Gymnázium Evolution Jižní Město

Jakýsi úvod do matematické analýzy

Áďula vod Klepáčů

29. dubna 2024

Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předšedších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.

Obsah

Kapitola 1

Limity funkcí

Limita funkce je dost možná nejdůležitější ideou matematické analýzy a obecně matematických disciplín, jež využívá fyzika. Davši vzniknout teorii derivací a primitivních funkcí, umožnila popsat fyzikální jevy soustavami diferenciálních rovnic a je základem zatím nejlepších známých modelův světa – diferencovatelných struktur.

Principiálně se pojem *limity funkce* neliší pramnoho od limity posloupnosti. Matematici funkcí obyčejně myslíme zobrazení popisující vývoj systému v čase (tzv. funkce *jedné proměnné*), případně závislé na více parametrech než jen na čase (tzv. funkce *více proměnných*). Limita funkce v nějakém určeném okamžiku pak znamená vlastně „očekávanou hodnotu“ této funkce v tomto okamžiku – hodnotu, ke které je funkce, čím méně času zbývá do onoho okamžiku, tím blíže.

V tomto textu budeme sebe zaobírati pouze funkcemi závislými na čase tvořícími systémy, jejichž stav je rovněž vyjádřen jediným číslem. Uvidíme, že i teorie takto primitivních objektů je veskrze širá.

Definice 1.0.1 (Reálná funkce jedné proměnné)

Ať $M \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná podmnožina $\mathbb{R}$. Zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálnou funkcí (jedné proměnné)*.

Ačkolivěk ve světě, jest-li nám známo, proudí čas pouze jedním směrem, matematiku takovými trivialitami netřeba třísnit. Pojem limity reálné funkce budeme tedy definovat bez ohledu na „proud času“. Budeme zkoumat jak hodnotu reálné funkce, když se čas blíží *zleva* (tj. přirozeně) k danému okamžiku, tak její očekávanou hodnotu proti toku času.

Ona dva přístupa slujeta limita funkce *zleva* a limita funkce *zprava*. Před jejich výrokem ovšem učiníme kvapný formální obchvat. Bylo by totiž nanejvýš neelegantní musiti různými logickými výroky definovat konečné oproti nekonečným limitám v konečných oproti nekonečným bodům. Následující – čistě formální avšak se silnou geometrickou intuicí – pojem tyto případy skuje v jeden.

Definice 1.0.2 (Okolí a prstencové okolí bodu)

Ať $a \in \mathbb{R}^*$ a $\varepsilon \in (0, \infty)$. *Okolím* bodu a (o poloměru ε) myslíme množinu

$$B(a, \varepsilon) \coloneqq \begin{cases} (a - \varepsilon, a + \varepsilon), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ (1/\varepsilon, \infty), & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty. \end{cases}$$

Podobně, *prstencovým okolím* a (o velikosti ε) myslíme jeho okolí bez samotného bodu a. Konkrétně,

$$R(a, \varepsilon) \coloneqq \begin{cases} (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}, & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ (1/\varepsilon, \infty), & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty. \end{cases}$$

Pro účely definice levých a pravých limit, pojmenujeme rovněž množinu

$$B_+(a, \varepsilon) \coloneqq \begin{cases} [a, a + \varepsilon), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ \emptyset, & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty \end{cases}$$

pravým okolím bodu a a množinu

$$R_+(a, \varepsilon) \coloneqq \begin{cases} (a, a + \varepsilon), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ \emptyset, & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty \end{cases}$$

pravým prstencovým okolím bodu a. *Levé okolí* a *levé prstencové okolí* bodu a se definují analogicky.

Poznámka 1.0.3

Písmena B a R v definici okolí a prstencového okolí pocházejí z angl. slov **b**all a **r**ing. Okolí se v angličtině přezdívá *ball* pro to, že okolí bodu a je ve skutečnosti (jednodimenzionální) kruh s poloměrem ε o středu a. Znázornění okolí bodu jako kruhu v rovině je vysoce účinným vizualizačním aparátem. Naopak, slovo *ring* vskutku přirozeně značí kruh s „dírou“ (velikosti jednoho bodu) v jeho středě.

Čtenáře možná zarazilo číslo $1/\varepsilon$ v definici okolí bodu ∞. Důvod užití $1/\varepsilon$ oproti prostému ε je spíše intuitivního rázu. V definici limity a v následných tvrzeních si matematici obvykle představujeme pod ε reálné číslo, které je „nekonečně malé“. Chceme-li tedy, aby se **zmenšujícím se** ε byla hodnota dané funkce stále blíže nekonečnu, musí se tato hodnota **zvětšovat**. Díky užité formulaci tomu tak je, neboť s menším ε je číslo $1/\varepsilon$ větší.

(a) Okolí $B(a, \varepsilon)$ bodu a. (b) Prstencové okolí $R(a, \varepsilon)$ bodu a.

Obrázek 1.1: Okolí a prstencové okolí bodu $a \in \mathbb{R}$.

Definice 1.0.4 (Jednostranná limita funkce)

Ať $M \subseteq \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že číslo $L \in \mathbb{R}^*$ je *limitou zleva* funkce f v bodě a, pokud

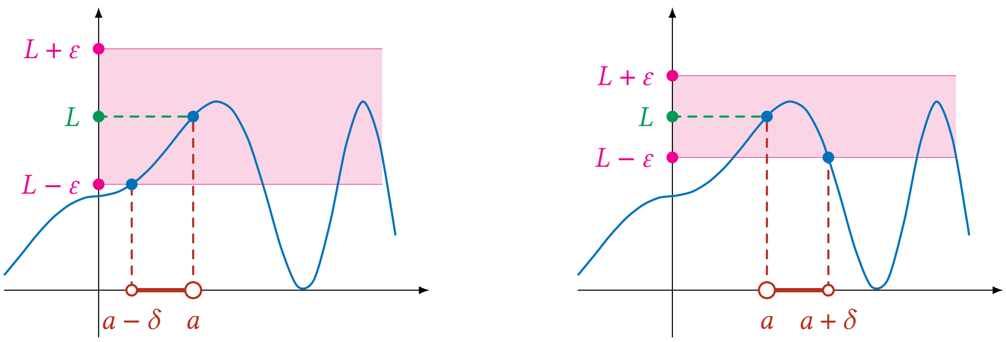
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P_-(a, \delta) : f(x) \in B(L, \varepsilon).$$

Tento fakt zapisujeme jako $L = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

Podobně, číslo $K \in \mathbb{R}^*$ je *limitou zprava* funkce f v bodě a, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P_+(a, \delta) : f(x) \in B(K, \varepsilon).$$

Tento fakt zapisujeme jako $K = \lim_{x \to a^+} f(x)$.



(a) Limita f v bodě a zleva.

(b) Limita f v bodě a zprava.

Obrázek 1.2: Jednostranné limity funkce f v bodě a.

Varování 1.0.5

Fakt, že L je limita **zleva** funkce f v bodě a, vůbec neznamená, že hodnoty $f(x)$ se musejí blížit k L rovněž **zleva**. Adverbia *zleva* a *zprava* značí pouze směr, kterým se k číslu a přibližují **vstupy** funkce f, nikoli její **výstupy** k číslu L.

Pochopitelně, lze též požadovat, aby hodnoty f ležely v daném rozmezí kolem bodu L, jak se její vstupy blíží k a zleva i zprava zároveň. V principu, blíží-li se f ke stejnému číslu zleva i zprava, stačí vzít δ v definici 1.0.4 tak malé, aby $f(x)$ leželo v $B(L, \varepsilon)$ kdykoli je x ve vzdálenosti nejvýše δ od a.

