Gymnázium Evolution Jižní Město

Jakýsi úvod do matematické analýzy

Áďula vod Klepáčů

6. března 2024

Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předšedších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.

Obsah

I Reálná čísla a limity **7**

1 Posloupnosti, limity a reálná čísla **9**

1.1 Definice limity posloupnosti . . . 9

1.2 Limity konvergentních posloupností . . . 12

1.2.1 Úplnost reálných čísel . . . 15

1.3 Poznatky o limitách posloupností . . . 18

1.3.1 Rozšířená reálná osa . . . 19

1.3.2 Bolzanova-Weierstraßova věta . . . 25

1.4 Metody výpočtů limit . . . 28

1.5 Číselné řady . . . 39

1.5.1 Řady s nezápornými členy . . . 44

Část I

Reálná čísla a limity

Kapitola 1

Posloupnosti, limity a reálná čísla

Kritickým opěrným bodem při konstrukci reálných čísel i při jejich následném studiu je pojem *limity* (v češtině se tomuto slovu přiřazuje ženský rod). Limita je bod, k němuž se zvolená posloupnost čísel „blíží“, ale nikdy jeho „nedosáhne“, pokud takový existuje. Přidruženým pojmem je třeba *asymptota* reálné funkce, se kterou se čtenáři, očekáváme, setkali.

Samotná definice limity je zpočátku poněkud neintuitivní. Vlastně i samotná představa býti něčemu „nekonečně blízko“ je do jisté míry cizí. Pokusíme se vhodnými obrázky a vysvětlivkami cestu k pochopení dláždit, avšak, jakož tomu bývá, intuice přichází, až člověk s ideou takřkouce sroste.

1.1 Definice limity posloupnosti

Koncept posloupnosti je, na rozdíl od limity, velmi triviální. Je to vlastně „očíslovaná množina čísel“. Z každé množiny lze vyrobit posloupnost jejích prvků tím, že jim přiřkneme nějaké pořadí. Tento *přírok* se nejsnadněji definuje jako zobrazení z přirozených čísel – to totiž přesně na každý prvek kodomény zobrazí jeho pořadí.

Definice 1.1.1 (Posloupnost)

Ať X je množina. *Posloupností* prvků z X nazveme libovolné zobrazení

$$a : \mathbb{N} \to X.$$

Pro úsporu zápisu budeme psát a_n místo $a(n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Navíc, je-li kodoména X zřejmá z kontextu, říkáme stručně, že $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je *posloupnost*.

Poznámka 1.1.2

Vnímaví čtenáři sobě jistě povšimli, že jsme na $\mathbb{N}$ nedefinovali žádné *uspořádání*. Ačkolivěk není tímto definice posloupnosti formálně nijak postižena, neodpovídá přirozenému vnímání, že prvek s číslem 1 stojí před prvkem s číslem 5 apod.

Naštěstí, naše konstruktivní definice přirozených čísel nabízí okamžité řešení. Využijeme toho, že každé přirozené číslo je podmnožinou svého následníka, a definujeme zkrátka uspořádání $\leq$ na $\mathbb{N}$ předpisem

$$a \leq b \overset{\text{def}}{\iff} a \subseteq b.$$

Fakt, že $\subseteq$ je uspořádání, okamžitě implikuje, že $\leq$ je rovněž uspořádání.

Rozmyslíme si nyní dva pojmy pevně spjaté s posloupnostmi – *konvergence* a *limita*. Brzo si též ukážeme, že tyto dva pojmy jsou záměnné, ale zatím je vnímáme odděleně. Navíc, budeme se odteď soustředit speciálně na posloupnosti racionálních čísel, tj. zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, neboť jsou oním klíčem k sestrojení své reálné bratří.

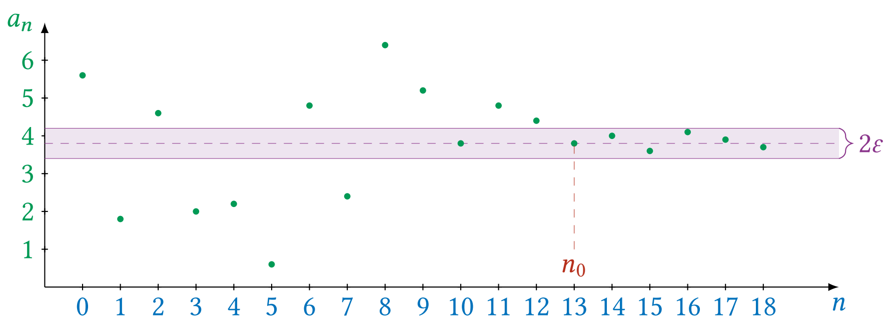
Ze všech posloupností $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ nás zajímá jeden konkrétní typ – posloupnosti, vzdálenosti mezi jejichž prvky se postupně zmenšují. Tyto posloupnosti, nazývané *konvergentní* (z lat. con-vergere, „ohýbat k sobě“), se totiž vždy blíží k nějakému konkrétnímu bodu – ke své *limitě*. Představa ze života může být například následující: říct, že se blížíme k nějakému místu, je totéž, co tvrdit, že se vzdálenost mezi námi a oním místem s každým dalším krokem zmenšuje. V moment, kdy své kroky směřujeme stále stejným směrem, posloupnost vzdáleností mezi námi a tím místem tvoří konvergentní posloupnost. Jestliže se pravidelně odkláníme, k místu nikdy nedorazíme a posloupnost vzdáleností je pak *divergentní* (tj. **ne**konvergentní).

Do jazyka matematiky se věta „vzdálenosti postupně zmenšují“ překládá obtížně. Jeden ne příliš elegantní, ale výpočetně užitečný a celkově oblíbený způsob je následující: řekneme, že prvky posloupnosti jsou k sobě stále blíž, když pro jakoukoli vzdálenost vždy dokážeme najít krok, od kterého dál jsou již k sobě dva libovolné prvky u sebe blíž než tato daná vzdálenost. Důrazně vyzýváme čtenáře, aby předchozí větu přečítali tak dlouho, dokud jim nedává dobrý smysl. Podobné formulace se totiž vinou matematickou analýzou a jsou základem uvažování o nekonečnu.

Definice 1.1.3 (Konvergentní posloupnost)

Řekneme, že posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je *konvergentní*, když platí výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$



Obrázek 1.1: Konvergentní posloupnost. Zde pro $\varepsilon = 0.2$ lze volit například $n_0 = 13$. Vodorovná přímka procházející bodem a_{n_0} je vlastně „středem“ pruhu o šíři 2ε, ve kterém se nacházejí všechny členy posloupnosti s pořadím vyšším než 13.

Poznámka 1.1.4

Radíme, aby se čtenáři sžili s intuitivním (přesto velmi přesným) ponětím absolutní hodnoty $|x-y|$ jako *vzdálenosti* mezi čísly x a y. V tomto smyslu je pak $|x| = |x-0|$ vzdálenost čísla x od čísla 0, což cele odpovídá definici tohoto symbolu.

Poznámka 1.1.5

Aplikujeme intuitivní vysvětlení *zmenšování vzdálenosti* z odstavce nad definicí 1.1.3 na jeho skutečnou definici.

Výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

říká, že pro jakoukoli vzdálenost (ε) dokáži najít krok (n_0) takový, že vzdálenost dvou prvků v libovolných dvou následujících krocích (m, n) už je menší než daná vzdálenost ($|a_n - a_m| < \varepsilon$).

Slovo „krok“ je třeba vnímat volně – myslíme pochopitelně *pořadí* či *indexy* prvků v posloupnosti. Pohled na racionální posloupnosti jako na „kroky“ činěné v racionálních číslech může být ovšem užitečný.

Cvičení 1.1.6

Dokažte, že posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je konvergentní právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < C\varepsilon$$

pro libovolnou **kladnou** konstantu $C \in \mathbb{Q}$.

Pojem *limity*, představuje jakýsi bod, k němuž se posloupnost s každým dalším krokem přibližuje, je vyjádřen výrazem podobného charakteru. Zde však přichází na řadu ona *děravost* racionálních čísel. Může se totiž stát, a příklady zde uvedeme, že limita racionální posloupnosti není racionální číslo.

Učiňmež tedy dočasný obchvat a před samotnou definicí limity vyrobme reálná čísla jednou z přehoušlí možných cest.

Ať $C(\mathbb{Q})$ značí množinu všech **konvergentních** racionálních posloupností. Uvažme ekvivalenci $\simeq$ na $C(\mathbb{Q})$ danou

$$a \simeq b \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon.$$

Přeloženo do člověčtiny, $a \simeq b$, právě když se rozdíl mezi prvky těchto posloupností se stejným pořadím neustále zmenšuje – řekli bychom, že se *blíží k nule*. V rámci (zatím intuitivní) představy, že konvergentní posloupnosti se blíží k nějakému bodu, dává smysl ztotožňovat posloupnosti, které se blíží k bodu *stejnému* – stav, který vyjadřujeme tak, že se jejich rozdíl blíží k nule.

Ve výsledku budeme definovat reálná čísla jako limity všech možných konvergentních racionálních posloupností. Pozbývajíce leč aparátu, bychom koncepty limity a konvergence stmelili v jeden, jsme nuceni učinit mezikrok.

Definice 1.1.7 (Reálná čísla)

Množinu *reálných čísel* tvoří všechny třídy ekvivalence konvergentních racionálních posloupností podle $\simeq$. Symbolicky,

$$\mathbb{R} \coloneqq \{[a]_{\simeq} \mid a \in C(\mathbb{Q})\}.$$

Nyní definujeme pojem limity. Nemělo by snad být příliš překvapivé, že se od definice konvergence příliš neliší. Významný rozdíl odpočívá pouze v předpokladu existence *cílového bodu*.

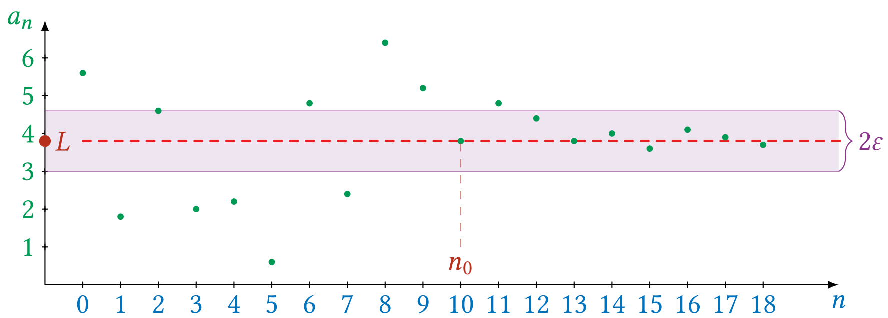
Definice 1.1.8 (Limita posloupnosti)

Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je posloupnost. Řekneme, že a *má limitu* $L \in \mathbb{R}$, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - L| < \varepsilon,$$

neboli, když jsou prvky a_n bodu L s každým krokem stále blíž.

Fakt, že $L \in \mathbb{R}$ je limitou a značíme jako $\lim a = L$.



Obrázek 1.2: Posloupnost s limitou L. Zde pro $\varepsilon = 0.4$ lze volit například $n_0 = 10$. Vodorovná přímka procházející bodem L je vlastně „středem" pruhu o šíři 2ε, ve kterém se nacházejí všechny členy posloupnosti s pořadím vyšším než 10.

1.2 Limity konvergentních posloupností

V této sekci dokážeme, že konvergentní posloupnosti mají limitu. Opačná implikace, tj. že posloupnosti jmající limitu konvergují, je téměř triviální. K jejímu důkazu potřebujeme jen jednu vlastnost absolutní hodnoty.

Lemma 1.2.1 (Trojúhelníková nerovnost)

Ať $x, y \in \mathbb{Q}$. *Pak*

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Důkaz. Absolutní hodnota $|x + y|$ je rovna buď $x + y$ (když $x + y \geq 0$) nebo $-x - y$ (když $x + y < 0$). Zřejmě $x \leq |x|$ a $-x \leq |x|$, podobně $y \leq |y|$ a $-y \leq |y|$.

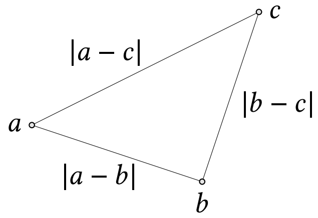
Pak je ale $x + y \leq |x| + |y|$ a též $-x + (-y) \leq |x| + |y|$. Tím je důkaz hotov. ∎

Poznámka 1.2.2

Název *trojúhelníková* obvykle přiřazovaný nerovnosti 1.2.1 vyplývá z její přirozené geometrické interpretace. Ať a, b, c jsou body v rovině. Dosazením $x = a - b$, $y = b - c$, dostává nerovnost 1.2.1 tvar

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|,$$

tj. vzdálenost a od c je nanejvýš rovna součtu vzdáleností a od b a b od c pro libovolný bod b. Vizte obrázek 1.3.



Obrázek 1.3: Trojúhelníková nerovnost

Trojúhelníková nerovnost poskytuje snadné důkazy mnoha užitečných dílčích tvrzení o posloupnostech. Příkladem je následující cvičení.

Cvičení 1.2.3 (Jednoznačnost limity)

Dokažte, že každá posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ má nejvýše jednu limitu. Hint: použijte trojúhelníkovou nerovnost.

