

# Jakýsi úvod do diskrétní matematiky

Áďa Klepáčovic

27. listopadu 2022



# Obsah

<b>1</b>	<b>Zajímavé problémy</b>	<b>1</b>
1.1	Problém tří domů a tří studní . . . . .	1
1.2	Hrátky s puntíky . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Úvodní pojmy</b>	<b>3</b>
2.1	Logické spojky a kvantifikátory . . . . .	3
2.2	Množiny . . . . .	5
2.3	Relace . . . . .	7
2.3.1	Kreslení relací . . . . .	7
2.3.2	Skládání relací . . . . .	9



## 1 | Zajímavé problémy

Jednou z hlavních a oblíbených podmnožin diskrétní matematiky a kombinatoriky je *teorie grafů*. Jednoduše řečeno, graf je množina bodů – vrcholů, mezi některýmiž vedou spojnice – hrany.

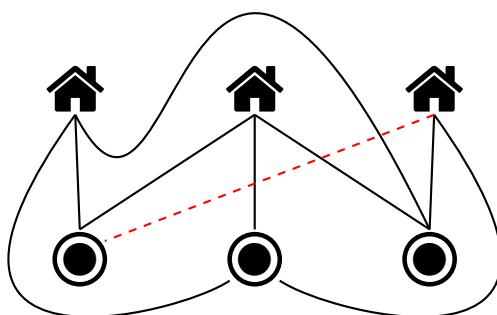
Představíme si pár úloh jako ze života, jak bývá v matematice zvykem, jejichž zdánlivá nevinność je v rozporu s jejich významem pro rozvoj teorie.

### 1.1 Problém tří domů a tří studní

V zemi za sedmero horami a sedmero řekami žili byli tři sousedi. Každý z nich vlastnil rodinný domek a dělili se o vodu ze tří blízkých studní. Jednou se ale sousedi po sporu rozkmotřili a už se nechtěli ani vidět. Potřebovali ale pitnou vodu. Každý se odmítl vzdát nároku na nějakou ze studní, tak si jako poslední společný čin najali dvorního architekta, by nechal postavit cesty od každého domu ke každé studni. Cesty se nesměly nikde potkat, aby do sebe sousedi na cestě pro vodu náhodou nenarazili.

Dvorní architekt, probdév tři dny a tři noci hledaje způsob, jak nasupené sousedy uspokojit, klekl nakonec únavou a prohlásil, že cesty bez křížení vystavět nelze.

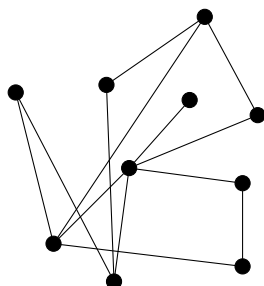
My s ním souhlasíme, ale není lehké najít způsob, jak úlohu matematicky formalizovat, a podat důkaz.



Obrázek 1: Tři domy a tři studně.

## 1.2 Hrátky s puntíky

Ukážeme si ještě dvě pěkné úlohy s puntíky a čarami. Mějme třeba deset puntíků v rovině a pár z nich spojíme čarami, jako na [obrázku 2](#).



Obrázek 2: Náhodný graf na deseti vrcholech.

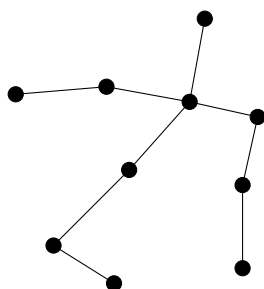
Otázka, kterou se budeme časem zabývat zní „Kolik maximálně mohu nakreslit spojnic, než mi vznikne trojúhelník?“ Trojúhelníkem zde myslíme trojici bodů, z nichž každé dva jsou spojeny. Do tohoto grafu se určitě ještě dají nějaké přikreslit, ale kolik přesně? A jak tuto úlohu řešit obecně pro jakýkoliv počet bodů?

Podobně zajímavá, ale už víc algoritmická otázka, by zněla „Jak poznám, jestli v nějakém grafu existuje trojúhelník?“. Samozřejmě by šlo se prostě podívat na každou jednu trojici bodů, ale jde to i líp?

