementární*. Původ jejich speciality je ryze fyzikální. Jsou to funkce, jejich prostřednictvím fyzikové modelují mnoho přírodních jevů a pojmů – růst, vlnění, proud, gravitaci, úhel …

Ježto fyzikální model světa radno ponechati do textů menší náročnosti, soustředit se budeme pouze na prezentaci těchto funkcí a důkazy jejich základních vlastností.

Všechny elementární funkce definujeme jako součty nekonečných řad. V tomto textu jsme se nezabývali pramnoho konvergencí řad s libovolnými členy. Všechna tvrzení, která tímto směrem budeme vyžadovat, zformulujeme, ač nedokážeme.

1.1 Exponenciála a logaritmus

První na seznamu je *exponenciála* – funkce spojitého růstu. Toto pojmenování ještě níže odůvodníme. Nyní přikročíme k definici. Pro stručnost zápisu, budeme v následujícím textu používat konvenci, že $0^0 = 1$.

Definice 1.1.1 (Exponenciála)

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\exp x \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Jak jsme čtenáře vystříhali, musíme nyní na krátkou chvíli odbočit k číselným řadám, abychom uměli v obec dokázat, že právě definovaná exponenciála je skutečně reálnou funkcí.

Definice 1.1.2 (Absolutní konvergence řady)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je číselná řada, kde $a_n \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolutně konverguje*, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Lemma 1.1.3

Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Důkaz. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m \geq n \geq n_0$ platí

$$\left|\sum_{k=n}^{m} |a_k|\right| = \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon.$$

Potom ale z trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon,$$

čili $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje. ■

Definice 1.1.4 (Cauchyho součin řad)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou číselné řady. Jejich *Cauchyho součinem* myslíme číselnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Věta 1.1.5 (Mertensova)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní *číselné řady, přičemž $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je navíc absolutně konvergentní. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ konverguje a platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Věta 1.1.6 (Vlastnosti exponenciály)

Funkce exp *je dobře definována a platí*

(E1) $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$;

(E2) $\lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 0$.

Důkaz. *Dobrá definovanost* zde znamená, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} x_n/n!$ konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že konverguje absolutně. Je-li $x = 0$, pak řada konverguje zřejmě. Volme tedy $x \in$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

čili podle věty **??** řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x^n|/n!$ konverguje, což znamená, že konverguje i $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$.

Dokážeme vlastnost (E1). Počítáme

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}y^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{x^{n-k}y^k}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{y^k}{k!}.\end{aligned}$$

Všimněme si, že poslední řada je Cauchyho součinem řad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ a $\sum_{n=0}^{\infty} y^n/n!$. Protože jsou obě tyto řady (podle výše dokázaného) absolutně konvergentní, platí z Mertensovy věty

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{y^k}{k!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \exp x \cdot \exp y.$$

Nyní vlastnost (E2). Pro $x \in (-1,1)$ odhadujme

$$\begin{aligned}\left|\frac{\exp x - 1}{x} - 1\right| &= \left|\frac{\exp x - 1 - x}{x}\right| = \frac{1}{|x|}\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - x - 1\right| = \frac{1}{|x|}\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \\ &= |x|\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!}\right| \le |x|\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\right| = c\cdot|x|,\end{aligned}$$

kde $c > 0$ je hodnota součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$, která zjevně konverguje (například díky nerovnosti $1/n! \le 1/n^2$). Jelikož $\lim_{x\to 0} c\cdot|x| = 0$, plyne odtud ihned, že

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\exp x - 1}{x} - 1\right| = 0,$$

z čehož zase

$$\lim_{x\to 0}\frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Tím je důkaz završen. ■

Ihned si odvodíme další vlastnosti exponenciály plynoucí z (E1) a (E2). Postupně dokážeme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí následující.

