Gymnázium Evolution Jižní Město

Jakýsi úvod do matematické analýzy

Áďula vod Klepáčů

6. srpna 2024

Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předšedších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.

Obsah

Kapitola 1

Předpoklady

Očekáváme, že čtenář je již dobře seznámen se základními pojmy teorie množin a logiky. Pro pohodlí je zde však uvedeme. Upozorňujeme však, že jejich výklad nemá za cíl být jakkolivěk podrobný či vyčerpávající.

1.1 Základní pojmy z logiky

Obyčejnou podobou matematické logiky je jazyk o

- dvou konstantách:
  - 0 (též $\perp$) – **lež**,
  - 1 (též $\top$) – **pravda**;
- dvou binárních operátorech $\wedge$ (**a**, též **konjunkce**) a $\vee$ (**nebo**, též **disjunkce**) definovaných rovnostmi
  - $(0 \wedge 0 = 0 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 0)$ a $(1 \wedge 1 = 1)$,
  - $(0 \vee 0 = 0)$ a $(0 \vee 1 = 1 \vee 0 = 1 \vee 1 = 1)$.
- unárním operátoru $\neg$ (**ne** či **negace**) definovaném rovnostmi $(\neg 1 = 0)$ a $(\neg 0 = 1)$;
- proměnných;
- dvou kvantifikátorech $\forall$ (**pro všechny**, též **universální**) a $\exists$ (**existuje**, též **existenční**).

K množině binárních operátorů se často též pro praktické účely přidávají $\Rightarrow$ (**implikace**, **když …, tak …**) a $\Leftrightarrow$ (**ekvivalence**, **… právě tehdy, když …**) definované rovnostmi

$$(x \Rightarrow y) = (\neg x \vee y) \quad \text{a} \quad (x \Leftrightarrow y) = ((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)).$$

Užitím konstant 0 a 1 by implikace byla definována rovnostmi

$$(0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow 1 = 1) \quad \text{a} \quad (1 \Rightarrow 0 = 0),$$

zatímco ekvivalence rovnostmi

$$(0 \Leftrightarrow 0 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1) \quad \text{a} \quad (0 \Leftrightarrow 1 = 1 \Leftrightarrow 0 = 0).$$

K matematické logice se též váže pojem *výroku*. Výrokem nepřesně řečeno míníme jakoukoli větu, o které lze tvrdit, že platí, nebo neplatí. Formálně se výrok definuje poněkud obtížněji a význam natolik abstraktní definice pro účely tohoto textu je přinejmenším sporný. Pochopitelně, výraz vzniklý z kratších výroků užitím logických operátorů a kvantifikátorů je rovněž výrokem.

Příklad 1.1.1

Ať x je výrok „Mám hlad." a y je „Jdu do hospody." Pak

- výrok $x \wedge y$ zní „Mám hlad a jdu do hospody."
- výrok $x \vee y$ zní „Mám hlad nebo jdu do hospody."
- výrok $\neg x$ zní „Nemám hlad." a $\neg y$ zní „Nejdu do hospody."
- výrok $x \Rightarrow y$ zní „Když mám hlad, tak jdu do hospody."
- výrok $x \Leftrightarrow y$ zní „Mám hlad právě tehdy, když jdu do hospody."

Sémantická hodnota uvedených výroků se pochopitelně liší.

Varování 1.1.2

- Operátor $\vee$ **není** výlučný. To jest, výrok $x \vee y$ je pravdivý i v případě, že x je pravdivý a y je pravdivý.
- Jazykové vyjádření výroku $x \Rightarrow y$ je v mírném rozporu s běžnou intuicí. Totiž, $x \Rightarrow y$ je pravdivý, kdykoli x je lživý, neboť na základě lži nelze rozhodnout o pravdivosti žádného výroku. To znamená, že výrok „Když mám hlad, tak jdu do hospody." je pravdivý i tehdy, když nemám hlad, a přesto do hospody jdu.

Při zjišťování pravdivosti výroků na základě pravdivosti „elementárních výroků" (tedy výroků, které již nelze více dělit), které je tvoří, je užitečná tzv. *pravdivostní tabulka*. Jde o tabulku, která ve sloupcích obsahuje stále složitější spojení elementárních výroků, a v posledním onen původní výrok. V řádcích pak obsahuje pravdivostní hodnoty. Není obtížné si rozmyslet, že je-li výrok složen z n elementárních výroků spojených logickými operátory, pak má jeho pravdivostní tabulka 2^n řádků – každý pro jedno možné přiřazení n pravdivostních hodnot (tj. 0 nebo 1) jeho elementárním výrokům.

Pro práci s výroky je užitečné si pamatovat (a není ani těžké si rozmyslet), že negace výroku způsobí nahrazení každého elementárního výroku jeho negací, prohození všech operátorů $\wedge$ a $\vee$ a rovněž prohození kvantifikátorů $\exists$ a $\forall$. Například

$$\neg(\exists x : (x \vee y \wedge \neg z)) = (\forall x : (\neg x \wedge \neg y \vee z)).$$

V případě implikace ($\Rightarrow$) pracujeme zkrátka s definicí a dostaneme

$$\neg(x \Rightarrow y) = (x \wedge \neg y).$$

Negovat ekvivalenci je mírně složitější, bo je konjunkcí dvou implikací. Výpočtem dostaneme

$$\begin{aligned}\neg(x \Leftrightarrow y) &= \neg((x \Rightarrow y) \wedge (y \Rightarrow x)) \\ &= (\neg(x \Rightarrow y) \vee \neg(y \Rightarrow x)) \\ &= ((x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)).\end{aligned}$$

Ověříme si pravdivostní tabulkou na příkladě ekvivalence, že tento „selský“ přístup k negování výroků funguje (to samozřejmě **není** důkaz, že funguje obecně).

Ekvivalence $x \Leftrightarrow y$ je pravdivá tehdy, když x má stejnou hodnotu jako y. Její negace je tudíž pravdivá, když x a y nabývají hodnot opačných. Sestrojíme pravdivostní tabulku pro výrok $(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$.

x	y	$\neg x$	$\neg y$	$x \wedge \neg y$	$y \wedge \neg x$	$(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$
0	0	1	1	0	0	0
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	1
1	1	0	0	0	0	0

Tabulka 1.1: Pravdivostní tabulka výroku $(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$.

Vidíme, že $(x \wedge \neg y) \vee (y \wedge \neg x)$ je skutečně negací ekvivalence, neboť je pravdivý přesně ve chvíli, kdy x a y mají navzájem opačné pravdivostní hodnoty.

1.2 Základní pojmy z teorie množin

Teorie množin tvoří společně s logikou základ moderní matematiky. Jedno možné přirovnání je, že množiny tvoří svět, který lze zkoumat pomocí logiky. Pojem „množina“ (podobně jako i „pravda“ a „lež“ v logice) není možné v teorii množin definovat, poněvadž je její základní stavební jednotkou. Stejně jako všechny teorie současné matematiky je i teorie množin definována *axiomaticky*. Axiomy jsou logické výroky, které v dané teorii nelze dokázat, a jsou a priori označeny za pravdivé. Jsou vlastně jakousi matematickou verzí zázraku. Přestože znalost a porozumění axiomům teorie množin se považuje za základ matematického vzdělání, jejich podoba je tomuto textu irelevantní a zmiňovat je nebudeme. Snad kromě toho prvního, asi nejpřirozenějšího možného – „Existuje množina“.

Intuitivně asi každý matematik přemýšlí o množinách jako o souborech prvků, které spolu nějakým způsobem souvisejí. Fakt, že prvek x je součástí množiny A, zapisujeme jako $x \in A$ a čteme „x náleží/je prvkem A“ (symbol $\in$ je pochroumané e v angl. slově **e**lement). Když B je množina, jejíž každý prvek leží rovněž v A, pak píšeme $B \subseteq A$ a čteme tento výrok jako „B je podmnožinou A“ (případně „A je nadmnožinou B“). Pomocí symbolu náležení ($\in$) lze tento vztah též logicky vyjádřit jako

$$(B \subseteq A) \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \in A),$$

tedy výrokem „Když x je prvkem B, pak x je prvkem A.“

Naopak, fakt, že y *není* prvkem A, nezapisujeme krkolomně $\neg(y \in A)$, nýbrž zkrátka $y \notin A$, a fakt, že C *není* podmnožinou A, nepřekvapivě jako $C \nsubseteq A$. Potřebujeme-li zdůraznit, že C je podmnožinou A, ale není celou množinou A, píšeme $C \subsetneq A$.

Varování 1.2.1

Mnoho začínajících matematiků pěstuje slabě nepřesnou intuici o pojmu množiny. Totiž, množinu lze vnímat jako soubor prvků; není však radno chovat představu, že tyto prvky mají uvnitř množiny nějaké „umístění“ či „pořadí“ nebo „četnost“ či „počet výskytů“. Že řada lidí z počátku přisuzuje množinám a jejich prvkům tyto vlastnosti, je vrub na úsudku velmi přirozený.

Množina jako taková je koncept, který nemá přesný ekvivalent ve světě vnímaném smysly. Na kupce sena vždy dokážeme říct, které stéblo je nahoře a které dole; rozlišujeme, zda máme v lednici deset pivo nebo jedno. V množině nikolivěk.

Existuje speciální množina, $\emptyset$, jíž říkáme *prázdná*, nemajíc z definice žádný prvek. Jako názorný příklad užití universálního kvantifikátoru lze za definici prázdné množiny považovat výrok

$$\forall x : x \notin \emptyset.$$

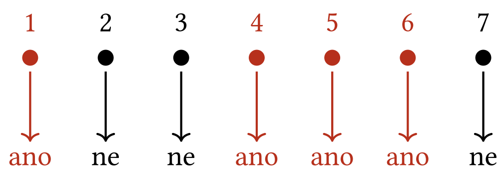
Je dobré si povšimnout, že $\emptyset$ je z definice podmnožinou každé množiny. Totiž, $x \in \emptyset$ je výrok vždy lživý a, pamatujte, ze lži plyne (aspoň v matematické logice) jak lež, tak pravda. Tedy, výrok $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$ je vždy pravdivý. Filosofickou otázku, zda dává smysl, že „nic“ je vždy součástí „něčeho“, s lehkým srdcem přenecháváme kroužkům nadšených bakalantů teologické fakulty.

Podobně, množina je též vždy svojí vlastní podmnožinou, neboť výrok $x \in A \Rightarrow x \in A$ je rovněž vždy pravdivý. Speciálně, každá množina kromě prázdné má přinejmenším dvě podmnožiny – prázdnou množinu a sebe samu. Snad pichlavější otázku, zda dává smysl, že každá věc je svou vlastní součástí, s lehkým srdcem přenecháváme doktorandům teologické fakulty.

Velikostí množiny A myslíme (v intuitivním smyslu) počet jejích prvků a zapisujeme ji $\#A$. Je-li A nekonečná, píšeme výmluvně $\#A = \infty$. Často je též užitečné přemýšlet o všech podmnožinách dané množiny rovněž jako o množině. Značíme ji jako 2^A. Za původem tohoto značení stojí fakt, že má-li A n prvků, pak má 2^n podmnožin. Totiž, představme si například všechny prvky A seřazené nějak náhodně za sebou. Libovolnou podmnožinu A získám tak, že začnu s prázdnou „krabicí“ a u každého prvku se postupně rozhodnu, zda jej do ní „hodím“, či ne. Pro každý prvek mám 2 možnosti, proto celkově pro n prvků mám

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n-\text{krát}}$$

možností, jak vyrobit unikátní podmnožinu. Symbolicky můžeme psát $\#2^A = 2^{\#A}$.



Obrázek 1.1: Výběr podmnožiny $\{1, 4, 5, 6\}$ z množiny $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

1.2.1 Množinové operace

Podobně jako na výrocích, i na množinách lze provádět různé operace. V rámci jejich vnímání jako *souborů* je přirozené, že takové soubory umíme slučovat, oddělovat a vybírat z více souborů pouze prvky jim všem společné. Tyto tři základní množinové operace se zde jmeme připomenout.

Jsou-li A, B množiny, pak

- *sjednocením* A a B, zapsaným $A \cup B$, myslíme množinu, která obsahuje prvky ležící aspoň v jedné z těchto množin; logicky, $A \cup B$ je množina splňující výrok

$$(x \in A \cup B) \Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B).$$

(a) Množiny A a B. (b) Sjednocení $A \cup B$.

Obrázek 1.2: Operace sjednocení množin.

- *průnikem* A a B, zapsaným $A \cap B$, myslíme množinu obsahující pouze prvky ležící v obou množinách; logicky, $A \cap B$ je množina splňující

$$(x \in A \cap B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \in B).$$

(a) Množiny A a B. (b) Průnik $A \cap B$.

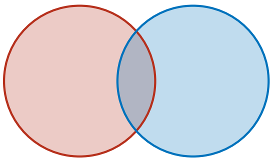
Obrázek 1.3: Operace průniku množin.

- *rozdílem* A a B, zapsaným $A \setminus B$, myslíme množinu obsahující prvky ležící v A, které však neleží v B; logicky, $A \setminus B$ je množina splňující

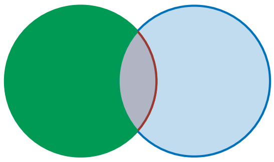
$$(x \in A \setminus B) \Leftrightarrow (x \in A \wedge x \notin B).$$

  Je dobré dbát faktu, že $A \setminus B$ a $B \setminus A$ jsou obecně **různé** množiny.

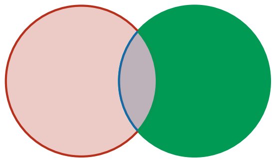
Operace sjednocení a průniku mají své „hromadné“ varianty, tedy sjednocení a průnik většího (klidně nekonečného) počtu množin. V případech jako je tento, kdy potřebujeme provádět operace na libovolném množství objektů, se často užívá pomocné množiny, tzv. *množiny indexů*, která slouží jen k tomu, aby jednotlivé objekty v operované skupině od sebe odlišovala.



(a) Množiny A a B.



(b) Rozdíl $A \setminus B$.



(c) Rozdíl $B \setminus A$.

Obrázek 1.4: Operace rozdílu množin.

Konkrétně, zápisem

$$\bigcup_{i \in I} A_i, \text{ resp.} \bigcap_{i \in I} A_i,$$

myslíme množinu, která obsahuje prvky, které leží aspoň v jedné, resp. v každé, z množin A_i, $i \in I$, kde I je libovolná množina indexů. K formální logické definici je třeba použít kvantifikátorů, neboť množina I nemusí mít konečně prvků. Definujeme

$$(x \in \bigcup_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow (\exists i \in I : x \in A_i)$$

a

$$(x \in \bigcap_{i \in I} A_i) \Leftrightarrow (\forall i \in I : x \in A_i).$$

Tyto definice jsou původem matematické pranostiky „Existenční kvantifikátor je sjednocení a univerzální kvantifikátor je průnik.“

Ve speciálním případě, kdy $I = \{1, \dots, n\}$ je množina přirozených čísel od 1 do n, se také užívá zápisů

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{a} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

Není obtížné si uvědomit, že pro rozdíl taková definice není možná, neboť u rozdílu množin záleží na jejich pořadí a, opakujeme (vizte výstrahu 1.2.1), množina indexů I *neurčuje pořadí*, v kterém se množiny A_i sjednocují či pronikají.

Dalším oblíbeným způsobem zápisu těchto operací, především v teorii kategorií, je $\bigcup \mathcal{A}$ a $\bigcap \mathcal{A}$, kde $\mathcal{A} \coloneqq \{A_i \mid i \in I\}$ je pomocná množina všech množin $A_i, i \in I$. **Pozor!** Množina $\mathcal{A}$ není v žádném smyslu sjednocením množin A_i; je to množina, která má za prvky ony samotné množiny A_i, ne jejich prvky. Obecně, žádný prvek žádné množiny A_i není zároveň prvkem $\mathcal{A}$, speciálně A_i obecně **nejsou** podmnožiny $\mathcal{A}$.

1.2.2 Kartézský součin a uspořádané n-tice

Anobrž holý pojem množiny neobsahuje v žádném smyslu koncept *pořadí* prvku, je tento však pochopitelně užitečný, a proto si jej definujeme.

Zápisem (x, y) myslíme tzv. *uspořádanou dvojici* prvků x a y. V této dvojici je x prvním prvkem a y druhým. Je proto odlišná od množiny $\{x, y\}$, protože $\{x, y\} = \{y, x\}$, ale $(x, y) \neq (y, x)$. V úvodu do této kapitoly jsme tvrdili, že teorie množin tvoří svět matematiky. Pojem *dvojice*, který není shodný s pojmem *množiny* tudíž musel bedlivé čtenáře vylekat. Darmo se však lekati, uspořádané dvojice jsou rovněž množiny. Než jej odhalíme, vybízíme čtenáře, aby našli způsob, kterak definovat uspořádanou dvojici jako množinu.

Běžně užívaná definice (prve formulována Kazimierzem Kuratowskim) je

$$(x, y) \coloneqq \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Ta říká, že uspořádaná dvojice (x, y) je vlastně množina obsahující množinu s jediným prvkem x a množinu $\{x, y\}$. Ta je pak rozdílná od dvojice (y, x), což je množina $\{\{y\}, \{x, y\}\}$. Tato definice je z formálního hlediska nutná, protože vytvářet matematické objekty nedefinovatelné v teorii množin rodí chaos, ale intuitivně zcela nepoužitelná. Představme si dva lidi za sebou ve frontě vnímat jako skupinu, v níž je skupina jenom s tím prvním a pak ještě skupina obou. Tvrdíme, že je dobré udržet si pročež představu uspořádané dvojice jakožto množiny, ve které mají navíc prvky svá pořadí.

Definice uspořádané dvojice se rekurzivně rozšíří na libovolný počet prvků. Kupříkladu, uspořádanou trojici definujeme předpisem

$$(x, y, z) \coloneqq (x, (y, z)),$$

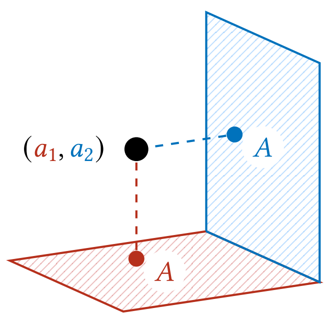
to jest jako uspořádanou dvojici obsahující prvek x a uspořádanou dvojici (y, z). Zápis pomocí množin se s rostoucím počtem prvků velmi rychle komplikuje. Všimněte si, že už v drobném případě tří prvků dostaneme

$$(x, y, z) = (x, (y, z)) = (x, \{\{y\}, \{y, z\}\}) = \{\{x\}, \{x, \{\{y\}, \{y, z\}\}\}\}.$$

Máme-li n prvků $x_1, \ldots, x_n$, pak jejich uspořádanou n-tici zapisujeme $(x_1, \ldots, x_n)$.

Existence uspořádaných n-tic dává vzniknout jedné další množinové operaci – kartézskému součinu. Kartézský součin dvou množin A, B, zapsaný $A \times B$, definujeme jako množinu všech uspořádaných dvojic (a, b), kde $a \in A$ a $b \in B$. Název *kartézský* (po Reném Descartesovi) ona nese pro zřejmou souvislost se stejnojmenným systémem souřadnic. Totiž, souřadnice v rovině jsou přesně dvojice $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, kde $\mathbb{R}$ značí množinu reálných čísel.

Rovina skýtá navíc užitečný způsob přemýšlení o kartézském součinu jako o „dimenzní“ operaci. Má-li totiž A dimenzi (v intuitivním slova smyslu) n a B dimenzi m, pak $A \times B$ má dimenzi $n + m$. Například, je-li A čtverec o délce strany 1, pak $A^2 = A \times A$ je krychle o délce strany 1.



Obrázek 1.5: Vizualizace kartézského součinu $A \times A$.

Jakož tomu bylo i v případě sjednocení a průniku, lze definovat kartézský součin více množin než dvou. Zde je však dlužen zřetel – u kartézského součinu rovněž (jako u rozdílu) záleží na pořadí násobení množin. Není možné definovat kartézský součin množin A_i pro libovolnou množinu indexů I, ale pouze pro množinu *uspořádanou* (tento pojem rovněž posléze připomeneme). Pro teď budeme předpokládat, že $I = \{1, \ldots, n\}$ a zápisem

$$\prod_{i=1}^{n} A_i$$

myslet množinu uspořádaných n-tic $(a_1, \ldots, a_n)$, kde $a_i \in A_i$ pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$. Kartézský součin nekonečného množství množin lze též definovat, ano akt to není přímočarý a naší věci zatím zbytečný.

Jsou-li všechny A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, vskutku jednou množinou, A, ujalo se – poněkud přirozeně – pro jejich kartézský součin mocninné značení. To jest,

$$A^n \coloneqq \prod_{i=1}^{n} A.$$

1.2.3 Relace

Relace, jak jejich název snad napovídá, jsou množiny, které kódují *vztahy* mezi prvky dvou různých množin. Jejich matematické pojetí je přímočaré a elegantní, ano trochu neintuitivní. Totiž, relace (či „vztah“) je zkrátka jen výpis prvků, které v něm jsou, nikoli žádný nezávislý popis jeho vlastností. Musíme-li načrtnout sociální rovnoběžku, můžeme si představit, že význam vztahu přátelství je přesně určen seznamem všech párů přátel. I když ona rovnoběžka vzbudila v mnohých čtenářích jistě značnou nedůvěru, taková definice vztahu v matematice je jednoduchá a téměř nesrovnatelně užitečná.

Definice 1.2.2 (Relace)

Ať A, B jsou množiny. *Relací* R mezi A a B míníme kteroukoli podmnožinu $R \subseteq A \times B$.

Milí čtenáři se již jistě s několika relacemi setkali. Například samotný vztah rovnosti (=) je relací. Podobně, vztahy „býti menší nebo rovno“ ($\leq$) či „býti ostře větší“ ($>$) jsou relacemi ve všech číselných oborech. Jak tyto příklady naznačují, historicky se symboly relací píšou obvykle *mezi* prvky v oné relaci jsoucí. Tohoto úzu se držíme i my a pro relaci $R \subseteq A \times B$ píšeme aRb, kdykoli $(a, b) \in R$. Jelikož je však zápis $a\not{R}b$ poněkud neuhlazený a nadevše obtížně rozpoznatelný od svého pozitivního protipólu, používáme množinové značení $(a, b) \notin R$, kdykoli prvek a není v relaci R s prvkem b.

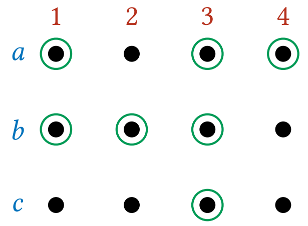
Máme-li k dispozici výčty prvků množin A a B, je pro představu dobré kreslit relace $R \subseteq A \times B$ do tzv. mříží. Ty tvoříme tak, že nakreslíme doslovnou mříž teček s $\#A$ sloupci, resp. $\#B$ řádky, pro každý prvek množiny A, resp. množiny B, a tečky na pozicích odpovídající párům $(a, b) \in A \times B$, které rovněž leží v R, například kroužkujeme. Zvolíme-li třeba

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{a, b, c\}$$

a mezi nimi relaci

$$R = \{(1, a), (1, b), (2, b), (3, a), (3, b), (3, c), (4, a)\},$$

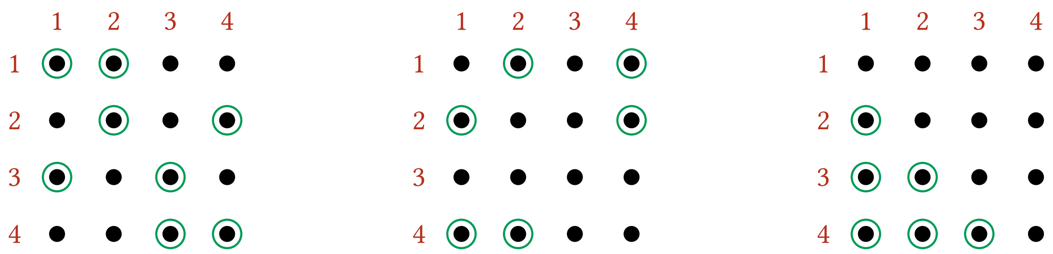
bude jejím vyobrazením mříž na obrázku 1.6.



Obrázek 1.6: Mříž relace $R \subseteq A \times B$.

Relace zvláště zásadního významu jsou ty mezi dvěma totožnými množinami. Je-li R relace mezi A a A říkáme, výrazně lidštěji, že R je relace *na* A. U relací na množině stavíme na piedestal ty s jistými speciálními vlastnostmi. Konkrétně, řekneme, že relace $R \subseteq A \times A$ je

- *reflexivní*, když je každý prvek v relaci R sám se sebou, tj. $\forall x \in A : xRx$;
- *antireflexivní*, když žádný prvek není v relaci R sám se sebou, tj. $\forall x : (x, x) \notin R$;
- *symetrická*, když s každým párem prvků obsahuje i ten obrácený, tj. $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow yRx$;
- *antisymetrická*, když z každého páru dvojic (x, y) a (y, x) je v R vždy jen jedna, tj. $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow (y, x) \notin R$ (všimněme si, že antisymetrická relace je automaticky antireflexivní);
- ***slabě*** *antisymetrická*, když z každého páru dvojic (x, y) a (y, x) je v R vždy jen jedna za předpokladu, že x a y jsou od sebe různé, tj. $\forall x, y \in A : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow (x = y)$;
- *transitivní*, když se přirozeně „přenáší“ přes prostřední prvek, tj. $\forall x, y, z \in A : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$.



(a) Reflexivní a slabě antisymetrická, nikoli transitivní.

(b) Antireflexivní, symetrická a transitivní.

(c) Antisymetrická a transitivní (též *ostré uspořádání*, zde $<$).

Obrázek 1.7: Příklady relací R na množině $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Naprosto klíčovými typy relací pro rozvoj další teorie jsou *ekvivalence*, *uspořádání* a *zobrazení*. Každému typu je věnována jedna z následujících sekcí.

1.2.4 Relace ekvivalence

Ekvivalence je relací na množině, která umožňuje dělit ji na části tvořené ve smyslu daném touto relací „stejnými“/ekvivalentními prvky. Ačkolivěk formálně nemá *relace* ekvivalence nic společného s *logickou operací* ekvivalence, důvody pro jejich jména souhlasí. Totiž, *logická* ekvivalence spojuje dva výroky, které jsou v pravdivostním smyslu stejné, a *relační* ekvivalence spojuje dva prvky množiny, které rovněž chceme (v daném kontextu) považovat za totožné.

Definice 1.2.3 (Relace ekvivalence)

Relaci R na množině A nazveme *ekvivalencí*, pokud je

- reflexivní ($\forall x \in A : xRx$),
- symetrická ($\forall x, y \in A : xRy \implies yRx$),
- transitivní ($\forall x, y, z \in A : (xRy \wedge yRz) \implies xRz$).

Spěšně si rozmyslíme smysluplnost této definice. Řekněme, že zkoumáme určité vlastnosti lidí v závislosti na jejich věku. Při takovéto studii pochopitelně uvažujeme o dvou různých lidech stejného věku jako o „totožných" subjektech. Je samozřejmé, že dva skutečně stejné lidi považujeme za totožné (to vysvětluje *reflexivitu*). Podobně, když je člověk *Jáchym* stejně starý jako člověk *Eric*, pak je i *Eric* stejně starý jako *Jáchym* (to vysvětluje *symetrii*). Konečně, když je člověk *Lenin* stejně starý jako člověk *Stalin* a *Stalin* je stejně starý jako *Trotsky*, pak je přirozeně *Lenin* stejně starý jako *Trotsky* (to vysvětluje *transitivitu*).

Díky relaci „býti stejného věku" můžeme nyní rozdělit množinu všech lidí na Zemi na 122 (nejstarší zaznamenaný lidský věk) chlívků; v každém chlívku všichni lidé stejně staří. Těmto „chlívkům" se v matematice přezdívá *třídy ekvivalence*. Třídy ekvivalence R na množině A jsou podmnožiny A, kde v každé podmnožině jsou přesně jen ty prvky, které jsou spolu v relaci R.

Definice 1.2.4 (Třída ekvivalence)

Ať A je množina a R ekvivalence na A. Vezměme $x \in A$. *Třídou ekvivalence* prvku x podle R, zapsanou $[x]_R$, myslíme množinu

$$[x]_R \coloneqq \{y \in A \mid xRy\}$$

všech prvků $y \in A$ v relaci R s x. O podmnožině $X \subseteq A$ řekneme, že je to *třída ekvivalence* A podle R, když existuje prvek $x \in A$ takový, že $X = [x]_R$.

Jak lze snadno vyčíst z příkladu studie vlastností lidí stejného věku, každý člověk je v právě jednom chlívku/třídě ekvivalence (jednomu člověku nemůže být různý počet let, metabolický věk ignorujeme) a navíc každý člověk je nutně v některém. Vladouce jazykem matematiky řčeme, že třídy ekvivalence dvou prvků jsou buď stejné (oba lidé v témž chlívku), nebo disjunktní (každý člověk v různém chlívku). Navíc, sjednocením všech tříd ekvivalence dostaneme původní množinu A, stejně jako spojením všech chlívků dostaneme jeden velký chlév s batolaty i kmety na jedné hromadě. Tento fakt je platný pro každou ekvivalenci a je oním klíčovým důvodem užitečnosti tohoto konceptu.

Tvrzení 1.2.5 (O třídách ekvivalence)

Ať R je ekvivalence na A a X, Y jsou třídy ekvivalence A podle R. Pak buď $X = Y$, nebo $X \cap Y = \emptyset$. Navíc, je-li

$$\mathcal{X} \coloneqq \{X \subseteq A \mid X \text{ třída ekvivalence } A \text{ podle } R\}$$

množina všech (podle předchozí věty navzájem disjunktních) tříd ekvivalence množiny A podle R, pak

$$A = \bigcup \mathcal{X}.$$

Pro nějaký číselný příklad relace ekvivalence – jenž zároveň ukazuje, že tříd ekvivalence nemusí být konečně mnoho – uvažme třeba relaci „býti mocninou“ na přirozených číslech. Řekneme, že číslo $n \in \mathbb{N}$ je *mocninou* $m \in N$, když existuje kladné **racionální** (abychom mohli uvažovat i odmocniny) číslo q takové, že $n = m^q$. Taková relace je jistě ekvivalence, neboť

- $\forall n \in \mathbb{N} : n = n^1$, tedy každé číslo je svou vlastní mocninou (reflexivita);
- když $n = m^q$, pak $m = n^{\frac{1}{q}}$, čili předpoklad, že n je mocninou m, implikuje, že m je mocninou n (symetrie);
- když $n = m^{q_1}$ a $m = l^{q_2}$, pak $n = l^{q_1 q_2}$, čili pokud je n mocninou m a m mocninou l, pak n je mocninou l (transitivita).

Obrázek 1.8 zobrazuje prvních několik tříd ekvivalence „býti mocninou“ na množině přirozených čísel.

1	2 4 8 ⋮	3 9 27 ⋮	5 25 125 ⋮	…

Obrázek 1.8: Třídy ekvivalence „býti mocninou“ na $\mathbb{N}$.

1.2.5 Relace uspořádání

V úvodu do této sekce jsme zdůraznili fakt, že množiny **nejsou** v žádném smyslu uspořádané, tedy nelze o jejich prvcích tvrdit, který jde první a poslední. Ovšem, čtenáři jsou si jistě vědomi, že kupříkladu přirozená čísla uspořádána *jsou* – číslo 1 je menší než číslo 5, 8 větší než 3. Tento výrok je však mírně nepřesný. Samotná množina přirozených čísel uspořádaná *není*, lze na ní však definovat jistý všudypřítomný typ relace (v tomto případě $\leq$) zvaný *uspořádání*. Definujeme si, které vlastnosti musí relace uspořádání na množině mít.

Definice 1.2.6 (Relace uspořádání)

Ať A je množina a $R \subseteq A \times A$ je relace na A. Řekneme, že R je *uspořádání* (někdy též nesoucí přívlastek *neostré*), když je

- reflexivní (tj. $\forall x \in A : xRx$),
- slabě antisymetrické (tj. $\forall x, y \in A : (xRy \wedge yRx) \Rightarrow (x = y)$),
- transitivní (tj. $\forall x, y, z \in A : (xRy \wedge yRz) \Rightarrow xRz$).

Je-li naopak R (silně) antisymetrické (tj. $\forall x, y \in A : xRy \Rightarrow (y, x) \notin R$), a tudíž antireflexivní (tj. $\forall x \in A : (x, x) \notin R$), řekneme, že je R ***ostré** uspořádání.*

Je-li A množina a R (ostré) uspořádání na A, říkáme, že dvojice (A, R) je *(ostře) uspořádaná množina* (podle R).

Zcela nejobyčejnější příklady (neostrých) uspořádání jsou relace $\leq$ a $\geq$ v číselných oborech. Vskutku, každý prvek je menší/větší nebo roven sám sobě, z každé dvojice prvek je buď jeden menší/větší než ten druhý, nebo jsou stejné, a když je prvek x menší/větší než prvek y a ten zas menší/větší než prvek z, pak je x menší/větší než z. Speciálně, $(\mathbb{N}, \leq)$ a $(\mathbb{N}, \geq)$ jsou uspořádané množiny.

Příkladem *ostrých* uspořádání jsou relace $<$ a $>$, které se liší tím, že žádný prvek není ostře menší/větší než on sám.

Varování 1.2.7

Součástí definice uspořádání **není** podmínka, že **každé** dva prvky lze spolu porovnat. Pročež, v uspořádaných množinách obecně existují dvojice prvků, kde první není ani menší ani větší než ten druhý.

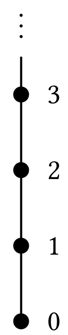
Uspořádáním (ať už ostrým či neostrým) naopak *splňujícím* onu podmínku říkáme *lineární.*

Za definicí uspořádání samozřejmě stojí myšlenka, že taková relace určuje *pořadí* prvků na množině. Z toho důvodu se obvykle uspořádání nekreslí jako obecné relace do mříží, ale do tzv. Hasseho (po číselném teoretiku Helmutu Hassem) diagramů, které získáme tím způsobem, že prvky nakreslíme jako puntíky a každé dva puntíky prvků, které jsou v daném uspořádání porovnatelné, spojíme úsečkou (nejsou-li již spojeny přes nějaký další puntík) a větší z nich nakreslíme nad menší. Chováme na vědomí, že kreslit obrázky je více uspokojující, než je popisovat, a tedy si závěrem této krátké sekce nakreslíme (Hasseho diagramy) tři takřkouce „učebnicové“ příklady uspořádání.

Příklad 1.2.8

(1) Uvažme jednoduchý příklad uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq)$. Už jsme si rozmysleli, že $\leq$ je na $\mathbb{N}$ skutečně uspořádáním. Je triviální nahlédnout, že je rovněž lineární, neboť z každých dvou přirozených čísel lze vybrat to menší.

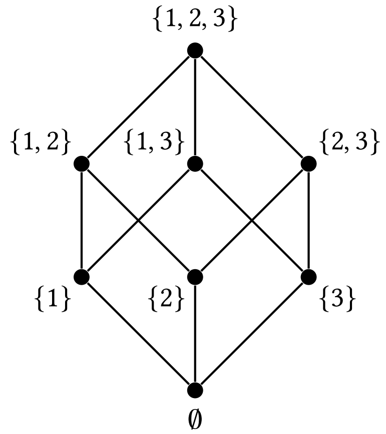
Lineární uspořádání mají velmi nezajímavý Hasseho diagram – řetěz prvků, který může končit nahoře nebo dole. V tomto případě je nejmenším prvkem 0 a nejvyšší neexistuje, tedy řetěz pokračuje nekonečně dlouho směrem nahoru.



Obrázek 1.9: Hasseho diagram uspořádané množiny $(\mathbb{N}, \leq)$.

(2) O něco komplikovanější příklad je uspořádání inkluzí $\subseteq$. Pro libovolnou množinu A můžeme uvážit uspořádanou množinu $(2^A, \subseteq)$. Je téměř samozřejmé, že $\subseteq$ je skutečně (neostré) uspořádání, které však **není** lineární. Vizme příklad.

Ať $A \coloneqq \{1, 2, 3\}$. Pak jsou její podmnožiny $\{1, 2\}$ a $\{2, 3\}$ neporovnatelné pomocí $\subseteq$ – ani jedna není podmnožinou té druhé. Zajímavým geometrickým faktem je, že Hasseho diagramem $(2^A, \subseteq)$ pro n-prvkovou množinu A je síť vrcholů krychle dimenze n.



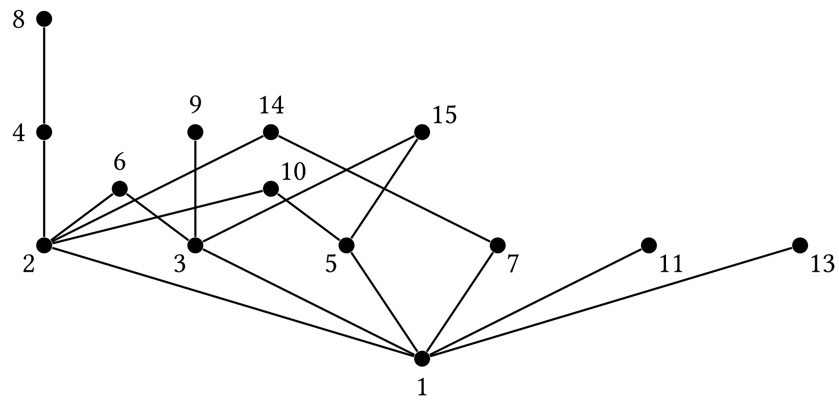
Obrázek 1.10: Hasseho diagram uspořádané množiny $(2^A, \subseteq)$ pro $A = \{1, 2, 3\}$.

(3) Poněkud méně pravidelný příklad než oba předchozí je uspořádání na přirozených číslech *dělitelností.* Dělitelnost jednoho přirozeného čísla jiným se definuje samozřejmě. Řekneme, že n *dělí* m, píšeme $n \mid m$, když existuje přirozené číslo k splňující $m = kn$. Kupříkladu $3 \mid 6$, protože existuje přirozené číslo – konkrétně 2 – takové, že $6 = 2 \cdot 3$.

Nyní, povšimněme sobě, že $\mid$ je uspořádání na $\mathbb{N}$. Vskutku, zřejmě každé číslo dělí samo sebe. Když n dělí m a m dělí n, pak jde nutně o téže číslo. Konečně, když n dělí m a m dělí l, pak v podstatě triviálně n dělí l. Nejde však jistě o uspořádání lineární, neboť například číslo 3 nedělí číslo 10 ani obráceně.

Uspořádání dělitelností na $\mathbb{N}$ má Hasseho diagram, který je nekonečný jak do šířky, tak do výšky. Totiž, žádné prvočíslo není dělitelné žádným číslem, které šlo před ním (pouze 1), a tedy je musíme umístit do druhé řady (nad 1) vedle ostatních prvočísel. Do výšky stoupá nekonečně pro to, že když spolu vynásobíme dvě čísla k-té úrovně, dostaneme číslo úrovně $(k + 1)$-ní.

Pro jednoduchost se spokojíme s Hasseho diagramem množiny přirozených čísel od 1 do 15 uspořádané relací dělitelnosti.



Obrázek 1.11: Hasseho diagram uspořádané množiny $(\{1, 2, \ldots, 15\}, \mid)$.

1.2.6 Relace zobrazení

Přišel na řadu poslední klíčový typ relace, a pro algebraika snad nejdůležitější myšlenka matematiky vůbec. Na rozdíl od relací uspořádání a ekvivalence, není zobrazení nutně relace na téže množině. Jak název napovídá, zobrazení má něco někam … „zobrazovat“. Matematik zřídkakdy přemýšlí o zobrazení jako o relaci, nýbrž o popisu způsobu, kterak se prvky jedné množiny „přetvářejí v“ či „zobrazují na“ prvky množiny druhé.

Zobrazení je dáno vlastně jednou přímočarou podmínkou – každý prvek první množiny se může zobrazit na maximálně jeden prvek množiny druhé. Lidově řečeno, není prvku povoleno, aby se rozdvojil, roztřetil, rozčtvrtil, rozpětil, rozšestil, rozsedmil, rozosmil, rozdevítil a indukcí dále.

Ať tedy R je relace mezi A a B. Elegantním logickým zápisem podmínky, aby byl každý prvek $a \in A$ v relaci R s *maximálně jedním* prvkem $b \in B$, je výrok, že jsou-li dva prvky z A v relaci s týmž prvkem z B, pak se vskutku jedná o jediný prvek. Formální definice následuje.

Definice 1.2.9 (Zobrazení)

Ať $R \subseteq A \times B$ je relace mezi A a B. Nazveme R *zobrazením* (z A do B), pokud splňuje

$$\forall a_1, a_2 \in A \; \forall b \in B : a_1 R b \wedge a_2 R b \implies a_1 = a_2.$$

Zobrazení mezi množinami obvykle zapisujeme malými písmeny latinské abecedy počínaje písmenem f (od **f**unkce, jak se některým speciálním typům zobrazení často říká). Fakt, že f je zobrazení z A do B, symbolizujeme zápisem $f : A \to B$ nebo též $A \xrightarrow{f} B$.

Když $(a, b) \in f$, nepíšeme afb jako u obecné relace, ale spíše $f(a) = b$ či $f : a \mapsto b$.

Stejně jako uspořádání, i zobrazení se kreslí svým osobitým způsobem, který v sobě nese jejich mimořádnou povahu. Protože, opakujeme, bývají zobrazení vnímána vlastně jako „šipky“ mezi množinami nesoucí prvky z první do té druhé, i se tak kreslí. Konkrétně, zobrazení $f : A \to B$ nakreslíme například tak, že si prvky A postavíme nalevo, prvky B napravo, a pro každý vztah $f(a) = b$ nakreslíme šipku z a do b. Z definici zobrazení povede z každého $a \in A$ nejvýše jedna šipka. Vizte obrázek 1.12.

(a) Zobrazení $f = \{(1, b), (2, a), (3, b), (4, b)\}$.

(b) Zobrazení $g = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (4, 4)\}$. Zobrazením „prohazujícím“ prvky na množině se říká *permutace*.

Obrázek 1.12: Příklady zobrazení.

K zobrazením se tokem historie navázaly přehoušle názvosloví. Zopakujeme je zde, bo pěstujeme zámysl je v dalším textu bez výstrah dštíti.

Ať f do konce sekce značí zobrazení $A \longrightarrow B$. Množinu A nazýváme *doménou* zobrazení f, značíme $\operatorname{dom} f$, a množinu B jeho *kodoménou*, značíme $\operatorname{codom} f$. Množinu všech prvků z B, na které se zobrazuje nějaký prvek z A, nazýváme *obrazem* f, značíme $\operatorname{im} f$. Formálně

$$\operatorname{im} f \coloneqq \{b \in B \mid \exists a \in A : f(a) = b\}.$$

Triviálně platí $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{codom} f$, ale tyto množiny nemusejí být stejné. Například, zobrazení f z obrázku 1.12a má obraz $\{a, b\}$, ale kodoménu celou množinu $\{a, b, c\}$.

Pro každý prvek $b \in \operatorname{codom} f$ definujeme jeho *vzor* (při zobrazení f), značíme $f^{-1}(b)$, jako množinu **všech** prvků z A, které se na něj zobrazují. Formálně, pro $b \in \operatorname{codom} f$

$$f^{-1}(b) \coloneqq \{a \in A \mid f(a) = b\}.$$

Triviálně $f^{-1}(b) \subseteq \operatorname{dom} f$ pro každé $b \in \operatorname{codom} f$, ale tyto množiny jistě mohou být různé. Pro zobrazení f z obrázku 1.12a platí $f^{-1}(b) = \{1, 2, 4\}$ a $f^{-1}(c) = \emptyset$ a pro zobrazení g z obrázku 1.12b platí $g^{-1}(2) = \{1\}$. Přestože je vzor prvku při zobrazení oficiálně **množina**, budeme v případech jako byl tento poslední, kdy je vzorem množina jednoprvková, psát většinou $g^{-1}(2) = 1$ a tvrdit, že prvek 1 je *vzorem* prvku 2 při zobrazení g.

Sekci završíme zopakováním speciálních typů zobrazení. Říkáme, že zobrazení $f : A \longrightarrow B$ je

- *prosté* (či *injektivní*), když na každý prvek B zobrazuje nejvýše jeden prvek A. Formálně lze psát, že
$$\forall a_1, a_2 \in A : f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2.$$
Ekvivalentně můžeme tvrdit, že zobrazení je prosté, když $f^{-1}(b)$ má nejvýš jeden prvek pro každé $b \in B$ a, **je-li** A **konečná**, pak je prostota f vyjádřena též v podmínce $\# \operatorname{im} f = \#A$. Nabádáme čtenáře, aby si ekvivalenci těchto výroků rozmysleli. Symbolicky budeme občas zapisovat prostá zobrazení jako $f : A \hookrightarrow B$.

- *na* (či *surjektivní*), když na každý prvek B zobrazuje nějaký prvek A. Formálně lze psát, že
$$\forall b \in B \ \exists a \in A : f(a) = b.$$
Ekvivalentně je f na, když $f^{-1}(b)$ není prázdná pro žádný prvek $b \in B$ anebo, **ať už je** B **konečná či ne**, když $\operatorname{im} f = B$. Opět nabádáme čtenáře k ověření této ekvivalence. Symbolicky budeme občas zapisovat surjektivní zobrazení jako $f : A \twoheadrightarrow B$.

- *vzájemně jednoznačné* (též *bijektivní*), když je prosté i na. Množiny, mezi kterými existuje bijektivní zobrazení, lze v mnoha situacích považovat za stejné, neboť mají vlastně tytéž prvky, akorát pod jinými „jmény". Z ekvivalentních definic prostých a surjektivních zobrazení plyne, že zobrazení je bijektivní, právě když $f^{-1}(b)$ je jednoprvková pro každý prvek $b \in B$ a též, **jsou-li** A **i** B **konečné**, když $\# \operatorname{im} f = \#A = \#B$. Symbolicky budeme občas zapisovat bijektivní zobrazení jako $f : A \leftrightarrow B$.

Pojmu bijekce se používá při formální definici velikosti množiny. Pro libovolnou množinu X je její *velikost* definována jako takové přirozené číslo $n \in \mathbb{N}$, že existuje bijekce $\{1, \ldots, n\} \leftrightarrow X$. Píšeme $\#X = n$. Neexistuje-li takové přirozené číslo, říkáme, že X je nekonečná, a píšeme $\#X = \infty$.

Část I

Reálná čísla a limity

Kapitola 2

Číselné obory

Věříme, že čtenáři se setkali s pojmy *přirozených čísel*, *celých čísel* či *reálných čísel*. Máme však svých snadů, že bylo ono setkání více než intuitivní – „Přirozená čísla počítají, kolik je věcí; celá čísla jsou vlastně přirozená čísla, akorát některá mají před sebou takovou divnou čárku; reálná čísla jsou … já vlastně nevím, něco jako $\sqrt{2}$?"

Jednou z našich snah v kapitole prvé bylo přesvědčit čtenáře, že většina moderní matematiky stojí na teorii množin. Čísla musejí být proto rovněž *množiny*. Ale jak vlastně? Jak bych – pro vše, což jest mi svaté – mohl množinami počítat věci? A co je jako „záporná" množina? Všechny tyto otázky dočkají sebe svých odvět, jakož i vysvětlení onen záhadný pojem „obor".

Započneme velmi teoreticky, algebraickými pojmy *grupy, pologrupy, monoidu, okruhu* a dalšími. Slibovaným významem takého výkladu je nabyté porozumění přirozené struktuře číselných oborů a pak, zcela bezděčné, protlačení abstraktní algebry na místa, kde by bývala snad byla ani nemusela být.

2.1 Základní algebraické struktury

První algebraické struktury počali lidé objevovat koncem 19. století, kdy jsme si všimli, že se mnoho skupin jevů – geometrických, fyzikálních, … – „chová" podobně jako čísla. Dnes bychom řekli, že „vykazují silnou symetrii". Například, podobně jako můžeme přirozená čísla násobit, lze zobrazení *skládat* či křivky v rovině na sebe *napojovat*. Přirozená čísla „obracíme", dávajíce vzniknout číslům celým. Po křivce umíme kráčet opačným směrem.

Taková pozorování vedla na pojem *grupy* – ve své podstatě množině všech symetrií nějakého objektu. *Symetrie* v tomto smyslu značí transformace/proměny tohoto objektu, které jej nemění. Dnes má samozřejmě grupa svou elegantní formální definici, z níž nelze vůbec poznat, o jakou strukturu vlastně jde. Uvedeme si ji.

Definice 2.1.1 (Grupa)

Ať G je libovolná neprázdná množina. Platí-li, že

- existuje binární operace $\cdot : G \times G \to G$, která je **asociativní** (tj. $(g \cdot h) \cdot k = g \cdot (h \cdot k)$),
- existuje prvek $1 \in G$ splňující pro každé $g \in G$ rovnost $g \cdot 1 = 1 \cdot g = g$, zvaný *neutrální*, a
- pro každý prvek $g \in G$ existuje prvek $g^{-1} \in G$ splňující $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = 1$, zvaný *inverz*,

pak nazveme čtveřici $\mathbf{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$ *grupou*.

Tato definice si zaslouží několika poznámek, varování a příkladů. Součástí definice grupy **není** komutativita její binární operace. Obecně, v grupě $\mathbf{G}$ není prvek $g \cdot h$ tentýž jako $h \cdot g$. Mezi algebraiky platí nepsaná dohoda, že grupy, které jsou *komutativní* (též *abelovské*) – tj. ty, kde $g \cdot h = h \cdot g$ opravdu pro všechny dvojice prvků $g, h \in G$ – se zapisují jako (tzv. *aditivní*) $\mathbf{G} = (G, +, -, 0)$. Naopak, grupy, které komutativní nutně nejsou, se obvykle píší stylem z definice 2.1.1.

Zadruhé, není vůbec zřejmé, proč by taková struktura měla jakýmkoli způsobem zrcadlit koncept *symetrie*. Ono „zrcadlo" zde sestrojíme.

Příklad 2.1.2 (Dihedrální grupa)

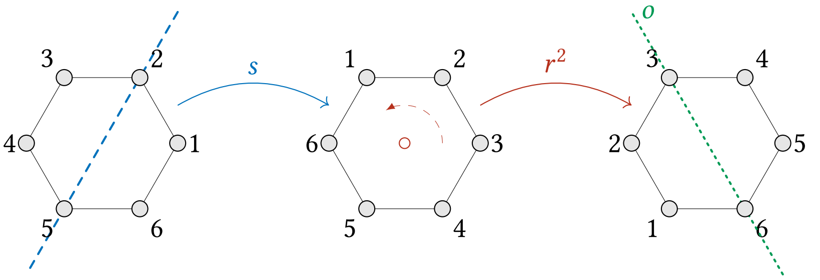
Ať P je pravidelný šestiúhelník v $\mathbb{R}^2$. Uvažme zobrazení $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které rotuje body v $\mathbb{R}^2$ o $60°$ (v kladném směru – proti směru hodinových ručiček) podle středu jeho uhlopříček, a zobrazení $s : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, které reflektuje body v $\mathbb{R}^2$ podle kterékoli (ale fixní) jeho uhlopříčky.

Není těžké nahlédnout, že $r(P) = P$ a $s(P) = P$, čili tato zobrazení zachovávají P. Tvrdíme, že každé jejich složení je rovněž zobrazení, které zachovává P. Jinak řečeno, množina všech možných složení zobrazení r se zobrazením s tvoří *grupu*, kde binární operací je *složení* zobrazení, inverzem je *inverzní zobrazení* (pozřeme, že r i s jsou **bijekce**) a neutrálním prvkem je $\mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}$ – *identické zobrazení* na $\mathbb{R}^2$.

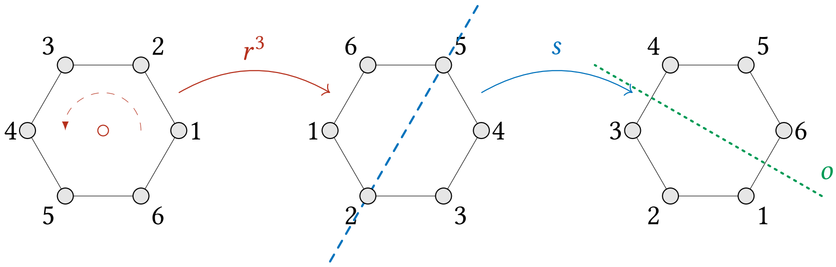
Po chvíli přemýšlení zjistíme, že rotace o $60, 120, 180, 240, 300$ a 360 stupňů zachovávají P. Všechny můžeme dostat jako složení r se sebou samým vícekrát. Například $r \circ r \circ r = r^3$ je rotace o $180°$. Přirozeně, rotace o $360°$ je identické zobrazení, což lze vyjádřit rovností $r^6 = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}$.

S reflexemi je to mírně složitější. Jelikož s je reflexe, složení $s \circ s$ je identické zobrazení. Reflexi podle ostatních dvou uhlopříček dostaneme jeho složením s r. Například reflexi podle uhlopříčky, která svírá s s úhel $60°$ (proti směru hodinových ručiček) je rovna složení $r^2 \circ s$. Konečně, šestiúhelník P rovněž zachovávají reflexe podle os stran. Reflexi podle osy stran, která svírá s s úhel $90°$ dostanu (třeba) složením $s \circ r^3$.

Ponecháváme čtenáře, aby si rozmysleli, že různých zobrazení, která mohu dostat složením r a s je celkem 12, všechna jsou bijektivní a zachovávají P. Označíme-li jejich množinu D_{12} (jako **d**ihedrální grupa o 12 prvcích), pak je $(D_{12}, \circ, ^{-1}, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2})$ **nekomutativní** grupa.



(a) Složení $r^2 \circ s$ = reflexe podle o.



(b) Složení $s \circ r^3$ = reflexe podle o.

Obrázek 2.1: Příklady složení reflexí a rotací.