Ještě na pár odstavců zůstaneme u spojených puntíků. Úloha, která se ukázala jako zásadní v teorii grafů má co dělat s cestami. *Cestou* v grafu nazveme posloupnost bodů – vrcholů, takovou, že mezi sousedními vrcholy na cestě vždycky vede spojnice. Jinak řečeno, mohu se v klidu projít od jednoho vrcholu k druhému, aniž bych musel skákat mezi vrcholy. Naším úkolem je najít takovou množinu spojnic – hran, že se mezi každými dvěma vrcholy dá projít po cestě.

Pro deset vrcholů jedno možné řešení vidíte na [obrázku 3](#).

Je jednoduché si rozmyslet, kolik nejméně hran je třeba nakreslit. Ovšem, co když můžeme vybírat jen z nějaké předem dané množiny? Řešení pak nemusí vždycky existovat (může se totiž stát, že žádné hrany k dispozici nemáme). Dá se nějak efektivně poznat, kdy úlohu lze řešit a kdy ne? A co třeba otázka, kolik existuje řešení s minimálním počtem hran; co řešení, součet přes všechny jeho hrany je nejmenší? V této obecné podobě



Obrázek 3: Minimální kostra grafu na deseti vrcholech.

se úloze (i jejímu řešení) říká *minimální kostra* grafu a v budoucnu ji, stejně jako předchozí dvě úlohy, potkáme.

## 2 | Úvodní pojmy

Žádná matematická disciplína se neobejde bez pochopení základů logiky a teorie množin. Pro jistotu zde nejnужnější části připomeneme, ale tyto krátké úryvky nezamýšlejí naučit, leč osvěžit.

### 2.1 Logické spojky a kvantifikátory

**Definice 2.1.1 (Výrok).** Výrokem nazveme jakoukoli větu, o které lze rozhodnout, zda je pravdivá, či nikoliv.

**Příklad.** Věty „Je mi zle.“ a „Sumec je drůbež.“ jsou výroky, zatímco „Tvoje máma.“ a „Cos’ dostala z matiky?“ nikoliževěk.

Je též dlužno mít na paměti, že naše znalost pravdivosti věty nemění nic na tom, jestli daná věta je, nebo není výrokem. Třeba „Do pěti století kolonizujeme celou Sluneční soustavu.“ je zcela jistě výrok.

Další text vyžaduje znalost operátorů  $\neg$ ,  $\wedge$ ,  $\vee$ ,  $\Rightarrow$  a  $\Leftrightarrow$ . Je-li  $x$  výrok „Prší.“ a  $y$  výrok „Vezmu si deštník.“, pak

- výrok  $\neg x$  znamená „Neprší.“,

- výrok  $x \wedge y$  znamená „Prší **a** vezmu si deštník.“,
- výrok  $x \vee y$  znamená „Prší **nebo** si vezmu deštník.“,
- výrok  $x \Rightarrow y$  znamená „**Když** prší, **tak** si vezmu deštník.“ a
- výrok  $x \Leftrightarrow y$  znamená „Prší, **právě tehdy když** si vezmu deštník.“

**Výstraha.**

- Logická spojka  $\vee$  **není výlučná**. Tedy  $x \vee y$  platí v situaci, kdy
  - platí pouze  $x$ ,
  - platí pouze  $y$ ,
  - platí  $x$  i  $y$ .
- Výrok  $x \Rightarrow y$  je vždy **pravdivý**, pokud  $x$  je **lživý**. Jinak řečeno,  $x \Rightarrow y$  platí za situace, kdy
  - platí  $x$  i  $y$ ,
  - neplatí  $x$  a platí  $y$ ,
  - neplatí  $x$  a neplatí  $y$ .

Jako znalost logických spojek je kritická i znalost kvantifikátorů  $\forall$  a  $\exists$ , které se čtou „pro všechny“ a „existuje“, resp.

Pokud je  $p(x)$  výrok závislý na proměnné  $x$  (třeba „ $x$  je sudé.“), pak výrok

- $\forall x \in \mathbb{N} : p(x)$  zní „Všechna přirozená čísla jsou sudá.“ a
- $\exists x \in \mathbb{N} : p(x)$  zní „Existuje sudé přirozené číslo.“

Budeme rovněž užívat kvantifikátory  $\exists!$  a  $\nexists$ , které znamenají „existuje přesně jeden“ a „neexistuje“.