Ježto bychom však rádi dokazovali všechna tvrzení již pro reálná čísla, ukažme si nejprve, jak se dají sčítat a násobit. Dokážeme rovněž, že $\mathbb{R}$ – stejně jako $\mathbb{Q}$ – tvoří těleso. Začneme tím, že se naučíme sčítat a násobit konvergentní posloupnosti.

Ať $a, b \in C(\mathbb{Q})$ jsou dvě konvergentní racionální posloupností. Operace $+$ a $\cdot$ na $C(\mathbb{Q})$ definujeme velmi přirozeně. Zkrátka, $(a + b)(n) \coloneqq a(n) + b(n)$ a $(a \cdot b)(n) \coloneqq a(n) \cdot b(n)$, tj. prvek na místě n posloupnosti $a + b$ je součet prvků na místech n posloupností a a b. Abychom ovšem získali skutečně operace na $C(\mathbb{Q})$, musíme ověřit, že $a + b$ i $a \cdot b$ jsou konvergentní.

Nechť dáno jest $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že umíme najít $n_0 \in \mathbb{N}$, aby

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| < \varepsilon,$$

kdykoli $m, n \geq n_0$. Protože jak a tak b konverguje, již umíme pro libovolná $\varepsilon_a, \varepsilon_b > 0$ najít n_a a n_b taková, že $|a_n - a_m| < \varepsilon_a$, kdykoli $m, n \geq n_a$, a podobně $|b_n - b_m| < \varepsilon_b$, kdykoli $m, n \geq n_b$. Položme tedy $\varepsilon_a = \varepsilon_b \coloneqq \varepsilon/2$ a $n_0 \coloneqq \max(n_a, n_b)$. Potom můžeme užitím trojúhelníkové nerovnosti pro $m, n \geq n_0$ odhadnout

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| = |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon,$$

čili $a + b$ konverguje.

Předchozí odstavec se může snadno zdát šílenou směsicí symbolů. Ve skutečnosti však formálně vykládá triviální úvahu. Máme najít pořadí, od kterého jsou prvky součtu $a + b$ u sebe blíž než nějaká daná vzdálenost. Poněvadž a i b konvergují, stačí přeci vzít větší z pořadí, od kterých je jak rozdíl prvků a, tak rozdíl prvků b, menší než polovina dané vzdálenosti.

Velmi obdobnou manipulaci lze provést k důkazu konvergence $a \cdot b$. Ponecháváme jej čtenářům jako (ne zcela snadné) cvičení.

Cvičení 1.2.4

Dokažte, že jsou-li a, b konvergentní posloupnosti racionálních čísel, pak je posloupnost $a \cdot b$ rovněž konvergentní. Kromě trojúhelníkové nerovnosti je zde třeba použít i zatím nedokázané lemma 1.2.10.

Racionální čísla jsou přirozeně součástí reálných prostřednictvím zobrazení

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{Q} &\hookrightarrow \mathbb{R}, \\ q &\mapsto [(q)], \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde (q) značí posloupnost $a : n \mapsto q$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $[(q)]$ její třídu ekvivalence podle $\simeq$.

Varování 1.2.5

Tvrdíme pouze, že $\mathbb{Q}$ jsou *součástí* $\mathbb{R}$, kde slovu *součást* záměrně není dán rigorózní smysl. Racionální čísla totiž (aspoň po dobu naší dočasné definice reálných čísel) nejsou v žádném smyslu podmnožinou čísel reálných.

Matematici ale často ztotožňujeme doménu prostého zobrazení s jeho obrazem (neboť mezi těmito množinami vždy existuje bijekce). V tomto smyslu mohou být $\mathbb{Q}$ vnímána jako podmnožina $\mathbb{R}$, ztotožníme-li racionální čísla s obrazem zobrazení ξ z (1.1). Toto ztotožnění znamená vnímat racionální číslo $q \in \mathbb{Q}$ jako konvergentní posloupnost samých čísel q.

Cvičení 1.2.6

Dokažte, že zobrazení ξ z (1.1) je

- dobře definované – tzn. že když $p = q$, pak $[(p)] = [(q)]$ – a
- prosté.

Jelikož $\mathbb{Q}$ je těleso, speciálně tedy obsahuje 0 a 1, $\mathbb{R}$ je (prostřednictvím ξ z (1.1)) obsahuje rovněž. Pro stručnost budeme číslem $0 \in \mathbb{R}$ značit třídu ekvivalence posloupnosti samých nul a číslem $1 \in \mathbb{R}$ třídu ekvivalence posloupnosti samých jednotek. Ověříme, že se skutečně jedná o neutrální prvky ke sčítání a násobení.

Je třeba si rozmyslet, že pro každou posloupnost $a \in C(\mathbb{Q})$ platí $a + 0 = a$ a $a \cdot 1 = a$, kde, opět, čísla 0 a 1 ve skutečnosti znamenají nekonečné posloupnosti těchto čísel. Obě rovnosti jsou však zřejmé z definice, neboť $(a + 0)(n) = a_n + 0 = a_n = a(n)$ a $(a \cdot 1)(n) = a_n \cdot 1 = a_n = a(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Konečně, rozšíříme rovněž – a $^{-1}$ na $\mathbb{R}$. Pro libovolnou posloupnost $x \in C(\mathbb{Q})$ definujeme zkrátka $(-a)(n) \coloneqq -a(n)$. S $^{-1}$ je situace lehce komplikovanější. Totiž, pouze **nenulová** racionální čísla mají svůj inverz k násobení. Zde je třeba zpozorovat, že **konvergentní** posloupnost, která by však měla nekonečně mnoho prvků nulových, už musí mít od nějakého kroku **všechny** prvky nulové, jinak by totiž nemohla konvergovat. Vskutku, představme si, že a je posloupnost taková, že $a_n = 0$ pro nekonečně mnoho přirozených čísel $n \in \mathbb{N}$. Pak ale ať zvolím $n_0 \in \mathbb{N}$ jakkoliv, vždy existuje $m \geq n_0$ takové, že $a_m = 0$. Vezměme $n \geq n_0$ libovolné. Pokud $a_n \neq 0$, pak můžeme vzít třeba

$\varepsilon \coloneqq |a_n|/2$ a bude platit, že $|a_n - a_m| > \varepsilon$, což je dokonalý zápor definice konvergence. Z toho plyne, že a_n musí být 0 pro $n \geq n_0$ a odtud dále, že $a \simeq 0$. Čili, pouze posloupnosti ekvivalentní nulové posloupnosti nemají v $\mathbb{R}$ inverz vzhledem k $\cdot$.

Právě provedená úvaha nám umožňuje definovat $^{-1}$ pro posloupnosti $a \in C(\mathbb{Q})$ takové, že $a \not\simeq 0$, následovně:

$$(a^{-1})(n) \coloneqq \begin{cases} a(n)^{-1}, & \text{když } a(n) \neq 0, \\ 0, & \text{když } a(n) = 0. \end{cases}$$

Je snadné uvidět, že $-a$ je inverzem k a vzhledem k $+$ a a^{-1} je inverzem k $a \not\simeq 0$ vzhledem k $\cdot$. Vskutku, máme

$$(a + (-a))(n) = a_n + (-a_n) = 0,$$

tedy v tomto případě je $(a + (-a))$ přímo **rovna** nulové posloupnosti. V případě $^{-1}$ dostáváme pro $a \not\simeq 0$

$$(a \cdot a^{-1})(n) = \begin{cases} a_n \cdot a_n^{-1} = 1, & \text{když } a_n \neq 0, \\ a_n \cdot 0 = 0, & \text{když } a_n = 0. \end{cases}$$

Ergo, $a \cdot a^{-1}$ je rovna posloupnosti samých jedniček, až na konečně mnoho nul, protože, jak jsme si již rozmysleli, a nemůže mít nekonečně 0 a zároveň nebýt v relaci $\simeq$ s nulovou posloupností, jinak by nebyla konvergentní. To však přesně znamená, že $a \cdot a^{-1} \simeq 1$, čili $[a] \cdot [a^{-1}] = [1]$.

Shrneme-li řád předchozích úvah, získáme oprávnění tvrdit, že

$$(\mathbb{R}, +, -, [(0)], \cdot, ^{-1}, [(1)])$$

je těleso. Tento fakt je do budoucna pochopitelně zásadní; teď se však můžeme těšit znalostí, že jsme přechodem od $\mathbb{Q}$ k $\mathbb{R}$ neztratili symetrické rysy původní množiny.

Přikročmež již však k důkazu existence limity každé konvergentní posloupnosti. Fakt, že existence limity implikuje konvergenci, plyne přímo z trojúhelníkové nerovnosti.

Lemma 1.2.7

Každá posloupnost majíc limitu je konvergentní.

Důkaz. Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je posloupnost s limitou L. Pak pro každé $\varepsilon_L > 0$ existuje $n_L \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - L| < \varepsilon_L$ pro všechna $n \geq n_L$.

Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pro všechna m, n větší než vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme tedy $n_0 \coloneqq n_L$ a $\varepsilon_L \coloneqq \varepsilon/2$. Potom pro všechna $m, n \geq n_0 = n_L$ máme

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_n - L + L| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < \varepsilon_L + \varepsilon_L = \varepsilon,$$

čili a konverguje. ∎

1.2.1 Úplnost reálných čísel

K důkazu existence limity každé konvergentní posloupnosti potřebujeme prozpytovat vztah racionálních a reálných čísel podrobněji. Konkrétně potřebujeme ukázat, že $\mathbb{Q}$ jsou tzv. *hustá* v $\mathbb{R}$, tj.

že ke každému reálnému číslu existuje racionální číslo, které je mu nekonečně blízko. Zde jsme opět implicitně ztotožnili racionální čísla s třídami ekvivalence konstantních posloupností. Na základě toho budeme totiž moci tvrdit, že reálná čísla jsou tzv. *úplná*, což přesně znamená, že každá konvergentní posloupnost reálných čísel má reálnou limitu.

Nejprve si ovšem musíme rozmyslet, co vlastně míníme posloupností *reálných* čísel. Pochopitelně, zobrazení $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ poskytuje validní definici, ale uvědomme sobě, že teď vlastně uvažujeme posloupnosti, jejichž prvky jsou třídy ekvivalence konvergentních racionálních posloupností.

Abychom směli hovořit o konvergentních *reálných* posloupnostech, rozšíříme absolutní hodnotu $|\cdot|$ z $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ zkrátka předpisem $|[(x_n)]| \coloneqq [(|x_n|)]$ pro $(x_n) \in C(\mathbb{Q})$. Napíšeme-li tedy $|x| \leq K$ pro reálná čísla $x, K \in \mathbb{R}$, pak tím doslova myslíme $[(|x_n|)] \leq [(K_n)]$, což ale **neznamená** $|x_n| \leq K_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, kde x_n, K_n jsou nyní již čísla ryze rozumná čili racionální, anobrž $|x_n| > K_n$ jen pro **konečně mnoho** $n \in \mathbb{N}$.

Varování 1.2.8

Důležitá myšlenka, jíž je dlužno snovat v srdci při práci s třídami ekvivalence konvergentních posloupností, je ta, že při porovnávání dvou tříd nás nezajímá libovolný **konečný počet** jejich prvních prvků.

Například, vztah $x = y$ pro $x, y \in \mathbb{R}$ znamená, že $x_n = y_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ až na libovolný konečný počet prvních přirozených čísel. To se lépe vyjadřuje pomocí negace. Je snazší říct, že $x = y$, když $x_n \neq y_n$ pro jenom konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$.

Rozepíšeme-li si tedy podrobně, co znamená, že je posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergentní, dostaneme pro dané $\varepsilon > 0$, vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$ a $m, n \geq n_0$ nerovnost $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Ovšem, x_n i x_m jsou samy o sobě třídy ekvivalence konvergentních **posloupností** racionálních čísel, tedy poslední nerovnost plně rozepsána dí

$$|[((x_n)_k - (x_m)_k)_{k=0}^{\infty}]| < \varepsilon,$$

což lze rovněž vyjádřit tak, že

$$|(x_n)_k - (x_m)_k| \geq \varepsilon$$

jen pro konečně mnoho $k \in \mathbb{N}$.

Nepřináší však žádný hmotný užitek nad konvergencí reálných posloupností uvažovat takto složitě. Čtenáři dobře učiní, uvědomí-li si plný význam předchozího odstavce, ovšem zůstanou-li věrni intuitivnímu vnímání výrazu $|x - y|$ jako „vzdálenosti“ čísel x a y.

Definice 1.2.9 (Omezená posloupnost)

Řekneme, že posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je *omezená*, když existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $|x_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Píšeme $|x| \leq K$.

Lemma 1.2.10

Každá konvergentní posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je omezená.

Důkaz. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Z definice konvergence nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \geq n_0$ je $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Speciálně tedy pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < \varepsilon + |x_{n_0}|,$$

tudíž všechny členy posloupnosti s pořadím větším než n_0 jsou omezeny číslem $\varepsilon + |x_{n_0}|$. Ovšem, členů posloupnosti s pořadím menším než n_0 je konečně mnoho, a tedy z nich můžeme vzít ten největší – nazvěme ho s. Položíme-li $K \coloneqq \max(s, \varepsilon + |x_{n_0}|)$, pak $|x_n| \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, čili x je omezená číslem K. ■

Tvrzení 1.2.11 (Hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)

Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, tj. ke každému $x \in \mathbb{R}$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $r \in \mathbb{Q}$ takové, že $|x - r| < \varepsilon$.