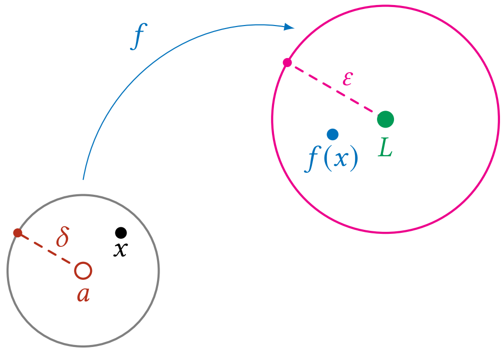
Definice 1.0.6 (Oboustranná limita funkce)

Ať $a, L \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce. Řekneme, že L je *(oboustrannou) limitou* funkce f v bodě a, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in B(L, \varepsilon).$$

Tento fakt zapisujeme jako $L = \lim_{x \to a} f(x)$.

Je jistě možné představovat si oboustrannou limitu funkce stejně jako limity jednostranné na obrázku 1.2. Ovšem, ona vlastnost „oboustrannosti“ umožňuje ještě jiný – však ne rigorózní – pohled. Povýšíme-li situaci do roviny, tj. do prostoru druhé dimenze, a na funkci f budeme nahlížet jako na zobrazení bodů roviny na body roviny, pak L je limitou funkce f v bodě a, když zobrazuje všechny body zevnitř kruhu o poloměru δ a středu a do kruhu o poloměru ε a středu L. Jako na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: Oboustranná limita funkce „ve 2D".

Doporučujeme čtenářům, aby se zamysleli, čím by v této dvoudimenzionální říši byla *jednostranná* limita funkce. Sen zámysl snad vedl k představě, že by se vstupy x musely blížit k bodu a po nějaké určené přímce. Existence „všestranné" limity v a by pak byla ekvivalentní existenci nespočetně mnoha „jednostranných" limit – jedné pro každou přímku procházející bodem a. Věříme, že není obtížné nahlédnout, jak zbytečný by takový pojem ve dvou dimenzích byl. Popsaná situace přímo souvisí s faktem, že první dimenze je z geometrického pohledu „degenerovaná" – kružnice je pouze dvoubodovou množinou.

Oboustranné limity jsou spjaty jednostrannými velmi přirozeným způsobem. Existence oboustranné limity funkce v bodě je ekvivalentní existenci limity jak zleva, tak zprava, v témže bodě. Oboustrannou limitu vlastně dostaneme tak, že z levého a pravého prstencového okolí limitního bodu, ve kterém již je funkční hodnota blízko limitě, vybereme to menší.

Tvrzení 1.0.7 (Vztah jednostranných a oboustranných limit)

Ať f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje právě tehdy, když existuje $\lim_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim_{x\to a^-} f(x)$ a jsou si rovny.

Důkaz. Implikace ($\Rightarrow$) je triviální. Pokud existuje $L \coloneqq \lim_{x\to a} f(x)$, pak pro dané $\varepsilon > 0$ máme nalezeno $\delta > 0$ takové, že pro $x \in R(a,\delta)$ je $f(x) \in B(L,\varepsilon)$. Ovšem, jistě platí $R_+(a,\delta) \subseteq R(a,\delta)$ i $R_-(a,\delta) \subseteq R(a,\delta)$. To však znamená, že pro $x \in R_+(a,\delta)$ i pro $x \in R_-(a,\delta)$ rovněž platí $f(x) \in B(L,\varepsilon)$. To dokazuje, že existuje jak $\lim_{x\to a^+} f(x)$, tak $\lim_{x\to a^-} f(x)$ a

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Pro důkaz ($\Leftarrow$) položme $L \coloneqq \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ a pro dané $\varepsilon > 0$ nalezněme $\delta_+ > 0$ a $\delta_- > 0$ splňující výroky

$$\forall x \in R_+(a,\delta_+) : f(x) \in B(L,\varepsilon),$$
$$\forall x \in R_-(a,\delta_-) : f(x) \in B(L,\varepsilon).$$

Ať $\delta \coloneqq \min(\delta_+,\delta_-)$. Pak $R(a,\delta) \subseteq R_+(a,\delta_+) \cup R_-(a,\delta_-)$, a tedy $\delta > 0$ splňuje, že

$$\forall x \in R(a,\delta) : f(x) \in B(L,\varepsilon),$$

čili $\lim_{x\to a} f(x) = L$. ∎

Příklad 1.0.8

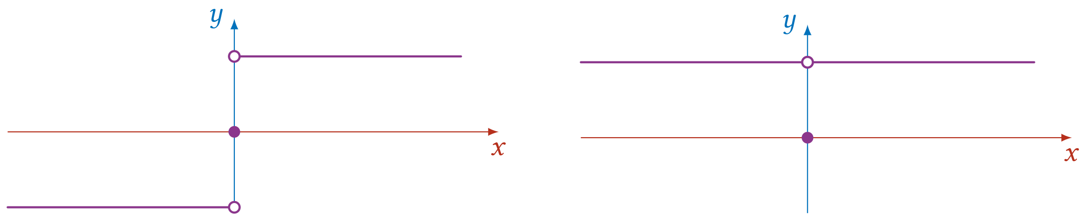
Tvrzení 1.0.7 je užitečné jak v uvedené, tak v kontrapozitivní formě, tj. při důkazu neexistence oboustranné limity za předpokladu nerovnosti (nikoli nutně *neexistence*) limit jednostranných.

Uvažme funkce $f(x) \coloneqq \operatorname{sgn}(x)$ a $g(x) \coloneqq |\operatorname{sgn}(x)|$. Ukážeme, že $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje, zatímco $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. Připomeňme, že funkce $\operatorname{sgn}(x)$ je definována předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) \coloneqq \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Ověříme, že $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Volme například $\delta \coloneqq 1$. Potom pro $x \in R_+(0,1) = (0,1)$ platí $f(x) = 1$, čili zřejmě $f(x) \in B(1,\varepsilon) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Podobně se ověří, že $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$. To ovšem znamená, že $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, tudíž dle tvrzení 1.0.7 $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Velmi obdobným argumentem ukážeme, že $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = 1$. Nuže, podle téhož tvrzení platí $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$.



(a) Graf funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$. (b) Graf funkce $g(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$.

Obrázek 1.4: Obrázek k příkladu 1.0.8.

Cvičení 1.0.9

Dokažte, že pro reálnou funkci f a $a \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

1.1 Základní poznatky o limitě funkce

Počneme nyní shrnovati intuitivně vcelku zřejmé výsledky o limitách reálných funkcí. Jakž jsme již vícekrát děli, ona „intuitivní zřejmost“ pravdivosti výroků nechce nabodnout k přeskoku či trivializaci jejich důkazů. Vodami nekonečnými radno broditi se ostražitě, bo tvrzení jako limita složené funkce ráda svědčí, že intuicí bez logiky člověk na břeh nedoplove.

Na první pád není překvapivé, že limita funkce je jednoznačně určena, pochopitelně za předpokladu její existence. Vyzýváme čtenáře, aby se při čtení důkazu drželi vizualizace oboustranné limity z obrázku 1.3.

Lemma 1.1.1 (Jednoznačnost limity)

Limita funkce (ať už jednostranná či oboustranná) je jednoznačně určená, pokud existuje.

Důkaz. Dokážeme lemma pouze pro oboustrannou limitu, důkaz pro limity jednostranné je v zásadě totožný.

Pro spor budeme předpokládat, že L i L' jsou limity f v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Nejprve ošetříme případ, kdy $L, L' \in \mathbb{R}$. Bez újmy na obecnosti smíme předpokládat, že $L > L'$. Volme $\varepsilon \coloneqq (L - L')/3$ (ve skutečnosti stačilo volit libovolné $\varepsilon < (L - L')/2$). K tomuto ε existují z definice limity $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ takové, že

$$\forall x \in R(a, \delta_1) : f(x) \in B(L, \varepsilon).$$

a rovněž

$$\forall x \in R(a, \delta_2) : f(x) \in B(L', \varepsilon).$$

Volíme-li ovšem $\delta \coloneqq \min(\delta_1, \delta_2)$, pak pro $x \in R(a, \delta)$ dostaneme

$$f(x) \in B(L, \varepsilon) \cap B(L', \varepsilon).$$

Poslední vztah lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon, \\ L' - \varepsilon < f(x) < L' + \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$L - \varepsilon < L' + \varepsilon,$$

což po dosazení $\varepsilon = (L - L')/3$ a následné úpravě vede na

$$2L - L' < 2L' - L,$$

z čehož ihned

$$L < L',$$

což je spor.