(E3) $\exp 0 = 1$;

(E4) $\exp' x = \exp x$;

(E5) $\exp(-x) = 1/\exp(x)$;

(E6) $\exp x > 0$;

(E7) exp je spojitá na $\mathbb{R}$;

(E8) exp je rostoucí na $\mathbb{R}$;

(E9) $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$;

(E10) $\operatorname{im} \exp = (0, \infty)$.

Z (E1) platí $\exp(0 + x) = \exp 0 \cdot \exp x$. Protože zřejmě existuje $x \in \mathbb{R}$, pro něž $\exp x \neq 0$, plyne odtud $\exp 0 = 1$, tj. vlastnost (E3).

Pro důkaz (E4) počítáme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp h \cdot \exp x - \exp h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\exp h - 1)\exp x}{h}$$
$$= \exp x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\exp h - 1}{h} = \exp x \cdot 1 = \exp x,$$

kde jsme v červené rovnosti použili vlastnost (E1) a v modré zas vlastnost (E2).

Pokračujeme vlastností (E5). Z (E1) máme

$$\exp(x + (-x)) = \exp x \cdot \exp(-x).$$

Protože z (E3) je $\exp(x + (-x)) = \exp 0 = 1$, dostáváme

$$1 = \exp x \cdot \exp(-x),$$

čili

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

Ježto má řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ zjevně kladný součet pro $x > 0$, plyne (E6) přímo z právě dokázané (E5).

Vlastnost (E7) je okamžitým důsledkem vlastnosti (E4), díky níž má exp konečnou derivaci na $\mathbb{R}$, a tudíž je podle lemmatu **??** tamže spojitá.

Vlastnost (E8) je důsledkem vlastností (E4) a (E6), neboť funkce majíc na intervalu (v tomto případě celém $\mathbb{R}$) kladnou derivaci, je na tomto intervalu – podle důsledku **??** – rostoucí.

Platí $\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} > 1$, čili z vlastnosti (E1) plyne, že exp není shora omezená, neboť $\exp(x + 1) = \exp x \cdot \exp 1 > \exp x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. To spolu s vlastnostmi (E7) a (E8) dává $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$. Dále, použitím (E5),

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{x\to\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp x} = 0,$$

což dokazuje (E9).

Konečně, vlastnost (E10) plyne z (E9) a Bolzanovy věty.

Příklad 1.1.7

V úvodu do této sekce jsme nazvali exponenciálu „funkcí spojitého růstu“. Tuto intuici nyní částečně formalizujeme. Dalšího pohledu nabudeme po definici obecné mocniny.

Uvažme následující přímočarý populační model. V čase $t \in (0, \infty)$ je počet jedinců dán funkcí $P(t)$. Množství nově narozených jedinců závisí pouze na počtu právě žijících a na konstantě $r \in [0, \infty)$ – zvané *reproduction rate* – která značí, kolik nových jedinců se narodí za jednoho právě živého. Vnímáme-li derivaci $P'(t)$ jako *rychlost růstu* populace v čase t, pak dostáváme diferenciální rovnici

$$P'(t) = r \cdot P(t),$$

jelikož v čase t se podle našeho modelu narodí r jedinců za každého živého. Díky vlastnosti (E4) vidíme, že například funkce $P(t) = \exp(rt)$ řeší rovnici výše. Teorii diferenciálních rovnic v tomto textu probírat nebudeme, bez důkazu však zmíníme, že řešení takto triviálních rovnic až na konstantu určena jednoznačně. V tomto jednoduchém populačním modelu je tudíž počet živých jedinců v čase t dán funkcí $t \mapsto \exp(rt)$.

Na závěr si dokážeme jeden možná překvapivý fakt, že vlastnosti (E1) a (E2) již určují funkci exp jednoznačně.

Věta 1.1.8 (Jednoznačnost exponenciály)

Existuje právě jedna funkce definovaná na celém $\mathbb{R}$ splňující (E1) a (E2).

Důkaz. Existenci jsme dokázali konstruktivně. Dokážeme jednoznačnost. Ať $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje (E1) a (E2). Ukážeme, že $f = \exp$.