Důkaz. Ať $\varepsilon > 0$ je dáno a označme $x \coloneqq [(x_n)]$, $(x_n) \in C(\mathbb{Q})$. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m, n \geq n_0$ je $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Zvolme $r \coloneqq x_{n_0} \in \mathbb{Q}$. Pak ovšem máme

$$|x_n - r| = |x_n - x_{n_0}| < \varepsilon$$

pro všechna $n \geq n_0$. To přesně znamená, že $|x - r| < \varepsilon$. ■

Lemma 1.2.12

Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Pak $\lim a = [(a)]$.

Důkaz. Položme $x \coloneqq [(a)]$. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Protože a je konvergentní, nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq n_0$. Potom ale $|a_n - x| < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$, což z definice znamená, že $\lim a = x$. ■

Důsledek 1.2.13 ($\mathbb{R}$ jsou úplná)

Každá konvergentní reálná posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ má limitu v $\mathbb{R}$.

Důkaz. Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je racionální posloupnost taková, že $|x_n - a_n| < 1/n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tu nalezneme opakovaným použitím tvrzení 1.2.11 pro $\varepsilon \coloneqq 1/n$ a $x \coloneqq x_n$. Ukážeme nejprve, že a je konvergentní. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme n_1 takové, že $\forall m, n \geq n_1$ platí $1/m + 1/n < \varepsilon$. Dále, x je konvergentní z předpokladu. Čili, pro každé $\varepsilon_x > 0$ nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m, n \geq n_2$ máme $|x_n - x_m| < \varepsilon_x$. Volme tedy speciálně

$$\varepsilon_x \coloneqq \varepsilon - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}.$$

a $n_0 \coloneqq \max(n_1, n_2)$. Potom pro všechna $m, n \geq n_0$ platí nerovnosti

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a_m - x_n + x_n| \leq |a_n - x_n| + |x_n - a_m| = |a_n - x_n| + |x_n - a_m - x_m + x_m| \\ &\leq |a_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - a_m| < \frac{1}{n} + \varepsilon_x + \frac{1}{m} = \varepsilon, \end{aligned}$$

tedy a konverguje.

Jistě platí $\lim x - a = 0$, neboť pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \varepsilon$. Odtud plyne, že x má limitu právě tehdy, když a má limitu. Ovšem, podle lemmatu 1.2.12 má a limitu $[(a)] \in \mathbb{R}$. Tím je důkaz hotov. ■

Důsledek 1.2.14

Platí

$$\mathbb{R} \cong \{\lim a \mid a \in C(\mathbb{Q})\},$$

čili reálná čísla jsou přesně limity všech konvergentních racionálních posloupností.

Důkaz. Zkonstruujeme bijekci $f : \mathbb{R} \to \{\lim a \mid a \in C(\mathbb{Q})\}$. Vezměme $x \in \mathbb{R}$. Pak z definice existuje konvergentní racionální posloupnost $a \in C(\mathbb{Q})$ taková, že $x = [a]$. Podle lemmatu 1.2.12 má a limitu v $\mathbb{R}$. Definujme tedy $f(x) \coloneqq \lim a$.

Ověříme, že je f dobře definované, prosté a na.

Nejprve musíme ukázat, že $f(x)$ nezávisí na volbě konkrétní posloupnosti a z třídy ekvivalence $[a]$. Ať tedy $b \simeq a$ a označme $L_a \coloneqq \lim a$, $L_b \coloneqq \lim b$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ platí tři nerovnosti:

$$|a_n - b_n| < \varepsilon, \quad |a_n - L_a| < \varepsilon, \quad |b_n - L_b| < \varepsilon.$$

Velmi obdobnou úpravou jako v důkaze důsledku 1.2.13 dostaneme, že

$$|L_a - L_b| \leq |L_a - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - L_b| < 3\varepsilon,$$

odkud $L_a = L_b$, neboť L_a, L_b jsou třídy ekvivalence konvergentních posloupností. Společně s faktem, že každá konvergentní posloupnost má přesně jednu limitu (cvičení 1.2.3), plyne z předchozí úvahy, že f je dobře definováno.

Dokážeme, že f je prosté. To je snadné, neboť pokud $[a] = [b]$, neboli $a \simeq b$, potom $\lim a = \lim b$, což jsme již vlastně dokázali v odstavci výše.

Nakonec zbývá ověřit, že f je na. Ať tedy $L \coloneqq \lim a$ pro nějakou $a \in C(\mathbb{Q})$. Potom ovšem $[(a)] \in \mathbb{R}$ a podle lemmatu 1.2.12 platí $\lim a = [(a)]$. To ovšem přesně znamená, že $f([(a)]) = L$.

Tím je důkaz hotov. ■

1.3 Poznatky o limitách posloupností

Účelem této sekce je shrnout základní poznatky o limitách posloupností, jež umožní čtenářům limity konkrétních posloupností efektivně počítat a navíc široké jejich použití v následujících kapitolách.

Začneme technickým, ale nezbytným, konceptem *rozšířené reálné osy* a pokračovati budeme jedním z nejdůležitějších a dle našeho názoru též nejkrásnějších výsledků – tzv. Bolzanovou-Weierstraßovou větou. Ta tvrdí v podstatě toto: mám-li omezenou posloupnost, pak z ní již umím vybrat nekonečně mnoho prvků, které tvoří posloupnost *konvergentní.*

Ona krása takového tvrzení spočívá v principu, kterým se podrobně zabývá kombinatorická disciplína zvaná Ramseyho teorie; v principu, že v téměř libovolně chaotické struktuře lze nalézt řád, jakmile jest tato dostatečně velká. Nejedná se jistě o čistě matematický princip, nýbrž dost možná o princip vzniku vesmíru a života, popsaný již starým Aristotelem ve výmluvném výroku, „Celek je více než součet svých částí.“ V mnoha zpytech se tomuto jevu přezdívá Emergent Behavior a představuje stav, kdy chování systému nelze plně popsat pouze studiem jeho jednotlivých prvků.

Pro důkaz Bolzanovy-Weierstraßovy věty potřebujeme jedné pomocné konstrukce, tzv. *systému vnořených intervalů.* Nejprve si však pořádně definujeme samotný pojem *intervalu.* K tomu se nám bude hodit rozšířit množinu reálných čísel o prvky $-\infty$ a ∞.

1.3.1 Rozšířená reálná osa

Definice 1.3.1 (Rozšířená reálná osa)

Definujme množinu $\mathbb{R}^* \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, kde ∞, resp. $-\infty$, je z definice prvek takový, že $\infty \geq x$, resp. $-\infty \leq x$, pro každé $x \in \mathbb{R}$. Množině $\mathbb{R}^*$ budeme někdy říkat *rozšířená reálná osa.* Rozšíříme rovněž operace $+$ a $\cdot$ na prvky ∞ a $-\infty$ následovně.

$$
\begin{aligned}
\infty + a = a + \infty &= \infty, &&\text{pro } a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},\\
-\infty + a = a + (-\infty) &= -\infty, &&\text{pro } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\\
\infty \cdot a = a \cdot \infty &= \infty, &&\text{pro } a > 0 \text{ nebo } a = \infty,\\
\infty \cdot a = a \cdot \infty &= -\infty, &&\text{pro } a < 0 \text{ nebo } a = -\infty,\\
-\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) &= -\infty, &&\text{pro } a > 0 \text{ nebo } a = \infty,\\
-\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) &= \infty, &&\text{pro } a < 0 \text{ nebo } a = -\infty,\\
a \cdot \infty^{-1} = a \cdot (-\infty)^{-1} &= 0, &&\text{pro } a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Varování 1.3.2

Definice 1.3.1 stručně řečeno říká, že se s prvky ∞ a $-\infty$ zachází podobně jako s ostatními reálnými čísly. Ovšem, následující operace zůstávají nedefinovány.

$$\infty + (-\infty), -\infty + \infty, \pm\infty \cdot 0, 0 \cdot (\pm\infty), (\pm\infty) \cdot (\pm\infty)^{-1}.$$

Čtenáři možná zpozorovali, že jsme při své definici limity nerozlišili mezi posloupnostmi, které nemají limitu, protože jejich prvky „skáčou sem a tam“, a posloupnostmi, které ji nemají naopak pro to, že „stále klesají či stoupají“. Pro další studium záhodno se tohoto nedostatku zlišit.

Definice 1.3.3 (Limita v nekonečnu)

Ať $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je reálná posloupnost. Řekneme, že x má limitu ∞, resp. $-\infty$, když pro každé $K > 0, K \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $x_n > K$, resp. $x_n < -K$. Píšeme $\lim x = \infty$, resp. $\lim x = -\infty$.

Na reálných číslech existuje uspořádání $\leq$, které zdědila z čísel přirozených, prostřednictvím čísel celých a konečně čísel racionálních. Protože, vděkem naší konstrukci, jsou celá čísla třídy ekvivalence dvojic čísel přirozených, čísla racionální třídy ekvivalence dvojic čísel celých a čísla reálná limity konvergentních racionálních posloupností, bylo by vskutku obtížné a neproduktivní vypsat konkrétní množinovou definici tohoto uspořádání na reálných číslech. Přidržíme se pročež intuitivního pohledu na věc a důkaz, že $\leq$ je skutečně uspořádání na reálných číslech, necháváme laskavému čtenáři k promyšlení.

Existence uspořádání umožňuje dívat se na podmnožiny $\mathbb{R}$ z jistého „souvislého“ pohledu. Nemusejí již být vňaty (jako tomu je u ostatních představených číselných okruhů) jako výčty jednotlivých prvků, ale oprávněně jako „provázky“ či „úsečky“. Úplnost reálných čísel zaručuje, že z každého reálného čísla mohu plynule dorazit do každého jiného reálného čísla aniž reálná čísla opustím.

Předchozí odstavec vágně motivuje definici *intervalu* – „souvislé“ omezené podmnožiny reálných čísel. V souhlasu s definicí intervalu vzniká i pojem *otevřenosti* a *uzavřenosti* množiny – pojem, který je klíčem k definici *topologie* na obecné množině a tím pádem vlastně i základem tak zhruba poloviny celé moderní matematiky.

Směrem k definici intervalu učiňmež koliksi mezikroků.

Definice 1.3.4 (Maximum a minimum)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina. Řekneme, že prvek $M \in X$, resp. $m \in X$, je *maximem*, resp. *minimem*, množiny X, když pro každé $x \in X$ platí $x \leq M$, resp. $x \geq m$. Píšeme $M = \max X$, resp. $m = \min X$.

Definice 1.3.5 (Horní a dolní závora)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina. Řekneme, že prvek $Z \in \mathbb{R}^*$ resp. $z \in \mathbb{R}^*$, je *horní*, resp. *dolní*, *závora* množiny X, když pro každé $x \in X$ platí $x \leq Z$, resp. $x \geq z$.

Má-li množina X horní, resp. dolní, závoru, **která leží v** $\mathbb{R}$ (tedy není rovna $\pm\infty$), říkáme, že je *shora*, resp. *zdola*, *omezená*. Je-li navíc X omezená shora i zdola, říkáme krátce, že je *omezená*.

Definice 1.3.6 (Supremum a infimum)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina. Řekneme, že prvek $S \in \mathbb{R}^*$, resp. $i \in \mathbb{R}^*$, je *supremum*, resp. *infimum*, množiny X, když je to její *nejmenší horní závora*, resp. *největší dolní závora*. Píšeme $S = \sup X$, resp. $i = \inf X$.

Vyjádřeno symbolicky, prvek $S \in \mathbb{R}$ je *supremem* množiny X, když $x \leq S$ pro všechna $x \in X$, a kdykoli $x \leq Z$ pro nějaký prvek $Z \in \mathbb{R}$ a všechna $x \in X$, pak $S \leq Z$. Prvek $i \in \mathbb{R}$ je *infimem* množiny X, když $x \geq i$ pro všechna $x \in X$, a kdykoli $x \geq z$ pro nějaký prvek $z \in \mathbb{R}$ a všechna $x \in X$, pak $i \geq z$.

Varování 1.3.7

Vřele radíme čtenářům, aby sobě bedlivě přečetli předchozí tři definice a uvědomili si – velmi zásadní, leč lehko přehlédnuté – jejich vzájemné rozdíly.

- Maximum a minimum množiny X je z definice **vždy prvkem této množiny**. Maximem množiny $\{1, 2, 3\}$ je prvek 3 a jeho minimem je prvek 1.
- Horní, resp. dolní, závora množiny X je **libovolné rozšířené reálné číslo** (tedy klidně

i $\pm\infty$), které je větší, resp. menší, než všechny prvky X. Horní závorou množiny $\{1, 2, 3\}$ je číslo 69, též ∞ a též číslo 3. Horní a dolní závora **může, ale nemusí**, být prvkem X.

- Supremum, resp. infimum, množiny X je **rozšířené reálné číslo**, které je větší, resp. menší, než všechny prvky X, ale **zároveň menší, resp. větší, než každá jeho horní, resp. dolní, závora**. Supremum a infimum **může, ale nemusí, ležet v množině** X. Touto vlastností se přesně rozlišují *uzavřené* a *otevřené* intervaly – interval je uzavřený, když jeho supremum v něm leží, kdežto otevřený, když nikoližévěk. Supremem množiny $\{1, 2, 3\}$ je číslo 3 a jeho infimem je číslo 1.

Daná podmnožina $X \subseteq \mathbb{R}$ **nemusí nutně mít maximum a minimum**, ale, a to si dokážeme, **má vždy supremum, resp. infimum**. Je-li navíc shora, resp. zdola, omezená, pak toto supremum, resp. infimum, leží v $\mathbb{R}$.