Nyní ať například $L = \infty$ a $L' \in \mathbb{R}$. Z definice okolí $B(L, \varepsilon)$ pro $L = \infty$ stačí nalézt $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\frac{1}{\varepsilon} > L' + \varepsilon,$$

pak se totiž nemůže stát, že

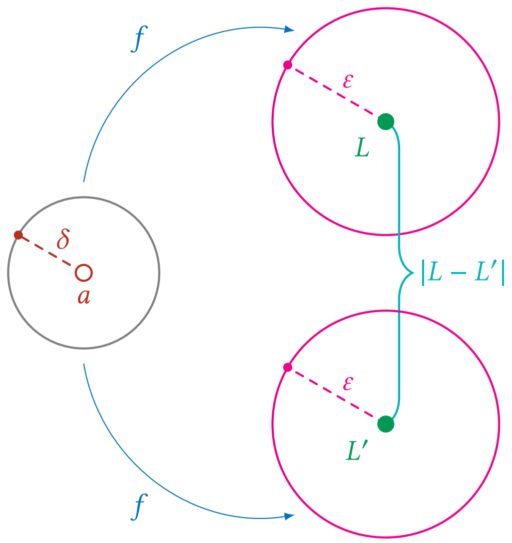
$$f(x) \in B(\infty, \varepsilon) \cap B(L', \varepsilon).$$

Snadným výpočtem zjistíme, že

$$\frac{1}{\varepsilon} > L' + \varepsilon$$

právě tehdy, když $\varepsilon < (\sqrt{L'^2 + 4} - L')/2$. Pro libovolné takové ε tudíž dostáváme spor stejně jako v předchozím případě.

Ostatní případy se ošetří obdobně. ∎



Obrázek 1.5: Spor v důkazu lemmatu 1.1.1.

Lemma 1.1.2

*Ať reálná funkce f má **konečnou** limitu $L \in \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje prstencové okolí a, na němž je f omezená.*

Důkaz. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme z definice limity $\delta > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta)$ platí $f(x) \in B(L, \varepsilon)$. Protože však $B(L, \varepsilon) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ platí pro $x \in R(a, \delta)$ odhady

$$L - \varepsilon \le f(x) \le L + \varepsilon,$$

čili je f na $R(a, \delta)$ omezená. ∎

Vzhledem k základním aritmetickým operacím si limity funkcí počínají vychovaně. Za předpokladu, že výsledný výraz dává smysl, můžeme spočítat limitu součtu, součinu či podílu funkcí jako součet, součin či podíl limit těchto funkcí.

Věta 1.1.3 (Aritmetika limit funkcí)

Ať f, g jsou reálné funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že $\lim_{x \to a} f(x)$ i $\lim_{x \to a} g(x)$ existují a označme je po řadě L_f a L_g. Potom platí

(a) $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = L_f + L_g$, *dává-li výraz napravo smysl.*

(b) $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = L_f \cdot L_g$, *dává-li výraz napravo smysl.*

(c) $\lim_{x \to a} (f/g)(x) = L_f / L_g$, *dává-li výraz napravo smysl.*

Důkaz. Dokážeme pouze část (c), neboť je výpočetně nejnáročnější, ač nepřináší mnoho intuice. Část (a) je triviální a (b) je lehká. Vyzýváme čtenáře, aby se je pokusili dokázat sami.

Už jen v důkazu samotné části (c) bychom správně měli rozlišit šest různých případů:

(1) $L_f \in \mathbb{R}, L_g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(2) $L_f \in \mathbb{R}, L_g \in \{-\infty, \infty\}$,

(3) $L_f = \infty, L_g \in (0, \infty)$,

(4) $L_f = \infty, L_g \in (-\infty, 0)$,

(5) $L_f = -\infty, L_g \in (0, \infty)$,

(6) $L_f = -\infty, L_g \in (-\infty, 0)$.

Jelikož se výpočty limit v oněch případech liší vzájemně pramálo a získaná intuice je asymptoticky rovna té ze znalosti metod řešení exponenciálních rovnic, soustředíme se pouze na (nejzajímavější) případ (1).

Ať tedy $L_f \in \mathbb{R}, L_g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Je nejprve dobré si uvědomit, proč vynecháváme 0 jako možnou hodnotu L_g. Totiž, L_f/L_g není definován **nikdy**, pokud $L_g = 0$, bez ohledu na hodnotu L_f. Hodnoty g se mohou k L_g limitně blížit zprava, zleva či střídavě z obou směrů. Nelze tudíž obecně určit, zda dělíme klesajícím kladným číslem, či rostoucím záporným číslem.

Položme $\varepsilon_g = |L_g|/2$. K tomuto ε_g existuje z definice limity δ_g takové, že pro $x \in R(a, \delta_g)$ platí $g(x) \in B(L_g, \varepsilon_g)$. Poslední vztah si přepíšeme na

$$\begin{aligned} L_g - \varepsilon_g < g(x) < L_g + \varepsilon_g, \\ L_g - \frac{|L_g|}{2} < g(x) < L_g + \frac{|L_g|}{2}. \end{aligned}$$

Speciálně tedy pro $x \in R(a, \delta_g)$ máme odhad

$$|g(x)| > \left| L_g - \frac{|L_g|}{2} \right| > \frac{|L_g|}{2}.$$

Jelikož poslední výraz je z předpokladu kladný, má výraz $f(x)/g(x)$ smysl pro každé $x \in R(a, \delta_g)$, neboť pro tato x platí $g(x) \neq 0$.

Pro $x \in R(a, \delta_g)$ odhadujme

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_f}{L_g} \right| &= \frac{|f(x)L_g - g(x)L_f|}{|g(x)||L_g|} = \frac{|f(x)L_g - L_f L_g + L_f L_g - g(x)L_f|}{|g(x)||L_g|} \\ &\leq \frac{|L_g||f(x) - L_f| + |L_f||L_g - g(x)|}{|g(x)||L_g|} \\ &= \frac{1}{|g(x)|}|f(x) - L_f| + \frac{|L_f|}{|g(x)||L_g|}|L_g - g(x)| \\ &< \frac{2}{|L_g|}|f(x) - L_f| + \frac{2|L_f|}{|L_g|^2}|L_g - g(x)| \\ &\leq c(|f(x) - L_f| + |L_g - g(x)|) \end{aligned}$$

pro $c \coloneqq \max(2/|L_g|, 2|L_f|/|L_g|^2)$.

Ať je nyní dáno $\varepsilon > 0$. K číslu $\varepsilon/2c$ existují z definice limity $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\begin{aligned} \forall x \in R(a, \delta_1) : |g(x) - L_g| < \frac{\varepsilon}{2c}, \\ \forall x \in R(a, \delta_2) : |f(x) - L_f| < \frac{\varepsilon}{2c}. \end{aligned}$$

Položíme-li nyní $\delta \coloneqq \min(\delta_1, \delta_2, \delta_g)$, pak pro $x \in R(a, \delta)$ platí

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_f}{L_g}\right| < c(|f(x) - L_f| + |L_g - g(x)|) < c\left(\frac{\varepsilon}{2c} + \frac{\varepsilon}{2c}\right) = \varepsilon,$$

což dokazuje rovnost $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = L_f/L_g$. ■

Varování 1.1.4

Předpoklad *definovanosti* výsledného výrazu ve znění věty o aritmetice limit je zásadní.

Uvažme funkce $f(x) = x + c$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$, $g(x) = -x$. Pak platí

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \infty, \\ \lim_{x\to\infty} g(x) &= -\infty, \\ \lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) &= c, \end{aligned}$$

ale $\lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$ není definován.

Cvičení 1.1.5

Dokažte tvrzení (b) a (c) ve větě 1.1.3.

Úloha 1.1.6

Spočtěte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$$

Řešení. Jelikož limitním bodem je ∞, neliší se výpočet limity funkce v zásadě nijak od výpočtu limity sesterské posloupnosti. Stále je třeba identifikovat a vytknout „nejrychleji rostoucí" členy z čitatele a jmenovatele zlomku a poté se odkázat na aritmetiku limit.