Příklad 2.1.3 (Permutační grupa)

Ať X je libovolná konečná množina velikosti $n \in \mathbb{N}$. Pak množina všech permutací na X (tj. bijekcí $X \leftrightarrow X$) tvoří spolu s operací skládání a invertování funkcí **nekomutativní** grupu. Skutečně, skládání funkcí je zřejmě *asociativní*, ke každé bijekci existuje *inverz* a *neutrálním* prvkem je $\mathbb{1}_X$. Z diskrétní matematiky víme, že permutací na n-prvkové množině je $n!$; označíme-li jejich množinu jako S_X (ze zaběhlého a zcestného názvu **s**ymetrická grupa), pak je $(S_X, \circ, ^{-1}, \mathbb{1}_X)$ nekomutativní grupa o $n!$ prvcích. Můžeme se na ni dívat jako na množinu všech transformací, které zachovávají množinu X.

Zajímavou otázkou je, kolik potřebujeme nejméně permutací, abychom jejich skládáním vyrobili všechny ostatní. V případě dihedrální grupy pravidelného šestiúhelníku (příklad 2.1.2) to byla zobrazení dvě. Ukazuje se, a není příliš obtížné to dokázat, že nám stačí všechny transpozice $(x\ y)$, kde $x \in X$ je nějaký fixní prvek a y probíhá všechny ostatní prvky X. Pokud by $X = \{1, \dots, n\}$, pak by to byly třeba právě transpozice $(1\ 2), (1\ 3), \dots, (1\ n)$. Tento fakt souvisí přímo s pozorováním z diskrétní matematiky, že každou permutaci lze rozložit na transpozice.

Příklad 2.1.4 (Odmocniny jednotky)

Každé komplexní číslo má přesně n n-tých odmocnin. Zapíšeme-li si komplexní číslo $z \in \mathbb{C}$ v tzv. „goniometrickém" tvaru, pak je můžeme snadno najít. Totiž, je-li $z = r \cdot (\cos\theta + i \sin\theta)$, kde $r \in \mathbb{R}^+$ je jeho vzdálenost od počátku, θ úhel, který svírá s reálnou (typicky vodorovnou) osou, a i imaginární jednotka (z definice $i^2 = -1$), pak je

$$\left\{ \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)\right) \mid k \in \{0, \dots, n-1\} \right\}$$

množina všech jeho n-tých odmocnin.

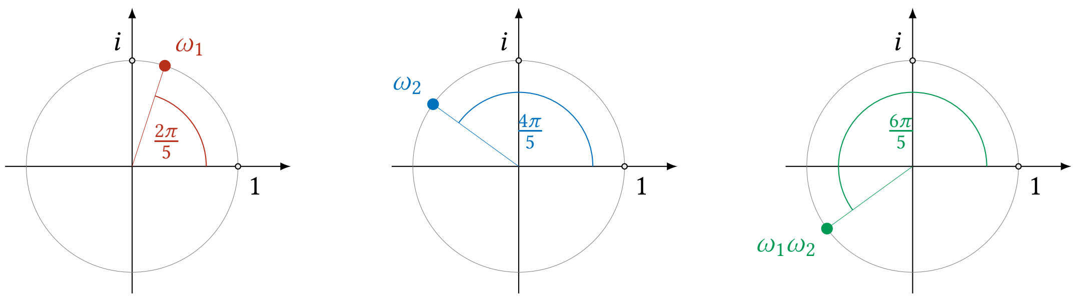
Tato množina obecně **není** grupa, neboť tím, že vynásobím dvě odmocniny komplexního čísla, nedostanu jeho jinou odmocninu – s jednou výjimkou, a tou je číslo 1. Totiž, $1 = \cos(2\pi) + i \cdot \sin(2\pi)$, a tedy všechny jeho třeba čtvrté odmocniny jsou

$$\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right), \cos(\pi) + i\sin(\pi), \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right), \cos(2\pi) + i\sin(2\pi)\right\}$$
$$= \{i, -1, -i, 1\}.$$

Důležité pozorování k pochopení tohoto příkladu je, že když spolu násobím dvě komplexní čísla, jejich vzdálenosti od počátku (r) se násobí a jejich úhly svírané s reálnou osou (θ), se sčítají. Z toho plyne, že vzdálenost každé odmocniny z 1 od počátku je vždy 1 a že vynásobením dvou odmocnin z 1 dostanu další odmocninu z 1. Vskutku, jsou-li $\cos(2k\pi/n) + i\sin(2k\pi/n)$ a $\cos(2l\pi/n) + i\sin(2l\pi/n)$ dvě odmocniny z jedné, pak je jejich součin roven

$$\left(\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\right)\left(\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right)\right) = \cos\left(\frac{2(k+l)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2(k+l)\pi}{n}\right),$$

což je opět odmocnina z 1 (za předpokladu, že ztotožňujeme „přetočené úhly“ v tom smyslu, že třeba $7\pi/3 = \pi/3$). Označíme-li $\Omega(n)$ množinu všech n-tých odmocnin z 1, pak je čtveřice $(\Omega(n), \cdot, ^{-1}, 1)$ **komutativní** grupa, kde $\cdot$ značí běžné násobení komplexních čísel.



Obrázek 2.2: Komplexní čísla $\omega_1, \omega_2 \in \Omega(5)$ a jejich součin $\omega_1\omega_2$.

Doufáme, že jsme uspěli ve snaze vnímavé čtenáře přesvědčit, že grupy jsou přirozené struktury v různém smyslu reprezentující symetrie objektů spolu s jejich vzájemnými souvislostmi.

Avšak, grupy nezachycují *všechny* transformace, pouze ty, které lze zvrátit – tento požadavek je zachycen v podmínce existence inverzu ke každému prvku grupy. Není přehnané domnívat se, že tímto přístupem přicházíme o řád informací o studovaných jevech. Vskutku, matematici 19. století souhlasí a vymýšlejí strukturu *monoidu*, v podstatě jen grupy, u které nepožadujeme, aby každý prvek bylo lze invertovat. Monoidy jsou tudíž algebraické struktury objímající **všechny** transformace – jak symetrie, tak deformace.

Definice 2.1.5 (Monoid)

Ať M je libovolná neprázdná množina. Platí-li, že

- existuje binární operace $\cdot : M \times M \to M$, která je **asociativní** a
- existuje prvek $1 \in M$ takový, že $1 \cdot m = m \cdot 1 = m$ pro každé $m \in M$,

pak nazýváme trojici $(M, \cdot, 1)$ *monoidem.*

Přirozeně, pokud má každý prvek monoidu inverz, je tento monoid grupou. Některé příklady grup se dají zobecnit tak, aby se staly příklady monoidů, které však nejsou grupami. Vezměme příklad 2.1.3. Uvážíme-li místo pouhých permutací na X (tj. bijekcí $X \leftrightarrow X$) **všechna** zobrazení $X \to X$, pak dostaneme monoid. Vskutku, jak jsme již zmiňovali, skládání zobrazení je asociativní a máme k dispozici identické zobrazení $\mathbb{1}_X$, čili je trojice

$$(\{f \mid f \text{ je zobrazení } X \to X\}, \circ, \mathbb{1}_X)$$

monoidem. Tento příklad též ukazuje, že monoidy jsou v jistém smyslu „větší" než grupy. Je-li X konečná množina velikosti n, pak je tento smysl dokonce absolutní. Všech permutací na X je totiž $n!$, zatímco všechna zobrazení $X \to X$ čítají n^n.

Příklady 2.1.2 a 2.1.4 žádných přirozených zobecnění nenabízejí. Přidáme-li k dihedrální grupě rotace a reflexe, které nemusejí daný mnohoúhelník zachovat, pak už můžeme rovnou uvážit úplně všechny rovinné rotace a reflexe. Je sice pravdou, že množina všech rotací a reflexí dvoudimenzionálního prostoru tvoří monoid, ale již nikterak nesouvisí s mnohoúhelníky. Podobně, když se nebudeme soustředit na komplexní odmocniny z 1, ale na komplexní odmocniny libovolného komplexního čísla, nedostaneme tak ani monoid – jak jsme uvedli, součin dvou n-tých odmocnin komplexního čísla obecně není n-tá odmocnina téhož čísla.

Předpokládáme, že čtenáři stále nevidí spojitost mezi grupy a monoidy a číselnými obory. Jedním (pravda zásadním) rozdílem je existence operací součtu a součinu v každém číselném oboru. Grupy a monoidy z definice dovolují jen jednu operaci. Pravdať, číselné obory jsou jakýmsi přirozeným „sloučením" monoidu a grupy, které sluje *okruh.*

Okruhy jsou již vcelku komplikované struktury, jež v sobě mísí symetrie s destruktivními transformacemi a vlastně je „donucují" ke spolupráci. Z jiného, více formálního, pohledu jsou prvky okruhů součty násobků všech transformací objektu.

Definice 2.1.6 (Okruh)

Ať R (od angl. výrazu pro okruh – **r**ing) je neprázdná množina, $+, \cdot$ jsou operace na R a $0, 1 \in R$. Je-li

- $(R, +, -, 0)$ **komutativní** grupa,
- $(R, \cdot, 1)$ (ne nutně komutativní) monoid

a platí-li

$$\begin{aligned}(r+s)\cdot t &= r\cdot t + s\cdot t,\\ t\cdot(r+s) &= t\cdot r + t\cdot s\end{aligned} \tag{2.1}$$

pro všechna $r, s, t \in R$, nazveme R okruhem.

Poznámka 2.1.7

- Symbol $-$ v popisu grupy $(R, +, -, 0)$ značí *inverz*, **nikoli binární operaci**! Odčítání nemůže být nikdy grupovou (ani monoidovou) operací, bo **není asociativní**. Zápis $r - s$

je pouze neformálním zkrácením zápisu $r + (-s)$, podobně jako se třeba $r \cdot s^{-1}$ zapisuje jako r/s.

- Definice okruhu vyžaduje, aby byla operace + komutativní, ale $\cdot$ nikoli. Mluvíme-li tedy o **komutativním** okruhu, znamená to, že i $\cdot$ je komutativní, a nemůže dojít ke zmatení, kterouže operaci máme na mysli.

- V literatuře se občas při definici okruhu nevyžaduje existence jednotky, tedy neutrálního prvku k násobení. Dvojice $(R, \cdot)$ je pak pouze tzv. *magma*, množina s binární operací bez žádných dalších předpokladů. Našemu pojmu okruhu se v takovém případě říká *okruh s jednotkou*. Možná překvapivě je teorie okruhů s jednotkou výrazně odlišná od teorie okruhů bez jednotky.

- Rovnice (2.1) jsou onou „vynucenou" domluvou mezi symetrickou operací + a libovolnou transformací $\cdot$, říkáme jí *distributivita*. Je třeba specifikovat distributivitu jak zleva, tak zprava, protože $\cdot$ nemusí být komutativní.

Jednoduchých příkladů okruhů není mnoho a všechny vyžadují snad nepřirozené konstrukce. Ty přirozené vyplynou samovolně, až se jmeme tvořiti číselných oborů, v následující kapitole. S cílem představit jeden velmi naučný příklad/varování však tyto konstrukce dočasně přeskočíme a budeme předpokládat, že množina přirozených čísel $\mathbb{N}$ je čtenářům již plně známa.

Varování 2.1.8

V okruzích (a obecně v monoidech) může nastat situace, že $r \cdot s = 0$, přestože r ani s není nulový prvek. Uvažme například množinu přirozených čísel $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ se sčítáním a násobením „modulo 6". Konkrétně, definujme operace $\oplus$ a $\odot$ předpisy

$$\begin{aligned} m \oplus n &\coloneqq (m + n) \bmod 6, \\ m \odot n &\coloneqq (m \cdot n) \bmod 6, \end{aligned}$$

a položme $\ominus x \coloneqq (6 - x) \bmod 6$, kde $x \bmod y$ značí zbytek x po dělení y. Je poměrně snadné si uvědomit, že

$$(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \oplus, \ominus, 0, \odot, 1)$$

je (komutativní) okruh. V tomto okruhu platí

$$2 \odot 3 = (2 \cdot 3) \bmod 6 = 0,$$

ačkoli 2 ani 3 rovny 0 zřejmě nejsou.

Okruhy $(R, +, -, 0, \cdot, 1)$ s takovou vlastností jsou z číselného hlediska problematické, neboť na nich nelze žádným rozumným (vlastně ani nerozumným) způsobem definovat *dělení*, tj. inverz k $\cdot$.

Představme si totiž, že by na okruhu $(\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, \oplus, \ominus, 0, \odot, 1)$ existoval k prvku 2 inverzní prvek 2^{-1} vzhledem k $\odot$. Pak bychom měli následující rovnosti:

$$\begin{aligned} (2^{-1} \odot 2) \odot 3 &= 1 \odot 3 = 3, \\ 2^{-1} \odot (2 \odot 3) &= 2^{-1} \odot 0 = 0, \end{aligned}$$

čili by operace $\odot$ **nemohla být asociativní**! To by byl už kompletní binec.

Nepřítomnost takového problému v číselných oborech napovídá, že struktura okruhu stále ještě není dostatečně striktní, abychom jejím prvkům mohli přezdít „čísla“. Ukazuje se, že ale stačí zakázat součinu dvou nenulových prvků býti nulou, abychom se k číslům dostali. Taková struktura slove *obor integrity*; jmě, jež vrhá světlo na ustálené spojení *číselné obory*.

Definice 2.1.9 (Obor integrity)

Okruh $(R, +, -, 0, \cdot, 1)$ nazveme *oborem integrity*, pokud pro každé dva $r, s \in R$ platí

$$r \cdot s = 0 \Rightarrow r = 0 \lor s = 0.$$

Čtenáři dobře učiní, vejmou-li, že tato vlastnost číselných oborů je hojně využívána řekněme při řešení polynomiálních rovnic. Dokáži-li totiž rozložit polynom na součin jeho lineárních činitelů, pak vím, že řešení rovnice

$$(x - a)(x - b)(x - c) = 0$$

jsou právě čísla a, b a c. **To však není pravda v obecném okruhu!** Pouze struktura oboru integrity umožňuje činit takový závěr.

V oborech integrity lze „sčítat“, „odčítat“ a „násobit“. Nelze v nich však „dělit“. Součástí definice oboru integrity není existence inverzu k operaci násobení. Struktury, které toto splňují, se jmenují *tělesa* a tvoří základ moderní geometrie. Nezamýšlejíce formalizovat zmíníme, že z každého oboru integrity lze vyrobit těleso vlastně hrubým přidáním inverzů ke všem prvkům. Tomuto procesu se říká *lokalizace* a výsledné struktuře *podílové těleso*; lokalizace je způsobem, kterým se mimo jiné tvoří racionální čísla z čísel celých.

Definice 2.1.10 (Těleso)

Okruh $(F, +, -, 0, \cdot, 1)$ (z angl. názvu pro těleso – **f**ield) nazveme *tělesem*, existuje-li ke každému prvku $f \in F$ inverz vzhledem k $\cdot$, tj. prvek $f^{-1} \in F$ takový, že $f \cdot f^{-1} = f^{-1} \cdot f = 1$.

Pozorní čtenáři jistě sobě povšimli, že v definici tělesa *nepožadujeme*, aby byl výchozí okruh oborem integrity. Existence inverzů již tuto podmínku implikuje. Důkaz ponecháváme jako cvičení.

Cvičení 2.1.11

Dokažte, že každé těleso je oborem integrity.

2.2 Číselné obory

Konstrukce číselných oborů je symetrizační proces. Přirozená čísla nejsou z algebraického pohledu „hezký“ objekt, nejsou symetrická a všechny operace jsou destruktivní – ničí informaci o výchozím stavu. Kupříkladu operace + provedená na dvojici čísel dá číslo 5. Ovšem, nemám žádný způsob, jak se z čísla 5 vrátit zpět do čísel 2 nebo 3. V principu, v přirozených číslech se lze pohybovat pouze jedním směrem a všechny objekty ponechané vzadu upadají v trvalé zapomnění.

Varování 2.2.1

Nezasvěcený, zmatený a zcela pomýlený čtenář by snad měl odvahu tvrdit, že přeci mohu číslo 3 od čísla 5 **odečíst** a získat tím zpět číslo 2. Jistě, takové tvrzení by se kvapně stalo předmětem vášnivých diskusí v anarchistických kroužcích velebitelů teorie polomnožin, v kterékoli algebraické teorii však nemá nižádné místo.

Vyzýváme čtenáře, aby uvážili, že definovat „operaci minus" na množině přirozených čísel, která vlastně není formálně operací, neboť funguje pouze tehdy, když je levý argument větší nebo roven pravému, není komutativní a není **ani asociativní**, byl by čin vskutku ohyzdný.

Znak $-$ bude mít své místo až v celých číslech, kde však rovněž nebude operací (stále není asociativní), bude pouze značit inverz vzhledem k operaci $+$.

Tuto situaci vylepšují čísla celá, která přidávají inverzy k operaci $+$ a tím ji symetrizují. Ovšem, operace $\cdot$ si stále drží svůj deformační charakter. Podobně jako tomu bylo u přirozených čísel s operacemi $+$ a $\cdot$, v celých číslech operace $\cdot$ rovněž není zvratná. Dostat se ze součinu $-2 \cdot 3$ zpět na číslo -2 je nemožné.

Algebraicky nejdokonalejší jsou pak čísla racionální, která jsou již cele symetrickou strukturou – komutativním tělesem. Obě operace $+$ i $\cdot$ jsou symetrické, zvratné prostřednictvím $-$ a $^{-1}$. Pozor! Podobně jako odčítání, ani dělení **není operace**. Výraz p/q je pohodlným zápisem formálně korektního pq^{-1} vyjadřujícího součin čísla p s multiplikativním inverzem k číslu q.

Racionální čísla však stále mají, nikoli z algebraického, nýbrž z analytického pohledu, jednu podstatnou neduhu. Totiž, nerozumějí si dobře s pojmem *nekonečna*. Ukazuje se, že racionální čísla mají mezi sebou „nekonečně malé" díry nejsouce pročež vhodná při modelování fyzického světa, který jsme si lidé zvykli vnímat jako *souvislý*. Tuto neduhu lze odstranit, a to konstrukcí čísel *reálných*. Ta však nebude zdaleka tak jednoduchá jako konstrukce ostatních číselných oborů, neboť z principu věci dožaduje sobě aparátu pro práci s nekonečně malými vzdálenostmi.

Vlastnosti číselných oborů (nebo korektněji, množin) shrnuje tabulka 2.1.

Množina	Struktura	Operace (symetrická?)	Díry
$\mathbb{N}$	polookruh	$+$(ne), $\cdot$(ne)	konstantní velikosti
$\mathbb{Z}$	obor integrity	$+$(ano), $\cdot$(ne)	konstantní velikosti
$\mathbb{Q}$	komutativní těleso	$+$(ano), $\cdot$(ano)	nekonečně malé
$\mathbb{R}$	komutativní těleso	$+$(ano), $\cdot$(ano)	pouze dvě ($-\infty$ a ∞)

Tabulka 2.1: Vlastnosti číselných množin.

Nyní k samotným konstrukcím. První výzvou je konstrukce množiny přirozených čísel $\mathbb{N}$. Stavebními kameny jsou množiny, tudíž přirozená čísla sama musejí být rovněž množiny. Existuje mnoho axiomatických systémů (z nich snad nejoblíbenější tzv. Peanova aritmetika) popisujících přirozená čísla, avšak, jako je tomu u axiomů vždy, nepodávají žádnou představu o výsledné struktuře.

My předvedeme jednu konstruktivní definici, jejíž korektnost vyplývá z axiomů teorie množin (speciálně z axiomu nekonečna), které zde však uvádět nechceme; žádáme pročež čtenáře o jistou míru tolerance.

Definice 2.2.2 (Přirozená čísla)

Definujme $0 \coloneqq \emptyset$ a „funkci následníka" jako $s(a) \coloneqq a \cup \{a\}$. Množina $\mathbb{N}$ přirozených čísel je taková množina, že $0 \in \mathbb{N}$ a $s(n) \in \mathbb{N}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Konkrétně, $\mathbb{N}$ jsou definována iterativně jako

$$\begin{aligned}
0 &\coloneqq \emptyset, \\
1 &\coloneqq s(0) = 0 \cup \{0\} = \{\emptyset\} = \{0\}, \\
2 &\coloneqq s(1) = 1 \cup \{1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \{0, 1\}, \\
3 &\coloneqq s(2) = 2 \cup \{2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \{0, 1, 2\}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Intuitivně pojato, číslo n je definováno jako množina všech přirozených čísel menších než ono samo, tedy $\{0, \dots, n - 1\}$.

Na přirozených číslech lze definovat operace $+$ a $\cdot$. Ukážeme si zběžně jak.

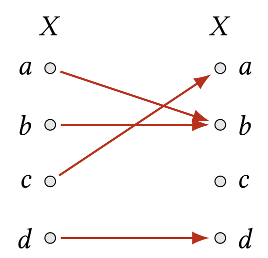
Přirozená čísla splňují tzv. axiom rekurze, který se obvykle zavádí v axiomatické definici přirozených čísel. V rámci našeho konstruktivního přístupu je třeba ho dokázat. My si ho zde však pouze uvedeme, neboť onen důkaz je silně logický a zdlouhavý.

Tvrzení 2.2.3 (Axiom rekurze)

Ať X je neprázdná množina a $x \in X$. Pak pro každé zobrazení $f : X \to X$ existuje jednoznačně určené zobrazení $F : \mathbb{N} \to X$ takové, že $F(0) = x$ a $F(s(n)) = f(F(n))$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Lidsky řečeno, axiom rekurze říká, že přirozenými čísly je možné „číslovat" opakované (*rekurzivní*) aplikace zobrazení f na prvky množiny X počínaje jakýmsi pevně zvoleným prvkem. Vlastně vyrábíme nekonečný řetěz šipek zobrazení f.

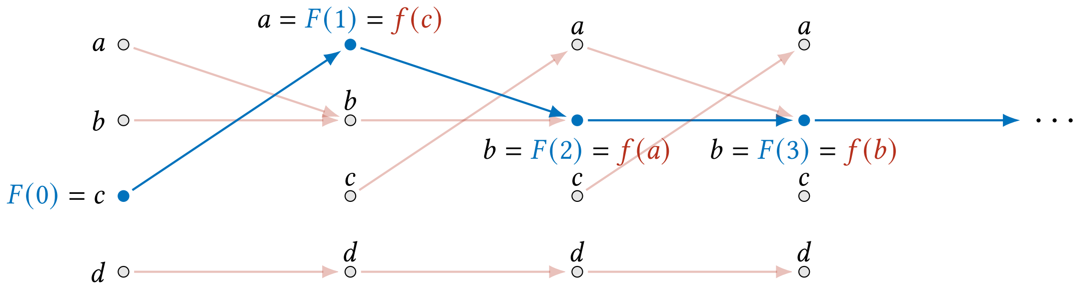
Uvažme například zobrazení na obrázku 2.3.



Obrázek 2.3: Zobrazení f z axiomu rekurze.

Zde $X = \{a, b, c, d\}$ a za počáteční prvek zvolme třeba c. Podle tvrzení 2.2.3 existuje zobrazení $F : \mathbb{N} \to X$ začínající v c (tj. $F(0) = c$), které zobrazuje číslo 1 na prvek, na který f zobrazuje c; číslo 2 na prvek, na který f zobrazuje ten prvek, na který zobrazuje c; číslo 3 na prvek, na který f zobrazuje ten prvek, na který zobrazuje ten prvek, na který zobrazuje c; číslo 4 … radši nic … Snad lepší představu poskytne obrázek 2.4.

Vybaveni axiomem rekurze, můžeme nyní definovat operaci $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. Začneme tím, že defi-



Obrázek 2.4: Zobrazení F jako „rekurzor" zobrazení f s počátečním bodem $F(0) = c$.

nujeme zobrazení „přičti n". Zvolme za zobrazení f v axiomu rekurze funkci následníka $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definovanou $s(n) = n \cup \{n\}$. Je zřejmé, že zobrazení „přičti n", pracovně označené $+_n$, musí číslo 0 zobrazit na n. Podle axiomu rekurze však existuje pouze jediné zobrazení $+_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ splňující

$$
\begin{aligned}
+_n(0) &= n,\\
+_n(s(m)) &= s(+_n(m)) \ \forall m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}
$$

Uvědomme si, že druhá rovnost je též velmi přirozeným požadavkem pro operaci sčítání. Říká totiž, že následník čísla $m + n$ je tentýž jako následník čísla m sečtený s n.

Konečně, na $\mathbb{N}$ definujeme operaci + předpisem

$$m + n \coloneqq +_n(m).$$

V každé učebnici základů teorie množin a matematické logiky dá nyní nějakou práci osvětlit, že takto definovaná operace + je komutativní a asociativní a že se obdobným způsobem dá definovat operace násobení. Naštěstí! Tento text není výkladem ani jedné z pokulhávajících disciplín, a tedy těchto několik malých kroků pro člověka a stejně tak malých kroků pro matematiku přeskočíme a věnovati sebe dalším oborům číselným budeme.

Zcela striktně vzato, $\mathbb{N}$ ještě nejsou *oborem*. Nejsou vlastně ani okruhem. Přestože $(\mathbb{N}, \cdot, 1)$ je komutativní monoid, $(\mathbb{N}, +, 0)$ zcela jistě není komutativní grupa, ano rovněž pouze komutativní monoid. Takovým strukturám se často říká (snad jen proto, aby se jim prostě nějak říkalo, ačkoliv nikoho zvlášť nezajímají) *polookruhy*. Situaci vylepšují čísla celá.

Podobně jako čísla přirozená, i čísla celá lze definovat mnoha způsoby. Uvedeme si jeden. Na množině $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ dvojic přirozených čísel definujme relaci $\sim_{\mathbb{Z}}$ předpisem

$$(a, b) \sim_{\mathbb{Z}} (c, d) \overset{\text{def}}{\iff} a + d = b + c.$$

Třídám ekvivalence dvojic přirozených čísel podle $\sim_{\mathbb{Z}}$ budeme říkat *celá čísla*.

Definice 2.2.4 (Celá čísla)

Množinu celých čísel $\mathbb{Z}$ definujeme jako

$$\mathbb{Z} \coloneqq \{[(a, b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \mid (a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}.$$

Operace + a $\cdot$ na $\mathbb{N}$ indukují operace na $\mathbb{Z}$, které budeme označovat stejnými symboly. Konkrétně, definujme

$$\begin{aligned}[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} + [(c,d)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} &\coloneqq [(a+c, b+d)]_{\sim_{\mathbb{Z}}},\\ [(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \cdot [(c,d)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} &\coloneqq [(a\cdot c + b\cdot d, a\cdot d + b\cdot c)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}.\end{aligned}$$

Pro všechna $a, b \in \mathbb{N}$ navíc platí

$$[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} + [(b,a)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = [(a+b, b+a)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} = [(0,0)]_{\sim_{\mathbb{Z}}},$$

kde poslední rovnost platí, protože + je komutativní. Čili, prvek $[(b,a)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ je inverzní k prvku $[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ vzhledem k +. Značíme ho $-[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$. Odtud plyne, že $(\mathbb{Z}, +, -, [(0,0)]_{\sim_{\mathbb{Z}}})$ je komutativní grupa, pročež je

$$(\mathbb{Z}, +, -, [(0,0)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}, \cdot, [(1,0)]_{\sim_{\mathbb{Z}}})$$

komutativní okruh. Je snadné si uvědomit, že je to rovněž obor integrity.

Čtenáře snad povaha množiny $\mathbb{Z}$ z předchozí definice zaráží. Zcela jistě to není ta „obvyklá“. Ovšem, přechod od této verze celých čísel k té běžně užívané je zcela bezbolestný. Stačí se totiž dívat na třídy ekvivalence $[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ jako na „čísla“ $a - b$. Ponecháváme na čtenáři, aby ověřil, že definice operací + a − v naší verzi $\mathbb{Z}$ odpovídají těm na celých číslech v jejich zvyk ctící podobě. My budeme této korespondence drze využívat bez varování a mluvit o oboru integrity $(\mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1)$.

Cvičení 2.2.5 (Hrátky s celými čísly)

Množinou $\mathbb{Z}$ zde myslíme tu z definice 2.2.4. Ověřte, že

(1) relace $\sim_{\mathbb{Z}}$ je skutečně ekvivalence;

(2) operace + a · jsou dobře definované. To znamená, že nezávisí na volbě konkrétního reprezentanta z každé třídy ekvivalence. Ještě konkrétněji, dobrá definovanost zde značí fakt, že

$$\begin{aligned}[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} + [(c,d)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} &= [(a',b')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} + [(c',d')]_{\sim_{\mathbb{Z}}},\\ [(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \cdot [(c,d)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} &= [(a',b')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \cdot [(c',d')]_{\sim_{\mathbb{Z}}},\end{aligned}$$

kdykoli $(a,b) \sim_{\mathbb{Z}} (a',b')$ a $(c,d) \sim_{\mathbb{Z}} (c',d')$;

(3) operace +, − a inverz − podle naší definice souhlasí s operacemi danými stejnými symboly na „běžné“ verzi celých čísel při korespondenci

$$[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \leftrightarrow a - b.$$

Konkrétně, pro operaci + toto znamená, že platí korespondence

$$[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} + [(c,d)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \leftrightarrow (a-b) + (c-d)$$

a nezávisí na výběru reprezentanta z tříd ekvivalence $[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ a $[(c,d)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

Přechod od celých čísel k racionálním obnáší definovat na celých číslech „dělení“ – v algebraické hantýrce definovat inverz k operaci · a učiniti tímť z oboru $(\mathbb{Z}, +, -, 0, \cdot, 1)$ těleso. Ten je překvapivě snadný úkol a proces „racionalizace“, nazývaný oficiálně *lokalizace*, lze v podstatě krok po kroku replikovat pro libovolný obor integrity.

Snad není překvapením, že racionální čísla budou třídy ekvivalence dvojic (a, b) celých čísel (s $b \neq 0$), které budeme ovšem zapisovat tradičně a/b. Princip za konstrukcí racionálních čísel z čísel celých není nepodobný tomu za konstrukcí celých čísel z čísel přirozených. Totiž, *zlomky* pro nás budou rovněž třídy ekvivalence. Čtenář dobře učiní, přesvědčí-li sebe, že se zlomky jako s třídami ekvivalence vlastně zachází od doby, kdy mu byly představeny. Totiž, mám-li $a, b \in \mathbb{Z}$ obě dělitelná číslem $n \in \mathbb{Z}$, řekněme $a = nk$ a $b = nl$ pro vhodná $k, l \in \mathbb{Z}$, pak píšeme

$$\frac{a}{b} = \frac{nk}{nl} = \frac{k}{l},$$

ačkoli ve skutečnosti $a \neq k$ a $b \neq l$, čili rovnost výše dlužno nevejmouti absolutně. Zlomek a/b jsme totiž zvyklí vnímat jako třídu ekvivalence představující nějakou část celku. Tento pohled je snadné formalizovat.

Definice 2.2.6 (Racionální čísla)

Definujme ekvivalenci $\sim_{\mathbb{Q}}$ na dvojicích $\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ předpisem

$$(a, b) \sim_{\mathbb{Q}} (c, d) \overset{\text{def}}{\iff} a \cdot d = b \cdot c.$$

Třídu ekvivalence $[(a, b)]_{\sim_{\mathbb{Q}}}$ budeme zapisovat a/b a položíme

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \right\}.$$

Operace $+$ a $-$ indukují operace na $\mathbb{Q}$, jež budeme značit stejně. Konkrétně,

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d},$$
$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{a \cdot c}{b \cdot d}.$$

Navíc, prvek b/a je inverzní k prvku a/b vzhledem k $\cdot$, pokud $a \neq 0$. Budeme ho značit $(a/b)^{-1}$. Snadno se ověří, že

$$(\mathbb{Q}, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1)$$

je těleso, kde jsme ztotožnili prvky $a/1 \in \mathbb{Q}$ s prvky $a \in \mathbb{Z}$.

Cvičení 2.2.7 (Hrátky s racionálními čísly)

Ověřte, že $\sim_{\mathbb{Q}}$ je skutečně ekvivalence a že operace $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{Q}$ jsou dobře definované (nezávisejí na výběru reprezentanta) a odpovídají „obvyklým“ operacím zlomků.

Konstrukce reálných čísel z racionálních je zcela jistě nejnáročnější úkol a nelze ho docílit čistě algebraicky. Potíž dlí už v samotné intuici. Totiž, jak již zminiechom, racionální čísla mají mezi sebou „díry“. Formalizovat tento pojem však není přímočaré. Zatím nejlepší představu, kterou jsme schopni nastínit, je ta, že „racionální úsečka“ je „tečkovaná“ – každému jejímu bodu mohu přiřadit nějaké přirozené číslo. To znamená, že každé její dva body jsou od sebe vzdáleny, neboť je dokáži od sebe rozlišit dost na to, abych jim přiřadil dvě různá čísla. Naopak, s „reálnou úsečkou“ toto učinit nemohu. Jednotlivé body do sebe splývají a vytvářejí „plynulý“ obraz.

Přenosu této intuitivní představy do praxe brání fakt, že dvě racionální čísla jsou od sebe sice vzdálena, ale „nekonečně málo“. Další kapitola je věnována rigoróznímu pohledu na tuto problematiku a konstrukci reálných čísel.

Kapitola 3

Posloupnosti, limity a reálná čísla

Kritickým opěrným bodem při konstrukci reálných čísel i při jejich následném studiu je pojem *limity* (v češtině se tomuto slovu přiřazuje ženský rod). Limita je bod, k němuž se zvolená posloupnost čísel „blíží“, ale nikdy jeho „nedosáhne“, pokud takový existuje. Přidruženým pojmem je třeba *asymptota* reálné funkce, se kterou se čtenáři, očekáváme, setkali.

Samotná definice limity je zpočátku poněkud neintuitivní. Vlastně i samotná představa býti něčemu „nekonečně blízko“ je do jisté míry cizí. Pokusíme se vhodnými obrázky a vysvětlivkami cestu k pochopení dláždit, avšak, jakož tomu bývá, intuice přichází, až člověk s ideou takřkouce sroste.

3.1 Definice limity posloupnosti

Koncept posloupnosti je, na rozdíl od limity, velmi triviální. Je to vlastně „očíslovaná množina čísel“. Z každé množiny lze vyrobit posloupnost jejích prvků tím, že jim přiřkneme nějaké pořadí. Tento *přírok* se nejsnadněji definuje jako zobrazení z přirozených čísel – to totiž přesně na každý prvek kodomény zobrazí jeho pořadí.

Definice 3.1.1 (Posloupnost)

Ať X je množina. *Posloupností* prvků z X nazveme libovolné zobrazení

$$a : \mathbb{N} \to X.$$

Pro úsporu zápisu budeme psát a_n místo $a(n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Navíc, je-li kodoména X zřejmá z kontextu, říkáme stručně, že $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je *posloupnost*.

Poznámka 3.1.2

Vnímaví čtenáři sobě jistě povšimli, že jsme na $\mathbb{N}$ nedefinovali žádné *uspořádání*. Ačkolivěk není tímto definice posloupnosti formálně nijak postižena, neodpovídá přirozenému vnímání, že prvek s číslem 1 stojí před prvkem s číslem 5 apod.

Naštěstí, naše konstruktivní definice přirozených čísel nabízí okamžité řešení. Využijeme toho, že každé přirozené číslo je podmnožinou svého následníka, a definujeme zkrátka uspořádání $\leq$ na $\mathbb{N}$ předpisem

$$a \leq b \overset{\text{def}}{\iff} a \subseteq b.$$

Fakt, že $\subseteq$ je uspořádání, okamžitě implikuje, že $\leq$ je rovněž uspořádání.

Rozmyslíme si nyní dva pojmy pevně spjaté s posloupnostmi – *konvergence* a *limita*. Brzo si též ukážeme, že tyto dva pojmy jsou záměnné, ale zatím je vnímáme odděleně. Navíc, budeme se odteď soustředit speciálně na posloupnosti racionálních čísel, tj. zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, neboť jsou oním klíčem k sestrojení své reálné bratří.

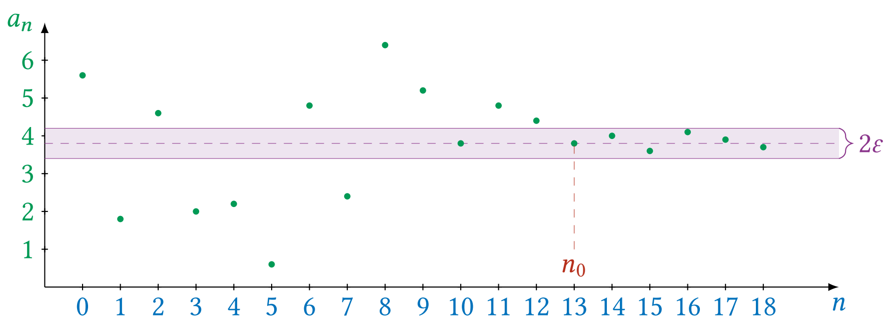
Ze všech posloupností $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ nás zajímá jeden konkrétní typ – posloupnosti, vzdálenosti mezi jejichž prvky se postupně zmenšují. Tyto posloupnosti, nazývané *konvergentní* (z lat. con-vergere, „ohýbat k sobě“), se totiž vždy blíží k nějakému konkrétnímu bodu – ke své *limitě*. Představa ze života může být například následující: říct, že se blížíme k nějakému místu, je totéž, co tvrdit, že se vzdálenost mezi námi a oním místem s každým dalším krokem zmenšuje. V moment, kdy své kroky směřujeme stále stejným směrem, posloupnost vzdáleností mezi námi a tím místem tvoří konvergentní posloupnost. Jestliže se pravidelně odkláníme, k místu nikdy nedorazíme a posloupnost vzdáleností je pak *divergentní* (tj. **ne**konvergentní).

Do jazyka matematiky se věta „vzdálenosti postupně zmenšují“ překládá obtížně. Jeden ne příliš elegantní, ale výpočetně užitečný a celkově oblíbený způsob je následující: řekneme, že prvky posloupnosti jsou k sobě stále blíž, když pro jakoukoli vzdálenost vždy dokážeme najít krok, od kterého dál jsou již k sobě dva libovolné prvky u sebe blíž než tato daná vzdálenost. Důrazně vyzýváme čtenáře, aby předchozí větu přečítali tak dlouho, dokud jim nedává dobrý smysl. Podobné formulace se totiž vinou matematickou analýzou a jsou základem uvažování o nekonečnu.

Definice 3.1.3 (Konvergentní posloupnost)

Řekneme, že posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je *konvergentní*, když platí výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$



Obrázek 3.1: Konvergentní posloupnost. Zde pro $\varepsilon = 0.2$ lze volit například $n_0 = 13$. Vodorovná přímka procházející bodem a_{n_0} je vlastně „středem“ pruhu o šíři 2ε, ve kterém se nacházejí všechny členy posloupnosti s pořadím vyšším než 13.

Poznámka 3.1.4

Radíme, aby se čtenáři sžili s intuitivním (přesto velmi přesným) ponětím absolutní hodnoty $|x - y|$ jako *vzdálenosti* mezi čísly x a y. V tomto smyslu je pak $|x| = |x - 0|$ vzdálenost čísla x od čísla 0, což cele odpovídá definici tohoto symbolu.

Poznámka 3.1.5

Aplikujeme intuitivní vysvětlení *zmenšování vzdálenosti* z odstavce nad definicí 3.1.3 na jeho skutečnou definici.

Výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

říká, že pro jakoukoli vzdálenost (ε) dokáži najít krok (n_0) takový, že vzdálenost dvou prvků v libovolných dvou následujících krocích (m, n) už je menší než daná vzdálenost ($|a_n - a_m| < \varepsilon$).

Slovo „krok“ je třeba vnímat volně – myslíme pochopitelně *pořadí* či *indexy* prvků v posloupnosti. Pohled na racionální posloupnosti jako na „kroky“ činěné v racionálních číslech může být ovšem užitečný.

Cvičení 3.1.6

Dokažte, že posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je konvergentní právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < C\varepsilon$$

pro libovolnou **kladnou** konstantu $C \in \mathbb{Q}$.

Pojem *limity*, představuje jakýsi bod, k němuž se posloupnost s každým dalším krokem přibližuje, je vyjádřen výrazem podobného charakteru. Zde však přichází na řadu ona *děravost* racionálních čísel. Může se totiž stát, a příklady zde uvedeme, že limita racionální posloupnosti není racionální číslo.

Učiňmež tedy dočasný obchvat a před samotnou definicí limity vyrobme reálná čísla jednou z přehoušlí možných cest.

Ať $C(\mathbb{Q})$ značí množinu všech **konvergentních** racionálních posloupností. Uvažme ekvivalenci $\simeq$ na $C(\mathbb{Q})$ danou

$$a \simeq b \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon.$$

Přeloženo do člověčtiny, $a \simeq b$, právě když se rozdíl mezi prvky těchto posloupností se stejným pořadím neustále zmenšuje – řekli bychom, že se *blíží k nule*. V rámci (zatím intuitivní) představy, že konvergentní posloupnosti se blíží k nějakému bodu, dává smysl ztotožňovat posloupnosti, které se blíží k bodu *stejnému* – stav, který vyjadřujeme tak, že se jejich rozdíl blíží k nule.

Ve výsledku budeme definovat reálná čísla jako limity všech možných konvergentních racionálních posloupností. Pozbývajíce leč aparátu, bychom koncepty limity a konvergence stmelili v jeden, jsme nuceni učinit mezikrok.

Definice 3.1.7 (Reálná čísla)

Množinu *reálných čísel* tvoří všechny třídy ekvivalence konvergentních racionálních posloupností podle $\simeq$. Symbolicky,

$$\mathbb{R} \coloneqq \{[a]_{\simeq} \mid a \in C(\mathbb{Q})\}.$$

Nyní definujeme pojem limity. Nemělo by snad být příliš překvapivé, že se od definice konvergence příliš neliší. Významný rozdíl odpočívá pouze v předpokladu existence *cílového bodu.*

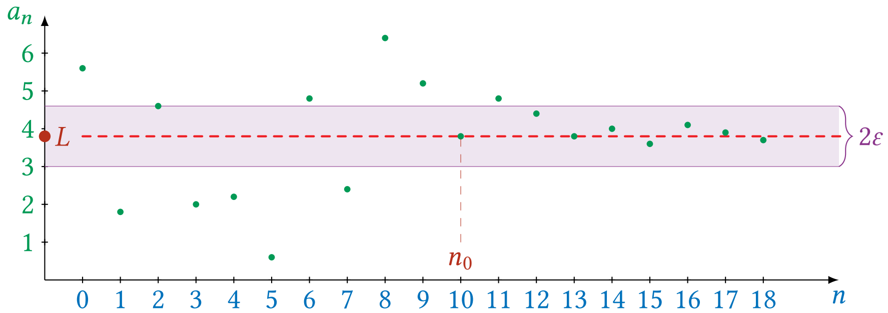
Definice 3.1.8 (Limita posloupnosti)

Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je posloupnost. Řekneme, že a *má limitu* $L \in \mathbb{R}$, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0 : |a_n - L| < \varepsilon,$$

neboli, když jsou prvky a_n bodu L s každým krokem stále blíž.

Fakt, že $L \in \mathbb{R}$ je limitou a značíme jako $\lim a = L$.



Obrázek 3.2: Posloupnost s limitou L. Zde pro $\varepsilon = 0.4$ lze volit například $n_0 = 10$. Vodorovná přímka procházející bodem L je vlastně „středem" pruhu o šíři 2ε, ve kterém se nacházejí všechny členy posloupnosti s pořadím vyšším než 10.

3.2 Limity konvergentních posloupností

V této sekci dokážeme, že konvergentní posloupnosti mají limitu. Opačná implikace, tj. že posloupnosti jmající limitu konvergují, je téměř triviální. K jejímu důkazu potřebujeme jen jednu vlastnost absolutní hodnoty.

Lemma 3.2.1 (Trojúhelníková nerovnost)

Ať $x, y \in \mathbb{Q}$. Pak

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Důkaz. Absolutní hodnota $|x + y|$ je rovna buď $x + y$ (když $x + y \geq 0$) nebo $-x - y$ (když $x + y < 0$). Zřejmě $x \leq |x|$ a $-x \leq |x|$, podobně $y \leq |y|$ a $-y \leq |y|$.

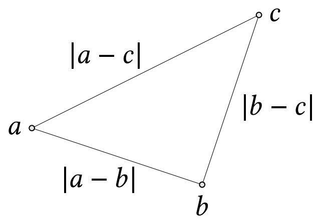
Pak je ale $x + y \leq |x| + |y|$ a též $-x + (-y) \leq |x| + |y|$. Tím je důkaz hotov. ∎

Poznámka 3.2.2

Název *trojúhelníková* obvykle přiřazovaný nerovnosti 3.2.1 vyplývá z její přirozené geometrické interpretace. Ať a, b, c jsou body v rovině. Dosazením $x = a - b$, $y = b - c$, dostává nerovnost 3.2.1 tvar

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|,$$

tj. vzdálenost a od c je nanejvýš rovna součtu vzdáleností a od b a b od c pro libovolný bod b. Vizte obrázek 3.3.



Obrázek 3.3: Trojúhelníková nerovnost

Trojúhelníková nerovnost poskytuje snadné důkazy mnoha užitečných dílčích tvrzení o posloupnostech. Příkladem je následující cvičení.

Cvičení 3.2.3 (Jednoznačnost limity)

Dokažte, že každá posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ má nejvýše jednu limitu. Hint: použijte trojúhelníkovou nerovnost.

Ježto bychom však rádi dokazovali všechna tvrzení již pro reálná čísla, ukažme si nejprve, jak se dají sčítat a násobit. Dokážeme rovněž, že $\mathbb{R}$ – stejně jako $\mathbb{Q}$ – tvoří těleso. Začneme tím, že se naučíme sčítat a násobit konvergentní posloupnosti.

Ať $a, b \in C(\mathbb{Q})$ jsou dvě konvergentní racionální posloupností. Operace $+$ a $\cdot$ na $C(\mathbb{Q})$ definujeme velmi přirozeně. Zkrátka, $(a + b)(n) \coloneqq a(n) + b(n)$ a $(a \cdot b)(n) \coloneqq a(n) \cdot b(n)$, tj. prvek na místě n posloupnosti $a + b$ je součet prvků na místech n posloupností a a b. Abychom ovšem získali skutečně operace na $C(\mathbb{Q})$, musíme ověřit, že $a + b$ i $a \cdot b$ jsou konvergentní.

Nechť dáno jest $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že umíme najít $n_0 \in \mathbb{N}$, aby

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| < \varepsilon,$$

kdykoli $m, n \geq n_0$. Protože jak a tak b konverguje, již umíme pro libovolná $\varepsilon_a, \varepsilon_b > 0$ najít n_a a n_b taková, že $|a_n - a_m| < \varepsilon_a$, kdykoli $m, n \geq n_a$, a podobně $|b_n - b_m| < \varepsilon_b$, kdykoli $m, n \geq n_b$. Položme tedy $\varepsilon_a = \varepsilon_b \coloneqq \varepsilon/2$ a $n_0 \coloneqq \max(n_a, n_b)$. Potom můžeme užitím trojúhelníkové nerovnosti pro $m, n \geq n_0$ odhadnout

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| = |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)| \leq |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon,$$

čili $a + b$ konverguje.

Předchozí odstavec se může snadno zdát šílenou směsicí symbolů. Ve skutečnosti však formálně vykládá triviální úvahu. Máme najít pořadí, od kterého jsou prvky součtu $a + b$ u sebe blíž než nějaká daná vzdálenost. Poněvadž a i b konvergují, stačí přeci vzít větší z pořadí, od kterých je jak rozdíl prvků a, tak rozdíl prvků b, menší než polovina dané vzdálenosti.

Velmi obdobnou manipulaci lze provést k důkazu konvergence $a \cdot b$. Ponecháváme jej čtenářům jako (ne zcela snadné) cvičení.

Cvičení 3.2.4

Dokažte, že jsou-li a, b konvergentní posloupnosti racionálních čísel, pak je posloupnost $a \cdot b$ rovněž konvergentní. Kromě trojúhelníkové nerovnosti je zde třeba použít i zatím nedokázané lemma 3.2.10.

Racionální čísla jsou přirozeně součástí reálných prostřednictvím zobrazení

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{Q} &\hookrightarrow \mathbb{R}, \\ q &\mapsto [(q)], \end{aligned} \tag{3.1}$$

kde (q) značí posloupnost $a : n \mapsto q$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $[(q)]$ její třídu ekvivalence podle $\simeq$.

Varování 3.2.5

Tvrdíme pouze, že $\mathbb{Q}$ jsou *součástí* $\mathbb{R}$, kde slovu *součást* záměrně není dán rigorózní smysl. Racionální čísla totiž (aspoň po dobu naší dočasné definice reálných čísel) nejsou v žádném smyslu podmnožinou čísel reálných.

Matematici ale často ztotožňujeme doménu prostého zobrazení s jeho obrazem (neboť mezi těmito množinami vždy existuje bijekce). V tomto smyslu mohou být $\mathbb{Q}$ vnímána jako podmnožina $\mathbb{R}$, ztotožníme-li racionální čísla s obrazem zobrazení ξ z (3.1). Toto ztotožnění znamená vnímat racionální číslo $q \in \mathbb{Q}$ jako konvergentní posloupnost samých čísel q.

Cvičení 3.2.6

Dokažte, že zobrazení ξ z (3.1) je

- dobře definované – tzn. že když $p = q$, pak $[(p)] = [(q)]$ – a
- prosté.

Jelikož $\mathbb{Q}$ je těleso, speciálně tedy obsahuje 0 a 1, $\mathbb{R}$ je (prostřednictvím ξ z (3.1)) obsahuje rovněž. Pro stručnost budeme číslem $0 \in \mathbb{R}$ značit třídu ekvivalence posloupnosti samých nul a číslem $1 \in \mathbb{R}$ třídu ekvivalence posloupnosti samých jednotek. Ověříme, že se skutečně jedná o neutrální prvky ke sčítání a násobení.

Je třeba si rozmyslet, že pro každou posloupnost $a \in C(\mathbb{Q})$ platí $a + 0 = a$ a $a \cdot 1 = a$, kde, opět, čísla 0 a 1 ve skutečnosti znamenají nekonečné posloupnosti těchto čísel. Obě rovnosti jsou však zřejmé z definice, neboť $(a + 0)(n) = a_n + 0 = a_n = a(n)$ a $(a \cdot 1)(n) = a_n \cdot 1 = a_n = a(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Konečně, rozšíříme rovněž – a $^{-1}$ na $\mathbb{R}$. Pro libovolnou posloupnost $x \in C(\mathbb{Q})$ definujeme zkrátka $(-a)(n) \coloneqq -a(n)$. S $^{-1}$ je situace lehce komplikovanější. Totiž, pouze **nenulová** racionální čísla mají svůj inverz k násobení. Zde je třeba zpozorovat, že **konvergentní** posloupnost, která by však měla nekonečně mnoho prvků nulových, už musí mít od nějakého kroku **všechny** prvky nulové, jinak by totiž nemohla konvergovat. Vskutku, představme si, že a je posloupnost taková, že $a_n = 0$ pro nekonečně mnoho přirozených čísel $n \in \mathbb{N}$. Pak ale ať zvolím $n_0 \in \mathbb{N}$ jakkoliv, vždy existuje $m \geq n_0$ takové, že $a_m = 0$. Vezměme $n \geq n_0$ libovolné. Pokud $a_n \neq 0$, pak můžeme vzít třeba

$\varepsilon \coloneqq |a_n|/2$ a bude platit, že $|a_n - a_m| > \varepsilon$, což je dokonalý zápor definice konvergence. Z toho plyne, že a_n musí být 0 pro $n \geq n_0$ a odtud dále, že $a \simeq 0$. Čili, pouze posloupnosti ekvivalentní nulové posloupnosti nemají v $\mathbb{R}$ inverz vzhledem k $\cdot$.

Právě provedená úvaha nám umožňuje definovat $^{-1}$ pro posloupnosti $a \in C(\mathbb{Q})$ takové, že $a \not\simeq 0$, následovně:

$$(a^{-1})(n) \coloneqq \begin{cases} a(n)^{-1}, & \text{když } a(n) \neq 0, \\ 0, & \text{když } a(n) = 0. \end{cases}$$

Je snadné uvidět, že $-a$ je inverzem k a vzhledem k $+$ a a^{-1} je inverzem k $a \not\simeq 0$ vzhledem k $\cdot$. Vskutku, máme

$$(a + (-a))(n) = a_n + (-a_n) = 0,$$

tedy v tomto případě je $(a + (-a))$ přímo **rovna** nulové posloupnosti. V případě $^{-1}$ dostáváme pro $a \not\simeq 0$

$$(a \cdot a^{-1})(n) = \begin{cases} a_n \cdot a_n^{-1} = 1, & \text{když } a_n \neq 0, \\ a_n \cdot 0 = 0, & \text{když } a_n = 0. \end{cases}$$

Ergo, $a \cdot a^{-1}$ je rovna posloupnosti samých jedniček, až na konečně mnoho nul, protože, jak jsme si již rozmysleli, a nemůže mít nekonečně 0 a zároveň nebýt v relaci $\simeq$ s nulovou posloupností, jinak by nebyla konvergentní. To však přesně znamená, že $a \cdot a^{-1} \simeq 1$, čili $[a] \cdot [a^{-1}] = [1]$.

Shrneme-li řád předchozích úvah, získáme oprávnění tvrdit, že

$$(\mathbb{R}, +, -, [(0)], \cdot, ^{-1}, [(1)])$$

je těleso. Tento fakt je do budoucna pochopitelně zásadní; teď se však můžeme těšit znalostí, že jsme přechodem od $\mathbb{Q}$ k $\mathbb{R}$ neztratili symetrické rysy původní množiny.

Přikročmež již však k důkazu existence limity každé konvergentní posloupnosti. Fakt, že existence limity implikuje konvergenci, plyne přímo z trojúhelníkové nerovnosti.

Lemma 3.2.7

Každá posloupnost majíc limitu je konvergentní.

Důkaz. Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je posloupnost s limitou L. Pak pro každé $\varepsilon_L > 0$ existuje $n_L \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - L| < \varepsilon_L$ pro všechna $n \geq n_L$.

Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pro všechna m, n větší než vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme tedy $n_0 \coloneqq n_L$ a $\varepsilon_L \coloneqq \varepsilon/2$. Potom pro všechna $m, n \geq n_0 = n_L$ máme

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_n - L + L| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < \varepsilon_L + \varepsilon_L = \varepsilon,$$

čili a konverguje. ∎

3.2.1 Úplnost reálných čísel

K důkazu existence limity každé konvergentní posloupnosti potřebujeme prozpytovat vztah racionálních a reálných čísel podrobněji. Konkrétně potřebujeme ukázat, že $\mathbb{Q}$ jsou tzv. *hustá* v $\mathbb{R}$, tj.

že ke každému reálnému číslu existuje racionální číslo, které je mu nekonečně blízko. Zde jsme opět implicitně ztotožnili racionální čísla s třídami ekvivalence konstantních posloupností. Na základě toho budeme totiž moci tvrdit, že reálná čísla jsou tzv. *úplná*, což přesně znamená, že každá konvergentní posloupnost reálných čísel má reálnou limitu.

Nejprve si ovšem musíme rozmyslet, co vlastně míníme posloupností *reálných* čísel. Pochopitelně, zobrazení $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ poskytuje validní definici, ale uvědomme sobě, že teď vlastně uvažujeme posloupnosti, jejichž prvky jsou třídy ekvivalence konvergentních racionálních posloupností.

Abychom směli hovořit o konvergentních *reálných* posloupnostech, rozšíříme absolutní hodnotu $|\cdot|$ z $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ zkrátka předpisem $|[(x_n)]| \coloneqq [(|x_n|)]$ pro $(x_n) \in C(\mathbb{Q})$. Napíšeme-li tedy $|x| \le K$ pro reálná čísla $x, K \in \mathbb{R}$, pak tím doslova myslíme $[(|x_n|)] \le [(K_n)]$, což ale **neznamená** $|x_n| \le K_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, kde x_n, K_n jsou nyní již čísla ryze rozumná čili racionální, anobrž $|x_n| > K_n$ jen pro **konečně mnoho** $n \in \mathbb{N}$.

Varování 3.2.8

Důležitá myšlenka, již je dlužno snovat v srdci při práci s třídami ekvivalence konvergentních posloupností, je ta, že při porovnávání dvou tříd nás nezajímá libovolný **konečný počet** jejich prvních prvků.

Například, vztah $x = y$ pro $x, y \in \mathbb{R}$ znamená, že $x_n = y_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ až na libovolný konečný počet prvních přirozených čísel. To se lépe vyjadřuje pomocí negace. Je snazší říct, že $x = y$, když $x_n \ne y_n$ pro jenom konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$.

Rozepíšeme-li si tedy podrobně, co znamená, že je posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergentní, dostaneme pro dané $\varepsilon > 0$, vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$ a $m, n \ge n_0$ nerovnost $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Ovšem, x_n i x_m jsou samy o sobě třídy ekvivalence konvergentních **posloupností** racionálních čísel, tedy poslední nerovnost plně rozepsána dí

$$|[((x_n)_k - (x_m)_k)_{k=0}^{\infty}]| < \varepsilon,$$

což lze rovněž vyjádřit tak, že

$$|(x_n)_k - (x_m)_k| \ge \varepsilon$$

jen pro konečně mnoho $k \in \mathbb{N}$.

Nepřináší však žádný hmotný užitek nad konvergencí reálných posloupností uvažovat takto složitě. Čtenáři dobře učiní, uvědomí-li si plný význam předchozího odstavce, ovšem zůstanou-li věrni intuitivnímu vnímání výrazu $|x - y|$ jako „vzdálenosti“ čísel x a y.

Definice 3.2.9 (Omezená posloupnost)

Řekneme, že posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je *omezená*, když existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $|x_n| \le K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Píšeme $|x| \le K$.

Lemma 3.2.10

Každá konvergentní posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je omezená.

Důkaz. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Z definice konvergence nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \ge n_0$ je $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Speciálně tedy pro každé $n \ge n_0$ platí

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \le |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < \varepsilon + |x_{n_0}|,$$

tudíž všechny členy posloupnosti s pořadím větším než n_0 jsou omezeny číslem $\varepsilon + |x_{n_0}|$. Ovšem, členů posloupnosti s pořadím menším než n_0 je konečně mnoho, a tedy z nich můžeme vzít ten největší – nazvěme ho s. Položíme-li $K \coloneqq \max(s, \varepsilon + |x_{n_0}|)$, pak $|x_n| \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, čili x je omezená číslem K. ■

Tvrzení 3.2.11 (Hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)

Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, tj. ke každému $x \in \mathbb{R}$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $r \in \mathbb{Q}$ takové, že $|x - r| < \varepsilon$.

Důkaz. Ať $\varepsilon > 0$ je dáno a označme $x \coloneqq [(x_n)]$, $(x_n) \in C(\mathbb{Q})$. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m, n \geq n_0$ je $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Zvolme $r \coloneqq x_{n_0} \in \mathbb{Q}$. Pak ovšem máme

$$|x_n - r| = |x_n - x_{n_0}| < \varepsilon$$

pro všechna $n \geq n_0$. To přesně znamená, že $|x - r| < \varepsilon$. ■

Lemma 3.2.12

Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Pak $\lim a = [(a)]$.

Důkaz. Položme $x \coloneqq [(a)]$. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Protože a je konvergentní, nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq n_0$. Potom ale $|a_n - x| < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$, což z definice znamená, že $\lim a = x$. ■

Důsledek 3.2.13 ($\mathbb{R}$ jsou úplná)

Každá konvergentní reálná posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ má limitu v $\mathbb{R}$.

Důkaz. Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je racionální posloupnost taková, že $|x_n - a_n| < 1/n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tu nalezneme opakovaným použitím tvrzení 3.2.11 pro $\varepsilon \coloneqq 1/n$ a $x \coloneqq x_n$. Ukážeme nejprve, že a je konvergentní. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme n_1 takové, že $\forall m, n \geq n_1$ platí $1/m + 1/n < \varepsilon$. Dále, x je konvergentní z předpokladu. Čili, pro každé $\varepsilon_x > 0$ nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m, n \geq n_2$ máme $|x_n - x_m| < \varepsilon_x$. Volme tedy speciálně

$$\varepsilon_x \coloneqq \varepsilon - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}.$$

a $n_0 \coloneqq \max(n_1, n_2)$. Potom pro všechna $m, n \geq n_0$ platí nerovnosti

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| = |a_n - a_m - x_n + x_n| &\leq |a_n - x_n| + |x_n - a_m| = |a_n - x_n| + |x_n - a_m - x_m + x_m| \\ &\leq |a_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - a_m| < \frac{1}{n} + \varepsilon_x + \frac{1}{m} = \varepsilon, \end{aligned}$$

tedy a konverguje.

Jistě platí $\lim x - a = 0$, neboť pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \varepsilon$. Odtud plyne, že x má limitu právě tehdy, když a má limitu. Ovšem, podle lemmatu 3.2.12 má a limitu $[(a)] \in \mathbb{R}$. Tím je důkaz hotov. ■

Důsledek 3.2.14

Platí

$$\mathbb{R} \cong \{\lim a \mid a \in C(\mathbb{Q})\},$$

čili reálná čísla jsou přesně limity všech konvergentních racionálních posloupností.

Důkaz. Zkonstruujeme bijekci $f : \mathbb{R} \to \{\lim a \mid a \in C(\mathbb{Q})\}$. Vezměme $x \in \mathbb{R}$. Pak z definice existuje konvergentní racionální posloupnost $a \in C(\mathbb{Q})$ taková, že $x = [a]$. Podle lemmatu 3.2.12 má a limitu v $\mathbb{R}$. Definujme tedy $f(x) \coloneqq \lim a$.

Ověříme, že je f dobře definované, prosté a na.

Nejprve musíme ukázat, že $f(x)$ nezávisí na volbě konkrétní posloupnosti a z třídy ekvivalence $[a]$. Ať tedy $b \simeq a$ a označme $L_a \coloneqq \lim a$, $L_b \coloneqq \lim b$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ platí tři nerovnosti:

$$|a_n - b_n| < \varepsilon, \quad |a_n - L_a| < \varepsilon, \quad |b_n - L_b| < \varepsilon.$$

Velmi obdobnou úpravou jako v důkaze důsledku 3.2.13 dostaneme, že

$$|L_a - L_b| \leq |L_a - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - L_b| < 3\varepsilon,$$

odkud $L_a = L_b$, neboť L_a, L_b jsou třídy ekvivalence konvergentních posloupností. Společně s faktem, že každá konvergentní posloupnost má přesně jednu limitu (cvičení 3.2.3), plyne z předchozí úvahy, že f je dobře definováno.

Dokážeme, že f je prosté. To je snadné, neboť pokud $[a] = [b]$, neboli $a \simeq b$, potom $\lim a = \lim b$, což jsme již vlastně dokázali v odstavci výše.

Nakonec zbývá ověřit, že f je na. Ať tedy $L \coloneqq \lim a$ pro nějakou $a \in C(\mathbb{Q})$. Potom ovšem $[(a)] \in \mathbb{R}$ a podle lemmatu 3.2.12 platí $\lim a = [(a)]$. To ovšem přesně znamená, že $f([(a)]) = L$.

Tím je důkaz hotov. ■

3.3 Poznatky o limitách posloupností

Účelem této sekce je shrnout základní poznatky o limitách posloupností, jež umožní čtenářům limity konkrétních posloupností efektivně počítat a navíc široké jejich použití v následujících kapitolách.

Začneme technickým, ale nezbytným, konceptem *rozšířené reálné osy* a pokračovati budeme jedním z nejdůležitějších a dle našeho názoru též nejkrásnějších výsledků – tzv. Bolzanovou-Weierstraßovou větou. Ta tvrdí v podstatě toto: mám-li omezenou posloupnost, pak z ní již umím vybrat nekonečně mnoho prvků, které tvoří posloupnost *konvergentní.*

Ona krása takového tvrzení spočívá v principu, kterým se podrobně zabývá kombinatorická disciplína zvaná Ramseyho teorie; v principu, že v téměř libovolně chaotické struktuře lze nalézt řád, jakmile jest tato dostatečně velká. Nejedná se jistě o čistě matematický princip, nýbrž dost možná o princip vzniku vesmíru a života, popsaný již starým Aristotelem ve výmluvném výroku, „Celek je více než součet svých částí.“ V mnoha zpytech se tomuto jevu přezdívá Emergent Behavior a představuje stav, kdy chování systému nelze plně popsat pouze studiem jeho jednotlivých prvků.

Pro důkaz Bolzanovy-Weierstraßovy věty potřebujeme jedné pomocné konstrukce, tzv. *systému vnořených intervalů*. Nejprve si však pořádně definujeme samotný pojem *intervalu*. K tomu se nám bude hodit rozšířit množinu reálných čísel o prvky $-\infty$ a ∞.

3.3.1 Rozšířená reálná osa

Definice 3.3.1 (Rozšířená reálná osa)

Definujme množinu $\mathbb{R}^* \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, kde ∞, resp. $-\infty$, je z definice prvek takový, že $\infty \geq x$, resp. $-\infty \leq x$, pro každé $x \in \mathbb{R}$. Množině $\mathbb{R}^*$ budeme někdy říkat *rozšířená reálná osa*. Rozšíříme rovněž operace $+$ a $\cdot$ na prvky ∞ a $-\infty$ následovně.

$$\begin{aligned}
\infty + a = a + \infty &= \infty, && \text{pro } a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},\\
-\infty + a = a + (-\infty) &= -\infty, && \text{pro } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\\
\infty \cdot a = a \cdot \infty &= \infty, && \text{pro } a > 0 \text{ nebo } a = \infty,\\
\infty \cdot a = a \cdot \infty &= -\infty, && \text{pro } a < 0 \text{ nebo } a = -\infty,\\
-\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) &= -\infty, && \text{pro } a > 0 \text{ nebo } a = \infty,\\
-\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) &= \infty, && \text{pro } a < 0 \text{ nebo } a = -\infty,\\
a \cdot \infty^{-1} = a \cdot (-\infty)^{-1} &= 0, && \text{pro } a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Varování 3.3.2

Definice 3.3.1 stručně řečeno říká, že se s prvky ∞ a $-\infty$ zachází podobně jako s ostatními reálnými čísly. Ovšem, následující operace zůstávají nedefinovány.

$$\infty + (-\infty), -\infty + \infty, \pm\infty \cdot 0, 0 \cdot (\pm\infty), (\pm\infty) \cdot (\pm\infty)^{-1}.$$

Čtenáři možná zpozorovali, že jsme při své definici limity nerozlišili mezi posloupnostmi, které nemají limitu, protože jejich prvky „skáčou sem a tam“, a posloupnostmi, které ji nemají naopak pro to, že „stále klesají či stoupají“. Pro další studium záhodno se tohoto nedostatku zlišit.

Definice 3.3.3 (Limita v nekonečnu)

Ať $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je reálná posloupnost. Řekneme, že x má limitu ∞, resp. $-\infty$, když pro každé $K > 0, K \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $x_n > K$, resp. $x_n < -K$. Píšeme $\lim x = \infty$, resp. $\lim x = -\infty$.

Na reálných číslech existuje uspořádání $\leq$, které zdědila z čísel přirozených, prostřednictvím čísel celých a konečně čísel racionálních. Protože, vděkem naší konstrukci, jsou celá čísla třídy ekvivalence dvojic čísel přirozených, čísla racionální třídy ekvivalence dvojic čísel celých a čísla reálná limity konvergentních racionálních posloupností, bylo by vskutku obtížné a neproduktivní vypsat konkrétní množinovou definici tohoto uspořádání na reálných číslech. Přidržíme se pročež intuitivního pohledu na věc a důkaz, že $\leq$ je skutečně uspořádání na reálných číslech, necháváme laskavému čtenáři k promyšlení.

Existence uspořádání umožňuje dívat se na podmnožiny $\mathbb{R}$ z jistého „souvislého“ pohledu. Nemusejí již být vňaty (jako tomu je u ostatních představených číselných okruhů) jako výčty jednotlivých prvků, ale oprávněně jako „provázky“ či „úsečky“. Úplnost reálných čísel zaručuje, že z každého reálného čísla mohu plynule dorazit do každého jiného reálného čísla aniž reálná čísla opustím.

Předchozí odstavec vágně motivuje definici *intervalu* – „souvislé“ omezené podmnožiny reálných čísel. V souhlasu s definicí intervalu vzniká i pojem *otevřenosti* a *uzavřenosti* množiny – pojem, který je klíčem k definici *topologie* na obecné množině a tím pádem vlastně i základem tak zhruba poloviny celé moderní matematiky.

Směrem k definici intervalu učiňmež koliksi mezikroků.

Definice 3.3.4 (Maximum a minimum)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina. Řekneme, že prvek $M \in X$, resp. $m \in X$, je *maximem*, resp. *minimem*, množiny X, když pro každé $x \in X$ platí $x \leq M$, resp. $x \geq m$. Píšeme $M = \max X$, resp. $m = \min X$.

Definice 3.3.5 (Horní a dolní závora)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina. Řekneme, že prvek $Z \in \mathbb{R}^*$ resp. $z \in \mathbb{R}^*$, je *horní*, resp. *dolní*, *závora* množiny X, když pro každé $x \in X$ platí $x \leq Z$, resp. $x \geq z$.

Má-li množina X horní, resp. dolní, závoru, **která leží v** $\mathbb{R}$ (tedy není rovna $\pm\infty$), říkáme, že je *shora*, resp. *zdola*, *omezená*. Je-li navíc X omezená shora i zdola, říkáme krátce, že je *omezená*.

Definice 3.3.6 (Supremum a infimum)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina. Řekneme, že prvek $S \in \mathbb{R}^*$, resp. $i \in \mathbb{R}^*$, je *supremum*, resp. *infimum*, množiny X, když je to její *nejmenší horní závora*, resp. *největší dolní závora*. Píšeme $S = \sup X$, resp. $i = \inf X$.

Vyjádřeno symbolicky, prvek $S \in \mathbb{R}$ je *supremem* množiny X, když $x \leq S$ pro všechna $x \in X$, a kdykoli $x \leq Z$ pro nějaký prvek $Z \in \mathbb{R}$ a všechna $x \in X$, pak $S \leq Z$. Prvek $i \in \mathbb{R}$ je *infimem* množiny X, když $x \geq i$ pro všechna $x \in X$, a kdykoli $x \geq z$ pro nějaký prvek $z \in \mathbb{R}$ a všechna $x \in X$, pak $i \geq z$.

Varování 3.3.7

Vřele radíme čtenářům, aby sobě bedlivě přečetli předchozí tři definice a uvědomili si – velmi zásadní, leč lehko přehlédnuté – jejich vzájemné rozdíly.

- Maximum a minimum množiny X je z definice **vždy prvkem této množiny**. Maximem množiny $\{1, 2, 3\}$ je prvek 3 a jeho minimem je prvek 1.
- Horní, resp. dolní, závora množiny X je **libovolné rozšířené reálné číslo** (tedy klidně

i $\pm\infty$), které je větší, resp. menší, než všechny prvky X. Horní závorou množiny $\{1,2,3\}$ je číslo 69, též ∞ a též číslo 3. Horní a dolní závora **může, ale nemusí**, být prvkem X.

- Supremum, resp. infimum, množiny X je **rozšířené reálné číslo**, které je větší, resp. menší, než všechny prvky X, ale **zároveň menší, resp. větší, než každá jeho horní, resp. dolní, závora**. Supremum a infimum **může, ale nemusí, ležet v množině** X. Touto vlastností se přesně rozlišují *uzavřené* a *otevřené* intervaly – interval je uzavřený, když jeho supremum v něm leží, kdežto otevřený, když nikoliževěk. Supremem množiny $\{1,2,3\}$ je číslo 3 a jeho infimem je číslo 1.

Daná podmnožina $X \subseteq \mathbb{R}$ **nemusí nutně mít maximum a minimum**, ale, a to si dokážeme, **má vždy supremum, resp. infimum**. Je-li navíc shora, resp. zdola, omezená, pak toto supremum, resp. infimum, leží v $\mathbb{R}$.

Cvičení 3.3.8

Určete z definice suprema a infima $\inf \emptyset$ a $\sup \emptyset$.

Cvičení 3.3.9

Dokažte, že $\sup X$ a $\inf X$ jsou určeny jednoznačně.

Axiomatická definice reálných čísel

Přestože jsme konstrukci reálných čísel úspěšně dokončili použitím konvergentních racionálních posloupností, stojí snad za zmínku i jejich axiomatická definice, která se obvykle uvádí v úvodních učebnicích matematické analýzy.

Překvapivě není v principu tak odlišná od jejich konstrukce, kromě jednoho konkrétního axiomu, jenž právě zaručuje úplnost; není z něj však vůbec na první, v zásadě ani na druhý, pohled vidno, že takovou vlastnost skutečně implikuje.

Definice 3.3.10 (Axiomatická definice reálných čísel)

Množina $\mathbb{R}$ se v zásadě definuje jako nekonečné uspořádané těleso s vlastností úplnosti. Tedy,

- existují prvky $0, 1 \in \mathbb{R}$ a operace $+, \cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s inverzy $-, ^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že
$$(\mathbb{R}, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1)$$
je nekonečné těleso;
- existuje uspořádání $\leq$ na $\mathbb{R}$, které je lineární (každé dva prvky lze spolu porovnat);
- (**axiom úplnosti**) každá shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Je to právě on poslední axiom v předchozí definici, jehož použití jsme se chtěli vyhnout, bo dohlédnout jeho hloubky je obtížné a neintuitivní.

Dokážeme si zde ovšem, že naše definice reálných čísel odpovídá jejich axiomatické. Otázky nekonečnosti, podmínek tělesa i uspořádání jsme již zodpověděli. Zbývá dokázat axiom úplnosti. Pro stručnost vyjádření se nám bude hodit následující definice.

Definice 3.3.11 (Monotónní posloupnost)

O posloupnosti $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ řekneme, že je

- *rostoucí*, když $x_{n+1} > x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *klesající*, když $x_{n+1} < x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *neklesající*, když $x_{n+1} \geq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *nerostoucí*, když $x_{n+1} \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ve všech těchto případech díme, že posloupnost x je *monotónní*.

Tvrzení 3.3.12 (Axiom úplnosti)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je shora omezená množina. Pak existuje $\sup X$.

Důkaz. Ježto naše pojetí úplnosti se překládá do znění, „Každá konvergentní posloupnost má limitu“, není snad nečekané, že se důkaz *axiomu úplnosti* o tuto vlastnost opírá.

Je-li X prázdná, pak má supremum podle cvičení 3.3.8. Ať je tedy X neprázdná a shora omezená a $Z \in \mathbb{R}$ je libovolná horní závora X. Protože X je neprázdná, existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že $q < x$ pro nějaké $x \in X$. Definujeme posloupnosti Z_n a q_n podle následujících pravidel.

- Položme $Z_0 \coloneqq Z$ a $q_0 \coloneqq q$.
- Uvažme číslo $p_n \coloneqq (Z_n + q_n)/2$.
- Je-li p_n horní závorou X, položme $Z_{n+1} \coloneqq p_n$ a $q_{n+1} \coloneqq q_n$.
- Není-li p_n horní závorou X, položme $Z_{n+1} \coloneqq Z_n$ a $q_{n+1} \coloneqq p_n$.

Pak jsou posloupnosti Z_n a q_n konvergentní (**proč?**) a indukcí lze snadno dokázat (**dokažte!**), že q_n **není** horní závorou X a Z_n **je** horní závorou X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Navíc platí $\lim |Z_n - q_n| = 0$ (**proč?**), a tedy $\lim Z_n = \lim q_n$.

Označme $S \coloneqq \lim Z_n = \lim q_n$. Dokážeme, že $S = \sup X$. Je třeba ukázat, že

(1) S je horní závorou X;

(2) S je nejmenší horní závorou.

Předpokládejme pro spor, že existuje $x \in X$ takové, že $x > S$. To znamená, že existuje konstanta $c > 0$ taková, že $x - S = c$. Volme $\varepsilon \coloneqq c/2$. Pro toto ε z definice limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|Z_n - \lim Z_n| = |Z_n - S| < \varepsilon$. Jelikož (Z_n) je nerostoucí a $S \leq Z_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je absolutní hodnota v předchozím výrazu zbytečná a můžeme zkrátka psát $Z_n - S < \varepsilon$. Potom ale pro všechna $n \geq n_0$ máme

$$x - Z_n = x + S - S - Z_n = (x - S) + (S - Z_n) > c - \varepsilon = \frac{c}{2},$$

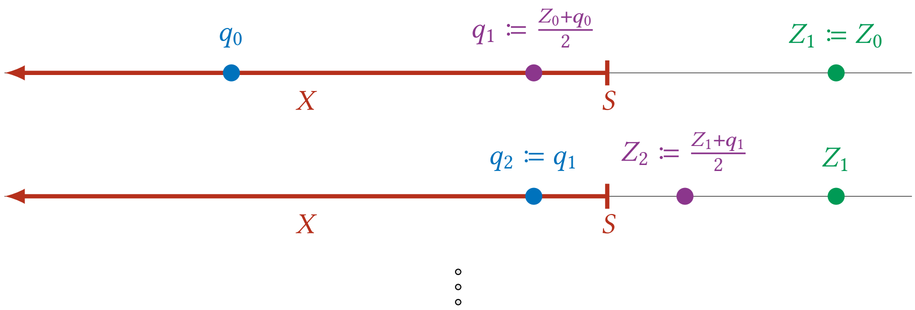
čili speciálně $x > Z_n$, což je ve sporu s tím, že Z_n je horní závora X. To dokazuje (1).

Tvrzení (2) lze dokázat obdobně, akorát využitím posloupnosti (q_n) spíše než (Z_n). Opět ať pro spor existuje $Z \in \mathbb{R}$, které je horní závorou X, a $Z < S$. Pak nalezneme konstantu $c > 0$ takovou, že $S - Z = c$. Opět z definice limity vezmeme $\varepsilon \coloneqq c/2$ a k němu $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ platí $S - q_n < \varepsilon$, kde absolutní hodnotu jsme mohli vynechat, ježto jest posloupnost (q_n) neklesající a $S \geq q_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nyní pro $n \geq n_0$ platí

$$q_n - Z = q_n - S + S - Z = (q_n - S) + (S - Z) > c - \varepsilon = \frac{c}{2},$$

čili speciálně $q_n > Z$, což je ve sporu s tím, že q_n není horní závora X pro žádné $n \in \mathbb{N}$, zatímco Z je.

Tím je důkaz dokončen. ■



Obrázek 3.4: Důkaz axiomu úplnosti

Cvičení 3.3.13

Dokažte všechna (**proč?**) a (**dokažte!**) v důkazu předchozího tvrzení.

Jako každé poctivé tvrzení, jmá i axiom úplnosti svých důsledkův. Tyto bychom pochopitelně dokázati uměli i bez něj, neboť axiom úplnosti z naší konstrukce reálných čísel přímo plyne. Nicméně, zcela jistě jej lze použít jako nástroj ke zkrácení některých důkazů.

Nejprve duální tvrzení.

Tvrzení 3.3.14

Každá zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.

Důkaz. Cvičení. Doporučujeme čtenářům se zamyslet, jak tvrzení snadno plyne z axiomu úplnosti, aniž opakují konstrukci z jeho důkazu. ■

Jedno, jak bude časem vidno, mimořádně užitečné tvrzení dí, že shora omezené rostoucí či neklesající posloupnosti a zdola omezené klesající či nerostoucí posloupnosti mají vždy limitu. To je opět intuitivně zřejmý fakt (jistě?), ale, kterak čtenáři doufáme již pozřeli, tvrzení o věcech nekonečných řídce radno nechati pouze intuici.

Lemma 3.3.15 (Limita monotónní posloupnosti)

(a) Každá rostoucí nebo neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.

(b) Každá klesající nebo nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.

Důkaz. Dokážeme pouze část (a), část (b) je ponechána jako cvičení.

Ať $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je neklesající posloupnost. Důkaz pro rostoucí posloupnost je téměř dokonale stejný, liše se akorát ostrými nerovnostmi v několika výrazech. Z předpokladu je x shora omezená, tudíž má množina jejích členů $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ horní závoru. Z axiomu úplnosti má tato množina též supremum; označíme je S.

Ukážeme, že $\lim x = S$. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Z definice suprema není $S - \varepsilon$ horní závora množiny $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_{n_0} > S - \varepsilon$. Protože x je neklesající – tj. $x_n \geq x_{n_0}$, kdykoli $n \geq n_0$ – platí rovněž $x_n > S - \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$. Jelikož S je horní závora množiny členů x, platí $S \geq x_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To však znamená, že $|x_n - S| = S - x_n$, a tedy z nerovnosti $x_n > S - \varepsilon$ po úpravě plyne, že $\varepsilon > S - x_n = |x_n - S|$, čili $\lim x = S$. ∎

Posledním důsledkem axiomu úplnosti, který si uvedeme, je tzv. *Archimédova vlastnost reálných čísel*. Obecně, těleso se nazývá *Archimédovo*, když vágně řečeno neobsahuje žádné nekonečně velké ani nekonečně malé prvky **vzhledem ke zvolené absolutní hodnotě**. Ukazuje se, že na reálných číslech lze definovat jen dva typy funkcí absolutní hodnoty – jednu „obvyklou", též vyjádřitelnou vztahem $|x| = \sqrt{x^2}$, a pak tzv. p-adickou absolutní hodnotu pro p prvočíslo. Libovolná další konstrukce absolutní hodnoty (majíc přirozené vlastnosti) již je ekvivalentní absolutní hodnotě jednoho z těchto typů. Reálná čísla jsou Archimédova vzhledem k obvyklé absolutní hodnotě, ale nikoliv vzhledem k libovolné p-adické absolutní hodnotě.

Lemma 3.3.16 (Archimédova vlastnost reálných čísel)

Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \varepsilon$.

Důkaz. Stačí dokázat, že

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0,$$

neboť potom z definice infima pro každé $\varepsilon > 0$ není $0 + \varepsilon = \varepsilon$ dolní závorou $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, čili existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \varepsilon$.

Číslo 0 je zřejmě dolní závorou množiny $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Podle tvrzení 3.3.14 má tato množina infimum, označme je i. Pro spor ať $i > 0$. Potom $1/i \in \mathbb{R}$ a z nerovnosti $1/n \geq i$ (i je dolní závora) plyne, že $n \leq 1/i$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom je ovšem číslo $1/i$ horní závorou množiny $\mathbb{N}$ a podle axiomu úplnosti má množina $\mathbb{N}$ supremum; označme je S. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tudíž platí $n \leq S$. Ovšem, z definice přirozených čísel platí $n + 1 \in \mathbb{N}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Speciálně toto tedy znamená, že $n + 1 \leq S$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak je ovšem $S - 1$ horní závorou množiny $\mathbb{N}$, což je spor, neboť S bylo z předpokladu supremum $\mathbb{N}$.

Musí pročež platit $i = 0$, což bylo dokázati. ∎

Poznámka 3.3.17

Lemma 3.3.16 v podstatě říká, že $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Bedliví čtenáři si mohou pamatovat, že jsme ono lemma již v předchozím textu bez uvedení použili (například v důkaze důsledku 3.2.13). Jedná se však z naší strany o drzost pouze malou. Totiž, jeho platnost je téměř okamžitým důsledkem tvrzení 3.2.11, jak si čtenáři rádi ověří v následujícím cvičení.

Cvičení 3.3.18

Dokažte, že lemma 3.3.16 je důsledkem tvrzení 3.2.11.

3.3.2 Bolzanova-Weierstraßova věta

Konečně kráčíme cestou definice intervalu a důkazu slibované Bolzanovy-Weierstraßovy věty. Vybaveni pojmy maxima (minima) a suprema (infima), můžeme intuitivní představě intervalu dát formální ráz. Vágně řečeno je interval *souvislá* podmnožina $\mathbb{R}$. Formálně je no … vlastně totéž.

Definice 3.3.19 (Interval)

Podmnožinu $I \subseteq \mathbb{R}$ nazveme *intervalem*, pokud pro každé dva prvky $x < y \in I$ a $z \in \mathbb{R}$ platí

$$x < z < y \Rightarrow z \in I.$$

Intervaly mohou být otevřené, uzavřené a polouzavřené (či polootevřené?). Tyto vlastnosti intervalů jsou definovány pomocí existence maxim a minim.

Definice 3.3.20 (Typy intervalů)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že I je

- *otevřený*, když **nemá** maximum ani minimum;
- *uzavřený*, když **má** maximum i minimum;
- *shora uzavřený*, když má pouze maximum, ale nikoli minimum;
- *zdola uzavřený*, když má pouze minimum, ale nikoli maximum.

Otevřený interval I zapisujeme jako $I = (a, b)$, kde $a = \inf I$ a $b = \sup I$. Čísla a, b mohou být i $\pm\infty$, pokud I není shora či zdola omezený.

Uzavřený interval I zapisujeme jako $I = [a, b]$, kde $a = \min I$ a $b = \max I$. **Pozor!** Zde prvky a i b jsou striktně reálná čísla, tedy například $[0, \infty]$ **není** interval, neboť se nejedná o podmnožinu $\mathbb{R}$.

Definice 3.3.21 (Délka intervalu)

Délkou intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ s $a \coloneqq \inf I$ a $b \coloneqq \sup I$ myslíme číslo $\lambda(I) \coloneqq b - a$, je-li toto definováno.

Poznámka 3.3.22

Čtenáře snad mohlo zarazit značení $\lambda(I)$ pro délku intervalu, oproti zvyku podlehnuvšímu $|I|$. Písmeno λ zde není spojeno s angl. slovem **l**ength, jak by se snad mohlo prve zdát, nýbrž pochází ze jména **L**ebesgue. Totiž, *délka* intervalu je jeho *objemem* či *velikostí* vzhledem k tzv. Lebesgueově míře – mnohem obecnější konstrukci umožňující měřit velikosti všemožných podmnožin reálných čísel.

Příklad 3.3.23 (Pár intervalů)

Množina

- $I = (4, 6)$ je otevřený interval. Zřejmě platí $4 = \inf I$ a $6 = \sup I$. Ovšem, I nemá maximum ani minimum.
- $I = [-5, 4]$ je uzavřený interval. Zřejmě platí $-5 = \min I = \inf I$ a $4 = \max I = \sup I$.
- $I = [-2, \infty)$ je zdola uzavřený interval. Platí $-2 = \min I = \inf I$ a $\infty = \sup I$.
- $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ je otevřený interval. Platí $-\infty = \inf \mathbb{R}$ a $\infty = \sup \mathbb{R}$.
- $I = (4, 4)$ je prázdná, neboť je to z definice množina čísel $x \in \mathbb{R}$ takových, že $4 < x < 4$.
- $I = [\exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4}))), \exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4})))]$ je rovna $\{\exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4})))\}$, neboť je to z definice množina čísel $x \in \mathbb{R}$ takových, že

$$\exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4}))) \leq x \leq \exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4}))).$$

K pojmu intervalu se váže jedna speciální konstrukce zvaná *systém vnořených intervalů*. Definujeme si ji a ihned poté si povíme, čím je speciální.

Definice 3.3.24 (Systém vnořených intervalů)

Systém vnořených intervalů je posloupnost $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ podmnožin $\mathbb{R}$ (čili zobrazení $\mathbb{N} \to 2^{\mathbb{R}}$) splňující následující podmínky:

- I_n je **uzavřený** interval pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- $I_{n+1} \subseteq I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- $\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$.

Následující tvrzení je dalším ekvivalentem axiomu úplnosti a důsledku 3.2.13. V některých definicích reálných čísel se jím axiom úplnosti nahrazuje.

Tvrzení 3.3.25 (O vnořených intervalech)

Ať $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ je systém vnořených intervalů. Pak $\#(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n) = 1$, čili v průniku všech intervalů I_n leží přesně jeden prvek.

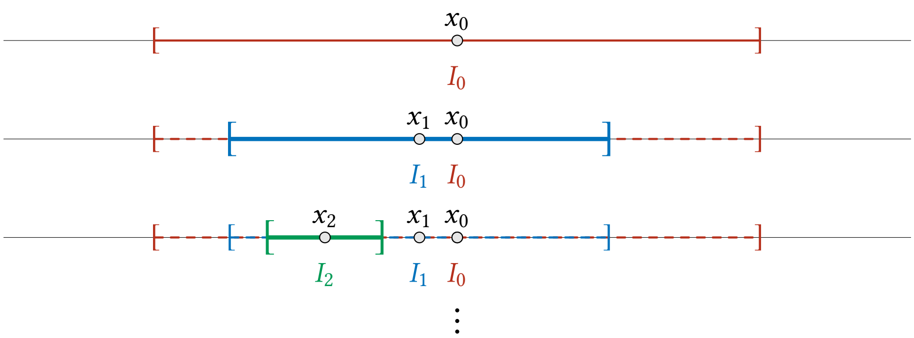
Důkaz. Je třeba dokázat, že takový prvek existuje a že je právě jeden. Začněme jednoznačností.

Předpokládejme, že existují prvky $x, y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ a $x \neq y$. Pak ale existuje konstanta $c > 0$ taková, že $|x - y| = c$. Protože však $x, y \in I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, speciálně platí $\lambda(I_n) \geq c$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je spor s tím, že $\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$.

Dokážeme existenci. Označme $I_n = [a_n, b_n]$. Definujme posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x_n \coloneqq (a_n + b_n)/2$. Na volbě čísla $(a_n + b_n)/2$ není nic speciálního. Stačí volit jakékoliv $x_n \in I_n$. Ukážeme, že x konverguje. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$, nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda(I_{n_0}) < \varepsilon$. Potom ale platí $|x_n - x_m| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq n_0$, neboť $x_n, x_m \in I_{n_0}$, což je zaručeno podmínkou $I_n, I_m \subseteq I_{n_0}$.

Podle důsledku 3.2.13 má x limitu, označme ji L. Chceme ukázat, že $L \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$. K tomu je třeba ověřit, že $L \in I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ať pro spor existuje $n_L \in \mathbb{N}$ takové, že $L \notin I_{n_L}$. Protože intervaly jsou vnořené, znamená toto, že $L \notin I_n$ pro $n \geq n_L$. Volme libovolné $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_I \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda(I_n) < \varepsilon$ pro $n \geq n_I$. Ať $n_0 \coloneqq \max(n_L, n_I)$. Pak na jednu stranu pro $n \geq n_0$ platí $\lambda(I_n) < \varepsilon$ a na druhou stranu $L \notin I_n$. Sloučením obou vztahů dostaneme $|x_n - L| \geq \varepsilon/2$ pro $n \geq n_0$, neboť x_n leží v polovině intervalu I_n a L mimo něj pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je spor s tím, že $\lim x = L$.

Důkaz je hotov. ■



Obrázek 3.5: Důkaz tvrzení 3.3.25.

Definice 3.3.26 (Podposloupnost)

Řekneme, že $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je *podposloupností* posloupnosti $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, když pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $m \in \mathbb{N}$ takové, že $y_n = x_m$. Jinak řečeno, každý prvek y je rovněž prvkem x.

Již máme všechny ingredience k formulaci a důkazu Bolzanovy-Weierstraßovy věty. Je stěžejním tvrzením pro matematickou analýzu a pro matematiku obecně. Jeho filosofický význam dlí v poznání, že v „příliš velkých“ strukturách přirozeně vzniká řád.

Věta 3.3.27 (Bolzanova-Weierstraßova)

*Ať $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je **omezená** posloupnost. Pak existuje podposloupnost y posloupnosti x, která konverguje.*

Důkaz. Z omezenosti x existují $s, S \in \mathbb{R}$ taková, že $s \leq x_n \leq S$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Induktivně vyrobíme systém vnořených intervalů. Položme $I_0 \coloneqq [s, S]$. Za předpokladu, že $I_n = [a_n, b_n]$

je dán, sestrojíme I_{n+1} následovně:

$$I_{n+1} \coloneqq \begin{cases} [a_n, (a_n + b_n)/2], & \text{pokud } x_k \in [a_n, (a_n + b_n)/2] \text{ pro nekonečně mnoho } k \in \mathbb{N}, \\ [(a_n + b_n)/2, b_n], & \text{jinak.} \end{cases} \tag{3.2}$$

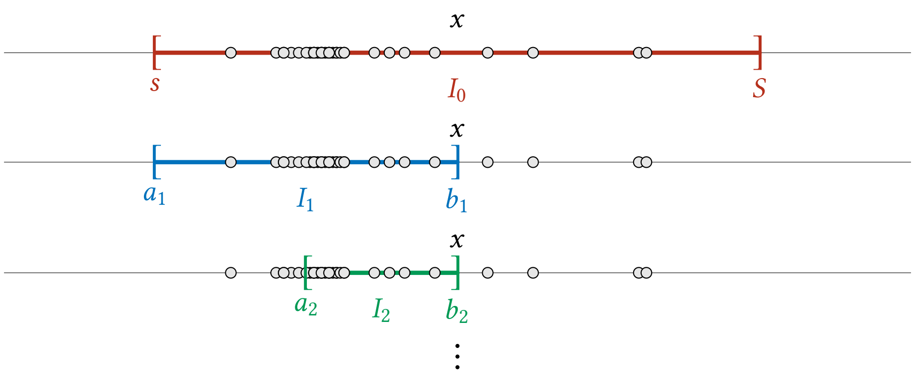
Rozmyslíme si lehce neformálním použitím matematické indukce, že tato konstrukce je korektní. První interval I_0 jistě obsahuje nekonečně mnoho prvků x, neboť obsahuje celou tuto posloupnost. Podobně, pokud I_n obsahuje nekonečně mnoho prvků x, pak aspoň jedna z jeho polovin musí rovněž obsahovat nekonečně mnoho prvků x. Z konstrukce (3.2) pak plyne, že rovněž I_{n+1} obsahuje nekonečně mnoho prvků x.

Ověříme, že $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ je systém vnořených intervalů podle definice 3.3.24.

- Zcela jistě je I_n uzavřený interval pro každé $n \in \mathbb{N}$.
- Rovněž zcela jistě $I_{n+1} \subseteq I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, neboť I_{n+1} je jedna z polovin intervalu I_n.
- Délky intervalů I_n klesají k 0, neboť $\lambda(I_{n+1}) = \lambda(I_n)/2$, a tedy $\lambda(I_n) = \lambda(I_0)/2^n$. Zřejmě

$$\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda(I_0)}{2^n} = 0.$$

Vyberme nyní z x libovolnou podposloupnost $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takovou, že $y_n \in I_n$. To jistě lze, neboť každý z intervalů I_n obsahuje nekonečně mnoho prvků posloupnosti x. Pak ovšem podle tvrzení 3.3.25 existuje prvek $L \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ a podle důkazu téhož tvrzení platí $\lim y = L$. To však znamená, se znalostí lemmatu 3.2.7, že y konverguje. ■



Obrázek 3.6: Důkaz Bolzanovy-Weierstraßovy věty.

3.4 Metody výpočtů limit

Tato sekce je veskrze výpočetní, věnována způsobům určování limit rozličných posloupností – primárně těch zadaných vzorcem pro n-tý člen. Obecně neexistuje algoritmus pro výpočet limity posloupnosti a například limity posloupností zadaných rekurentně (další člen je vypočten jako kombinace předchozích) je často obtížné určit. K jejich výpočtu bývá užito metod z lineární algebry a obecně metod teorie diskrétních systémů zcela mimo rozsah tohoto textu.

Přinejmenším v případě limit zadaných „hezkými“ vzorci čítajícími podíly mnohočlenů a odmocnin je obyčejně možné algebraickými úpravami dojít k výsledku. Uvedeme si pár stěžejních tvrzení sloužících tomuto účelu.

K důkazu prvního bude užitečná následující nerovnost, kterou přenecháváme čtenáři jako (snadné) cvičení.

Cvičení 3.4.1

Dokažte, že pro čísla $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

Věta 3.4.2 (Aritmetika limit)

Ať $a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou reálné posloupnosti mající limitu (ale klidně i nekonečnou). Pak

(a) $\lim(a + b) = \lim a + \lim b$*, je-li pravá strana definována;*

(b) $\lim(a \cdot b) = \lim a \cdot \lim b$*, je-li pravá strana definována;*

(c) $\lim(a/b) = \lim a/\lim b$*, platí-li $b \neq 0$ a pravá strana je definována.*

Důkaz. Důkaz této věty je ryze výpočetního charakteru a využívá vhodně zvolených odhadů. Vzhledem k tomu, že povolujeme i nekonečné limity, je třeba důkaz každého bodu rozložit na případy. Položme $A \coloneqq \lim a$, $B \coloneqq \lim b$.

***Případ** $A, B \in \mathbb{R}$.*
Nejprve budeme předpokládat, že $A, B \in \mathbb{R}$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existují $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \geq n_a$ platí $|a_n - A| < \varepsilon$ a pro každé $n \geq n_b$ zas $|b_n - B| < \varepsilon$. Zvolíme-li $n_0 \coloneqq \max(n_a, n_b)$, pak pro $n \geq n_0$ platí oba odhady zároveň. Potom ale, použitím trojúhelníkové nerovnosti, dostaneme

$$|(a_n + b_n) - (A + B)| = |(a_n - A) + (b_n - B)| \leq |a_n - A| + |b_n - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

čili $\lim(a+b) = A+B$. Pro důkaz vzorce pro součin a podíl, musíme navíc využít lemmatu 3.2.10, tedy faktu, že konvergentní posloupnosti jsou omezené. Pročež najdeme $C_b \in \mathbb{R}$ takové, že od určitého indexu $n_1 \in \mathbb{N}$ dále platí $|b_n| \leq C_b$. Volme nově $n_0 \coloneqq \max(n_a, n_b, n_1)$ a pro $n \geq n_0$ počítejme

$$\begin{aligned}
|a_n \cdot b_n - A \cdot B| &= |a_n \cdot b_n - b_n \cdot A + b_n \cdot A - A \cdot B| = |b_n(a_n - A) + A(b_n - B)| \\
&\leq |b_n(a_n - A)| + |A(b_n - B)| = |b_n| \cdot |a_n - A| + |A| \cdot |b_n - B| \\
&< |C_b| \cdot \varepsilon + |A| \cdot \varepsilon = (|C_b| + |A|) \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Protože $|C_b|+|A|$ je kladná konstanta nezávislá na ε, dokazuje odhad výše, že $\lim(a \cdot b) = A \cdot B$. Konečně, v případě podílu volme $\varepsilon_b = |B|/2$. K tomuto ε_b nalezněme $n'_b \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n'_b$ platí $|b_n - B| < \varepsilon_b$. Poslední nerovnost spolu s cvičením 3.4.1 znamená, že $||b_n| - |B|| < \varepsilon$. Tento vztah si rozepíšeme na

$$|B| - \varepsilon_b < |b_n| < |B| + \varepsilon_b.$$

Levá z těchto nerovností je pak ekvivalentní $|b_n| > |B|/2$ neboli $1/|b_n| < 2/|B|$. Položme

$n_0 \coloneqq \max(n_a, n_b, n'_b)$. Potom pro $n \geq n_0$ máme

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \frac{A}{B}\right| = \left|\frac{a_n B - b_n A}{b_n B}\right| = \left|\frac{a_n B - AB + AB - b_n A}{b_n B}\right| \leq \left|\frac{B(a_n - A)}{b_n B}\right| + \left|\frac{A(B - b_n)}{b_n B}\right|$$
$$= \frac{1}{|b_n|}\left(|a_n - A| + \frac{|A|}{|B|}|B - b_n|\right) < \frac{2\varepsilon}{|B|}\left(1 + \frac{|A|}{|B|}\right).$$

Protože $|A|$ i $|B|$ jsou konstanty nezávislé na ε, toto znamená, že $\lim(a/b) = A/B$.

Případ $A = \pm\infty, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$**.**
Předpokládejme, že $\lim a = \infty$; případ $\lim a = -\infty$ se dokáže v zásadě identicky. Pak pro dané ε_a existuje $n_a \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_a$ platí $a_n > \varepsilon_a$. Podle lemmatu 3.2.10 je posloupnost b omezená, čili existuje $C_b > 0$ takové, že $|b_n| \leq C_b$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom pro $n \geq n_a$ máme

$$a_n + b_n \geq a_n - C_b > \varepsilon_a - C_b.$$

Jelikož C_b je konstantní, plyne z tohoto odhadu, že $\lim(a + b) = \infty = A + B$.

Pro důkaz součinu nejprve ať $B > 0$. Pak existuje konstanta $C_b > 0$ a $n_b \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_b$ je $b_n \geq C_b$. Pročež, pro libovolné $C_a > 0$ a $n \geq \max(n_a, n_b)$ dostaneme

$$a_n \cdot b_n \geq \varepsilon_a \cdot C_b.$$

čili $\lim(a \cdot b) = \infty = A \cdot B$. Z omezenosti (plynoucí z konvergence) b pak zase existují n'_b a $K_b > 0$ takové, že $b_n \leq K_b$, čili též $1/b_n \geq 1/K_b$, pro $n \geq n'_b$. Pro $n \geq \max(n_a, n'_b)$ tedy

$$\frac{a_n}{b_n} \geq \frac{\varepsilon_a}{K_b},$$

což dokazuje $\lim(a/b) = \infty = A/B$. Velmi podobně se řeší případ $B < 0$.

Zdlouhavý důkaz zakončíme komentářem, že případ $A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, B = \pm\infty$ je symetrický předchozímu a případy $A = 0, B = \pm\infty$, též $A = \pm\infty, B = 0$ a konečně $A = \pm\infty, B = \pm\infty$ jsou triviální. ∎

Věta o aritmetice limit je zcela nejužitečnější tvrzení k jejich výpočtu, neboť umožňuje limitu výrazu rozdělit na mnoho menších „podlimit", jejichž výpočet je snadný. Další dvě lemmata jsou často též dobrými sluhy.

Lemma 3.4.3 (Limita odmocniny)

Ať $a : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ *je posloupnost* nezáporných *čísel. Ať též* $\lim a = A$ *(speciálně tedy předpokládáme, že* $\lim a$ *existuje). Potom*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[k]{a_n} = \sqrt[k]{A}$$

pro každé $k \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Zdlouhavý a technický. Ambiciózní čtenáři jsou zváni, aby se o něj pokusili. ∎

Lemma 3.4.4 (O dvou strážnících)

Ať $a, b, c : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ jsou posloupnosti reálných čísel a $L \coloneqq \lim a = \lim c$. Pokud existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n \leq c_n$, pak $\lim b = L$.

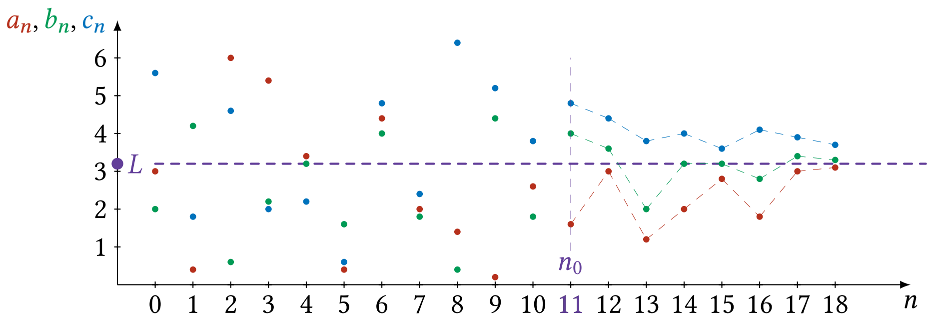
Důkaz. Protože $\lim a = L$ a též $\lim c = L$, nalezneme pro dané $\varepsilon > 0$ index $n_1 \in \mathbb{N}$ takový, že pro $n \geq n_1$ platí dva odhady:

$$|a_n - L| < \varepsilon \quad \text{a} \quad |c_n - L| < \varepsilon.$$

Potom ovšem $a_n > L - \varepsilon$ a $c_n < L + \varepsilon$. Z předpokladu existuje $n_b \in \mathbb{N}$ takové, že $a_n \leq b_n \leq c_n$ pro $n \geq n_b$. Zvolíme-li tedy $n_0 \coloneqq \max(n_1, n_b)$, pak pro $n \geq n_0$ platí

$$L - \varepsilon < a_n \leq b_n \leq c_n < L + \varepsilon.$$

Sloučením obou nerovností dostaneme pro $n \geq n_0$ odhad $|b_n - L| < \varepsilon$, čili $\lim b = L$. ■



Obrázek 3.7: Lemma o dvou strážnících.

Zbytek sekce je věnován výpočtům limit vybraných posloupností s účelem objasnit použití právě sepsaných tvrzení. Mnoho z nich je ponecháno čtenářům jako cvičení.

Úloha 3.4.5

Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}.$$

Řešení. Použijeme větu o aritmetice limit. Ta vyžaduje, aby výsledná strana rovnosti byla definována. Je tudíž možné (a žádoucí) limitu spočítat – často opakovaným použitím této věty – a teprve na konci výpočtu argumentovat, že její nasazení bylo oprávněné.

Dobrým prvním krokem při řešení limit zadaných zlomky je najít v čitateli i jmenovateli „nejrychleji rostoucí" člen. Spojením „nejrychleji rostoucí" zde míníme takový člen, velikost ostatních členů je pro velmi velká n vůči jehož zanedbatelná. V čitateli zlomku

$$\frac{2n^2 + n - 3}{n^3 - 1}$$

je nejrychleji rostoucí člen právě $2n^2$. Například, pro $n = 10^9$ je $2n^2 = 2 \cdot 10^{18}$ zatímco $n = 10^9$ zabírá méně než jednu miliardtinu $2n^2$. Ve jmenovateli je naopak jediným rostoucím členem n^3. Nejrychleji rostoucí členy (pro pohodlí bez koeficientů) z obou částí zlomku vytkneme.

Dostaneme
$$\frac{2n^2+n-3}{n^3-1} = \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}\right)}{n^3\left(1-\frac{1}{n^3}\right)} = \frac{1}{n}\cdot\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}}.$$
Část (b) věty o aritmetice limit nyní dává
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{n^3-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}}, \tag{$\triangle$}$$

za předpokladu, že součin na pravé straně je definován!

Již víme, že platí $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. **Pozor!** Bylo by lákavé prohlásit, že výsledná limita je rovna 0, bo součin čehokoliv s 0 je též 0. To je pravda pro všechna čísla až na $\pm\infty$. Musíme se ujistit, že druhá limita v součinu na pravé straně ($\triangle$) existuje a není nekonečná.

S použitím věty o aritmetice limit (c) počítáme
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} = \frac{\lim_{n\to\infty}2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n^3}}.$$
Limity v čitateli a jmenovateli zlomku výše spočteme zvlášť. Z věty o aritmetice limit, části (a), plyne, že
$$\lim_{n\to\infty}2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2} = \lim_{n\to\infty}2+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2} = 2+0-0=2.$$
Podle stejného tvrzení též
$$\lim_{n\to\infty}1-\frac{1}{n^3} = \lim_{n\to\infty}1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3} = 1-0=1.$$
To znamená, že
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} = \frac{2}{1}=2.$$
Odtud pak
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+n-3}{n^3-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} = 0\cdot 2 = 0.$$
Protože všechny výrazy na konci výpočtů jsou reálná čísla (a tedy speciálně jsou dobře definované), bylo lze použít větu o aritmetice limit. ♠

Poznámka 3.4.6

Právě vyřešená úloha 3.4.5 ukazuje, jak dlouhé se limitní úlohy stávají při pedantickém ověřování všech předpokladů. A to jsme navíc použili *jen jediné tvrzení* k jejímu výpočtu. Takový postup není, z pochopitelného důvodu, obvyklý. Opakovaná použití věty o aritmetice limit se často schovají pod jedno prohlášení a výpočet limity je pak mnohem stručnější. Názorně předvedeme.

Snadno úpravou zjistíme, že

$$\frac{2n^2+n-3}{n^3-1} = \frac{1}{n} \cdot \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}}.$$

Potom z věty o aritmetice limit platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+n-3}{n^3-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n}-\frac{3}{n^2}}{1-\frac{1}{n^3}} = 0 \cdot \frac{2+0+0}{1+0} = 0.$$

Protože výsledný výraz je definovaný, byla věta o aritmetice limit použita korektně.

