Gymnázium Evolution Jižní Město

Jakýsi úvod do matematické analýzy

Áďula vod Klepáčů

25. května 2024

Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předšedších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.

Obsah

Kapitola 1

Derivace

Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávajte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.

Derivace funkce je vlastně „velikost změny“ funkce v daný okamžik. Takový pojem se může zdát dost neintuitivní – „Jak se může cosi měnit v jeden okamžik?“ – ale vskutku se s ním setkáváme běžně a divné nám to ani nepřijde.

Kupříkladu rychlost je derivací polohy, tj. představuje velikost změny polohy v čase. Když automobilový tachometr ukazuje, že jedeme rychlostí 60 km/h, co to přesně znamená? Jak si mám představit, že *teď* se moje poloha mění o 60 kilometrů v rámci jedné hodiny? Jeden způsob vnímání dlí v obraze, že za příští hodinu urazím 60 km. Jako hrubá aproximace snad postačuje, ale je snad zřejmé, že pokud se moje rychlost během oné hodiny mění, změní se i výsledně uražená vzdálenost.

Mnoho lidí, kteří se dívají za jízdy na tachometr, si pravděpodobně neuvědomuje, že rychlost jízdy je limitní pojem. Fakt, že *přesně v tuto chvíli* jedu například právě 60 km/h znamená, že čím menší zlomek jedné hodiny nahlédnu do budoucnosti (či do minulosti), tím blíže bude velikost změny mojí polohy odpovídající zlomek 60 km. Za předpokladu, že moje rychlost není konstantní, nebude tato změna nikdy dokonale taková. Tudíž, vím-li, že se pohybuji rychlostí 60 km/h, nevím toho v principu mnoho. Nabývám tím pouze práva tvrdit, že se zmenšujícím se časovým rozdílem mezi přítomností a jistým okamžikem v budoucnu (či v minulu) klesá i rozdíl mezi skutečně překonanou vzdáleností a tou odpovídající uvedené rychlosti.

Formalizace *velikosti okamžité změny* není užitím pojmu limity funkce nikterak obtížná. Před formální definicí si ji ukážeme na příkladě z předešlých odstavců. Ať je moje poloha v čase daná funkcí $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, kde $p(0)$ je moje poloha na začátku cesty a $p(1)$ na jejím konci. Zanedbáme pro jednoduchost fakt, že polohu určuje pouze jediné reálné číslo místo své příslušné vícedimenzionální varianty.

Co přesně myslíme rychlostí změny? Napovědí již použité jednotky – km/h. *Změna polohy* je zde rozdíl výsledné polohy od nynější za daný čas. Pro daný čas $t \in [0,1]$, pak *změna polohy* v tomto čase za danou dobu $h \in [0,1]$ je

$$z_t(h) = \frac{p(t+h) - p(t)}{h}.$$

Vskutku, ať například $t = 0$, tedy jsem na začátku cesty, třeba na třicátém kilometru dálnice, čili $p(0) = 30$. Pojedu jednu hodinu. V půli cesty se podívám na postranní milník a vidím, že jsem na stém kilometru téže dálnice, čili $p(1/2) = 100$. Urazil jsem tudíž za půl hodiny přesně 70 km. Z těchto údajů soudím, že byla-li by moje rychlost konstantní, urazil bych 140 km za jednu hodinu. Vyjádřeno pomocí funkce změny, mám

$$z_0(1/2) = \frac{p(0 + 1/2) - p(0)}{1/2} = \frac{100 - 30}{1/2} = 140.$$

Velikost okamžité změny funkce p v daném čase t bude pročež limita uvedené funkce z, jak se bude doba h blížit 0.

Odstavce výše shrneme v následujících definicích.

Definice 1.0.1 (Funkce změny)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. *Funkcí změny* f v bodě $a \in M$ myslíme funkci $z_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$z_a(h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h}.$$

Definice 1.0.2 (Derivace funkce)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. *Derivací*, nebo též *funkcí okamžité změny*, funkce f v bodě $a \in M$ myslíme limitu

$$\lim_{h \to 0} z_a(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h},$$

pokud tato existuje. V takovém případě ji značíme $f'(a)$.

Poznámka 1.0.3 (Jednostranné derivace)

Podobně lze rovněž definovat derivaci funkce f v bodě a zleva, resp. zprava, jako

$$\lim_{h \to 0^-} z_a(h), \text{ resp. } \lim_{h \to 0^+} z_a(h).$$

Intuitivně tato aproximuje, jak se funkce f před okamžikem měnila, resp. bude za okamžik měnit. Přirozeně, derivace funkce existuje právě tehdy, když existují jednostranné derivace a jsou si rovny.