Přímým dosazením zjistíme, že bez dalších úprav vychází limitní výraz ∞/∞, na jehož základě nelze nic rozhodnout. Upravujeme tudíž následující způsobem:

$$\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{x^{20}(2 - \frac{3}{x^{20}}) \cdot x^{30}(3 + \frac{2}{x^{30}})}{x^{50}(2 + \frac{1}{x^{50}})} = \frac{x^{50}}{x^{50}} \cdot \frac{(2 - \frac{3}{x^{20}})(3 + \frac{2}{x^{30}})}{2 + \frac{1}{x^{50}}}.$$

Předpokládajíce definovanost výsledného výrazu (již je třeba ověřit až na samotném konci výpočtu), smíme z aritmetiky limit tvrdit, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{50}}{x^{50}} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{(2 - \frac{3}{x^{20}})(3 + \frac{2}{x^{30}})}{2 + \frac{1}{x^{50}}}.$$

Zřejmě platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{50}}{x^{50}} = 1.$$

Opět použitím aritmetiky limit můžeme počítat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2 - x^{20})(3 + \frac{2}{x^{30}})}{2 + \frac{1}{x^{50}}} = \frac{\lim_{x\to\infty}(2 - \frac{1}{x^{20}}) \cdot \lim_{x\to\infty}(3 + \frac{2}{x^{30}})}{\lim_{x\to\infty}(2 + \frac{1}{x^{50}})} = \frac{(2-0)\cdot(3+0)}{2+0} = 3.$$

Celkem tedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = 1 \cdot 3 = 3.$$

Protože výsledný výraz je definován, byla věta o aritmetice limit použita korektně. ♠

Úloha 1.1.7

Spočtěte

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$$

Řešení. Úlohy na výpočet limit funkcí v bodech jiných než $\pm\infty$ jsou však fundamentálně rozdílné od výpočtu limit posloupností. Nelze již rozumně hovořit o „rychlosti růstu některého členu“ či podobných konceptech. Výpočet se pochopitelně stále opírá o větu o aritmetice limit, ale často dožaduje jiných algebraických úprav – včetně dělení mnohočlenů.

Dosazením $x = 3$ do zadaného výrazu získáme $0/0$, tedy je třeba pro výpočet limity výraz nejprve upravit.

Zde postupujeme takto:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} &= \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{(x+13) - 4(x+1)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}.\end{aligned}$$

Nyní,

$$(x+13) - 4(x+1) = -3x + 9 = -3(x-3).$$

Pročež,

$$\frac{(x+13) - 4(x+1)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} = \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})}.$$

Z aritmetiky limit máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9} &= \lim_{x\to 3} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13} + 2\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{-3}{(3+3)(\sqrt{3+13} + 2\sqrt{3+1})} = \frac{-3}{48}.\end{aligned}$$

Protože je konečný výraz definovaný, směli jsme použít větu o aritmetice limit. ♠

V důkazu věty o aritmetice limit jsme zmínili, že na jejím základě nelze nic rozhodnout v případě, že konečný výraz vyjde $a/0$, kde $a \in \mathbb{R}^*$. K rozřešení právě těchto situací slouží následující tvrzení.

Tvrzení 1.1.8

Ať f, g jsou reálné funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Dále ať $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*, A > 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ a existuje prstencové okolí bodu a, na němž je g kladná.

Potom $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$.

Důkaz. Ať je z předpokladu dáno $\eta > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \eta)$ je $g(x) > 0$. Rozlišíme dva případy.

První případ nastává, když $A \in \mathbb{R}$ je číslo. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Jelikož $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $A > 0$, nalezneme pro $A/2$ číslo $\delta_1 > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta_1)$ platí

$$f(x) \in B\left(A, \frac{A}{2}\right) = \left(\frac{A}{2}, \frac{3A}{2}\right),$$

čili $f(x) > A/2$. Podobně, za předpokladu $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta_2)$ platí

$$g(x) \in B\left(0, \frac{A}{2\varepsilon}\right) = \left(-\frac{A}{2\varepsilon}, \frac{A}{2\varepsilon}\right),$$

tedy speciálně $g(x) < A/2\varepsilon$, z čehož dostáváme $1/g(x) > 2\varepsilon/A$. Celkově pro $\delta \coloneqq \min(\delta_1, \delta_2, \eta)$ a $x \in R(a, \delta)$ můžeme počítat

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{A}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{A} = \varepsilon,$$

kde první rovnost plyne z toho, že pro $x \in R(a, \delta)$ platí $f(x) > 0$ i $g(x) > 0$. To dokazuje, že $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$ v případě $A \in \mathbb{R}$.

Ošetřemež případ $A = \infty$. Argumentujíce analogicky předchozímu odstavci nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že pro $R(a, \delta_1)$ platí $f(x) > 1$ a pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta_2)$ platí $g(x) < 1/\varepsilon$, a tedy $1/g(x) > \varepsilon$. Potom, pro $x \in R(a, \min(\eta, \delta_1, \delta_2))$ platí

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{f(x)}{g(x)} > 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

což dokazuje opět, že $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$ i v případě $A = \infty$.

Tím je důkaz završen. ■

Poznámka 1.1.9

Předchozí tvrzení pochopitelně platí i při záměně ostrých nerovností v jeho znění. Konkrétně, za předpokladů

(<>) $\lim_{x\to a} f(x) = A < 0$ a $g(x) > 0$ na $R(a, \eta)$ platí $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = -\infty$;

(><) $\lim_{x\to a} f(x) = A > 0$ a $g(x) < 0$ na $R(a, \eta)$ platí $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = -\infty$;

(<<) $\lim_{x\to a} f(x) = A < 0$ a $g(x) < 0$ na $R(a, \eta)$ platí $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$.

Důkazy všech těchto případů jsou identické důkazu původního tvrzení.

Posledním základním tvrzením o limitách funkcí je vztah limit a uspořádání reálných čísel, vlastně jakási varianta lemmatu ?? pro posloupnosti.

Věta 1.1.10 (O srovnání)

Ať $a \in \mathbb{R}^*$ a f, g, h jsou reálné funkce.

(a) Pokud
$$\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x),$$
pak existuje prstencové okolí bodu a, na němž $f > g$.

(b) Existuje-li prstencové okolí bodu a, na němž platí $f \le g$, pak
$$\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x).$$

(c) Existuje-li prstencové okolí a, na němž $f \le h \le g$ a $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak existujíc rovněž $\lim_{x\to a} h(x)$ jest rovna A.

Důkaz. Položme $L_f \coloneqq \lim_{x\to a} f(x)$ a $L_g \coloneqq \lim_{x\to a} g(x)$.

Dokážeme (a). Protože $L_f > L_g$, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $L_f - L_g > 2\varepsilon$. K tomuto ε nalezneme z definice limity $\delta_f > 0$ a $\delta_g > 0$ taková, že
$$\forall x \in R(a, \delta_f) : f(x) \in B(L_f, \varepsilon),$$
$$\forall x \in R(a, \delta_g) : g(x) \in B(L_g, \varepsilon).$$
To ovšem znamená, že pro $x \in R(a, \min(\delta_f, \delta_g))$ platí jak
$$f(x) > L_f - \varepsilon,$$
tak
$$g(x) < L_g + \varepsilon,$$
čili
$$f(x) - g(x) > L_f - \varepsilon - L_g - \varepsilon = L_f - L_g - 2\varepsilon > 0,$$
kterak chtiechom.

Část (b) dokážeme sporem. Ať $L_f > L_g$. Podle (a) pak existuje prstencové okolí $R(a, \delta)$ bodu a, na němž $f > g$. Ovšem, podle předpokladu existuje rovněž okolí $R(a, \eta)$ bodu a, kde zase $f \le g$. Vezmeme-li tudíž $x \in R(a, \min(\delta, \eta))$, pak $f(x) > g(x) \ge f(x)$, což je spor.