My rovněž hodláme v dalším textu bez varování řešit podobné limitní příklady tímto „zkráceným“ způsobem.

Varování 3.4.7

Větou o aritmetice limit **nelze** dokazovat, že limita posloupnosti neexistuje, neboť předpokladem každé její části je *definovanost* výsledného výrazu. Zanedbání toho předpokladu může snadno vést ke lži. Uvažme následující triviální příklad.

Prohlásili-li bychom, že z věty o aritmetice limit platí výpočet

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} = \frac{\lim_{n\to\infty} n}{\lim_{n\to\infty} n} = \frac{\infty}{\infty},$$

nabyli bychom práva tvrdit, že $\lim_{n\to\infty} n/n$ neexistuje, přestože zřejmě platí $\lim_{n\to\infty} n/n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$. Věta o aritmetice limit je tudíž zcela prázdné tvrzení v případě nedefinovanosti výsledného výrazu.

Úloha 3.4.8

Spočtěte limitu

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}}.$$

Řešení. Z binomické věty platí

$$(n+m)^{100} = \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} n^{100-k} m^k.$$

Je tudíž snadno vidět, že členy n^{100} v se v čitateli i jmenovateli odečtou a „nejrychleji rostoucím“ členem v čitateli i jmenovateli stane sebe cn^{99} pro vhodné $c \in \mathbb{N}$. Konkrétně, v čitateli koeficient n^{99} vychází

$$\binom{100}{1} \cdot 4^1 - \binom{100}{1} \cdot 3^1 = 400 - 300 = 100$$

a ve jmenovateli zkrátka

$$\binom{100}{1} \cdot 2^1 = 200.$$

Užitím výpočtu v předešedším odstavci získáme úpravou původního výrazu

$$\frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}} = \frac{100n^{99} + \sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k}(4^k - 3^k)n^{100-k}}{200n^{99} + \sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k} 2^k n^{100-k}}.$$

Vytčení n^{99} z obou částí zlomku dá

$$\frac{100n^{99} + \sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k}(4^k - 3^k)n^{100-k}}{200n^{99} + \sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k} 2^k n^{100-k}} = \frac{n^{99}\left(100 + \sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k}(4^k - 3^k)n^{1-k}\right)}{n^{99}\left(200 + \sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k} 2^k n^{1-k}\right)}.$$

Položme

$$f(n) \coloneqq 100 + \sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k}(4^k - 3^k)n^{1-k},$$
$$g(n) \coloneqq 200 + \sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k} 2^k n^{1-k}.$$

Nahlédneme, že $\lim_{n\to\infty} f(n) = 100$. Vskutku, z věty o aritmetice limit, částí (a) a (b), platí

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} f(n) &= \lim_{n\to\infty} 100 + \sum_{k=2}^{100} \binom{100}{k}(4^k - 3^k)n^{1-k} = 100 + \sum_{k=2}^{100}(4^k - 3^k) \cdot \lim_{n\to\infty} n^{1-k} \\ &= 100 + \sum_{k=2}^{100}(4^k - 3^k) \cdot 0 = 100,\end{aligned}$$

kde $\lim_{n\to\infty} n^{1-k} = 0$ pro $k \geq 2$ zřejmě. Podobně bychom byli spočetli i $\lim_{n\to\infty} g(n) = 200$. Větou o aritmetice limit, částí (b) a (c), pak spočteme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+4)^{100}-(n+3)^{100}}{(n+2)^{100}-n^{100}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{99}}{n^{99}} \cdot \frac{\lim_{n\to\infty} f(n)}{\lim_{n\to\infty} g(n)} = 1 \cdot \frac{100}{200} = \frac{1}{2}.$$

Protože výsledkem je reálné číslo, byla věta o aritmetice limit použita legálně. ♠

Úloha 3.4.9

Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}.$$

Řešení. Zkusili-li bychom spočítat limitu přímo z věty o aritmetice limit a lemmatu 3.4.3, dostali bychom

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+n} - \lim_{n\to\infty} \sqrt{n^2+1} = \infty - \infty,$$

anžto výraz není definován. Je pročež třeba jej upravit. Využijeme vzorce

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$

Pro $a \coloneqq \sqrt{n^2+n}$ a $b \coloneqq \sqrt{n^2+1}$ dostaneme

$$(n^2+n) - (n^2+1) = \left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2+1}\right).$$

Zadaný výraz upravíme posléze na

$$\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}=\frac{(\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1})(\sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1})}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}=\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}.$$

Vidíme, že nejrychleji rostoucí člen v čitateli je n a ve jmenovateli $\sqrt{n^2}=n$. Jejich vytčením získáme

$$\frac{n-1}{\sqrt{n^2+n}+\sqrt{n^2+1}}=\frac{n}{n}\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}.$$

Byvše zaštítěni lemmatem 3.4.3, nabyli jsme práva tvrdit, že

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{n}}.$$

a podobně pro $\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+1/n^2}$. Nyní tedy z věty o aritmetice limit, částí (a) a (c), plyne, že

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}=\frac{1-0}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}}=\frac{1}{2}.$$

Výsledkem je reálné číslo, věta o aritmetice limit byla užita legálně. ♠

Úloha 3.4.10

Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^2+2^n+3^n}.$$

Varování 3.4.11

Pozor! Obecně

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}\neq\sqrt[n]{\lim_{n\to\infty}a_n}.$$

Taková rovnost by ani nedávala žádný smysl, protože ve výraze napravo je odmocnina **vně** limity, přestože závisí na n.

Lemma 3.4.3 předpokládá, že $k\in\mathbb{N}$ je **konstantní**, čili nezávisí na n.

Řešení (úlohy 3.4.10). Na první pohled není zřejmé, kterak výraz $\sqrt[n]{n^2+2^n+3^n}$ upravit, aby výpočet mohl pokročit, bo věta o aritmetice limit není v závěsu varování 3.4.11 přímo použitelná.

V případech, kdy člověk nevidí způsob, jak spočítat konkrétní zadanou limitu, jesti pleché uchýliti sebe k odhadům zezdola i seshora jinými posloupnosti se snadněji určitelnými limitami. Zvoleny-li ony posloupnosti, bychu měly stejnou limitu, závěr lemmatu 3.4.4 dává limitu i posloupnosti zadané.

K volbě vhodných posloupností je však dlužno prve „tipnout“ limitu zadaného výrazu. Jelikož 3^n je jistě nejrychleji rostoucí člen dané posloupnosti, a $\sqrt[n]{3^n}=3$, zdá se rozumným pokusit se nejprve odhadnout zadaný výraz zezdola i seshora posloupnostmi, jejichž limita je 3.

Dolní odhad je triviální a v zásadě jsme ho již uvedli. Totiž, jistě platí

$$3^n \leq n^2 + 2^n + 3^n,$$

a tedy i

$$\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n}.$$

Zřejmě $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = \lim_{n\to\infty} 3 = 3$.

Snad méně přímočarý jest horní odhad, jenž však plyne z uvědomění, že 3^n je nejrychleji rostoucí člen dané posloupnosti. Speciálně máme odhady $n^2 \leq 3^n$ i $2^n \leq 3^n$. Můžeme pročež pro všechna $n \in \mathbb{N}$ učinit další odhad:

$$n^2 + 2^n + 3^n \leq 3^n + 3^n + 3^n = 3 \cdot 3^n.$$

Z věty o aritmetice limit potom platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 \cdot 3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \cdot \sqrt[n]{3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} \cdot \lim_{n\to\infty} 3 = 1 \cdot 3 = 3.$$

Fakt, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$ je snadno dokazatelný a onen důkaz ponecháme čtenáři jako cvičení.

Jelikož pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\sqrt[n]{3^n} \leq \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} \leq \sqrt[n]{3 \cdot 3^n}$$

a již jsme spočetli, že $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3 \cdot 3^n} = 3$, můžeme prohlásit s použitím lemmatu 3.4.4, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2 + 2^n + 3^n} = 3.$$

♠

Cvičení 3.4.12

Dokažte, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Úplný závěr sekce věnujeme výpočtu jistých *speciálních* limit, které je výhodné znát, neboť v tradičních limitních úlohách vyvstávají často. V principu jde o limity zadané zlomky, u kterých není na první pohled zřejmé, zda roste rychleji čitatel, či jmenovatel.

Následující tvrzení spolu s větou o aritmetice limit říká v podstatě, že „Každá polynomiální funkce roste pomaleji než každá funkce exponenciální.“

Lemma 3.4.13

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0,$$

kdykoli $a > 1$ *a* $k \in \mathbb{N}$.

Důkaz. Dokážeme tvrzení nejprve pro $k = 1$.

Položme $b \coloneqq a - 1$. Potom z binomické věty

$$a^n = (1+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} b^i.$$

Speciálně tedy platí

$$(1+b)^n \geq \binom{n}{2} b^2 = \frac{n(n-1)}{2} b^2,$$

neboť součet výše obsahuje člen napravo a ještě mnoho dalších členů, z nichž všechny jsou kladné. Potom ale

$$\frac{n}{a^n} = \frac{n}{(1+b)^n} \leq \frac{2n}{b^2 n(n-1)} = \frac{2}{b^2(n-1)}.$$

Snadno vidíme, že platí $n/a^n \geq 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Máme tudíž oboustranný odhad

$$0 \leq \frac{n}{a^n} \leq \frac{2}{b^2(n-1)}.$$

Vzhledem k tomu, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2}{b^2(n-1)} = 0,$$

jest závěrem lemmatu 3.4.4, že $\lim_{n\to\infty} n/a^n = 0$.

V obecném případě $k \in \mathbb{N}$ stačí položit $b \coloneqq \sqrt[k]{a}$. Potom $b > 1$ (protože $a > 1$) a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{(\sqrt[k]{a})^n} \right)^k = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{b^n} \right)^k = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} \right)^k,$$

kde poslední rovnost platí z věty o aritmetice limit. Podle již dokázané části tvrzení je pravdou, žeť

$$\left(\lim_{n\to\infty} \frac{n}{b^n} \right)^k = 0^k = 0,$$

což bylo dokázati. ■

Lemma 3.4.14

Platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Důkaz. Rozložíme výraz následovně:

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{n}.$$

Pozorujeme, že pro $2 \leq k \leq n$ platí $k/n \leq 1$. Čili,

$$\frac{n!}{n^n} = \frac{1}{n} \cdot \prod_{k=2}^{n} \frac{k}{n} \leq \frac{1}{n} \cdot \prod_{k=2}^{n} 1 = \frac{1}{n}.$$

Dostáváme pro $n \in \mathbb{N}$ odhady

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n}.$$

Jelikož $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} 1/n = 0$, platí z lemmatu 3.4.4 závěr

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0,$$

jak jsme chtěli. ■

Lemma 3.4.15

Pro $a > 1$ platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

čili „faktoriál roste rychleji než exponenciála".

Důkaz. Nalezněme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $m > a$. Rozložíme

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^m}{m!} \cdot \prod_{k=m+1}^{n} \frac{a}{k}.$$

Všimněme sobě, že pro $k > m$ je $a/k < 1$, ježto m bylo zvoleno ostře větší než a. Speciálně tedy platí

$$\prod_{k=m+1}^{n} \frac{a}{k} = \frac{a}{n} \cdot \prod_{k=m+1}^{n-1} \frac{a}{k} \leq \frac{a}{n},$$

neboť

$$\prod_{k=m+1}^{n-1} \frac{a}{k} \leq \prod_{k=m+1}^{n-1} 1 = 1.$$

Položme $c_m \coloneqq a^m/m!$. Číslo c_m je konstantní (vzhledem k n), neboť m i a jsou. Můžeme odhadnout

$$0 \leq \frac{a^n}{n!} \leq \frac{a^m}{m!} \cdot \frac{a}{n} = c_m \cdot \frac{a}{n}.$$

Z věty o aritmetice limit platí

$$\lim_{n\to\infty} c_m \cdot \frac{a}{n} = ac_m \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Podle lemmatu 3.4.4 tudíž máme i

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0,$$

což zakončuje důkaz. ■

Několik limitních cvičení na závěr.

Cvičení 3.4.16

Dokažte, že

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Hint: Rozložte součin $n!$ na dvě poloviny a tu větší zespodu odhadněte vhodnou posloupností jdoucí k ∞.

Cvičení 3.4.17

Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4n^2 - n} - 2n.$$

Cvičení 3.4.18

Spočtěte

$$\lim_{n\to\infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

Cvičení 3.4.19 (těžké)

Spočtěte limitu posloupnosti $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zadané rekurentním vztahem

$$\begin{aligned} a_0 &\coloneqq 10, \\ a_{n+1} &\coloneqq 6 - \frac{5}{a_n} \text{ pro } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

3.5 Číselné řady

Speciální, a pro rozvoj diferenciálního kalkulu zcela nezanedbatelnou, čeledí posloupností jsou tzv. *číselné řady*. Intuitivně a téměř i formálně jsou číselné řady vlastně součty nekonečného počtu (reálných) čísel. Přechod od posloupnosti k číselné řadě je přímočarý – sestrojíme zkrátka součet všech prvků oné posloupnosti *zachovajíce jejich pořadí*. Jest ovšem dlužno dbáti skutku, žeť číselné řady jsou samy posloupnostmi. Totiž, limita posloupnosti, jejíž n-tý člen je právě součtem n prvních členů posloupnosti druhé, je rovněž přesně součtem číselné řady této druhé posloupnosti. Tímto způsobem se součty číselných řad definují, což umožňuje k jejich studiu využít dokázaných tvrzení o limitách posloupností z předchozích oddílů.

Definice 3.5.1 (Posloupnost částečných součtů)

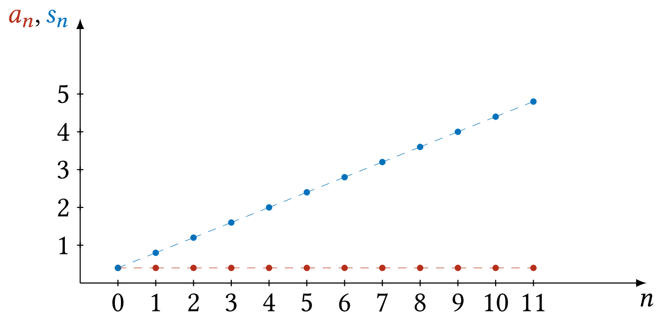
Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je posloupnost. *Posloupností částečných součtů* posloupnosti a nazveme posloupnost $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definovanou předpisem

$$s_n \coloneqq \sum_{i=0}^{n} a_i.$$

Příklad 3.5.2

Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupnost $0, 1, 2, 3, \ldots$ (tj. $a_n = n$), pak posloupnost jejích částečných součtů je $0, 0 + 1, 0 + 1 + 2, 0 + 1 + 2 + 3, \ldots$, neboli

$$s_n = \sum_{i=0}^{n} i.$$



Obrázek 3.8: Konstantní posloupnost a_n a její posloupnost částečných součtů s_n.

Definice 3.5.3 (Součet číselné řady)

Je-li $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, pak výraz $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nazýváme *číselnou řadou* posloupnosti a. Ať je dále $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ posloupností částečných součtů posloupnosti a. Existuje-li $\lim_{n\to\infty} s_n$ (ne nutně konečná), pak řkouce, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *má součet*, definujeme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \coloneqq \lim_{n\to\infty} s_n.$$

Slovně vyjádřeno, součtem číselné řady míníme limitu částečných součtů posloupnosti jejích členů.

Varování 3.5.4

Uvědomme sobě, že **součet číselné řady**, existuje-li, **závisí na všech jejích členech**. Obecně tedy dvě řady lišíce se pouze konečným počtem členů mají **různý** součet. Například platí (ale nedokážeme si to), že

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pak ale zřejmě

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - 1 = \frac{\pi^2}{6} - 1,$$

tedy ony dvě řady mají rozdílné součty.

Tato situace však **nenastává** u posloupností částečných součtů s_n, neboť n-tý člen takové posloupnosti je součtem prvních n členů sesterské číselné řady. Tudíž platí (jako u každé posloupnosti) $\lim_{n\to\infty} s_{n+k} = \lim_{n\to\infty} s_n$ pro libovolnou konstantu $k \in \mathbb{N}$.

Úloha 3.5.5

Spočtěte

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Řešení. Posloupnost odpovídající zadané řadě je $a_n = 1/n(n+1)$. Tudíž, posloupnost jejích částečných součtů je dána předpisem

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)}.$$

Naším úkolem je spočítat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n$. Za tímto účelem nalezneme „hezčí“ vyjádření posloupnosti s_n. Snadno ověříme, že platí

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}$$

pro každé $n \in \mathbb{N}$. Dále pak

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Odtud plyne, že

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1,$$

čili rovněž $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$. ♠

Úloha 3.5.6 (Geometrická řada)

*Dokažte, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, kde $q \in \mathbb{R}$, má **konečný** součet právě tehdy, když $|q| < 1$, a v tomto případě platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_n = \frac{1}{1-q}.$$

Řešení. Ukážeme nejprve, že pro libovolné $n \in \mathbb{N}$ a $q \neq 1$ platí

$$s_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

V případě, že $q = 1$, máme zřejmě $s_n = n+1$, neboť $1^k = 1$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$. Pro $q \neq 1$ potom

$$\begin{array}{rcccccccccccc} s_n & = & q^0 & + & q^1 & + & q^2 & + & \ldots & + & q^n & & \\ q \cdot s_n & = & & & q^1 & + & q^2 & + & \ldots & + & q^n & + & q^{n+1}, \end{array}$$

čili $s_n - q \cdot s_n = q^0 - q^{n+1} = 1 - q^{n+1}$, z čehož snadno spočteme, že

$$s_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Dále víme, že $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ pro $|q| < 1$ a pro $|q| > 1$ je tato limita nekonečná nebo neexistuje. Je-li $q = 1$, tak $\lim_{n\to\infty} q^n = 1$, a je-li $q = -1$, tak $\lim_{n\to\infty} q_n$ neexistuje.

Odtud a z věty o aritmetice limit,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{\lim_{n\to\infty} 1 - q^{n+1}}{\lim_{n\to\infty} 1 - q} = \frac{1}{1-q},$$

když $|q| < 1$. Pro $|q| \geq 1$ plyne z předchozí úvahy, že $\lim_{n\to\infty} s_n$ neexistuje nebo je nekonečná. Tím je součet zadané řady spočten. ♠

Nyní se jmeme odvodit několik základních tvrzení o existenci konečných součtů číselných řad, která plynou v podstatě okamžitě z jejich definice jako limit posloupností částečných součtů.

Asi není překvapivé, že aby součet řady mohl být konečný, musí posloupnost jejích členů mít limitu 0. Jinak bychom totiž sčítali nekonečně mnoho čísel s absolutní hodnotou větší než nějaká konstanta, čímž bychom určitě nedostali součet konečný.

Lemma 3.5.7 (Nutná podmínka existence součtu řady)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je číselná řada, která má konečný součet. Pak nutně $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. Označme s_n posloupnost částečných součtů a_n. Z předpokladu existuje $\lim_{n\to\infty} s_n$ a je konečná. Jelikož platí $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$, můžeme použitím věty o aritmetice limit počítat

$$\lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = 0.$$

Zde je důležité zpozorovat, že výraz $\lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1}$ jest z konečnosti $\lim_{n\to\infty} s_n$ vždy definován.

Snadno vidíme, že platí

$$s_n - s_{n-1} = \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_k = a_n.$$

Pak ovšem

$$0 = \lim_{n\to\infty} s_n - \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \lim_{n\to\infty} (s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} a_n,$$

kterak bylo dokázati. ■

Dalším přímo přenositelným pojmem z teorie limit posloupností je pojem *konvergence*. O číselné řadě řekneme, že *konverguje*, když se velikosti součtů členů mezi danými indexy neustále zmenšují. Formální definice následuje.

Definice 3.5.8 (Konvergence řady)

Díme, že číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *konverguje*, když

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall m > n \geq n_0 : \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

Jak by jeden snad čekal, konvergence a existence konečného součtu řady jsou víceméně záměnné.

Tvrzení 3.5.9 (Vztah konvergence a existence součtu)

Číselná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ má konečný součet právě tehdy, když konverguje.

Důkaz. Označme s_n posloupnost částečných součtů a_n. Pak to, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ má konečný součet, znamená, že s_n má konečnou limitu. Dále si všimněme, že

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k = s_m - s_n,$$

a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když posloupnost s_n konverguje. Tím jsme převedli původní tvrzení na to, že s_n má konečnou limitu právě tehdy, když s_n konverguje. Tuto ekvivalenci jsme dokázali v rámci sekce 3.2. ■

Předchozí tvrzení budeme v dalším textu používat zcela bez varování a bez explicitního odkazu, zaměňujíce ekvivalentní výroky „Řada konverguje." a „Řada má konečný součet."

Cvičení 3.5.10

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **divergentní** řada (tj. nemá žádný nebo konečný součet). Ať s_n je posloupnost částečných součtů posloupnosti a_n. Dokažte, že i řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/s_n$ je divergentní.

Ježto řady jsou též posloupnosti, lze je pochopitelně sčítat, násobit a dělit „člen po členu". Pro takto vzniklé řady platí podobná pravidla jako pro obecné posloupnosti. Pro pořádek si je uvedeme.

Tvrzení 3.5.11 (Aritmetika číselných řad)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou číselné řady.

(1) *Je-li $c \in \mathbb{R}$ a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje, pak $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$ konverguje a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

(2) *Konvergují-li $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, pak konverguje i $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$ a platí*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

(3) *Konvergují-li $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, pak konverguje i $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cdot b_n)$.*

Důkaz. Označme s_n, t_n posloupnosti částečných součtů $\sum_{n=0}^{\infty} a_n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n$, respektive. Body (1) a (2) plynou přímo z věty o aritmetice limit. Vskutku, v bodě (1) máme

$$c \cdot s_n = c \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \right) = \sum_{k=0}^{n} c \cdot a_k,$$

a tedy je cs_n posloupností částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} ca_n$. Pak tedy z věty o aritmetice limit

$$\sum_{n=0}^{\infty} ca_n = \lim_{n\to\infty} cs_n = c \lim_{n\to\infty} s_n = c \sum_{n=0}^{\infty} a_n.$$

Důkaz konvergence $c \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ za předpokladu konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ plyne přímo z toho, že když existuje $\lim_{n\to\infty} s_n$, pak existuje i $c \lim_{n\to\infty} s_n$.

V bodě (2) opět nahlédneme, že $s_n + t_n$ je posloupností částečných součtů $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)$. Pak tedy, opět z věty o aritmetice limit, dostaneme

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty}(s_n + t_n) = \lim_{n\to\infty} s_n + \lim_{n\to\infty} t_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n.$$

V bodě (3) nestačí použít větu o aritmetice limit, neboť $s_n \cdot t_n$ **není** posloupností částečných součtů řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n$. Zde použijeme lemma 3.5.7 a definici konvergence. Volme $\varepsilon \coloneqq 1$. K němu podle tohoto lemmatu existuje $n_1 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_1$ máme $|a_n| < 1$.

Ať je nyní libovolné $\varepsilon > 0$ dáno. Ježto $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergují, existují $n_a, n_b \in \mathbb{N}$ taková, že pro $m > n \geq n_a$ platí $|\sum_{k=n+1}^{m} a_k| < \varepsilon$ a pro $m > n \geq n_b$ platí $|\sum_{k=n+1}^{m} b_k| < \varepsilon$. Volme nyní $n_0 \coloneqq \max(n_1, n_a, n_b)$. Pak pro $m > n > n_0$ platí

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| \leq \left|\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| b_k\right| < \left|\sum_{k=n+1}^{m} b_k\right| < \varepsilon,$$

kde první nerovnost plyne z toho, že $a_k \leq |a_k|$ pro všechna $k \in \mathbb{N}$ a druhá z toho, že pro $k > n_1$ je $|a_k| < 1$. Tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ konverguje. ■

Varování 3.5.12

Bod (3) v předchozím tvrzení zaručuje pouze **existenci** konečného součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ za předpokladu existence konečného součtu řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, ale **netvrdí nic o jeho hodnotě**! Obecně na základě znalosti hodnot součtů obou řad nelze kromě konečnosti usoudit nic o hodnotě součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$. Zcela jistě neplatí, že by tato hodnota byla součinem součtů řad $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Uvažme například libovolnou geometrickou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ pro $|q| < 1$. Ta má podle úlohy 3.5.6 součet $\frac{1}{1-q}$. Pak tedy platí

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} q^n\right) = \left(\frac{1}{1-q}\right)^2.$$

Avšak, řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n \cdot q^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^{2n}$ je rovněž geometrická s kvocientem $q^2 < 1$, a tudíž její součet je

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{2n} = \frac{1}{1-q^2} \neq \left(\frac{1}{1-q}\right)^2.$$

3.5.1 Řady s nezápornými členy

V této sekci se budeme zabývat nejsnadněji zpytovaným typem číselných řad – řadami, jejichž členy jsou pouze nezáporná čísla. Jejich zpyt je vesměs jednoduchý z toho důvodu, že tyto řady vždycky mají součet, ať už konečný či nekonečný. Existence záporných členů v číselné řadě totiž vyžaduje, aby jeden analyzoval jemný vztah mezi její ‘kladnou’ a ‘zápornou’ částí a hodnotil, zda obě v jistém smyslu ‘rostou stejně rychle’, či nikolivěk.

Součty ani řad s nezápornými členy však není vůbec triviální určit a otázky jejich konvergence jsou obyčejně řešeny srovnáními s řadami, jejichž součty známy jsou. Nástrojem k tomu je následující vcelku přímočaré tvrzení.

Tvrzení 3.5.13 (Srovnávací kritérium)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou řady ***s nezápornými členy****. Ať dále existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí $a_n \leq b_n$. Potom,*

(a) konverguje-li $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$, konverguje i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$;

(b) je-li $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \infty$, pak i $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \infty$.

Důkaz. Položme $s_n \coloneqq \sum_{i=0}^{n} a_i$ a $t_n \coloneqq \sum_{i=0}^{n} b_i$. Z předpokladu máme $n_0 \in \mathbb{N}$, od kterého dále již platí $a_n \leq b_n$. Pro důkaz (a) předpokládejme rovněž, že $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje, tj. existuje konečná $\lim_{n\to\infty} t_n$.

Ukážeme nejprve, že s_n je shora omezená. Pro $n \geq n_0$ odhadujme

$$s_n = s_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n} a_i \leq s_{n_0} + \sum_{i=n_0+1}^{n} b_i \leq s_{n_0} + \sum_{i=0}^{n} b_i = s_{n_0} + t_m,$$

kde odhad $\sum_{i=n_0+1}^{n} b_i \leq \sum_{i=0}^{n} b_i$ platí díky nezápornosti členů b_n.

Nyní, opět pro nezápornost b_n, je posloupnost částečných součtů t_n neklesající. Pročež pro všechna $k \in \mathbb{N}$ máme $t_k \leq \lim_{n\to\infty} t_n$. To nám umožňuje pro $n \geq n_0$ dokončit odhad

$$s_n \leq s_{n_0} + t_n \leq s_{n_0} + \lim_{n\to\infty} t_n,$$

který ukazuje, že s_n je omezená. To ovšem zakončuje důkaz části (a), neboť s_n je shora omezená neklesající (pro nezápornost a_n) posloupnost, a tedy má podle lemmatu 3.3.15 limitu.

Část (b) je pouze přepisem části (a) v kontrapozitivní formě, která zní, že nekonveruje-li $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, pak nekonverguje ani $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$. Ovšem, divergentní řady s nezápornými členy mají součet ∞, odkud již přímo plyne závěr v (b). ■

Pochopitelně, srovnávací kritérium je užitečné pouze ve chvíli, kdy má jeden *s čím* srovnávat. Jmeme se odvodit divergenci jedné a konvergenci druhé z takřkouce „učebnicových“ řad.

Lemma 3.5.14 (Divergence harmonické řady)

Číselná řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverguje, neboli $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$.

Důkaz. Použijeme tvrzení 3.5.9 a dokážeme negaci výroku o konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$. Konkrétně výrok

$$\exists \varepsilon > 0\, \forall n_0 \in \mathbb{N}\, \exists m > n \geq n_0 : \left| \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{i} \right| \geq \varepsilon.$$

Ukážeme, že $\varepsilon = 1/2$ vyhovuje výroku výše. Ať je $n_0 \in \mathbb{N}$ dáno. Volme $n \coloneqq n_0$ a $m \coloneqq 2n_0$. Pak pro všechna $i \in \mathbb{N}, n_0 \leq i \leq 2n_0$ platí $1/i \geq 1/2n_0$. Součet výše můžeme pročež zezdola

odhadnout
$$\left|\sum_{i=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{i}\right| = \sum_{i=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{2n_0} = n_0 \cdot \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2},$$
kde první nerovnost plyne z faktu, že $1/n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro dané $n_0 \in \mathbb{N}$ tudíž platí
$$\left|\sum_{i=n_0+1}^{2n_0} \frac{1}{i}\right| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon,$$
a tedy řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ diverguje. Protože jsou však její členy nezáporné, znamená toto, že $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n = \infty$, což bylo jest dokázati. ∎

Poznámka 3.5.15

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ sluje *harmonická*, protože je úzce spojena s pojmem *alikvóty* a harmonie v hudbě. Vlnové délky alikvót daného tónu (vlastně „souznivých“ tónů) jsou $1/2, 1/3, 1/4$ atd. jeho základní frekvence. Každý člen harmonické řady je *harmonickým průměrem* svých sousedů, takže trojice členů v této řadě představuje vlnové délky tónů tvořících konsonantní akordy v tónině dané původním frekvencí (jejíž alikvóty jsou vyjádřeny členy řady). Vizte např. stránku na Wikipedii.

Lemma 3.5.16

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konverguje.

Důkaz. Srovnáme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ s řadou $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n(n+1)$ z úlohy 3.5.5, jejíž součet je roven 1. Protože obě řady mají nezáporné členy, lze použít srovnávací kritérium.

Indukcí dokážeme, že platí
$$\frac{2}{n(n+1)} \geq \frac{1}{n^2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$
Pro $n = 1$ máme
$$\frac{2}{1 \cdot (1+1)} = 1 \geq \frac{1}{1^2} = 1.$$
Předpokládejme, že daná rovnost platí pro $n \in \mathbb{N}$. Počítáme
$$\frac{2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{n+1} \cdot \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+2} \geq \frac{1}{(n+1)^2},$$
kde první nerovnost plyne z indukčního předpokladu (po vynásobení obou stran číslem $n \in \mathbb{N}$) a poslední nerovnost plyne ze zřejmého vztahu
$$n(n+2) = n^2 + 2n \leq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

Nyní, z aritmetiky řad platí
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 2$$

a již jsme dokázali, že $2/n(n+1) \geq 1/n^2$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Srovnávací kritérium nyní dává

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = 2,$$

čili je řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ konvergentní. ■

Na základě $\lim_{n\to\infty} a_n$ nelze obecně o konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ rozhodnout. Je-li limita nenulová, pak řada jistě diverguje, ale je-li nulová, může řada konvergovat i divergovat. Máme-li ovšem dvě řady, posloupnosti jejichž členů rostou v limitním smyslu „stejně rychle“, pak jsou i otázky jejich konvergencí ekvivalentní.

Věta 3.5.17 (Limitní srovnávací kritérium)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou řady s nezápornými členy a označme $L \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_n/b_n$.

*(a) Je-li $L \in (0,\infty)$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje **právě tehdy, když** konverguje $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.*

(b) Je-li $L = 0$, pak konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ implikuje konvergenci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

(c) Je-li $L = \infty$, pak konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ implikuje konvergenci $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Důkaz. Před samotným důkazem je dlužno nahlédnout, že nutně $L \in [0,\infty]$, neboť posloupnosti a_n i b_n mají pouze nezáporné členy, tedy hodnoty L rozlišené výše jsou vskutku jediné možné.

Započněme částí (a) a dokažme prve implikaci ($\Leftarrow$). Předpokládejme, že $L \in (0,\infty)$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konverguje. Volme $\varepsilon > 0$ libovolně. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - L\right| < \varepsilon.$$

První nerovnost lze přepsat na

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon,$$

čímž dostaneme horní odhad

$$a_n < b_n(L+\varepsilon)$$

pro všechna $n \geq n_0$. Z aritmetiky řad plyne, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(L+\varepsilon)$ je konvergentní (neboť $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ je konvergentní) a ze srovnávacího kritéria dostáváme (použitím odhadu výše), že i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

K důkazu implikace ($\Rightarrow$) je nám dán předpoklad $L \in (0,\infty)$ a konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$. Stejně jako v důkazu opačné implikace nalezneme ke zvolenému $\varepsilon > 0$ číslo $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon.$$

Číslo ε zde volíme menší než L, aby platilo $L - \varepsilon > 0$. Z dolního odhadu

$$L - \varepsilon < \frac{a_n}{b_n}$$

plyne úpravou

$$\frac{b_n}{a_n} < \frac{1}{L-\varepsilon},$$

čili

$$b_n < \frac{a_n}{L-\varepsilon}$$

pro $n \geq n_0$. Z aritmetiky řad opět platí, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n/(L-\varepsilon)$ konverguje a srovnávací kritérium skýtá kýženou konvergenci řady $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Dokážeme část (b). Ke zvolenému $\varepsilon > 0$ nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < \varepsilon.$$

Pak ale máme odhad

$$a_n < \varepsilon \cdot b_n$$

a konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ plyne z konvergence $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ zcela analogickým argumentem jako v důkazu části (a).

Důkaz části (c) je zcela obdobný důkazu části (b). ■

Sekci o řadách s nezápornými členy završíme uvedením tří užitečných kritérií pro zpyt konvergence takých řad, které o ní rozhodují přímo ze znalosti jejich členů nevyžadujíce srovnání s řadami jinými. Výsledkem bude mimo jiné důkaz konvergence jisté řady jsoucí mimořádně užitečnou pro srovnání s řadami, jejichž členy jsou vyjádřeny jako podíly dvou polynomů.

Věta 3.5.18 (Cauchyho odmocninové kritérium)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Existují-li $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že pro $n \geq n_0$ platí $\sqrt[n]{a_n} \leq q$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Platí-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.

(c) Platí-li $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Důkaz. Část (a) se dokáže snadno srovnáním s geometrickou řadou. Mějme tedy dáno $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ pro $n \geq n_0$. Tato nerovnost je ekvivalentní nerovnosti $a_n \leq q^n$. Ježto $|q| < 1$, je řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ podle úlohy 3.5.6 konvergentní. Pak je ale díky srovnávacímu kritériu i $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergentní.

Část (b) lze dokázat užitím závěru již dokázané části (a). Položme $L \coloneqq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ a volme $\varepsilon \coloneqq (1-L)/2$. Z předpokladu je $L < 1$, a tedy vskutku $\varepsilon > 0$. K tomuto ε nalezneme z definice limity $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ platí

$$|\sqrt[n]{a_n} - L| < \frac{1-L}{2}.$$

Pak ale

$$\sqrt[n]{a_n} < L + \frac{1-L}{2} = \frac{1+L}{2} < 1,$$

kde poslední nerovnost plyne opět z toho, že $L < 1$. Pro jakoukoli volbu $q \in ((1+L)/2, 1)$ pročež platí $\sqrt[n]{a_n} \le q$, kdykoli $n \ge n_0$. Z části (a) víme, že v tomto případě $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.

Konečně, část (c) dokážeme nepřímo použitím lemmatu 3.5.7. Jelikož $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \ge n_0$ máme $\sqrt[n]{a_n} > 1$. Potom ale rovněž $a_n > 1^n = 1$ pro $n \ge n_0$. To ale znamená, že $\lim_{n\to\infty} a_n \ne 0$, a tedy podle lemmatu 3.5.7 řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje. ∎

Varování 3.5.19

Předchozí věta neříká nic o konvergenci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ v moment, kdy $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$.

Uvažme například řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ a $\sum_{n=1}^{\infty} 1$. První konvergentní podle lemmatu 3.5.16 a druhá zřejmě divergentní. Platí však

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = 1.$$

Věta 3.5.20 (d'Alembertovo podílové kritérium)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) *Existují-li $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ taková, že pro každé $n \ge n_0$ platí $a_{n+1}/a_n \le q$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.*

(b) *Platí-li $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n < 1$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.*

(c) *Platí-li $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n > 1$, pak $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.*

Důkaz. Začneme částí (a). Ať jsou $q \in (0,1)$ a $n_0 \in \mathbb{N}$ dána. Dokážeme indukcí, že pro $n \ge n_0$ platí výrok

$$a_n \le q^{n-n_0} a_{n_0}.$$

Pro $n = n_0$ máme

$$q^{n_0-n_0} a_{n_0} = a_{n_0},$$

tedy výrok platí. Dále, z předpokladu věty máme $a_{n+1}/a_n \le q$, čili $a_{n+1} \le a_n q$. Odtud a z indukčního předpokladu,

$$a_{n+1} \le a_n q \le q^{n-n_0} a_{n_0} q = q^{n+1-n_0} a_{n_0},$$

jak jsme chtěli.

Protože $|q| < 1$, je řada $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n-n_0}$ konvergentní a z aritmetiky řad je i $\sum_{n=0}^{\infty} a_{n_0} q^{n-n_0}$ konvergentní. Z nerovnosti $a_n \le a_{n_0} q^{n-n_0}$ plyne použitím srovnávacího kritéria, že i řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je konvergentní.

Pro důkaz (b) označme $L \coloneqq \lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n$ a položme $\varepsilon \coloneqq (1-L)/2$. Z předpokladu $L < 1$, pročež $\varepsilon > 0$. K tomuto ε nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \ge n_0$ platí

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - L \right| < \frac{1-L}{2},$$

z čehož úpravou plyne

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < L + \frac{1-L}{2} = \frac{1+L}{2} < 1.$$

Volíme-li tedy $q \in ((1+L)/2, 1)$, pak pro toto q a $n \geq n_0$ platí

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

čili řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje podle části (a).

V části (c) předpokládáme, že $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n > 1$, a tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$, že pro $n \geq n_0$ je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1,$$

odkud $a_{n+1} > a_n$. Posloupnost a_n je tedy od jistého indexu rostoucí a nezáporná, a tedy její limita nemůže být rovna 0. Podle lemmatu 3.5.7 řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje. ■

Varování 3.5.21

Podobně jako věta 3.5.18, ani předchozí věta netvrdí nic o konvergenci $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ v případě, kdy $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = 1$. Řady $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2$ a $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ opět ukazují, že ani nic v tomto případě tvrdit obecně nelze.

Poslední kritérium konvergence řad s nezápornými členy, jež si uvedeme, je veskrze překvapivým výsledkem. Ukazuje totiž, že (za jisté další podmínky) lze každých 2^n (s rostoucím n) členů vyměnit za ten nejmenší nebo největší z nich bez vlivu na konvergenci; na hodnotu součtu pochopitelně ano. Například už pro $n = 20$ toto znamená, že beztrestně nahrazujeme více než milión čísel.

Věta 3.5.22 (Kondenzační kritérium)

*Ať $a : \mathbb{N} \to [0, \infty)$ je **nerostoucí** a **nezáporná** posloupnost. Pak*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konverguje} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konverguje.}$$

Důkaz. Máme k důkazu dvě implikace. Položme

$$s_n \coloneqq \sum_{i=0}^{n} a_n, \quad t_n \coloneqq \sum_{i=0}^{n} 2^i a_{2^i}.$$

Pro důkaz implikace ($\Leftarrow$) ověříme, že s_n je shora omezená, což spolu s její monotonií zaručí existenci konečné limity. Předpokládáme tedy, že existuje konečná $L \coloneqq \lim_{n\to\infty} t_n$. Nechť $m \in \mathbb{N}$ je dáno. Nalezneme $k \in \mathbb{N}$ takové, že $2^k > m$. Potom

$$\begin{aligned} s_m &= \sum_{i=0}^{m} a_i \leq \sum_{i=0}^{2^k} a_i = a_0 + a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \ldots + (a_{2^{k-1}} + \ldots + a_{2^k - 1}) \\ &= a_0 + \sum_{i=2^0}^{2^1-1} a_i + \sum_{i=2^1}^{2^2-1} a_i + \sum_{i=2^2}^{2^3-1} a_i + \ldots + \sum_{i=2^{k-1}}^{2^k-1} a_i = a_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=2^j}^{2^{j+1}-1} a_i. \end{aligned}$$

Nyní, protože a je nerostoucí, dostáváme

$$\sum_{i=2^j}^{2^{j+1}-1} a_i = a_{2^j} + a_{2^j+1} \ldots + a_{2^{j+1}-1} \leq a_{2^j} + a_{2^j} + \ldots + a_{2^j} = 2^j a_{2^j}$$

pro každé $j \in \mathbb{N}$. Spolu s předchozí nerovností dostaneme horní odhad

$$s_m \leq a_0 + \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=2^j}^{2^{j+1}-1} a_i \leq a_0 + \sum_{j=0}^{k-1} 2^j a_{2^j} = a_0 + t_{k-1} \leq a_0 + L,$$

kde poslední nerovnost plyne z faktu, že t_n je neklesající, a tedy vždy menší než svoje limita. Tím jsme ukázali, že s_n jsouc shora omezená má konečnou limitu, a tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.

V důkazu ($\Rightarrow$) naopak předpokládáme, že existuje konečná $A \coloneqq \lim_{n\to\infty} s_n$. Ukážeme omezenost t_n shora. Mějme dáno $k \in \mathbb{N}$. Nalezneme $m \in \mathbb{N}$ takové, že $2^k \leq m$. Potom

$$\begin{aligned}
s_m &= \sum_{i=0}^{m} a_i \geq \sum_{i=0}^{2^k} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + a_6 + a_7 + a_8) + \ldots + (a_{2^{k-1}+1} + \ldots + a_{2^k}) \\
&= a_0 + a_1 + \sum_{i=2^0+1}^{2^1} a_i + \sum_{i=2^1+1}^{2^2} a_i + \sum_{i=2^2+1}^{2^3} a_i + \ldots + \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} a_i = a_0 + a_1 + \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} a_i \\
&\overset{a \text{ je nezáporná}}{\geq} \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=2^{j-1}+1}^{2^j} a_i \overset{a \text{ je nerostoucí}}{\geq} \sum_{j=1}^{k} 2^{j-1} a_{2^j} = 2^{-1} \sum_{j=1}^{k} 2^j a_{2^j} = 2^{-1} t_k.
\end{aligned}$$

Tím jsme dokázali, že $t_k \leq 2s_m \leq 2A$, čili t_k je shora omezená a má z monotonie konečnou limitu. To znamená, že $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konverguje a důkaz je hotov. ■

Krátké pojednání o řadách s nezápornými členy završíme, kterak jest bylo zvěstěno, prozkoumáním konvergence jisté významné číselné řady.

Tvrzení 3.5.23

Ať $c \in [0, \infty)$. Pak řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$$

konverguje právě tehdy, když $c > 1$.

Důkaz. Nejprve snadno nahlédneme, že řada diverguje, když $c \leq 1$. Z lemmatu 3.5.14 víme, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverguje. Protože pro libovolné $c \in [0, 1]$ a každé $n \in \mathbb{N}$ platí $n^c \leq n$, a tudíž $1/n^c \geq 1/n$, plyne ze srovnávacího kritéria, že $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^c}$ diverguje, když $c \in [0, 1]$.

Pro důkaz konvergence v případě $c > 1$ použijeme kondenzačního kritéria. Posloupnost $1/n^c$ je jistě nezáporná a nerostoucí. Tedy, řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^c$ konverguje právě tehdy, když konverguje řada

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^c} = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-nc} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-c})^n.$$

Poslední řada je geometrická s kvocientem 2^{1-c}. Z úlohy 3.5.6 víme, že tato konverguje právě tehdy, když

$$2^{1-c} < 1,$$

což nastává právě tehdy, když $c > 1$. ■

Na závěr několik cvičení na použití výše dokázaných kritérií konvergence.

Cvičení 3.5.24

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^n + 3}{(n^4+1)^6}.$$

Cvičení 3.5.25

Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^c (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

v závislosti na konstantě $c \in \mathbb{R}$.

Cvičení 3.5.26 (těžké)

Dokažte následující tvrzení, známé jako *Raabeovo kritérium*: Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Platí-li $\lim_{n\to\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) > 1$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Existuje-li $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je

$$n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \leq 1,$$

pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Část II

Reálné funkce

Kapitola 4

Limity funkcí

Limita funkce je dost možná nejdůležitější ideou matematické analýzy a obecně matematických disciplín, jež využívá fyzika. Davši vzniknout teorii derivací a primitivních funkcí, umožnila popsat fyzikální jevy soustavami diferenciálních rovnic a je základem zatím nejlepších známých modelův světa – diferencovatelných struktur.

Principiálně se pojem *limity funkce* neliší pramnoho od limity posloupnosti. Matematici funkcí obyčejně myslíme zobrazení popisující vývoj systému v čase (tzv. funkce *jedné proměnné*), případně závislé na více parametrech než jen na čase (tzv. funkce *více proměnných*). Limita funkce v nějakém určeném okamžiku pak znamená vlastně „očekávanou hodnotu“ této funkce v tomto okamžiku – hodnotu, ke které je funkce, čím méně času zbývá do onoho okamžiku, tím blíže.

V tomto textu budeme sebe zaobírati pouze funkcemi závislými na čase tvořícími systémy, jejichž stav je rovněž vyjádřen jediným číslem. Uvidíme, že i teorie takto primitivních objektů je veskrze širá.

Definice 4.0.1 (Reálná funkce jedné proměnné)

Ať $M \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná podmnožina $\mathbb{R}$. Zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálnou funkcí (jedné proměnné)*.

Ačkolivěk ve světě, jest-li nám známo, proudí čas pouze jedním směrem, matematiku takovými trivialitami netřeba třísnit. Pojem limity reálné funkce budeme tedy definovat bez ohledu na „proud času“. Budeme zkoumat jak hodnotu reálné funkce, když se čas blíží *zleva* (tj. přirozeně) k danému okamžiku, tak její očekávanou hodnotu proti toku času.

Ona dva přístupa slujeta limita funkce *zleva* a limita funkce *zprava*. Před jejich výrokem ovšem učiníme kvapný formální obchvat. Bylo by totiž nanejvýš neelegantní musiti různými logickými výroky definovat konečné oproti nekonečným limitám v konečných oproti nekonečným bodům. Následující – čistě formální avšak se silnou geometrickou intuicí – pojem tyto případy skuje v jeden.

Definice 4.0.2 (Okolí a prstencové okolí bodu)

Ať $a \in \mathbb{R}^*$ a $\varepsilon \in (0, \infty)$. *Okolím* bodu a (o poloměru ε) myslíme množinu

$$B(a, \varepsilon) \coloneqq \begin{cases} (a - \varepsilon, a + \varepsilon), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ (1/\varepsilon, \infty), & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty. \end{cases}$$

Podobně, *prstencovým okolím* a (o velikosti ε) myslíme jeho okolí bez samotného bodu a. Konkrétně,

$$R(a, \varepsilon) \coloneqq \begin{cases} (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}, & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ (1/\varepsilon, \infty), & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty. \end{cases}$$

Pro účely definice levých a pravých limit, pojmenujeme rovněž množinu

$$B_+(a, \varepsilon) \coloneqq \begin{cases} [a, a + \varepsilon), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ \emptyset, & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty \end{cases}$$

pravým okolím bodu a a množinu

$$R_+(a, \varepsilon) \coloneqq \begin{cases} (a, a + \varepsilon), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ \emptyset, & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty \end{cases}$$

pravým prstencovým okolím bodu a. *Levé okolí* a *levé prstencové okolí* bodu a se definují analogicky.

Poznámka 4.0.3

Písmena B a R v definici okolí a prstencového okolí pocházejí z angl. slov **b**all a **r**ing. Okolí se v angličtině přezdívá *ball* pro to, že okolí bodu a je ve skutečnosti (jednodimenzionální) kruh s poloměrem ε o středu a. Znázornění okolí bodu jako kruhu v rovině je vysoce účinným vizualizačním aparátem. Naopak, slovo *ring* vskutku přirozeně značí kruh s „dírou“ (velikosti jednoho bodu) v jeho středě.

Čtenáře možná zarazilo číslo $1/\varepsilon$ v definici okolí bodu ∞. Důvod užití $1/\varepsilon$ oproti prostému ε je spíše intuitivního rázu. V definici limity a v následných tvrzeních si matematici obvykle představujeme pod ε reálné číslo, které je „nekonečně malé“. Chceme-li tedy, aby se **zmenšujícím se** ε byla hodnota dané funkce stále blíže nekonečnu, musí se tato hodnota **zvětšovat**. Díky užité formulaci tomu tak je, neboť s menším ε je číslo $1/\varepsilon$ větší.

(a) Okolí $B(a, \varepsilon)$ bodu a.

(b) Prstencové okolí $R(a, \varepsilon)$ bodu a.

Obrázek 4.1: Okolí a prstencové okolí bodu $a \in \mathbb{R}$.

Definice 4.0.4 (Jednostranná limita funkce)

Ať $M \subseteq \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že číslo $L \in \mathbb{R}^*$ je *limitou zleva* funkce f v bodě a, pokud

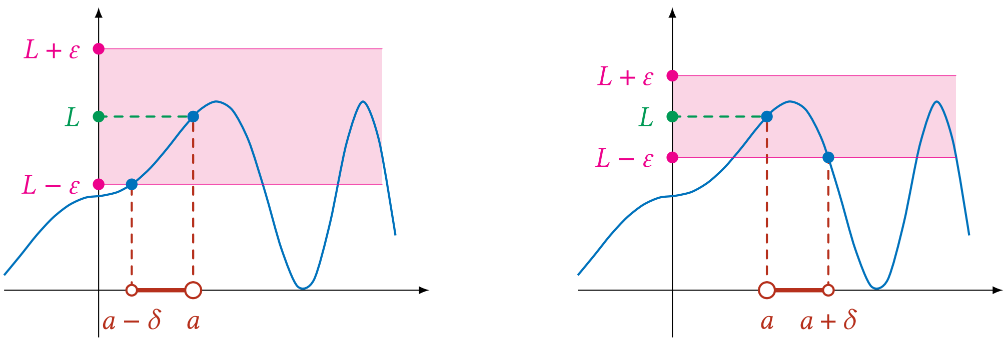
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P_-(a, \delta) : f(x) \in B(L, \varepsilon).$$

Tento fakt zapisujeme jako $L = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

Podobně, číslo $K \in \mathbb{R}^*$ je *limitou zprava* funkce f v bodě a, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P_+(a, \delta) : f(x) \in B(K, \varepsilon).$$

Tento fakt zapisujeme jako $K = \lim_{x \to a^+} f(x)$.



(a) Limita f v bodě a zleva.

(b) Limita f v bodě a zprava.

Obrázek 4.2: Jednostranné limity funkce f v bodě a.

Varování 4.0.5

Fakt, že L je limita **zleva** funkce f v bodě a, vůbec neznamená, že hodnoty $f(x)$ se musejí blížit k L rovněž **zleva**. Adverbia *zleva* a *zprava* značí pouze směr, kterým se k číslu a přibližují **vstupy** funkce f, nikoli její **výstupy** k číslu L.

Pochopitelně, lze též požadovat, aby hodnoty f ležely v daném rozmezí kolem bodu L, jak se její vstupy blíží k a zleva i zprava zároveň. V principu, blíží-li se f ke stejnému číslu zleva i zprava, stačí vzít δ v definici 4.0.4 tak malé, aby $f(x)$ leželo v $B(L, \varepsilon)$ kdykoli je x ve vzdálenosti nejvýše δ od a.

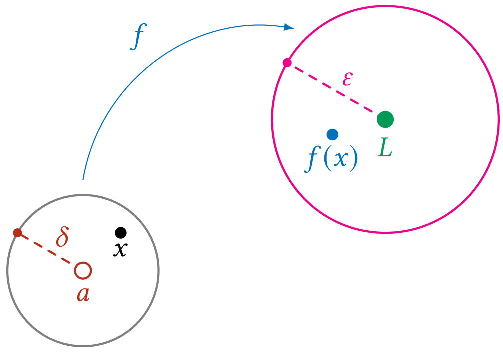
Definice 4.0.6 (Oboustranná limita funkce)

Ať $a, L \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce. Řekneme, že L je *(oboustrannou) limitou* funkce f v bodě a, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in B(L, \varepsilon).$$

Tento fakt zapisujeme jako $L = \lim_{x \to a} f(x)$.

Je jistě možné představovat si oboustrannou limitu funkce stejně jako limity jednostranné na obrázku 4.2. Ovšem, ona vlastnost „oboustrannosti" umožňuje ještě jiný – však ne rigorózní – pohled. Povýšíme-li situaci do roviny, tj. do prostoru druhé dimenze, a na funkci f budeme nahlížet jako na zobrazení bodů roviny na body roviny, pak L je limitou funkce f v bodě a, když zobrazuje všechny body zevnitř kruhu o poloměru δ a středu a do kruhu o poloměru ε a středu L. Jako na obrázku 4.3.



Obrázek 4.3: Oboustranná limita funkce „ve 2D“.

Doporučujeme čtenářům, aby se zamysleli, čím by v této dvoudimenzionální říši byla *jednostranná* limita funkce. Sen zámysl snad vedl k představě, že by se vstupy x musely blížit k bodu a po nějaké určené přímce. Existence „všestranné“ limity v a by pak byla ekvivalentní existenci nespočetně mnoha „jednostranných“ limit – jedné pro každou přímku procházející bodem a. Věříme, že není obtížné nahlédnout, jak zbytečný by takový pojem ve dvou dimenzích byl. Popsaná situace přímo souvisí s faktem, že první dimenze je z geometrického pohledu „degenerovaná“ – kružnice je pouze dvoubodovou množinou.

Oboustranné limity jsou spjaty jednostrannými velmi přirozeným způsobem. Existence oboustranné limity funkce v bodě je ekvivalentní existenci limity jak zleva, tak zprava, v témže bodě. Oboustrannou limitu vlastně dostaneme tak, že z levého a pravého prstencového okolí limitního bodu, ve kterém již je funkční hodnota blízko limitě, vybereme to menší.

