Definujte tento pojem: *oboustranná limita funkce*.

Definujte tento pojem: *spojitost funkce v bodě*.

Definujte tento pojem: *extrém reálné funkce na intervalu*.

Definujte tento pojem: *derivace reálné funkce v bodě*.

Definujte tento pojem: *exponenciála a logaritmus*.

Definujte tento pojem: *funkce sinus a cosinus*.

Definujte tento pojem: *obecná mocnina*.

Definujte tento pojem: *Taylorův polynom daného stupně reálné funkce v bodě*.

Definujte tento pojem: *Symbol malé o*.

Definujte tento pojem: *primitivní funkce na intervalu*.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

*Ať má reálná funkce f **konečnou** limitu v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Pak je f na jistém prstencovém okolí a omezená.*

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $a \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou reálné funkce. Platí-li

$$\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x),$$

pak $f(x) > g(x)$ pro každé x z jistého prstencového okolí a.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Existují reálné funkce f, g a čísla $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, že

$$\lim_{x\to a} g(x) = A \quad a \quad \lim_{y\to A} f(y) = B,$$

ale přesto $\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) \neq B$.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Reálná funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na něm omezená.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(a)$. Pak existuje

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a je rovna $f'(a)$.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje konečná $f'(a)$. Pak je f v bodě a spojitá.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať má funkce f v bodě a extrém a ať $f'(a)$ existuje. Pak $f'(a) = 0$.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a funkce f má všude na I zápornou derivaci. Pak je f na I klesající.
***Hint**: Lagrangeova věta o střední hodnotě.*

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp' x = \exp x$.
***Hint**: Použijte rovnosti*

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y \quad a \quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Pro všechna $x, y > 0$ platí

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

***Hint**: Vlastnosti exponenciály.*

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $n \in \mathbb{N}$ a $f : M \to \mathbb{R}$ má v $a \in M$ derivace všech řádů do n včetně. Pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Hint: *Indukcí podle n užitím rovnosti $(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$.*

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Jsou-li f_1, f_2, g_1, g_2 reálné funkce a $f_1 = o(g_1), f_2 = o(g_2)$, pak $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a F, G jsou primitivní k f, g na (a,b). Pak

$$\int fG = FG - \int Fg.$$

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $a < b, \alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a,b)$ jsou reálné funkce, přičemž φ' existuje konečná na (a,b). Ať F je primitivní k f na (a,b). Pak

$$\int (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t)$$

pro $t \in (\alpha, \beta)$.

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1},$$

kde $m,n \in \mathbb{N}$.

Spočtěte derivaci následující funkce.

$$f(x) = \frac{\exp x - \exp(-x)}{\exp x + \exp(-x)}.$$

Spočtěte derivaci následující funkce.

$$f(x) = \log(\log x - 3) + \arcsin\left(\frac{x-5}{2}\right).$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}.$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x.$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \exp(-x^2/2)}{x^4}.$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}.$$

Spočtěte následující integrál.

$$\int \frac{\exp x}{2+\exp x}\, \mathrm{d}x$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

Spočtěte následující integrál.

$$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x$$

pro $x \in (-1, 1)$.

Spočtěte následující integrál.

$$\int \frac{\log^2 x}{x} \,\mathrm{d}x$$

pro $x > 0$.

Spočtěte následující integrál.

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} \,\mathrm{d}x$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

Dokažte následující tvrzení.

Ať $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce. Potom je množina

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ má v } x \text{ ostré lokální maximum}\}$$

spočetná.
***Návod**:*

(1) Z definice extrému existuje pro každé $x \in M$ okolí $P(x,\delta_x)$, na němž platí $f(y) < f(x), y \in P(x,\delta_x)$. Volme

$$M_n := \left\{x \in M \mid \delta_x > \frac{1}{n}\right\}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najděte nalezněte číslo η_n takové, že

$$M_n = \coprod_{x \in M_n} B(x,\eta_n).$$

(2) Dokažte, že M_n, jakožto disjunktní sjednocení otevřených intervalů, je spočetná.

(3) Dokažte, že M je spočetná.

Řekneme, že bod $a \in M$ je **inflexním bodem** funkce $f : M \to \mathbb{R}$, jestliže existuje konečná $f'(a)$ a $\delta > 0$ takové, že buď

$$\forall x \in (a-\delta,a) : f(x) > T_1^{f,a}(x) \quad \text{a} \quad \forall x \in (a,a+\delta) : f(x) < T_1^{f,a}(x),$$

nebo

$$\forall x \in (a-\delta,a) : f(x) < T_1^{f,a}(x) \quad \text{a} \quad \forall x \in (a,a+\delta) : f(x) > T_1^{f,a}(x).$$

Slovy: bod a je inflexním bodem f, když hodnoty f v bodech vlevo od a leží pod, resp. nad, tečnou f v bodě a a hodnoty f v bodech vpravo od a leží nad, resp. pod, tečnou f v bodě a.

Dokažte, že když a je inflexním bodem f, pak $f''(a)$ buď neexistuje nebo je rovna 0.
***Návod**: Uvažujte pro spor, že třeba $f''(a) > 0$, pak použijte definici derivace a Lagrangeovu větu o střední hodnotě, abyste ukázali, že a není inflexním bodem.*

Ať $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá a $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ má konečnou nenulovou derivaci všude na (a,b). Potom je $\varphi((a,b))$ interval; označíme jej (α,β). Položme $g(t) := (f \circ \varphi^{-1})(t) \cdot (\varphi^{-1})'(t)$ a nechť G je primitivní ke g na (α,β). Dokažte, že pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = (G \circ \varphi)(x)$$

pro $x \in (a,b)$.
***Návod**:*

(1) Použitím Darbouxovy vlastnosti (tj. vlastnosti zobrazování intervalu na interval) spojitých funkcí k důkazu, že

(a) $\varphi((a,b))$ je vskutku interval;

(b) platí buď $\varphi' > 0$ nebo $\varphi' < 0$ na celém (a,b).

(2) Dokažte, že existuje $\varphi^{-1} : (\alpha,\beta) \to (a,b)$.

(3) Zaderivujte si.