Podáno intuitivně: chci-li tvrdit, že  $\forall x \in \mathbb{N} : p(x)$ , musím dokázat, že ať mi nepřítel dá **jakékoliv** přirozené číslo  $x$ , tak  $p(x)$  platí. Naopak, dokázat  $\exists x \in \mathbb{N} : p(x)$  je obvykle zásadně jednodušší, neboť musím pouze najít **jedno** přirozené číslo  $x$ , pro které  $p(x)$  platí.



## 2.2 Množiny

Požaduji znalost značek  $\in, \cap, \cup, \setminus, \times$  a  $\subseteq$ . Pro připomenutí, jsou-li  $A, B$  dvě množiny, pak

- výrok  $x \in A$  říká, že „ $x$  je prvkem  $A$ .“ nebo „ $x$  patří do  $A$ .“;
- $A \cap B$  je **průnik**  $A$  s  $B$ , čili množina obsahující prvky, které patří jak do  $A$ , tak do  $B$ ;
- $A \cup B$  je **sjednocení**  $A$  s  $B$ , čili množina obsahující prvky, které patří do  $A$  nebo do  $B$ ;
- $A \setminus B$  je **rozdíl**  $A$  s  $B$ , čili množina obsahující prvky, které patří do  $A$  a nepatří do  $B$ ;
- $A \times B$  je **součin**  $A$  s  $B$ , čili množina **uspořádaných** dvojic  $(a, b)$ , kde  $a \in A$  a  $b \in B$ . Uspořádaná dvojice zde znamená, že  $(a, b) \neq (b, a)$ , tedy záleží na tom, který prvek je první a který druhý;
- výrok  $A \subseteq B$  říká, že  $A$  je podmnožinou  $B$ , tedy, že každý prvek  $A$  je rovněž prvkem  $B$ .

Pro mnohonásobné a nekonečné verze budeme používat stejné symboly (s výjimkou součinu). Tedy, mám-li množiny  $A_1, \dots, A_n$ , pak

- $\bigcap_{i=1}^n A_i$  je jejich průnik,
- $\bigcup_{i=1}^n A_i$  je jejich sjednocení a
- $\prod_{i=1}^n A_i$  je jejich součin.

Když jsou počáteční a koncový index známy z kontextu, budeme je vynechávat a psát pouze třeba  $\bigcup A_i$ . Součin množiny se sebou samou budeme často zkracovat mocninným zápisem, třeba  $A \times A \times A = A^3$ .

**Příklad.** Je-li  $A = \{1, 3, 4\}$  a  $B = \{2, 4, 5\}$ , pak

- $A \cap B = \{4\}$ ,
- $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,
- $A \setminus B = \{1, 3\}$  a

$$\bullet A \times B = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 5)\}.$$

**Definice 2.2.1.** Je-li  $A$  množina, pak

- $\#A$  značí **počet prvků**  $A$  neboli **velikost**  $A$ ,
- $2^A$  značí **množinu všech podmnožin**  $A$ , čili

$$2^A := \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Pro nekonečné množiny píšeme  $\#A = \infty$ .

**Výstraha.** Pojem velikosti takto zavedený není korektně definovaný. Není totiž jasné, co by měl „počet“ prvků znamenat. Pojem *bijekce* z podsekcce o zobrazeních tento problém vyřeší.

**Tvrzení 2.2.1** (Vlastnosti velikosti množiny).

- (1)  $\#A \times B = \#A \#B$ .
- (2)  $\#2^A = 2^{\#A}$ .

**Důkaz.**

- (1) Pro každý prvek  $a \in A$  je v  $A \times B$  právě  $\#B$  dvojic  $(a, b)$ , kde  $b \in B$ . Jelikož prvků  $a \in A$  je z definice  $\#A$  a každému odpovídá  $\#B$  dvojic  $(a, b)$ , je celkový počet uspořádaných dvojic v  $A \times B$  právě  $\#A \#B$ .
- (2) Pro nekonečné množiny tvrzení platí zřejmě. Předpokládejme, že  $A$  je konečná.

