Ústní zkouška

z Úvodu do matematické analýzy, části prvé

Verze: reKt

Přednášející: His Divine Wisdom Sir Adam Clypatch

19. ledna 2024

NENÍ-LI ŘEČENO JINAK, VŠECHNY POJMY A DŮKAZY FORMULUJTE PEČLIVĚ S DŮRAZEM NA FORMÁLNÍ SPRÁVNOST.

Část	Hodnocení
Základní definice	0 / 0
Lehké úlohy a důkazy	/ 6
Těžké ulohy a důkazy	/ 12

Základní definice (0 bodů)

Neznalost základních definic znamená bezpodmínečné nesložení zkoušky.

(1) Konvergentní racionální posloupnost (včetně definice racionální posloupnosti).

(2) Reálné číslo. Vysvětlete též, v jakém smyslu jsou $\mathbb{Q}$ podmnožinou $\mathbb{R}$.

(3) Celé číslo.

(4) Limita posloupnosti.

(5) Supremum a infimum.

Lehké úlohy a důkazy (6 bodů)

Pojmy užité v úlohách nemusíte definovat. Používáte-li k řešení úlohy nebo k důkazu předchozí tvrzení, zformulujte je.

(1) Dokažte, že relace $\sim$ na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ daná předpisem

$$(a,b) \sim (c,d) \overset{def.}{\iff} a \cdot d = b \cdot c$$

je ekvivalence a že operace + a $\cdot$ na třídách ekvivalence $\sim$ dané předpisy

$$[(a,b)]_\sim + [(c,d)]_\sim := [(a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d)]_\sim,$$
$$[(a,b)]_\sim \cdot [(c,d)]_\sim := [(a \cdot c, b \cdot d)]_\sim$$

jsou dobře definované.

(2) Dokažte, že každá konvergentní posloupnost (reálných čísel) je omezená.

(3) Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{9+n^2}{4n^2}}.$$

Uveďte všechna tvrzení, jež používáte, a ověřte jejich předpoklady.

Těžké úlohy a důkazy (12 bodů)

Nemusíte dokonale zformulovat svá řešení. Obecná idea rozvinutá důležitými detaily postačuje.

(1) Alternativní důkaz Bolzanovy-Weierstraßovy věty.

(a) Dokažte, že každá posloupnost $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ má *monotónní* podposloupnost.

i. Předpokládejte nejprve, že pro každé $m\in\mathbb{N}$ má množina $\{a_n \mid n\geq m\}$ maximum. Využijte tohoto předpokladu k sestrojení nerostoucí posloupnosti $b:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ jako posloupnosti maxim stále menších podmnožin prvků posloupnosti a. Zkuste to *induktivně*.

ii. Nyní naopak předpokládejte, že existuje $m\in\mathbb{N}$, pro které množina $\{a_n \mid n\geq m\}$ maximum nemá. V tomto případě rovněž $\{a_n \mid n\geq m'\}$ nemá maximum pro všechna $m'\geq m$. Induktivní konstrukcí velmi obdobnou té z bodu i. sestrojte podposloupnost b posloupnosti a, jež je rostoucí.

(b) Dokažte Bolzanovu-Weierstraßovu větu (tedy tvrzení, že každá omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost) užitím bodu (a) a tvrzení, že každá monotónní omezená posloupnost je konvergentní.

(2) Posloupnost $a:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ je zadána rekurentně vztahy

$$a_1 := 1,\qquad a_{n+1} := \frac{1}{1+a_n}.$$

Spočtěte $\lim a$. Návod:

(a) Dokažte, že všechny členy a jsou dobře definovány.

(b) Definujme funkce

$$f(x) := \frac{1}{1+x},\qquad g(x) := (f\circ f)(x).$$

Dokažte, že

- rovnice $g(x)=x$ má na intervalu $[0,1]$ přesně jedno řešení. Označme je c.
- platí $x<g(x)<c$ pro $x\in[0,c)$ a $c<g(x)<x$ pro $x\in(c,1]$.
- platí $a_2<c<a_1$ a $g(a_k)=a_{k+2}$.
- podposloupnost lichých členů a je klesající a zdola omezená a podposloupnost sudých členů je rostoucí a shora omezená.

(c) Podle bodu (b) jsou posloupnosti $(a_{2k})_{k=1}^{\infty}$ a $(a_{2k+1})_{k=1}^{\infty}$ monotónní a omezené, tudíž mají limitu. Označme

$$A := \lim_{k\to\infty} a_{2k},\qquad B := \lim_{k\to\infty} a_{2k+1}.$$

Dokažte, že $g(A)=A$ a $g(B)=B$.

(d) Odvoďte, že z bodu (c) plyne, že $\lim a = c$.