Cvičení 1.3.8

Určete z definice suprema a infima $\inf \emptyset$ a $\sup \emptyset$.

Cvičení 1.3.9

Dokažte, že $\sup X$ a $\inf X$ jsou určeny jednoznačně.

Axiomatická definice reálných čísel

Přestože jsme konstrukci reálných čísel úspěšně dokončili použitím konvergentních racionálních posloupností, stojí snad za zmínku i jejich axiomatická definice, která se obvykle uvádí v úvodních učebnicích matematické analýzy.

Překvapivě není v principu tak odlišná od jejich konstrukce, kromě jednoho konkrétního axiomu, jenž právě zaručuje úplnost; není z něj však vůbec na první, v zásadě ani na druhý, pohled vidno, že takovou vlastnost skutečně implikuje.

Definice 1.3.10 (Axiomatická definice reálných čísel)

Množina $\mathbb{R}$ se v zásadě definuje jako nekonečné uspořádané těleso s vlastností úplnosti. Tedy,

- existují prvky $0, 1 \in \mathbb{R}$ a operace $+, \cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s inverzy $-, ^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že
$$(\mathbb{R}, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1)$$
je nekonečné těleso;
- existuje uspořádání $\leq$ na $\mathbb{R}$, které je lineární (každé dva prvky lze spolu porovnat);
- (**axiom úplnosti**) každá shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Je to právě on poslední axiom v předchozí definici, jehož použití jsme se chtěli vyhnout, bo dohlédnout jeho hloubky je obtížné a neintuitivní.

Dokážeme si zde ovšem, že naše definice reálných čísel odpovídá jejich axiomatické. Otázky nekonečnosti, podmínek tělesa i uspořádání jsme již zodpověděli. Zbývá dokázat axiom úplnosti. Pro stručnost vyjádření se nám bude hodit následující definice.

Definice 1.3.11 (Monotónní posloupnost)

O posloupnosti $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ řekneme, že je

- *rostoucí*, když $x_{n+1} > x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *klesající*, když $x_{n+1} < x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *neklesající*, když $x_{n+1} \geq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *nerostoucí*, když $x_{n+1} \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ve všech těchto případech díme, že posloupnost x je *monotónní*.

Tvrzení 1.3.12 (Axiom úplnosti)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je shora omezená množina. Pak existuje $\sup X$.

Důkaz. Ježto naše pojetí úplnosti se překládá do znění, „Každá konvergentní posloupnost má limitu“, není snad nečekané, že se důkaz *axiomu úplnosti* o tuto vlastnost opírá.

Je-li X prázdná, pak má supremum podle cvičení 1.3.8. Ať je tedy X neprázdná a shora omezená a $Z \in \mathbb{R}$ je libovolná horní závora X. Protože X je neprázdná, existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že $q < x$ pro nějaké $x \in X$. Definujeme posloupnosti Z_n a q_n podle následujících pravidel.

- Položme $Z_0 \coloneqq Z$ a $q_0 \coloneqq q$.
- Uvažme číslo $p_n \coloneqq (Z_n + q_n)/2$.
- Je-li p_n horní závorou X, položme $Z_{n+1} \coloneqq p_n$ a $q_{n+1} \coloneqq q_n$.
- Není-li p_n horní závorou X, položme $Z_{n+1} \coloneqq Z_n$ a $q_{n+1} \coloneqq p_n$.

Pak jsou posloupnosti Z_n a q_n konvergentní (**proč?**) a indukcí lze snadno dokázat (**dokažte!**), že q_n **není** horní závorou X a Z_n **je** horní závorou X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Navíc platí $\lim |Z_n - q_n| = 0$ (**proč?**), a tedy $\lim Z_n = \lim q_n$.

Označme $S \coloneqq \lim Z_n = \lim q_n$. Dokážeme, že $S = \sup X$. Je třeba ukázat, že

(1) S je horní závorou X;

(2) S je nejmenší horní závorou.

Předpokládejme pro spor, že existuje $x \in X$ takové, že $x > S$. To znamená, že existuje konstanta $c > 0$ taková, že $x - S = c$. Volme $\varepsilon \coloneqq c/2$. Pro toto ε z definice limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|Z_n - \lim Z_n| = |Z_n - S| < \varepsilon$. Jelikož (Z_n) je nerostoucí a $S \leq Z_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je absolutní hodnota v předchozím výrazu zbytečná a můžeme zkrátka psát $Z_n - S < \varepsilon$. Potom ale pro všechna $n \geq n_0$ máme

$$x - Z_n = x + S - S - Z_n = (x - S) + (S - Z_n) > c - \varepsilon = \frac{c}{2},$$

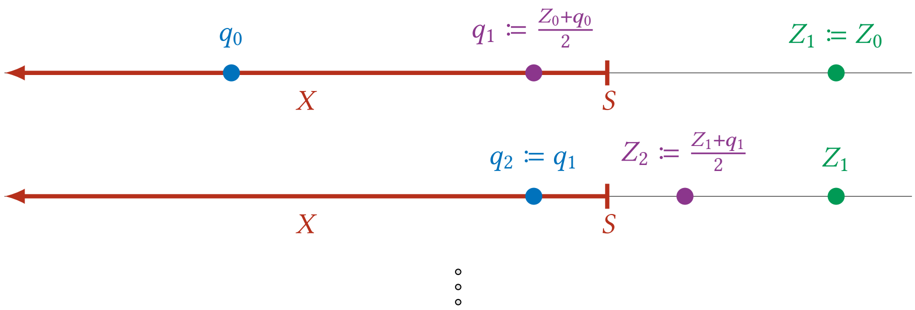
čili speciálně $x > Z_n$, což je ve sporu s tím, že Z_n je horní závora X. To dokazuje (1).

Tvrzení (2) lze dokázat obdobně, akorát využitím posloupnosti (q_n) spíše než (Z_n). Opět ať pro spor existuje $Z \in \mathbb{R}$, které je horní závorou X, a $Z < S$. Pak nalezneme konstantu $c > 0$ takovou, že $S - Z = c$. Opět z definice limity vezmeme $\varepsilon \coloneqq c/2$ a k němu $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ platí $S - q_n < \varepsilon$, kde absolutní hodnotu jsme mohli vynechat, ježto jest posloupnost (q_n) neklesající a $S \geq q_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nyní pro $n \geq n_0$ platí

$$q_n - Z = q_n - S + S - Z = (q_n - S) + (S - Z) > c - \varepsilon = \frac{c}{2},$$

čili speciálně $q_n > Z$, což je ve sporu s tím, že q_n není horní závora X pro žádné $n \in \mathbb{N}$, zatímco Z je.

Tím je důkaz dokončen. ■



Obrázek 1.4: Důkaz axiomu úplnosti

Cvičení 1.3.13

Dokažte všechna (**proč?**) a (**dokažte!**) v důkazu předchozího tvrzení.

Jako každé poctivé tvrzení, jmá i axiom úplnosti svých důsledkův. Tyto bychom pochopitelně dokázati uměli i bez něj, neboť axiom úplnosti z naší konstrukce reálných čísel přímo plyne. Nicméně, zcela jistě jej lze použít jako nástroj ke zkrácení některých důkazů.

Nejprve duální tvrzení.

Tvrzení 1.3.14

Každá zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.

Důkaz. Cvičení. Doporučujeme čtenářům se zamyslet, jak tvrzení snadno plyne z axiomu úplnosti, aniž opakují konstrukci z jeho důkazu. ■

Jedno, jak bude časem vidno, mimořádně užitečné tvrzení dí, že shora omezené rostoucí či neklesající posloupnosti a zdola omezené klesající či nerostoucí posloupnosti mají vždy limitu. To je opět intuitivně zřejmý fakt (jistě?), ale, kterak čtenáři doufáme již pozřeli, tvrzení o věcech nekonečných řídce radno nechati pouze intuici.

Lemma 1.3.15 (Limita monotónní posloupnosti)

(a) Každá rostoucí nebo neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.

(b) Každá klesající nebo nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

Důkaz. Dokážeme pouze část (a), část (b) je ponechána jako cvičení.

Ať $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je neklesající posloupnost. Důkaz pro rostoucí posloupnost je téměř dokonale stejný, liše se akorát ostrými nerovnostmi v několika výrazech. Z předpokladu je x shora omezená, tudíž má množina jejích členů $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ horní závoru. Z axiomu úplnosti má tato množina též supremum; označíme je S.

Ukážeme, že $\lim x = S$. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Z definice suprema není $S - \varepsilon$ horní závora množiny $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_{n_0} > S - \varepsilon$. Protože x je neklesající – tj. $x_n \geq x_{n_0}$, kdykoli $n \geq n_0$ – platí rovněž $x_n > S - \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$. Jelikož S je horní závora množiny členů x, platí $S \geq x_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To však znamená, že $|x_n - S| = S - x_n$, a tedy z nerovnosti $x_n > S - \varepsilon$ po úpravě plyne, že $\varepsilon > S - x_n = |x_n - S|$, čili $\lim x = S$. ■

Posledním důsledkem axiomu úplnosti, který si uvedeme, je tzv. *Archimédova vlastnost reálných čísel.* Obecně, těleso se nazývá *Archimédovo*, když vágně řečeno neobsahuje žádné nekonečně velké ani nekonečně malé prvky **vzhledem ke zvolené absolutní hodnotě**. Ukazuje se, že na reálných číslech lze definovat jen dva typy funkcí absolutní hodnoty – jednu „obvyklou“, též vyjádřitelnou vztahem $|x| = \sqrt{x^2}$, a pak tzv. p-adickou absolutní hodnotu pro p prvočíslo. Libovolná další konstrukce absolutní hodnoty (majíc přirozené vlastnosti) již je ekvivalentní absolutní hodnotě jednoho z těchto typů. Reálná čísla jsou Archimédova vzhledem k obvyklé absolutní hodnotě, ale nikoliv vzhledem k libovolné p-adické absolutní hodnotě.

Lemma 1.3.16 (Archimédova vlastnost reálných čísel)

Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \varepsilon$.

Důkaz. Stačí dokázat, že

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0,$$

neboť potom z definice infima pro každé $\varepsilon > 0$ není $0 + \varepsilon = \varepsilon$ dolní závorou $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, čili existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \varepsilon$.

Číslo 0 je zřejmě dolní závorou množiny $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Podle tvrzení 1.3.14 má tato množina infimum, označme je i. Pro spor ať $i > 0$. Potom $1/i \in \mathbb{R}$ a z nerovnosti $1/n \geq i$ (i je dolní závora) plyne, že $n \leq 1/i$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom je ovšem číslo $1/i$ horní závorou množiny $\mathbb{N}$ a podle axiomu úplnosti má množina $\mathbb{N}$ supremum; označme je S. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tudíž platí $n \leq S$. Ovšem, z definice přirozených čísel platí $n + 1 \in \mathbb{N}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Speciálně toto tedy znamená, že $n + 1 \leq S$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak je ovšem $S - 1$ horní závorou množiny $\mathbb{N}$, což je spor, neboť S bylo z předpokladu supremum $\mathbb{N}$.

Musí pročež platit $i = 0$, což bylo dokázati. ■

Poznámka 1.3.17

Lemma 1.3.16 v podstatě říká, že $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Bedliví čtenáři si mohou pamatovat, že jsme ono lemma již v předchozím textu bez uvedení použili (například v důkaze důsledku 1.2.13). Jedná se však z naší strany o drzost pouze malou. Totiž, jeho platnost je téměř okamžitým důsledkem tvrzení 1.2.11, jak si čtenáři rádi ověří v následujícím cvičení.

Cvičení 1.3.18

Dokažte, že lemma 1.3.16 je důsledkem tvrzení 1.2.11.

1.3.2 Bolzanova-Weierstraßova věta

Konečně kráčíme cestou definice intervalu a důkazu slibované Bolzanovy-Weierstraßovy věty. Vybaveni pojmy maxima (minima) a suprema (infima), můžeme intuitivní představě intervalu dát formální ráz. Vágně řečeno je interval *souvislá* podmnožina $\mathbb{R}$. Formálně je no … vlastně totéž.

Definice 1.3.19 (Interval)

Podmnožinu $I \subseteq \mathbb{R}$ nazveme *intervalem*, pokud pro každé dva prvky $x < y \in I$ a $z \in \mathbb{R}$ platí

$$x < z < y \Rightarrow z \in I.$$

Intervaly mohou být otevřené, uzavřené a polouzavřené (či polootevřené?). Tyto vlastnosti intervalů jsou definovány pomocí existence maxim a minim.

Definice 1.3.20 (Typy intervalů)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že I je

- *otevřený*, když **nemá** maximum ani minimum;
- *uzavřený*, když **má** maximum i minimum;
- *shora uzavřený*, když má pouze maximum, ale nikoli minimum;
- *zdola uzavřený*, když má pouze minimum, ale nikoli maximum.

Otevřený interval I zapisujeme jako $I = (a, b)$, kde $a = \inf I$ a $b = \sup I$. Čísla a, b mohou být i $\pm\infty$, pokud I není shora či zdola omezený.

Uzavřený interval I zapisujeme jako $I = [a, b]$, kde $a = \min I$ a $b = \max I$. **Pozor!** Zde prvky a i b jsou striktně reálná čísla, tedy například $[0, \infty]$ **není** interval, neboť se nejedná o podmnožinu $\mathbb{R}$.

