Gymnázium Evolution Jižní Město

Jakýsi úvod do matematické analýzy

Áďula vod Klepáčů

4. ledna 2024

Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předšedších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.

Obsah

Část I

Reálná čísla a limity

Kapitola 1

Posloupnosti, limity a reálná čísla

Kritickým opěrným bodem při konstrukci reálných čísel i při jejich následném studiu je pojem *limity* (v češtině se tomuto slovu přiřazuje ženský rod). Limita je bod, k němuž se zvolená posloupnost čísel „blíží“, ale nikdy jeho „nedosáhne“, pokud takový existuje. Přidruženým pojmem je třeba *asymptota* reálné funkce, se kterou se čtenáři, očekáváme, setkali.

Samotná definice limity je zpočátku poněkud neintuitivní. Vlastně i samotná představa býti něčemu „nekonečně blízko“ je do jisté míry cizí. Pokusíme se vhodnými obrázky a vysvětlivkami cestu k pochopení dláždit, avšak, jakož tomu bývá, intuice přichází, až člověk s ideou takřkouce sroste.

1.1 Definice limity posloupnosti

Koncept posloupnosti je, na rozdíl od limity, velmi triviální. Je to vlastně „očíslovaná množina čísel“. Z každé množiny lze vyrobit posloupnost jejích prvků tím, že jim přiřkneme nějaké pořadí. Tento *přírok* se nejsnadněji definuje jako zobrazení z přirozených čísel – to totiž přesně na každý prvek kodomény zobrazí jeho pořadí.

Definice 1.1.1 (Posloupnost)

Ať X je množina. *Posloupností* prvků z X nazveme libovolné zobrazení

$$a : \mathbb{N} \to X.$$

Pro úsporu zápisu budeme psát a_n místo $a(n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Navíc, je-li kodoména X zřejmá z kontextu, říkáme stručně, že $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je *posloupnost.*

Poznámka 1.1.2

Vnímaví čtenáři sobě jistě povšimli, že jsme na $\mathbb{N}$ nedefinovali žádné *uspořádání.* Ačkolivěk není tímto definice posloupnosti formálně nijak postižena, neodpovídá přirozenému vnímání, že prvek s číslem 1 stojí před prvkem s číslem 5 apod.

Naštěstí, naše konstruktivní definice přirozených čísel nabízí okamžité řešení. Využijeme toho, že každé přirozené číslo je podmnožinou svého následníka, a definujeme zkrátka uspořádání $\leq$ na $\mathbb{N}$ předpisem

$$a \leq b \overset{\text{def}}{\iff} a \subseteq b.$$

Fakt, že $\subseteq$ je uspořádání, okamžitě implikuje, že $\leq$ je rovněž uspořádání.

Rozmyslíme si nyní dva pojmy pevně spjaté s posloupnostmi – *konvergence* a *limita*. Brzo si též ukážeme, že tyto dva pojmy jsou záměnné, ale zatím je vnímáme odděleně. Navíc, budeme se odteď soustředit speciálně na posloupnosti racionálních čísel, tj. zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, neboť jsou oním klíčem k sestrojení své reálné bratří.

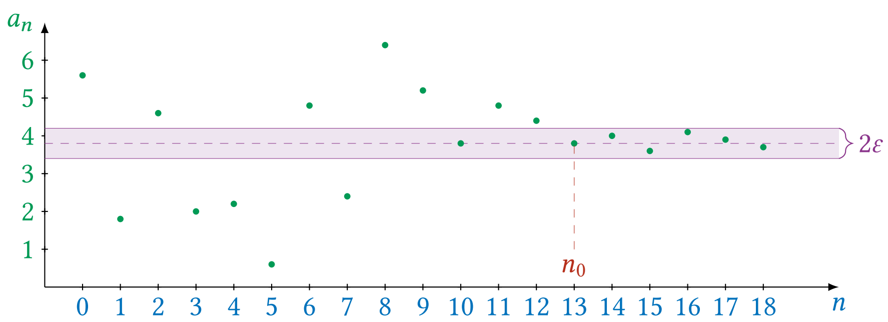
Ze všech posloupností $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ nás zajímá jeden konkrétní typ – posloupnosti, vzdálenosti mezi jejichž prvky se postupně zmenšují. Tyto posloupnosti, nazývané *konvergentní* (z lat. con-vergere, „ohýbat k sobě"), se totiž vždy blíží k nějakému konkrétnímu bodu – ke své *limitě*. Představa ze života může být například následující: říct, že se blížíme k nějakému místu, je totéž, co tvrdit, že se vzdálenost mezi námi a oním místem s každým dalším krokem zmenšuje. V moment, kdy své kroky směřujeme stále stejným směrem, posloupnost vzdáleností mezi námi a tím místem tvoří konvergentní posloupnost. Jestliže se pravidelně odkláníme, k místu nikdy nedorazíme a posloupnost vzdáleností je pak *divergentní* (tj. **ne**konvergentní).

Do jazyka matematiky se věta „vzdálenosti postupně zmenšují" překládá obtížně. Jeden ne příliš elegantní, ale výpočetně užitečný a celkově oblíbený způsob je následující: řekneme, že prvky posloupnosti jsou k sobě stále blíž, když pro jakoukoli vzdálenost vždy dokážeme najít krok, od kterého dál jsou již k sobě dva libovolné prvky u sebe blíž než tato daná vzdálenost. Důrazně vyzýváme čtenáře, aby předchozí větu přečítali tak dlouho, dokud jim nedává dobrý smysl. Podobné formulace se totiž vinou matematickou analýzou a jsou základem uvažování o nekonečnu.

Definice 1.1.3 (Konvergentní posloupnost)

Řekneme, že posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je *konvergentní*, když platí výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$



Obrázek 1.1: Konvergentní posloupnost. Zde pro $\varepsilon = 0.2$ lze volit například $n_0 = 13$. Vodorovná přímka procházející bodem a_{n_0} je vlastně „středem" pruhu o šíři 2ε, ve kterém se nacházejí všechny členy posloupnosti s pořadím vyšším než 13.

Poznámka 1.1.4

Radíme, aby se čtenáři sžili s intuitivním (přesto velmi přesným) ponětím absolutní hodnoty $|x - y|$ jako *vzdálenosti* mezi čísly x a y. V tomto smyslu je pak $|x| = |x - 0|$ vzdálenost čísla x od čísla 0, což cele odpovídá definici tohoto symbolu.

Poznámka 1.1.5

Aplikujeme intuitivní vysvětlení *zmenšování vzdálenosti* z odstavce nad definicí 1.1.3 na jeho skutečnou definici.

Výrok
$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$$
říká, že pro jakoukoli vzdálenost (ε) dokáži najít krok (n_0) takový, že vzdálenost dvou prvků v libovolných dvou následujících krocích (m, n) už je menší než daná vzdálenost ($|a_n - a_m| < \varepsilon$).

Slovo „krok“ je třeba vnímat volně – myslíme pochopitelně *pořadí* či *indexy* prvků v posloupnosti. Pohled na racionální posloupnosti jako na „kroky“ činěné v racionálních číslech může být ovšem užitečný.

Cvičení 1.1.6

Dokažte, že posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je konvergentní právě tehdy, když
$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < C\varepsilon$$
pro libovolnou **kladnou** konstantu $C \in \mathbb{Q}$.

Pojem *limity*, představuje jakýsi bod, k němuž se posloupnost s každým dalším krokem přibližuje, je vyjádřen výrazem podobného charakteru. Zde však přichází na řadu ona *děravost* racionálních čísel. Může se totiž stát, a příklady zde uvedeme, že limita racionální posloupnosti není racionální číslo.

Učiňmež tedy dočasný obchvat a před samotnou definicí limity vyrobme reálná čísla jednou z přehoušlí možných cest.

Ať $C(\mathbb{Q})$ značí množinu všech **konvergentních** racionálních posloupností. Uvažme ekvivalenci $\simeq$ na $C(\mathbb{Q})$ danou
$$a \simeq b \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon.$$

Přeloženo do člověčtiny, $a \simeq b$, právě když se rozdíl mezi prvky těchto posloupností se stejným pořadím neustále zmenšuje – řekli bychom, že se *blíží k nule*. V rámci (zatím intuitivní) představy, že konvergentní posloupnosti se blíží k nějakému bodu, dává smysl ztotožňovat posloupnosti, které se blíží k bodu *stejnému* – stav, který vyjadřujeme tak, že se jejich rozdíl blíží k nule.

Ve výsledku budeme definovat reálná čísla jako limity všech možných konvergentních racionálních posloupností. Pozbývajíce leč aparátu, bychom koncepty limity a konvergence stmelili v jeden, jsme nuceni učinit mezikrok.