Přirozená substituce vede na alternativní vzorec pro výpočet $f'(a)$.

Lemma 1.0.4 (Alternativní vzorec derivace)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ a $a \in M$. Pak $f'(a)$ existuje právě tehdy, když existuje

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a v tomto případě se rovnají.

Důkaz. Dokážeme implikaci ($\Rightarrow$). Ať existuje $f'(a)$. Položme

$$F(h) \coloneqq \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

tj. $\lim_{h\to 0} F(h) = f'(a)$, a rovněž

$$g(x) = x - a.$$

Pak platí $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ a g je na okolí a prostá. Z věty o limitě složené funkce platí

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} F(h) = \lim_{x\to a} (F\circ g)(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Pro důkaz ($\Leftarrow$) předpokládejme, že existuje

$$L \coloneqq \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Položme

$$F(x) \coloneqq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

a $g(h) = h + a$. Pak $\lim_{x\to a} F(x) = L$, $\lim_{h\to 0} g(h) = a$ a g je prostá na okolí a. Opět z věty o limitě složené funkce dostaneme rovnost

$$L = \lim_{x\to a} F(x) = \lim_{h\to 0} (F\circ g)(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a),$$

což zakončuje důkaz. ■

Úloha 1.0.5 (Derivace konstantní funkce)

Ať $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in M$. Dokažte, že pak platí $f'(a) = 0$ pro každé $a \in M$.

Řešení. Platí

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{0}{x-a} = 0,$$

jak jsme chtěli. ♠

Úloha 1.0.6 (Derivace polynomu)

Ať $f(x) \coloneqq x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $f'(a) = na^{n-1}$.

Řešení. Počítáme

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x-a}.$$

Snadno ověříme, že platí

$$x^n - a^n = (x-a)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i}\right).$$

Z čehož ihned

$$\frac{x^n - a^n}{x-a} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i},$$

a tedy

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i a^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1},$$

což bylo dokázati. ♠

Cvičení 1.0.7

Dokažte, že derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0 neexistuje.

Cvičení 1.0.8

Připomeňme, že funkce *signum* je definována následovně.

$$\operatorname{sgn}(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{když } x > 0, \\ 0, & \text{když } x = 0, \\ -1, & \text{když } x < 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $\operatorname{sgn}'(0) = \infty$.

Lemma 1.0.9 (Vztah derivace a spojitosti)

*Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, $a \in M$ a existuje **konečná** $f'(a)$. Pak je f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Jelikož $f'(a)$ existuje konečná, z věty o aritmetice limit plyne, že

$$\lim_{x \to a} f'(a) \cdot (x - a) = 0.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0,$$

z čehož ihned

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

čili f je spojitá v a. ■

Varování 1.0.10

Předpoklad nejen existence, ale i **konečnosti** derivace ve znění lemmatu 1.0.9 nelze vynechat. Z cvičení 1.0.8 plyne, že $\operatorname{sgn}'(0)$ existuje, ale funkce sgn zcela jistě není v bodě 0 spojitá.

1.1 Základní poznatky o derivaci

Tato sekce shrnuje základní tvrzení, která činí z výpočtu derivací překvapivě silně algoritmický proces, přirozeně za předpokladu znalosti derivací jistých „běžných“ funkcí.

Začneme tím, jak se derivace chová vzhledem ke součtu, součinu a podílu funkcí.

Věta 1.1.1 (Aritmetika derivací)

Ať $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a $a \in M$. Pak platí

(1) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, *dává-li pravá strana smysl;*

(2) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, *dává-li pravá strana smysl, g je spojitá v a a platí $g(a) \neq 0$;*

(3) $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, *dává-li pravá strana smysl a f/g je spojitá v a.*

Důkaz. Podobně jako tomu bylo i v případě věty o aritmetice limit, je důkaz tohoto tvrzení zdlouhavý a výpočetní. Důkaz bodu (1) je triviální a bodu (2) snadný; jsou pročež přenechány čtenáři. Dokážeme bod (3).