V důkazu (c) rozlišíme dva případy. Položme $L \coloneqq L_f = L_g$ a ať nejprve $L \in \mathbb{R}$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existují $\delta_f, \delta_g > 0$ taková, že pro $x \in R(a, \delta_f)$ platí
$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$
a pro $x \in R(a, \delta_g)$ zas
$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon.$$
Z předpokladu existuje prstencové okolí $R(a, \eta)$, na němž $f \le h \le g$. Pročež, pro $x \in R(a, \min(\delta_f, \delta_g, \eta))$ máme
$$L - \varepsilon < f(x) \le h(x) \le g(x) < L + \varepsilon,$$

z čehož plyne $h(x) \in B(L, \varepsilon)$, neboli $\lim_{x \to a} h(x) = L$.

Pro $L = \infty$ postupujeme jednodušeji, neboť stačí dolní odhad. K danému $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta)$ platí

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Pak pro $x \in R(a, \min(\delta, \eta))$ máme odhad

$$\frac{1}{\varepsilon} < f(x) \leq h(x),$$

čili $h(x) \in B(\infty, \varepsilon)$, což dokazuje rovnost $\lim_{x \to a} h(x) = \infty$.

Případ $L = -\infty$ se ošetří horním odhadem funkcí g. ■

Cvičení 1.1.11

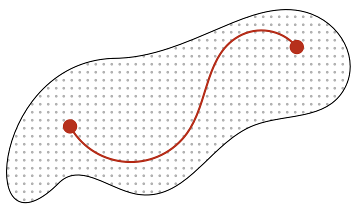
Spočtěte následující limity funkcí

$$\lim_{x \to 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2},$$
$$\lim_{x \to 0} \frac{3x + \frac{2}{x}}{x + \frac{4}{x}},$$
$$\lim_{x \to -\infty} \sqrt{x^2 + x} - x,$$
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x-1} - 2x}{x - 7}.$$

1.2 Spojité funkce

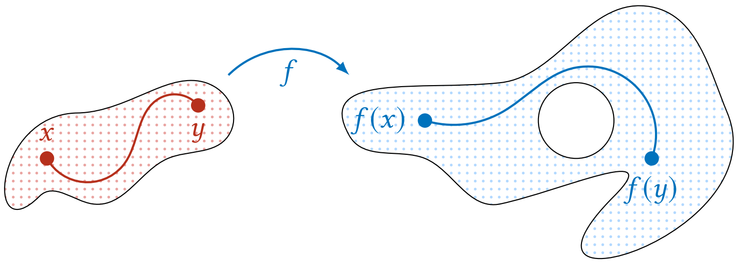
Vlastnost spojitosti funkce či zobrazení je zcela jistě tou nejdůležitější především v topologii (disciplíně zpytující „tvar“ prostoru), kde se vlastně s jinými zobrazeními než spojitými v obec nepracuje.

Intuitivně je zobrazení *spojité* v moment, kdy zobrazuje souvislé části prostoru na souvislé části prostoru. Souvislostí se zde myslí vlastnost konkrétní podmnožiny prostoru (třeba $\mathbb{R}^n$), kdy z každého bodu do každého jiného bodu existuje cesta (křivka v prostoru), která tuto podmnožinu neopustí (obrázek 1.6).



Obrázek 1.6: Souvislá podmnožina $\mathbb{R}^2$.

Spojité zobrazení lze tudíž definovat tím způsobem, že dva obrazy lze vždy spojit křivkou, která neopouští obraz souvislé podmnožiny obsahující jejich vzory. Jednodušeji, spojité zobrazení nesmí „roztrhnout“ souvislou podmnožinu prostoru, i když do ní může například „udělat díry“.



Obrázek 1.7: Spojité zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

V první dimenzi je situace pochopitelně výrazně jednodušší. Souvislou podmnožinou $\mathbb{R}$ je *interval*, a tedy spojité zobrazení je takové, které zobrazuje interval na interval. Díry v intervalu zřejmě není možné dělat bez téhož kompletního roztržení. Takto se však, primárně z důvodův technických, spojité zobrazení obyčejně nedefinuje a vlastnost zachování intervalu dlužno dokázat.

Pojem limity funkce umožňuje definovat spojitou funkci jako tu, která se v každém bodě blíží ke své skutečné hodnotě, tj. nedělá žádné „skoky“.

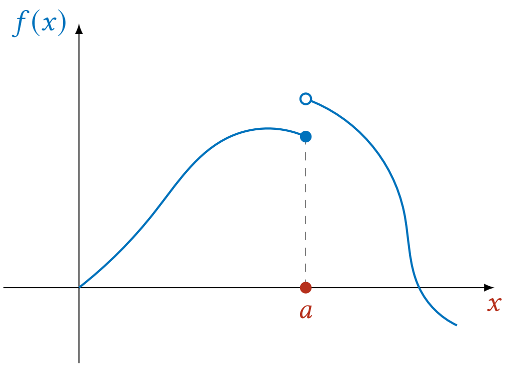
Definice 1.2.1 (Spojitá funkce)

Ať $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že reálná funkce f je *spojitá v bodě* a, pokud

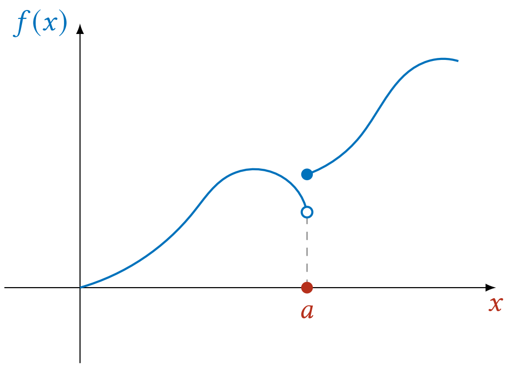
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Poznámka 1.2.2 (Jednostranně spojitá funkce)

Obdobně předchozí definici tvrdíme, že funkce f je *spojitá zleva, resp. zprava, v bodě* $a \in \mathbb{R}$, pokud $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, resp. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Ona funkce je pak spojitá v bodě a, když je v a spojitá zleva i zprava.



(a) Funkce f spojitá zleva (ale ne zprava) v bodě a.



(b) Funkce f spojitá zprava (ale ne zleva) v bodě a.

Obrázek 1.8: Jednostranná spojitost

Definice 1.2.3 (Funkce spojitá na intervalu)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že reálná funkce f je *spojitá na I*, je-li

- spojitá v každém vnitřním bodě I,
- spojitá zprava v levém krajním bodě I, pokud tento leží v I a
- spojitá zleva v pravém krajním bodě I, pokud tento leží v I.

Nyní se jmeme dokázat, že spojité funkce na intervalu (souvislé množině) mají skutečně ony přirozené vlastnosti, jimiž jsme je popsali v úvodu do této sekce. Konkrétně dokážeme, že spojité funkce zobrazují interval na interval. K tomu poslouží ještě jedno pomocné tvrzení, známé též pod přespříliš honosným názvem „Bolzanova věta o nabývání mezihodnot".

Věta 1.2.4 (Bolzanova)

Nechť f je reálná funkce spojitá na $[a, b]$ a $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) = y$.

Důkaz. Ať je $y \in (f(a), f(b))$ dáno. Označme

$$M \coloneqq \{z \in [a, b] \mid f(z) < y\}.$$

Ukážeme, že množina M má konečné supremum. K tomu potřebujeme ověřit, že je neprázdná a shora omezená. Protože $f(a) < y$, jistě $a \in M$. Podobně, jelikož $y < f(b)$, je b horní závorou M. Existuje tedy $\sup M$, které označíme S. Jistě platí $S \in (a, b)$. Ukážeme, že $f(S) = y$ vyloučením možností $f(S) < y$ a $f(S) > y$.

Ať nejprve $f(S) < y$. Protože f je z předpokladu spojitá (čili $\lim_{c \to S} f(c) = f(S) < y$), existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $c \in (S, S + \varepsilon)$ platí $f(c) < y$. To je ovšem spor s tím, že S je horní závorou M. Nutně tedy $f(S) \geq y$.