Definice 1.1.7 (Reálná čísla)

Množinu *reálných čísel* tvoří všechny třídy ekvivalence konvergentních racionálních posloupností podle $\simeq$. Symbolicky,

$$\mathbb{R} \coloneqq \{[a]_{\simeq} \mid a \in C(\mathbb{Q})\}.$$

Nyní definujeme pojem limity. Nemělo by snad být příliš překvapivé, že se od definice konvergence příliš neliší. Významný rozdíl odpočívá pouze v předpokladu existence *cílového bodu.*

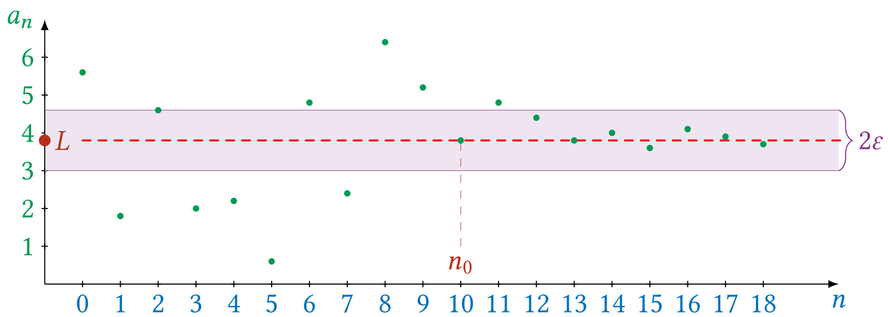
Definice 1.1.8 (Limita posloupnosti)

Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je posloupnost. Řekneme, že a *má limitu* $L \in \mathbb{R}$, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - L| < \varepsilon,$$

neboli, když jsou prvky a_n bodu L s každým krokem stále blíž.

Fakt, že $L \in \mathbb{R}$ je limitou a značíme jako $\lim a = L$.



Obrázek 1.2: Posloupnost s limitou L. Zde pro $\varepsilon = 0.4$ lze volit například $n_0 = 10$. Vodorovná přímka procházející bodem L je vlastně „středem“ pruhu o šíři 2ε, ve kterém se nacházejí všechny členy posloupnosti s pořadím vyšším než 10.

1.2 Limity konvergentních posloupností

V této sekci dokážeme, že konvergentní posloupnosti mají limitu. Opačná implikace, tj. že posloupnosti jmající limitu konvergují, je téměř triviální. K jejímu důkazu potřebujeme jen jednu vlastnost absolutní hodnoty.

Lemma 1.2.1 (Trojúhelníková nerovnost)

Ať $x, y \in \mathbb{Q}$. Pak

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Důkaz. Absolutní hodnota $|x + y|$ je rovna buď $x + y$ (když $x + y \geq 0$) nebo $-x - y$ (když $x + y < 0$). Zřejmě $x \leq |x|$ a $-x \leq |x|$, podobně $y \leq |y|$ a $-y \leq |y|$.

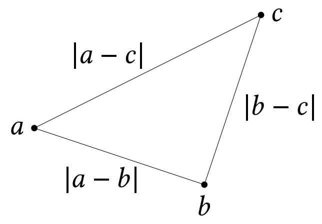
Pak je ale $x + y \leq |x| + |y|$ a též $-x + (-y) \leq |x| + |y|$. Tím je důkaz hotov. ∎

Poznámka 1.2.2

Název *trojúhelníková* obvykle přiřazovaný nerovnosti 1.2.1 vyplývá z její přirozené geometrické interpretace. Ať a, b, c jsou body v rovině. Dosazením $x = a - b$, $y = b - c$, dostává nerovnost 1.2.1 tvar

$$|a - c| \le |a - b| + |b - c|,$$

tj. vzdálenost a od c je nanejvýš rovna součtu vzdáleností a od b a b od c pro libovolný bod b. Vizte obrázek 1.3.



Obrázek 1.3: Trojúhelníková nerovnost

Trojúhelníková nerovnost poskytuje snadné důkazy mnoha užitečných dílčích tvrzení o posloupnostech. Příkladem je následující cvičení.

Cvičení 1.2.3 (Jednoznačnost limity)

Dokažte, že každá posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ má nejvýše jednu limitu. Hint: použijte trojúhelníkovou nerovnost.

Ježto bychom však rádi dokazovali všechna tvrzení již pro reálná čísla, ukažme si nejprve, jak se dají sčítat a násobit. Dokážeme rovněž, že $\mathbb{R}$ – stejně jako $\mathbb{Q}$ – tvoří těleso. Začneme tím, že se naučíme sčítat a násobit konvergentní posloupnosti.

Ať $a, b \in C(\mathbb{Q})$ jsou dvě konvergentní racionální posloupností. Operace $+$ a $\cdot$ na $C(\mathbb{Q})$ definujeme velmi přirozeně. Zkrátka, $(a + b)(n) \coloneqq a(n) + b(n)$ a $(a \cdot b)(n) \coloneqq a(n) \cdot b(n)$, tj. prvek na místě n posloupnosti $a + b$ je součet prvků na místech n posloupností a a b. Abychom ovšem získali skutečně operace na $C(\mathbb{Q})$, musíme ověřit, že $a + b$ i $a \cdot b$ jsou konvergentní.

Nechť dáno jest $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že umíme najít $n_0 \in \mathbb{N}$, aby

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| < \varepsilon,$$

kdykoli $m, n \ge n_0$. Protože jak a tak b konverguje, již umíme pro libovolná $\varepsilon_a, \varepsilon_b > 0$ najít n_a a n_b taková, že $|a_n - a_m| < \varepsilon_a$, kdykoli $m, n \ge n_a$, a podobně $|b_n - b_m| < \varepsilon_b$, kdykoli $m, n \ge n_b$. Položme tedy $\varepsilon_a = \varepsilon_b \coloneqq \varepsilon/2$ a $n_0 \coloneqq \max(n_a, n_b)$. Potom můžeme užitím trojúhelníkové nerovnosti pro $m, n \ge n_0$ odhadnout

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| = |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)| \le |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon,$$

čili $a + b$ konverguje.

Předchozí odstavec se může snadno zdát šílenou směsicí symbolů. Ve skutečnosti však formálně vykládá triviální úvahu. Máme najít pořadí, od kterého jsou prvky součtu $a + b$ u sebe blíž než nějaká daná vzdálenost. Poněvadž a i b konvergují, stačí přeci vzít větší z pořadí, od kterých je jak rozdíl prvků a, tak rozdíl prvků b, menší než polovina dané vzdálenosti.

Velmi obdobnou manipulaci lze provést k důkazu konvergence $a \cdot b$. Ponecháváme jej čtenářům jako (ne zcela snadné) cvičení.

Cvičení 1.2.4

Dokažte, že jsou-li a, b konvergentní posloupnosti racionálních čísel, pak je posloupnost $a \cdot b$ rovněž konvergentní. Kromě trojúhelníkové nerovnosti je zde třeba použít i zatím nedokázané lemma 1.2.10.

Racionální čísla jsou přirozeně součástí reálných prostřednictvím zobrazení

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{Q} &\hookrightarrow \mathbb{R}, \\ q &\mapsto [(q)], \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde (q) značí posloupnost $a : n \mapsto q$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $[(q)]$ její třídu ekvivalence podle $\simeq$.

Varování 1.2.5

Tvrdíme pouze, že $\mathbb{Q}$ jsou *součástí* $\mathbb{R}$, kde slovu *součást* záměrně není dán rigorózní smysl. Racionální čísla totiž (aspoň po dobu naší dočasné definice reálných čísel) nejsou v žádném smyslu podmnožinou čísel reálných.

Matematici ale často ztotožňujeme doménu prostého zobrazení s jeho obrazem (neboť mezi těmito množinami vždy existuje bijekce). V tomto smyslu mohou být $\mathbb{Q}$ vnímána jako podmnožina $\mathbb{R}$, ztotožníme-li racionální čísla s obrazem zobrazení ξ z (1.1). Toto ztotožnění znamená vnímat racionální číslo $q \in \mathbb{Q}$ jako konvergentní posloupnost samých čísel q.

Cvičení 1.2.6

Dokažte, že zobrazení ξ z (1.1) je

- dobře definované – tzn. že když $p = q$, pak $[(p)] = [(q)]$ – a
- prosté.

Jelikož $\mathbb{Q}$ je těleso, speciálně tedy obsahuje 0 a 1, $\mathbb{R}$ je (prostřednictvím ξ z (1.1)) obsahuje rovněž. Pro stručnost budeme číslem $0 \in \mathbb{R}$ značit třídu ekvivalence posloupnosti samých nul a číslem $1 \in \mathbb{R}$ třídu ekvivalence posloupnosti samých jednotek. Ověříme, že se skutečně jedná o neutrální prvky ke sčítání a násobení.