Protože f/g je z předpokladu spojitá v a, nalezneme $\delta > 0$ takové, že g je nenulová na $B(a, \delta)$. Pro $x \in B(a, \delta)$ počítáme

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\
&= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\
&= \frac{1}{g(x)g(a)} \left((f(x) - f(a))g(a) - f(a)(g(x) - g(a)) \right).
\end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} \right) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) - f(a) \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) - \lim_{x \to a} f(a) \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) \\
&= \frac{1}{g^2(a)} \left(f'(a)g(a) - f(a)g'(a) \right),
\end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ■

Cvičení 1.1.2

Dokažte body (1) a (2) ve větě 1.1.1.

Věta 1.1.3 (Derivace inverzní funkce)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a rostoucí či klesající na I. Pak pro bod a ve vnitřku I platí:

(1) *Je-li $f'(a) \neq 0$, potom $(f^{-1})'(f(a)) = 1/f'(a)$;*

(2) *je-li $f'(a) = 0$, potom $(f^{-1})'(f(a)) = \infty$, když f je rostoucí, a $f^{-1}(f'(a)) = -\infty$, když f je klesající.*

DŮKAZ. Předpokládejme, že f je rostoucí. Pro klesající funkci lze důkaz vést obdobně.

Protože f je spojitá, je z Bolzanovy věty $J \coloneqq f(I)$ interval. Dále, ježto a leží ve vnitřku I, leží rovněž $f(a)$ ve vnitřku J. Existuje pročež $\varepsilon > 0$ takové, že $B(f(a), \varepsilon) \subseteq J$. Dále, f je rostoucí, tedy speciálně prostá, takže existuje $f^{-1} : J \to I$, která je (ze spojitosti f) rovněž spojitá.

Volme nyní $\delta > 0$ tak, aby $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$ a pro $x \in B(a, \delta)$ definujme

$$\varphi(x) \coloneqq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pak přirozeně $\lim_{x \to a} \varphi(x) = f'(a)$. Díky prostotě f^{-1} na $B(f(a), \varepsilon)$ lze díky větě o limitě složené funkce počítat

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{y \to f(a)} (\varphi \circ f^{-1})(y) \\ &= \lim_{y \to f(a)} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y \to f(a)} \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - a}. \end{aligned} \tag{$\heartsuit$}$$

Předpokládejme nejprve, že $f'(a) \neq 0$. Pak z věty o aritmetice limit platí

$$\frac{1}{f'(a)} = \lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - a}{y - f(a)} = \lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = (f^{-1})'(f(a)).$$

Nyní ať $f'(a) = 0$. Pak díky ($\heartsuit$) máme

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y \to f(a)} \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))} = 0.$$

Funkce

$$\psi(y) \coloneqq \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}$$

je na okolí $R(f(a), \varepsilon)$ kladná, neboť f^{-1} je rostoucí – a tedy $y - f(a) > 0 \iff f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a)) > 0$. Podle tvrzení **??** platí

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y \to f(a)} \frac{1}{\psi(y)} = \infty,$$

což zakončuje důkaz. ■

Úloha 1.1.4

Dokažte, že derivací funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ na intervalu $(0, \infty)$ je $x \mapsto \sqrt[n]{x}/nx$, kde $\mathbb{N} \ni n \geq 1$.

ŘEŠENÍ. Funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$ je jistě spojitá a rostoucí na $(0, \infty)$. Její inverzní funkcí je rovněž rostoucí a spojitá $f^{-1}(y) = y^n$, jejíž derivací je $(f^{-1})'(y) = ny^{n-1}$. Podle věty o derivaci inverzní funkce platí pro $x \in (0, \infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{nf^{n-1}(x)} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx},$$

jak jsme chtěli. ♠

Sekci zakončíme vztahem derivaci k extrémům původní funkce, který hraje stěžejní roli mimo jiné v optimalizačních problémech, bo často vedou na hledání minima/maxima jisté funkce.

Tvrzení 1.1.5 (Vztah derivace a extrému)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ má v $a \in M$ lokální extrém. Pak $f'(a)$ buď neexistuje, nebo je nulová.

Důkaz. Dokážeme kontrapozitivní formu tvrzení. Budeme předpokládat, že $f'(a)$ existuje a je různá od nuly. Z toho odvodíme, že f nemá v a lokální extrém.

Ať nejprve $f'(a) > 0$. Pak existuje okolí $R(a, \delta)$, na němž platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Odtud plyne, že $f(x) < f(a)$ pro $x \in (a - \delta, a)$ a $f(x) > f(a)$ pro $x \in (a, a + \delta)$, čili f nemá v a lokální extrém. Případ $f'(a) < 0$ se ošetří obdobně. ■