Ústní zkouška

z Úvodu do matematické analýzy, části prvé

Verze: 0m3g4r3kt

Přednášející: His Divine Wisdom Sir Adam Clypatch

16. února 2024

NENÍ-LI ŘEČENO JINAK, VŠECHNY POJMY A DŮKAZY FORMULUJTE PEČLIVĚ S DŮRAZEM NA FORMÁLNÍ SPRÁVNOST.

Část	Hodnocení
Základní definice	0 / 0
Lehké úlohy a důkazy	/ 6
Těžké ulohy a důkazy	/ 12

Základní definice (0 bodů)

Neznalost základních definic znamená bezpodmínečné nesložení zkoušky.

(1) Přirozená čísla.

(2) Konvergentní posloupnost.

(3) Limita posloupnosti v $\pm\infty$.

(4) Infimum a supremum.

(5) Délka intervalu.

Lehké úlohy a důkazy (6 bodů)

Pojmy užité v úlohách nemusíte definovat. Používáte-li k řešení úlohy nebo k důkazu předchozí tvrzení, zformulujte je.

(1) Trojúhelníková nerovnost.

(2) Dokažte, že když $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou posloupnosti, $\lim a = A \in \mathbb{R}$ a $\lim b = B \in \mathbb{R}$, pak

$$\lim(a + b) = A + B.$$

(3) Spočtěte

$$\lim_{n \to \infty} (\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}).$$

Těžké úlohy a důkazy (12 bodů)

Nemusíte dokonale zformulovat svá řešení. Obecná idea rozvinutá důležitými detaily postačuje.

(1) Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost a $b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost „průměrů“ posloupnosti a, tj.

$$b_n := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(a) Dokažte, že když $\lim a = 0$, pak i $\lim b = 0$. Platí i opačná implikace? Dokažte nebo uveďte protipříklad.

(b) Dokažte s použitím bodu (a), že když $\lim a = L \in \mathbb{R}$, pak rovněž $\lim b = L$.

Návod: Pro dané $\varepsilon > 0$ a $n_0 \in \mathbb{N}$, od kterého dále již platí $|a_n| < \varepsilon$, rozložte členy posloupnosti b_n na dvě složky, které lze obě seshora odhadnout číslem závislým na ε. V bodě (b) využijte faktu, že když $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, pak $\lim_{n\to\infty}(a_n - L) = 0$.

(2) Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{n!} = 0.$$

Návod:

(a) Ukažte, že posloupnost $a_n := 4^n/n!$ je klesající a zdola omezená, a tedy má z věty o konvergenci monotónních posloupností limitu.

(b) Vyjádřete a_{n+1} pomocí a_n a využijte získaného vzorce pro výpočet $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}$.