Je třeba si rozmyslet, že pro každou posloupnost $a \in C(\mathbb{Q})$ platí $a + 0 = a$ a $a \cdot 1 = a$, kde, opět, čísla 0 a 1 ve skutečnosti znamenají nekonečné posloupnosti těchto čísel. Obě rovnosti jsou však zřejmé z definice, neboť $(a + 0)(n) = a_n + 0 = a_n = a(n)$ a $(a \cdot 1)(n) = a_n \cdot 1 = a_n = a(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Konečně, rozšíříme rovněž $-$ a $^{-1}$ na $\mathbb{R}$. Pro libovolnou posloupnost $x \in C(\mathbb{Q})$ definujeme zkrátka $(-a)(n) \coloneqq -a(n)$. S $^{-1}$ je situace lehce komplikovanější. Totiž, pouze **nenulová** racionální čísla mají svůj inverz k násobení. Zde je třeba zpozorovat, že **konvergentní** posloupnost, která by však měla nekonečně mnoho prvků nulových, už musí mít od nějakého kroku **všechny** prvky nulové, jinak by totiž nemohla konvergovat. Vskutku, představme si, že a je posloupnost taková, že $a_n = 0$ pro nekonečně mnoho přirozených čísel $n \in \mathbb{N}$. Pak ale ať zvolím $n_0 \in \mathbb{N}$ jakkoliv, vždy existuje $m \geq n_0$ takové, že $a_m = 0$. Vezměme $n \geq n_0$ libovolné. Pokud $a_n \neq 0$, pak můžeme vzít třeba

$\varepsilon \coloneqq |a_n|/2$ a bude platit, že $|a_n - a_m| > \varepsilon$, což je dokonalý zápor definice konvergence. Z toho plyne, že a_n musí být 0 pro $n \geq n_0$ a odtud dále, že $a \simeq 0$. Čili, pouze posloupnosti ekvivalentní nulové posloupnosti nemají v $\mathbb{R}$ inverz vzhledem k $\cdot$.

Právě provedená úvaha nám umožňuje definovat $^{-1}$ pro posloupnosti $a \in C(\mathbb{Q})$ takové, že $a \not\simeq 0$, následovně:

$$(a^{-1})(n) \coloneqq \begin{cases} a(n)^{-1}, & \text{když } a(n) \neq 0, \\ 0, & \text{když } a(n) = 0. \end{cases}$$

Je snadné uvidět, že $-a$ je inverzem k a vzhledem k $+$ a a^{-1} je inverzem k $a \not\simeq 0$ vzhledem k $\cdot$. Vskutku, máme

$$(a + (-a))(n) = a_n + (-a_n) = 0,$$

tedy v tomto případě je $(a + (-a))$ přímo **rovna** nulové posloupnosti. V případě $^{-1}$ dostáváme pro $a \not\simeq 0$

$$(a \cdot a^{-1})(n) = \begin{cases} a_n \cdot a_n^{-1} = 1, & \text{když } a_n \neq 0, \\ a_n \cdot 0 = 0, & \text{když } a_n = 0. \end{cases}$$

Ergo, $a \cdot a^{-1}$ je rovna posloupnosti samých jedniček, až na konečně mnoho nul, protože, jak jsme si již rozmysleli, a nemůže mít nekonečně 0 a zároveň nebýt v relaci $\simeq$ s nulovou posloupností, jinak by nebyla konvergentní. To však přesně znamená, že $a \cdot a^{-1} \simeq 1$, čili $[a] \cdot [a^{-1}] = [1]$.

Shrneme-li řád předchozích úvah, získáme oprávnění tvrdit, že

$$(\mathbb{R}, +, -, [(0)], \cdot, ^{-1}, [(1)])$$

je těleso. Tento fakt je do budoucna pochopitelně zásadní; teď se však můžeme těšit znalostí, že jsme přechodem od $\mathbb{Q}$ k $\mathbb{R}$ neztratili symetrické rysy původní množiny.

Přikročmež již však k důkazu existence limity každé konvergentní posloupnosti. Fakt, že existence limity implikuje konvergenci, plyne přímo z trojúhelníkové nerovnosti.

Lemma 1.2.7

Každá posloupnost majíc limitu je konvergentní.

Důkaz. Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je posloupnost s limitou L. Pak pro každé $\varepsilon_L > 0$ existuje $n_L \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - L| < \varepsilon_L$ pro všechna $n \geq n_L$.

Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pro všechna m, n větší než vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme tedy $n_0 \coloneqq n_L$ a $\varepsilon_L \coloneqq \varepsilon/2$. Potom pro všechna $m, n \geq n_0 = n_L$ máme

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_n - L + L| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < \varepsilon_L + \varepsilon_L = \varepsilon,$$

čili a konverguje. ∎

1.2.1 Úplnost reálných čísel

K důkazu existence limity každé konvergentní posloupnosti potřebujeme prozpytovat vztah racionálních a reálných čísel podrobněji. Konkrétně potřebujeme ukázat, že $\mathbb{Q}$ jsou tzv. *hustá* v $\mathbb{R}$, tj.

že ke každému reálnému číslu existuje racionální číslo, které je mu nekonečně blízko. Zde jsme opět implicitně ztotožnili racionální čísla s třídami ekvivalence konstantních posloupností. Na základě toho budeme totiž moci tvrdit, že reálná čísla jsou tzv. *úplná*, což přesně znamená, že každá konvergentní posloupnost reálných čísel má reálnou limitu.

Nejprve si ovšem musíme rozmyslet, co vlastně míníme posloupností *reálných* čísel. Pochopitelně, zobrazení $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ poskytuje validní definici, ale uvědomme sobě, že teď vlastně uvažujeme posloupnosti, jejichž prvky jsou třídy ekvivalence konvergentních racionálních posloupností.

Abychom směli hovořit o konvergentních *reálných* posloupnostech, rozšíříme absolutní hodnotu $|\cdot|$ z $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ zkrátka předpisem $|[(x_n)]| \coloneqq [(|x_n|)]$ pro $(x_n) \in C(\mathbb{Q})$. Napíšeme-li tedy $|x| \leq K$ pro reálná čísla $x, K \in \mathbb{R}$, pak tím doslova myslíme $[(|x_n|)] \leq [(K_n)]$, což ale **neznamená** $|x_n| \leq K_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, kde x_n, K_n jsou nyní již čísla ryze rozumná čili racionální, anobrž $|x_n| > K_n$ jen pro **konečně mnoho** $n \in \mathbb{N}$.

Varování 1.2.8

Důležitá myšlenka, jíž je dlužno snovat v srdci při práci s třídami ekvivalence konvergentních posloupností, je ta, že při porovnávání dvou tříd nás nezajímá libovolný **konečný počet** jejich prvních prvků.

Například, vztah $x = y$ pro $x, y \in \mathbb{R}$ znamená, že $x_n = y_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ až na libovolný konečný počet prvních přirozených čísel. To se lépe vyjadřuje pomocí negace. Je snazší říct, že $x = y$, když $x_n \neq y_n$ pro jenom konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$.

Rozepíšeme-li si tedy podrobně, co znamená, že je posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergentní, dostaneme pro dané $\varepsilon > 0$, vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$ a $m, n \geq n_0$ nerovnost $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Ovšem, x_n i x_m jsou samy o sobě třídy ekvivalence konvergentních **posloupností** racionálních čísel, tedy poslední nerovnost plně rozepsána dí

$$|[((x_n)_k - (x_m)_k)_{k=0}^{\infty}]| < \varepsilon,$$

což lze rovněž vyjádřit tak, že

$$|(x_n)_k - (x_m)_k| \geq \varepsilon$$

jen pro konečně mnoho $k \in \mathbb{N}$.

Nepřináší však žádný hmotný užitek nad konvergencí reálných posloupností uvažovat takto složitě. Čtenáři dobře učiní, uvědomí-li si plný význam předchozího odstavce, ovšem zůstanou-li věrni intuitivnímu vnímání výrazu $|x - y|$ jako „vzdálenosti“ čísel x a y.

Definice 1.2.9 (Omezená posloupnost)

Řekneme, že posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je *omezená*, když existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $|x_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Píšeme $|x| \leq K$.

Lemma 1.2.10

Každá konvergentní posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je omezená.

Důkaz. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Z definice konvergence nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \geq n_0$ je $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Speciálně tedy pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < \varepsilon + |x_{n_0}|,$$

tudíž všechny členy posloupnosti s pořadím větším než n_0 jsou omezeny číslem $\varepsilon + |x_{n_0}|$. Ovšem, členů posloupnosti s pořadím menším než n_0 je konečně mnoho, a tedy z nich můžeme vzít ten největší – nazvěme ho s. Položíme-li $K \coloneqq \max(s, \varepsilon + |x_{n_0}|)$, pak $|x_n| \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, čili x je omezená číslem K. ■

Tvrzení 1.2.11 (Hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)

Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, tj. ke každému $x \in \mathbb{R}$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $r \in \mathbb{Q}$ takové, že $|x - r| < \varepsilon$.