Z úvah výše plyne, že f splňuje rovněž vlastnosti (E3) - (E10), protože k jejich důkazu byly použity pouze (E1) a (E2). Platí tedy $f(0) = 1$ a $f'(x) = f(x)$. Jelikož $\exp x \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, máme z věty o aritmetice derivací

$$\left(\frac{f}{\exp}\right)'(x) = \frac{f'(x)\exp x - f(x)\exp' x}{\exp^2 x} = \frac{f(x)\exp x - f(x)\exp x}{\exp^2 x} = 0.$$

Podle cvičení **??** je $f/\exp$ konstatní funkce, čili existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x)/\exp x = c$ pro každé $c \in \mathbb{R}$. Dosazením $x = 0$ zjistíme, že $c = f(0)/\exp 0 = 1$, čili $c = 1$ a $f = \exp$. ■

1.1.1 Logaritmus

Jelikož je funkce exp spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$, má na celém $\mathbb{R}$ inverzní funkci, které přezdíváme *logaritmus* a značíme ji log. Z vlastností exp ihned plyne, že log je reálná funkce $(0, \infty) \to \mathbb{R}$. Na rozdíl od exp však log není dána číselnou řadou – aspoň ne pro všechna $x \in (0, \infty)$, více v kapitole o Taylorově polynomu.

Vlastnosti exponenciály nám rovnou umožňují do značné míry prozkoumat k ní inverzní funkci.

Tvrzení 1.1.9 (Vlastnosti logaritmu)

Pro každá $x, y \in (0, \infty)$ platí

(L1) $\log$ *je spojitá a rostoucí na* $(0, \infty)$*;*

(L2) $\log(xy) = \log x + \log y$*;*

(L3) $\log' x = 1/x$;

(L4) $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$ *a* $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$.

Důkaz.

(L1) Plyne ihned z faktu, že exp je spojitá a rostoucí.

(L2) Užitím vlastností exponenciály spočteme

$$xy = \exp(\log x) \cdot \exp(\log y) = \exp(\log x + \log y),$$

z čehož po aplikace log na obě strany rovnosti plyne

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

(L3) Podle věty o derivaci inverzní funkce platí

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

(L4) Protože $\operatorname{im}\log = \mathbb{R}$, není log zdola ani shora omezená. Z (L1) plyne kýžený závěr. ■

1.1.2 Obecná mocnina

Užitím funkcí log a exp definujeme pro $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ výraz a^b předpisem

$$a^b \coloneqq \exp(b \cdot \log a).$$

Stojí za to věnovat krátkou chvíli ověření, že tato funkce odpovídá naší představě *mocniny* v případě, kdy $b = n \in \mathbb{N}$. Máme

$$a^n = \exp(n \cdot \log a) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \log a\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(\log(a)) = \prod_{k=1}^{n} a,$$

tedy a^n je vskutku a n-krát vynásobené samo sebou.

Varování 1.1.10

Uvědomme si, že a^b je definováno pouze pro $a \in (0, \infty)$. Pro $a \leq 0$ není tato funkce nad reálnými čísly rozumně definovatelná. Důvod je mimo jiné následující: pro n sudé a $a < 0$ je $a^n > 0$, ale $a^{n+1} < 0$. Tedy, měla-li by a^b být spojitá funkce, pak by pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $a < 0$ existovalo $\xi \in (n, n+1)$ takové, že $a^\xi = 0$. Mocninná funkce, jež je nulová pro nekonečně mnoho čísel je i pro matematiky zřejmě příliš divoká představa.

Poznamenejme však, že nad komplexními čísly je funkce log definována i pro záporná reálná čísla, tedy a^b dává – se stejnou definicí – smysl pro všechna $a, b \in \mathbb{C}$.