Ať nyní $f(S) > y$. Opět ze spojitosti f nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že pro $c \in (S - \varepsilon, S)$ platí $f(c) > y$. Dostáváme spor s tím, že S je **nejmenší** horní závorou M.

Celkem vedly obě ostré nerovnosti ke sporu, tudíž $f(S) = y$ a důkaz je hotov. ■

Důsledek 1.2.5

Ať $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak $f(I)$ je interval.

Důkaz. Volme $y_1, y_2 \in f(I), y_1 < y_2$.

Protože $y_1, y_2 \in f(I)$, existují $x_1, x_2 \in I$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 < x_2$. Potom z Bolzanovy věty pro každé $y \in (f(x_1), f(x_2))$ existuje $z \in (x_1, x_2)$ takové, že $f(z) = y$. Potom však z definice $y \in f(I)$, a tedy je $f(I)$ interval. ■

1.3 Hlubší poznatky o limitě funkce

Kapitolu o limitách funkcí dovršíme několika – v dalším textu zásadními – tvrzeními. Některá z nich se vížou na pojem spojitosti funkce, některá nikoliv. Ukážeme si rovněž souvislost limit funkcí s limitami posloupností; uzříme, že je to v jistém širém smyslu týž koncept.

Nejprve se pozastavíme nad chováním limit funkcí vzhledem k jejich skládání. Je vskutku velmi přirozené – má-li funkce g limitu A v bodě a a funkce f limitu B v bodě A, pak $f \circ g$ má limitu B v bodě a, jak by jeden čekal. Toto tvrzení má však své předpoklady; pro libovolné dvě funkce pravdivé není.

Věta 1.3.1 (Limita složené funkce)

Ať $a, A, B \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou reálné funkce. Nechť navíc platí

$$\lim_{x \to a} g(x) = A \quad a \quad \lim_{y \to A} f(y) = B.$$

*Je-li splněna **aspoň jedna** z podmínek:*

(R) existuje prstencové okolí a, na němž platí $g \neq A$;

(S) funkce f je spojitá v A,

pak

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = B.$$

Důkaz. Důkaz tvrzení není příliš obtížný, ovšem poněkud technický a alfabeticky tíživý. Potřebujeme ukázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že všechna $x \in R(a, \delta)$ splňují $f(g(x)) \in B(B, \varepsilon)$. Nechť je tedy $\varepsilon > 0$ dáno.

Předpokládejme, že platí (R) a máme $\eta > 0$, pro něž $g(x) \neq A$, kdykoli $x \in R(a, \eta)$. Ježto platí $\lim_{y \to A} f(y) = B$, existuje k danému $\varepsilon > 0$ číslo $\delta_f > 0$ takové, že pro $y \in R(A, \delta_f)$ platí $f(y) \in B(B, \varepsilon)$. K tomuto $\delta_f > 0$ pak existuje $\delta_g > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta_g)$ platí $g(x) \in B(A, \delta_f)$. Volíme-li nyní $\delta \coloneqq \min(\eta, \delta_g)$, pak pro $x \in R(a, \delta)$ platí

$$g(x) \in B(A, \delta_f) \quad \text{i} \quad g(x) \neq A,$$

kteréžtě dvě podmínce dávajíta celkem $g(x) \in B(A, \delta_f) \setminus \{A\} = R(a, \delta_f)$. Potom však pro $x \in R(a, \delta)$ platí $g(x) \in R(A, \delta_f)$, tudíž $f(g(x)) \in B(B, \varepsilon)$, jak jsme chtěli.

Ať naopak platí (S). Pak smíme pro spojitost f v A ve výroku

$$\forall y \in R(A, \delta_f) : f(y) \in B(B, \varepsilon)$$

místo prstencového okolí $R(A, \delta_f)$ brát plné okolí $B(A, \delta_f)$, neboť $f(A) = \lim_{y \to A} f(y) = B \in B(B, \varepsilon)$. Protože pro $x \in R(a, \delta_g)$ však platí $g(x) \in B(A, \delta_f)$, máme rovněž $f(g(x)) \in B(B, \varepsilon)$, čímž je důkaz hotov. ■

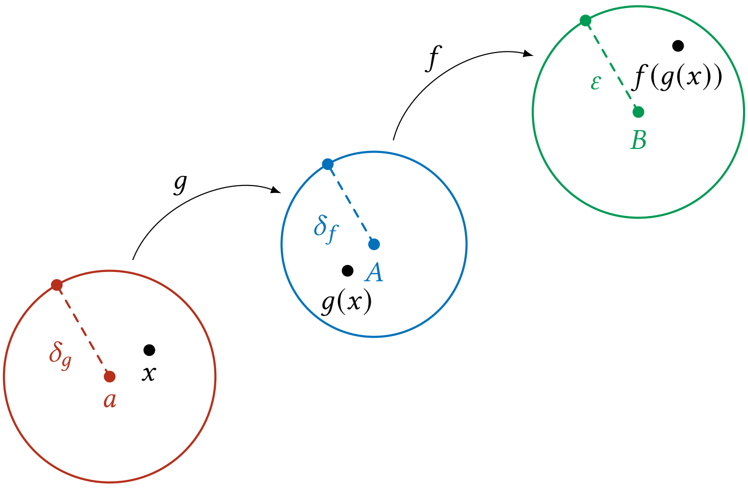
Varování 1.3.2

Platnost aspoň jedné z podmínek (R),(S) v předchozí větě je nezanedbatelná.

Vezměme $f(y) = |\operatorname{sgn} y|$ a $g(x) = 0$. Potom platí

$$\lim_{y\to 0} f(y) = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0,$$

ale $\lim_{x\to 0}(f \circ g)(x) = 0 \neq 1$. Závěr předchozí věty je v tomto případě neplatný pro to, že neexistuje okolí a, na němž $g \neq 0$ (tj. neplatí (R)), ani není f spojitá v 0 (tj. neplatí (S)).



Obrázek 1.9: Důkaz věty o limitě složené funkce.

Pokračujeme vztahem limit posloupností a limit funkcí. Ukazuje se, že limitu funkce možno v principu nahradit limitou posloupnosti jejích funkčních hodnot. Toto tvrzení je zvlášť užitečné při důkazu *neexistence* oné limity. Stačí totiž najít dvě posloupnosti, funkční hodnoty jejichž členů se blíží k rozdílným číslům či kterákolivěk z nich neexistuje.

Věta 1.3.3 (Heineho)

Ať f je reálná funkce a $a, L \in \mathbb{R}^*$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

(2) Pro ***každou*** *posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takovou, že*

- $\lim_{n\to\infty} x_n = a$;
- $x_n \neq a$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$,

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Důkaz. Dokážeme nejprve (1) $\Rightarrow$ (2). Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Potřebujeme najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Uvědomme si, že poslední výrok je ekvivalentní

$$L - \varepsilon < f(x_n) < L + \varepsilon,$$

neboli $f(x_n) \in B(L, \varepsilon)$. Z toho, že $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existuje $\delta > 0$ takové, že všechna $x \in R(a, \delta)$ splňují $f(x) \in B(L, \varepsilon)$. Ježto $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, existuje k tomuto $\delta > 0$ index $n_0 \in \mathbb{N}$

takový, že

$$\forall n \geq n_0 : |x_n - a| < \delta,$$

neboli $x_n \in B(a, \delta)$. Předpokládáme ovšem, že $x_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy $x_n \in R(a, \delta)$, kdykoli $n \geq n_0$. Potom ale pro $n \geq n_0$ rovněž $f(x_n) \in B(L, \varepsilon)$, čili $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

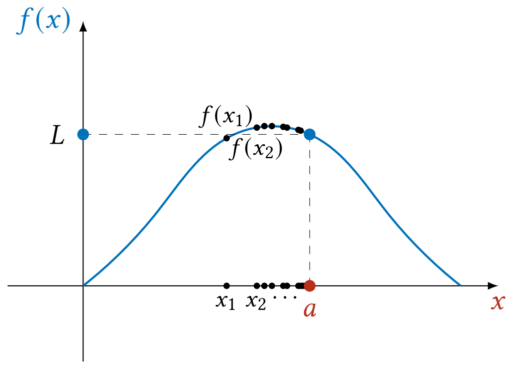
Místo přímého důkazu (2) $\Rightarrow$ (1) (který je zdlouhavý), dokážeme $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$. Předpokládejme tedy, že $\lim_{x\to a} f(x)$ buď neexistuje, nebo není rovna L. Chceme najít posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, která konverguje k a, žádný její člen není roven a, ale přesto $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ opět buď neexistuje, nebo není rovna L.

