Ústní zkouška

z Úvodu do matematické analýzy, části prvé

Verze: r3kt

Přednášející: His Divine Wisdom Sir Adam Clypatch

19. ledna 2024

NENÍ-LI ŘEČENO JINAK, VŠECHNY POJMY A DŮKAZY FORMULUJTE PEČLIVĚ S DŮRAZEM NA FORMÁLNÍ SPRÁVNOST.

Část	Hodnocení
Základní definice	0 / 0
Lehké úlohy a důkazy	/ 6
Těžké ulohy a důkazy	/ 12

Základní definice (0 bodů)

Neznalost základních definic znamená bezpodmínečné nesložení zkoušky.

(1) Okruh a těleso.

(2) Racionální číslo.

(3) Konvergentní posloupnost.

(4) Rozšířená reálná osa.

(5) Interval a typy intervalů.

Lehké úlohy a důkazy (6 bodů)

Pojmy užité v úlohách nemusíte definovat. Používáte-li k řešení úlohy nebo k důkazu předchozí tvrzení, zformulujte je.

(1) Dokažte, že každá posloupnost má *nejvýše* jednu limitu.

(2) Dokažte, že $\mathbb{Q}$ jsou hustá v $\mathbb{R}$, tedy že pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $x \in \mathbb{R}$ existuje $r \in \mathbb{Q}$ splňující $|x - r| < \varepsilon$.
Hint: Využijte definici $\mathbb{R}$ jako tříd ekvivalence konvergentních racionálních posloupností.

(3) Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n .$$

Ověřte předpoklady všech tvrzení, která k výpočtu používáte.

Těžké úlohy a důkazy (12 bodů)

Nemusíte dokonale zformulovat svá řešení. Obecná idea rozvinutá důležitými detaily postačuje.

(1) Ať $c > 0$ a $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost dána rekurentním vztahem

$$\begin{aligned} a_0 &:= \sqrt{c}, \\ a_{n+1} &:= \sqrt{a_n + c}. \end{aligned}$$

Spočtěte $\lim a$. Návod:

(a) Dokažte, že posloupnost a je dobře definovaná. To znamená, že $a_n \in \mathbb{R}$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

(b) Dokažte, že a je rostoucí.

(c) Dokažte, že a je shora omezená.

(d) Z bodů (b) a (c) plyne (užitím věty o limitě monotónní posloupnosti), že a má limitu. Označme ji A. Spočtěte tuto limitu pomocí vhodné kvadratické rovnice využivše rovností

$$a_{n+1}^2 = a_n + c, \quad \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = A \quad \text{a} \quad \lim_{n\to\infty} (a_n + c) = A + c.$$

(2) Dokažte *Borelovu větu*: Ať I je **uzavřený** interval a $\{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ je množina **otevřených** intervalů splňující $I \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$. Pak existuje **konečná** množina $F \subseteq \mathbb{N}$ taková, že $I \subseteq \bigcup_{i\in F} S_i$.

Návod (vřele doporučujeme si při důkaze kreslit):

(a) Označme $I = [a,b]$. Ať M je množina takových prvků $x \in [a,b]$, pro něž existuje konečná $F_x \subseteq \mathbb{N}$ taková, že $[a,x] \subseteq \bigcup_{i\in F_x} S_i$. Uvědomte si, že pro důkaz Borelovy věty stačí ukázat, že $b \in M$.

(b) Dokažte, že M má supremum, které leží v $\mathbb{R}$. K tomu je třeba ukázat, že není prázdná a že je shora omezená. Existence suprema pak plyne z úplnosti $\mathbb{R}$. Položme $y := \sup M$. Nyní je třeba ukázat, že $y \in M$ a $y = b$.

(c) Z předpokladu $y \in I \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_i$, a tedy existuje **otevřený** interval S_j takový, že $y \in S_j$. Ovšem, protože je tento interval otevřený, y nemůže být jeho minimem. Dokažte, že z tohoto plyne existence prvku $z \in M \cap S_j$ (nezapomeňte, že y je supremem M).

(d) Pro tento prvek z definice M existuje konečná množina F_z taková, že $[a,z] \subseteq \bigcup_{i\in F_z} S_i$. Dokažte, že

$$x \in \left(\bigcup_{i\in F_z} S_i\right) \cup S_j$$

pro každé $x \in [a,y]$. Argumentujte, že tento fakt již znamená, že $y \in M$.

(e) Dokážeme, že $y = b$. Předpokládejme pro spor, že $y < b$. Pak existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $y + \varepsilon < b$, což znamená, že umíme najít (proč?) otevřený interval S_k takový, že $[y, y+\varepsilon] \subseteq S_k$. Užitím faktu, že $y \in M$, najděte konečnou množinu $\mathscr{S} \subseteq \{S_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ otevřených intervalů takovou, že $[a, y+\varepsilon] \subseteq \mathscr{S}$ (nezapomeňte, že takové množiny umíte triviálně najít zvlášť pro $[a,y]$ a $[y, y+\varepsilon]$).

(f) Argumentujte, že existence $\mathscr{S}$ z bodu (e) je sporem s definicí y jako suprema M. Tedy, $y = b$ a důkaz je hotov.