Důkaz. Ať $\varepsilon > 0$ je dáno a označme $x \coloneqq [(x_n)]$, $(x_n) \in C(\mathbb{Q})$. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m, n \geq n_0$ je $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Zvolme $r \coloneqq x_{n_0} \in \mathbb{Q}$. Pak ovšem máme

$$|x_n - r| = |x_n - x_{n_0}| < \varepsilon$$

pro všechna $n \geq n_0$. To přesně znamená, že $|x - r| < \varepsilon$. ■

Lemma 1.2.12

Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Pak $\lim a = [(a)]$.

Důkaz. Položme $x \coloneqq [(a)]$. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Protože a je konvergentní, nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq n_0$. Potom ale $|a_n - x| < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$, což z definice znamená, že $\lim a = x$. ■

Důsledek 1.2.13 ($\mathbb{R}$ jsou úplná)

Každá konvergentní reálná posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ má limitu v $\mathbb{R}$.

Důkaz. Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je racionální posloupnost taková, že $|x_n - a_n| < 1/n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tu nalezneme opakovaným použitím tvrzení 1.2.11 pro $\varepsilon \coloneqq 1/n$ a $x \coloneqq x_n$. Ukážeme nejprve, že a je konvergentní. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme n_1 takové, že $\forall m, n \geq n_1$ platí $1/m + 1/n < \varepsilon$. Dále, x je konvergentní z předpokladu. Čili, pro každé $\varepsilon_x > 0$ nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m, n \geq n_2$ máme $|x_n - x_m| < \varepsilon_x$. Volme tedy speciálně

$$\varepsilon_x \coloneqq \varepsilon - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}.$$

a $n_0 \coloneqq \max(n_1, n_2)$. Potom pro všechna $m, n \geq n_0$ platí nerovnosti

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| = |a_n - a_m - x_n + x_n| \leq |a_n - x_n| + |x_n - a_m| = |a_n - x_n| + |x_n - a_m - x_m + x_m| \\ \leq |a_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - a_m| < \frac{1}{n} + \varepsilon_x + \frac{1}{m} = \varepsilon, \end{aligned}$$

tedy a konverguje.

Jistě platí $\lim x - a = 0$, neboť pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \varepsilon$. Odtud plyne, že x má limitu právě tehdy, když a má limitu. Ovšem, podle lemmatu 1.2.12 má a limitu $[(a)] \in \mathbb{R}$. Tím je důkaz hotov. ■

Důsledek 1.2.14

Platí

$$\mathbb{R} \cong \{\lim a \mid a \in C(\mathbb{Q})\},$$

čili reálná čísla jsou přesně limity všech konvergentních racionálních posloupností.

Důkaz. Zkonstruujeme bijekci $f : \mathbb{R} \to \{\lim a \mid a \in C(\mathbb{Q})\}$. Vezměme $x \in \mathbb{R}$. Pak z definice existuje konvergentní racionální posloupnost $a \in C(\mathbb{Q})$ taková, že $x = [a]$. Podle lemmatu 1.2.12 má a limitu v $\mathbb{R}$. Definujme tedy $f(x) \coloneqq \lim a$.

Ověříme, že je f dobře definované, prosté a na.

Nejprve musíme ukázat, že $f(x)$ nezávisí na volbě konkrétní posloupnosti a z třídy ekvivalence $[a]$. Ať tedy $b \simeq a$ a označme $L_a \coloneqq \lim a$, $L_b \coloneqq \lim b$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ platí tři nerovnosti:

$$|a_n - b_n| < \varepsilon, \quad |a_n - L_a| < \varepsilon, \quad |b_n - L_b| < \varepsilon.$$

Velmi obdobnou úpravou jako v důkaze důsledku 1.2.13 dostaneme, že

$$|L_a - L_b| \leq |L_a - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - L_b| < 3\varepsilon,$$

odkud $L_a = L_b$, neboť L_a, L_b jsou třídy ekvivalence konvergentních posloupností. Společně s faktem, že každá konvergentní posloupnost má přesně jednu limitu (cvičení 1.2.3), plyne z předchozí úvahy, že f je dobře definováno.

Dokážeme, že f je prosté. To je snadné, neboť pokud $[a] = [b]$, neboli $a \simeq b$, potom $\lim a = \lim b$, což jsme již vlastně dokázali v odstavci výše.

Nakonec zbývá ověřit, že f je na. Ať tedy $L \coloneqq \lim a$ pro nějakou $a \in C(\mathbb{Q})$. Potom ovšem $[(a)] \in \mathbb{R}$ a podle lemmatu 1.2.12 platí $\lim a = [(a)]$. To ovšem přesně znamená, že $f([(a)]) = L$.

Tím je důkaz hotov. ■

1.3 Poznatky o limitách posloupností

Účelem této sekce je shrnout základní poznatky o limitách posloupností, jež umožní čtenářům limity konkrétních posloupností efektivně počítat a navíc široké jejich použití v následujících kapitolách.

Začneme technickým, ale nezbytným, konceptem *rozšířené reálné osy* a pokračovati budeme jedním z nejdůležitějších a dle našeho názoru též nejkrásnějších výsledků – tzv. Bolzanovou-Weierstraßovou větou. Ta tvrdí v podstatě toto: mám-li omezenou posloupnost, pak z ní již umím vybrat nekonečně mnoho prvků, které tvoří posloupnost *konvergentní.*

Ona krása takového tvrzení spočívá v principu, kterým se podrobně zabývá kombinatorická disciplína zvaná Ramseyho teorie; v principu, že v téměř libovolně chaotické struktuře lze nalézt řád, jakmile jest tato dostatečně velká. Nejedná se jistě o čistě matematický princip, nýbrž dost možná o princip vzniku vesmíru a života, popsaný již starým Aristotelem ve výmluvném výroku, „Celek je více než součet svých částí.“ V mnoha zpytech se tomuto jevu přezdívá Emergent Behavior a představuje stav, kdy chování systému nelze plně popsat pouze studiem jeho jednotlivých prvků.

Pro důkaz Bolzanovy-Weierstraßovy věty potřebujeme jedné pomocné konstrukce, tzv. *systému vnořených intervalů*. Nejprve si však pořádně definujeme samotný pojem *intervalu*. K tomu se nám bude hodit rozšířit množinu reálných čísel o prvky $-\infty$ a ∞.

1.3.1 Rozšířená reálná osa

Definice 1.3.1 (Rozšířená reálná osa)

Definujme množinu $\mathbb{R}^* \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, kde ∞, resp. $-\infty$, je z definice prvek takový, že $\infty \geq x$, resp. $-\infty \leq x$, pro každé $x \in \mathbb{R}$. Množině $\mathbb{R}^*$ budeme někdy říkat *rozšířená reálná osa*. Rozšíříme rovněž operace $+$ a $\cdot$ na prvky ∞ a $-\infty$ následovně.

$$\begin{aligned}
\infty + a = a + \infty &= \infty, && \text{pro } a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},\\
-\infty + a = a + (-\infty) &= -\infty, && \text{pro } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\\
\infty \cdot a = a \cdot \infty &= \infty, && \text{pro } a > 0 \text{ nebo } a = \infty,\\
\infty \cdot a = a \cdot \infty &= -\infty, && \text{pro } a < 0 \text{ nebo } a = -\infty,\\
-\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) &= -\infty, && \text{pro } a > 0 \text{ nebo } a = \infty,\\
-\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) &= \infty, && \text{pro } a < 0 \text{ nebo } a = -\infty,\\
a \cdot \infty^{-1} = a \cdot (-\infty)^{-1} &= 0, && \text{pro } a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Varování 1.3.2

Definice 1.3.1 stručně řečeno říká, že se s prvky ∞ a $-\infty$ zachází podobně jako s ostatními reálnými čísly. Ovšem, následující operace zůstávají nedefinovány.

$$\infty + (-\infty), -\infty + \infty, \pm\infty \cdot 0, 0 \cdot (\pm\infty), (\pm\infty) \cdot (\pm\infty)^{-1}.$$

Čtenáři možná zpozorovali, že jsme při své definici limity nerozlišili mezi posloupnostmi, které nemají limitu, protože jejich prvky „skáčou sem a tam“, a posloupnostmi, které ji nemají naopak pro to, že „stále klesají či stoupají“. Pro další studium záhodno se tohoto nedostatku zlišit.

Definice 1.3.3 (Limita v nekonečnu)

Ať $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je reálná posloupnost. Řekneme, že x má limitu ∞, resp. $-\infty$, když pro každé $K > 0, K \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $x_n > K$, resp. $x_n < -K$. Píšeme $\lim x = \infty$, resp. $\lim x = -\infty$.

Na reálných číslech existuje uspořádání $\leq$, které zdědila z čísel přirozených, prostřednictvím čísel celých a konečně čísel racionálních. Protože, vděkem naší konstrukci, jsou celá čísla třídy ekvivalence dvojic čísel přirozených, čísla racionální třídy ekvivalence dvojic čísel celých a čísla reálná limity konvergentních racionálních posloupností, bylo by vskutku obtížné a neproduktivní vypsat konkrétní množinovou definici tohoto uspořádání na reálných číslech. Přidržíme se pročež intuitivního pohledu na věc a důkaz, že $\leq$ je skutečně uspořádání na reálných číslech, necháváme laskavému čtenáři k promyšlení.