Definice 1.3.21 (Délka intervalu)

Délkou intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ s $a \coloneqq \inf I$ a $b \coloneqq \sup I$ myslíme číslo $\lambda(I) \coloneqq b - a$, je-li toto definováno.

Poznámka 1.3.22

Čtenáře snad mohlo zarazit značení $\lambda(I)$ pro délku intervalu, oproti zvyku podlehnuvšímu $|I|$. Písmeno λ zde není spojeno s angl. slovem **l**ength, jak by se snad mohlo prve zdát, nýbrž pochází ze jména **L**ebesgue. Totiž, *délka* intervalu je jeho *objemem* či *velikostí* vzhledem k tzv. Lebesgueově míře – mnohem obecnější konstrukci umožňující měřit velikosti všemožných podmnožin reálných čísel.

Příklad 1.3.23 (Pár intervalů)

Množina

- $I = (4, 6)$ je otevřený interval. Zřejmě platí $4 = \inf I$ a $6 = \sup I$. Ovšem, I nemá maximum ani minimum.
- $I = [-5, 4]$ je uzavřený interval. Zřejmě platí $-5 = \min I = \inf I$ a $4 = \max I = \sup I$.
- $I = [-2, \infty)$ je zdola uzavřený interval. Platí $-2 = \min I = \inf I$ a $\infty = \sup I$.
- $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ je otevřený interval. Platí $-\infty = \inf \mathbb{R}$ a $\infty = \sup \mathbb{R}$.
- $I = (4, 4)$ je prázdná, neboť je to z definice množina čísel $x \in \mathbb{R}$ takových, že $4 < x < 4$.
- $I = [\exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4}))), \exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4})))]$ je rovna $\{\exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4})))\}$, neboť je to z definice množina čísel $x \in \mathbb{R}$ takových, že
$$\exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4}))) \le x \le \exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4}))).$$

K pojmu intervalu se váže jedna speciální konstrukce zvaná *systém vnořených intervalů*. Definujeme si ji a ihned poté si povíme, čím je speciální.

Definice 1.3.24 (Systém vnořených intervalů)

Systém vnořených intervalů je posloupnost $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ podmnožin $\mathbb{R}$ (čili zobrazení $\mathbb{N} \to 2^{\mathbb{R}}$) splňující následující podmínky:

- I_n je **uzavřený** interval pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- $I_{n+1} \subseteq I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- $\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$.

Následující tvrzení je dalším ekvivalentem axiomu úplnosti a důsledku 1.2.13. V některých definicích reálných čísel se jím axiom úplnosti nahrazuje.

Tvrzení 1.3.25 (O vnořených intervalech)

Ať $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ je systém vnořených intervalů. Pak $\#(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n) = 1$, čili v průniku všech intervalů I_n leží přesně jeden prvek.

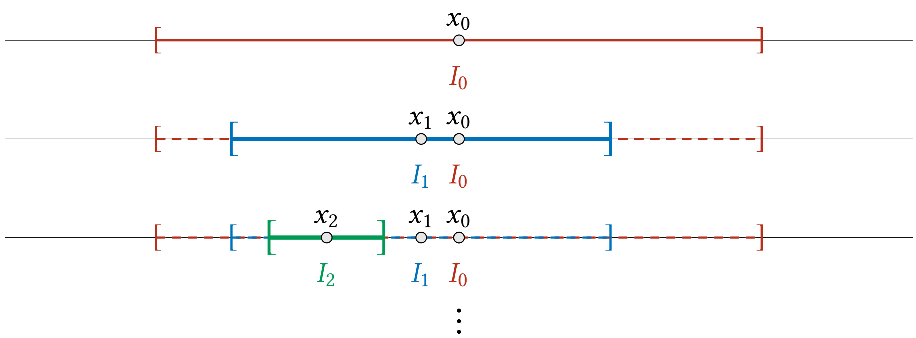
Důkaz. Je třeba dokázat, že takový prvek existuje a že je právě jeden. Začněme jednoznačností.

Předpokládejme, že existují prvky $x, y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ a $x \neq y$. Pak ale existuje konstanta $c > 0$ taková, že $|x - y| = c$. Protože však $x, y \in I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, speciálně platí $\lambda(I_n) \geq c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je spor s tím, že $\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$.

Dokážeme existenci. Označme $I_n = [a_n, b_n]$. Definujme posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x_n \coloneqq (a_n + b_n)/2$. Na volbě čísla $(a_n + b_n)/2$ není nic speciálního. Stačí volit jakékoliv $x_n \in I_n$. Ukážeme, že x konverguje. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$, nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda(I_{n_0}) < \varepsilon$. Potom ale platí $|x_n - x_m| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq n_0$, neboť $x_n, x_m \in I_{n_0}$, což je zaručeno podmínkou $I_n, I_m \subseteq I_{n_0}$.

Podle důsledku 1.2.13 má x limitu, označme ji L. Chceme ukázat, že $L \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$. K tomu je třeba ověřit, že $L \in I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ať pro spor existuje $n_L \in \mathbb{N}$ takové, že $L \notin I_{n_L}$. Protože intervaly jsou vnořené, znamená toto, že $L \notin I_n$ pro $n \geq n_L$. Volme libovolné $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_I \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda(I_n) < \varepsilon$ pro $n \geq n_I$. Ať $n_0 \coloneqq \max(n_L, n_I)$. Pak na jednu stranu pro $n \geq n_0$ platí $\lambda(I_n) < \varepsilon$ a na druhou stranu $L \notin I_n$. Sloučením obou vztahů dostaneme $|x_n - L| \geq \varepsilon/2$ pro $n \geq n_0$, neboť x_n leží v polovině intervalu I_n a L mimo něj pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je spor s tím, že $\lim x = L$.

Důkaz je hotov. ■



Obrázek 1.5: Důkaz tvrzení 1.3.25.

Definice 1.3.26 (Podposloupnost)

Řekneme, že $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je *podposloupností* posloupnosti $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, když pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $y_n = x_m$. Jinak řečeno, každý prvek y je rovněž prvkem x.

Již máme všechny ingredience k formulaci a důkazu Bolzanovy-Weierstraßovy věty. Je stěžejním tvrzením pro matematickou analýzu a pro matematiku obecně. Jeho filosofický význam dlí v poznání, že v „příliš velkých“ strukturách přirozeně vzniká řád.

Věta 1.3.27 (Bolzanova-Weierstraßova)

Ať $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je ***omezená*** *posloupnost. Pak existuje podposloupnost y posloupnosti x, která konverguje.*

Důkaz. Z omezenosti x existují $s, S \in \mathbb{R}$ taková, že $s \leq x_n \leq S$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Induktivně vyrobíme systém vnořených intervalů. Položme $I_0 \coloneqq [s, S]$. Za předpokladu, že $I_n = [a_n, b_n]$

je dán, sestrojíme I_{n+1} následovně:

$$I_{n+1} \coloneqq \begin{cases} [a_n, (a_n + b_n)/2], & \text{pokud } x_k \in [a_n, (a_n + b_n)/2] \text{ pro nekonečně mnoho } k \in \mathbb{N}, \\ [(a_n + b_n)/2, b_n], & \text{jinak.} \end{cases} \tag{1.2}$$

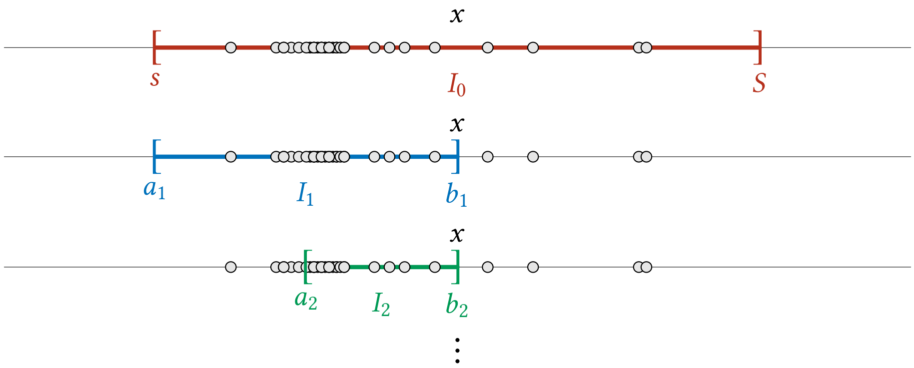
Rozmyslíme si lehce neformálním použitím matematické indukce, že tato konstrukce je korektní. První interval I_0 jistě obsahuje nekonečně mnoho prvků x, neboť obsahuje celou tuto posloupnost. Podobně, pokud I_n obsahuje nekonečně mnoho prvků x, pak aspoň jedna z jeho polovin musí rovněž obsahovat nekonečně mnoho prvků x. Z konstrukce (1.2) pak plyne, že rovněž I_{n+1} obsahuje nekonečně mnoho prvků x.

Ověříme, že $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ je systém vnořených intervalů podle definice 1.3.24.

- Zcela jistě je I_n uzavřený interval pro každé $n \in \mathbb{N}$.
- Rovněž zcela jistě $I_{n+1} \subseteq I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboť I_{n+1} je jedna z polovin intervalu I_n.
- Délky intervalů I_n klesají k 0, neboť $\lambda(I_{n+1}) = \lambda(I_n)/2$, a tedy $\lambda(I_n) = \lambda(I_0)/2^n$. Zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(I_0)}{2^n} = 0.$$

Vyberme nyní z x libovolnou podposloupnost $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takovou, že $y_n \in I_n$. To jistě lze, neboť každý z intervalů I_n obsahuje nekonečně mnoho prvků posloupnosti x. Pak ovšem podle tvrzení 1.3.25 existuje prvek $L \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ a podle důkazu téhož tvrzení platí $\lim y = L$. To však znamená, se znalostí lemmatu 1.2.7, že y konverguje. ■



Obrázek 1.6: Důkaz Bolzanovy-Weierstraßovy věty.

1.4 Metody výpočtů limit

Tato sekce je veskrze výpočetní, věnována způsobům určování limit rozličných posloupností – primárně těch zadaných vzorcem pro n-tý člen. Obecně neexistuje algoritmus pro výpočet limity posloupnosti a například limity posloupností zadaných rekurentně (další člen je vypočten jako kombinace předchozích) je často obtížné určit. K jejich výpočtu bývá užito metod z lineární algebry a obecně metod teorie diskrétních systémů zcela mimo rozsah tohoto textu.

Přinejmenším v případě limit zadaných „hezkými“ vzorci čítajícími podíly mnohočlenů a odmocnin je obyčejně možné algebraickými úpravami dojít k výsledku. Uvedeme si pár stěžejních tvrzení sloužících tomuto účelu.

K důkazu prvního bude užitečná následující nerovnost, kterou přenecháváme čtenáři jako (snadné) cvičení.

Cvičení 1.4.1

Dokažte, že pro čísla $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Věta 1.4.2 (Aritmetika limit)

Ať $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou reálné posloupnosti mající limitu (ale klidně i nekonečnou). Pak

(a) $\lim(a + b) = \lim a + \lim b$, *je-li pravá strana definována;*

(b) $\lim(a \cdot b) = \lim a \cdot \lim b$, *je-li pravá strana definována;*

(c) $\lim(a/b) = \lim a/\lim b$, *platí-li $b \not\approx 0$ a pravá strana je definována.*

Důkaz. Důkaz této věty je ryze výpočetního charakteru a využívá vhodně zvolených odhadů. Vzhledem k tomu, že povolujeme i nekonečné limity, je třeba důkaz každého bodu rozložit na případy. Položme $A \coloneqq \lim a$, $B \coloneqq \lim b$.

***Případ** $A, B \in \mathbb{R}$.*
Nejprve budeme předpokládat, že $A, B \in \mathbb{R}$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existují $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \geq n_a$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$ a pro každé $n \geq n_b$ zas $|b_n - B| < \varepsilon$. Zvolíme-li $n_0 \coloneqq \max(n_a, n_b)$, pak pro $n \geq n_0$ platí oba odhady zároveň. Potom ale, použitím trojúhelníkové nerovnosti, dostaneme

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

čili $\lim(a+b) = A+B$. Pro důkaz vzorce pro součin a podíl, musíme navíc využít lemmatu 1.2.10, tedy faktu, že konvergentní posloupnosti jsou omezené. Pročež najdeme $C_b \in \mathbb{R}$ takové, že od určitého indexu $n_1 \in \mathbb{N}$ dále platí $|b_n| \leq C_b$. Volme nově $n_0 \coloneqq \max(n_a, n_b, n_1)$ a pro $n \geq n_0$ počítejme

$$\begin{aligned}
|a_n \cdot b_n - A \cdot B| &= |a_n \cdot b_n - b_n \cdot A + b_n \cdot A - A \cdot B| = |b_n(a_n - A) + A(b_n - B)| \\
&\leq |b_n(a_n - A)| + |A(b_n - B)| = |b_n| \cdot |a_n - A| + |A| \cdot |b_n - B| \\
&< |C_b| \cdot \varepsilon + |A| \cdot \varepsilon = (|C_b| + |A|) \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Protože $|C_b|+|A|$ je kladná konstanta nezávislá na ε, dokazuje odhad výše, že $\lim(a \cdot b) = A \cdot B$. Konečně, v případě podílu volme $\varepsilon_b = |B|/2$. K tomuto ε_b nalezněme $n'_b \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n'_b$ platí $|b_n - B| < \varepsilon_b$. Poslední nerovnost spolu s cvičením 1.4.1 znamená, že $||b_n| - |B|| < \varepsilon$. Tento vztah si rozepíšeme na

$$|B| - \varepsilon_b < |b_n| < |B| + \varepsilon_b.$$

Levá z těchto nerovností je pak ekvivalentní $|b_n| > |B|/2$ neboli $1/|b_n| < 2/|B|$. Položme

$n_0 \coloneqq \max(n_a, n_b, n_b')$. Potom pro $n \geq n_0$ máme

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_nB - b_nA}{b_nB}\right| = \left|\frac{a_nB - AB + AB - b_nA}{b_nB}\right| \leq \left|\frac{B(a_n - A)}{b_nB}\right| + \left|\frac{A(B - b_n)}{b_nB}\right|$$
$$= \frac{1}{|b_n|}\left(|a_n - A| + \frac{|A|}{|B|}|B - b_n|\right) < \frac{2\varepsilon}{|B|}\left(1 + \frac{|A|}{|B|}\right).$$

Protože $|A|$ i $|B|$ jsou konstanty nezávislé na ε, toto znamená, že $\lim(a/b) = A/B$.