Uvědomíme si nejprve přesně, jak zní **negace** výroku $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Tvrdíme, že

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in R(a, \delta) : f(x) \text{ není definováno} \vee f(x) \notin B(L, \varepsilon).$$

Nalezněme tedy ono $\varepsilon > 0$ z výroku výše. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in R(a, 1/n)$ pro které $f(x_n)$ není definováno, nebo neleží v $B(L, \varepsilon)$. Vlastně jsme ve výroku výše položili $\delta \coloneqq 1/n$ postupně pro každé $n \in \mathbb{N}$. Sestrojili jsme pročež posloupnost x_n takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ a $x_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Nicméně, jak jsme psali výše, pro každé x_n buď $f(x_n)$ není definováno, nebo neleží v $B(L, \varepsilon)$. To ovšem znamená, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ buď neexistuje, nebo není rovna L. Platí tudíž předpoklady v (2), ale nikoli závěr v (2), tj. platí $\neg(2)$.

Tím je důkaz hotov. ■



Obrázek 1.10: Tvrzení (2) v Heineho větě.

Důsledek 1.3.4 (Heineho věta pro spojitost)

Ať $a \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(1) *Funkce f je spojitá v bodě a.*

(2) *Pro každou posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s limitou $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Důkaz. Zkrátka použijeme Heineho větu pro $L = f(a)$. Poznamenejme pouze, že podmínka $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zde zbytečná, neboť f je z předpokladu spojitá v a. ■

Příklad 1.3.5

V zájmu nabytí představy, jak se Heineho věta používá pro důkaz neexistence limity funkce, budeme drze předpokládat, že čtenáři byli již seznámeni s funkcí $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Její formální debut dlí v kapitole o elementárních funkcích.

Ukážeme, že limita $\lim_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje. Volme posloupnosti

$$x_n \coloneqq 2\pi n \quad \text{a} \quad y_n \coloneqq 2\pi n + \pi/2.$$

Pak platí $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ i zřejmě $x_n \neq \infty$ a $y_n \neq \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jsou proto splněny předpoklady tvrzení (2) z Heineho věty. Platí však

$$\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0,$$
$$\lim_{n\to\infty} \sin(y_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n + \pi/2) = 1,$$

a tedy jsme našli dvě posloupnosti, funkční hodnoty jejichž členů konvergují k různým číslům. Podle Heineho věty $\lim_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje.

Podobně jako monotónní posloupnosti mají vždy limitu (vizte lemma ??), stejně tak monotónní funkce ji vždy mají. Tento přirozený pojem briskně představíme. Řčeme, že reálná funkce f je *monotónní na intervalu* $I \subseteq \mathbb{R}$, když

($<$) je f *rostoucí*, tj. $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,

($>$) je f *klesající*, tj. $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$,

($\leq$) je f *neklesající*, tj. $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ nebo

($\geq$) je f *nerostoucí*, tj. $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Věta 1.3.6 (Limita monotónní funkce)

Ať $(a, b) \subseteq \mathbb{R}^*$ a f je monotónní na (a, b). Potom,

(1) jsouc f rostoucí nebo neklesající má limity

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup f((a, b));$$

(2) jsouc f klesající nebo nerostoucí má limity

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \sup f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

Důkaz. Dokážeme pouze část (1), důkaz (2) je totožný.

Budeme nejprve předpokládat, že f je zdola omezená a označíme $m \coloneqq \inf f((a, b)) \in \mathbb{R}$. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Z definice infima nalezneme $y \in f((a, b))$ takové, že $y < m + \varepsilon$. Jelikož $y \in f((a, b))$, existuje $x \in (a, b)$, že $f(x) = y$. Z toho, že f je neklesající či rostoucí plyne, že pro každé $z \in (a, x)$ je $f(z) \leq f(x) = y$.

Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $R_+(a, \delta) = (a, a + \delta) \subseteq (a, x)$. Potom ale pro $z \in R_+(a, \delta)$ platí $f(z) \leq y < m + \varepsilon$. Ježto nerovnost $f(z) > m - \varepsilon$ je zřejmá (m je dolní závora f), máme celkem pro $z \in R_+(a, \delta)$

$$m - \varepsilon < f(z) < m + \varepsilon,$$

čili $f(z) \in B(m, \varepsilon)$, jak bylo dokázati.

Ať nyní f není zdola omezená na (a, b). Pak $\inf f(a, b) = -\infty$ a pro každé $\varepsilon > 0$ nalezneme $z \in (a, b)$, pro nějž $f(z) < -1/\varepsilon$. To ovšem z definice znamená, že $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty = \inf f((a, b))$.

Důkaz faktu, že $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup f((a, b))$ lze vést obdobně. ■

Cvičení 1.3.7

Dokažte bod (2) ve větě 1.3.6.

1.3.1 Extrémy funkce

V mnoha matematických i externích disciplínách jeden často hledá při studiu reálných funkcí body, v nichž je hodnota funkce největší či nejmenší. Obecně jsou maximalizační a minimalizační problémy jedny z nejčastěji řešených. Tyto problémy vedou přímo na výpočet tzv. *derivací* reálných funkcí, jsoucích dychtivým čtenářům představeny v následující kapitole. Zde pouze definujeme lokální a globální extrémy funkcí a ukážeme, že spojité funkce na uzavřených intervalech nutně na týchž nabývají svých nejmenších i největších hodnot.

Definice 1.3.8 (Lokální a globální extrém)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce a $X \subseteq M$. Řekneme, že funkce f v bodě $x \in X$ nabývá

- *globálního maxima* na X, když pro každé $y \in X$ platí $f(y) \leq f(x)$;
- *globálního minima* na X, když pro každé $y \in X$ platí $f(y) \geq f(x)$;
- *lokálního maxima*, když existuje okolí bodu x, na němž platí $f \leq f(x)$;
- *lokálního minima*, když existuje okolí bodu x, na němž platí $f \geq f(x)$.

Souhrnně přezdíváme globálnímu minimu a maximu *globální extrém* a lokálnímu maximu a minimu *lokální extrém*.

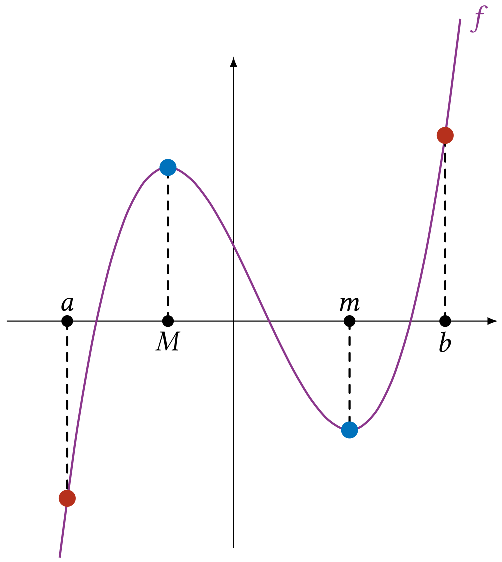
Jak jsme již zmínili v textu před definicí, spojité funkce nabývají na uzavřených intervalech globálních extrémů vždy.

Věta 1.3.9 (Extrémy spojité funkce)

Ať $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak f nabývá globálního minima a maxima na $[a, b]$.

Důkaz. Dokážeme, že f nabývá na $[a, b]$ globálního maxima. Pro globální minimum lze důkaz vést obdobně.

Využijeme důsledku 1.3.4. Nalezneme posloupnost, která se uvnitř intervalu $f([a, b])$ blíží k supremu funkce f na $[a, b]$ a ukážeme, že vzory členů této posloupnosti z intervalu $[a, b]$ se blíží k bodu, kde f nabývá maxima.