Z vlastností log a exp plynou ihned vlastnosti obecné mocniny. Jelikož její definice dává vzniknout **dvěma** reálným funkcím, konkrétně

$$f(x) = a^x \text{ pro } x \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad g(x) = x^b \text{ pro } x \in (0, \infty),$$

musíme tyto při zkoumání vlastností obecné mocniny pochopitelně rozlišovat. Aby nedošlo ke zmatení, budeme tyto funkce značit zkrátka jako $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto x^b$, kde $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ jsou fixní.

Tvrzení 1.1.11 (Vlastnosti obecné mocniny)

Pro všechna $a \in (0, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$ platí

(O1) *Funkce $x \mapsto a^x$ i $x \mapsto x^b$ jsou spojité na svých doménách.*

(O2) *Funkce $x \mapsto a^x$ je na celém $\mathbb{R}$*

- *rostoucí pro $a > 1$,*
- *konstantní pro $a = 1$,*
- *klesající pro $a < 1$.*

(O3) *Funkce $x \mapsto x^b$ je na $(0, \infty)$*

- *rostoucí pro $b > 0$,*
- *konstantní pro $b = 0$,*
- *klesající pro $b < 0$.*

(O4) $(x \mapsto a^x)' = (x \mapsto a^x \log a)$.

(O5) $(x \mapsto x^b)' = (x \mapsto bx^{b-1})$.

(O6) *Je-li*

- *$a > 1$, pak $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$;*
- *$a < 1$, pak $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ a $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$;*

(O7) *Je-li*

- *$b > 0$, pak $\lim_{x\to 0^+} x^b = 0$ a $\lim_{x\to\infty} x^b = \infty$.*
- *$b < 0$, pak $\lim_{x\to 0^+} x^b = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} x^b = 0$.*

(O8) $\log(a^b) = b \cdot \log a$.

Důkaz. Vlastnosti (O2), (O3), (O6) a (O7) dokážeme pouze v případě, že $a > 1$ a $b > 0$. Důkaz tvrzení v případech $a < 1$ a $b < 0$ plyne ihned z rovnosti $\exp(-x) = 1/\exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$.

(O1) Jelikož $a^b = \exp(b \log a)$ plyne spojitost obou funkcí ze spojitosti exp a log.

(O2) Platí $a^x = \exp(x \log a)$. Protože $a > 1$, je $\log a > 0$. Funkce exp je rostoucí, a tedy je rostoucí rovněž $a \mapsto a^x$.

(O3) Máme $x^b = \exp(b \log x)$. Jelikož je b z předpokladu kladné a log je rostoucí, je $x \mapsto x^b$ též rostoucí.

(O4) Počítáme

$$(a^x)' = (\exp(x \log a))' = \exp'(x \log a) \cdot (x \log a)' = \exp(x \log a) \cdot \log a = a^x \log a.$$

(O5) Opět počítáme

$$(x^b)' = (\exp(b \log x))' = \exp'(b \log x) \cdot (b \log x)' = \exp(b \log x) \cdot \frac{b}{x} = \frac{bx^b}{x} = bx^{b-1}.$$

(O6) Podobně jako v důkazu (O2) plyne z $a > 1$, že $\log a > 0$. Potom jsou ale limity v $\pm\infty$ funkce $a^x = \exp(x \log a)$ stejné jako tytéž limity funkce $\exp x$. Odtud tvrzení.

(O7) Jelikož je $b > 0$, máme z věty o limitě složené funkce

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} x^b &= \lim_{x \to 0^+} \exp(b \cdot \log x) = \lim_{y \to -\infty} \exp(b \cdot y) = 0, \\ \lim_{x \to \infty} x^b &= \lim_{x \to \infty} \exp(b \cdot \log x) = \lim_{y \to \infty} \exp(b \cdot y) = \infty. \end{aligned}$$

(O8) Jest

$$\log(a^b) = \log(\exp(b \cdot \log a)) = b \cdot \log a.$$

■

1.2 Goniometrické funkce

Název „úhloměrné“ funkce je zastaralý a nepřesný. Funkce sin a cos, které se jmeme definovati, úspěšně modelují fyzikální jevy jakkoli související s vibrací či vlněním. Jak si brzy rozmyslíme, jsou to ve skutečnosti funkce v zásadě exponenciální. To by nemělo být na druhý pohled až tak překvapivé – vibrace jsou v zásadě jen periodicky se střídající růst a pokles.

