Ústní zkouška

z Úvodu do matematické analýzy, části prvé

Verze: oMegareKt

Přednášející: His Divine Wisdom Sir Adam Clypatch

16. února 2024

NENÍ-LI ŘEČENO JINAK, VŠECHNY POJMY A DŮKAZY FORMULUJTE PEČLIVĚ S DŮRAZEM NA FORMÁLNÍ SPRÁVNOST.

Část	Hodnocení
Základní definice	0 / 0
Lehké úlohy a důkazy	/ 6
Těžké ulohy a důkazy	/ 12

Základní definice (0 bodů)

Neznalost základních definic znamená bezpodmínečné nesložení zkoušky.

(1) Monoid.

(2) Limita posloupnosti.

(3) Monotónní posloupnost.

(4) Minimum a maximum.

(5) Interval a typy intervalů.

Lehké úlohy a důkazy (6 bodů)

Pojmy užité v úlohách nemusíte definovat. Používáte-li k řešení úlohy nebo k důkazu předchozí tvrzení, zformulujte je.

(1) Uvažme množinu $\mathbb{R}$ jako množinu tříd ekvivalence $\simeq$ všech konvergentních racionálních posloupností. Dokažte, že zobrazení

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{Q} &\hookrightarrow \mathbb{R}, \\ q &\mapsto [(q)]_{\simeq} \end{aligned}$$

které racionálnímu číslu přiřadí třídu ekvivalence posloupnosti samých čísel q, je prosté.

(2) Dokažte, že jsou-li posloupnosti $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergentní, pak je konvergentní i posloupnost $a + b$.

(3) Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^4 - 7n^2 + 5}{6 - 4n^4}.$$

Těžké úlohy a důkazy (12 bodů)

Nemusíte dokonale zformulovat svá řešení. Obecná idea rozvinutá důležitými detaily postačuje.

(1) Uvažte posloupnost danou rekurzivním předpisem

$$a_1 = 2,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n}.$$

Spočtěte $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Návod:

(a) Dokažte, že a_n je klesající a zdola omezená.

(b) Podle věty o limitě monotónní posloupnosti má a_n limitu, označme ji L. Využijte vzorce pro a_{n+1} (v závislosti na a_n) a faktu, že $\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} a_n$ pro nalezení rovnice k výpočtu L.

(2) Nechť $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost a $A \in \mathbb{R}$. Dokažte, že $\lim_{n\to\infty} a_n = A$ právě tehdy, když $|a_n - A| \geq \varepsilon$ jen pro konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$, tj. když je množina $\{n \in \mathbb{N} \mid |a_n - A| \geq \varepsilon\}$ konečná.

Návod:

(a) K důkazu implikace $\Leftarrow$ využijte toho, že každá neprázdná konečná množina má maximum.

(b) K důkazu $\Rightarrow$ stačí definice limity.