Případ $A = \pm\infty, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$**.**
Předpokládejme, že $\lim a = \infty$; případ $\lim a = -\infty$ se dokáže v zásadě identicky. Pak pro dané ε_a existuje $n_a \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_a$ platí $a_n > \varepsilon_a$. Podle lemmatu 1.2.10 je posloupnost b omezená, čili existuje $C_b > 0$ takové, že $|b_n| \leq C_b$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom pro $n \geq n_a$ máme

$$a_n + b_n \geq a_n - C_b > \varepsilon_a - C_b.$$

Jelikož C_b je konstantní, plyne z tohoto odhadu, že $\lim(a + b) = \infty = A + B$.

Pro důkaz součinu nejprve ať $B > 0$. Pak existuje konstanta $C_b > 0$ a $n_b \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_b$ je $b_n \geq C_b$. Pročež, pro libovolné $C_a > 0$ a $n \geq \max(n_a, n_b)$ dostaneme

$$a_n \cdot b_n \geq \varepsilon_a \cdot C_b.$$

čili $\lim(a \cdot b) = \infty = A \cdot B$. Z omezenosti (plynoucí z konvergence) b pak zase existují n_b' a $K_b > 0$ takové, že $b_n \leq K_b$, čili též $1/b_n \geq 1/K_b$, pro $n \geq n_b'$. Pro $n \geq \max(n_a, n_b')$ tedy

$$\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{\varepsilon_a}{K_b},$$

což dokazuje $\lim(a/b) = \infty = A/B$. Velmi podobně se řeší případ $B < 0$.

Zdlouhavý důkaz zakončíme komentářem, že případ $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, B = \pm\infty$ je symetrický předchozímu a případy $A = 0, B = \pm\infty$, též $A = \pm\infty, B = 0$ a konečně $A = \pm\infty, B = \pm\infty$ jsou triviální. ■

Věta o aritmetice limit je zcela nejužitečnější tvrzení k jejich výpočtu, neboť umožňuje limitu výrazu rozdělit na mnoho menších „podlimit“, jejichž výpočet je snadný. Další dvě lemmata jsou často též dobrými sluhy.

Lemma 1.4.3 (Limita odmocniny)

Ať $a : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ *je posloupnost* nezáporných *čísel. Ať též* $\lim a = A$ *(speciálně tedy předpokládáme, že* $\lim a$ *existuje). Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Zdlouhavý a technický. Ambiciózní čtenáři jsou zváni, aby se o něj pokusili. ■

Lemma 1.4.4 (O dvou strážnících)

Ať $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou posloupnosti reálných čísel a $L \coloneqq \lim a = \lim c$. Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n \leq c_n$, pak $\lim b = L$.

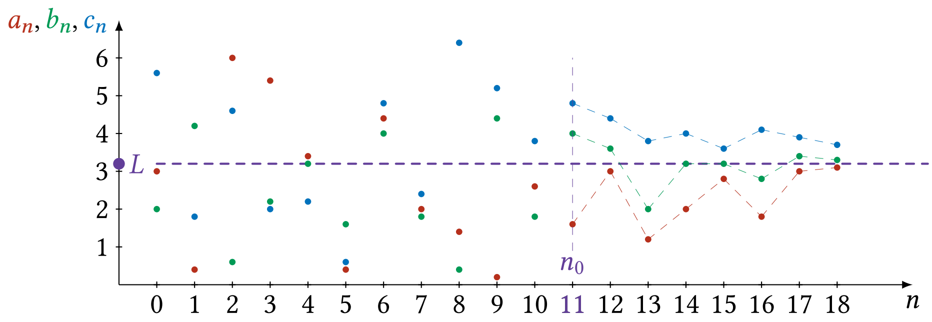
DŮKAZ. Protože $\lim a = L$ a též $\lim c = L$, nalezneme pro dané $\varepsilon > 0$ index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že pro $n \geq n_1$ platí dva odhady:

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |c_n - L| < \varepsilon.$$

Potom ovšem $a_n > L - \varepsilon$ a $c_n < L + \varepsilon$. Z předpokladu existuje $n_b \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro $n \geq n_b$. Zvolíme-li tedy $n_0 \coloneqq \max(n_1, n_b)$, pak pro $n \geq n_0$ platí

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon.$$

Sloučením obou nerovností dostaneme pro $n \geq n_0$ odhad $|b_n - L| < \varepsilon$, čili $\lim b = L$. ■



Obrázek 1.7: Lemma o dvou strážnících.

Zbytek sekce je věnován výpočtům limit vybraných posloupností s účelem objasnit použití právě sepsaných tvrzení. Mnoho z nich je ponecháno čtenářům jako cvičení.

Úloha 1.4.5

Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}.$$

ŘEŠENÍ. Použijeme větu o aritmetice limit. Ta vyžaduje, aby výsledná strana rovnosti byla definována. Je tudíž možné (a žádoucí) limitu spočítat – často opakovaným použitím této věty – a teprve na konci výpočtu argumentovat, že její nasazení bylo oprávněné.

Dobrým prvním krokem při řešení limit zadaných zlomky je najít v čitateli i jmenovateli „nejrychleji rostoucí“ člen. Spojením „nejrychleji rostoucí“ zde míníme takový člen, velikost ostatních členů je pro velmi velká n vůči jehož zanedbatelná. V čitateli zlomku

$$\frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}$$

je nejrychleji rostoucí člen právě $2n^2$. Například, pro $n = 10^9$ je $2n^2 = 2 \cdot 10^{18}$ zatímco $n = 10^9$ zabírá méně než jednu miliardtinu $2n^2$. Ve jmenovateli je naopak jediným rostoucím členem n^3. Nejrychleji rostoucí členy (pro pohodlí bez koeficientů) z obou částí zlomku vytkneme.

Dostaneme

$$\frac{2n^2+n-3}{n^3-1} = \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(1-\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}}.$$

Část (b) věty o aritmetice limit nyní dává

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{n^3-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}}, \tag{$\triangle$}$$

za předpokladu, že součin na pravé straně je definován!

Již víme, že platí $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. **Pozor!** Bylo by lákavé prohlásit, že výsledná limita je rovna 0, bo součin čehokoliv s 0 je též 0. To je pravda pro všechna čísla až na $\pm\infty$. Musíme se ujistit, že druhá limita v součinu na pravé straně ($\triangle$) existuje a není nekonečná.

S použitím věty o aritmetice limit (c) počítáme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n^3}}.$$

Limity v čitateli a jmenovateli zlomku výše spočteme zvlášť. Z věty o aritmetice limit, části (a), plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} 2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2} = \lim_{n\to\infty} 2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2} = 2+0-0=2.$$

Podle stejného tvrzení též

$$\lim_{n\to\infty} 1-\frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty} 1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 1-0=1.$$

To znamená, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} = \frac{2}{1} = 2.$$

Odtud pak

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{n^3-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} = 0\cdot 2 = 0.$$

Protože všechny výrazy na konci výpočtů jsou reálná čísla (a tedy speciálně jsou dobře definované), bylo lze použít větu o aritmetice limit. ♠

Poznámka 1.4.6

Právě vyřešená úloha 1.4.5 ukazuje, jak dlouhé se limitní úlohy stávají při pedantickém ověřování všech předpokladů. A to jsme navíc použili *jen jediné tvrzení* k jejímu výpočtu. Takový postup není, z pochopitelného důvodu, obvyklý. Opakovaná použití věty o aritmetice limit se často schovají pod jedno prohlášení a výpočet limity je pak mnohem stručnější. Názorně předvedeme.

Snadno úpravou zjistíme, že

$$\frac{2n^2+n-3}{n^3-1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}}.$$

Potom z věty o aritmetice limit platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} = 0 \cdot \frac{2+0+0}{1+0} = 0.$$

Protože výsledný výraz je definovaný, byla věta o aritmetice limit použita korektně.

My rovněž hodláme v dalším textu bez varování řešit podobné limitní příklady tímto „zkráceným“ způsobem.

Varování 1.4.7

Větou o aritmetice limit **nelze** dokazovat, že limita posloupnosti neexistuje, neboť předpokladem každé její části je *definovanost* výsledného výrazu. Zanedbání toho předpokladu může snadno vést ke lži. Uvažme následující triviální příklad.

Prohlásili-li bychom, že z věty o aritmetice limit platí výpočet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \frac{\lim_{n\to\infty} n}{\lim_{n\to\infty} n} = \frac{\infty}{\infty},$$

nabyli bychom práva tvrdit, že $\lim_{n\to\infty} n/n$ neexistuje, přestože zřejmě platí $\lim_{n\to\infty} n/n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Věta o aritmetice limit je tudíž zcela prázdné tvrzení v případě nedefinovanosti výsledného výrazu.

Úloha 1.4.8

Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}.$$

Řešení. Z binomické věty platí

$$(n+m)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} n^{100-k} m^k.$$

Je tudíž snadno vidět, že členy n^{100} v se v čitateli i jmenovateli odečtou a „nejrychleji rostoucím“ členem v čitateli i jmenovateli stane sebe cn^{99} pro vhodné $c \in \mathbb{N}$. Konkrétně, v čitateli koeficient n^{99} vychází

$$\binom{100}{1} \cdot 4^1 - \binom{100}{1} \cdot 3^1 = 400 - 300 = 100$$

a ve jmenovateli zkrátka

$$\binom{100}{1} \cdot 2^1 = 200.$$

Užitím výpočtu v předešedším odstavci získáme úpravou původního výrazu

$$\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}} = \frac{100n^{99}+\sum_{k=2}^{100}\binom{100}{k}(4^k-3^k)n^{100-k}}{200n^{99}+\sum_{k=2}^{100}\binom{100}{k}2^k n^{100-k}}.$$

Vytčení n^{99} z obou částí zlomku dá

$$\frac{100n^{99}+\sum_{k=2}^{100}\binom{100}{k}(4^k-3^k)n^{100-k}}{200n^{99}+\sum_{k=2}^{100}\binom{100}{k}2^k n^{100-k}} = \frac{n^{99}\left(100+\sum_{k=2}^{100}\binom{100}{k}(4^k-3^k)n^{1-k}\right)}{n^{99}\left(200+\sum_{k=2}^{100}\binom{100}{k}2^k n^{1-k}\right)}.$$

Položme

$$\begin{aligned} f(n) &\coloneqq 100+\sum_{k=2}^{100}\binom{100}{k}(4^k-3^k)n^{1-k}, \\ g(n) &\coloneqq 200+\sum_{k=2}^{100}\binom{100}{k}2^k n^{1-k}. \end{aligned}$$

Nahlédneme, že $\lim_{n\to\infty} f(n) = 100$. Vskutku, z věty o aritmetice limit, částí (a) a (b), platí

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} f(n) = \lim_{n\to\infty} 100+\sum_{k=2}^{100}\binom{100}{k}(4^k-3^k)n^{1-k} &= 100+\sum_{k=2}^{100}(4^k-3^k)\cdot\lim_{n\to\infty} n^{1-k} \\ &= 100+\sum_{k=2}^{100}(4^k-3^k)\cdot 0 = 100, \end{aligned}$$

kde $\lim_{n\to\infty} n^{1-k} = 0$ pro $k \geq 2$ zřejmě. Podobně bychom byli spočetli i $\lim_{n\to\infty} g(n) = 200$. Větou o aritmetice limit, částí (b) a (c), pak spočteme

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^{99}}{n^{99}}\cdot\frac{\lim_{n\to\infty} f(n)}{\lim_{n\to\infty} g(n)} = 1\cdot\frac{100}{200} = \frac{1}{2}.$$

Protože výsledkem je reálné číslo, byla věta o aritmetice limit použita legálně. ♠

Úloha 1.4.9

Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}.$$

Řešení. Zkusili-li bychom spočítat limitu přímo z věty o aritmetice limit a lemmatu 1.4.3, dostali bychom

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+n}-\lim_{n\to\infty}\sqrt{n^2+1} = \infty-\infty,$$

anžto výraz není definován. Je pročež třeba jej upravit. Využijeme vzorce

$$a^2-b^2 = (a+b)(a-b).$$

Pro $a \coloneqq \sqrt{n^2+n}$ a $b \coloneqq \sqrt{n^2+1}$ dostaneme

$$(n^2+n)-(n^2+1) = \left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right).$$

Zadaný výraz upravíme posléze na

$$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}=\frac{\left(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}=\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}.$$

Vidíme, že nejrychleji rostoucí člen v čitateli je n a ve jmenovateli $\sqrt{n^2}=n$. Jejich vytčením získáme

$$\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{n}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Byvše zaštítěni lemmatem 1.4.3, nabyli jsme práva tvrdit, že

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n}}.$$

a podobně pro $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+1/n^2}$. Nyní tedy z věty o aritmetice limit, částí (a) a (c), plyne, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2}.$$

Výsledkem je reálné číslo, věta o aritmetice limit byla užita legálně. ♠

Úloha 1.4.10

Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+2^n+3^n}.$$

Varování 1.4.11

Pozor! Obecně

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\neq\sqrt[n]{\lim_{n\to\infty}a_n}.$$

Taková rovnost by ani nedávala žádný smysl, protože ve výraze napravo je odmocnina **vně** limity, přestože závisí na n.