Definice 1.2.1 (Goniometrické funkce)

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme funkce

$$\begin{aligned} \sin x &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \cos x &:= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \end{aligned}$$

Věta 1.2.2 (Vlastnosti goniometrických funkcí)

Funkce sin *a* cos *jsou dobře definované a splňují:*

(G1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \sin y \cos x, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y; \end{aligned}$$

(G2) sin *je lichá a* cos *je sudá funkce;*

(G3) $\exists \pi \in \mathbb{R}$ *takové, že* sin *je rostoucí na* $[0, \pi/2]$, $\sin(0) = 0$ *a* $\sin(\pi/2) = 1$.

(G4) $\sin'(0) = 1$.

K důkazu použijeme následující pomocné lemma.

Lemma (Pomocné)

Ať $x \in \mathbb{R}$. *Pak existuje* $C > 0$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a každé* $h \in (-1, 1)$ *platí nerovnost*

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq h^2 C^n.$$

Důkaz. Položme $C \coloneqq 2(|x| + 1)$. Pro $n = 1$ máme

$$|(x+h)^1 - x^1 - hx^0| = |x + h - x - h| = 0 \leq 2h^2(|x| + 1)$$

pro každé $h \in (-1, 1)$.

Pro $n \geq 2$ lze použít binomickou větu a počítat

$$(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k. \qquad (\triangle)$$

Protože $|x| + 1 \geq |x|$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, platí $(|x| + 1)^n \geq |x|^k$, kdykoli $k \leq n$. Rovněž, z předpokladu $|h| < 1$, a tedy naopak platí $|h|^k \leq |h|^n$ pro $k \leq n$. Užitím těchto nerovností a rovnosti ($\triangle$) můžeme odhadnout

$$\begin{aligned} |(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| &\leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^k \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (|x| + 1)^n h^2 \\ &\leq h^2 (|x| + 1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = h^2 (|x| + 1)^n 2^n = h^2 C^n, \end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ■

Důkaz (Věty 1.2.2). Je zřejmé, že řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

konvergují absolutně (použitím stejného argumentu jako v důkazu korektnosti exponenciály ve větě 1.1.6). Podle lemmatu 1.1.3 jsou obě řady rovněž konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$, což dokazuje dobrou definovanost obou funkcí.

Ukážeme nejprve, že $\sin' x = \cos x$. Volme pevné $x \in \mathbb{R}$. Pro $h \in (-1, 1)$ platí

$$\begin{aligned} \sin(x+h) - \sin x - h\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{hx^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left((x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n} \right). \end{aligned}$$

Z **pomocného lemmatu** nalezneme $C > 0$ takové, že

$$|(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n}| \leq C^{2n+1}h^2.$$

Pak

$$|\sin(x+h) - \sin x - h\cos x| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}h^2 = h^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} C^{2n+1}/(2n+1)!$ je konvergentní, a tedy

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{\sin(x+h) - \sin x - h\cos x}{h} \right| = 0,$$

z čehož ihned

$$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

Pro důkaz (G1) volme pevné $a \in \mathbb{R}$ a položme

$$\psi(x) \coloneqq (\sin(x+a) - \sin x \cos a - \sin a \cos x)^2 + (\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin a \sin x)^2.$$

Snadno spočteme, že $\psi'(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy je díky cvičení **??** ψ konstantní na $\mathbb{R}$. Dosazením dostaneme, že

$$\sin(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0,$$
$$\cos(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n)!} = (-1)^0 \frac{0^0}{0!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n!)} = 1.$$

Díky těmto rovnostem spočteme $\psi(0) = 0$. Z toho, že ψ je konstantní, plyne, že $\psi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. To dokazuje obě rovnosti v (G1), neboť ψ je nulová funkce, jež je zároveň součtem čtverců, které musejí být tudíž oba nulové.