Obrázek 1.11: Lokální a globální extrémy funkce f na $[a, b]$. Lokálních extrémů nabývá f v bodech m a M a globálních extrémů v bodech a a b.

Položme tedy $S \coloneqq \sup f([a, b])$. Sestrojíme posloupnost $y : \mathbb{N} \to f([a, b])$, která konverguje k S. Je-li $S = \infty$, stačí položit třeba $y_n = n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $S \in \mathbb{R}$. Z definice suprema existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $z \in f([a, b])$ takový, že $S - 1/n < z \leq S$. Položíme $y_n \coloneqq z$. Tím jsme dali vzrůst posloupnosti y_n s $\lim_{n\to\infty} y_n = S$.

Z definice $f([a, b])$ nalezneme pro každé y_n číslo $x_n \in [a, b]$, pro něž $f(x_n) = y_n$. Posloupnost x_n je omezená (leží uvnitř $[a, b]$), a tedy z Bolzanovy-Weierstraßovy věty existuje její konvergentní podposloupnost. Můžeme pročež bez újmy na obecnosti předpokládat, že sama x_n konverguje. Položme $M \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_n$. Ježto $a \leq x_n \leq b$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, z lemmatu ?? plyne, že $M \in [a, b]$. Konečně, f je z předpokladu spojitá, a tedy v závěsu důsledku 1.3.4

$$f(M) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = S,$$

čili f nabývá v bodě M maxima na $[a, b]$. ■

Důsledek 1.3.10

Je-li funkce f spojitá na $[a, b]$, pak je tamže omezená.

Důkaz. Z věty 1.3.9 plyne, že f nabývá na $[a, b]$ minima s a maxima S. Potom ale pro každé $x \in [a, b]$ platí

$$s \leq f(x) \leq S,$$

čili f je na $[a, b]$ omezená. ■

1.4 Vybrané úlohy o limitách funkcí

Účelem této „přiložené“ sekce je ukázat na vybraných příkladech a úlohách obvyklé metody práce s limitami funkcí. Doufáme, že čtenářům dobře poslouží při uchápění tohoto tématu, snad náročnějšího k vnětí než limity posloupností a součty řad.

Příklad 1.4.1

Ať g je rostoucí a spojitá funkce na $[1, \infty)$ s $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ a f je **nekonstantní periodická** funkce na $\mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to\infty}(f \circ g)(x)$ neexistuje.

Pro důkaz neexistence limity máme (pochopitelně kromě samotné definice) zatím pouze dva nástroje – jednostranné limity a Heineho větu. Protože limitním bodem je ∞, použití jednostranných limit není možné. Zkusíme tedy Heineho větu.

Nejprve si uvědomíme, že z důsledku 1.2.5 je $g([1, \infty))$ je interval. Tento navíc není shora omezen, bo $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Na oba tyto fakty se budeme vícekrát odvolávat. Označme rovněž písmenem $p > 0$ periodu funkce f.

Položme nyní $x_0 \coloneqq 1$ a označme $y_0 \coloneqq g(x_0)$, $A \coloneqq f(y_0)$. Induktivně sestrojíme posloupnosti $x : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ a $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Předpokládejme, že jsou dány členy $x_0, \ldots, x_k$ a $y_0, \ldots, y_k$, kde $y_i = g(x_i)$ pro každé $i \leq k$. Položíme $y_{k+1} \coloneqq y_k + p$. Potom $f(y_{k+1}) = f(y_k)$. Protože $g([1, \infty)) = [y_0, \infty)$ a $y_{k+1} > y_0$, nalezneme $x_{k+1} \in [1, \infty)$ takové, že $g(x_{k+1}) = y_{k+1}$. Jelikož g je rostoucí a

$$g(x_{k+1}) = y_{k+1} > y_k = g(x_k),$$

rovněž $x_{k+1} > x_k$. Celkem máme $x_{n+1} > x_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, čili $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Rovněž

$$\lim_{n\to\infty} (f \circ g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} A = A,$$

neboť členy posloupnosti y jsou od sebe vzdáleny o periodu p funkce f.

Konečně, nalezneme jinou posloupnost $\tilde{x} : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ takovou, že $\lim_{n\to\infty}(f \circ g)(\tilde{x}_n) \neq A$, čímž završíme důkaz. Volme libovolné $0 < \varepsilon < p$. K tomuto ε nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$|g(x_0 + \delta) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

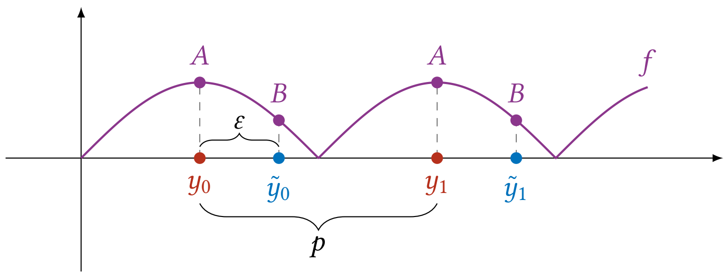
Toto δ vskutku existuje pro to, že g je rostoucí – tudíž $g(x_0 + \delta) > g(x_0)$ – a spojitá – tudíž dvě různé funkční hodnoty lze volit nekonečně blízké.

Položíme $\tilde{x}_0 \coloneqq x_0 + \delta$ a $\tilde{y}_0 \coloneqq g(\tilde{x}_0)$. Potom $f(\tilde{y}_0) = B \neq A$, ježto $\tilde{y}_0 \in (y_0, y_0 + p)$. Podobně jako dříve sestrojíme posloupnost $\tilde{x}_n$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \infty$ a $(f \circ g)(\tilde{x}_n) = B$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Potom ale platí

$$\lim_{n\to\infty} (f \circ g)(\tilde{x}_n) = B \neq A = \lim_{n\to\infty} (f \circ g)(x_n),$$

čili z Heineho věty $\lim_{x\to\infty}(f \circ g)(x)$ neexistuje.



Obrázek 1.12: Posloupnosti y a $\tilde{y}$ z příkladu 1.4.1.

Příklad 1.4.2 (Singularity funkce)

Ať $a \in \mathbb{R}$ a f je reálná funkce definovaná aspoň na prstencovém okolí bodu a. Předpokládejme, že f není spojitá v a. Pak řekneme, že f má v a

- **odstranitelnou singularitu**, když existuje konečná $\lim_{x \to a} f(x)$. V tomto případě můžeme dodefinovat $f(a) \coloneqq \lim_{x \to a} f(x)$;
- **pól**, když existují $\lim_{x \to a^+} f(x)$ a $\lim_{x \to a^-} f(x)$, ale nejsou si rovny;
- **neodstranitelnou singularitu**, když aspoň jedna z jednostranných limit f v bodě a neexistuje.

Singularity funkcí tvoří důležitou část komplexní analýzy, kde poskytují obraz zejména o stabilitě fyzikálních systému popsaných těmito funkcemi. *Odstranitelné singularity* jsou velmi stabilní a většinou způsobeny pouze chybami v měření. *Póly* jsou stabilní při vhodné aproximaci, avšak v grafu komplexních funkcí jedné proměnné vypadají vlastně jako nekonečné stále se zúžující tuby. Lze si je představovat například jako Gabrielův roh. Vhodnou aproximací je zde uříznutí tohoto tělesa ve zvolené „výšce“. Konečně, *neodstranitelné singularity* jsou vskutku neodstranitelné. Dokonce platí věta, že komplexní funkce jedné proměnné s neodstranitelnou singularitou nabývají **úplně všech** hodnot z $\mathbb{C}$ na libovolně malém okolí této singularity. Menší stability již dosáhnout nelze. Neodstranitelné singularity si, tvrdíme, nelze ani rozumně představit.

Ukážeme, že aspoň pro funkce jedné *reálné* proměnné, jimiž se v tomto textu zabýváme, jsou množiny všech odstranitelných singularit i pólů spočetné.

Začněmež odstranitelnými singularitami.