Existence uspořádání umožňuje dívat se na podmnožiny $\mathbb{R}$ z jistého „souvislého“ pohledu. Nemusejí již být vňaty (jako tomu je u ostatních představených číselných okruhů) jako výčty jednotlivých prvků, ale oprávněně jako „provázky“ či „úsečky“. Úplnost reálných čísel zaručuje, že z každého reálného čísla mohu plynule dorazit do každého jiného reálného čísla aniž reálná čísla opustím.

Předchozí odstavec vágně motivuje definici *intervalu* – „souvislé“ omezené podmnožiny reálných čísel. V souhlasu s definicí intervalu vzniká i pojem *otevřenosti* a *uzavřenosti* množiny – pojem, který je klíčem k definici *topologie* na obecné množině a tím pádem vlastně i základem tak zhruba poloviny celé moderní matematiky.

Směrem k definici intervalu učiňmež koliksi mezikroků.

Definice 1.3.4 (Maximum a minimum)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina. Řekneme, že prvek $M \in X$, resp. $m \in X$, je *maximem*, resp. *minimem*, množiny X, když pro každé $x \in X$ platí $x \leq M$, resp. $x \geq m$. Píšeme $M = \max X$, resp. $m = \min X$.

Definice 1.3.5 (Horní a dolní závora)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina. Řekneme, že prvek $Z \in \mathbb{R}^*$ resp. $z \in \mathbb{R}^*$, je *horní*, resp. *dolní*, *závora* množiny X, když pro každé $x \in X$ platí $x \leq Z$, resp. $x \geq z$.

Má-li množina X horní, resp. dolní, závoru, **která leží v** $\mathbb{R}$ (tedy není rovna $\pm\infty$), říkáme, že je *shora*, resp. *zdola*, *omezená*. Je-li navíc X omezená shora i zdola, říkáme krátce, že je *omezená*.

Definice 1.3.6 (Supremum a infimum)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina. Řekneme, že prvek $S \in \mathbb{R}^*$, resp. $i \in \mathbb{R}^*$, je *supremum*, resp. *infimum*, množiny X, když je to její *nejmenší horní závora*, resp. *největší dolní závora*. Píšeme $S = \sup X$, resp. $i = \inf X$.

Vyjádřeno symbolicky, prvek $S \in \mathbb{R}$ je *supremem* množiny X, když $x \leq S$ pro všechna $x \in X$, a kdykoli $x \leq Z$ pro nějaký prvek $Z \in \mathbb{R}$ a všechna $x \in X$, pak $S \leq Z$. Prvek $i \in \mathbb{R}$ je *infimem* množiny X, když $x \geq i$ pro všechna $x \in X$, a kdykoli $x \geq z$ pro nějaký prvek $z \in \mathbb{R}$ a všechna $x \in X$, pak $i \geq z$.

Varování 1.3.7

Vřele radíme čtenářům, aby sobě bedlivě přečetli předchozí tři definice a uvědomili si – velmi zásadní, leč lehko přehlédnuté – jejich vzájemné rozdíly.

- Maximum a minimum množiny X je z definice **vždy prvkem této množiny**. Maximem množiny $\{1, 2, 3\}$ je prvek 3 a jeho minimem je prvek 1.
- Horní, resp. dolní, závora množiny X je **libovolné rozšířené reálné číslo** (tedy klidně

i $\pm\infty$), které je větší, resp. menší, než všechny prvky X. Horní závorou množiny $\{1, 2, 3\}$ je číslo 69, též ∞ a též číslo 3. Horní a dolní závora **může, ale nemusí**, být prvkem X.

- Supremum, resp. infimum, množiny X je **rozšířené reálné číslo**, které je větší, resp. menší, než všechny prvky X, ale **zároveň menší, resp. větší, než každá jeho horní, resp. dolní, závora**. Supremum a infimum **může, ale nemusí, ležet v množině** X. Touto vlastností se přesně rozlišují *uzavřené* a *otevřené* intervaly – interval je uzavřený, když jeho supremum v něm leží, kdežto otevřený, když nikoliževěk. Supremem množiny $\{1, 2, 3\}$ je číslo 3 a jeho infimem je číslo 1.

Daná podmnožina $X \subseteq \mathbb{R}$ **nemusí nutně mít maximum a minimum**, ale, a to si dokážeme, **má vždy supremum, resp. infimum**. Je-li navíc shora, resp. zdola, omezená, pak toto supremum, resp. infimum, leží v $\mathbb{R}$.

Cvičení 1.3.8

Určete z definice suprema a infima $\inf \emptyset$ a $\sup \emptyset$.

Cvičení 1.3.9

Dokažte, že $\sup X$ a $\inf X$ jsou určeny jednoznačně.

Axiomatická definice reálných čísel

Přestože jsme konstrukci reálných čísel úspěšně dokončili použitím konvergentních racionálních posloupností, stojí snad za zmínku i jejich axiomatická definice, která se obvykle uvádí v úvodních učebnicích matematické analýzy.

Překvapivě není v principu tak odlišná od jejich konstrukce, kromě jednoho konkrétního axiomu, jenž právě zaručuje úplnost; není z něj však vůbec na první, v zásadě ani na druhý, pohled vidno, že takovou vlastnost skutečně implikuje.

Definice 1.3.10 (Axiomatická definice reálných čísel)

Množina $\mathbb{R}$ se v zásadě definuje jako nekonečné uspořádané těleso s vlastností úplnosti. Tedy,

- existují prvky $0, 1 \in \mathbb{R}$ a operace $+, \cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s inverzy $-, ^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že
$$(\mathbb{R}, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1)$$
je nekonečné těleso;
- existuje uspořádání $\leq$ na $\mathbb{R}$, které je lineární (každé dva prvky lze spolu porovnat);
- (**axiom úplnosti**) každá shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Je to právě on poslední axiom v předchozí definici, jehož použití jsme se chtěli vyhnout, bo dohlédnout jeho hloubky je obtížné a neintuitivní.

Dokážeme si zde ovšem, že naše definice reálných čísel odpovídá jejich axiomatické. Otázky nekonečnosti, podmínek tělesa i uspořádání jsme již zodpověděli. Zbývá dokázat axiom úplnosti. Pro stručnost vyjádření se nám bude hodit následující definice.

Definice 1.3.11 (Monotónní posloupnost)

O posloupnosti $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ řekneme, že je

- *rostoucí*, když $x_{n+1} > x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *klesající*, když $x_{n+1} < x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *neklesající*, když $x_{n+1} \geq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *nerostoucí*, když $x_{n+1} \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ve všech těchto případech díme, že posloupnost x je *monotónní*.

Tvrzení 1.3.12 (Axiom úplnosti)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je shora omezená množina. Pak existuje $\sup X$.

Důkaz. Ježto naše pojetí úplnosti se překládá do znění, „Každá konvergentní posloupnost má limitu“, není snad nečekané, že se důkaz *axiomu úplnosti* o tuto vlastnost opírá.

Je-li X prázdná, pak má supremum podle cvičení 1.3.8. Ať je tedy X neprázdná a shora omezená a $Z \in \mathbb{R}$ je libovolná horní závora X. Protože X je neprázdná, existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že $q < x$ pro nějaké $x \in X$. Definujeme posloupnosti Z_n a q_n podle následujících pravidel.

- Položme $Z_0 \coloneqq Z$ a $q_0 \coloneqq q$.
- Uvažme číslo $p_n \coloneqq (Z_n + q_n)/2$.
- Je-li p_n horní závorou X, položme $Z_{n+1} \coloneqq p_n$ a $q_{n+1} \coloneqq q_n$.
- Není-li p_n horní závorou X, položme $Z_{n+1} \coloneqq Z_n$ a $q_{n+1} \coloneqq p_n$.

Pak jsou posloupnosti Z_n a q_n konvergentní (**proč?**) a indukcí lze snadno dokázat (**dokažte!**), že q_n **není** horní závorou X a Z_n **je** horní závorou X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Navíc platí $\lim |Z_n - q_n| = 0$ (**proč?**), a tedy $\lim Z_n = \lim q_n$.

Označme $S \coloneqq \lim Z_n = \lim q_n$. Dokážeme, že $S = \sup X$. Je třeba ukázat, že

(1) S je horní závorou X;

(2) S je nejmenší horní závorou.