Vlastnost (G2) je vidět ihned z definice, neboť proměnná x se v definici sin objevuje pouze v liché mocnině a v definici cos pouze v sudé.

Vlastnost (G3) dokazovat nebudeme. Je výpočetně náročná a neintuitivní.

Již víme, že $\sin'(x) = \cos x$ a že $\cos(0) = 1$. Odtud (G4). ■

Poznámka 1.2.3

V úvodu jsme zmínili, že sin a cos jsou vlastně exponenciální funkce. Vskutku, když se jeden zadívá na jejich řady, vidí (až na znaménko $(-1)^n$ zařizující právě onen „růst a pokles“) v zásadě exponenciální funkci. Konkrétně, sin je rozdílem *lichých* částí exponenciály a cos těch *sudých*. Rozdělme $\exp x$ na čtyři části podle zbytku po dělení indexu n čtyřmi.

$$\exp x = \sum_{n \bmod 4=0} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \bmod 4=1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \bmod 4=2} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \bmod 4=3} \frac{x^n}{n!}$$

Označme tyto části $\exp_0$, $\exp_1$, $\exp_2$ a $\exp_3$. Všimněme si, že když $n \bmod 4 = a$, pak $n = 4k + a$

pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Čili například $\exp_2$ lze zapsat ve tvaru

$$\exp_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}$$

Tvrdíme, že $\sin = \exp_1 - \exp_3$ a $\cos = \exp_0 - \exp_2$. Vskutku, když je n liché, pak $2n+1 \bmod 4 = 3$ (protože $4 \nmid 2n$) a když je n sudé, tak $2n+1 \bmod 4 = 1$. Čili, pro n lichá je $2n+1$ tvaru $4k+3$ a pro n sudá zase tvaru $4k+1$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}\exp_1(x) - \exp_3(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} \\ &= \sum_{n \text{ sudé}} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n \text{ liché}} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x,\end{aligned}$$

neboť $(-1)^n$ je rovno 1 pro n sudé a -1 pro n liché. Podobně odvodíme i vztah pro cos.

Definice 1.2.4 (Tangens a kotangens)

Definujeme goniometrické funkce tan a cot předpisy

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce tan je definována pro $x \neq n\pi + \pi/2$, kde je funkce cos nulová, a cot je definována pro x různé od násobků π.

Zformulujeme si několik vlastností funkcí tan a cot, ale dokazovat je nebudeme. Důkazy se významně neliší od již spatřených důkazů jiných elementárních funkcí.

Tvrzení 1.2.5 (Vlastnosti tangenty a kotangenty)

Platí:

(G5) tan *i* cot *jsou spojité na svých doménách;*

(G6) tan *i* cot *jsou liché;*

(G7) $\tan' x = 1/\cos^2 x$ *a* $\cot' x = -1/\sin^2 x$*;*

(G8) $\tan \frac{\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = 1$*;*

(G9) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$ *a* $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$.

(G10) $\lim_{x \to 0^+} \cot x = \infty$ *a* $\lim_{x \to \pi^-} \cot x = -\infty$.

(G11) tan *je rostoucí na* $(-\pi/2, \pi/2)$ *a* cot *je klesající na* $(0, \pi)$.

1.3 Limity elementárních funkcí

Celá tato sekce je věnována výpočtu limit, ve kterých figurují elementární funkce. Nejtěžšími (ale zároveň nejužitečnějšími) úlohami na vyřešení jsou limity racionálních kombinací (tj. součtů, násobků a především podílů) elementárních funkcí. Samotné řešení pak obvykle zahrnuje převod výrazu do tvaru, v němž lze naň uplatnit jisté „známé“ limity, případně použít l'Hospitalova pravidla.