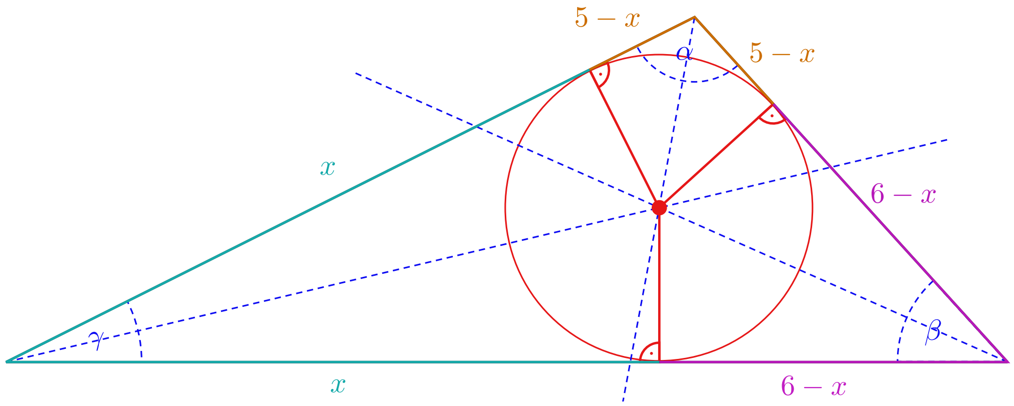

Rozkouskouvaný trojúhelník ABC.

Ty body dotyku kružnice s trojúhelníkem mi ho rozdělí na tři páry shodných pravoúhlých trojúhelníků. Protože $a = 6$ a $b = 5$, délky všech kousků stran můžu vyjádřit pomocí jedné neznámé – x. Stačí mi, když spočítám x, protože strana c měří $(5 - x) + (6 - x) = 11 - 2x$.

Použiju dvě goniometrické identity:

$$\boxed{\begin{aligned}\cot(\pi/2 - \theta) &= \tan\theta \\ \tan(\theta + \omega) &= \frac{\cot\theta + \cot\omega}{\cot\theta\cot\omega - 1}.\end{aligned}}$$

Půlky úhlů α, β, γ si označím $\overline{\alpha} \coloneqq \alpha/2$, $\overline{\beta} \coloneqq \beta/2$ a $\overline{\gamma} \coloneqq \gamma/2$. Pak

$$\cot\overline{\alpha} = \frac{5-x}{r} = \frac{5-x}{1.5}, \quad \cot\overline{\beta} = \frac{6-x}{1.5}, \quad \cot\overline{\gamma} = \frac{x}{1.5}.$$

Máme $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, takže $\overline{\alpha} + \overline{\beta} + \overline{\gamma} = \pi/2$. Dál,

$$\cot\overline{\gamma} = \cot(\pi/2 - (\overline{\alpha} + \overline{\beta})) = \tan(\overline{\alpha} + \overline{\beta}).$$

Potom,

$$\cot\overline{\gamma} = \tan(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) = \frac{\cot\overline{\alpha} + \cot\overline{\beta}}{\cot\overline{\alpha}\cot\overline{\beta} - 1}.$$

Položíme

$$y \coloneqq \cot\overline{\alpha}, \quad z \coloneqq \cot\overline{\beta}.$$

Takže dostaneme soustavu

$$\begin{aligned} y &= \frac{5-x}{1.5}, \\ z &= \frac{6-x}{1.5}, \\ \frac{y+z}{yz-1} &= \frac{x}{1.5}. \end{aligned}$$

Dosadíme za y a za z do třetí rovnice.

$$1.5\frac{\frac{5-x}{1.5}+\frac{6-x}{1.5}}{\frac{5-x}{1.5}\frac{6-x}{1.5}-1} = x.$$

Odtud

$$\frac{(1.5)^2(11-2x)}{(5-x)(6-x)-2.25} = x.$$

Po zkrášlení

$$99-18x = x(4x^2-44x+111).$$

To dá rovnici

$$4x^3-44x^2+129x-99=0.$$

Ta má řešení (podle Pythonu) 3, $4-\sqrt{31}/2$ a $4+\sqrt{31}/2$. Protože $c = 11-2x$, dostaneme, že c je 5, $3+\sqrt{31}$ nebo $3-\sqrt{31}$.