Předpokládejme pro spor, že existuje $x \in X$ takové, že $x > S$. To znamená, že existuje konstanta $c > 0$ taková, že $x - S = c$. Volme $\varepsilon \coloneqq c/2$. Pro toto ε z definice limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|Z_n - \lim Z_n| = |Z_n - S| < \varepsilon$. Jelikož (Z_n) je nerostoucí a $S \leq Z_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je absolutní hodnota v předchozím výrazu zbytečná a můžeme zkrátka psát $Z_n - S < \varepsilon$. Potom ale pro všechna $n \geq n_0$ máme

$$x - Z_n = x + S - S - Z_n = (x - S) + (S - Z_n) > c - \varepsilon = \frac{c}{2},$$

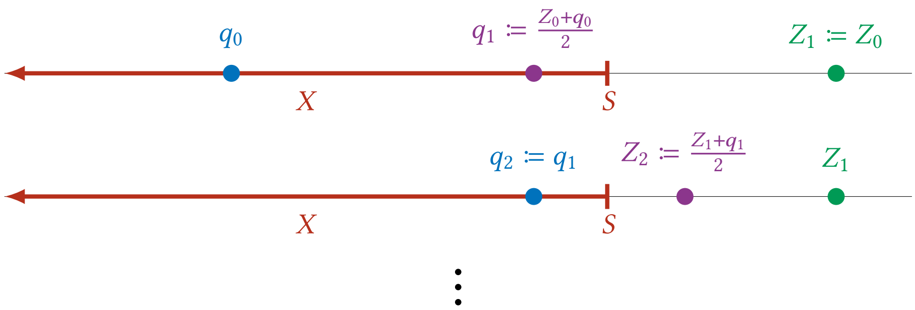
čili speciálně $x > Z_n$, což je ve sporu s tím, že Z_n je horní závora X. To dokazuje (1).

Tvrzení (2) lze dokázat obdobně, akorát využitím posloupnosti (q_n) spíše než (Z_n). Opět ať pro spor existuje $Z \in \mathbb{R}$, které je horní závorou X, a $Z < S$. Pak nalezneme konstantu $c > 0$ takovou, že $S - Z = c$. Opět z definice limity vezmeme $\varepsilon \coloneqq c/2$ a k němu $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ platí $S - q_n < \varepsilon$, kde absolutní hodnotu jsme mohli vynechat, ježto jest posloupnost (q_n) neklesající a $S \geq q_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nyní pro $n \geq n_0$ platí

$$q_n - Z = q_n - S + S - Z = (q_n - S) + (S - Z) > c - \varepsilon = \frac{c}{2},$$

čili speciálně $q_n > Z$, což je ve sporu s tím, že q_n není horní závora X pro žádné $n \in \mathbb{N}$, zatímco Z je.

Tím je důkaz dokončen. ■



Obrázek 1.4: Důkaz axiomu úplnosti

Cvičení 1.3.13

Dokažte všechna (**proč?**) a (**dokažte!**) v důkazu předchozího tvrzení.

Jako každé poctivé tvrzení, jmá i axiom úplnosti svých důsledkův. Tyto bychom pochopitelně dokázati uměli i bez něj, neboť axiom úplnosti z naší konstrukce reálných čísel přímo plyne. Nicméně, zcela jistě jej lze použít jako nástroj ke zkrácení některých důkazů.

Nejprve duální tvrzení.

Tvrzení 1.3.14

Každá zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.

Důkaz. Cvičení. Doporučujeme čtenářům se zamyslet, jak tvrzení snadno plyne z axiomu úplnosti, aniž opakují konstrukci z jeho důkazu. ■

Jedno, jak bude časem vidno, mimořádně užitečné tvrzení dí, že shora omezené rostoucí či neklesající posloupnosti a zdola omezené klesající či nerostoucí posloupnosti mají vždy limitu. To je opět intuitivně zřejmý fakt (jistě?), ale, kterak čtenáři doufáme již pozřeli, tvrzení o věcech nekonečných řídce radno nechati pouze intuici.

Lemma 1.3.15 (Limita monotónní posloupnosti)

(a) Každá rostoucí nebo neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.

(b) Každá klesající nebo nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

Důkaz. Dokážeme pouze část (a), část (b) je ponechána jako cvičení.

Ať $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je neklesající posloupnost. Důkaz pro rostoucí posloupnost je téměř dokonale stejný, liše se akorát ostrými nerovnostmi v několika výrazech. Z předpokladu je x shora omezená, tudíž má množina jejích členů $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ horní závoru. Z axiomu úplnosti má tato množina též supremum; označíme je S.

Ukážeme, že $\lim x = S$. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Z definice suprema není $S - \varepsilon$ horní závora množiny $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_{n_0} > S - \varepsilon$. Protože x je neklesající – tj. $x_n \geq x_{n_0}$, kdykoli $n \geq n_0$ – platí rovněž $x_n > S - \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$. Jelikož S je horní závora množiny členů x, platí $S \geq x_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To však znamená, že $|x_n - S| = S - x_n$, a tedy z nerovnosti $x_n > S - \varepsilon$ po úpravě plyne, že $\varepsilon > S - x_n = |x_n - S|$, čili $\lim x = S$. ■

Posledním důsledkem axiomu úplnosti, který si uvedeme, je tzv. *Archimédova vlastnost reálných čísel*. Obecně, těleso se nazývá *Archimédovo*, když vágně řečeno neobsahuje žádné nekonečně velké ani nekonečně malé prvky **vzhledem ke zvolené absolutní hodnotě**. Ukazuje se, že na reálných číslech lze definovat jen dva typy funkcí absolutní hodnoty – jednu „obvyklou“, též vyjádřitelnou vztahem $|x| = \sqrt{x^2}$, a pak tzv. p-adickou absolutní hodnotu pro p prvočíslo. Libovolná další konstrukce absolutní hodnoty (majíc přirozené vlastnosti) již je ekvivalentní absolutní hodnotě jednoho z těchto typů. Reálná čísla jsou Archimédova vzhledem k obvyklé absolutní hodnotě, ale nikoliv vzhledem k libovolné p-adické absolutní hodnotě.

Lemma 1.3.16 (Archimédova vlastnost reálných čísel)

Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *takové, že* $1/n < \varepsilon$.

Důkaz. Stačí dokázat, že

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0,$$

neboť potom z definice infima pro každé $\varepsilon > 0$ není $0 + \varepsilon = \varepsilon$ dolní závorou $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, čili existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \varepsilon$.

Číslo 0 je zřejmě dolní závorou množiny $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Podle tvrzení 1.3.14 má tato množina infimum, označme je i. Pro spor ať $i > 0$. Potom $1/i \in \mathbb{R}$ a z nerovnosti $1/n \geq i$ (i je dolní závora) plyne, že $n \leq 1/i$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom je ovšem číslo $1/i$ horní závorou množiny $\mathbb{N}$ a podle axiomu úplnosti má množina $\mathbb{N}$ supremum; označme je S. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tudíž platí $n \leq S$. Ovšem, z definice přirozených čísel platí $n + 1 \in \mathbb{N}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Speciálně toto tedy znamená, že $n + 1 \leq S$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak je ovšem $S - 1$ horní závorou množiny $\mathbb{N}$, což je spor, neboť S bylo z předpokladu supremum $\mathbb{N}$.

Musí pročež platit $i = 0$, což bylo dokázati. ■

Poznámka 1.3.17

Lemma 1.3.16 v podstatě říká, že $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Bedliví čtenáři si mohou pamatovat, že jsme ono lemma již v předchozím textu bez uvedení použili (například v důkaze důsledku 1.2.13). Jedná se však z naší strany o drzost pouze malou. Totiž, jeho platnost je téměř okamžitým důsledkem tvrzení 1.2.11, jak si čtenáři rádi ověří v následujícím cvičení.

Cvičení 1.3.18

Dokažte, že lemma 1.3.16 je důsledkem tvrzení 1.2.11.

1.3.2 Bolzanova-Weierstraßova věta

Konečně kráčíme cestou definice intervalu a důkazu slibované Bolzanovy-Weierstraßovy věty. Vybaveni pojmy maxima (minima) a suprema (infima), můžeme intuitivní představě intervalu dát formální ráz. Vágně řečeno je interval *souvislá* podmnožina $\mathbb{R}$. Formálně je no … vlastně totéž.

Definice 1.3.19 (Interval)

Podmnožinu $I \subseteq \mathbb{R}$ nazveme *intervalem*, pokud pro každé dva prvky $x < y \in I$ a $z \in \mathbb{R}$ platí

$$x < z < y \Rightarrow z \in I.$$

Intervaly mohou být otevřené, uzavřené a polouzavřené (či polootevřené?). Tyto vlastnosti intervalů jsou definovány pomocí existence maxim a minim.

Definice 1.3.20 (Typy intervalů)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že I je

- *otevřený*, když **nemá** maximum ani minimum;
- *uzavřený*, když **má** maximum i minimum;
- *shora uzavřený*, když má pouze maximum, ale nikoli minimum;
- *zdola uzavřený*, když má pouze minimum, ale nikoli maximum.

Otevřený interval I zapisujeme jako $I = (a, b)$, kde $a = \inf I$ a $b = \sup I$. Čísla a, b mohou být i $\pm\infty$, pokud I není shora či zdola omezený.