Tvrzení 4.0.7 (Vztah jednostranných a oboustranných limit)

Ať f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje právě tehdy, když existuje $\lim_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim_{x\to a^-} f(x)$ a jsou si rovny.

Důkaz. Implikace ($\Longrightarrow$) je triviální. Pokud existuje $L \coloneqq \lim_{x\to a} f(x)$, pak pro dané $\varepsilon > 0$ máme nalezeno $\delta > 0$ takové, že pro $x \in R(a,\delta)$ je $f(x) \in B(L,\varepsilon)$. Ovšem, jistě platí $R_+(a,\delta) \subseteq R(a,\delta)$ i $R_-(a,\delta) \subseteq R(a,\delta)$. To však znamená, že pro $x \in R_+(a,\delta)$ i pro $x \in R_-(a,\delta)$ rovněž platí $f(x) \in B(L,\varepsilon)$. To dokazuje, že existuje jak $\lim_{x\to a^+} f(x)$, tak $\lim_{x\to a^-} f(x)$ a

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Pro důkaz ($\Longleftarrow$) položme $L \coloneqq \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ a pro dané $\varepsilon > 0$ nalezněme $\delta_+ > 0$ a $\delta_- > 0$ splňující výroky

$$\forall x \in R_+(a,\delta_+) : f(x) \in B(L,\varepsilon),$$
$$\forall x \in R_-(a,\delta_-) : f(x) \in B(L,\varepsilon).$$

Ať $\delta \coloneqq \min(\delta_+,\delta_-)$. Pak $R(a,\delta) \subseteq R_+(a,\delta_+) \cup R_-(a,\delta_-)$, a tedy $\delta > 0$ splňuje, že

$$\forall x \in R(a,\delta) : f(x) \in B(L,\varepsilon),$$

čili $\lim_{x\to a} f(x) = L$. ∎

Příklad 4.0.8

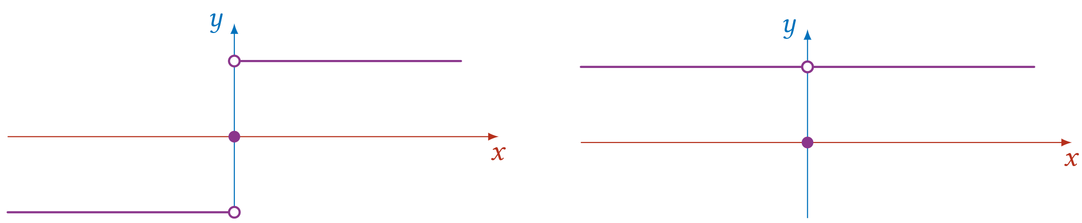
Tvrzení 4.0.7 je užitečné jak v uvedené, tak v kontrapozitivní formě, tj. při důkazu neexistence oboustranné limity za předpokladu nerovnosti (nikoli nutně *neexistence*) limit jednostranných.

Uvažme funkce $f(x) \coloneqq \operatorname{sgn}(x)$ a $g(x) \coloneqq |\operatorname{sgn}(x)|$. Ukážeme, že $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje, zatímco $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. Připomeňme, že funkce $\operatorname{sgn}(x)$ je definována předpisem

$$\operatorname{sgn}(x) \coloneqq \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Ověříme, že $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Volme například $\delta \coloneqq 1$. Potom pro $x \in R_+(0,1) = (0,1)$ platí $f(x) = 1$, čili zřejmě $f(x) \in B(1,\varepsilon) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Podobně se ověří, že $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$. To ovšem znamená, že $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, tudíž dle tvrzení 4.0.7 $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Velmi obdobným argumentem ukážeme, že $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = 1$. Nuže, podle téhož tvrzení platí $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$.



(a) Graf funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$. (b) Graf funkce $g(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$.

Obrázek 4.4: Obrázek k příkladu 4.0.8.

Cvičení 4.0.9

Dokažte, že pro reálnou funkci f a $a \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

4.1 Základní poznatky o limitě funkce

Počneme nyní shrnovati intuitivně vcelku zřejmé výsledky o limitách reálných funkcí. Jakž jsme již vícekrát děli, ona „intuitivní zřejmost“ pravdivosti výroků nechce nabodnout k přeskoku či trivializaci jejich důkazů. Vodami nekonečnými radno broditi se ostražitě, bo tvrzení jako limita složené funkce ráda svědčí, že intuicí bez logiky člověk na břeh nedoplove.

Na první pád není překvapivé, že limita funkce je jednoznačně určena, pochopitelně za předpokladu její existence. Vyzýváme čtenáře, aby se při čtení důkazu drželi vizualizace oboustranné limity z obrázku 4.3.

Lemma 4.1.1 (Jednoznačnost limity)

Limita funkce (ať už jednostranná či oboustranná) je jednoznačně určená, pokud existuje.

DŮKAZ. Dokážeme lemma pouze pro oboustrannou limitu, důkaz pro limity jednostranné je v zásadě totožný.

Pro spor budeme předpokládat, že L i L' jsou limity f v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Nejprve ošetříme případ, kdy $L, L' \in \mathbb{R}$. Bez újmy na obecnosti smíme předpokládat, že $L > L'$. Volme $\varepsilon \coloneqq (L - L')/3$ (ve skutečnosti stačilo volit libovolné $\varepsilon < (L - L')/2$). K tomuto ε existují z definice limity $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ takové, že

$$\forall x \in R(a, \delta_1) : f(x) \in B(L, \varepsilon).$$

a rovněž

$$\forall x \in R(a, \delta_2) : f(x) \in B(L', \varepsilon).$$

Volíme-li ovšem $\delta \coloneqq \min(\delta_1, \delta_2)$, pak pro $x \in R(a, \delta)$ dostaneme

$$f(x) \in B(L, \varepsilon) \cap B(L', \varepsilon).$$

Poslední vztah lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon, \\ L' - \varepsilon < f(x) < L' + \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$L - \varepsilon < L' + \varepsilon,$$

což po dosazení $\varepsilon = (L - L')/3$ a následné úpravě vede na

$$2L - L' < 2L' - L,$$

z čehož ihned

$$L < L',$$

což je spor.

Nyní ať například $L = \infty$ a $L' \in \mathbb{R}$. Z definice okolí $B(L, \varepsilon)$ pro $L = \infty$ stačí nalézt $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\frac{1}{\varepsilon} > L' + \varepsilon,$$

pak se totiž nemůže stát, že

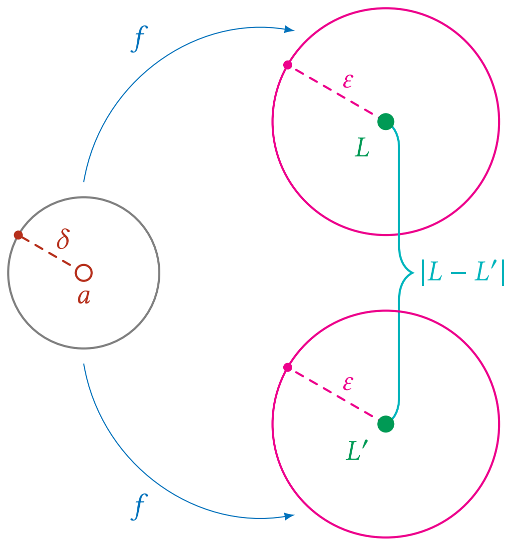
$$f(x) \in B(\infty, \varepsilon) \cap B(L', \varepsilon).$$

Snadným výpočtem zjistíme, že

$$\frac{1}{\varepsilon} > L' + \varepsilon$$

právě tehdy, když $\varepsilon < (\sqrt{L'^2 + 4} - L')/2$. Pro libovolné takové ε tudíž dostáváme spor stejně jako v předchozím případě.

Ostatní případy se ošetří obdobně. ■



Obrázek 4.5: Spor v důkazu lemmatu 4.1.1.

Lemma 4.1.2

Ať reálná funkce f má ***konečnou*** *limitu $L \in \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje prstencové okolí a, na němž je f omezená.*

Důkaz. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme z definice limity $\delta > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta)$ platí $f(x) \in B(L, \varepsilon)$. Protože však $B(L, \varepsilon) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ platí pro $x \in R(a, \delta)$ odhady

$$L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon,$$

čili je f na $R(a, \delta)$ omezená. ∎

Vzhledem k základním aritmetickým operacím si limity funkcí počínají vychovaně. Za předpokladu, že výsledný výraz dává smysl, můžeme spočítat limitu součtu, součinu či podílu funkcí jako součet, součin či podíl limit těchto funkcí.

Věta 4.1.3 (Aritmetika limit funkcí)

Ať f, g jsou reálné funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že $\lim_{x \to a} f(x)$ i $\lim_{x \to a} g(x)$ existují a označme je po řadě L_f a L_g. Potom platí

(a) $\lim_{x \to a} (f + g)(x) = L_f + L_g$, *dává-li výraz napravo smysl.*

(b) $\lim_{x \to a} (f \cdot g)(x) = L_f \cdot L_g$, *dává-li výraz napravo smysl.*

(c) $\lim_{x \to a} (f/g)(x) = L_f / L_g$, *dává-li výraz napravo smysl.*

Důkaz. Dokážeme pouze část (c), neboť je výpočetně nejnáročnější, ač nepřináší mnoho intuice. Část (a) je triviální a (b) je lehká. Vyzýváme čtenáře, aby se je pokusili dokázat sami.

Už jen v důkazu samotné části (c) bychom správně měli rozlišit šest různých případů:

(1) $L_f \in \mathbb{R}, L_g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(2) $L_f \in \mathbb{R}, L_g \in \{-\infty, \infty\}$,

(3) $L_f = \infty, L_g \in (0, \infty)$,

(4) $L_f = \infty, L_g \in (-\infty, 0)$,

(5) $L_f = -\infty, L_g \in (0, \infty)$,

(6) $L_f = -\infty, L_g \in (-\infty, 0)$.

Jelikož se výpočty limit v oněch případech liší vzájemně pramálo a získaná intuice je asymptoticky rovna té ze znalosti metod řešení exponenciálních rovnic, soustředíme se pouze na (nejzajímavější) případ (1).

Ať tedy $L_f \in \mathbb{R}, L_g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Je nejprve dobré si uvědomit, proč vynecháváme 0 jako možnou hodnotu L_g. Totiž, L_f/L_g není definován **nikdy**, pokud $L_g = 0$, bez ohledu na hodnotu L_f. Hodnoty g se mohou k L_g limitně blížit zprava, zleva či střídavě z obou směrů. Nelze tudíž obecně určit, zda dělíme klesajícím kladným číslem, či rostoucím záporným číslem.

Položme $\varepsilon_g = |L_g|/2$. K tomuto ε_g existuje z definice limity δ_g takové, že pro $x \in R(a, \delta_g)$ platí $g(x) \in B(L_g, \varepsilon_g)$. Poslední vztah si přepíšeme na

$$\begin{aligned} L_g - \varepsilon_g < g(x) < L_g + \varepsilon_g, \\ L_g - \frac{|L_g|}{2} < g(x) < L_g + \frac{|L_g|}{2}. \end{aligned}$$

Speciálně tedy pro $x \in R(a, \delta_g)$ máme odhad

$$|g(x)| > \left| L_g - \frac{|L_g|}{2} \right| > \frac{|L_g|}{2}.$$

Jelikož poslední výraz je z předpokladu kladný, má výraz $f(x)/g(x)$ smysl pro každé $x \in R(a, \delta_g)$, neboť pro tato x platí $g(x) \neq 0$.

Pro $x \in R(a, \delta_g)$ odhadujme

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_f}{L_g} \right| &= \frac{|f(x)L_g - g(x)L_f|}{|g(x)||L_g|} = \frac{|f(x)L_g - L_f L_g + L_f L_g - g(x)L_f|}{|g(x)||L_g|} \\ &\leq \frac{|L_g||f(x) - L_f| + |L_f||L_g - g(x)|}{|g(x)||L_g|} \\ &= \frac{1}{|g(x)|}|f(x) - L_f| + \frac{|L_f|}{|g(x)||L_g|}|L_g - g(x)| \\ &< \frac{2}{|L_g|}|f(x) - L_f| + \frac{2|L_f|}{|L_g|^2}|L_g - g(x)| \\ &\leq c(|f(x) - L_f| + |L_g - g(x)|) \end{aligned}$$

pro $c \coloneqq \max(2/|L_g|, 2|L_f|/|L_g|^2)$.

Ať je nyní dáno $\varepsilon > 0$. K číslu $\varepsilon/2c$ existují z definice limity $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\begin{aligned} \forall x \in R(a, \delta_1) : |g(x) - L_g| < \frac{\varepsilon}{2c}, \\ \forall x \in R(a, \delta_2) : |f(x) - L_f| < \frac{\varepsilon}{2c}. \end{aligned}$$

Položíme-li nyní $\delta \coloneqq \min(\delta_1, \delta_2, \delta_g)$, pak pro $x \in R(a, \delta)$ platí

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_f}{L_g}\right| < c(|f(x) - L_f| + |L_g - g(x)|) < c\left(\frac{\varepsilon}{2c} + \frac{\varepsilon}{2c}\right) = \varepsilon,$$

což dokazuje rovnost $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = L_f/L_g$. ■

Varování 4.1.4

Předpoklad *definovanosti* výsledného výrazu ve znění věty o aritmetice limit je zásadní.

Uvažme funkce $f(x) = x + c$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$, $g(x) = -x$. Pak platí

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) = c,$$

ale $\lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$ není definován.

Cvičení 4.1.5

Dokažte tvrzení (b) a (c) ve větě 4.1.3.

Úloha 4.1.6

Spočtěte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$$

Řešení. Jelikož limitním bodem je ∞, neliší se výpočet limity funkce v zásadě nijak od výpočtu limity sesterské posloupnosti. Stále je třeba identifikovat a vytknout „nejrychleji rostoucí“ členy z čitatele a jmenovatele zlomku a poté se odkázat na aritmetiku limit.

Přímým dosazením zjistíme, že bez dalších úprav vychází limitní výraz ∞/∞, na jehož základě nelze nic rozhodnout. Upravujeme tudíž následující způsobem:

$$\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{x^{20}(2 - \frac{3}{x^{20}}) \cdot x^{30}(3 + \frac{2}{x^{30}})}{x^{50}(2 + \frac{1}{x^{50}})} = \frac{x^{50}}{x^{50}} \cdot \frac{(2 - \frac{3}{x^{20}})(3 + \frac{2}{x^{30}})}{2 + \frac{1}{x^{50}}}.$$

Předpokládajíce definovanost výsledného výrazu (již je třeba ověřit až na samotném konci výpočtu), smíme z aritmetiky limit tvrdit, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{50}}{x^{50}} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{(2 - \frac{3}{x^{20}})(3 + \frac{2}{x^{30}})}{2 + \frac{1}{x^{50}}}.$$

Zřejmě platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{50}}{x^{50}} = 1.$$

Opět použitím aritmetiky limit můžeme počítat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2-x^{20})(3+\frac{2}{x^{30}})}{2+\frac{1}{x^{50}}} = \frac{\lim_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x^{20}})\cdot\lim_{x\to\infty}(3+\frac{2}{x^{30}})}{\lim_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x^{50}})} = \frac{(2-0)\cdot(3+0)}{2+0} = 3.$$

Celkem tedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = 1\cdot 3 = 3.$$

Protože výsledný výraz je definován, byla věta o aritmetice limit použita korektně. ♠

Úloha 4.1.7

Spočtěte

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$$

Řešení. Úlohy na výpočet limit funkcí v bodech jiných než $\pm\infty$ jsou však fundamentálně rozdílné od výpočtu limit posloupností. Nelze již rozumně hovořit o „rychlosti růstu některého členu“ či podobných konceptech. Výpočet se pochopitelně stále opírá o větu o aritmetice limit, ale často dožaduje jiných algebraických úprav – včetně dělení mnohočlenů.

Dosazením $x = 3$ do zadaného výrazu získáme $0/0$, tedy je třeba pro výpočet limity výraz nejprve upravit.

Zde postupujeme takto:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{(x-3)(x+3)}\cdot\frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}} \\ &= \frac{(x+13)-4(x+1)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}. \end{aligned}$$

Nyní,

$$(x+13)-4(x+1) = -3x+9 = -3(x-3).$$

Pročež,

$$\frac{(x+13)-4(x+1)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}.$$

Z aritmetiky limit máme

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \lim_{x\to 3} \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{-3}{(3+3)(\sqrt{3+13}+2\sqrt{3+1})} = \frac{-3}{48}. \end{aligned}$$

Protože je konečný výraz definovaný, směli jsme použít větu o aritmetice limit. ♠

V důkazu věty o aritmetice limit jsme zmínili, že na jejím základě nelze nic rozhodnout v případě, že konečný výraz vyjde $a/0$, kde $a \in \mathbb{R}^*$. K rozřešení právě těchto situací slouží následující tvrzení.

Tvrzení 4.1.8

Ať f, g jsou reálné funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Dále ať $\lim_{x \to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*, A > 0$, $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ a existuje prstencové okolí bodu a, na němž je g kladná.

Potom $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \infty$.

Důkaz. Ať je z předpokladu dáno $\eta > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \eta)$ je $g(x) > 0$. Rozlišíme dva případy.

První případ nastává, když $A \in \mathbb{R}$ je číslo. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Jelikož $\lim_{x \to a} f(x) = A$ a $A > 0$, nalezneme pro $A/2$ číslo $\delta_1 > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta_1)$ platí

$$f(x) \in B\left(A, \frac{A}{2}\right) = \left(\frac{A}{2}, \frac{3A}{2}\right),$$

čili $f(x) > A/2$. Podobně, za předpokladu $\lim_{x \to a} g(x) = 0$ nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta_2)$ platí

$$g(x) \in B\left(0, \frac{A}{2\varepsilon}\right) = \left(-\frac{A}{2\varepsilon}, \frac{A}{2\varepsilon}\right),$$

tedy speciálně $g(x) < A/2\varepsilon$, z čehož dostáváme $1/g(x) > 2\varepsilon/A$. Celkově pro $\delta \coloneqq \min(\delta_1, \delta_2, \eta)$ a $x \in R(a, \delta)$ můžeme počítat

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{A}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{A} = \varepsilon,$$

kde první rovnost plyne z toho, že pro $x \in R(a, \delta)$ platí $f(x) > 0$ i $g(x) > 0$. To dokazuje, že $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \infty$ v případě $A \in \mathbb{R}$.

Ošetřemež případ $A = \infty$. Argumentujíce analogicky předchozímu odstavci nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že pro $R(a, \delta_1)$ platí $f(x) > 1$ a pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta_2)$ platí $g(x) < 1/\varepsilon$, a tedy $1/g(x) > \varepsilon$. Potom, pro $x \in R(a, \min(\eta, \delta_1, \delta_2))$ platí

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{f(x)}{g(x)} > 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

což dokazuje opět, že $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \infty$ i v případě $A = \infty$.

Tím je důkaz završen. ■

Poznámka 4.1.9

Předchozí tvrzení pochopitelně platí i při záměně ostrých nerovností v jeho znění. Konkrétně, za předpokladů

(<>) $\lim_{x \to a} f(x) = A < 0$ a $g(x) > 0$ na $R(a, \eta)$ platí $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = -\infty$;

(><) $\lim_{x \to a} f(x) = A > 0$ a $g(x) < 0$ na $R(a, \eta)$ platí $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = -\infty$;

(<<) $\lim_{x \to a} f(x) = A < 0$ a $g(x) < 0$ na $R(a, \eta)$ platí $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = \infty$.

Důkazy všech těchto případů jsou identické důkazu původního tvrzení.

Posledním základním tvrzením o limitách funkcí je vztah limit a uspořádání reálných čísel, vlastně jakási varianta lemmatu 3.4.4 pro posloupnosti.

Věta 4.1.10 (O srovnání)

Ať $a \in \mathbb{R}^*$ a f, g, h jsou reálné funkce.

(a) Pokud

$$\lim_{x \to a} f(x) > \lim_{x \to a} g(x),$$

pak existuje prstencové okolí bodu a, na němž $f > g$.

(b) Existuje-li prstencové okolí bodu a, na němž platí $f \leq g$, pak

$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

(c) Existuje-li prstencové okolí a, na němž $f \leq h \leq g$ a $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak existujíc rovněž $\lim_{x \to a} h(x)$ jest rovna A.

Důkaz. Položme $L_f \coloneqq \lim_{x \to a} f(x)$ a $L_g \coloneqq \lim_{x \to a} g(x)$.

Dokážeme (a). Protože $L_f > L_g$, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $L_f - L_g > 2\varepsilon$. K tomuto ε nalezneme z definice limity $\delta_f > 0$ a $\delta_g > 0$ taková, že

$$\begin{aligned} \forall x \in R(a, \delta_f) &: f(x) \in B(L_f, \varepsilon), \\ \forall x \in R(a, \delta_g) &: g(x) \in B(L_g, \varepsilon). \end{aligned}$$

To ovšem znamená, že pro $x \in R(a, \min(\delta_f, \delta_g))$ platí jak

$$f(x) > L_f - \varepsilon,$$

tak

$$g(x) < L_g + \varepsilon,$$

čili

$$f(x) - g(x) > L_f - \varepsilon - L_g - \varepsilon = L_f - L_g - 2\varepsilon > 0,$$

kterak chtiechom.

Část (b) dokážeme sporem. Ať $L_f > L_g$. Podle (a) pak existuje prstencové okolí $R(a, \delta)$ bodu a, na němž $f > g$. Ovšem, podle předpokladu existuje rovněž okolí $R(a, \eta)$ bodu a, kde zase $f \leq g$. Vezmeme-li tudíž $x \in R(a, \min(\delta, \eta))$, pak $f(x) > g(x) \geq f(x)$, což je spor.

V důkazu (c) rozlišíme dva případy. Položme $L \coloneqq L_f = L_g$ a ať nejprve $L \in \mathbb{R}$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existují $\delta_f, \delta_g > 0$ taková, že pro $x \in R(a, \delta_f)$ platí

$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$

a pro $x \in R(a, \delta_g)$ zas

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon.$$

Z předpokladu existuje prstencové okolí $R(a, \eta)$, na němž $f \leq h \leq g$. Pročež, pro $x \in R(a, \min(\delta_f, \delta_g, \eta))$ máme

$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon,$$

z čehož plyne $h(x) \in B(L, \varepsilon)$, neboli $\lim_{x\to a} h(x) = L$.

Pro $L = \infty$ postupujeme jednodušeji, neboť stačí dolní odhad. K danému $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta)$ platí

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Pak pro $x \in R(a, \min(\delta, \eta))$ máme odhad

$$\frac{1}{\varepsilon} < f(x) \leq h(x),$$

čili $h(x) \in B(\infty, \varepsilon)$, což dokazuje rovnost $\lim_{x\to a} h(x) = \infty$.

Případ $L = -\infty$ se ošetří horním odhadem funkcí g. ■

Cvičení 4.1.11

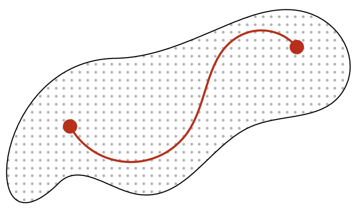
Spočtěte následující limity funkcí

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{3x + \frac{2}{x}}{x + \frac{4}{x}},$$
$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 + x} - x,$$
$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x-1} - 2x}{x - 7}.$$

4.2 Spojité funkce

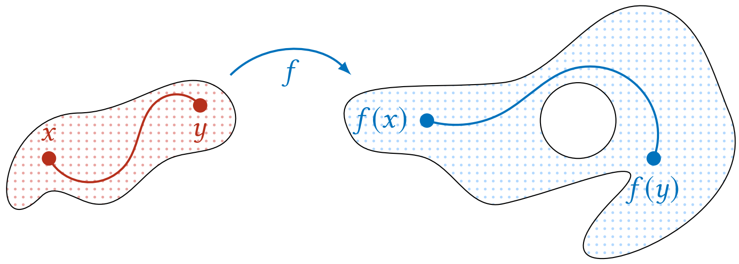
Vlastnost spojitosti funkce či zobrazení je zcela jistě tou nejdůležitější především v topologii (disciplíně zpytující „tvar" prostoru), kde se vlastně s jinými zobrazeními než spojitými v obec nepracuje.

Intuitivně je zobrazení *spojité* v moment, kdy zobrazuje souvislé části prostoru na souvislé části prostoru. Souvislostí se zde myslí vlastnost konkrétní podmnožiny prostoru (třeba $\mathbb{R}^n$), kdy z každého bodu do každého jiného bodu existuje cesta (křivka v prostoru), která tuto podmnožinu neopustí (obrázek 4.6).



Obrázek 4.6: Souvislá podmnožina $\mathbb{R}^2$.

Spojité zobrazení lze tudíž definovat tím způsobem, že dva obrazy lze vždy spojit křivkou, která neopouští obraz souvislé podmnožiny obsahující jejich vzory. Jednoduševi, spojité zobrazení nesmí „roztrhnout“ souvislou podmnožinu prostoru, i když do ní může například „udělat díry“.



Obrázek 4.7: Spojité zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

V první dimenzi je situace pochopitelně výrazně jednodušší. Souvislou podmnožinou $\mathbb{R}$ je *interval*, a tedy spojité zobrazení je takové, které zobrazuje interval na interval. Díry v intervalu zřejmě není možné dělat bez téhož kompletního roztržení. Takto se však, primárně z důvodův technických, spojité zobrazení obyčejně nedefinuje a vlastnost zachování intervalu dlužno dokázat.

Pojem limity funkce umožňuje definovat spojitou funkci jako tu, která se v každém bodě blíží ke své skutečné hodnotě, tj. nedělá žádné „skoky“.

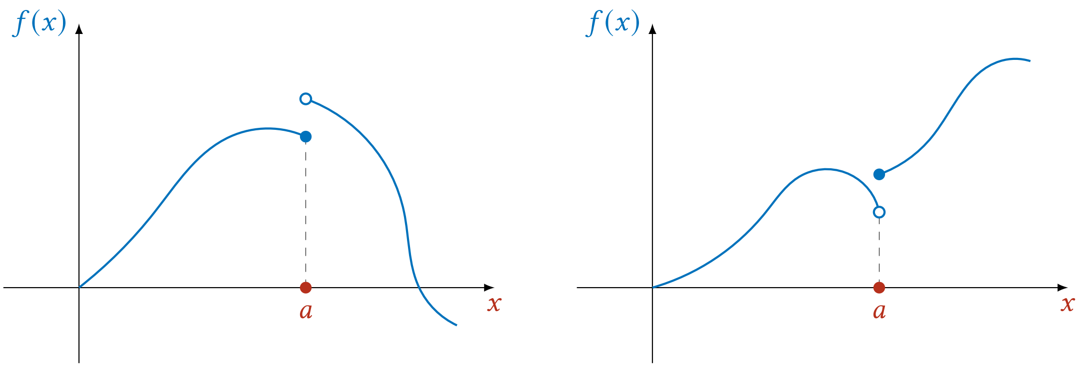
Definice 4.2.1 (Spojitá funkce)

Ať $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že reálná funkce f je *spojitá v bodě* a, pokud

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Poznámka 4.2.2 (Jednostranně spojitá funkce)

Obdobně předchozí definici tvrdíme, že funkce f je *spojitá zleva, resp. zprava, v bodě* $a \in \mathbb{R}$, pokud $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, resp. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Ona funkce je pak spojitá v bodě a, když je v a spojitá zleva i zprava.



(a) Funkce f spojitá zleva (ale ne zprava) v bodě a. (b) Funkce f spojitá zprava (ale ne zleva) v bodě a.

Obrázek 4.8: Jednostranná spojitost

Definice 4.2.3 (Funkce spojitá na intervalu)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že reálná funkce f je *spojitá na* I, je-li

- spojitá v každém vnitřním bodě I,
- spojitá zprava v levém krajním bodě I, pokud tento leží v I a
- spojitá zleva v pravém krajním bodě I, pokud tento leží v I.

Nyní se jmeme dokázat, že spojité funkce na intervalu (souvislé množině) mají skutečně ony přirozené vlastnosti, jimiž jsme je popsali v úvodu do této sekce. Konkrétně dokážeme, že spojité funkce zobrazují interval na interval. K tomu poslouží ještě jedno pomocné tvrzení, známé též pod přespříliš honosným názvem „Bolzanova věta o nabývání mezihodnot".

Věta 4.2.4 (Bolzanova)

Nechť f je reálná funkce spojitá na $[a, b]$ a $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) = y$.

Důkaz. Ať je $y \in (f(a), f(b))$ dáno. Označme

$$M \coloneqq \{z \in [a, b] \mid f(z) < y\}.$$

Ukážeme, že množina M má konečné supremum. K tomu potřebujeme ověřit, že je neprázdná a shora omezená. Protože $f(a) < y$, jistě $a \in M$. Podobně, jelikož $y < f(b)$, je b horní závorou M. Existuje tedy $\sup M$, které označíme S. Jistě platí $S \in (a, b)$. Ukážeme, že $f(S) = y$ vyloučením možností $f(S) < y$ a $f(S) > y$.

Ať nejprve $f(S) < y$. Protože f je z předpokladu spojitá (čili $\lim_{c \to S} f(c) = f(S) < y$), existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $c \in (S, S + \varepsilon)$ platí $f(c) < y$. To je ovšem spor s tím, že S je horní závorou M. Nutně tedy $f(S) \geq y$.

Ať nyní $f(S) > y$. Opět ze spojitosti f nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že pro $c \in (S - \varepsilon, S)$ platí $f(c) > y$. Dostáváme spor s tím, že S je **nejmenší** horní závorou M.

Celkem vedly obě ostré nerovnosti ke sporu, tudíž $f(S) = y$ a důkaz je hotov. ■

Důsledek 4.2.5

Ať $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ je funkce spojitá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak $f(I)$ je interval.

Důkaz. Volme $y_1, y_2 \in f(I), y_1 < y_2$.

Protože $y_1, y_2 \in f(I)$, existují $x_1, x_2 \in I$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 < x_2$. Potom z Bolzanovy věty pro každé $y \in (f(x_1), f(x_2))$ existuje $z \in (x_1, x_2)$ takové, že $f(z) = y$. Potom však z definice $y \in f(I)$, a tedy je $f(I)$ interval. ■

4.3 Hlubší poznatky o limitě funkce

Kapitolu o limitách funkcí dovršíme několika – v dalším textu zásadními – tvrzeními. Některá z nich se vížou na pojem spojitosti funkce, některá nikoliv. Ukážeme si rovněž souvislost limit funkcí s limitami posloupností; uzříme, že je to v jistém širém smyslu týž koncept.

Nejprve se pozastavíme nad chováním limit funkcí vzhledem k jejich skládání. Je vskutku velmi přirozené – má-li funkce g limitu A v bodě a a funkce f limitu B v bodě A, pak $f \circ g$ má limitu B v bodě a, jak by jeden čekal. Toto tvrzení má však své předpoklady; pro libovolné dvě funkce pravdivé není.

Věta 4.3.1 (Limita složené funkce)

Ať $a, A, B \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou reálné funkce. Nechť navíc platí

$$\lim_{x \to a} g(x) = A \quad a \quad \lim_{y \to A} f(y) = B.$$

*Je-li splněna **aspoň jedna** z podmínek:*

(R) existuje prstencové okolí a, na němž platí $g \neq A$;

(S) funkce f je spojitá v A,

pak

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = B.$$

Důkaz. Důkaz tvrzení není příliš obtížný, ovšem poněkud technický a alfabeticky tíživý. Potřebujeme ukázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že všechna $x \in R(a, \delta)$ splňují $f(g(x)) \in B(B, \varepsilon)$. Nechť je tedy $\varepsilon > 0$ dáno.

Předpokládejme, že platí (R) a máme $\eta > 0$, pro něž $g(x) \neq A$, kdykoli $x \in R(a, \eta)$. Ježto platí $\lim_{y \to A} f(y) = B$, existuje k danému $\varepsilon > 0$ číslo $\delta_f > 0$ takové, že pro $y \in R(A, \delta_f)$ platí $f(y) \in B(B, \varepsilon)$. K tomuto $\delta_f > 0$ pak existuje $\delta_g > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta_g)$ platí $g(x) \in B(A, \delta_f)$. Volíme-li nyní $\delta \coloneqq \min(\eta, \delta_g)$, pak pro $x \in R(a, \delta)$ platí

$$g(x) \in B(A, \delta_f) \quad \text{i} \quad g(x) \neq A,$$

kteréžtě dvě podmínce dávajíta celkem $g(x) \in B(A, \delta_f) \setminus \{A\} = R(a, \delta_f)$. Potom však pro $x \in R(a, \delta)$ platí $g(x) \in R(A, \delta_f)$, tudíž $f(g(x)) \in B(B, \varepsilon)$, jak jsme chtěli.

Ať naopak platí (S). Pak smíme pro spojitost f v A ve výroku

$$\forall y \in R(A, \delta_f) : f(y) \in B(B, \varepsilon)$$

místo prstencového okolí $R(A, \delta_f)$ brát plné okolí $B(A, \delta_f)$, neboť $f(A) = \lim_{y \to A} f(y) = B \in B(B, \varepsilon)$. Protože pro $x \in R(a, \delta_g)$ však platí $g(x) \in B(A, \delta_f)$, máme rovněž $f(g(x)) \in B(B, \varepsilon)$, čímž je důkaz hotov. ■

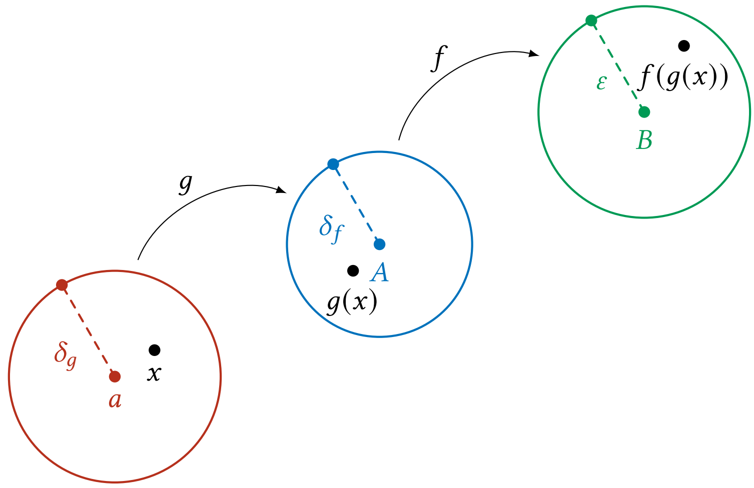
Varování 4.3.2

Platnost aspoň jedné z podmínek (R),(S) v předchozí větě je nezanedbatelná.

Vezměme $f(y) = |\operatorname{sgn} y|$ a $g(x) = 0$. Potom platí

$$\lim_{y\to 0} f(y) = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0,$$

ale $\lim_{x\to 0}(f \circ g)(x) = 0 \neq 1$. Závěr předchozí věty je v tomto případě neplatný pro to, že neexistuje okolí a, na němž $g \neq 0$ (tj. neplatí (R)), ani není f spojitá v 0 (tj. neplatí (S)).



Obrázek 4.9: Důkaz věty o limitě složené funkce.

Pokračujeme vztahem limit posloupností a limit funkcí. Ukazuje se, že limitu funkce možno v principu nahradit limitou posloupnosti jejích funkčních hodnot. Toto tvrzení je zvlášť užitečné při důkazu *neexistence* oné limity. Stačí totiž najít dvě posloupnosti, funkční hodnoty jejichž členů se blíží k rozdílným číslům či kterákolivěk z nich neexistuje.

Věta 4.3.3 (Heineho)

Ať f je reálná funkce a $a, L \in \mathbb{R}^*$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

*(2) Pro **každou** posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takovou, že*

- $\lim_{n\to\infty} x_n = a$;
- $x_n \neq a$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$,

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Důkaz. Dokážeme nejprve (1) $\Rightarrow$ (2). Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Potřebujeme najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Uvědomme si, že poslední výrok je ekvivalentní

$$L - \varepsilon < f(x_n) < L + \varepsilon,$$

neboli $f(x_n) \in B(L, \varepsilon)$. Z toho, že $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existuje $\delta > 0$ takové, že všechna $x \in R(a, \delta)$ splňují $f(x) \in B(L, \varepsilon)$. Ježto $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, existuje k tomuto $\delta > 0$ index $n_0 \in \mathbb{N}$

takový, že

$$\forall n \geq n_0 : |x_n - a| < \delta,$$

neboli $x_n \in B(a,\delta)$. Předpokládáme ovšem, že $x_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy $x_n \in R(a,\delta)$, kdykoli $n \geq n_0$. Potom ale pro $n \geq n_0$ rovněž $f(x_n) \in B(L,\varepsilon)$, čili $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

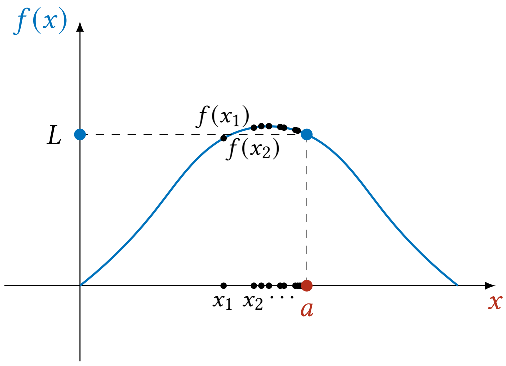
Místo přímého důkazu (2) $\Rightarrow$ (1) (který je zdlouhavý), dokážeme $\neg(1) \Rightarrow \neg(2)$. Předpokládejme tedy, že $\lim_{x\to a} f(x)$ buď neexistuje, nebo není rovna L. Chceme najít posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, která konverguje k a, žádný její člen není roven a, ale přesto $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ opět buď neexistuje, nebo není rovna L.

Uvědomíme si nejprve přesně, jak zní **negace** výroku $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Tvrdíme, že

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in R(a,\delta) : f(x) \text{ není definováno} \vee f(x) \notin B(L,\varepsilon).$$

Nalezněme tedy ono $\varepsilon > 0$ z výroku výše. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in R(a, 1/n)$ pro které $f(x_n)$ není definováno, nebo neleží v $B(L,\varepsilon)$. Vlastně jsme ve výroku výše položili $\delta := 1/n$ postupně pro každé $n \in \mathbb{N}$. Sestrojili jsme pročež posloupnost x_n takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ a $x_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Nicméně, jak jsme psali výše, pro každé x_n buď $f(x_n)$ není definováno, nebo neleží v $B(L,\varepsilon)$. To ovšem znamená, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ buď neexistuje, nebo není rovna L. Platí tudíž předpoklady v (2), ale nikoli závěr v (2), tj. platí $\neg(2)$.

Tím je důkaz hotov. ■



Obrázek 4.10: Tvrzení (2) v Heineho větě.

Důsledek 4.3.4 (Heineho věta pro spojitost)

Ať $a \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(1) Funkce f je spojitá v bodě a.

(2) Pro každou posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s limitou $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.

Důkaz. Zkrátka použijeme Heineho větu pro $L = f(a)$. Poznamenejme pouze, že podmínka $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zde zbytečná, neboť f je z předpokladu spojitá v a. ■

Příklad 4.3.5

V zájmu nabytí představy, jak se Heineho věta používá pro důkaz neexistence limity funkce, budeme drze předpokládat, že čtenáři byli již seznámeni s funkcí $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$. Její formální debut dlí v kapitole o elementárních funkcích.

Ukážeme, že limita $\lim_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje. Volme posloupnosti

$$x_n \coloneqq 2\pi n \quad \text{a} \quad y_n \coloneqq 2\pi n + \pi/2.$$

Pak platí $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ i zřejmě $x_n \neq \infty$ a $y_n \neq \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jsou proto splněny předpoklady tvrzení (2) z Heineho věty. Platí však

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0,\\ \lim_{n\to\infty} \sin(y_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n + \pi/2) = 1,\end{aligned}$$

a tedy jsme našli dvě posloupnosti, funkční hodnoty jejichž členů konvergují k různým číslům. Podle Heineho věty $\lim_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje.

Podobně jako monotónní posloupnosti mají vždy limitu (vizte lemma 3.3.15), stejně tak monotónní funkce ji vždy mají. Tento přirozený pojem briskně představíme. Řčeme, že reálná funkce f je *monotónní na intervalu* $I \subseteq \mathbb{R}$, když

($<$) je f *rostoucí*, tj. $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,

($>$) je f *klesající*, tj. $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$,

($\leq$) je f *neklesající*, tj. $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ nebo

($\geq$) je f *nerostoucí*, tj. $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Věta 4.3.6 (Limita monotónní funkce)

Ať $(a, b) \subseteq \mathbb{R}^*$ a f je monotónní na (a, b). Potom,

(1) jsouc f rostoucí nebo neklesající má limity

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup f((a, b));$$

(2) jsouc f klesající nebo nerostoucí má limity

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \sup f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

Důkaz. Dokážeme pouze část (1), důkaz (2) je totožný.

Budeme nejprve předpokládat, že f je zdola omezená a označíme $m \coloneqq \inf f((a, b)) \in \mathbb{R}$. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Z definice infima nalezneme $y \in f((a, b))$ takové, že $y < m + \varepsilon$. Jelikož $y \in f((a, b))$, existuje $x \in (a, b)$, že $f(x) = y$. Z toho, že f je neklesající či rostoucí plyne, že pro každé $z \in (a, x)$ je $f(z) \leq f(x) = y$.

Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $R_+(a, \delta) = (a, a + \delta) \subseteq (a, x)$. Potom ale pro $z \in R_+(a, \delta)$ platí $f(z) \leq y < m + \varepsilon$. Ježto nerovnost $f(z) > m - \varepsilon$ je zřejmá (m je dolní závora f), máme celkem pro $z \in R_+(a, \delta)$

$$m - \varepsilon < f(z) < m + \varepsilon,$$

čili $f(z) \in B(m, \varepsilon)$, jak bylo dokázati.

Ať nyní f není zdola omezená na (a, b). Pak $\inf f(a, b) = -\infty$ a pro každé $\varepsilon > 0$ nalezneme $z \in (a, b)$, pro nějž $f(z) < -1/\varepsilon$. To ovšem z definice znamená, že $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty = \inf f((a, b))$.

Důkaz faktu, že $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup f((a, b))$ lze vést obdobně. ■

Cvičení 4.3.7

Dokažte bod (2) ve větě 4.3.6.

4.3.1 Extrémy funkce

V mnoha matematických i externích disciplínách jeden často hledá při studiu reálných funkcí body, v nichž je hodnota funkce největší či nejmenší. Obecně jsou maximalizační a minimalizační problémy jedny z nejčastěji řešených. Tyto problémy vedou přímo na výpočet tzv. *derivací* reálných funkcí, jsoucích dychtivým čtenářům představeny v následující kapitole. Zde pouze definujeme lokální a globální extrémy funkcí a ukážeme, že spojité funkce na uzavřených intervalech nutně na týchž nabývají svých nejmenších i největších hodnot.

Definice 4.3.8 (Lokální a globální extrém)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce a $X \subseteq M$. Řekneme, že funkce f v bodě $x \in X$ nabývá

- *globálního maxima* na X, když pro každé $y \in X$ platí $f(y) \leq f(x)$;
- *globálního minima* na X, když pro každé $y \in X$ platí $f(y) \geq f(x)$;
- *lokálního maxima*, když existuje okolí bodu x, na němž platí $f \leq f(x)$;
- *lokálního minima*, když existuje okolí bodu x, na němž platí $f \geq f(x)$.

Souhrnně přezdíváme globálnímu minimu a maximu *globální extrém* a lokálnímu maximu a minimu *lokální extrém*.

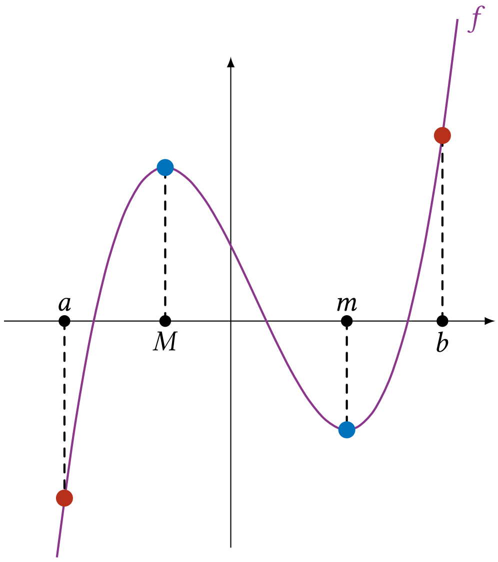
Jak jsme již zmínili v textu před definicí, spojité funkce nabývají na uzavřených intervalech globálních extrémů vždy.

Věta 4.3.9 (Extrémy spojité funkce)

Ať $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak f nabývá globálního minima a maxima na $[a, b]$.

Důkaz. Dokážeme, že f nabývá na $[a, b]$ globálního maxima. Pro globální minimum lze důkaz vést obdobně.

Využijeme důsledku 4.3.4. Nalezneme posloupnost, která se uvnitř intervalu $f([a, b])$ blíží k supremu funkce f na $[a, b]$ a ukážeme, že vzory členů této posloupnosti z intervalu $[a, b]$ se blíží k bodu, kde f nabývá maxima.



Obrázek 4.11: Lokální a globální extrémy funkce f na $[a, b]$. Lokálních extrémů nabývá f v bodech m a M a globálních extrémů v bodech a a b.

Položme tedy $S \coloneqq \sup f([a, b])$. Sestrojíme posloupnost $y : \mathbb{N} \to f([a, b])$, která konverguje k S. Je-li $S = \infty$, stačí položit třeba $y_n = n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $S \in \mathbb{R}$. Z definice suprema existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $z \in f([a, b])$ takový, že $S - 1/n < z \leq S$. Položíme $y_n \coloneqq z$. Tím jsme dali vzrůst posloupnosti y_n s $\lim_{n\to\infty} y_n = S$.

Z definice $f([a, b])$ nalezneme pro každé y_n číslo $x_n \in [a, b]$, pro něž $f(x_n) = y_n$. Posloupnost x_n je omezená (leží uvnitř $[a, b]$), a tedy z Bolzanovy-Weierstraßovy věty existuje její konvergentní podposloupnost. Můžeme pročež bez újmy na obecnosti předpokládat, že sama x_n konverguje. Položme $M \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_n$. Ježto $a \leq x_n \leq b$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, z lemmatu 3.4.4 plyne, že $M \in [a, b]$. Konečně, f je z předpokladu spojitá, a tedy v závěsu důsledku 4.3.4

$$f(M) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = S,$$

čili f nabývá v bodě M maxima na $[a, b]$. ■

Důsledek 4.3.10

Je-li funkce f spojitá na $[a, b]$, pak je tamže omezená.

Důkaz. Z věty 4.3.9 plyne, že f nabývá na $[a, b]$ minima s a maxima S. Potom ale pro každé $x \in [a, b]$ platí

$$s \leq f(x) \leq S,$$

čili f je na $[a, b]$ omezená. ■

4.4 Pár příkladů na konec

Účelem této „přiložené“ sekce je ukázat na dvou zajímavých příkladech obvyklé metody práce s limitami funkcí. Doufáme, že čtenářům dobře pomůže uchápění tohoto tématu, snad náročnějšího k vnětí než limity posloupností a součty řad.

Příklad 4.4.1

Ať g je rostoucí a spojitá funkce na $[1, \infty)$ s $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$ a f je **nekonstantní periodická** funkce na $\mathbb{R}$. Pak $\lim_{x\to\infty}(f \circ g)(x)$ neexistuje.

Pro důkaz neexistence limity máme (pochopitelně kromě samotné definice) zatím pouze dva nástroje – jednostranné limity a Heineho větu. Protože limitním bodem je ∞, použití jednostranných limit není možné. Zkusíme tedy Heineho větu.

Nejprve si uvědomíme, že z důsledku 4.2.5 je $g([1, \infty))$ je interval. Tento navíc není shora omezen, bo $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$. Na oba tyto fakty se budeme vícekrát odvolávat. Označme rovněž písmenem $p > 0$ periodu funkce f.

Položme nyní $x_0 \coloneqq 1$ a označme $y_0 \coloneqq g(x_0)$, $A \coloneqq f(y_0)$. Induktivně sestrojíme posloupnosti $x : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ a $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Předpokládejme, že jsou dány členy $x_0, \ldots, x_k$ a $y_0, \ldots, y_k$, kde $y_i = g(x_i)$ pro každé $i \leq k$. Položíme $y_{k+1} \coloneqq y_k + p$. Potom $f(y_{k+1}) = f(y_k)$. Protože $g([1, \infty)) = [y_0, \infty)$ a $y_{k+1} > y_0$, nalezneme $x_{k+1} \in [1, \infty)$ takové, že $g(x_{k+1}) = y_{k+1}$. Jelikož g je rostoucí a

$$g(x_{k+1}) = y_{k+1} > y_k = g(x_k),$$

rovněž $x_{k+1} > x_k$. Celkem máme $x_{n+1} > x_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, čili $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$. Rovněž

$$\lim_{n\to\infty} (f \circ g)(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{n\to\infty} A = A,$$

neboť členy posloupnosti y jsou od sebe vzdáleny o periodu p funkce f.

Konečně, nalezneme jinou posloupnost $\tilde{x} : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ takovou, že $\lim_{n\to\infty}(f \circ g)(\tilde{x}_n) \neq A$, čímž završíme důkaz. Volme libovolné $0 < \varepsilon < p$. K tomuto ε nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$|g(x_0 + \delta) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

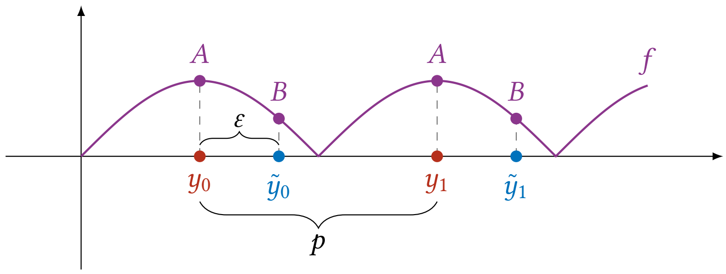
Toto δ vskutku existuje pro to, že g je rostoucí – tudíž $g(x_0 + \delta) > g(x_0)$ – a spojitá – tudíž dvě různé funkční hodnoty lze volit nekonečně blízké.

Položíme $\tilde{x}_0 \coloneqq x_0 + \delta$ a $\tilde{y}_0 \coloneqq g(\tilde{x}_0)$. Potom $f(\tilde{y}_0) = B \neq A$, ježto $\tilde{y}_0 \in (y_0, y_0 + p)$. Podobně jako dříve sestrojíme posloupnost $\tilde{x}_n$ takovou, že $\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \infty$ a $(f \circ g)(\tilde{x}_n) = B$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Potom ale platí

$$\lim_{n\to\infty} (f \circ g)(\tilde{x}_n) = B \neq A = \lim_{n\to\infty} (f \circ g)(x_n),$$

čili z Heineho věty $\lim_{x\to\infty}(f \circ g)(x)$ neexistuje.



Obrázek 4.12: Posloupnosti y a $\tilde{y}$ z příkladu 4.4.1.

Příklad 4.4.2 (Singularity funkce)

Ať $a \in M$ a $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce definovaná aspoň na prstencovém okolí bodu a. Předpokládejme, že f není spojitá v a. Pak řekneme, že f má v a

- **odstranitelnou singularitu**, když existuje konečná $\lim_{x \to a} f(x)$. V tomto případě můžeme dodefinovat $f(a) \coloneqq \lim_{x \to a} f(x)$;
- **pól**, když existují $\lim_{x \to a^+} f(x)$ a $\lim_{x \to a^-} f(x)$, ale nejsou si rovny;
- **neodstranitelnou singularitu**, když aspoň jedna z jednostranných limit f v bodě a neexistuje.

Singularity funkcí tvoří důležitou část komplexní analýzy, kde poskytují obraz zejména o stabilitě fyzikálních systému popsaných těmito funkcemi. *Odstranitelné singularity* jsou velmi stabilní a většinou způsobeny pouze chybami v měření. *Póly* jsou stabilní při vhodné aproximaci, avšak v grafu komplexních funkcí jedné proměnné vypadají vlastně jako nekonečné stále se zúžující tuby. Lze si je představovat například jako Gabrielův roh. Vhodnou aproximací je zde uříznutí tohoto tělesa ve zvolené „výšce“. Konečně, *neodstranitelné singularity* jsou vskutku neodstranitelné. Dokonce platí věta, že komplexní funkce jedné proměnné s neodstranitelnou singularitou nabývají **úplně všech** hodnot z $\mathbb{C}$ na libovolně malém okolí této singularity. Menší stability již dosáhnout nelze. Neodstranitelné singularity si, tvrdíme, nelze ani rozumně představit.

Ukážeme, že aspoň pro funkce jedné *reálné* proměnné, jimiž se v tomto textu zabýváme, jsou množiny všech odstranitelných singularit i pólů spočetné.

K důkazu prvního tvrzení uvažme množiny

$$A \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{t \to x} f(t) < f(x)\} \quad \text{a} \quad B \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{t \to x} f(t) > f(x)\}.$$

Platí, že množina odstranitelných singularit f je rovna $A \cup B$. Zjevně tedy stačí dokázat, že každá z obou množin je spočetná. Provedeme onen důkaz pro množinu A, pro B lze vést analogicky.