Lemma 1.4.3 předpokládá, že $k\in\mathbb{N}$ je **konstantní**, čili nezávisí na n.

Řešení (Úlohy 1.4.10). Na první pohled není zřejmé, kterak výraz $\sqrt[n]{n^2+2^n+3^n}$ upravit, aby výpočet mohl pokročit, bo věta o aritmetice limit není v závěsu varování 1.4.11 přímo použitelná.

V případech, kdy člověk nevidí způsob, jak spočítat konkrétní zadanou limitu, jesti pleché uchýliti sebe k odhadům zezdola i seshora jinými posloupnosti se snadněji určitelnými limitami. Zvoleny-li ony posloupnosti, bychu měly stejnou limitu, závěr lemmatu 1.4.4 dává limitu i posloupnosti zadané.

K volbě vhodných posloupností je však dlužno prve „tipnout“ limitu zadaného výrazu. Jelikož 3^n je jistě nejrychleji rostoucí člen dané posloupnosti, a $\sqrt[n]{3^n}=3$, zdá se rozumným pokusit se nejprve odhadnout zadaný výraz zezdola i seshora posloupnostmi, jejichž limita je 3.

Dolní odhad je triviální a v zásadě jsme ho již uvedli. Totiž, jistě platí

$$3^n \leq n^2 + 2^n + 3^n,$$

a tedy i

$$\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}.$$

Zřejmě $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = \lim_{n\to\infty} 3 = 3$.

Snad méně přímočarý jest horní odhad, jenž však plyne z uvědomění, že 3^n je nejrychleji rostoucí člen dané posloupnosti. Speciálně máme odhady $n^2 \leq 3^n$ i $2^n \leq 3^n$. Můžeme pročež pro všechna $n \in \mathbb{N}$ učinit další odhad:

$$n^2 + 2^n + 3^n \leq 3^n + 3^n + 3^n = 3 \cdot 3^n.$$

Z věty o aritmetice limit potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \cdot \lim_{n\to\infty} 3 = 1 \cdot 3 = 3.$$

Fakt, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$ je snadno dokazatelný a onen důkaz ponecháme čtenáři jako cvičení.

Jelikož pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 3^n}$$

a již jsme spočetli, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 \cdot 3^n} = 3$, můžeme prohlásit s použitím lemmatu 1.4.4, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} = 3.$$

♠

Cvičení 1.4.12

Dokažte, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Úplný závěr sekce věnujeme výpočtu jistých *speciálních* limit, které je výhodné znát, neboť v tradičních limitních úlohách vyvstávají často. V principu jde o limity zadané zlomky, u kterých není na první pohled zřejmé, zda roste rychleji čitatel, či jmenovatel.

Následující tvrzení spolu s větou o aritmetice limit říká v podstatě, že „Každá polynomiální funkce roste pomaleji než každá funkce exponenciální.“

Lemma 1.4.13

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,$$

kdykoli $a > 1$ *a* $k \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Dokážeme tvrzení nejprve pro $k = 1$.

Položme $b \coloneqq a - 1$. Potom z binomické věty

$$a^n = (1+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^i.$$

Speciálně tedy platí

$$(1+b)^n \geq \binom{n}{2} b^2 = \frac{n(n-1)}{2} b^2,$$

neboť součet výše obsahuje člen napravo a ještě mnoho dalších členů, z nichž všechny jsou kladné. Potom ale

$$\frac{n}{a^n} = \frac{n}{(1+b)^n} \leq \frac{2n}{b^2 n(n-1)} = \frac{2}{b^2(n-1)}.$$

Snadno vidíme, že platí $n/a^n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Máme tudíž oboustranný odhad

$$0 \leq \frac{n}{a^n} \leq \frac{2}{b^2(n-1)}.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{b^2(n-1)} = 0,$$

jest závěrem lemmatu 1.4.4, že $\lim_{n\to\infty} n/a^n = 0$.

V obecném případě $k \in \mathbb{N}$ stačí položit $b \coloneqq \sqrt[k]{a}$. Potom $b > 1$ (protože $a > 1$) a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \right)^k = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{b^n} \right)^k = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} \right)^k,$$

kde poslední rovnost platí z věty o aritmetice limit. Podle již dokázané části tvrzení je pravdou, žeť

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} \right)^k = 0^k = 0,$$

což bylo dokázati. ■

Lemma 1.4.14

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Důkaz. Rozložíme výraz následovně:

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{n}.$$

Pozorujeme, že pro $2 \leq k \leq n$ platí $k/n \leq 1$. Čili,

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \prod_{k=2}^{n} 1 = \frac{1}{n}.$$

Dostáváme pro $n \in \mathbb{N}$ odhady
$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}.$$
Jelikož $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, platí z lemmatu 1.4.4 závěr
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0,$$
jak jsme chtěli. ∎

Lemma 1.4.15

Pro $a > 1$ platí
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$
čili „faktoriál roste rychleji než exponenciála“.

Důkaz. Nalezněme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m > a$. Rozložíme
$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^m}{m!} \cdot \prod_{k=m+1}^{n} \frac{a}{k}.$$
Všimněme sobě, že pro $k > m$ je $a/k < 1$, ježto m bylo zvoleno ostře větší než a. Speciálně tedy platí
$$\prod_{k=m+1}^{n} \frac{a}{k} = \frac{a}{n} \cdot \prod_{k=m+1}^{n-1} \frac{a}{k} \leq \frac{a}{n},$$
neboť
$$\prod_{k=m+1}^{n-1} \frac{a}{k} \leq \prod_{k=m+1}^{n-1} 1 = 1.$$
Položme $c_m \coloneqq a^m/m!$. Číslo c_m je konstantní (vzhledem k n), neboť m i a jsou. Můžeme odhadnout
$$0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{a}{n} = c_m \cdot \frac{a}{n}.$$
Z věty o aritmetice limit platí
$$\lim_{n\to\infty} c_m \cdot \frac{a}{n} = ac_m \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$
Podle lemmatu 1.4.4 tudíž máme i
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$
což zakončuje důkaz. ∎

Několik limitních cvičení na závěr.

Cvičení 1.4.16

Dokažte, že
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$
Hint: Rozložte součin $n!$ na dvě poloviny a tu větší zespodu odhadněte vhodnou posloupností

jdoucí k ∞.

Cvičení 1.4.17

Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2 - n} - 2n.$$

Cvičení 1.4.18

Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Cvičení 1.4.19 (těžké)

Spočtěte limitu posloupnosti $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zadané rekurentním vztahem

$$\begin{aligned} a_0 &\coloneqq 10, \\ a_{n+1} &\coloneqq 6 - \frac{5}{a_n} \text{ pro } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

1.5 Číselné řady

Speciální, a pro rozvoj diferenciálního kalkulu zcela nezanedbatelnou, čeledí posloupností jsou tzv. *číselné řady*. Intuitivně a téměř i formálně jsou číselné řady vlastně součty nekonečného počtu (reálných) čísel. Přechod od posloupnosti k číselné řadě je přímočarý – sestrojíme zkrátka součet všech prvků oné posloupnosti *zachovajíce jejich pořadí*. Jest ovšem dlužno dbáti skutku, žeť číselné řady jsou samy posloupnostmi. Totiž, limita posloupnosti, jejíž n-tý člen je právě součtem n prvních členů posloupnosti druhé, je rovněž přesně součtem číselné řady této druhé posloupnosti. Tímto způsobem se součty číselných řad definují, což umožňuje k jejich studiu využít dokázaných tvrzení o limitách posloupností z předchozích oddílů.

Definice 1.5.1 (Posloupnost částečných součtů)

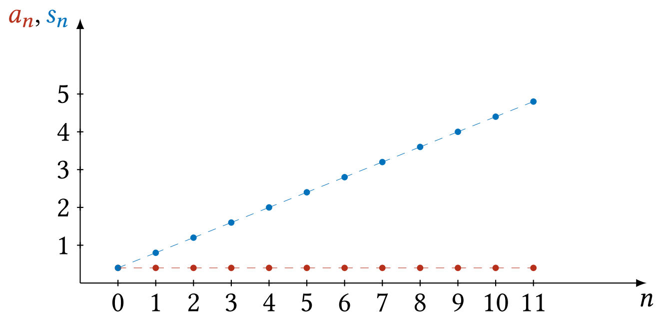
Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost. *Posloupností částečných součtů* posloupnosti a nazveme posloupnost $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$s_n \coloneqq \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Příklad 1.5.2

Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost $0, 1, 2, 3, \ldots$ (tj. $a_n = n$), pak posloupnost jejích částečných součtů je $0, 0+1, 0+1+2, 0+1+2+3, \ldots$, neboli

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} i.$$



Obrázek 1.8: Konstantní posloupnost a_n a její posloupnost částečných součtů s_n.

Definice 1.5.3 (Součet číselné řady)

Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pak výraz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nazýváme *číselnou řadou* posloupnosti a. Ať je dále $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupností částečných součtů posloupnosti a. Existuje-li $\lim_{n\to\infty} s_n$ (ne nutně konečná), pak řkouce, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *má součet*, definujeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \coloneqq \lim_{n\to\infty} s_n .$$

Slovně vyjádřeno, součtem číselné řady míníme limitu částečných součtů posloupnosti jejích členů.

Varování 1.5.4

Uvědomme sobě, že **součet číselné řady**, existuje-li, **závisí na všech jejích členech**. Obecně tedy dvě řady lišíce se pouze konečným počtem členů mají **různý** součet. Například platí (ale nedokážeme si to), že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pak ale zřejmě

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1,$$

tedy ony dvě řady mají rozdílné součty.

Tato situace však **nenastává** u posloupností částečných součtů s_n, neboť n-tý člen takové posloupnosti je součtem prvních n členů sesterské číselné řady. Tudíž platí (jako u každé posloupnosti) $\lim_{n\to\infty} s_{n+k} = \lim_{n\to\infty} s_n$ pro libovolnou konstantu $k \in \mathbb{N}$.

Úloha 1.5.5

Spočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Řešení. Posloupnost odpovídající zadané řadě je $a_n = 1/n(n+1)$. Tudíž, posloupnost jejích částečných součtů je dána předpisem

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}.$$

Naším úkolem je spočítat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$. Za tímto účelem nalezneme „hezčí“ vyjádření posloupnosti s_n. Snadno ověříme, že platí

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dále pak

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1,$$

čili rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. ♠

Úloha 1.5.6 (Geometrická řada)

Dokažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, kde $q \in \mathbb{R}$, má ***konečný*** *součet právě tehdy, když $|q| < 1$, a v tomto případě platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \frac{1}{1-q}.$$

Řešení. Ukážeme nejprve, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $q \neq 1$ platí

$$s_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

V případě, že $q = 1$, máme zřejmě $s_n = n+1$, neboť $1^k = 1$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Pro $q \neq 1$ potom

$$\begin{array}{rcccccccccccc} s_n & = & q^0 & + & q^1 & + & q^2 & + & \ldots & + & q^n & & \\ q \cdot s_n & = & & & q^1 & + & q^2 & + & \ldots & + & q^n & + & q^{n+1}, \end{array}$$

čili $s_n - q \cdot s_n = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$, z čehož snadno spočteme, že

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Dále víme, že $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ pro $|q| < 1$ a pro $|q| > 1$ je tato limita nekonečná nebo neexistuje. Je-li $q = 1$, tak $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$, a je-li $q = -1$, tak $\lim_{n\to\infty} q_n$ neexistuje.

Odtud a z věty o aritmetice limit,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - q^{n+1}}{\lim_{n\to\infty} 1 - q} = \frac{1}{1-q},$$

když $|q| < 1$. Pro $|q| \geq 1$ plyne z předchozí úvahy, že $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje nebo je nekonečná. Tím je součet zadané řady spočten. ♠

Nyní se jmeme odvodit několik základních tvrzení o existenci konečných součtů číselných řad, která plynou v podstatě okamžitě z jejich definice jako limit posloupností částečných součtů.

Asi není překvapivé, že aby součet řady mohl být konečný, musí posloupnost jejích členů mít limitu 0. Jinak bychom totiž sčítali nekonečně mnoho čísel s absolutní hodnotou větší než nějaká konstanta, čímž bychom určitě nedostali součet konečný.

Lemma 1.5.7 (Nutná podmínka existence součtu řady)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je číselná řada, která má konečný součet. Pak nutně $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. Označme s_n posloupnost částečných součtů a_n. Z předpokladu existuje $\lim_{n\to\infty} s_n$ a je konečná. Jelikož platí $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$, můžeme použitím věty o aritmetice limit počítat

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0.$$

Zde je důležité zpozorovat, že výraz $\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$ jest z konečnosti $\lim_{n\to\infty} s_n$ vždy definován.