Uzavřený interval I zapisujeme jako $I = [a, b]$, kde $a = \min I$ a $b = \max I$. **Pozor!** Zde prvky a i b jsou striktně reálná čísla, tedy například $[0, \infty]$ **není** interval, neboť se nejedná o podmnožinu $\mathbb{R}$.

Definice 1.3.21 (Délka intervalu)

Délkou intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ s $a \coloneqq \inf I$ a $b \coloneqq \sup I$ myslíme číslo $\lambda(I) \coloneqq b-a$, je-li toto definováno.

Poznámka 1.3.22

Čtenáře snad mohlo zarazit značení $\lambda(I)$ pro délku intervalu, oproti zvyku podlehnuvšímu $|I|$. Písmeno λ zde není spojeno s angl. slovem **l**ength, jak by se snad mohlo prve zdát, nýbrž pochází ze jména **L**ebesgue. Totiž, *délka* intervalu je jeho *objemem* či *velikostí* vzhledem k tzv. Lebesgueově míře – mnohem obecnější konstrukci umožňující měřit velikosti všemožných podmnožin reálných čísel.

Příklad 1.3.23 (Pár intervalů)

Množina

- $I = (4, 6)$ je otevřený interval. Zřejmě platí $4 = \inf I$ a $6 = \sup I$. Ovšem, I nemá maximum ani minimum.
- $I = [-5, 4]$ je uzavřený interval. Zřejmě platí $-5 = \min I = \inf I$ a $4 = \max I = \sup I$.
- $I = [-2, \infty)$ je zdola uzavřený interval. Platí $-2 = \min I = \inf I$ a $\infty = \sup I$.
- $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ je otevřený interval. Platí $-\infty = \inf \mathbb{R}$ a $\infty = \sup \mathbb{R}$.
- $I = (4, 4)$ je prázdná, neboť je to z definice množina čísel $x \in \mathbb{R}$ takových, že $4 < x < 4$.
- $I = [\exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4}))), \exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4})))]$ je rovna $\{\exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4})))\}$, neboť je to z definice množina čísel $x \in \mathbb{R}$ takových, že

$$\exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4}))) \leq x \leq \exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4}))).$$

K pojmu intervalu se váže jedna speciální konstrukce zvaná *systém vnořených intervalů*. Definujeme si ji a ihned poté si povíme, čím je speciální.

Definice 1.3.24 (Systém vnořených intervalů)

Systém vnořených intervalů je posloupnost $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ podmnožin $\mathbb{R}$ (čili zobrazení $\mathbb{N} \to 2^{\mathbb{R}}$) splňující následující podmínky:

- I_n je **uzavřený** interval pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- $I_{n+1} \subseteq I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- $\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$.

Následující tvrzení je dalším ekvivalentem axiomu úplnosti a důsledku 1.2.13. V některých definicích reálných čísel se jím axiom úplnosti nahrazuje.

Tvrzení 1.3.25 (O vnořených intervalech)

Ať $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ je systém vnořených intervalů. Pak $\#(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n) = 1$, čili v průniku všech intervalů I_n leží přesně jeden prvek.

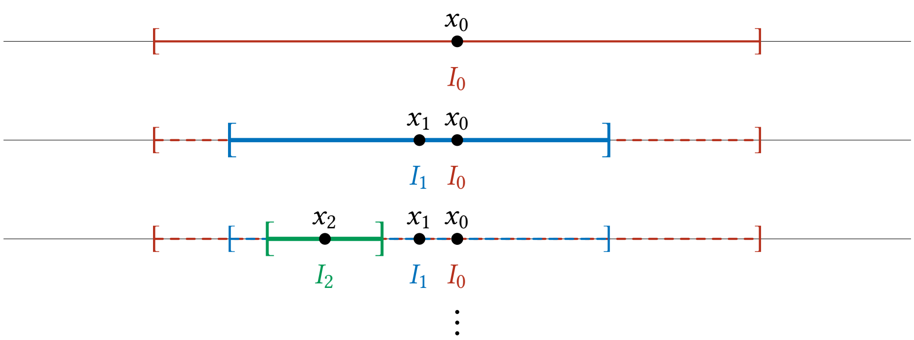
Důkaz. Je třeba dokázat, že takový prvek existuje a že je právě jeden. Začněme jednoznačností.

Předpokládejme, že existují prvky $x, y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ a $x \neq y$. Pak ale existuje konstanta $c > 0$ taková, že $|x - y| = c$. Protože však $x, y \in I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, speciálně platí $\lambda(I_n) \geq c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je spor s tím, že $\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$.

Dokážeme existenci. Označme $I_n = [a_n, b_n]$. Definujme posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x_n \coloneqq (a_n + b_n)/2$. Na volbě čísla $(a_n + b_n)/2$ není nic speciálního. Stačí volit jakékoliv $x_n \in I_n$. Ukážeme, že x konverguje. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$, nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda(I_{n_0}) < \varepsilon$. Potom ale platí $|x_n - x_m| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq n_0$, neboť $x_n, x_m \in I_{n_0}$, což je zaručeno podmínkou $I_n, I_m \subseteq I_{n_0}$.

Podle důsledku 1.2.13 má x limitu, označme ji L. Chceme ukázat, že $L \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$. K tomu je třeba ověřit, že $L \in I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ať pro spor existuje $n_L \in \mathbb{N}$ takové, že $L \notin I_{n_L}$. Protože intervaly jsou vnořené, znamená toto, že $L \notin I_n$ pro $n \geq n_L$. Volme libovolné $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_I \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda(I_n) < \varepsilon$ pro $n \geq n_I$. Ať $n_0 \coloneqq \max(n_L, n_I)$. Pak na jednu stranu pro $n \geq n_0$ platí $\lambda(I_n) < \varepsilon$ a na druhou stranu $L \notin I_n$. Sloučením obou vztahů dostaneme $|x_n - L| \geq \varepsilon/2$ pro $n \geq n_0$, neboť x_n leží v polovině intervalu I_n a L mimo něj pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je spor s tím, že $\lim x = L$.

Důkaz je hotov. ■



Obrázek 1.5: Důkaz tvrzení 1.3.25.

Definice 1.3.26 (Podposloupnost)

Řekneme, že $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je *podposloupností* posloupnosti $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, když pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $y_n = x_m$. Jinak řečeno, každý prvek y je rovněž prvkem x.

Již máme všechny ingredience k formulaci a důkazu Bolzanovy-Weierstraßovy věty. Je stěžejním tvrzením pro matematickou analýzu a pro matematiku obecně. Jeho filosofický význam dlí v poznání, že v „příliš velkých“ strukturách přirozeně vzniká řád.

Věta 1.3.27 (Bolzanova-Weierstraßova)

*Ať $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je **omezená** posloupnost. Pak existuje podposloupnost y posloupnosti x, která konverguje.*

Důkaz. Z omezenosti x existují $s, S \in \mathbb{R}$ taková, že $s \leq x_n \leq S$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Induktivně vyrobíme systém vnořených intervalů. Položme $I_0 \coloneqq [s, S]$. Za předpokladu, že $I_n = [a_n, b_n]$

je dán, sestrojíme I_{n+1} následovně:

$$I_{n+1} \coloneqq \begin{cases} [a_n, (a_n + b_n)/2], & \text{pokud } x_k \in [a_n, (a_n + b_n)/2] \text{ pro nekonečně mnoho } k \in \mathbb{N}, \\ [(a_n + b_n)/2, b_n], & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1.2}$$

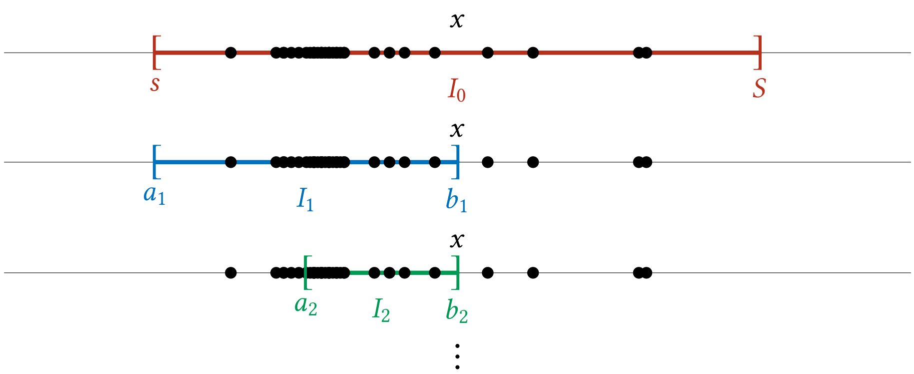
Rozmyslíme si lehce neformálním použitím matematické indukce, že tato konstrukce je korektní. První interval I_0 jistě obsahuje nekonečně mnoho prvků x, neboť obsahuje celou tuto posloupnost. Podobně, pokud I_n obsahuje nekonečně mnoho prvků x, pak aspoň jedna z jeho polovin musí rovněž obsahovat nekonečně mnoho prvků x. Z konstrukce (1.2) pak plyne, že rovněž I_{n+1} obsahuje nekonečně mnoho prvků x.