Protože jsou $\mathbb{Q}$ hustá v $\mathbb{R}$, nalezneme pro každé $x \in A$ racionální číslo $r_x \in \mathbb{Q}$ takové, že

$$\lim_{t \to x} f(t) < r_x < f(x).$$

Pak platí $A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} A_r$, kde

$$A_r = \{x \in A \mid r_x = r\}.$$

Dokážeme, že každá z množin A_r je spočetná. Volme $r \in \mathbb{Q}$. Protože $\lim_{t\to x} f(t) < r$ pro každé $x \in A_r$, nalezneme δ_x takové, že pro $t \in R(x, \delta_x)$ platí $f(t) < r$. Dále nahlédneme, že pro každé $x \neq y \in A_r$ platí

$$(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x) \cap (y - \frac{1}{2}\delta_y, y + \frac{1}{2}\delta_y) = \emptyset.$$

Pro spor ať platí opak. Nalezneme $x \neq y \in A_r$ taková, že $|x - y| < \delta_x/2 + \delta_y/2$. Jest-li $\delta_x \leq \delta_y$, pak $|x - y| \leq \delta_y$, čili $f(x) < r_y = r$, neboť $x \in P(y, \delta_y)$. Z definice r_x však také $f(x) > r_x = r$, což je spor. Případ $\delta_x > \delta_y$ vede rovněž ke sporu na základě obdobného argumentu. Odtud plyne, že A_r je spočetná, bo každý bod A_r má kolem sebe okolí, v němž neleží žádné jiné body A_r. To mimo jiné znamená, že bodů A_r je nejvýše tolik, jak racionálních čísel, tj. spočetně. Ježto $A = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} A_r$, je i A spočetná.

Nyní dokážeme, že f má i spočetně pólů. Definujme opět množiny

$$\begin{aligned} U &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{t\to x^-} f(t) < \lim_{t\to x^+} f(t)\}, \\ V &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{t\to x^-} f(t) > \lim_{t\to x^+} f(t)\}. \end{aligned}$$

Množina pólů funkce f je rovna $U \cup V$. Je třeba ukázat, že každá z množin U, V je spočetná. Důkaz pro U bude zjevně symetrický důkazu pro V, budeme se tudíž zabývat pouze množinou U. Pro každé $x \in U$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ takové, že

$$\lim_{t\to x^-} f(t) < r_x < \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Pak jistě $U = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} U_r$, kde

$$U_r \coloneqq \{x \in U \mid r_x = r\}.$$

Ukážeme, že každá $U_r, r \in \mathbb{Q}$, je spočetná. Pro každé $x \in U_r$ nalezneme $\delta_x > 0$ takové, že

$$\begin{aligned} &\forall t \in R_-(x, \delta_x) : f(t) < r, \\ &\forall t \in R_+(x, \delta_x) : f(t) > r. \end{aligned}$$

Podobně jako v důkazu spočetnosti množiny odstranitelných singularit lze snadno ukázat, že

$$(x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y) = \emptyset$$

pro každá dvě $x \neq y \in U_r$, z čehož plyne, že U_r – a posléze i U – je spočetná.

Kapitola 5

Derivace

Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávejte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.

Derivace funkce je vlastně „velikost změny“ funkce v daný okamžik. Takový pojem se může zdát dost neintuitivní – „Jak se může cosi měnit v jeden okamžik?“ – ale vskutku se s ním setkáváme běžně a divné nám to ani nepřijde.

Kupříkladu rychlost je derivací polohy, tj. představuje velikost změny polohy v čase. Když automobilový tachometr ukazuje, že jedeme rychlostí 60 km/h, co to přesně znamená? Jak si mám představit, že *teď* se moje poloha mění o 60 kilometrů v rámci jedné hodiny? Jeden způsob vnímání dlí v obraze, že za příští hodinu urazím 60 km. Jako hrubá aproximace snad postačuje, ale je snad zřejmé, že pokud se moje rychlost během oné hodiny mění, změní se i výsledně uražená vzdálenost.

Mnoho lidí, kteří se dívají za jízdy na tachometr, si pravděpodobně neuvědomuje, že rychlost jízdy je limitní pojem. Fakt, že *přesně v tuto chvíli* jedu například právě 60 km/h znamená, že čím menší zlomek jedné hodiny nahlédnu do budoucnosti (či do minulosti), tím blíže bude velikost změny mojí polohy odpovídající zlomek 60 km. Za předpokladu, že moje rychlost není konstantní, nebude tato změna nikdy dokonale taková. Tudíž, vím-li, že se pohybuji rychlostí 60 km/h, nevím toho v principu mnoho. Nabývám tím pouze práva tvrdit, že se zmenšujícím se časovým rozdílem mezi přítomností a jistým okamžikem v budoucnu (či v minulu) klesá i rozdíl mezi skutečně překonanou vzdáleností a tou odpovídající uvedené rychlosti.

Formalizace *velikosti okamžité změny* není užitím pojmu limity funkce nikterak obtížná. Před formální definicí si ji ukážeme na příkladě z předšedších odstavců. Ať je moje poloha v čase daná funkcí $p : [0,1] \to \mathbb{R}$, kde $p(0)$ je moje poloha na začátku cesty a $p(1)$ na jejím konci. Zanedbáme pro jednoduchost fakt, že polohu určuje pouze jediné reálné číslo místo své příslušné vícedimenzionální varianty.

Co přesně myslíme rychlostí změny? Napovědí již použité jednotky – km/h. *Změna polohy* je zde rozdíl výsledné polohy od nynější za daný čas. Pro daný čas $t \in [0,1]$, pak *změna polohy* v tomto čase za danou dobu $h \in [0,1]$ je

$$z_t(h) = \frac{p(t+h) - p(t)}{h}.$$

Vskutku, ať například $t = 0$, tedy jsem na začátku cesty, třeba na třicátém kilometru dálnice, čili $p(0) = 30$. Pojedu jednu hodinu. V půli cesty se podívám na postranní milník a vidím, že jsem na stém kilometru téže dálnice, čili $p(1/2) = 100$. Urazil jsem tudíž za půl hodiny přesně 70 km. Z těchto údajů soudím, že byla-li by moje rychlost konstantní, urazil bych 140 km za jednu hodinu. Vyjádřeno pomocí funkce změny, mám

$$z_0(1/2) = \frac{p(0 + 1/2) - p(0)}{1/2} = \frac{100 - 30}{1/2} = 140.$$

Velikost okamžité změny funkce p v daném čase t bude pročež limita uvedené funkce z, jak se bude doba h blížit 0.

Odstavce výše shrneme v následujících definicích.

Definice 5.0.1 (Funkce změny)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. *Funkcí změny* f v bodě $a \in M$ myslíme funkci $z_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$z_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Definice 5.0.2 (Derivace funkce)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. *Derivací*, nebo též *funkcí okamžité změny*, funkce f v bodě $a \in M$ myslíme limitu

$$\lim_{h \to 0} z_a(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pokud tato existuje. V takovém případě ji značíme $f'(a)$.

Poznámka 5.0.3 (Jednostranné derivace)

Podobně lze rovněž definovat derivaci funkce f v bodě a zleva, resp. zprava, jako

$$\lim_{h \to 0^-} z_a(h), \text{ resp. } \lim_{h \to 0^+} z_a(h).$$

Intuitivně tato aproximuje, jak se funkce f před okamžikem měnila, resp. bude za okamžik měnit. Přirozeně, derivace funkce existuje právě tehdy, když existují jednostranné derivace a jsou si rovny.

Přirozená substituce vede na alternativní vzorec pro výpočet $f'(a)$.

Lemma 5.0.4 (Alternativní vzorec derivace)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ a $a \in M$. Pak $f'(a)$ existuje právě tehdy, když existuje

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a v tomto případě se rovnají.

Důkaz. Dokážeme implikaci ($\Longrightarrow$). Ať existuje $f'(a)$. Položme

$$F(h) \coloneqq \frac{f(a+h)-f(a)}{h},$$

tj. $\lim_{h\to 0} F(h) = f'(a)$, a rovněž

$$g(x) = x - a.$$

Pak platí $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ a g je na okolí a prostá. Z věty o limitě složené funkce platí

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} F(h) = \lim_{x\to a} (F\circ g)(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Pro důkaz ($\Longleftarrow$) předpokládejme, že existuje

$$L \coloneqq \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Položme

$$F(x) \coloneqq \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

a $g(h) = h + a$. Pak $\lim_{x\to a} F(x) = L$, $\lim_{h\to 0} g(h) = a$ a g je prostá na okolí a. Opět z věty o limitě složené funkce dostaneme rovnost

$$L = \lim_{x\to a} F(x) = \lim_{h\to 0} (F\circ g)(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a),$$

což zakončuje důkaz. ■

Úloha 5.0.5 (Derivace konstantní funkce)

Ať $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in M$. Dokažte, že pak platí $f'(a) = 0$ pro každé $a \in M$.

Řešení. Platí

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{c-c}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{0}{x-a} = 0,$$

jak jsme chtěli. ♠

Úloha 5.0.6 (Derivace polynomu)

Ať $f(x) \coloneqq x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $f'(a) = na^{n-1}$.

Řešení. Počítáme

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n-a^n}{x-a}.$$

Snadno ověříme, že platí

$$x^n - a^n = (x-a)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i}\right).$$

Z čehož ihned

$$\frac{x^n-a^n}{x-a} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i},$$

a tedy

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} \sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i a^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1},$$

což bylo dokázati. ♠

Cvičení 5.0.7

Dokažte, že derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0 neexistuje.

Cvičení 5.0.8

Připomeňme, že funkce *signum* je definována následovně.

$$\operatorname{sgn}(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{když } x > 0, \\ 0, & \text{když } x = 0, \\ -1, & \text{když } x < 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $\operatorname{sgn}'(0) = \infty$.

Lemma 5.0.9 (Vztah derivace a spojitosti)

*Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, $a \in M$ a existuje **konečná** $f'(a)$. Pak je f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Jelikož $f'(a)$ existuje konečná, z věty o aritmetice limit plyne, že

$$\lim_{x \to a} f'(a) \cdot (x - a) = 0.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \lim_{x \to a} f(x) - f(a) = 0,$$

z čehož ihned

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

čili f je spojitá v a. ■

Varování 5.0.10

Předpoklad nejen existence, ale i **konečnosti** derivace ve znění lemmatu 5.0.9 nelze vynechat. Z cvičení 5.0.8 plyne, že $\operatorname{sgn}'(0)$ existuje, ale funkce sgn zcela jistě není v bodě 0 spojitá.

5.1 Základní poznatky o derivaci

Tato sekce shrnuje základní tvrzení, která činí z výpočtu derivací překvapivě silně algoritmický proces, přirozeně za předpokladu znalosti derivací jistých „běžných" funkcí.

Začneme tím, jak se derivace chová vzhledem ke součtu, součinu a podílu funkcí.

Věta 5.1.1 (Aritmetika derivací)

Ať $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a $a \in M$. Pak platí

(1) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, *dává-li pravá strana smysl;*

(2) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, *dává-li pravá strana smysl, g je spojitá v a platí $g(a) \neq 0$;*

(3) $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, *dává-li pravá strana smysl a f/g je spojitá v a.*

Důkaz. Podobně jako tomu bylo i v případě věty o aritmetice limit, je důkaz tohoto tvrzení zdlouhavý a výpočetní. Důkaz bodu (1) je triviální a bodu (2) snadný; jsou pročež přenechány čtenáři. Dokážeme bod (3).

Protože f/g je z předpokladu spojitá v a, nalezneme $\delta > 0$ takové, že g je nenulová na $B(a, \delta)$. Pro $x \in B(a, \delta)$ počítáme

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\
&= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\
&= \frac{1}{g(x)g(a)} \left((f(x) - f(a))g(a) - f(a)(g(x) - g(a))\right).
\end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}\right) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(a) - f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} g(a) - \lim_{x \to a} f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x-a}\right) \\
&= \frac{1}{g^2(a)} \left(f'(a)g(a) - f(a)g'(a)\right),
\end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ■

Cvičení 5.1.2

Dokažte body (1) a (2) ve větě 5.1.1.

Věta 5.1.3 (Derivace složené funkce)

Ať g je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a má v tomto bodě derivaci. Nechť f má derivaci v bodě $g(a)$. Potom

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Důkaz. Zdlouhavý a výpočetní. Přeskočíme. ■

Věta 5.1.4 (Derivace inverzní funkce)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá a rostoucí či klesající na I. Pak pro bod a ve vnitřku I platí:

(1) Je-li $f'(a) \neq 0$, potom $(f^{-1})'(f(a)) = 1/f'(a)$;

(2) je-li $f'(a) = 0$, potom $(f^{-1})'(f(a)) = \infty$, když f je rostoucí, a $f^{-1}(f'(a)) = -\infty$, když f je klesající.

Důkaz. Předpokládejme, že f je rostoucí. Pro klesající funkci lze důkaz vést obdobně.

Protože f je spojitá, je z Bolzanovy věty $J \coloneqq f(I)$ interval. Dále, ježto a leží ve vnitřku I, leží rovněž $f(a)$ ve vnitřku J. Existuje pročež $\varepsilon > 0$ takové, že $B(f(a), \varepsilon) \subseteq J$. Dále, f je rostoucí, tedy speciálně prostá, takže existuje $f^{-1} : J \to I$, která je (ze spojitosti f) rovněž spojitá.

Volme nyní $\delta > 0$ tak, aby $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$ a pro $x \in B(a, \delta)$ definujme

$$\varphi(x) \coloneqq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pak přirozeně $\lim_{x\to a} \varphi(x) = f'(a)$. Díky prostotě f^{-1} na $B(f(a), \varepsilon)$ lze díky větě o limitě složené funkce počítat

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x\to a} \varphi(x) = \lim_{y\to f(a)} (\varphi \circ f^{-1})(y) \\ &= \lim_{y\to f(a)} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y\to f(a)} \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - a}. \end{aligned} \tag{$\heartsuit$}$$

Předpokládejme nejprve, že $f'(a) \neq 0$. Pak z věty o aritmetice limit platí

$$\frac{1}{f'(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - a}{y - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = (f^{-1})'(f(a)).$$

Nyní ať $f'(a) = 0$. Pak díky ($\heartsuit$) máme

$$\lim_{y\to f(a)} \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y\to f(a)} \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))} = 0.$$

Funkce

$$\psi(y) \coloneqq \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}$$

je na okolí $R(f(a), \varepsilon)$ kladná, neboť f^{-1} je rostoucí – a tedy $y - f(a) > 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a)) > 0$. Podle tvrzení 4.1.8 platí

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y\to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y\to f(a)} \frac{1}{\psi(y)} = \infty,$$

což zakončuje důkaz. ■

Úloha 5.1.5

Dokažte, že derivací funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ na intervalu $(0, \infty)$ je $x \mapsto \sqrt[n]{x}/nx$, kde $\mathbb{N} \ni n \geq 1$.

Řešení. Funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$ je jistě spojitá a rostoucí na $(0, \infty)$. Její inverzní funkcí je rovněž rostoucí a spojitá $f^{-1}(y) = y^n$, jejíž derivací je $(f^{-1})'(y) = ny^{n-1}$. Podle věty o derivaci inverzní funkce platí pro $x \in (0, \infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{nf^{n-1}(x)} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx},$$

jak jsme chtěli. ♠

Sekci zakončíme vztahem derivaci k extrémům původní funkce, který hraje stěžejní roli mimo jiné v optimalizačních problémech, bo často vedou na hledání minima/maxima jisté funkce.

Tvrzení 5.1.6 (Vztah derivace a extrému)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ má v $a \in M$ lokální extrém. Pak $f'(a)$ buď neexistuje, nebo je nulová.

Důkaz. Dokážeme kontrapozitivní formu tvrzení. Budeme předpokládat, že $f'(a)$ existuje a je různá od nuly. Z toho odvodíme, že f nemá v a lokální extrém.

Ať nejprve $f'(a) > 0$. Pak existuje okolí $R(a, \delta)$, na němž platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Odtud plyne, že $f(x) < f(a)$ pro $x \in (a - \delta, a)$ a $f(x) > f(a)$ pro $x \in (a, a + \delta)$, čili f nemá v a lokální extrém. Případ $f'(a) < 0$ se ošetří obdobně. ■

Varování 5.1.7

Radíme čtenářům, by sobě všimli, že předchozí tvrzení je ve formě *implikace*. Tedy, **má-li** funkce f v bodě a **extrém, pak** $f'(a) = 0$, nebo tato neexistuje. Rovnost $f'(a) = 0$ ani neexistence derivace v bodě a ještě nezaručují, že f má v bodě a jakýkoli extrém.

Jako protipříklad stačí jednoduchá funkce $f(x) = x^3$. Zřejmě $f'(x) = 3x^2$, která je rovna 0 pro $x = 0$, ale x^3 nemá v 0 ani lokální extrém.

Cvičení 5.1.8

Nalezněte lokální i globální extrémy funkce $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 4$.

5.2 Věty o střední hodnotě

Spojitá funkce, jež ve dvou různých bodech nabývá stejných hodnot, musí mít na nějakém místě mezi těmito body konstantní růst – přestat růst a začít klesat či přestat klesat a začít růst. Spojitá funkce musí někde mezi libovolnými dvěma body mít tečnu rovnoběžnou k úsečce spojující odpovídající body v grafu této funkce. Stejný závěr platí i pro spojitou křivku v prostoru.

Tato tvrzení souhrnně slují *věty o střední hodnotě*. Přestože je jejich geometrický význam lákavý, samy o sobě mnoha účelům neslouží. Jejich důležitost dlí spíše v rozvoji další teorie derivací. Formulujeme a dokážeme si je.

Věta 5.2.1 (Rolleova věta o střední hodnotě)

Ať $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě (a, b). Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Podle věty 4.3.9 nabývá f na $[a, b]$ svého minima m a maxima M. Pak zřejmě

$$m \le f(a) \le f(b) \le M. \tag{$*$}$$

Pokud $m = M$, pak je f konstantní na $[a, b]$, a tudíž $f'(c) = 0$ dokonce pro všechna $c \in (a, b)$.

Předpokládejme, že $m < M$. Pak musí být aspoň jedna z nerovností v ($*$) ostrá. Bez újmy na obecnosti, ať $f(b) < M$. Ať $c \in (a, b)$ je takové, že $f(c) = M$. Dle předpokladu nabývá f v bodě c maxima na $[a, b]$, a tedy podle tvrzení 5.1.6 platí $f'(c) = 0$. V případě, kdy $m < f(a)$ postupujeme obdobně. ■

Věta 5.2.2 (Lagrangeova o střední hodnotě)

Ať $a < b$ a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$ majíc derivaci v každém bodě (a, b). Potom existuje c takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Převedeme problém na použití Rolleovy věty. Definujme funkci

$$g(x) \coloneqq f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Potom je g spojitá na $[a, b]$, má derivaci v každém bodě (a, b) a platí $g(a) = g(b)$. Z Rolleovy věty plyne, že existuje $c \in (a, b)$ takové, že $g'(c) = 0$. Tato rovnost rozepsána znamená, že

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

čili

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

jak jsme chtěli. ■

Poznámka 5.2.3

Lagrangeova věta říká, že v jistém bodě $c \in (a, b)$ musí být derivace f v bodě c rovna směrnici přímky spojující body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$.

Důsledek 5.2.4 (Vztah derivace a monotonie)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce majíc v každém bodě (a, b) kladnou, resp. zápornou, derivaci. Pak je f rostoucí, resp. klesající, na I.

DŮKAZ. Volme $[a, b] \subseteq I$ libovolně a předpokládejme, že f' je kladná na I. Podle Lagrangeovy věty existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ježto $f'(c) > 0$, plyne odtud, že $f(b) > f(a)$. Čili f je rostoucí na $[a, b]$. Jelikož $a < b \in I$ byla volena libovolně, je f rostoucí na I. Případ $f' < 0$ na I se ošetří analogicky. ■

Cvičení 5.2.5

Použijte důsledek 5.2.4 k důkazu, že spojitá funkce $f : I \to \mathbb{R}$ mající nulovou derivaci na I, je konstantní.

Věta 5.2.6 (Cauchyho o střední hodnotě)

Ať f, g jsou spojité funkce na $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, f má v každém bodě (a, b) derivaci a g má v každém bodě (a, b) ***konečnou nenulovou*** *derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

DŮKAZ. Z Lagrangeovy věty plyne existence $d \in (a, b)$ takového, že

$$g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Jelikož z předpokladu $g'(d) \neq 0$, rovněž $g(b) \neq g(a)$.

Opět převedeme problém na Rolleovu větu. Definujme funkci

$$\varphi(x) \coloneqq (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)).$$

Pak je φ spojitá na $[a, b]$ (neboť f a g jsou tamže spojité) a má v každém bodě (a, b) derivaci – to plyne z věty o aritmetice derivací a faktu, že f i g mají na (a, b) derivaci.

Navíc, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Z Rolleovy věty existuje $c \in (a, b)$ splňující $\varphi'(c) = 0$. Platí

$$0 = \varphi'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Odtud úpravou

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

což zakončuje důkaz. ■

Poznámka 5.2.7

Cauchyho věta říká, že křivka v rovině $t \mapsto (f(t), g(t))$ má v jistém bodě $c \in (a, b)$ derivaci rovnou směrnici přímky spojující body $(f(a), g(a))$ a $(f(b), g(b))$.

Poznámka 5.2.8

Uvědomme si, že Lagrangeova věta je speciálním případem Cauchyho věty pro $g(x) = x$ a Rolleova věta je zase speciálním případem Lagrangeovy věty, když $f(a) = f(b)$. Ovšem, k důkazu jak Lagrangeovy věty, tak Cauchyho věty, jsme použili téměř výhradně Rolleovu větu. Jedná se pročež o vzájemně ekvivalentní tvrzení, ač to tak na první pohled nevypadá.

5.3 l'Hospitalovo pravidlo

Výpočet limit podílu funkcí patří k nejčastějším úlohám matematické analýzy. Limita podílu funkcí totiž v principu porovnává, o kolik je jedna funkce na okolí tohoto bodu větší než druhá. Je pročež základem aproximace funkcí na okolí bodu mnohem hezčími (například polynomiálními) funkcemi, jak bude vidno v kapitole o Taylorově polynomu. Následující věta – všeobecně známa pod jménem *l'Hospitalovo pravidlo* – že limita podílu funkcí je (za jistých volných podmínek) rovna limitě podílu rychlosti jejich růstu.

Věta 5.3.1 (l'Hospitalovo pravidlo)

Ať $a \in \mathbb{R}^*$, $f, g : M \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a existuje $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Jestliže platí buď

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, *nebo*

(b) $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$,

pak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Položme $L \coloneqq \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Budeme postupovat vcelku přirozeně – sevřeme podíl $f(x)/g(x)$ pro vhodná x v nekonečně malém intervalu (α, β) okolo L. Ačkoli idea je tato přímočará, její realizace je mírně technická. Pro přehlednost povedeme důkaz přes následující pomocné lemma.

Lemma (pomocné)

(1) Pro každé $\alpha > L$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in R(a, \delta) : \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha.$$

(2) Pro každé $\beta < L$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in R(a, \delta) : \frac{f(x)}{g(x)} > \beta.$$

Důkaz. Dokážeme část (1), důkaz (2) je analogický.

Ať je $\alpha > L$ dáno. Volme $r \in (L, \alpha)$. Díky předpokladu existence limity $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ existuje okolí $R(a, \delta_1)$ takové, že f i g jsou definovány na $R(a, \delta_1)$, f má tamže konečnou derivaci a g konečnou nenulovou derivaci. Navíc lze δ_1 volit dostatečně malé, aby

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r \quad \forall x \in R(a, \delta_1).$$

Volme libovolná $x < y \in R(a, \delta_1)$. Podle Cauchyho věty existuje $c \in (x, y)$ splňující

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}.$$

Potom tedy pro každý pár $x < y \in R(a, \delta_1)$ platí

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r.$$

Předpokládejme nyní, že platí podmínka (a) ve znění věty, tj. předpokládejme rovnosti

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Pak pro fixní $y \in (a, a + \delta_1)$ dostaneme

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} \leq r < \alpha$$

a pro $\tilde{y} \in (a - \delta_1, a)$ zase

$$\lim_{x \to a} \frac{f(\tilde{y}) - f(x)}{g(\tilde{y}) - g(x)} = \frac{f(\tilde{y})}{g(\tilde{y})} \leq r < \alpha.$$

Celkově tedy nerovnost $f(y)/g(y) < \alpha$ platí pro každé $y \in R(a, \delta_1)$.

Konečně, ať platí podmínka (b), tj. $\lim_{x \to a} |g(x)| = \infty$. Volme pevné $\tilde{y} \in (a, a + \delta_1)$. Pak

$$\lim_{x \to a} r \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} = r \cdot (1 - 0) + 0 = r < \alpha.$$

Existuje tudíž $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ takové, že pro každé $x \in (a, a + \delta_2)$

$$r \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha.$$

Navíc, díky podmínce (b) lze volit δ_2 dostatečně malé, aby

$$\frac{g(\tilde{y})}{g(x)} < 1 \quad \forall x \in (a, a + \delta_2).$$

Pro $x \in (a, a + \delta_2)$ počítejme

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\
&= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \cdot \frac{g(x) - g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\
&= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)}.
\end{aligned}$$

Můžeme odhadnout

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(\tilde{y})}{g(x)-g(\tilde{y})}\left(1-\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right)+\frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < r\left(1-\frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right)+\frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha.$$

Podobně dokážeme i rovnost $f(x)/g(x) < \alpha$ v případě, kdy x je z vhodného levého prstencového okolí a.

Jelikož důkaz části (b) je zcela symetrický, je pomocné lemma dokázáno. ■

Důkaz (věty 5.3.1). Je-li $L = -\infty$, resp. $L = \infty$, pak tvrzení plyne ihned z části (1), resp. části (2), *pomocného lemmatu*.

Ať $L \in \mathbb{R}$. Volme $\varepsilon > 0$ a pro $\alpha \coloneqq L + \varepsilon$ nalezněme z *pomocného lemmatu*, části (1), $\delta > 0$ takové, že pro $x \in R(a,\delta)$ platí $f(x)/g(x) < \alpha$. Podobně nalezněme, z *pomocného lemmatu* části (2) pro $\beta \coloneqq L - \varepsilon$, číslo $\delta' > 0$ takové, že pro $x \in R(a,\delta')$ platí $f(x)/g(x) > \beta$. Pak ale pro $x \in R(a, \min(\delta,\delta'))$ máme

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in (\beta,\alpha) = (L-\varepsilon, L+\varepsilon),$$

čili $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. ■

Použití l'Hospitalova pravidla pro výpočet limit ponecháme do kapitoly o elementárních funkcích.

Kapitola 6

Elementární funkce

Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávejte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.

Jisté speciální funkce v matematické analýze si vysloužily přízvisko *elementární*. Původ jejich speciality je ryze fyzikální. Jsou to funkce, jejich prostřednictvím fyzikové modelují mnoho přírodních jevů a pojmů – růst, vlnění, proud, gravitaci, úhel …

Ježto fyzikální model světa radno ponechati do textů menší náročnosti, soustředit se budeme pouze na prezentaci těchto funkcí a důkazy jejich základních vlastností.

Všechny elementární funkce definujeme jako součty nekonečných řad. V tomto textu jsme se nezabývali pramnoho konvergencí řad s libovolnými členy. Všechna tvrzení, která tímto směrem budeme vyžadovat, zformulujeme, ač nedokážeme.

6.1 Exponenciála a logaritmus

První na seznamu je *exponenciála* – funkce spojitého růstu. Toto pojmenování ještě níže odůvodníme. Nyní přikročíme k definici. Pro stručnost zápisu, budeme v následujícím textu používat konvenci, že $0^0 = 1$.

Definice 6.1.1 (Exponenciála)

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme
$$\exp x \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Jak jsme čtenáře vystříhali, musíme nyní na krátkou chvíli odbočit k číselným řadám, abychom uměli v obec dokázat, že právě definovaná exponenciála je skutečně reálnou funkcí.

Definice 6.1.2 (Absolutní konvergence řady)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je číselná řada, kde $a_n \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolutně konverguje*, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Lemma 6.1.3

Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Důkaz. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m \geq n \geq n_0$ platí

$$\left|\sum_{k=n}^{m} |a_k|\right| = \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon.$$

Potom ale z trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon,$$

čili $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje. ∎

Definice 6.1.4 (Cauchyho součin řad)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou číselné řady. Jejich *Cauchyho součinem* myslíme číselnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Věta 6.1.5 (Mertensova)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní *číselné řady, přičemž $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je navíc absolutně konvergentní. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ konverguje a platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Věta 6.1.6 (Vlastnosti exponenciály)

Funkce exp *je dobře definována a platí*

(E1) $\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y$;

(E2) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 0$.

Důkaz. *Dobrá definovanost* zde znamená, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} x_n/n!$ konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že konverguje absolutně. Je-li $x = 0$, pak řada konverguje zřejmě. Volme tedy $x \in$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

čili podle věty 3.5.20 řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x^n|/n!$ konverguje, což znamená, že konverguje i $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$.

Dokážeme vlastnost (E1). Počítáme

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}y^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{x^{n-k}y^k}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}.\end{aligned}$$

Všimněme si, že poslední řada je Cauchyho součinem řad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ a $\sum_{n=0}^{\infty} y^n/n!$. Protože jsou obě tyto řady (podle výše dokázaného) absolutně konvergentní, platí z Mertensovy věty

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \exp x \cdot \exp y.$$

Nyní vlastnost (E2). Pro $x \in (-1, 1)$ odhadujme

$$\begin{aligned}\left|\frac{\exp x - 1}{x} - 1\right| &= \left|\frac{\exp x - 1 - x}{x}\right| = \frac{1}{|x|}\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - x - 1\right| = \frac{1}{|x|}\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \\ &= |x|\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!}\right| \le |x|\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\right| = c \cdot |x|,\end{aligned}$$

kde $c > 0$ je hodnota součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$, která zjevně konverguje (například díky nerovnosti $1/n! \le 1/n^2$). Jelikož $\lim_{x\to 0} c \cdot |x| = 0$, plyne odtud ihned, že

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{\exp x - 1}{x} - 1\right| = 0,$$

z čehož zase

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Tím je důkaz završen. ■

Ihned si odvodíme další vlastnosti exponenciály plynoucí z (E1) a (E2). Postupně dokážeme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí následující.

(E3) $\exp 0 = 1$;

(E4) $\exp' x = \exp x$;

(E5) $\exp(-x) = 1/\exp(x)$;

(E6) $\exp x > 0$;

(E7) $\exp$ je spojitá na $\mathbb{R}$;

(E8) exp je rostoucí na $\mathbb{R}$;

(E9) $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$;

(E10) $\operatorname{im} \exp = (0, \infty)$.

Z (E1) platí $\exp(0 + x) = \exp 0 \cdot \exp x$. Protože zřejmě existuje $x \in \mathbb{R}$, pro něž $\exp x \neq 0$, plyne odtud $\exp 0 = 1$, tj. vlastnost (E3).

Pro důkaz (E4) počítáme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp h \cdot \exp x - \exp h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\exp h - 1)\exp x}{h}$$
$$= \exp x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\exp h - 1}{h} = \exp x \cdot 1 = \exp x,$$

kde jsme v červené rovnosti použili vlastnost (E1) a v modré zas vlastnost (E2).

Pokračujeme vlastností (E5). Z (E1) máme

$$\exp(x + (-x)) = \exp x \cdot \exp(-x).$$

Protože z (E3) je $\exp(x + (-x)) = \exp 0 = 1$, dostáváme

$$1 = \exp x \cdot \exp(-x),$$

čili

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

Ježto má řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ zjevně kladný součet pro $x > 0$, plyne (E6) přímo z právě dokázané (E5).

Vlastnost (E7) je okamžitým důsledkem vlastnosti (E4), díky níž má exp konečnou derivaci na $\mathbb{R}$, a tudíž je podle lemmatu 5.0.9 tamže spojitá.

Vlastnost (E8) je důsledkem vlastností (E4) a (E6), neboť funkce majíc na intervalu (v tomto případě celém $\mathbb{R}$) kladnou derivaci, je na tomto intervalu – podle důsledku 5.2.4 – rostoucí.

Platí $\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} > 1$, čili z vlastnosti (E1) plyne, že exp není shora omezená, neboť $\exp(x+1) = \exp x \cdot \exp 1 > \exp x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. To spolu s vlastnostmi (E7) a (E8) dává $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$. Dále, použitím (E5),

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{x\to\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp x} = 0,$$

což dokazuje (E9).

Konečně, vlastnost (E10) plyne z (E9) a Bolzanovy věty.

Příklad 6.1.7

V úvodu do této sekce jsme nazvali exponenciálu „funkcí spojitého růstu“. Tuto intuici nyní částečně formalizujeme. Dalšího pohledu nabudeme po definici obecné mocniny.

Uvažme následující přímočarý populační model. V čase $t \in (0, \infty)$ je počet jedinců dán funkcí $P(t)$. Množství nově narozených jedinců závisí pouze na počtu právě žijících a na konstantě $r \in [0, \infty)$ – zvané *reproduction rate* – která značí, kolik nových jedinců se narodí za jednoho právě živého. Vnímáme-li derivaci $P'(t)$ jako *rychlost růstu* populace v čase t, pak dostáváme diferenciální rovnici

$$P'(t) = r \cdot P(t),$$

jelikož v čase t se podle našeho modelu narodí r jedinců za každého živého. Díky vlastnosti (E4) vidíme, že například funkce $P(t) = \exp(rt)$ řeší rovnici výše. Teorii diferenciálních rovnic v tomto textu probírat nebudeme, bez důkazu však zmíníme, že řešení takto triviálních rovnic až na konstantu určena jednoznačně. V tomto jednoduchém populačním modelu je tudíž počet živých jedinců v čase t dán funkcí $t \mapsto \exp(rt)$.

Na závěr si dokážeme jeden možná překvapivý fakt, že vlastnosti (E1) a (E2) již určují funkci exp jednoznačně.

Věta 6.1.8 (Jednoznačnost exponenciály)

Existuje právě jedna funkce definovaná na celém $\mathbb{R}$ splňující (E1) a (E2).

Důkaz. Existenci jsme dokázali konstruktivně. Dokážeme jednoznačnost. Ať $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje (E1) a (E2). Ukážeme, že $f = \exp$.

Z úvah výše plyne, že f splňuje rovněž vlastnosti (E3) - (E10), protože k jejich důkazu byly použity pouze (E1) a (E2). Platí tedy $f(0) = 1$ a $f'(x) = f(x)$. Jelikož $\exp x \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, máme z věty o aritmetice derivací

$$\left(\frac{f}{\exp}\right)'(x) = \frac{f'(x)\exp x - f(x)\exp' x}{\exp^2 x} = \frac{f(x)\exp x - f(x)\exp x}{\exp^2 x} = 0.$$

Podle cvičení 5.2.5 je $f/\exp$ konstatní funkce, čili existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x)/\exp x = c$ pro každé $c \in \mathbb{R}$. Dosazením $x = 0$ zjistíme, že $c = f(0)/\exp 0 = 1$, čili $c = 1$ a $f = \exp$. ■

6.1.1 Logaritmus

Jelikož je funkce exp spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$, má na celém $\mathbb{R}$ inverzní funkci, které přezdíváme *logaritmus* a značíme ji log. Z vlastností exp ihned plyne, že log je reálná funkce $(0, \infty) \to \mathbb{R}$. Na rozdíl od exp však log není dána číselnou řadou – aspoň ne pro všechna $x \in (0, \infty)$, více v kapitole o Taylorově polynomu.

Vlastnosti exponenciály nám rovnou umožňují do značné míry prozkoumat k ní inverzní funkci.

Tvrzení 6.1.9 (Vlastnosti logaritmu)

Pro každá $x, y \in (0, \infty)$ platí

(L1) $\log$ *je spojitá a rostoucí na* $(0, \infty)$*;*

(L2) $\log(xy) = \log x + \log y$*;*

(L3) $\log' x = 1/x$;

(L4) $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$ *a* $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$.

Důkaz.

(L1) Plyne ihned z faktu, že exp je spojitá a rostoucí.

(L2) Užitím vlastností exponenciály spočteme

$$xy = \exp(\log x)\cdot\exp(\log y) = \exp(\log x + \log y),$$

z čehož po aplikace log na obě strany rovnosti plyne

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

(L3) Podle věty o derivaci inverzní funkce platí

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

(L4) Protože $\operatorname{im}\log = \mathbb{R}$, není log zdola ani shora omezená. Z (L1) plyne kýžený závěr. ■

6.1.2 Obecná mocnina

Užitím funkcí log a exp definujeme pro $a \in (0,\infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ výraz a^b předpisem

$$a^b \coloneqq \exp(b\cdot\log a).$$

Stojí za to věnovat krátkou chvíli ověření, že tato funkce odpovídá naší představě *mocniny* v případě, kdy $b = n \in \mathbb{N}$. Máme

$$a^n = \exp(n\cdot\log a) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\log a\right) = \prod_{k=1}^{n}\exp(\log(a)) = \prod_{k=1}^{n} a,$$

tedy a^n je vskutku a n-krát vynásobené samo sebou.

Varování 6.1.10

Uvědomme si, že a^b je definováno pouze pro $a \in (0,\infty)$. Pro $a \le 0$ není tato funkce nad reálnými čísly rozumně definovatelná. Důvod je mimo jiné následující: pro n sudé a $a < 0$ je $a^n > 0$, ale $a^{n+1} < 0$. Tedy, měla-li by a^b být spojitá funkce, pak by pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $a < 0$ existovalo $\xi \in (n, n+1)$ takové, že $a^\xi = 0$. Mocninná funkce, jež je nulová pro nekonečně mnoho čísel je i pro matematiky zřejmě příliš divoká představa.

Poznamenejme však, že nad komplexními čísly je funkce log definována i pro záporná reálná čísla, tedy a^b dává – se stejnou definicí – smysl pro všechna $a, b \in \mathbb{C}$.

Z vlastností log a exp plynou ihned vlastnosti obecné mocniny. Jelikož její definice dává vzniknout **dvěma** reálným funkcím, konkrétně

$$f(x) = a^x \text{ pro } x \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad g(x) = x^b \text{ pro } x \in (0, \infty),$$

musíme tyto při zkoumání vlastností obecné mocniny pochopitelně rozlišovat. Aby nedošlo ke zmatení, budeme tyto funkce značit zkrátka jako $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto x^b$, kde $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ jsou fixní.

Tvrzení 6.1.11 (Vlastnosti obecné mocniny)

Pro všechna $a \in (0, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$ platí

(O1) *Funkce $x \mapsto a^x$ i $x \mapsto x^b$ jsou spojité na svých doménách.*

(O2) *Funkce $x \mapsto a^x$ je na celém $\mathbb{R}$*

- *rostoucí pro $a > 1$,*
- *konstantní pro $a = 1$,*
- *klesající pro $a < 1$.*

(O3) *Funkce $x \mapsto x^b$ je na $(0, \infty)$*

- *rostoucí pro $b > 0$,*
- *konstantní pro $b = 0$,*
- *klesající pro $b < 0$.*

(O4) $(x \mapsto a^x)' = (x \mapsto a^x \log a)$.

(O5) $(x \mapsto x^b)' = (x \mapsto bx^{b-1})$.

(O6) *Je-li*

- *$a > 1$, pak $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$;*
- *$a < 1$, pak $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ a $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$;*

(O7) *Je-li*

- *$b > 0$, pak $\lim_{x\to0^+} x^b = 0$ a $\lim_{x\to\infty} x^b = \infty$.*
- *$b < 0$, pak $\lim_{x\to0^+} x^b = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} x^b = 0$.*

(O8) $\log(a^b) = b \cdot \log a$.

Důkaz. Vlastnosti (O2), (O3), (O6) a (O7) dokážeme pouze v případě, že $a > 1$ a $b > 0$. Důkaz tvrzení v případech $a < 1$ a $b < 0$ plyne ihned z rovnosti $\exp(-x) = 1/\exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$.

(O1) Jelikož $a^b = \exp(b \log a)$ plyne spojitost obou funkcí ze spojitosti exp a log.

(O2) Platí $a^x = \exp(x \log a)$. Protože $a > 1$, je $\log a > 0$. Funkce exp je rostoucí, a tedy je rostoucí rovněž $a \mapsto a^x$.

(O3) Máme $x^b = \exp(b \log x)$. Jelikož je b z předpokladu kladné a log je rostoucí, je $x \mapsto x^b$ též rostoucí.

(O4) Počítáme

$$(a^x)' = (\exp(x \log a))' = \exp'(x \log a) \cdot (x \log a)' = \exp(x \log a) \cdot \log a = a^x \log a.$$

(O5) Opět počítáme

$$(x^b)' = (\exp(b \log x))' = \exp'(b \log x) \cdot (b \log x)' = \exp(b \log x) \cdot \frac{b}{x} = \frac{bx^b}{x} = bx^{b-1}.$$

(O6) Podobně jako v důkazu (O2) plyne z $a > 1$, že $\log a > 0$. Potom jsou ale limity v $\pm\infty$ funkce $a^x = \exp(x \log a)$ stejné jako tytéž limity funkce $\exp x$. Odtud tvrzení.

(O7) Jelikož je $b > 0$, máme z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x \to 0^+} x^b = \lim_{x \to 0^+} \exp(b \cdot \log x) = \lim_{y \to -\infty} \exp(b \cdot y) = 0,$$
$$\lim_{x \to \infty} x^b = \lim_{x \to \infty} \exp(b \cdot \log x) = \lim_{y \to \infty} \exp(b \cdot y) = \infty.$$

(O8) Jest

$$\log(a^b) = \log(\exp(b \cdot \log a)) = b \cdot \log a.$$ ■

Příklad 6.1.12 (Exponenciála jako funkce růstu podruhé)

V příkladě 6.1.7 jsme slíbili čtenářům ještě jeden pohled na exponenciálu jako na funkci „spojitého“ růstu. Uvažme následující obvyklý finanční model.

Naším prvotním vkladem na spořící účet je částka $P > 0$. Ve smlouvě k účtu je uvedeno, že z něj nesmíme vybírat po dobu pěti let za roční úrokové sazby 5 %. Tedy, každý rok se právě uložená částka na účtu zvýší o přesně 5 %. Když chceme vypočítat, kolik budeme mít na účtu za oněch pět let, stačí provést snadný výpočet

$$P \cdot 1.05 \cdot 1.05 \cdot 1.05 \cdot 1.05 \cdot 1.05 = P \cdot 1.05^5.$$

V zájmu rozšíření tohoto příkladu si zapíšeme tentýž výsledek jako

$$P \cdot (1 + 0.05)^5 .$$

Tento model však předpokládá úročení uložené částky jednou ročně. Když bude však úročení probíhat například měsíčně, pak se roční úroková sazba samozřejmě rozdělí dvanácti, avšak výpočet úročení je rovněž třeba provést dvanáctkrát do roka. Finální částkou po pěti letech bude tudíž

$$P \cdot \left(\left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12}\right)^5 = P \cdot \left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{60} .$$

S postupným zkracováním úrokového období se nabízí otázka, jaká by byla finální částka, kdyby se původní vklad úročil „nekonečněkrát“ do roka, tj. uložená částka by se zvyšovala doslova v každém okamžiku (tedy „spojitě“). Odpovědí je výraz

$$\lim_{n \to \infty} P \cdot \left(1 + \frac{0.05}{n}\right)^n .$$

Ukážeme, že touto limitou je hodnota funkce exp v bodě 0.05. Obecněji, spočteme, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp x. \qquad (\spadesuit)$$

Výpočet je to v celku triviální. Z definice obecné mocniny a Heineho věty platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

Stačí tedy ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = x.$$

Užitím l'Hospitalova pravidla dostaneme (derivujeme podle n – to smíme opět díky Heineho větě)

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\cdot\frac{-x}{n^2}\cdot(-n^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n+x} = x.$$

Tím je rovnost ($\spadesuit$) dokázána.

6.2 Goniometrické funkce

Název „úhloměrné" funkce je zastaralý a nepřesný. Funkce sin a cos, které se jmeme definovati, úspěšně modelují fyzikální jevy jakkoli související s vibrací či vlněním. Jak si brzy rozmyslíme, jsou to ve skutečnosti funkce v zásadě exponenciální. To by nemělo být na druhý pohled až tak překvapivé – vibrace jsou v zásadě jen periodicky se střídající růst a pokles.

Definice 6.2.1 (Goniometrické funkce)

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme funkce

$$\sin x \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos x \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Věta 6.2.2 (Vlastnosti goniometrických funkcí)

Funkce sin *a* cos *jsou dobře definované a splňují:*

(G1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x,$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y;$$

(G2) sin *je lichá a* cos *je sudá funkce;*

(G3) $\exists \pi \in \mathbb{R}$ *takové, že* $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \pi/2]$, $\sin(0) = 0$ *a* $\sin(\pi/2) = 1$.

(G4) $\sin'(0) = 1$.

K důkazu použijeme následující pomocné lemma.

Lemma (Pomocné)

Ať $x \in \mathbb{R}$. *Pak existuje* $C > 0$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a každé* $h \in (-1, 1)$ *platí nerovnost*

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq h^2 C^n.$$

Důkaz. Položme $C \coloneqq 2(|x| + 1)$. Pro $n = 1$ máme

$$|(x+h)^1 - x^1 - hx^0| = |x + h - x - h| = 0 \leq 2h^2(|x| + 1)$$

pro každé $h \in (-1, 1)$.

Pro $n \geq 2$ lze použít binomickou větu a počítat

$$(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k. \tag{$\triangle$}$$

Protože $|x| + 1 \geq |x|$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, platí $(|x| + 1)^n \geq |x|^k$, kdykoli $k \leq n$. Rovněž, z předpokladu $|h| < 1$, a tedy naopak platí $|h|^k \leq |h|^n$ pro $k \leq n$. Užitím těchto nerovností a rovnosti ($\triangle$) můžeme odhadnout

$$\begin{aligned}|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| &\leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^k \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (|x| + 1)^n h^2 \\ &\leq h^2 (|x| + 1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = h^2 (|x| + 1)^n 2^n = h^2 C^n,\end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ∎

Důkaz (Věty 6.2.2). Je zřejmé, že řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

konvergují absolutně (použitím stejného argumentu jako v důkazu korektnosti exponenciály ve větě 6.1.6). Podle lemmatu 6.1.3 jsou obě řady rovněž konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$, což dokazuje dobrou definovanost obou funkcí.

Ukážeme nejprve, že $\sin' x = \cos x$. Volme pevné $x \in \mathbb{R}$. Pro $h \in (-1, 1)$ platí

$$\begin{aligned}\sin(x+h) - \sin x - h\cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{hx^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left((x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n} \right).\end{aligned}$$

Z **pomocného lemmatu** nalezneme $C > 0$ takové, že

$$|(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n}| \le C^{2n+1}h^2.$$

Pak

$$|\sin(x+h) - \sin x - h\cos x| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}h^2 = h^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} C^{2n+1}/(2n+1)!$ je konvergentní, a tedy

$$\lim_{h\to 0} \left|\frac{\sin(x+h) - \sin x - h\cos x}{h}\right| = 0,$$

z čehož ihned

$$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

Pro důkaz (G1) volme pevné $a \in \mathbb{R}$ a položme

$$\psi(x) \coloneqq (\sin(x+a) - \sin x \cos a - \sin a \cos x)^2 + (\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin a \sin x)^2.$$

Snadno spočteme, že $\psi'(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy je díky cvičení 5.2.5 ψ konstantní na $\mathbb{R}$. Dosazením dostaneme, že

$$\sin(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0,$$
$$\cos(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n)!} = (-1)^0 \frac{0^0}{0!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n!)} = 1.$$

Díky těmto rovnostem spočteme $\psi(0) = 0$. Z toho, že ψ je konstantní, plyne, že $\psi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. To dokazuje obě rovnosti v (G1), neboť ψ je nulová funkce, jež je zároveň součtem čtverců, které musejí být tudíž oba nulové.

Vlastnost (G2) je vidět ihned z definice, neboť proměnná x se v definici sin objevuje pouze v liché mocnině a v definici cos pouze v sudé.

Vlastnost (G3) dokazovat nebudeme. Je výpočetně náročná a neintuitivní.

Již víme, že $\sin'(x) = \cos x$ a že $\cos(0) = 1$. Odtud (G4). ■

Poznámka 6.2.3

V úvodu jsme zmínili, že sin a cos jsou vlastně exponenciální funkce. Vskutku, když se jeden zadívá na jejich řady, vidí (až na znaménko $(-1)^n$ zařizující právě onen „růst a pokles“) v zásadě exponenciální funkci. Konkrétně, sin je rozdílem *lichých* částí exponenciály a cos těch *sudých*. Rozdělme $\exp x$ na čtyři části podle zbytku po dělení indexu n čtyřmi.

$$\exp x = \sum_{n \bmod 4=0} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \bmod 4=1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \bmod 4=2} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \bmod 4=3} \frac{x^n}{n!}$$

Označme tyto části $\exp_0$, $\exp_1$, $\exp_2$ a $\exp_3$. Všimněme si, že když $n \bmod 4 = a$, pak $n = 4k + a$

pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Čili například $\exp_2$ lze zapsat ve tvaru

$$\exp_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}$$

Tvrdíme, že $\sin = \exp_1 - \exp_3$ a $\cos = \exp_0 - \exp_2$. Vskutku, když je n liché, pak $2n+1 \bmod 4 = 3$ (protože $4 \nmid 2n$), a když je n sudé, tak $2n+1 \bmod 4 = 1$. Čili, pro n lichá je $2n+1$ tvaru $4k+3$ a pro n sudá zase tvaru $4k+1$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}\exp_1(x) - \exp_3(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} \\ &= \sum_{n \text{ sudé}} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n \text{ liché}} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x,\end{aligned}$$

neboť $(-1)^n$ je rovno 1 pro n sudé a -1 pro n liché. Podobně odvodíme i vztah pro cos.

Definice 6.2.4 (Tangens a kotangens)

Definujeme goniometrické funkce tan a cot předpisy

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce tan je definována pro $x \neq n\pi + \pi/2$, kde je funkce cos nulová, a cot je definována pro x různé od násobků π.

Zformulujeme si několik vlastností funkcí tan a cot, ale dokazovat je nebudeme. Důkazy se významně neliší od již spatřených důkazů vlastností jiných elementárních funkcí.

Tvrzení 6.2.5 (Vlastnosti tangenty a kotangenty)

Platí:

(G5) $\tan$ *i* $\cot$ *jsou spojité na svých doménách;*

(G6) $\tan$ *i* $\cot$ *jsou liché;*

(G7) $\tan' x = 1/\cos^2 x$ *a* $\cot' x = -1/\sin^2 x$*;*

(G8) $\tan \frac{\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = 1$*;*

(G9) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$ *a* $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$.

(G10) $\lim_{x \to 0^+} \cot x = \infty$ *a* $\lim_{x \to \pi^-} \cot x = -\infty$.

(G11) $\tan$ *je rostoucí na* $(-\pi/2, \pi/2)$ *a* $\cot$ *je klesající na* $(0, \pi)$.

6.3 Limity elementárních funkcí

Tato sekce je věnována výpočtu limit, ve kterých figurují elementární funkce. Nejtěžšími (ale zároveň nejužitečnějšími) úlohami na vyřešení jsou limity racionálních kombinací (tj. součtů, násobků a především podílů) elementárních funkcí. Samotné řešení pak obvykle zahrnuje převod výrazu do tvaru, v němž lze naň uplatnit jisté „známé“ limity, případně použít l'Hospitalova pravidla.

Tvrzení 6.3.1 (Běžné limity)

Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \tag{b}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1, \tag{c}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1. \tag{d}$$

Důkaz. K výpočtu všech limit lze použít l'Hospitalova pravidla. Máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1, \tag{a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}, \tag{b}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp x}{1} = \exp(0) = 1, \tag{c}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1. \tag{d}$$

Tím je důkaz hotov. ■

Aplikujeme nyní tvrzení 6.3.1 k výpočtu některých limit kombinací elementárních funkcí.

Úloha 6.3.2

Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log(\sqrt{1+x^2})}.$$

Řešení. Zřejmě platí

$$\lim_{x\to 0} \cos(\sin x) - 1 = \lim_{x\to 0} \log(\sqrt{1+x^2}) = 0,$$

je tedy třeba výraz nejprve upravit. l'Hospitalovo pravidlo zde pravděpodobně není vhodným prostředkem, neboť derivace obou funkcí jsou značně komplikované. Učiníme nejprve úpravu

$$\frac{\cos(\sin x) - 1}{\log(\sqrt{1 + x^2})} = \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\log(\sqrt{1 + x^2})}.$$

Protože $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$, platí z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sin^2 x} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{y^2} = -\frac{1}{2}.$$

Dále máme (z vlastností logaritmu)

$$\frac{\sin^2 x}{\log(\sqrt{1 + x^2})} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\frac{1}{2}\log(1 + x^2)} = 2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{\log(1 + x^2)}.$$

Opět z věty o limitě složené funkce jest

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\log(1 + x^2)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1 + y)} = 1.$$

Celkem tedy,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\log(\sqrt{1 + x^2})} = 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\log(1 + x^2)} = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Spolu s předchozím výpočtem dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log(\sqrt{1 + x^2})} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1.$$

♠

Před další úlohou spočteme další obecně užitečnou limitu.

Lemma 6.3.3

Pro každá $\alpha > 0, \beta > 0$ platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^\beta} = 0.$$

Důkaz. Protože $\lim_{x\to\infty} x^\beta = \infty$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\log^{\alpha-1} x \cdot \frac{1}{x}}{x^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\log^{\alpha-1} x}{x^\beta}.$$

Snadno nahlédneme, že se každým použitím l'Hospitalova pravidla mocnina u log sníží o 1 (dokud je větší než 0) a mocnina u x zůstane stejná. Nalezneme tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\alpha - n \in (-1, 0]$. Iterovaným použitím l'Hospitalova pravidla upravíme původní limitu na

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \alpha - i}{\beta^n} \cdot \frac{\log^{\alpha-n} x}{x^\beta} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \alpha - i}{\beta^n} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log^{n-\alpha} x \cdot x^\beta}.$$

Jelikož $n - \alpha \geq 0$ a $\beta > 0$, dostáváme, že

$$\lim_{x\to\infty} \log^{n-\alpha} x \cdot x^\beta = \lim_{x\to\infty} \log^{n-\alpha} x \cdot \lim_{x\to\infty} x^\beta = \infty,$$

z čehož již plyne dokazovaná rovnost. ■

Úloha 6.3.4

Spočtěte

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)} \cdot \log^2(1+x^3).$$

Řešení. Upravíme

$$\sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)} \cdot \log^2(1+x^3) = \frac{\sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{\sqrt{\frac{3}{x}}} \cdot \sqrt{\frac{3}{x}} \cdot \log^2(1+x^3).$$

Jelikož

$$\frac{\sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{\sqrt{\frac{3}{x}}} = \sqrt{\frac{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}}$$

a $\lim_{x\to\infty} 3/x = 0$, plyne z běžných limit a z věty o limitě složené funkce, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{\sqrt{\frac{3}{x}}} = \sqrt{1} = 1.$$

Dále,

$$\sqrt{\frac{3}{x}} \cdot \log^2(1+x^3) = \frac{\log^2(1+x^3)}{\sqrt{\frac{x}{3}}} = \frac{\log^2(1+x^3)}{\sqrt[6]{1+x^3}} \cdot \frac{\sqrt[6]{1+x^3}}{\sqrt{\frac{x}{3}}}.$$

Podle předchozího lemmatu (a věty o limitě složené funkce) platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^2(1+x^3)}{\sqrt[6]{1+x^3}} = 0.$$

Jelikož

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[6]{1+x^3}}{\sqrt{\frac{x}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt[6]{\frac{1}{x^3}+1}}{\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{3},$$

dostáváme celkem, že

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)} \cdot \log^2(1+x^3) = 1 \cdot 0 \cdot \sqrt{3} = 0.$$

♠

Úloha 6.3.5

Spočtěte

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení. Z definice obecné mocniny máme

$$\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)\right).$$

Spočteme

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)$$

a výslednou limitu dostaneme přes větu o limitě složené funkce.