Snadno vidíme, že platí

$$s_n - s_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n.$$

Pak ovšem

$$0 = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

kterak bylo dokázati. ■

Dalším přímo přenositelným pojmem z teorie limit posloupností je pojem *konvergence*. O číselné řadě řekneme, že *konverguje*, když se velikosti součtů členů mezi danými indexy neustále zmenšují. Formální definice následuje.

Definice 1.5.8 (Konvergence řady)

Díme, že číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje*, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m > n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Jak by jeden snad čekal, konvergence a existence konečného součtu řady jsou víceméně záměnné.

Tvrzení 1.5.9 (Vztah konvergence a existence součtu)

Číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ má konečný součet právě tehdy, když konverguje.

Důkaz. Označme s_n posloupnost částečných součtů a_n. Pak to, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ má konečný součet, znamená, že s_n má konečnou limitu. Dále si všimněme, že

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k = s_m - s_n,$$

a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když posloupnost s_n konverguje. Tím jsme převedli původní tvrzení na to, že s_n má konečnou limitu právě tehdy, když s_n konverguje. Tuto ekvivalenci jsme dokázali v rámci sekce 1.2. ■

Předchozí tvrzení budeme v dalším textu používat zcela bez varování a bez explicitního odkazu, zaměňujíce ekvivalentní výroky „Řada konverguje.“ a „Řada má konečný součet.“

Cvičení 1.5.10

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **divergentní** řada (tj. nemá žádný nebo konečný součet). Ať s_n je posloupnost částečných součtů posloupnosti a_n. Dokažte, že i řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/s_n$ je divergentní.

Ježto řady jsou též posloupnosti, lze je pochopitelně sčítat, násobit a dělit „člen po členu“. Pro takto vzniklé řady platí podobná pravidla jako pro obecné posloupnosti. Pro pořádek si je uvedeme.

Tvrzení 1.5.11 (Aritmetika číselných řad)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou číselné řady.

(1) Je-li $c \in \mathbb{R}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$ konverguje a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

(2) Konvergují-li $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, pak konverguje i $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ a platí

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

(3) Konvergují-li $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, pak konverguje i $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot b_n)$.

Důkaz. Označme s_n, t_n posloupnosti částečných součtů $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, respektive. Body (1) a (2) plynou přímo z věty o aritmetice limit. Vskutku, v bodě (1) máme

$$c \cdot s_n = c \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) = \sum_{k=0}^{n} c \cdot a_k,$$

a tedy je cs_n posloupností částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$. Pak tedy z věty o aritmetice limit

$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = \lim_{n\to\infty} cs_n = c \lim_{n\to\infty} s_n = c\sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Důkaz konvergence $c\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ za předpokladu konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ plyne přímo z toho, že když existuje $\lim_{n\to\infty} s_n$, pak existuje i $c\lim_{n\to\infty} s_n$.

V bodě (2) opět nahlédneme, že $s_n + t_n$ je posloupností částečných součtů $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$. Pak tedy, opět z věty o aritmetice limit, dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

V bodě (3) nestačí použít větu o aritmetice limit, neboť $s_n \cdot t_n$ **není** posloupností částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$. Zde použijeme lemma 1.5.7 a definici konvergence. Volme $\varepsilon \coloneqq 1$. K němu podle tohoto lemmatu existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ máme $|a_n| < 1$.

Ať je nyní libovolné $\varepsilon > 0$ dáno. Ježto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergují, existují $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ taková, že pro $m > n \geq n_a$ platí $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon$ a pro $m > n \geq n_b$ platí $|\sum_{k=n+1}^{m} b_k| < \varepsilon$. Volme nyní $n_0 \coloneqq \max(n_1, n_a, n_b)$. Pak pro $m > n > n_0$ platí

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| b_k\right| < \left|\sum_{k=n+1}^{m} b_k\right| < \varepsilon,$$

kde první nerovnost plyne z toho, že $a_k \leq |a_k|$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a druhá z toho, že pro $k > n_1$ je $|a_k| < 1$. Tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. ■

Varování 1.5.12

Bod (3) v předchozím tvrzení zaručuje pouze **existenci** konečného součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ za předpokladu existence konečného součtu řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, ale **netvrdí nic o jeho hodnotě**! Obecně na základě znalosti hodnot součtů obou řad nelze kromě konečnosti usoudit nic o hodnotě součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$. Zcela jistě neplatí, že by tato hodnota byla součinem součtů řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Uvažme například libovolnou geometrickou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ pro $|q| < 1$. Ta má podle úlohy 1.5.6 součet $\frac{1}{1-q}$. Pak tedy platí

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \left(\frac{1}{1-q}\right)^2.$$

Avšak, řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}$ je rovněž geometrická s kvocientem $q^2 < 1$, a tudíž její součet je

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} = \frac{1}{1-q^2} \neq \left(\frac{1}{1-q}\right)^2.$$

1.5.1 Řady s nezápornými členy

V této sekci se budeme zabývat nejsnadněji zpytovaným typem číselných řad – řadami, jejichž členy jsou pouze nezáporná čísla. Jejich zpyt je vesměs jednoduchý z toho důvodu, že tyto řady vždycky mají součet, ať už konečný či nekonečný. Existence záporných členů v číselné řadě totiž vyžaduje, aby jeden analyzoval jemný vztah mezi její ‘kladnou’ a ‘zápornou’ částí a hodnotil, zda obě v jistém smyslu ‘rostou stejně rychle’, či nikolivěk.

Součty ani řad s nezápornými členy však není vůbec triviální určit a otázky jejich konvergence jsou obyčejně řešeny srovnáními s řadami, jejichž součty známy jsou. Nástrojem k tomu je následující vcelku přímočaré tvrzení.

Tvrzení 1.5.13 (Srovnávací kritérium)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou řady ***s nezápornými členy****. Ať dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Potom,*

(a) konverguje-li $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, konverguje i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$;

(b) je-li $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, pak i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$.

Důkaz. Položme $s_n \coloneqq \sum_{i=0}^{n} a_i$ a $t_n \coloneqq \sum_{i=0}^{n} b_i$. Z předpokladu máme $n_0 \in \mathbb{N}$, od kterého dále již platí $a_n \leq b_n$. Pro důkaz (a) předpokládejme rovněž, že $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje, tj. existuje konečná $\lim_{n\to\infty} t_n$.

Ukážeme nejprve, že s_n je shora omezená. Pro $n \geq n_0$ odhadujme

$$s_n = s_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i \leq s_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n} b_i \leq s_{n_0} + \sum_{i=0}^{n} b_i = s_{n_0} + t_m,$$

kde odhad $\sum_{i=n_0+1}^{n} b_i \leq \sum_{i=0}^{n} b_i$ platí díky nezápornosti členů b_n.

Nyní, opět pro nezápornost b_n, je posloupnost částečných součtů t_n neklesající. Pročež pro všechna $k \in \mathbb{N}$ máme $t_k \leq \lim_{n\to\infty} t_n$. To nám umožňuje pro $n \geq n_0$ dokončit odhad

$$s_n \leq s_{n_0} + t_n \leq s_{n_0} + \lim_{n\to\infty} t_n,$$

který ukazuje, že s_n je omezená. To ovšem zakončuje důkaz části (a), neboť s_n je shora omezená neklesající (pro nezápornost a_n) posloupnost, a tedy má podle lemmatu 1.3.15 limitu.

Část (b) je pouze přepisem části (a) v kontrapozitivní formě, která zní, že nekonveruje-li $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, pak nekonverguje ani $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Ovšem, divergentní řady s nezápornými členy mají součet ∞, odkud již přímo plyne závěr v (b). ■

Pochopitelně, srovnávací kritérium je užitečné pouze ve chvíli, kdy má jeden *s čím* srovnávat. Jmeme se odvodit divergenci jedné a konvergenci druhé z takřkouce „učebnicových“ řad.

Lemma 1.5.14 (Divergence harmonické řady)

Číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverguje, neboli $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$.

Důkaz. Použijeme tvrzení 1.5.9 a dokážeme negaci výroku o konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Konkrétně výrok

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists m > n \geq n_0 : \left| \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i} \right| \geq \varepsilon.$$

Ukážeme, že $\varepsilon = 1/2$ vyhovuje výroku výše. Ať je $n_0 \in \mathbb{N}$ dáno. Volme $n \coloneqq n_0$ a $m \coloneqq 2n_0$. Pak pro všechna $i \in \mathbb{N}, n_0 \leq i \leq 2n_0$ platí $1/i \geq 1/2n_0$. Součet výše můžeme pročež zezdola odhadnout

$$\left|\sum_{i=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{i}\right| = \sum_{i=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{2n_0} = n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2},$$

kde první nerovnost plyne z faktu, že $1/n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro dané $n_0 \in \mathbb{N}$ tudíž platí

$$\left|\sum_{i=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{i}\right| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon,$$

a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverguje. Protože jsou však její členy nezáporné, znamená toto, že $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$, což bylo jest dokázati. ■

Poznámka 1.5.15

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ sluje *harmonická*, protože je úzce spojena s pojmem *alikvóty* a harmonie v hudbě. Vlnové délky alikvót daného tónu (vlastně „souznivých" tónů) jsou $1/2, 1/3, 1/4$ atd. jeho základní frekvence. Každý člen harmonické řady je *harmonickým průměrem* svých sousedů, takže trojice členů v této řadě představuje vlnové délky tónů tvořících konsonantní akordy v tónině dané původním frekvencí (jejíž alikvóty jsou vyjádřeny členy řady). Vizte např. stránku na Wikipedii.

Lemma 1.5.16

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konverguje.

Důkaz. Srovnáme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1)$ z úlohy 1.5.5, jejíž součet je roven 1. Protože obě řady mají nezáporné členy, lze použít srovnávací kritérium.

Indukcí dokážeme, že platí

$$\frac{2}{n(n+1)} \geq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Pro $n = 1$ máme

$$\frac{2}{1 \cdot (1+1)} = 1 \geq \frac{1}{1^2} = 1.$$

Předpokládejme, že daná rovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$. Počítáme

$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{(n+1)^2},$$

kde první nerovnost plyne z indukčního předpokladu (po vynásobení obou stran číslem $n \in \mathbb{N}$) a poslední nerovnost plyne ze zřejmého vztahu

$$n(n+2) = n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Nyní, z aritmetiky řad platí

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2$$

a již jsme dokázali, že $2/n(n+1) \geq 1/n^2$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Srovnávací kritérium nyní dává

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2,$$

čili je řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergentní. ■

Na základě $\lim_{n\to\infty} a_n$ nelze obecně o konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ rozhodnout. Je-li limita nenulová, pak řada jistě diverguje, ale je-li nulová, může řada konvergovat i divergovat. Máme-li ovšem dvě řady, posloupnosti jejichž členů rostou v limitním smyslu „stejně rychle“, pak jsou i otázky jejich konvergencí ekvivalentní.

Věta 1.5.17 (Limitní srovnávací kritérium)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a označme $L \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_n/b_n$.

*(a) Je-li $L \in (0,\infty)$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje **právě tehdy, když** konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*

(b) Je-li $L = 0$, pak konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ implikuje konvergenci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(c) Je-li $L = \infty$, pak konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ implikuje konvergenci $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Před samotným důkazem je dlužno nahlédnout, že nutně $L \in [0,\infty]$, neboť posloupnosti a_n i b_n mají pouze nezáporné členy, tedy hodnoty L rozlišené výše jsou vskutku jediné možné.

Započněme částí (a) a dokažme prve implikaci ($\Leftarrow$). Předpokládejme, že $L \in (0,\infty)$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje. Volme $\varepsilon > 0$ libovolně. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon.$$

První nerovnost lze přepsat na

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon,$$

čímž dostaneme horní odhad

$$a_n < b_n(L+\varepsilon)$$

pro všechna $n \geq n_0$. Z aritmetiky řad plyne, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(L+\varepsilon)$ je konvergentní (neboť $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ je konvergentní) a ze srovnávacího kritéria dostáváme (použitím odhadu výše), že i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

K důkazu implikace ($\Rightarrow$) je nám dán předpoklad $L \in (0,\infty)$ a konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Stejně jako v důkazu opačné implikace nalezneme ke zvolenému $\varepsilon > 0$ číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon.$$

Číslo ε zde volíme menší než L, aby platilo $L - \varepsilon > 0$. Z dolního odhadu

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n}$$

plyne úpravou

$$\frac{b_n}{a_n} < \frac{1}{L - \varepsilon},$$

čili

$$b_n < \frac{a_n}{L - \varepsilon}$$

pro $n \geq n_0$. Z aritmetiky řad opět platí, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/(L - \varepsilon)$ konverguje a srovnávací kritérium skýtá kýženou konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Dokážeme část (b). Ke zvolenému $\varepsilon > 0$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left| \frac{a_n}{b_n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Pak ale máme odhad

$$a_n < \varepsilon \cdot b_n$$

a konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ plyne z konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zcela analogickým argumentem jako v důkazu části (a).

Důkaz části (c) je zcela obdobný důkazu části (b). ■

Sekci o řadách s nezápornými členy završíme uvedením tří užitečných kritérií pro zpyt konvergence takých řad, které o ní rozhodují přímo ze znalosti jejích členů nevyžadujíce srovnání s řadami jinými. Výsledkem bude mimo jiné důkaz konvergence jisté řady jsoucí mimořádně užitečnou pro srovnání s řadami, jejichž členy jsou vyjádřeny jako podíly dvou polynomů.