Ověříme, že $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ je systém vnořených intervalů podle definice 1.3.24.

- Zcela jistě je I_n uzavřený interval pro každé $n \in \mathbb{N}$.
- Rovněž zcela jistě $I_{n+1} \subseteq I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboť I_{n+1} je jedna z polovin intervalu I_n.
- Délky intervalů I_n klesají k 0, neboť $\lambda(I_{n+1}) = \lambda(I_n)/2$, a tedy $\lambda(I_n) = \lambda(I_0)/2^n$. Zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(I_0)}{2^n} = 0.$$

Vyberme nyní z x libovolnou podposloupnost $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takovou, že $y_n \in I_n$. To jistě lze, neboť každý z intervalů I_n obsahuje nekonečně mnoho prvků posloupnosti x. Pak ovšem podle tvrzení 1.3.25 existuje prvek $L \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ a podle důkazu téhož tvrzení platí $\lim y = L$. To však znamená, se znalostí lemmatu 1.2.7, že y konverguje. ■



Obrázek 1.6: Důkaz Bolzanovy-Weierstraßovy věty.

1.4 Metody výpočtů limit

Tato sekce je veskrze výpočetní, věnována způsobům určování limit rozličných posloupností – primárně těch zadaných vzorcem pro n-tý člen. Obecně neexistuje algoritmus pro výpočet limity posloupnosti a například limity posloupností zadaných rekurentně (další člen je vypočten jako kombinace předchozích) je často obtížné určit. K jejich výpočtu bývá užito metod z lineární algebry a obecně metod teorie diskrétních systémů zcela mimo rozsah tohoto textu.

Přinejmenším v případě limit zadaných „hezkými“ vzorci čítajícími podíly mnohočlenů a odmocnin je možné obyčejně algebraickými úpravami dojít k výsledku. Uvedeme si pár stěžejních tvrzení sloužících tomuto účelu.

K důkazu prvního bude užitečná následující nerovnost, kterou přenecháváme čtenáři jako (snadné) cvičení.

Cvičení 1.4.1

Dokažte, že pro čísla $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Věta 1.4.2 (Aritmetika limit)

Ať $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou reálné posloupnosti mající limitu (ale klidně i nekonečnou). Pak

(a) $\lim(a + b) = \lim a + \lim b$, *je-li pravá strana definována;*

(b) $\lim(a \cdot b) = \lim a \cdot \lim b$, *je-li pravá strana definována;*

(c) $\lim(a/b) = \lim a / \lim b$, *platí-li $b \neq 0$ a pravá strana je definována.*

Důkaz. Důkaz této věty je ryze výpočetního charakteru a využívá vhodně zvolených odhadů. Vzhledem k tomu, že povolujeme i nekonečné limity, je třeba důkaz každého bodu rozložit na případy. Položme $A \coloneqq \lim a$, $B \coloneqq \lim b$.

***Případ* $A, B \in \mathbb{R}$.**
Nejprve budeme předpokládat, že $A, B \in \mathbb{R}$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existují $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \geq n_a$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$ a pro každé $n \geq n_b$ zas $|b_n - B| < \varepsilon$. Zvolíme-li $n_0 \coloneqq \max(n_a, n_b)$, pak pro $n \geq n_0$ platí oba odhady zároveň. Potom ale, použitím trojúhelníkové nerovnosti, dostaneme

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

čili $\lim(a+b) = A+B$. Pro důkaz vzorce pro součin a podíl, musíme navíc využít lemmatu 1.2.10, tedy faktu, že konvergentní posloupnosti jsou omezené. Umíme tudíž najít $C_b \in \mathbb{R}$ takové, že od určitého indexu $n_1 \in \mathbb{N}$ dále platí $|b_n| \leq C_b$. Volme tedy nově $n_0 \coloneqq \max(n_a, n_b, n_1)$ a pro $n \geq n_0$ počítejme

$$\begin{aligned} |a_n \cdot b_n - A \cdot B| &= |a_n \cdot b_n - b_n \cdot A + b_n \cdot A - A \cdot B| = |b_n(a_n - A) + A(b_n - B)| \\ &\leq |b_n(a_n - A)| + |A(b_n - B)| = |b_n| \cdot |a_n - A| + |A| \cdot |b_n - B| \\ &< |C_b| \cdot \varepsilon + |A| \cdot \varepsilon. \end{aligned}$$

Protože $|C_b|$ i $|A|$ jsou konstanty nezávislé na ε, znamená toto, že $\lim(a \cdot b) = A \cdot B$. Konečně, v případě podílu volme $\varepsilon_b = |B|/2$. K tomuto ε_b nalezněme $n'_b \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n'_b$ platí $|b_n - B| < \varepsilon_b$. Poslední nerovnost spolu s cvičením 1.4.1 znamená, že $||b_n| - |B|| < \varepsilon$. Tento vztah si rozepíšeme na

$$|B| - \varepsilon_b < |b_n| < |B| + \varepsilon_b.$$

Levá z těchto nerovností je pak ekvivalentní $|b_n| > |B|/2$ neboli $1/|b_n| < 2/|B|$. Položme

$n_0 \coloneqq \max(n_a, n_b, n'_b)$. Potom pro $n \geq n_0$ máme

$$\begin{aligned}\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| &= \left|\frac{a_n B - b_n A}{b_n B}\right| = \left|\frac{a_n B - AB + AB - b_n A}{b_n B}\right| \leq \left|\frac{B(a_n - A)}{b_n B}\right| + \left|\frac{A(B - b_n)}{b_n B}\right| \\ &= \frac{1}{|b_n|}\left(|a_n - A| + \frac{|A|}{|B|}|B - b_n|\right) < \frac{2\varepsilon}{|B|}\left(1 + \frac{|A|}{|B|}\right).\end{aligned}$$

Protože $|A|$ i $|B|$ jsou konstanty nezávislé na ε, toto znamená, že $\lim(a/b) = A/B$.

Případ $A = \pm\infty, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
Předpokládejme, že $\lim a = \infty$; případ $\lim a = -\infty$ se dokáže v zásadě identicky. Pak pro dané ε_a existuje $n_a \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_a$ platí $a_n > \varepsilon_a$. Podle lemmatu 1.2.10 je posloupnost b omezená, čili existuje $C_b > 0$ takové, že $|b_n| \leq C_b$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom pro $n \geq n_a$ máme

$$a_n + b_n \geq a_n - C_b > \varepsilon_a - C_b.$$

Pro důkaz součinu nejprve ať $B > 0$. Pak existuje konstanta $K_b > 0$ a $n_b \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_b$ je $b_n \geq K_b$. Pročež, pro libovolné $C_a > 0$ a $n \geq \max(n_a, n_b)$ dostaneme

$$a_n \cdot b_n \geq \varepsilon_a \cdot K_b$$

a rovněž

$$\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{\varepsilon_a}{K_b},$$

čili $\lim(a \cdot b) = \infty$ a $\lim(a/b) = \infty$. Velmi podobně se řeší případ $B < 0$.

Zdlouhavý důkaz zakončíme komentářem, že případ $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, B = \pm\infty$ je symetrický předchozímu a případy $A = 0, B = \pm\infty$, též $A = \pm\infty, B = 0$ a konečně $A = \pm\infty, B = \pm\infty$ jsou triviální. ■

Věta o aritmetice limit je zcela nejužitečnější tvrzení k jejich výpočtu, neboť umožňuje limitu výrazu rozdělit na mnoho menších podlimit, které jsou často známy. Další dvě lemmata jsou často též k užitku.

Lemma 1.4.3 (Limita odmocniny)

Ať $a : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ je posloupnost nezáporných *čísel. Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{\lim_{n\to\infty} a_n}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Zdlouhavý a technický. Ambiciózní čtenáři jsou zváni, aby se o něj pokusili. ■

Lemma 1.4.4 (O dvou strážnících)

Ať $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou posloupnosti reálných čísel a $L \coloneqq \lim a = \lim c$. Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n \leq c_n$, pak $\lim b = L$.

Důkaz. Protože $\lim a = L$ a též $\lim c = L$, nalezneme pro dané $\varepsilon > 0$ index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že pro $n \geq n_1$ platí dva odhady:

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |c_n - L| < \varepsilon.$$

Potom ovšem $a_n > L - \varepsilon$ a $c_n < L + \varepsilon$. Z předpokladu existuje $n_b \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro $n \geq n_b$. Zvolíme-li tedy $n_0 \coloneqq \max(n_1, n_b)$, pak pro $n \geq n_0$ platí

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon.$$

Sloučením obou nerovností dostaneme pro $n \geq n_0$ odhad $|b_n - L| < \varepsilon$, čili $\lim b = L$. ■