Jelikož

$$\lim_{x\to 0^+}\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right) = \lim_{x\to 0^+} x = 0,$$

lze použít l'Hospitalovo pravidlo. Podle něj a vlastností obecné mocniny platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)}{x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{3}{4^x+5^x+6^x}\cdot\frac{4^x\log 4+5^x\log 5+6^x\log 6}{3}\\ &= \frac{3}{1+1+1}\cdot\frac{\log 4+\log 5+\log 6}{3} = \frac{\log 120}{3}.\end{aligned}$$

Nyní můžeme dopočíst

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\exp\left(\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)\right) &= \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{\log 120}{3}\right) = 120 - \exp 3.\end{aligned}$$

♠

Cvičení 6.3.6 (Pár limit elementárních funkcí)

Spočtěte následující limity.

$$\lim_{x\to 3\pi/2}(4x^2-9\pi^2)\frac{\cos x}{1+\sin x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\arctan x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to\infty}\arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\exp\left(\frac{\sin x}{2}\right)-\cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})} \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{\exp 2-\exp 2x}}{\arccos x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\sin x}{\exp(x^2)-1}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}$$

Kapitola 7

Taylorův polynom

Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávejte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.

Polynomy jsou hezké funkce. Dají se donekonečna derivovat – všechny tyto derivace jsou navíc spojité – pomocí Hornerova schématu se snadno počítá jejich hodnota v daném bodě a stejně snadno se hledají jejich kořeny – body, kde jsou nulové. Není proto překvapivé, že se matematici již dlouho snaží aproximovat hodnoty nepolynomiálních funkcí (jako exp, log atd.) hodnotami polynomů. V této kapitole si ujasníme, co vlastně myslíme *aproximací*, jak jednu konkrétní sestrojit a (aspoň povrchově), k čemu je dobrá.

Definice 7.0.1 (Polynomiální funkce)

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *polynomiální*, když existuje $n \in \mathbb{N}$ a koeficienty $a_i \in \mathbb{R}, i \leq n$, takové, že

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 7.0.2

Striktně vzato je rozdíl mezi *polynomem* a *polynomiální funkcí*. Polynom je formální výraz tvaru

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

kde x je pouze symbol a nepředstavuje žádnou hodnotu. Polynomiální funkce je pak funkce, která vlastně dosazuje do nějakého polynomu za x číslo.

My však těchto rozdílů dbát nebudeme a slovy *polynom* i *polynomiální funkce* budeme mínit objekt z definice 7.0.1.

Co vlastně znamená *aproximovat* funkci? Funkci exp můžeme například na intervalu $[0, 1]$ aproximovat číslem -69, ale intuice čtenářům, doufáme, napovídá, že toto není „dobrá“ aproximace. Jistě nemůžeme obecně doufat v aproximaci funkce polynomem na celé její doméně; smysluplným však zdá sebe býti snažit se aproximovat na okolí zvoleného bodu.

Úspěšnost polynomiální aproximace má dobrý smysl měřit rovněž polynomem. Totiž, z výpočetních důvodů často potřebujeme omezit stupeň (nejvyšší mocninu) aproximujícího polynomu. Přejeme si, aby chyba aproximace polynomem stupně n na okolí daného bodu klesala (při blížení se k tomuto bodu) aspoň tak rychle, jak nejrychleji může polynom stupně n na okolí nějakého bodu k 0 klesat. Je patrné, že nejrychleji ze všech polynomů stupně n klesá na okolí bodu a k nule polynom $(x-a)^n$, neb má v a n-násobný kořen. Ukážeme, že ve skutečnosti můžeme požadovat, aby chyba aproximace na okolí a klesala k 0 ještě rychleji.

Definice 7.0.3 (Aproximace stupně n)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, $a \in M$ a $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že polynom P je *aproximací f na okolí a stupně n*, když

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Vyjádřeno slovy: P je aproximací f na okolí a stupně n, když chyba aproximace na okolí a klesá k 0 rychleji, než $(x-a)^n$.

Pojďme si nyní rozmyslet, jak aproximace f hledat. Začněme nejjednodušším případem – lineární aproximací (tj. aproximací stupně 1) polynomem rovněž stupně nejvýše 1, tedy „přímkou“. Položme tedy $P(x) \coloneqq \psi x + \omega$ a počítejme

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - \psi x - \omega}{x - a} = 0.$$

Poslední rovnost bystrým čtenářům připomene definici derivace. Vskutku, přepokládáme-li, že existuje konečná $f'(a)$, pak můžeme poslední limitu upravit do tvaru

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - \psi x - \omega}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - \lim_{x \to a} \frac{\psi x + \omega - f(a)}{x - a} = f'(a) - \lim_{x \to a} \frac{\psi x + \omega - f(a)}{x - a}.$$

Náš úkol je tímto výrazně zjednodušen. Potřebujeme, aby se poslední limita rovnala konstantě $f'(a)$. Toho lze docílit více způsoby; ten nejvíce přímočarý je snad zařídit, aby se čitatel zlomku rovnal $f'(a)(x-a)$, neboť zřejmě

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(a)(x-a)}{x - a} = f'(a).$$

Odtud plyne rovnost

$$\psi x + \omega - f(a) = f'(a)(x-a),$$

ze které již snadno

$$\begin{aligned} \psi &= f'(a), \\ \omega &= f(a) - a \cdot f'(a), \end{aligned}$$

čili

$$P(x) = \psi x + \omega = f'(a)(x-a) + f(a)$$

je lineární aproximací funkce f na okolí a. Funkci $P(x)$ se obvykle přezdívá *tečna ke grafu* funkce f v bodě a, neboť je to přímka, která prochází bodem $(a, f(a))$ a na okolí a roste stejně rychle jako f.

Definice 7.0.4 (Derivace vyšších řádů)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. Induktivně definujeme *n-tou derivaci funkce f v bodě a* předpisem

$$f^{(n)}(a) \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a},$$

kde $f^{(0)} \coloneqq f$.

Poznámka 7.0.5 (Značení derivací)

V této kapitole budeme vždy n-tou derivaci (vizte definici 7.0.4) funkce f značit symbolem $f^{(n)}$, a to i tehdy, když je tato derivace první. Místo f' tedy dočasně píšeme $f^{(1)}$.

Podobným postupem je možné hledat aproximace vyšších stupňů. Hledáme-li polynom $Q(x)$ stupně nejvýše 2 splňující

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^2},$$

upravíme nejprve tuto limitu na

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-Q(x)}{x-a}}{x-a}.$$

Již totiž víme, že $P(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ je lineární aproximací funkce f na okolí a. Budeme tedy směle předpokládat, že $Q(x) = P(x) + R(x)$ a spočteme, čemu se rovná polynom $R(x)$. Počítáme

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-Q(x)}{x-a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^2} - \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^2}.$$

Užitím l'Hospitalova pravidla spočteme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f^{(1)}(a)(x-a)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(1)}(x) - f^{(1)}(a)}{2(x-a)} = \frac{f^{(2)}(a)}{2}.$$

Chceme tudíž, aby platilo

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^2} = \frac{f^{(2)}(a)}{2},$$

z čehož plyne přirozená volba

$$R(x) \coloneqq \frac{f^{(2)}(a)}{2}(x-a)^2.$$

Iterováním tohoto postupu se dostaneme k tzv. *Taylorovu polynomu.*

7.1 Definice Taylorova polynomu

Definice 7.1.1 (Taylorův polynom)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, majíc konečné derivace všech řádů do $n \in \mathbb{N}$ včetně, a $a \in M$. Pak *Taylorovým polynomem stupně n funkce f v bodě a* rozumíme polynom

$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Lemma 7.1.2 (Derivace Taylorova polynomu)

Platí

$$(T_n^{f,a})^{(1)} = T_{n-1}^{f^{(1)},a}.$$

Důkaz. Z definice Taylorova polynomu počítáme

$$\begin{aligned}(T_n^{f,a})^{(1)}(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f^{(1)})^{(k)}}{k!}(x-a)^k = T_{n-1}^{f^{(1)},a}(x).\end{aligned}$$

■

Tvrzení 7.1.3 (Aproximace Taylorovým polynomem)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, majíc konečné derivace do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně, a $a \in M$. Pak je $T_n^{f,a}$ aproximací f stupně n na okolí a.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle stupně $n \in \mathbb{N}$. Již víme, že pro $n = 1$ je $T_1^{f,a}(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a)$ lineární aproximací f na okolí a.

Pro $n > 1$ máme z l'Hospitalova pravidla a předchozího lemmatu

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(1)}(x) - T_{n-1}^{f^{(1)},a}(x)}{n(x-a)^{n-1}}.$$

Protože $f^{(1)}$ je reálná funkce a má konečné derivace do řádu $n-1$ včetně, je z indukčního předpokladu $T_{n-1}^{f^{(1)},a}$ aproximací $f^{(1)}$ stupně $n-1$ na okolí a. Platí pročež

$$\lim_{x \to a} \frac{f^{(1)}(x) - T_{n-1}^{f^{(1)},a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0,$$

a tedy i

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

jak jsme chtěli. ■

Překvapivé možná je, že Taylorův polynom je *jedinou* aproximací funkce f stupně n polynomem stupně nejvýše n. K důkazu tohoto faktu si pomůžeme jedním technickým lemmatem.

Lemma 7.1.4

Ať $n \in \mathbb{N}$ a Q je polynom stupně nejvýše n. Platí-li $\lim_{x \to a} Q(x)/(x-a)^n = 0$, pak $Q = 0$.

Důkaz. Budeme pro spor předpokládat, že Q není nulový. Bez důkazu využijeme tvrzení, že když a je kořenem Q, pak $x - a \mid Q$. Protože $\lim_{x \to a} Q(x)/(x-a)^n$, jistě platí $Q(a) = 0$, čili existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $Q(x) = (x-a)^k \cdot R(x)$, kde R je polynom nemaje kořen a. Pak ale

$$\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-k}}.$$

Tato limita buď neexistuje (pokud $k < n$), nebo je rovna $R(a) \neq 0$ (pokud $k = n$). V obou případech je nenulová, což je spor. ∎

Věta 7.1.5 (Jednoznačnost Taylorova polynomu)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je funkce, majíc konečné derivace do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně, a $a \in M$. Předpokládejme, že P je polynom stupně nejvýše n, jenž je rovněž aproximací f na okolí a stupně n. Pak $P = T_n^{f,a}$.

Důkaz. Podle tvrzení 7.1.3 platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Z předpokladu a věty o aritmetice limit

$$\lim_{x \to a} \frac{T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{T_n^{f,a}(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 + 0 = 0,$$

čili podle lemmatu 7.1.4 jest $P - T_n^{f,a} = 0$. ∎

Úloha 7.1.6

Spočtěte $T_3^{\tan,\pi/4}$, tj. Taylorův polynom stupně 3 v bodě $\pi/4$ funkce $\tan$.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned}
\tan^{(1)}(x) &= \frac{1}{\cos^2 x}, \\
\tan^{(2)}(x) &= \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{(1)} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, \\
\tan^{(3)}(x) &= \left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right)^{(1)} = \frac{2 \cdot (2 - \cos(2x))}{\cos^4(x)}.
\end{aligned}$$

A tedy,

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \tan^{(1)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad \tan^{(2)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4, \quad \tan^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16.$$

Z čehož již snadno dopočteme

$$T_3^{\tan,\pi/4}(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{\tan^{(k)}(\pi/4)}{k!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^k$$
$$= 1 + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3.$$

♠

Cvičení 7.1.7

Spočtěte $T_5^{\sin\cdot\cos,\pi/2}$.

7.2 Tvary zbytku

V této sekci spočteme tzv. „tvary zbytku" Taylorova polynomu. Jsou to výrazy, které vyjadřují – aspoň řádově – velikost chyby při aproximace funkce Taylorovým polynomem na okolí daného bodu. Budou se hodit primárně při zpytu poloměru okolí, na němž můžeme stále tvrdit, že Taylorův polynom aproximuje funkci „dobře".

Věta 7.2.1 (Obecný tvar zbytku)

Ať $a, x \in \mathbb{R}$ a f má na $[a, x]$ konečné derivace do řádu $n+1$ včetně. Ať je dále φ libovolná spojitá funkce na $[a, x]$ s konečnou první derivací na (a, x). Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi^{(1)}(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Důkaz. Definujme funkci $F : [a, x] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(t) \coloneqq f(x) - \left(f(t) + f^{(1)}(t)(x-t) + \frac{1}{2}f^{(2)}(t)(x-t)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n\right).$$

Pak je F spojitá na $[a, x]$ a $F^{(1)}$ existuje konečná na (a, x). Podle Cauchyho věty o střední hodnotě existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$\frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{F^{(1)}(\xi)}{\varphi^{(1)}(\xi)}. \qquad (\diamond)$$

Snadno spočteme, že

$$F^{(1)}(\xi) = -f^{(1)}(\xi) + f^{(1)}(\xi) - f^{(2)}(\xi) + f^{(2)}(\xi) - \ldots - \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n$$
$$= -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Zřejmě $F(x) = 0$ a $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$. Čili z rovnosti ($\diamond$) máme

$$\frac{T_n^{f,a}(x) - f(x)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = -\frac{1}{\varphi^{(1)}(x)}\left(\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n\right).$$

Odtud přímočarou úpravou plyne tvrzení. ■

Uvědomme si, že ve větě 7.2.1 je φ *zcela libovolná funkce* s dodatečnými podmínkami spojitosti a diferencovatelnosti. Tím máme k dispozici celou třídu vyjádření zbytků Taylorova polynomu pouhým dosazováním za φ. Dvě konkrétní dosazení (jež sobě dokonce vysloužila jména) se nám budou v dalším textu hodit více než jiná.

Důsledek 7.2.2 (Lagrangeův tvar zbytku)

Ať f je spojitá na $[a, x]$ a má konečné derivace na (a, x) do řádu $n + 1$ včetně. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Důkaz. Plyne z dosazení $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$ ve větě 7.2.1. ■

Důsledek 7.2.3 (Cauchyho tvar zbytku)

Ať f je spojitá na $[a, x]$ a má konečné derivace na (a, x) do řádu $n + 1$ včetně. Pak existuje $\xi \in (a, x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

Důkaz. Plyne z věty 7.2.1 dosazením $\varphi(t) = t$. ■

7.3 Taylorova řada

Když už víme, že Taylorův polynom je nejlepší možnou aproximací stupně n nějaké funkce f na okolí daného bodu polynomem stupně nejvýše n, je přirozené se ptát, co se stane, nahradíme-li tento polynom nekonečnou řadou se stejnými koeficienty? Rozumná, však naivní, domněnka zní, že taková řada aproximuje danou funkci *nekonečně dobře*, to jest je jí přímo rovna. Lze snad každou reálnou funkci zapsat nekonečnou řadou?

Jak je tomu u spousty nadějných domněnek, odpověď zní důrazně **ne**. Ovšem, mnoho dostatečně hezkých funkcí lze zapsat nekonečnou řadou aspoň na nějakém okolí zvolených bodů. Částečně překvapivé snad je, že samotná konvergence takové řady nestačí k tomu, aby byla rovna aproximované funkci.

Nebudeme do této problematiky zabíhat hlouběji, rozmyslíme si pouze jeden význačný příklad.

Definice 7.3.1 (Taylorova řada)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce mající derivace všech řádů v $a \in M$. Pak nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě a.

Varování 7.3.2

Bohužel existují nekonečně diferencovatelné funkce, kterým jejich Taylorova řada odpovídá pouze v jediném bodě, ale nikoli na sebemenším okolí tohoto bodu. Uvažme například

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Protože $\lim_{x\to 0} \exp\left(-1/x^2\right) = 0$, je f spojitá v bodě 0 a zřejmě je tam nekonečně diferencovatelná. Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0,$$

neboť $f^{(n)}(0) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Avšak $f(x) \neq 0$ pro libovolné $x \neq 0$.

Poznámka 7.3.3

Taylorova řada funkce definované součtem nekonečné řady je (zřejmě z podstaty věci) přesně tato řada. Tento fakt nebudeme dokazovat; pro elementární funkce jej ponecháme jako snadné cvičení.

Cvičení 7.3.4

Dokažte, že Taylorovy řady elementárních funkcí exp, sin a cos jsou přesně řady z jejich definic.

Zbytek sekce věnujeme studiu Taylorovy řady funkce log. Na rozdíl od svého inverzu není log dána nekonečnou řadou. Existuje však relativně malé okolí bodu 1, kde je log shodná se svojí Taylorovou řadou. Pro snadnost výpočtů budeme však místo bodu 1 uvažovat bod 0 a místo $\log x$ funkci $\log(1 + x)$. Tento přístup je zjevně ekvivalentní původnímu.

Věta 7.3.5 (Taylorova řada funkce log)

Pro $x \in (-1, 1]$ *platí*

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že uvedená řada je vskutku Taylorovou řadou funkce log v bodě 0.

Položme $f(x) = \log(1 + x)$. Indukcí ověříme, že

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Jistě

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^0 \cdot \frac{0!}{(1+x)^1}.$$

Dále, z indukčního předpokladu

$$f^{(n+1)}(0) = (f^{(n)})^{(1)}(0) = \left((-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\right)^{(1)}$$
$$= -n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

tedy závěr platí.

Odtud ihned plyne, že $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Čili, Taylorovou řadou funkce $\log(1+x)$ v bodě 0 je vskutku

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Pokračujme druhou částí tvrzení. Je zřejmé, že pro $|x| > 1$ tato řada není ani konvergentní, neboť neplatí $\lim_{n\to\infty} x^n/n = 0$. Pro $x = -1$ máme

$$(-1)^{n-1} \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^{2n-1} \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} -1/n$ je divergentní. Konečně, pro $x \in (-1, 1]$ řada vskutku konvergentní je. Plyne to však z tvrzení o konvergenci obecných řad, jež jsme si nedokázali; stavíme tudíž tento fakt na slepé víře.

Nyní dokážeme, že je na tomto intervalu rovna $\log(1+x)$. K tomu stačí ověřit, že chyba aproximace

$$|\log(1+x) - T_n^{\log(1+x),0}(x)| = \left|\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right| \tag{♣}$$

jde pro $n \to \infty$ k 0.

Ať je nejprve $x \in [0, 1]$. Podle důsledku 7.2.2 existuje pro každé $n \in N$ číslo $\xi_n \in [0, x)$ takové, že

$$(♣) = \left|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n) x^n\right|,$$

kde opět $f(x) = \log(1+x)$. Využitím výpočtu $f^{(n+1)}$ výše a odhadu $0 \leq x/(1+\xi_n) \leq 1$ spočteme

$$(♣) = \left|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n) x^n\right| = \left|\frac{1}{(n+1)!} (-1)^n \frac{n!}{(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+\xi_n}\right)^{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

jak jsme chtěli.

Konečně, ať $x \in (-1, 0)$. Nyní naopak použijeme důsledek 7.2.3 a pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $\xi_n \in (x, 0)$ splňující

$$(♣) = \left|\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_n) x (x - \xi_n)^n\right|.$$

Jelikož $\xi_n \in (-1,0)$, platí pro $x \in (-1,0)$ odhad

$$\frac{1+x}{1+\xi_n} \geq 1+x,$$

z nějž úpravou

$$1 - \frac{1+x}{1+\xi_n} \leq -x.$$

Čili,

$$\begin{aligned}(\clubsuit) &= \left|\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_n) x (x-\xi_n)^n\right| = \left|\frac{1}{n!}(-1)^n \frac{n!}{(1+\xi_n)^{n+1}} x (x-\xi_n)^n\right| \\ &= |x| \frac{(\xi_n - x)^n}{(1+\xi_n)^{n+1}} = \frac{|x|}{1+\xi_n}\left(\frac{\xi_n - x}{1+\xi_n}\right)^n = \frac{|x|}{1+\xi_n}\left(1 - \frac{1+x}{1+\xi_n}\right) \\ &\leq (-x)^n \frac{|x|}{1+\xi_n} = \frac{|x|^{n+1}}{1+\xi_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,\end{aligned}$$

což zakončuje důkaz kýžené rovnosti pro $x \in (-1,0)$ a tím i důkaz celé věty. ∎

7.4 Výpočet limit přes Taylorův polynom

Fakt, že funkce lze na okolí bodů aproximovat polynomem je mimo jiné užitečný při výpočtech rozličných limit. Totiž, počítáme-li například limitu v 0 podílu funkce a polynomu stupně 4, jistě není třeba uvažovat Taylorův polynom této funkce stupně většího než 4, neboť x^n pro $n > 4$ „jde k 0 mnohem rychleji“ než x^4. Nejprve trocha formalizmu.

Definice 7.4.1 (Symbol „malé o“)

Ať $f, g : M \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a $a \in M$. Řekneme, že funkce f je *malé o* od g v bodě a, pokud

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Tento fakt značíme $f(x) = o(g(x)), x \to a$, přičemž příkmetek $x \to a$ vynecháváme, je-li limitní bod zřejmý z kontextu, a píšeme pouze $f = o(g)$.

Tvrzení 7.4.2 (Vlastnosti malého o)

Ať $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 : M \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a $a \in M$. V následujícím výčtu vždy předpokládáme, že právě a je limitním bodem. Platí

(1) *Je-li $f_1 = o(g)$ a $f_2 = o(g)$, pak $f_1 + f_2 = o(g)$.*

(2) *Je-li $f_1 = o(g_1)$ a $f_2 = o(g_2)$, pak $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.*

(3) *Je-li $f_1 = o(g)$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí a, pak $f_1 f_2 = o(g_1 f_2)$.*

(4) *Je-li $f = o(g_1)$ a $\lim_{x\to a} g_1(x)/g_2(x)$ je konečná, pak $f = o(g_2)$.*

(5) *Je-li $f = o(g)$ a $h : M \to \mathbb{R}$ je omezená na jistém prstencovém okolí a, pak $hf = o(g)$.*

(6) Jsou-li $m \leq n \in \mathbb{N}$ a $f = o((x-a)^n)$, pak $f = o((x-a)^m)$.

DŮKAZ. Plyne okamžitě z věty o aritmetice limit. ■

Raději než budovat komplikovanou teorii, ukážeme výpočet limit přes Taylorův polynom na několika příkladech.

Úloha 7.4.3

Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}.$$

ŘEŠENÍ. Protože pro $x \in \mathbb{R}$ je z definice

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

je Taylorova řada funkce cos v libovolném bodě přesně tato. Rozepíšeme si její začátek.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

V červené řadě jsou všechna x v mocnině větší než 6. Platí pročež

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = o(x^5).$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^5)}{x_4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{24}x^4}{x^4} + \frac{o(x^5)}{x^4} = \frac{1}{24} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^5)}{x^4} = \frac{1}{24} + 0 = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$ ♠

Úloha 7.4.4

Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \cot^2 x.$$

ŘEŠENÍ. Upravíme nejprve výraz do tvaru

$$\frac{1}{x^2} - \cot^2 x = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4}.$$

Podle tvrzení 6.3.1 je

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1.$$

Druhou limitu spočteme užitím Taylorova polynomu.

Je dobré si nejprve rozmyslet, do kterého stupně je třeba Taylorovy polynomy zastoupených funkcí počítat. V Taylorově řadě funkce cos se objevuje proměnná v mocninách 0, 2, 4, ... a v řadě sin v mocninách 1, 3, 5, ... Obě tyto funkce jsou v čitateli na druhou a vyděleny x^4. Jejich první dva nenulové členy musejí stačit. Spočteme tedy Taylorovy polynomy stupně 3 funkcí sin a cos v bodě 0.

$$\begin{aligned} T_3^{\sin,0}(x) &= x - \frac{1}{6}x^3, \\ T_3^{\cos,0}(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Tedy,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^4} &= \frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 - x^2\left(1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)\right)^2}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2 + x^4 + o(x^4)}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^4 + x^4}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = \frac{-\frac{1}{3}+1}{1} + 0 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

♠

Úloha 7.4.5

Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^3) - 1}{\sin x - x}.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} \exp(x^3) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^n)^3}{n!} = 1 + x^3 + o(x^3), \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Čili,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^3) - 1}{\sin x - x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^3 + o(x^3) - 1}{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = -6 + 0 = -6. \end{aligned}$$

♠

Cvičení 7.4.6

Spočtěte následující limity.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \exp(-x^2/2)}{x^4} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \tan x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$$

Kapitola 8

Primitivní funkce

Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávejte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.

Příčina vzniku *primitivní funkce* (též *integrálu*) reálné funkce je veskrze fyzikální, jak bude objasněno v příští kapitole. My, majíce k dispozici již úplnou teorii integrálu, půjdeme směrem opačným jejímu původnímu vývoji. Začneme tedy definicí a základními vlastnostmi primitivních funkcí (vlastně *antiderivací*) a teprve poté si vysvětlíme jejich fyzikálně-geometrický význam.

Definice 8.0.1 (Primitivní funkce)

Ať $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ reálná funkce. Řekneme, že $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ je *primitivní* k f na (a, b), když platí $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$. Je-li interval zřejmý z kontextu, píšeme též $F = \int f$ nebo „úplněji“ $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $x \in (a, b)$.

Poznámka 8.0.2 (Proč otevřený interval?)

Primitivní funkci definujeme pouze na **otevřeném intervalu**. Důvod tomu není nikterak hluboký, spíše technický. Při definici na uzavřeném intervalu bychom totiž museli v jeho krajních bodech uvažovat jednostranné derivace a tím zkomplikovat zápis i budoucí diskuse vlastností primitivních funkcí.

Je zajímavé, že „akce derivace“ funkce způsobuje ztrátu pouze *konstantního* množství dat o této funkci. To se projevuje tak, že dvě primitivní funkce na témže intervalu k téže funkci se liší pouze o konstantu.

Lemma 8.0.3 (Jednoznačnost primitivní funkce)

Ať $F, G : (a, b) \to \mathbb{R}$ jsou primitivní k $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ na (a, b). Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro $x \in (a, b)$.

Důkaz. Položme $H(x) \coloneqq F(x) - G(x)$ pro $x \in (a, b)$. Potom

$$H'(x) = (F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0,$$

tedy je podle cvičení 5.2.5 H konstantní na (a, b). Odtud tvrzení. ■

Poznámka 8.0.4

V závěsu předchozího lemmatu budeme symbolem $\int f$ označovat *kteroukoli* primitivní funkci k f na daném intervalu a rozlišující konstantu zanedbáme. Formalizmem nakažený čtenář může přemýšlet o symbolu $\int f$ jako značícím *třídu ekvivalence* všech funkcí jsoucích primitivních k f, kde relací je zde pochopitelně rovnost až na konstantu.

Příklad 8.0.5

Platí

$$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}, & \alpha \neq -1, \\ \log x, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Vskutku, máme $\log' x = 1/x$ a

$$\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = \frac{\alpha+1}{\alpha+1}x^{\alpha+1-1} = x^\alpha$$

pro $\alpha \neq -1$.

Věta 8.0.6 (Aritmetika primitivních funkcí)

Ať $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $F : (a,b) \to \mathbb{R}$, resp. $G : (a,b) \to \mathbb{R}$, je primitivní k f, resp. ke g, na (a,b). Ať dále $c, d \in \mathbb{R}$. Pak je $cF + dG$ primitivní k $cf + dg$ na (a,b).

Důkaz. Zřejmý, z věty o aritmetice derivací. Ponechán jako snadné cvičení. ■

Cvičení 8.0.7

Dokažte větu o aritmetice primitivních funkcí.

Kompletní charakteristika funkcí, k nímž na jistém intervalu existuje primitivní, je stále otevřeným problémem matematické analýzy. My si pouze uvedeme, a v sekci o Riemannově integrálu, dokážeme, že spojité funkce primitivní funkci mají vždy. Ovšem, tato podmínka je pouze postačující, nikoli nutná. Existuje mnoho nespojitých funkcí, k nímž primitivní funkce existuje rovněž.

Věta 8.0.8 (Spojitost a existence primitivní funkce)

Ať $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a,b). Pak má na tomto intervalu primitivní funkci.

Důkaz. Vyplyne ze základní věty kalkulu. ■

Je ovšem známo mnoho vlastností, které funkce, majíc na jistém intervalu primitivní funkci, splňovat musejí. Jedna z nich je tzv. *Darbouxova vlastnost* – vlastnost funkce zobrazovat interval na interval, která je slabší než spojitost, ale přesto do značné míry omezující.

Věta 8.0.9 (Darbouxova)

Ať má f na (a,b) primitivní funkci F. Pak pro každý interval $I \subseteq (a,b)$ platí, že $f(I)$ je rovněž interval.

Důkaz. Volme interval $I \subseteq (a,b)$ libovolně a nechť $y_1, y_2 \in f(I)$. Je třeba ukázat, že je-li $y_1 < z < y_2$, pak $z \in f(I)$.

Položme $H(x) \coloneqq F(x) - zx$, $x \in (a,b)$. Pak platí $H'(x) = f(x) - z$. Nalezněme z definice $f(I)$ čísla $x_1, x_2 \in I$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Protože má H na (a,b) konečnou derivaci, je na tomto intervalu podle lemmatu 5.0.9 spojitá. Jelikož $[x_1, x_2] \subseteq (a,b)$, nabývá podle věty 4.3.9 funkce H na $[x_1, x_2]$ minima. Ať je tomu tak v bodě x_0.

Ukážeme, že x_0 není ani jeden z bodů x_1, x_2. Máme $H'(x_1) = f(x_1) - z = y_1 - z < 0$, tj.

$$\lim_{x \to x_1} \frac{H(x) - H(x_1)}{x - x_1} < 0,$$

a tedy existuje okolí bodu x_1 na němž platí $H(x) < H(x_1)$. Ergo, x_1 není bodem minima H na $[x_1, x_2]$. Podobně odvodíme, že ani x_2 není bodem minima H. Pak je ale $x_0 \in (x_1, x_2)$ a podle tvrzení 5.1.6 platí $H'(x_0) = 0$, neboli $f(x_0) = z$, což dokazuje výrok $z \in f(I)$. ■

8.1 Výpočet primitivních funkcí

Na rozdíl od výpočtu derivace funkce, je hledání funkce primitivní téměř vždy silně nedeterministický úkon. Existují pomůcky k jejich výpočtu, jimž je tato sekce ovšem věnována, avšak mnohdy musí jeden pracovat v jistém smyslu „zpětně“, tj. očekávat jistý výsledek a zpytovanou funkci upravit do tvaru, která co nejblíže odpovídá derivaci právě tohoto očekávaného výsledku. Situaci nezjednodušuje to, že mnoho (i snadno vyjádřitelných funkcí) nemá primitivní funkci zapsatelnou použitím pouze funkcí elementárních. Jako příklad vezměme funkci $\exp(x^2)$, která je na $\mathbb{R}$ spojitá, a tedy má, podle věty 8.0.8 na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Avšak, a to bylo jest dokázáno, tato funkce nemá vyjádření pomocí elementárních funkcí.

Základními nástroji pro výpočet primitivních funkcí jsou *integrace per partes* a *substituční věty*. Uvedeme a dokážeme všechny.

Věta 8.1.1 (Integrace per partes)

Ať $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce, F je primitivní k f a G primitivní ke g na (a,b). Pak platí

$$\int (f \cdot G) = F \cdot G - \int (F \cdot g).$$

Důkaz. Funkce F i G jsou spojité, protože mají podle předpokladu konečné derivace na (a,b). Funkce f i g mají z předpokladu primitivní funkce, takže i funkce $f \cdot G$ a $F \cdot g$ mají primitivní funkce na (a,b).

Položme $H \coloneqq \int (F \cdot g)$. Pak z aritmetiky derivací

$$(F \cdot G - H)' = f \cdot G + F \cdot g - F \cdot g = f \cdot G,$$

což dokazuje kýženou rovnost. ■

Poznámka 8.1.2

Pro další výpočty bude dobré si povšimnout, že pro libovolnou reálnou funkci f platí

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \log(f(x)).$$

Vskutku, plyne to z přímočarého výpočtu využívajícího větu o derivaci složené funkce:

$$(\log(f(x)))' = f'(x) \cdot \log' f(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)}.$$

Příklad 8.1.3

Použitím věty 8.1.1 spočteme

$$\int \arctan x\,\mathrm{d}x$$

pro $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Čtenáři použitím věty o derivaci inverzní funkce sobě snadno ověří, že

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Označme $f(x) \coloneqq 1$ a $G(x) \coloneqq \arctan x$. Pak ve značení věty 8.1.1 jest $F(x) = x$ a $g(x) = 1/(1+x^2)$. Počítáme

$$\begin{aligned}\int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x &= F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Protože $(1+x^2)' = 2x$, poslední integrál snadno spočteme úpravou

$$\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Celkem tedy máme

$$\int \arctan x\,\mathrm{d}x = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2}\log(1+x^2).$$

Úloha 8.1.4

Pro $x \in \mathbb{R}$ spočtěte

$$\int x \exp x\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Protože funkce $\exp x$ se nemění derivací či integrací, je dobré si před použitím integrace per partes rozmyslet, zda je druhou funkci jednodušší integrovat či derivovat. Zde platí $x' = 1$, tedy budeme x derivovat a $\exp x$ integrovat. Ve značení věty 8.1.1 máme $f(x) = \exp x$

a $G(x) = x$. Pak $F(x) = \exp x$ a $g(x) = 1$. Odtud,

$$\begin{aligned}\int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x &= F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \exp x \cdot x - \int \exp x \cdot 1\,\mathrm{d}x = x\exp x - \exp x,\end{aligned}$$

čímž je výpočet završen. ♠

Cvičení 8.1.5

Spočtěte

$$\int \frac{\log^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Věta 8.1.6 (první o substituci)

Ať $a < b, \alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, F je primitivní k f na (a, b) a $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$ je reálná funkce s konečnou φ' na (α, β). Potom

$$\int (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t).$$

Důkaz. Podle věty o derivaci složené funkce platí

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

což dokazuje tvrzení. ■

Úloha 8.1.7

Spočtěte

$$\int \sin^4 t \cos t\,\mathrm{d}t.$$

Řešení. Položme $f(x) = x^4$ a $\varphi(t) = \sin t$. Pak $F(x) = x^5/5$, $\varphi'(t) = \cos t$ a

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \sin^4 t \cos t.$$

Podle první věty o substituci platí

$$\int \sin^4 t \cos t\,\mathrm{d}t = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) = \frac{\sin^5 t}{5}.$$

♠

Cvičení 8.1.8

Spočtěte

$$\int \frac{x}{\sqrt{2 + 5x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Cvičení 8.1.9

Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Hint: platí $\arcsin' x = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Věta 8.1.10 (druhá o substituci)

Ať $a < b, \alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ je na a má na (α,β) konečnou nenulovou derivaci. Platí-li pro každé $t \in (\alpha,\beta)$ rovnost

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t),$$

pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = (G \circ \varphi^{-1})(x)$$

pro $x \in (a,b)$.

Důkaz. Protože φ' má na (α,β) primitivní funkci, zobrazuje podle Darbouxovy věty interval na interval. Z předpokladu je φ' nenulová, což spolu s předchozí větou implikuje, že buď $\varphi' > 0$ nebo $\varphi' < 0$ na celém (α,β). V prvním případě je φ podle důsledku 5.2.4 buď rostoucí, nebo klesající, na (α,β). V každém případě je prostá, a tedy existuje $\varphi^{-1} : (a,b) \to (\alpha,\beta)$.

Podle věty o derivaci inverzní funkce a též věty o derivaci složené funkce platí pro $x \in (a,b)$

$$\begin{aligned}(G \circ \varphi^{-1})'(x) &= G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x)\\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x)\\ &= f(x) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x),\end{aligned}$$

jak bylo jest dokázati. ■

Příklad 8.1.11

Pro $x \in (-1,1)$ platí

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x).$$

Vskutku, položme $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $(\alpha,\beta) = (-\pi/2, \pi/2)$ a $\varphi(t) = \sin t$. Pak $\varphi : (-\pi/2,\pi/2) \to (-1,1)$ je na a platí $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ pro $t \in (-\pi/2,\pi/2)$. Dále $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ a

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Užitím vlastností goniometrických funkcí se snadno ověří, že

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t).$$

Odtud

$$\int \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{2}\cos 2t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t.$$

Čili, ve značení druhé věty o substituci jest

$$G(t) = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t.$$

Podle téže věty máme

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x).$$

8.1.1 Integrace racionálních funkcí

Mezi funkce, jež umíme „algoritmicky" integrovat, patří (dle příkladu 8.0.5) jistě funkce polynomiální. Zvlášť užitečné v závěsu vět o substituci je rovněž umět algoritmicky integrovat funkce *racionální*, tedy reálné funkce tvaru $R(x) = p(x)/q(x($, kde p, q jsou polynomy.

Rádi bychom uměli libovolnou racionální funkci rozložit na součet výrazně jednodušších racionálních funkcí, jejichž integrály umíme spočítat. To lze, metodou slující *rozklad na parciální zlomky*.

Poznámka 8.1.12

V následující větě použijeme sebou nedokázané tvrzení z algebry, že každý reálný polynom se rozkládá na součin lineárních a kvadratických činitelů. Tedy, je-li $p(x)$ polynom, pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ a pro vhodná $k, l \in \mathbb{N}$ čísla $a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{R}$ a přirozená čísla $n_1, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}$ splňující

$$p(x) = c(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}(x^2+\alpha_1 x+\beta_1)^{m_1}\cdots(x^2+\alpha_l x+\beta_l)^{m_l},$$

kde všechny $x^2 + \alpha_i x + \beta_i$ nemají reálný kořen.

Věta 8.1.13 (Rozklad na parciální zlomky)

Ať $p(x), q(x)$ jsou polynomy a q je rozložený jako v poznámce výše. Pak existují jednoznačně určená *čísla*

$$A_1^1, A_2^1, \ldots, A_{n_1}^1, A_1^2, A_2^2, \ldots, A_{n_2}^2, A_1^3, A_2^3, \ldots, A_1^k, \ldots, A_{n_k}^k \in \mathbb{R},$$
$$B_1^1, B_2^1, \ldots, B_{m_1}^1, B_1^2, B_2^2, \ldots, B_{m_2}^2, B_1^3, B_2^3, \ldots, B_1^l, \ldots, B_{m_l}^l \in \mathbb{R},$$
$$C_1^1, C_2^1, \ldots, C_{m_1}^1, C_1^2, C_2^2, \ldots, C_{m_2}^2, C_1^3, C_2^3, \ldots, C_1^l, \ldots, C_{m_l}^l \in \mathbb{R},$$

taková, že

$$
\begin{aligned}
\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{A_1^1}{x-a_1} + \frac{A_2^1}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{n_1}^1}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{A_1^2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_{n_2}^2}{(x-a_2)^{n_2}} + \cdots + \frac{A_{n_k}^k}{(x-a_k)^{n_k}} \\
&+ \frac{B_1^1x+C_1^1}{x^2+\alpha_1x+\beta_1} + \frac{B_2^1x+C_2^1}{(x^2+\alpha_1x+\beta_1)^2} + \cdots + \frac{B_{m_1}^1x+C_{m_1}^1}{(x^2+\alpha_1x+\beta_1)^{m_1}} + \frac{B_1^2x+C_1^2}{x^2+\alpha_2x+\beta_2} \\
&+ \cdots + \frac{B_{m_2}^2x+C_{m_2}^2}{(x^2+\alpha_2x+\beta_2)^{m_2}} + \cdots + \frac{B_{m_l}^lx+C_{m_l}^l}{(x^2+\alpha_lx+\beta_l)^{m_l}} \\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_j^i}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i} \frac{B_j^ix+C_j^i}{(x^2+\alpha_ix+\beta_i)^j}.
\end{aligned}
$$

Důkaz. Triviální, indukcí podle stupně q. Ale moc písmenek. ■

Příklad 8.1.14

Rozložíme

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{3x^3-3x^2+4x+10}{(x-2)^2(x^2+2x+2)}$$

na parciální zlomky. Podle věty 8.1.13 existují čísla $A_1, A_2, B, C \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{3x^3-3x^2+4x+10}{(x-2)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}. \qquad (\heartsuit)$$

Tato čísla nalezneme porovnáním koeficientů obou stran po roznásobení jmenovatelem a vyřešením získané soustavy rovnic.

Roznásobením obou stran ($\heartsuit$) polynomem $q(x)$ dostaneme

$$3x^3-3x^2+4x+10 = A_1(x-2)(x^2+2x+2) + A_2(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x-2)^2.$$

Tato rovnost musí platit pro všechna $x \in \mathbb{R}$, speciálně tedy pro $x=2$. Dosazením dostaneme první rovnici

$$3\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 10 = A_2(2^2+2\cdot 2+2),$$

z níž ihned $A_2 = 3$. Nyní dosaďme například $x=0$. Dosazení dá

$$4 = -4A_1 + 4C.$$

Volbami $x=1$ a $x=3$ dostaneme další dvě rovnice

$$
\begin{aligned}
-1 &= -5A_1 + B + C,\\
25 &= 17A_1 + 3B + C.
\end{aligned}
$$

Snadno spočteme, že řešením soustavy těchto tří rovnic je $A_1 = 1, B = 2$ a $C = 2$. Platí tedy

$$\frac{3x^3-3x^2+4x+10}{(x-2)^2(x^2+2x+2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{2x+2}{x^2+2x+2}.$$

Pochopitelně, rozklad na parciální zlomky nám není mnoho užitečný, neumíme-li spočítat integrály

typu
$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}\,\mathrm{d}x,$$
pro $a, \alpha, \beta, A, B, C \in \mathbb{R}$ a $k, l \in \mathbb{N}$. První z těchto integrálů už jsme v zásadě spočetli v příkladě 8.0.5. Druhý je na výpočet výrazně těžší a hledaná primitivní funkce se nejsnadněji zapisuje rekurzivně.

Čtenáři snadno ověří, že
$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}, & k > 1, \\ A \log|x-a|, & k = 1. \end{cases}$$

Integrál druhého typu nejprve rozložíme
$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}\,\mathrm{d}x + \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}\,\mathrm{d}x.$$

Protože $(x^2+\alpha x+\beta)' = 2x+\alpha$, je první z těchto integrálů rovněž spočten přímočaře. Vskutku,
$$\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{l-1}}, & l > 1, \\ \log(x^2+\alpha x+\beta), & l = 1. \end{cases}$$

Výraz v druhém integrálu nejprve upravíme
$$\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^l} = \frac{1}{\left(\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^l} = \frac{1}{\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^l}\cdot\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2\right)^l}.$$

Položíme-li nyní $\varphi(x) \coloneqq \frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}$ a pro strohost zápisu označíme $t = \varphi(x)$, pak z první věty o substituci platí
$$\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^l}\int \frac{1}{(1+t^2)^l}\,\mathrm{d}t.$$

Označme
$$I_l \coloneqq \int \frac{1}{(1+t^2)^l}\,\mathrm{d}t.$$

Lemma 8.1.15

Platí
$$I_{l+1} = \frac{t}{2l(1+t^2)^l} + \frac{2l-1}{2l}I_l$$
pro $t \in \mathbb{R}$, *přičemž* $I_1 = \arctan t$.

Důkaz. Jistě
$$I_1 = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan t.$$
pro $t \in \mathbb{R}$.

Dále, pro každé $l \in \mathbb{N}$ je $t \mapsto 1/(1+t^2)^l$ spojitá funkce na $\mathbb{R}$, tudíž má podle věty 8.0.8 primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$.

Z věty o integraci per partes platí

$$\int 1 \cdot \frac{1}{(1+t^2)^l}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(1+t^2)^l} - \int \frac{-2lt^2}{(1+t^2)^{l+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(1+t^2)^l} + 2l\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{l+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Dále spočteme

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{l+1}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(1+t^2)^l}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{(1+t^2)^{l+1}}\,\mathrm{d}t = I_l - I_{l+1}.$$

To nám dává rovnost

$$I_l = \int \frac{1}{(1+t^2)^l}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(1+t^2)^l} + 2l\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{l+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(1+t^2)^l} + 2l(I_l - I_{l+1}),$$

z níž již snadnou úpravou plyne tvrzení. ■

Úloha 8.1.16

Spočtěte

$$\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve rozložíme

$$x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Podle věty o rozkladu na parciální zlomky existují $B_1, C_1, B_2, C_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{B_1x + C_1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Roznásobením této rovnosti polynomem $x^4 + 1$ získáme

$$1 = (B_1x + C_1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (B_2x + C_2)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Postupným dosazením čtyř libovolných hodnot za x dostaneme soustavu čtyř lineárních rovnic s řešením

$$B_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}},\ C_1 = \frac{1}{2},\ B_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}},\ C_2 = \frac{1}{2}.$$

Čili,

$$\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

První integrál rozložíme jako

$$\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x + \sqrt{2})}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Snadno spočteme, že

$$\int \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x+\sqrt{2})}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

Dále,

$$\int \frac{\frac{1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1).$$

Obdobným postupem dostaneme i primitivní funkci

$$\int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x = -\log(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1).$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = {} & \frac{1}{4\sqrt{2}}(\log(x^2+\sqrt{2}x+1)-\log(x^2-\sqrt{2}x+1)) \\ & + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\arctan(\sqrt{2}x+1)+\arctan(\sqrt{2}x-1)).\end{aligned}$$

♠

Cvičení 8.1.17

Spočtěte

$$\int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

8.2 Riemannův integrál

V této sekci si ukážeme velmi intuitivní způsob, jak počítat *orientovanou* plochu sevřenou grafem dané funkce a osou x. Spojením *orientovaná plocha* zde neznačí to, jež bychom přirozeně nazvali „obsahem“ útvaru mezi grafem funkce a osou x, nýbrž rozdíl obsahu útvaru takto vzniknuvšího **nad** osou x a toho **pod** osou x. Fyzikální využití takového konceptu jsou výrazně širší.

Je velmi překvapivé, že obsah pod grafem funkce jakkoli souvisí s její primitivní funkcí. Toto spojení, jeho příčina a intuitivní vysvětlení budou zveřejněny v sekci o Newtonově integrálu.

Riemannův integrál je způsob výpočtu řečené plochy, který a priori s primitivní funkcí nesouvisí nijak. Pracuje na přirozeném principu aproximace plochy pod grafem funkce stále větším množstvím stále užších obdélníku (útvarů, jejichž obsah jsme schopni triviálně spočíst) jednou seshora, jednou zespoda. Blíží-li se zvyšováním počtu obdélníků k sobě tyto aproximace, jejich společná limita je právě plochou pod grafem funkce. K formalizaci tohoto odstavce potřebujeme několik úvodních definic.

Definice 8.2.1 (Dělení intervalu)

Ať $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Jeho *dělením* nazveme libovolnou konečnou posloupnost $x_0, \dots, x_n$ pro $n \in \mathbb{N}$, kde $x_0 = a, x_n = b$ a platí $x_{i-1} < x_i$ pro každé $1 \le i \le n$.

Takovou posloupnost značíme $D = (x_i)_{i=0}^n$ a délku nejdelšího intervalu tvaru $[x_i, x_{i+1}]$ nazveme *normou* D, značenou

$$\|D\| \coloneqq \max_{1 \le i \le n} (x_i - x_{i-1}).$$

Jsou-li D', D dvě dělení $[a, b]$, pak říkáme, že D' *zjemňuje* D (značíme $D' \le D$), patří-li každý dělící bod D rovněž do D'. Speciálně, D zjemňuje samo sebe.

Definice 8.2.2 (Horní a dolní součty)

Ať $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **omezená** funkce a D dělení $[a, b]$. Definujeme hodnotu

$$\overline{S}(f, D) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}), \text{ resp.}$$
$$\underline{S}(f, D) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

a nazýváme ji *horním*, resp. *dolním*, součtem f při dělení D. Zde výraz $\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$, resp. $\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$, značí supremum, resp. infimum, funkce f na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$.

Užitím horních a dolních součtů je již přímočaré definovat „plochu pod funkcí“. Totiž, horní součty jsou právě aproximací grafu f seshora posloupností obdélníků o šířkách přesně odpovídajících délkám dělících intervalů (tj. $x_i - x_{i-1}$) a výškách $\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$, a dolní součty zase aproximací grafu f zespoda obdélníky o stejných šířkách a výškách $\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$.

Nyní vezmeme *nejlepší možné* aproximace plochy pod grafem f seshora i zespoda. Uděláme to tak, že „vyzkoušíme“ úplně všechna dělení $[a, b]$ a z nich vybereme to, jež dává nejmenší horní součty. Formálně, vezmeme infimum horních součtů přes všechna možná dělení $[a, b]$. Z druhé strany zase supremum dolních součtů přes všechna dělení $[a, b]$. Je dobré si rozmyslet, že je-li plocha pod grafem funkce „aproximovatelná“ pomocí obdélníků, pak tento postup skutečně dává kýženou hodnotu orientované plochy.

Definice 8.2.3 (Riemannův integrál)

Ať $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ **omezená** funkce. Definujeme hodnotu

$$\overline{\int_a^b} f \coloneqq \inf\{\overline{S}(f, D) \mid D \text{ dělení } [a, b]\}, \text{ resp.,}$$
$$\underline{\int_a^b} f \coloneqq \sup\{\underline{S}(f, D) \mid D \text{ dělení } [a, b]\},$$

a nazýváme ji *horním Riemannovým integrálem*, resp. *dolním Riemannovým integrálem*, funkce f na $[a, b]$.

Platí-li
$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f,$$
říkáme, že funkce f *má Riemannův integrál* na $[a,b]$, což symbolicky značíme $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Společnou hodnotu obou integrálů poté zkrátka $\int_a^b f$ a říkáme jí *Riemannův integrál* funkce f na $[a,b]$.

Varování 8.2.4

Riemannův integrál je definován pouze pro **omezenou** funkci na **uzavřeném** intervalu.

Důvodem předpokladu omezenosti je potřeba dobré definovanosti horních a dolních součtů. U neomezených funkcí mohou být hodnoty $\sup_{[x_{i-1},x_i]} f$ a $\inf_{[x_{i-1},x_i]} f$ totiž nekonečné.

Předpoklad uzavřenosti intervalu existuje v zásadě ze stejného důvodu. Při definici dělení otevřeného intervalu a následně součtů dané funkce při tomto dělení by byl jeden nucen studovat limitní chování takové funkce v jeho krajních bodech.

Následuje několik tvrzení o vlastnostech dělení uzavřených intervalů a Riemannova integrálu, která později pomohou sloučit tento s konceptem primitivní funkce.

Lemma 8.2.5 (Vlastnosti dělení)

Nechť $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce.

(a) *Ať D, D' jsou dělení $[a,b]$ a $D' \leq D$. Potom*
$$\underline{S}(f,D) \leq \underline{S}(f,D') \leq \overline{S}(f,D') \leq \overline{S}(f,D).$$

(b) *Ať D_1, D_2 jsou libovolná dělení $[a,b]$. Pak*
$$\underline{S}(f,D_1) \leq \overline{S}(f,D_2)$$

(c) *Platí*
$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Důkaz. Bod (a) dokážeme v případě, kdy D' má oproti D přesně jeden dělící bod navíc. Zbytek důkazu je triviální využití indukce. Poznamenejme, že prostřední nerovnost (tj. $\underline{S}(f,D') \leq \overline{S}(f,D')$) plyne přímo z definice. Označme $D = (x_i)_{i=0}^n$ a ať D' má navíc dělící bod $y \in (x_{i-1}, x_i)$ pro jisté $i \in \{1,\dots,n\}$. Potom
$$\underline{S}(f,D') - \underline{S}(f,D) = \inf_{[x_{i-1},y]} f \cdot (y - x_{i-1}) + \inf_{[y,x_i]} f \cdot (x_i - y) - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}),$$
neboť $\underline{S}(f,D)$ sdílí s $\underline{S}(f,D')$ všechny sčítance typu $\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1})$ pro $j \neq i$. Jistě platí
$$\inf_{[x_{i-1},x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1},y]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \leq \inf_{[y,x_i]} f,$$

čili lze odhadnout

$$\begin{aligned}\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) &= \inf_{[x_{i-1}, y]} f \cdot (y - x_{i-1}) + \inf_{[y, x_i]} f \cdot (x_i - y) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &\geq \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (y - x_{i-1} + x_i - y - x_i + x_{i-1}) = 0,\end{aligned}$$

což po přeuspořádání dá ihned

$$\underline{S}(f, D') \geq \underline{S}(f, D).$$

Třetí nerovnost, $\overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D)$, se dokáže obdobně.

Pro důkaz (b) uvažme dělení D zjemňující jak D_1, tak D_2. Potom podle bodu (a) platí

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D_2),$$

což je přímo dokazovaná nerovnost.

Bod (c) plyne okamžitě z (b) a definice Riemannova integrálu. ∎

Znění předchozího lemmatu je vyjádření geometricky intuitivního faktu, že libovolný odhad plochy pod funkcí posloupností obdélníků seshora je vždy vyšší než odhad téhož posloupností obdélníku zespoda. Jeden přímočarý důsledek je následující.