Očíslováme si podmnožiny  $A$  binárními čísly délky  $\#A$ . Každá podmnožina  $A$  vznikne totiž tak, že procházíme postupně všechny prvky  $A$  a u každého se rozhodujeme, zda ho do ní zařadíme či nikoliv. Kladnému rozhodnutí bude odpovídat cifra 1 a zápornému 0. Má-li  $A$  řekněme 5 prvků, pak podmnožina očíslovaná číslem 00110 je podmnožina, která obsahuje pouze 3. a 4. prvek z  $A$  (při libovolném, **ale fixním**, očíslování samotné množiny  $A$ ).

Odtud plyne, že  $A$  má tolik podmnožin, kolik je různých binárních čísel délky  $\#A$ . Těch je však  $2^{\#A}$ , jak jsme chtěli.  $\square$

## 2.3 Relace

Pojem *relace* zobecňuje věci jako zobrazení (se kterým jste se setkali, ale říkali jste mu bůhvíproč funkce) nebo uspořádání (které taky znáte, jen vám bůhvíproč neprozradili, oč jde).

Základní myšlenkou je to, že i relace – vztahy mezi objekty se dají pomocí množin (a jejich součinu) úspěšně definovat. Celá matematika, kterou jste dosud poznali, je založená na *teorii množin*, jinak řečeno, **všechno** je množina.

**Definice 2.3.1 (Relace).** Jsou-li  $A, B$  množiny, pak **relací** mezi  $A$  a  $B$  nazveme *libovolnou* podmnožinu  $A \times B$ . Je-li  $A = B$ , pak  $R$  nazýváme relací na  $A$ .

Pojem relace v matematice je založen na konceptu, že vztah mezi množinami je dokonale popsán výpisem všech dvojic prvků, které v tom vztahu jsou. To se trochu liší od běžného chápání slova „vztah“. Asi byste nebyli úplně spokojeni, kdybychom vám tvrdili, že vztah manželský na množině všech lidí je to samé, co výpis všech manželských párů. Z toho důvodu bude asi lepší se držet latinské verze, „relace“.

Protože nejstarší typy relací, mezi nimi třeba  $<$  nebo  $=$ , lidé používali ještě před vznikem samotné teorie množin, značení je zde trochu matoucí. Fakt, že dvojice  $(x, y) \in A \times B$  je v relaci  $R$ , nezapisujeme (jak by se čekalo)  $(x, y) \in R$ , ale spíš  $xRy$ . Podobně jako nepíšeme  $(x, y) \in <$ , ale  $x < y$ .

Jako spoustu věcí v matematice, relace je dobré si umět vizualizovat. Ukážeme si teď tři standardní způsoby, jak si lidé relace kreslí.

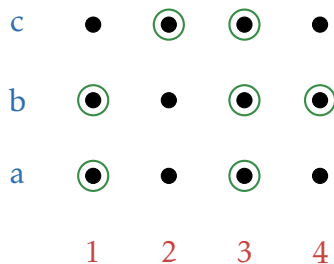
### 2.3.1 Kreslení relací

Po celou podsekcí budeme předpokládat, že máme množiny  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  a množinu  $B = \{a, b, c\}$ .

Jedním ze způsobů, jak se dají kreslit relace, je *mříž*. Uvážíme relaci

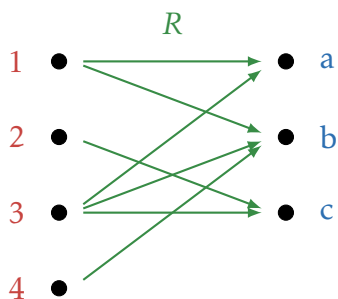
$$R = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, a), (3, b), (3, c), (4, b)\}$$

mezi  $A$  a  $B$ . Vizualizaci součinu  $A \times B$  a relace  $R$  pomocí mříže vidíte na [obrázku 4](#).



Obrázek 4: Kreslení relace  $R \subseteq A \times B$  pomocí mříže.

Ještě jeden užitečný způsob kreslení, který funguje pro obecné relace, je kreslení pomocí šipek. V zásadě si člověk zobrazí obě množiny jako sloupce bodů a mezi příslušnými body kreslí šipky. Například jako na [obrázku 5](#).



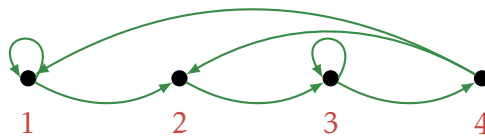
Obrázek 5: Kreslení relace  $R \subseteq A \times B$  pomocí šipek.