Důsledek 8.2.6

Ať $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce. Položme $m \coloneqq \inf_{[a,b]} f$ a $M \coloneqq \sup_{[a,b]} f$. Pak pro libovolné D dělení $[a, b]$ platí

$$m(b-a) \overset{(1)}{\leq} \underline{S}(f, D) \overset{(2)}{\leq} \underline{\int_a^b} f \overset{(3)}{\leq} \overline{\int_a^b} f \overset{(4)}{\leq} \overline{S}(f, D) \overset{(5)}{\leq} M(b-a).$$

Důkaz. Nerovnosti (2), (3) a (4) plynou ihned z definic.

Dále pak (1), resp. (5), plyne okamžitě z předchozího lemmatu dosazením za D_1, resp. za D_2, triviální dělení $D' \coloneqq (x_0, x_1) = (a, b)$. Platí totiž

$$\underline{S}(f, D') = \inf_{[a,b]} f \cdot (b-a) = m(b-a) \quad \text{a} \quad \overline{S}(f, D') = \sup_{[a,b]} f \cdot (b-a) = M(b-a).$$ ∎

Nyní dokážeme technické tvrzení, které nám posléze umožní Riemannův integrál z definice počítat. Je vyjádřením idey, že dolní, resp. horní, Riemannův integrál lze libovolně dobře aproximovat dolním, resp. horním, součtem přes vhodné dělení příslušného intervalu. Vzhledem k definici dolního, resp. horního, Riemannova integrálu jako suprema dolních, resp. infima horních, součtů snad není tento fakt příliš překvapivý. Dlužno podotknout, že platnost podobných tvrzení se obyčejně stanovuje důkazovou technikou *mávnutí ruky*, ne však při bakalářském studiu.

Věta 8.2.7 (Aproximace Riemannova integrálu)

Ať $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce. Pak pro $\varepsilon > 0$ libovolně malé existuje

$\delta > 0$ takové, že kdykoli je $D = (x_i)_{i=0}^n$ dělení $[a,b]$ s normou $\|D\| < \delta$, pak

$$\overline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f,D) \leq \overline{\int_a^b} f + \varepsilon, \tag{8.1}$$

$$\underline{\int_a^b} f \geq \underline{S}(f,D) \geq \underline{\int_a^b} f - \varepsilon. \tag{8.2}$$

Důkaz. Poznamenejme, že omezenost f na $[a,b]$ dává existenci čísla $K > 0$ takového, že $|f(x)| < K$ pro $x \in [a,b]$. Speciálně tedy $\sup_{[a,b]} f \leq K$ a $\inf_{[a,b]} f \geq -K$.

Dokážeme například pár nerovností v (8.1). Nerovnosti v (8.2) se dokazují analogicky. Všimněme si nejprve, že první nerovnost v (8.1) plyne ihned z definice Riemannova integrálu. Důkaz té druhé je poněkud komplikovaný. Totiž, připomeňme zmíněnou definici:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{S}(f,D) \mid D \text{ dělení } [a,b]\}.$$

Z definice infima existuje nějaký prvek množiny napravo, tedy nějaké dělení D_0 intervalu $[a,b]$, takové, že

$$\overline{S}(f,D_0) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon,$$

protože $\overline{\int_a^b} f$ je *nejmenší* dolní závorou množiny horních součtů přes všechna možná dělení intervalu $[a,b]$. Proč toto není konec důkazu? Protože o normě D_0 nemůžeme říct vůbec nic. My nepotřebujeme nalézt dělení, které dobře (závisle na ε) aproximuje $\overline{\int_a^b} f$, ale ukázat, že *úplně každé* dělení s dostatečně malou normou jej aproximuje dobře. Ukážeme, že (až na konstantu) stačí, aby tato norma byla maximálně tak velká jako délka nejmenšího z dělících intervalů v D_0.

Označme tedy $D_0 = (x_i)_{i=0}^n$, nechť $\mu(D_0) \coloneqq \min\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \leq i \leq n\}$ a položme $\delta_1 \coloneqq \min\{\mu(D_0), \varepsilon\}$. Ať je nyní D libovolné dělení $[a,b]$ s $\|D\| < \delta_1$. Definujme nové dělení P intervalu $[a,b]$ sestávající ze všech dělících bodů D i D_0. Neformálně můžeme psát $P = D \cup D_0$. Pro pohodlí označme písmenem $\mathcal{D}$ množinu všech intervalů v dělení D a $\mathcal{P}$ množinu všech intervalů v dělení P. Z definice

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot \ell(I),$$

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{I \in \mathcal{P}} \sup_I f \cdot \ell(I),$$

kde, připomeňme, $\ell(I)$ značí délku intervalu I.

Vezměme libovolný $I \in \mathcal{D}$. Mohou nastat dva případy:

(1) I leží rovněž v $\mathcal{P}$. Potom je sčítanec $\sup_I f \cdot \ell(I)$ přítomen jak v součtu $\overline{S}(f,D)$, tak v $\overline{S}(f,P)$.

(2) I neleží v $\mathcal{P}$. Pak vnitřek tohoto intervalu protíná nějaký dělící interval v D_0. To jest, existuje index $j \in \{0,\ldots,n\}$ takový, že x_j leží ve vnitřku (není krajním bodem) intervalu

I. Jelikož bylo však D zvoleno tak, že $\|D\| < \mu(D_0)$ – slovy, nejdelší interval v D je kratší než nejkratší interval v D_0 – existuje takový index j *právě jeden*.

Nadále předpokládejme, že nastal případ (2) a označme $I = [\alpha, \beta]$. Pak $x_j \in (\alpha, \beta)$. V $\overline{S}(f, D)$ se nachází sčítanec $\sup_I f \cdot (\beta - \alpha)$, zatímco v $\overline{S}(f, P)$ na místě tohoto sčítance máme

$$\sup_{[\alpha, x_j]} f \cdot (x_j - \alpha) + \sup_{[x_j, \beta]} f \cdot (\beta - x_j).$$

Jejich rozdíl odhadneme

$$\begin{aligned} &\Big| \sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha) - \Big(\sup_{[\alpha, x_j]} f \cdot (x_j - \alpha) + \sup_{[x_j, \beta]} f \cdot (\beta - x_j)\Big)\Big| \\ &\le K(\beta - \alpha) + K(x_j - \alpha) + K(\beta - x_j) = 2K(\beta - \alpha) \le 2K \cdot \|D\|. \end{aligned}$$

Protože D_0 má $n + 1$ dělících bodů, může případ (2) nastat pro maximálně n intervalů z $\mathcal{D}$. Celkem tedy

$$|\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P)| \le 2K \cdot n \cdot \|D\|$$

a speciálně $\overline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, P) + 2Kn\|D\|$. Odtud již přímočaře spočteme

$$\overline{\int_a^b} f \le \overline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, P) + 2Kn\|D\| = \overline{S}(f, D_0) + 2Kn\varepsilon < \overline{\int_a^b} f + (2Kn + 1)\varepsilon,$$

kde předposlední nerovnost plyne z toho, že $P \le D_0$ a z volby $\|D\| < \varepsilon$ a poslední nerovnost z volby D_0 na začátku důkazu. Protože $2Kn + 1$ je konstanta nezávislá na ε, je tímto důkaz (8.1) dokončen.

Podobně bychom nalezli $\delta_2 > 0$, pro něž platí (8.2). Volba $\delta \coloneqq \min(\delta_1, \delta_2)$ zakončuje důkaz. ■

Nyní si zformulujeme dva důsledky právě dokázané věty, které nám umožní hodnotu Riemannova integrálu spočíst jako limitu posloupnosti horních (či dolních) součtů přes dělení se stále menší normou.

Důsledek 8.2.8

Ať $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce a $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost dělení $[a, b]$ splňující $\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$. Potom

$$\overline{\int_a^b} f = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) \quad a \quad \underline{\int_a^b} f = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n).$$

Důkaz. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Podle věty 8.2.7 k němu existuje $\delta > 0$, že pro každé dělení D s $\|D\| < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon.$$

Nalezněme index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro $n \ge n_0$ je $\|D_n\| < \delta$. Pak ale rovněž pro každé $n \ge n_0$ máme odhady

$$\overline{\int_a^b} f \le \overline{S}(f, D_n) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon,$$

což dokazuje, že

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \overline{\int_a^b} f.$$

Druhá rovnost se dokáže obdobně. ■

Důsledek 8.2.9

Ať $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce a $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost dělení taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n).$$

Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n).$$

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\underline{S}(f, D_n) \le \underline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} f \le \overline{S}(f, D_n),$$

což podle lemmatu 3.4.4 znamená, že

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n),$$

jak jsme chtěli. ■

Příklad 8.2.10

Poslední dva důsledky dávají vcelku přímočarý, ač výpočetně obvykle nesnadný postup výpočtu Riemannova integrálu. Vypadá následovně.

(1) Nalezneme posloupnost dělení $[a, b]$ s klesající normou. Volba „vhodné“ posloupnosti dělení závisí velmi na zadané funkci. Možností je nespočetně.

(2) Pomocí důsledku 8.2.9 dokážeme, že Riemannův integrál z f na $[a, b]$ existuje.

(3) Důsledek 8.2.8 pak říká, že jeho hodnota je rovna limitě horních, nebo dolních, součtů přes zvolenou posloupnost dělení.

Body (2) a (3) všedně splývají v jeden, neboť bod (2) káže ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n),$$

což obvykle zahrnuje explicitní výpočet obou limit jsoucí obsahem bodu (3).

Navržený postup vykreslíme výpočtem integrálu

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x.$$

Volme například posloupnost rovnoměrných dělení intervalu $[0,1]$ danou předpisem

$$D_n \coloneqq \left\{\frac{i}{n}\right\}_{i=0}^{n}.$$

Protože $f(x) = x^2$ je rostoucí spojitá funkce na $[0,1]$ je její infimum na každém dělícím intervalu přesně její hodnota v levém krajním bodě a její supremum zase ta v pravém. Délka každého intervalu v D_n je přesně $1/n$, takže pro $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n};$$
$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

Upravíme

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2.$$

Snadná indukce dá

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = n(n-1)(2n-1)$$

pro každé $n \geq 1$. Čili,

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(2n-1)}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Podobně spočteme, že rovněž

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Podle důsledku 8.2.9 existuje Riemannův integrál z funkce f na $[0,1]$. Důsledek 8.2.8 pak dává, že

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Cvičení 8.2.11

Spočtěte následující Riemannovy integrály:

(1) z funkce $f(x) = x^3$ na intervalu $[0,1]$;

(2) z funkce $f(x) = 7x + 2$ na intervalu $[-2,3]$.

8.2.1 Integrovatelné funkce

Chvíli se budeme zabývat nalezením jistých obecných kritérií pro funkce, jejichž splnění již zaručuje existenci jejich Riemannova integrálu. Snad překvapivě, kompletní charakterizace integrovatelných funkcí je otevřený problém a žádný jejich přímočarý popis není znám. My si ukážeme, že dvě důležité třídy funkcí – spojité a monotónní – integrovatelné vždy jsou.

Za tímto účelem vyžadujeme jedno technické lemma.

Lemma 8.2.12 (Kritérium existence integrálu)

Ať $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(1) $f \in \mathcal{R}(a,b)$;

(2) Pro každé $\varepsilon > 0$ *existuje* D*, dělení* $[a,b]$*, takové, že*

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Důkaz. Začneme implikací (1) $\Rightarrow$ (2). Ať tedy $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a $\varepsilon > 0$ je dáno. Z definic suprema a infima nalezneme dělení D_1 a D_2 taková, že

$$\overline{S}(f,D_1) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon = \int_a^b f + \varepsilon \quad \text{a} \quad \underline{S}(f,D_2) > \underline{\int_a^b} f - \varepsilon = \int_a^b f - \varepsilon.$$

Nechť D je dělení zjemňující D_1 i D_2. Potom podle lemmatu 8.2.5 platí

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) &\le \overline{S}(f,D_1) - \underline{S}(f,D_2)\\ &\le \int_a^b f + \varepsilon - \int_a^b f + \varepsilon = 2\varepsilon,\end{aligned}$$

jak jsme chtěli.

Pro důkaz (2) $\Rightarrow$ (1) mějme rovněž dáno $\varepsilon > 0$ a nalezněme dělení D splňující

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Potom ale

$$0 \le \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \le \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon,$$

čili

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f,$$

což znamená, že $f \in \mathcal{R}(a,b)$. ∎

Užitím tohoto lemmatu můžeme ihned dokázat, že monotónní funkce jsou vždy integrovatelné.

Tvrzení 8.2.13 (Integrovatelnost monotónní funkce)

Ať f je monotónní funkce na intervalu $[a,b]$. Pak $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Důkaz. Předpokládejme například, že f je neklesající. Zbylé tři případy se dokazují v zásadě stejně. Funkce f je v tomto případě jistě omezená, neboť $f(a) \le f(x) \le f(b)$ pro každé

$x \in [a,b]$. Nyní využijeme lemma 8.2.12. Ať je tedy $\varepsilon > 0$ dáno. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ dostatečně velké, aby

$$\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} < \varepsilon.$$

Zde $(b-a)(f(b)-f(a))$ je obsah obdélníku obklopujícího celou plochu pod f na $[a,b]$, neboť f je neklesající. Volba řečeného $n \in \mathbb{N}$ představuje jeho rozdělení na dostatečně mnoho proužků, aby každý jeden proužek měl obsah nižší než dané číslo ε. Volme dělení $D = (x_i)_{i=0}^n$ tak, aby dolní rohy těchto proužků byly přesně dělícími body; symbolicky

$$x_i \coloneqq a + \frac{b-a}{n} i, \text{ pro } i \in \{0,\dots,n\}.$$

Nahlédněme, že z monotonie f plynou rovnosti

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x_i) \quad \text{a} \quad \inf_{[x_{i-1},x_i]} f = f(x_{i-1})$$

pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$. Pročež můžeme odhadnout

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) &= \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \Big)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{b-a}{n} \\
&= (f(b) - f(a)) \frac{b-a}{n} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

což podle lemmatu 8.2.12 znamená, že $f \in \mathcal{R}(a,b)$. ■

Abychom rovněž dokázali, že spojité funkce jsou integrovatelné, odbočíme na krátkou chvíli k pojmu *stejnosměrně spojité* funkce. Jde o pojem důležitý primárně při studiu funkcí daných nekonečným součtem (jakými jsou například funkce elementární) a je ten vlastně zesílením vlastnosti spojitosti o požadavek, že daná funkce „roste všude stejně rychle“. Z toho důvodu nedává pojem stejnosměrné spojitosti *v bodě* žádný smysl, nýbrž je potřeba určit interval, na němž má být funkce stejnosměrně spojitá. Uvedeme nyní definici a srovnáme ji s již známou limitní definicí spojitosti.

Definice 8.2.14 (Stejnoměrná spojitost)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je *stejnoměrně spojitá* na I, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x,y \in I : |x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{8.3}$$

Onen zásadní rozdíl mezi spojitostí a stejnoměrnou spojitostí funkce dlí ve faktu, že spojitost je vlastnost *lokální*, ovšem stejnoměrná spojitost je vlastnost *globální*. Abychom toto nahlédli, přepíšeme definici spojitosti funkce na intervalu, aby byla co nejblíže definici spojitosti stejnoměrné.

Funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá na I, když je spojitá v každém jeho bodě (zde se projevuje ona „lokálnost“), tedy, když pro každé $y \in I$ platí, že

$$\lim_{x \to y} f(x) = f(y).$$

Přepsáno přes definici limity, tento výrok zní

$$\forall y \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in R(y, \delta) : f(x) \in B(f(y), \varepsilon).$$

Můžeme výrok dále přepsat v absolutních hodnotách s užitím implikace.

$$\forall y \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Srovnejte výrok výše s (8.3). Liší se pouze pozicí termu $\forall y \in I$. Tento zdánlivě bezvýznamný rozdíl je však zásadní. Značí totiž, že čísla ε i δ v definici spojitosti závisejí na volbě bodu $y \in I$, kolem nějž spojitost funkce „měříme“, zatímco v definici *stejnoměrné* spojitosti nesmí rozdíl hodnot funkce f v libovolných dvou bodech vzdálených maximálně δ překročit ε. Druhá vlastnost je tudíž závislá na volbě vzdálenosti ε a naopak zcela oddělena od volby konkrétního páru bodů v intervalu I.

Příklad 8.2.15

Stejnoměrná spojitost je zřejmě (aspoň *intuitivně* zřejmě) silnější vlastnost než pouhá spojitost. Rigorózní důkaz následuje. Například funkce $f(x) = 1/x$ je *spojitá* na intervalu $(0, 1)$, ale není tamže *stejnoměrně spojitá.*

Vskutku, platí, že

$$\lim_{x \to y} \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$$

pro každé $y \in (0, 1)$. Naopak, volme třeba $\varepsilon \coloneqq 1$. Pak žádná volba $\delta > 0$ nezaručí, že $|1/x - 1/y| < 1$, kdykoli $|x - y| < \delta$. Problém, je totiž v tom, že čím blíže jsme bodu 0, tím rychleji se od sebe funkční hodnoty v různých bodech vzdalují. Formálně, ať je dána libovolná vzdálenost $\delta > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \delta$. Potom pro $x = 1/n$ a $y = 1/(n + 1)$ platí

$$|x - y| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \left| \frac{1}{n(n+1)} \right| < \delta,$$

ale přesto

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| = |n - (n+1)| = 1 \not< \varepsilon.$$

Tedy, $1/x$ není stejnoměrně spojitá na $(0, 1)$.

Stejnoměrně spojité funkce jsou vždy spojité, ale, jak jsme právě viděli, opačná implikace neplatí. Uvedli jsme je však z toho důvodu, že jest-li I *uzavřený* interval, pak opačná implikace pravdivosti nabývá.

Tvrzení 8.2.16

Každá stejnoměrně spojitá funkce je spojitá.

Důkaz. Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá na I. Ukážeme, že f je spojitá v každém bodě $a \in I$. Ať je vzdálenost $\varepsilon > 0$ dána. Pro toto ε existuje z definice stejnoměrné spojitosti $\delta > 0$ takové, že pro každá dvě $x, y \in I$ s $|x - y| < \delta$ je $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Speciálně, volbou $y \coloneqq a$ dostaneme, že $|x - a| < \delta$ implikuje $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. To je ale pouze přepis výroku, že pro všechna $x \in B(a, \delta)$ je $f(x) \in B(f(a), \varepsilon)$, čili $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ a f je spojitá v a. ∎

Věta 8.2.17

Je-li $I = [a, b]$ uzavřený interval, pak f je stejnoměrně spojitá na I, právě když je na I spojitá.

Důkaz. Z tvrzení 8.2.16 víme, že je-li f na I stejnoměrně spojitá, pak je tamže spojitá. Dokážeme opačnou implikaci tak, že z stejnoměrné nespojitosti f odvodíme nespojitost.

Ať tedy f není stejnoměrně spojitá na $[a, b]$, to jest,

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \tag{8.4}$$

Dokážeme, že existuje bod $x \in [a, b]$ takový, že $\lim_{t \to x} f(t) \neq f(x)$ použitím Heineho věty. Mějme $\varepsilon > 0$ z výroku (8.4). Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme volbou $\delta \coloneqq 1/n$ existenci bodů $x_n, y_n \in [a, b]$ takových, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Protože $a \leq x_n \leq b$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost x_n omezená. Díky Bolzanově-Weierstraßově větě můžeme předpokládat, že je konvergentní. Z lemmatu 3.4.4 platí $x \coloneqq \lim_{n \to \infty} x_n \in [a, b]$. Jelikož

$$|x - y_n| \leq |x - x_n| + |x_n - y_n| \leq |x - x_n| + \frac{1}{n},$$

neboli $\lim_{n \to \infty} |x - y_n| = 0$, rovněž $\lim_{n \to \infty} y_n = x$. Pro spor předpokládejme, že f je spojitá v x. Podle Heineho věty platí

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(y_n).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$0 \leq |f(x_n) - f(y_n)| \leq |f(x_n) - f(x)| + |f(x) - f(y_n)|,$$

ale také

$$\lim_{n \to \infty} (|f(x_n) - f(x)| + |f(x) - f(y_n)|) = 0,$$

odkud

$$\lim_{n \to \infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0,$$

což je ve sporu s tím, že $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy, f není spojitá v x, což zakončuje důkaz. ■

Závěrem pododdílu konečně dokážeme, že spojité funkce jsou integrovatelné.

Věta 8.2.18 (Integrovatelnost spojité funkce)

Ať je f spojitá na $[a, b]$. Pak $f \in \mathcal{R}(a, b)$.

Důkaz. Podle věty 4.3.9 nabývá f na $[a, b]$ maxima i minima, tudíž je na $[a, b]$ omezená. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení D takové, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Tím bude díky lemmatu 8.2.12 důkaz hotov.

Podle věty 8.2.17 je f stejnosměrně spojitá na $[a, b]$. Čili k danému ε existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x, y \in [a, b]$ platí $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Volme libovolné dělení $D = (x_i)_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ s $\|D\| < \delta$. Protože f nabývá na každém z dělících intervalů $[x_{i-1}, x_i]$ minima i maxima (speciálně tedy **konečného** infima i suprema), platí díky stejnoměrně spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f < \varepsilon$$

pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Počítáme

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \Big)(x_i - x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_{i-1} - x_i) = \varepsilon(b - a),\end{aligned}$$

což bylo dokázati. ■

8.2.2 Základní věta kalkulu

Zbytek oddílu o Riemannově integrálu věnován jest důkazu *základní věty kalkulu* – tvrzení o souvislosti mezi primitivní funkcí a Riemannovým integrál její derivace. Vlastně říká, že hodnota primitivní funkce v bodě je orientovanou plochou pod její derivací od nějakého konstantního bodu do tohoto. K jeho důkazu potřebujeme jen pár základní aritmetických vlastností Riemannova integrálu.

Věta 8.2.19 (Linearita Riemannova integrálu)

Ať $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou integrovatelné funkce na $[a, b]$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak jsou $f + g$ i αf integrovatelné na $[a, b]$ a platí

(1) $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;

(2) $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

Důkaz. Dokážeme vzorec (1). Ježto f i g jsou funkce omezené na $[a, b]$, je taktéž $f+g$ omezená na $[a, b]$. Snadno nahlédneme, že pro libovolný interval $I \subseteq \mathbb{R}$ platí nerovnosti

$$\begin{aligned}\inf_I f + \inf_I g &\le \inf_I (f + g),\\ \sup_I f + \sup_I g &\ge \sup_I (f + g).\end{aligned}$$

Odtud plyne, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D) + \underline{S}(g, D) \le \underline{S}(f + g, D) \le \overline{S}(f + g, D) \le \overline{S}(f, D) + \overline{S}(g, D). \tag{8.5}$$

Volme posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ s $\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$. Podle důsledku 8.2.8 a věty o aritmetice limit jest

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) + \underline{S}(g, D_n) = \int_a^b f + \int_a^b g = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n),$$

čili z nerovností (8.5) užitím lemmatu 3.4.4 rovněž

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f+g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Podle důsledku 8.2.9 nyní platí $f + g \in \mathcal{R}(a, b)$ a

$$\int_a^b (f+g) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f+g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

jak jsme chtěli.

Platnost vzorce (2) se ověří podobně a její důkaz je přenechán čtenáři. ■

Cvičení 8.2.20

Dokažte vzorec (2) ve větě 8.2.19.

Věta 8.2.21 (Pár vlastností Riemannova integrálu)

Ať $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou integrovatelné na $[a, b]$ a $c \in (a, b)$. Potom platí následující.

(1) Je-li $f \le g$ na $[a, b]$, pak $\int_a^b f \le \int_a^b g$;

(2) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$;

(3) $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

Důkaz. Tvrzení (1) je triviální. Z $f \le g$ na $[a, b]$ plyne, že pro každý interval $I \subseteq [a, b]$ jest $\sup_I f \le \sup_I g$ i $\inf_I f \le \inf_I g$, a tedy pro každé dělení D platí odhady

$$\underline{S}(f, D) \le \underline{S}(g, D) \quad \text{a} \quad \overline{S}(f, D) \le \overline{S}(g, D),$$

odkud již plyne tvrzení.

Pro důkaz (2) volme posloupnost $\{D_n^1\}_{n=0}^\infty$ dělení intervalu $[a, c]$ a posloupnost $\{D_n^2\}_{n=0}^\infty$ intervalu $[c, b]$ s $\lim_{n\to\infty} \|D_n^1\| = \lim_{n\to\infty} \|D_n^2\| = 0$. Potom posloupnost dělení D_n intervalu $[a, b]$ sestávajíc z dělících bodů D_n^1 a D_n^2 splňuje $\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$.

Předpokládejme nejprve, že $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Ukážeme, že $f \in \mathcal{R}(a, c) \cap \mathcal{R}(c, b)$ přes lemma 8.2.12. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a, b]$ s $\|D\| < \delta$ jest

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Tedy, existuje rovněž $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \ge n_0$ máme

$$\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) < \varepsilon.$$

Z definice D_n jest

$$\overline{S}(f, D_n) = \overline{S}(f, D_n^1) + \overline{S}(f, D_n^2) \quad \text{a} \quad \underline{S}(f, D_n) = \underline{S}(f, D_n^1) + \underline{S}(f, D_n^2).$$

Pak

$$\overline{S}(f, D_n) - \underline{S}(f, D_n) = (\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1)) + (\overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2)) < \varepsilon.$$

Protože $\overline{S}(f, D_n^i) - \underline{S}(f, D_n^i)$, kde $i = 1, 2$, je kladné číslo, plyne z předchozího, že

$$\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1) < \varepsilon \quad \text{i} \quad \overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2) < \varepsilon,$$

čili $f \in \mathcal{R}(a, c)$ i $f \in \mathcal{R}(c, b)$. Z důsledku 8.2.8 a věty o aritmetice limit dopočteme

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) + \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Je-li naopak $f \in \mathcal{R}(a, c) \cap \mathcal{R}(c, b)$, pak zcela obráceným argumentem ukážeme, že $f \in \mathcal{R}(a, b)$, a stejný výpočet pak dokončuje důkaz vzorce (2).

Vzorec (3) plyne z triviálního pozorování, že

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \le \sup_I f - \inf_I f,$$

který přenecháme k ověření čtenáři. Odtud

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \le \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D)$$

pro libovolné dělení D. Je-li tedy $f \in \mathcal{R}(a, b)$ pak z lemmatu 8.2.12 rovněž $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$, neboť pro dané $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ a dělení D s $\|D\| < \delta$ máme

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \le \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Dále, jistě platí

$$\int_a^b f \le \overline{S}(f, D) \le \overline{S}(|f|, D),$$

čili

$$\int_a^b f \le \int_a^b |f|.$$

Podle věty 8.2.19 je funkce $-f$ integrovatelná a jejím dosazením do rovnosti výše obdržíme

$$-\int_a^b f = \int_a^b -f \le \int_a^b |-f| = \int_a^b |f|.$$

Sloučení obou nerovností dává konečně

$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f|,$$

čímž je důkaz hotov. ■

Cvičení 8.2.22

Dokažte, že pro každý interval $I \subseteq \mathbb{R}$ a omezenou funkci $f : I \to \mathbb{R}$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \le \sup_I f - \inf_I f.$$

Věta 8.2.23 (Základní věta kalkulu)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce integrovatelná na každém podintervalu $[a, b] \subseteq I$. Pak pro libovolné $c \in I$ je funkce

$$F(x) \coloneqq \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

spojitá na I a pro všechna $x_0 \in I$, v nichž je f spojitá, platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že F je spojitá na I. Ať $y_0 \in I$ leží ve vnitřku I (pro krajní body bychom postupovali obdobně, akorát bychom nahradili příslušné limity jednostrannými variantami). Díky tomuto předpokladu lze nalézt $\delta > 0$ takové, že $[y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subseteq I$. Podle předpokladu je f integrovatelná na $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, tedy je tamže omezená například číslem $K > 0$. Pro $y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ odhadujme

$$|F(y) - F(y_0)| = \left| \int_c^y f - \int_c^{y_0} f \right| \overset{(\alpha)}{=} \left| \int_y^{y_0} f \right| \overset{(\beta)}{\leq} \int_y^{y_0} |f| \leq K|y - y_0|,$$

kde rovnost (α) plyne z věty 8.2.21, části (2), a nerovnost (β) z téže věty, části (3). Odtud

$$\lim_{y \to y_0} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

čili $\lim_{y \to y_0} F(y) = F(y_0)$ a F je spojitá v y_0.

Pokračujme důkazem, že v bodech spojitosti f platí $F' = f$. Ať je tedy $x_0 \in I$ takovým bodem. Volme $\varepsilon > 0$. K němu z definice limity existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in B(x_0, \delta)$ jest $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Počítejme (opět za pomoci věty 8.2.21)

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0) \right| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t \right| \\
&< \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \varepsilon\,\mathrm{d}t \right| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Z tohoto výpočtu plyne, že

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = 0,$$

neboli

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

jak jsme chtěli. ■

Poznámka 8.2.24

Základní věta kalkulu dává mimo jiné geometrický pohled na fakt, že se dvě různé primitivní funkce liší o konstantu. Vyjadřují totiž orientovanou plochu pod svojí derivací od dvou různých počátečních bodů.

Koncem oddílu uvedeme technické lemma, které později použijeme k důkazu ekvivalence Newtonova a Riemannova integrálu.

Lemma 8.2.25

Ať $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je funkce (ne nutně omezená). Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

(1) $f \in \mathcal{R}(a, b)$*;*

(2) Existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ *takové, že pro libovolné* $\varepsilon > 0$ *existuje* $\delta > 0$ *splňující: kdykoli je* $D = (x_i)_{i=0}^n$ *dělení* $[a, b]$ *s* $\|D\| < \delta$ *a* $t_i \in [x_{i-1}, x_i], i \in \{1, \dots, n\}$*, libovolné body ležící v dělících intervalech, tak*

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon. \tag{8.6}$$

Důkaz. Dokážeme implikaci (1) $\Rightarrow$ (2). Ať $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a položme $I \coloneqq \int_a^b f$. Nechť je $\varepsilon > 0$ dáno. Podle lemmatu 8.2.12 existuje k tomuto $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D = (x_i)_{i=0}^n$ s $\|D\| < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ zřejmě platí

$$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq f(t_i) \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

čili

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon,$$

takže (8.6) platí.

Ad (2) $\Rightarrow$ (1). Nejprve je třeba ukázat, že f je omezená. Pro $\varepsilon \coloneqq 1$ nalezneme z platnosti výroku (2) číslo $\delta > 0$ takové, že pro jakoukoli volbu $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ jest

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Položme

$$\begin{aligned} \mu(D) &\coloneqq \min\{x_i - x_{i-1} \mid \in \{1, \dots, n\}\}, \\ K &\coloneqq \max\{|f(x_i)| \mid i \in \{0, \dots, n\}\}. \end{aligned}$$

Ať $t \in [a,b]$. Nalezneme index $j \in \{1,\dots,n\}$ takový, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Volme body

$$t_i \coloneqq \begin{cases} t, & i = j, \\ x_i, & i \neq j. \end{cases}$$

Potom můžeme odhadnout

$$\begin{aligned} |f(t)(x_j - x_{j-1})| &= \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| + |I| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^{n} K(x_i - x_{i-1}) = 1 + |I| + K(b-a). \end{aligned}$$

Odtud,

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\mu(D)}(1 + |I| + K(b-a)),$$

čili f je omezená, neboť $t \in [a,b]$ bylo voleno libovolně.

Pro důkaz integrovatelnosti f použijeme opět lemma 8.2.12. Ať je nyní $\varepsilon > 0$ dáno libovolné a nalezněme z (2) číslo $\delta > 0$ a mějme určeno dělení $D = (x_i)_{i=0}^{n}$ splňující $\|D\| < \delta$. Z definice suprema nalezněme body $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f < f(t_i) + \varepsilon$$

pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$. Pak

$$\begin{aligned} \overline{S}(f,D) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b-a) < I + \varepsilon + \varepsilon(b-a). \end{aligned}$$

Podobně odhadneme i

$$\underline{S}(f,D) > I - \varepsilon - \varepsilon(b-a).$$

Celkem dostaneme, že

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < 2(1 + b - a)\varepsilon,$$

takže $f \in \mathcal{R}(a,b)$ z lemmatu 8.2.12. ■

8.3 Newtonův integrál

Základní věta kalkulu nabízí druhou metodu výpočtu orientované plochy pod danou funkcí. Jsou-li splněny její předpoklady, pak

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \tag{8.7}$$

pro reálnou funkci F definovanou jako $F(x) \coloneqq \int_c^x f$ s jistou konstantou $c \in (a,b)$ a všechna $x \in [a,b]$. Přestože historicky je „definice" integrálu v (8.7) ta původní, my k ní docházíme teprve prostřednictvím integrálu Riemannova. Lze tvrdit, že tato cesta je více přirozená, stavějíc intuitivní definici plochy před tu odvozenou z vlastností primitivních funkcí, jež – na první pohled zcela jistě – s orientovanou plochou nikterak nesouvisí.

Výhodou takto definovaného integrálu je jeho existence i pro jisté neomezené funkce na otevřených intervalech – v (8.7) lze totiž nahradit $F(b)$ a $F(a)$ příslušnými jednostrannými limitami, jak též záhy učiníme. Na druhou stranu se takto omezujeme na funkce, k nimž existuje funkce primitivní. Takto definovaný integrál sluje *Newtonův*.

Definice 8.3.1 (Newtonův integrál)

Ať $a, b \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je *newtonovsky* integrovatelná, píšeme $f \in \mathcal{N}(a,b)$, pakližeť

(1) má funkce f na (a,b) primitivní funkci F,

(2) rozdíl $\lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$ je definován.

Jsou-li splněny obě podmínky, je tento rozdíl nazýván hodnotou *Newtonova integrálu* z funkce f na (a,b). Symbolicky

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f \coloneqq \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Pro stručnost zápisu budeme nadále onen rozdíl značit symbolem $[F]_a^b$.

Poznámka 8.3.2

V dalším textu budeme muset jistou chvíli rozlišovat mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem – přinejmenším, dokud neukážeme jejich ekvivalenci pro funkce newtonovsky i riemannovsky integrovatelné. Učiníme to uvedením písmene $(\mathcal{N})$ či $(\mathcal{R})$ před samotný symbol integrálu, jako v předchozí definici, v případě, že uvažovaný typ integrálu není zřejmý z kontextu. V celém zbytku oddílu, není-li uvedeno jinak, značí symbol $\int_a^b$ integrál *Newtonův*.

Varování 8.3.3

Je dobré vzít na mysl, že Newtonův integrál z dané funkce může být i nekonečný. Podmínkou jeho existence byla pouze *definovanost* výrazu $[F]_a^b$, nikoli jeho *konečnost*. V této souvislosti si všimněme, že jeho meze mohou z definice nabývat i hodnot $\pm\infty$. Tím se přímo liší od integrálu Riemannova, neboť omezenost funkce v tomto případě konečnost horních i dolních součtů zaručuje.

Příklad 8.3.4

Platí

$$\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \text{pro } \alpha \in (-1,\infty);\\ \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_0^1 = -\infty, & \text{pro } \alpha \in (-\infty,-1);\\ [\log x]_0^1 = \infty, & \text{pro } \alpha = -1. \end{cases}$$

Vskutku, primitivní funkce k x^α byla spočtena v příkladě 8.0.5 a výpočet příslušných limit je triviální.

Příklad 8.3.5

(1) Funkce $f(x) = 1/x$ je na intervalu $(0,1)$ newtonovsky integrovatelná, konkrétně

$$(\mathcal{N}) \int_0^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \infty,$$

podle příkladu 8.3.4 pro $\alpha = -1$, ale není na $[0,1]$ riemannovsky integrovatelná, protože na tomto intervalu není omezená.

(2) Naopak, funkce $\operatorname{sgn} x$ je na intervalu $[-1,1]$ riemannovsky integrovatelná, díky tvrzení 8.2.13, protože je na $[-1,1]$ monotónní. Avšak, na $(-1,1)$ newtonovsky integrovatelná není, neboť nemá na celém tomto intervalu primitivní funkci.

Newtonův integrál je člověku výpočetně bližší než integrál Riemannův; je k němu třeba umět hledat primitivní funkci. Naopak, Riemannův integrál je mnohem blíže způsobu, kterým počítače vyhodnocují integrály, neboť limity konvergentních posloupností (v tomto případě součtů přes zjemňující se dělení) se aproximují triviálně. Je rozumné se domnívat, že metody výpočtu primitivních funkcí představené v sekci 8.1 lze úspěšně použít i k výpočtu Newtonových integrálů.

Věta 8.3.6 (Linearita Newtonova integrálu)

Ať $a,b \in \mathbb{R}^*$, $f,g \in \mathcal{N}(a,b)$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak $f+g, cf \in \mathcal{N}(a,b)$ a platí

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$
$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Ať F,G jsou primitivní k f,g na (a,b). Potom jsou $F+G$ a cF primitivní k $f+g$ a cf na (a,b) a z věty o aritmetice limit máme

$$[F+G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b \quad \text{a} \quad [cF]_a^b = c[F]_a^b.$$

Odtud,

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,\mathrm{d}x = [F+G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_a^b cf(x)\,\mathrm{d}x = [cF]_a^b = c[F]_a^b = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jak bylo dokázati. ∎

Věta 8.3.7 (Per partes pro Newtonův integrál)

Ať $a, b \in \mathbb{R}^*$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a F, resp. G, je primitivní k f, resp. g, na (a, b) Potom platí

$$\int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = [FG]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

dává-li pravá strana smysl.

Důkaz. Protože pravá strana je z předpokladu dobře definována, existuje primitivní funkce k Fg na (a, b). Označme ji H. Platí

$$(FG - H)' = fG + Fg - Fg = fG,$$

čili $FG - H$ je primitivní k fG na (a, b). Dále

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = [FG - H]_a^b &= \lim_{x\to b^+}(F(x)G(x) - H(x)) - \lim_{x\to a^+}(F(x)G(x) - H(x))\\ &= \lim_{x\to b^-} F(x)G(x) - \lim_{x\to b^-} F(x)G(x) - (\lim_{x\to b^-} H(x) - \lim_{x\to a^+} H(x))\\ &= [FG]_a^b - [H]_a^b = [FG]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ■

Věta 8.3.8 (Substituce pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$. Ať má φ dále konečnou nenulovou derivaci na (α, β) a platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

dává-li aspoň jedna strana smysl.

Důkaz. Funkce φ má na (α, β) z předpokladu konečnou derivaci. Z věty 8.0.9 je $\varphi'((\alpha, \beta))$ interval a opět z předpokladu $0 \notin \varphi'((\alpha, \beta))$. Tedy, φ' je na (α, β) buď záporná, nebo kladná. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $\varphi' > 0$ na (α, β), čili φ je na (α, β) rostoucí. Rozlišíme dvě možnosti: budeme předpokládat, že existuje levá strana rovnosti a dokážeme existenci integrálu na pravé straně, a naopak.

Ať nejprve existuje $\int_a^b f$. Pak má f na (a, b) primitivní funkci F a existují limity $\lim_{x\to a^+} F(x)$ i $\lim_{x\to b^-} F(x)$. Z věty o derivaci složené funkce (φ je rostoucí, tedy prostá), má i $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na intervalu (α, β) primitivní funkci, konkrétně funkci $F \circ \varphi$. Platí

$$\lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) = b \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\alpha^+} \varphi(t) = a.$$

Z věty o limitě složené funkce (opět, φ je prostá) máme

$$\lim_{t\to\beta^-}(F \circ \varphi)(t) = \lim_{x\to b^-} F(x) \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\alpha^+}(F \circ \varphi)(t) = \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Můžeme pročež počítat

$$\begin{aligned}\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t &= \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = [F\circ\varphi]_\alpha^\beta \\ &= [F]_a^b = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Nyní ať existuje $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot|\varphi'|$. Označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)\cdot|\varphi'| = (f\circ\varphi)\cdot\varphi'$. Z druhé věty o substituci plyne, že $G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní k f na (a,b). Platí

$$\lim_{x\to a^+}\varphi^{-1}(x) = \alpha \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b^-}\varphi^{-1}(x) = \beta,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a^+}(G\circ\varphi^{-1})(x) = \lim_{t\to\alpha^+} G(t) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b^-}(G\circ\varphi^{-1})(x) = \lim_{t\to b^-} G(t).$$

Dopočteme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [G\circ\varphi^{-1}]_a^b = [G]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

jak jsme chtěli. ■

Úloha 8.3.9

Spočtěte

$$\int_{-1}^1 x^2\exp(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Položme $f(x) = \exp(-x)$ a $G(x) = x^2$. Pak $F(x) = -\exp(-x)$ a $g(x) = 2x$. Podle věty 8.3.7 platí

$$\int_{-1}^1 x^2\exp(-x)\,\mathrm{d}x = [-x^2\exp(-x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -2x\exp(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Jistě

$$[-x^2\exp(-x)]_{-1}^1 = -1\cdot\exp(-1) - (-1)\exp(1) = -\frac{1}{e} + e.$$

Z linearity integrálu platí

$$\int_{-1}^1 -2x\exp(-x)\,\mathrm{d}x = -2\int_{-1}^1 x\exp(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Opětovným použitím per partes dostaneme

$$\int_{-1}^1 x\exp(-x)\,\mathrm{d}x = [-x\exp(-x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -\exp(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Snadno spočteme, že

$$[-x\exp(-x)]_{-1}^1 = -1\cdot\exp(-1) - 1\cdot\exp(1) = -\frac{1}{e} - e,$$

$$\int_{-1}^1 -\exp(-x)\,\mathrm{d}x = [\exp(-x)]_{-1}^1 = \exp(-1) - \exp(1) = \frac{1}{e} - e.$$

Celkem tedy,

$$\int_{-1}^{1} x \exp(-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{e} - e - \frac{1}{e} + e = -\frac{2}{e}.$$

Dopočteme,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2 \exp(-x)\,\mathrm{d}x &= \left[-x^2 \exp(-x)\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -2x \exp(-x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{e} + e + 2\left(-\frac{2}{e}\right) = -\frac{5}{e} + e.\end{aligned}$$

♠

Úloha 8.3.10

Spočtěte

$$\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Rozložíme $3x^2/(x^3-1)$ na parciální zlomky. Podle věty 8.1.13 existují čísla $A, B, C \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}.$$

Roznásobení dá

$$3x^2 = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1).$$

Dosazením $x = -1$ dostaneme $A = 1$. Potom

$$2x^2 = Bx^2 + (B+C-1)x + (C+1).$$

Srovnáním koeficientů zjistíme, že musí platit $B = 2$ a $C = -1$. Tím dostáváme rozklad

$$\frac{3x^2}{x^3-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{2x-1}{x^2-x+1}.$$

Z linearity integrálu tudíž

$$\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x.$$

Podle příkladu 8.3.4 jest

$$\int_1^2 \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\log|x+1|\right]_1^2 = \log 3 - \log 2.$$

Dále si všimneme, že $(x^2-x+1)' = 2x-1$, a navíc je x^2-x+1 na $(1,2)$ kladná. Odtud plyne, že $\log(x^2-x+1)$ je primitivní k $(2x-1)/(x^2-x+1)$ na $(1,2)$, čili

$$\int_1^2 \frac{2x-1}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x = \left[\log(x^2-x+1)\right]_1^2 = \log 3 - \log 1 = \log 3.$$

Celkem tedy

$$\int_1^2 \frac{3x^2}{x^3-1}\,\mathrm{d}x = 2\log 3 - \log 2.$$

♠

Cvičení 8.3.11

Spočtěte následující Newtonovy integrály.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^\infty \frac{\exp(-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

Naším posledním počinem v kapitole o primitivních funkcích a vlastně i v celém tomto skromném úvodu do disciplíny matematické analýzy bude důkaz ekvivalence Newtonova a Riemannova integrálu na intervalu, kde je daná funkce riemannovsky i newtonovsky integrovatelná. Zde přichází.

Věta 8.3.12 (Ekvivalence Newtonova a Riemannova integrálu)

Ať $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je reálná funkce a $f \in \mathcal{R}(a,b) \cap \mathcal{N}(a,b)$. Potom

$$(\mathcal{R})\int_a^b f = (\mathcal{N})\int_a^b f.$$

Důkaz. Použijeme lemma 8.2.25. Z předpokladu je $f \in \mathcal{R}(a,b)$, tedy pro dané $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že kdykoli je $D = (x_i)_{i=0}^n$ dělení $[a,b]$ s $\|D\| < \delta$, pak pro libovolné body $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{1,\dots,n\}$, platí odhad

$$\left|\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (\mathcal{R})\int_a^b f\right| < \varepsilon.$$

Vezměme pročež nějaké takové dělení D s $\|D\| < \delta$. Ať je F primitivní k f na (a,b) – ta existuje, protože $f \in \mathcal{N}(a,b)$. Z newtonovské integrovatelnosti f rovněž plyne, že $\lim_{x\to b^-} F(x)$ a $\lim_{x\to a^+} F(x)$ existují konečné a F je spojitá a omezená na (a,b). Definujme novou funkci $H : [a,b] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$H(x) \coloneqq \begin{cases} \lim_{x\to a^+} F(x), & x = a, \\ F(x), & x \in (a,b), \\ \lim_{x\to b^-} F(x), & x = b. \end{cases}$$

Funkce H je vlastně „dodefinováním“ funkce F jejími limitami v krajních bodech $[a,b]$. Zřejmě pro každé $c \in (a,b)$ platí $H'(c) = F'(c) = f(c)$. Nyní využijeme Lagrangeovy věty o střední hodnotě. Podle ní existuje pro každé $i \in \{1,\dots,n\}$ bod $t_i \in (x_{i-1}, x_i)$ takový, že

$$H(x_i) - H(x_{i-1}) = H'(t_i)(x_i - x_{i-1}) = f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Pak ale můžeme počítat

$$\begin{aligned}(\mathcal{N})\int_a^b f &= \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x) = H(b) - H(a) \\ &= \sum_{i=1}^n H(x_i) - H(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}).\end{aligned}$$

Odtud ihned plyne odhad

$$\left|(\mathcal{N})\int_a^b f - (\mathcal{R})\int_a^b f\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - (\mathcal{R})\int_a^b f\right| < \varepsilon.$$

Jelikož $\varepsilon > 0$ bylo voleno libovolně, znamená nerovnost výše, že

$$(\mathcal{N})\int_a^b f = (\mathcal{R})\int_a^b f,$$

jak bylo jest dokázati. ■

Seznam cvičení

Číselné obory

(1) Dokažte, že každé těleso je oborem integrity.

(2) Množinou $\mathbb{Z}$ zde myslíme tu z definice 2.2.4. Ověřte, že

(a) relace $\sim_{\mathbb{Z}}$ je skutečně ekvivalence;

(b) operace $+$ a $\cdot$ jsou dobře definované. To znamená, že nezávisí na volbě konkrétního reprezentanta z každé třídy ekvivalence. Ještě konkrétněji, dobrá definovanost zde značí fakt, že

$$\begin{aligned}
[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} + [(c,d)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} &= [(a',b')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} + [(c',d')]_{\sim_{\mathbb{Z}}},\\
[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \cdot [(c,d)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} &= [(a',b')]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \cdot [(c',d')]_{\sim_{\mathbb{Z}}},
\end{aligned}$$

kdykoli $(a,b) \sim_{\mathbb{Z}} (a',b')$ a $(c,d) \sim_{\mathbb{Z}} (c',d')$;

(c) operace $+$, $-$ a inverz $-$ podle naší definice souhlasí s operacemi danými stejnými symboly na „běžné“ verzi celých čísel při korespondenci

$$[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \leftrightarrow a-b.$$

Konkrétně, pro operaci $+$ toto znamená, že platí korespondence

$$[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} + [(c,d)]_{\sim_{\mathbb{Z}}} \leftrightarrow (a-b)+(c-d)$$

a nezávisí na výběru reprezentanta z tříd ekvivalence $[(a,b)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$ a $[(c,d)]_{\sim_{\mathbb{Z}}}$.

(3) Ověřte, že $\sim_{\mathbb{Q}}$ z definice 2.2.6 je skutečně ekvivalence a že operace $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{Q}$ jsou dobře definované (nezávisejí na výběru reprezentanta) a odpovídají „obvyklým“ operacím zlomků.

Posloupnosti, limity a reálná čísla

(1) Dokažte, že posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je konvergentní právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m,n \geq n_0 : |x_m - x_n| < C\varepsilon$$

pro libovolnou **kladnou** konstantu $C \in \mathbb{Q}$.

(2) Dokažte, že každá posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ má nejvýše jednu limitu. Hint: použijte trojúhelníkovou nerovnost.

(3) Dokažte, že jsou-li x, y konvergentní posloupnosti racionálních čísel, pak je posloupnost $x \cdot y$ rovněž konvergentní. Kromě trojúhelníkové nerovnosti je zde třeba použít i lemma 3.2.10.

(4) Dokažte, že zobrazení ξ z (3.1) je

- dobře definované – tzn. že když $p = q$, pak $[(p)] = [(q)]$ – a
- prosté.

(5) Určete z definice suprema a infima $\inf \emptyset$ a $\sup \emptyset$.

(6) Dokažte, že $\sup X$ a $\inf X$ jsou určeny jednoznačně.

(7) Dokažte všechna (**proč?**) a (**dokažte!**) v důkazu tvrzení 3.3.12.

(8) Dokažte tvrzení 3.3.14. Doporučujeme čtenářům se zamyslet, jak tvrzení snadno plyne z axiomu úplnosti, aniž opakují konstrukci z jeho důkazu.

(9) Dokažte část (b) lemmatu 3.3.15.

(10) Dokažte, že lemma 3.3.16 je důsledkem tvrzení 3.2.11.

(11) Dokažte, že pro čísla $x, y \in \mathbb{R}$ platí

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

(12) Dokažte, že pro všechna $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ platí

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

(13) Dokažte, že

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n!} = \infty.$$

Hint: Rozložte součin $n!$ na dvě poloviny a tu větší zespodu odhadněte vhodnou posloupností jdoucí k ∞.

(14) Spočtěte

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt{4n^2 - n} - 2n.$$

(15) Spočtěte

$$\lim_{n \to \infty} (-1)^n \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$$

(16) (těžké) Spočtěte limitu posloupnosti $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ zadané rekurentním vztahem

$$\begin{aligned} a_0 &\coloneqq 10, \\ a_{n+1} &\coloneqq 6 - \frac{5}{a_n} \text{ pro } n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

(17) Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je **divergentní** řada (tj. nemá žádný nebo konečný součet). Ať s_n je posloupnost částečných součtů posloupnosti a_n. Dokažte, že i řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n / s_n$ je divergentní.

(18) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 2^n + 3}{(n^4 + 1)^6}.$$

(19) Vyšetřete konvergenci řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^c(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$$

v závislosti na konstantě $c \in \mathbb{R}$.

(20) (těžké) Dokažte následující tvrzení, známé jako *Raabeovo kritérium*: Nechť $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je řada s nezápornými členy.

(a) Platí-li $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) > 1$, pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje.

(b) Existuje-li $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) \leq 1,$$

pak řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverguje.

Limity funkcí

(1) Dokažte, že pro reálnou funkci f a $a \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

(2) Dokažte tvrzení (b) a (c) ve větě 4.1.3.

(3) Spočtěte následující limity funkcí

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^4-4x^3+1}{(x-1)^2},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{3x+\frac{2}{x}}{x+\frac{4}{x}},$$
$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x}-x,$$
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x-1}-2x}{x-7}.$$

(4) Dokažte bod (2) ve větě 4.3.6.

Derivace

(1) Dokažte, že derivace funkce $f(x) = |x|$ v bodě 0 neexistuje.

(2) Připomeňme, že funkce *signum* je definována následovně.

$$\operatorname{sgn}(x) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{když } x > 0, \\ 0, & \text{když } x = 0, \\ -1, & \text{když } x < 0. \end{cases}$$

Dokažte, že $\operatorname{sgn}'(0) = \infty$.

(3) Dokažte body (1) a (2) ve větě 5.1.1.

(4) Nalezněte lokální i globální extrémy funkce $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 4$.

(5) Použijte důsledek 5.2.4 k důkazu, že spojitá funkce $f : I \to \mathbb{R}$ mající nulovou derivaci na I, je konstantní.

Elementární funkce

(1) Spočtěte následující limity.

$$\lim_{x\to 3\pi/2} (4x^2 - 9\pi^2)\frac{\cos x}{1+\sin x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(\arctan x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to\infty} \arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\exp\left(\frac{\sin x}{2}\right) - \cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})} \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{\sqrt{\exp 2 - \exp 2x}}{\arccos x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x \sin x}}{\exp(x^2) - 1}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(1 - \sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}} \qquad \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2} \qquad \lim_{x\to 0} (1+x^2)^{\cot^2 x}$$

Taylorův polynom

(1) Spočtěte $T_5^{\sin\cdot\cos,\pi/2}$.

(2) Dokažte, že Taylorovy řady elementárních funkcí exp, sin a cos jsou přesně řady z jejich definic.

(3) Spočtěte následující limity.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \exp(-x^2/2)}{x^4} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \tan x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$$

Primitivní funkce

(1) Dokažte větu o aritmetice primitivních funkcí.

(2) Spočtěte

$$\int \frac{\log^2 x}{x^2}\, dx.$$

(3) Spočtěte

$$\int \frac{x}{\sqrt{2+5x^2}}\, dx.$$

(4) Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Hint: platí $\arcsin' x = 1/\sqrt{1-x^2}$.

(5) Spočtěte

$$\int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

(6) Spočtěte následující Riemannovy integrály:

(a) z funkce $f(x) = x^3$ na intervalu $[0,1]$;

(b) z funkce $f(x) = 7x+2$ na intervalu $[-2,3]$.

(7) Dokažte vzorec (2) ve větě 8.2.19.

(8) Dokažte, že pro každý interval $I \subseteq \mathbb{R}$ a omezenou funkci $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \le \sup_I f - \inf_I f.$$

(9) Spočtěte následující Newtonovy integrály.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\cos x - \cos^3 x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x\log x}\,\mathrm{d}x \qquad \int_1^\infty \frac{\exp(-\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$