Tenhle způsob se může zdát méně přehledný než mříž, ale má svoje nesporné využití, především v oblasti *skládání* relací, kterým se budeme zabývat za chvíli.

Ještě před tím si ale ukážeme způsob, jak přehledně kreslit relace na nějaké množině. Řekněme, že tentokrát je třeba

$$R := \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 3), (4, 1), (4, 2)\}$$

relace na množině  $A$ . Množinu  $A$  si nakreslíme jako body v rovině a relaci  $R$  jako šipky a smyčky. Vizte [obrázek 6](#).



Obrázek 6: Kreslení relace  $R$  na  $A$  pomocí šipek a smyček.

### 2.3.2 Skládání relací

V této podsekcí si řekneme, co znamená, že dvě (nebo více) relace složíme dohromady. Tato operace se dá vnímat jako jakési „zobecnění“ skládání zobrazení/funkcí. Jak si ale ukážeme, zobrazení jsou speciálním typem relací, takže takhle představa není úplně vhodná.

Pro jednoduchost se budeme soustředit na relace na nějaké množině  $A$ . Tohle ovšem není nutné; mám-li relaci  $R \subseteq A \times B$  a relaci  $S \subseteq B \times C$ , vždy je mohu složit a dostat relaci mezi  $A$  a  $C$ .

Skládání relací není nijak divoká věc a vztahy (například mezi lidmi) v životě běžně skládáme, ale málokdy se na to asi díváme tímto způsobem. Například, řekněme, že **Adéla** má přítelkyni **Simona** a **Simona** má přítelkyni **Terezu**. Když složíme relace „býti přítelkyně **Adély**“ a „býti přítelkyně **Simony**“ dostaneme relaci, ve které je **Tereza** přítelkyně **Adély**. Na druhý příklad, třeba samotné přísloví „Nepřítel mého nepřítele je můj přítel.“, se dá vyložit jako skládání relací.

Teď formálně.

**Definice 2.3.2 (Složení relací).** Mějme množinu  $A$  a relace  $R, S \subseteq A \times A = A^2$ . Složením relací  $R$  a  $S$  nazveme množinu

$$\{(x, z) \in A^2 \mid \exists y \in A : xRy \wedge yRz\}$$

a značíme ji  $R \circ S$ .

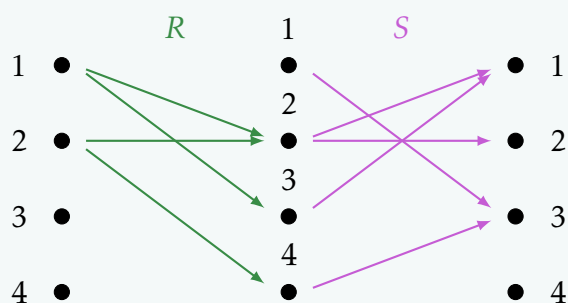
Řečeno asi možná třeba trošku lidštěji, když pro dané  $x, z \in A$  najdu takový prvek  $y \in A$ , že dvojice  $(x, y)$  je v relaci  $R$  a dvojice  $(y, z)$  je v relaci  $S$ , pak  $(x, z)$  je v relaci  $R \circ S$ . Vlastně  $(x, y)$  a  $(y, z)$  slepím dohromady skrze  $y$ .

**Příklad.** Řekněme, že je  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  a máme relace

$$R := \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 4)\},$$

$$S := \{(1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 3)\}$$

na  $A$ . V [podsekcí o kreslení relací](#) jsme zmínili, že šipky jsou velmi užitečné při skládání. Teď uvidíte proč. Když si obě relace nakreslíme přímo vedle sebe, dostaneme [obrázek 7](#).



Obrázek 7: Složení relací  $R$  a  $S$ .

V roli  $x$  z [Definice 2.3.2](#) je zde první sloupec, v roli  $y$  druhý a v roli  $z$  třetí. Čili, prvek  $(x, z)$  bude v relaci  $R \circ S$  jenom tehdy, když najdu v prostředním sloupci prvek  $y$  (aspoň jeden, ale klidně víc), přes který dokážu po šipkách dojít z  $x$  do  $z$ .

Z obrázku je teď už zřejmé, že

$$R \circ S = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3)\}.$$