Gymnázium Evolution Jižní Město

Jakýsi úvod do matematické analýzy

Áďula vod Klepáčů

29. května 2024

Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předšedších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.

Obsah

Kapitola 1

Elementární funkce

Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávejte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.

Jisté speciální funkce v matematické analýze si vysloužily přízvisko *elementární*. Původ jejich speciality je ryze fyzikální. Jsou to funkce, jejich prostřednictvím fyzikové modelují mnoho přírodních jevů a pojmů – růst, vlnění, proud, gravitaci, úhel …

Ježto fyzikální model světa radno ponechati do textů menší náročnosti, soustředit se budeme pouze na prezentaci těchto funkcí a důkazy jejich základních vlastností.

Všechny elementární funkce definujeme jako součty nekonečných řad. V tomto textu jsme se nezabývali pramnoho konvergencí řad s libovolnými členy. Všechna tvrzení, která tímto směrem budeme vyžadovat, zformulujeme, ač nedokážeme.

1.1 Exponenciála a logaritmus

První na seznamu je *exponenciála* – funkce spojitého růstu. Toto pojmenování ještě níže odůvodníme. Nyní přikročíme k definici. Pro stručnost zápisu, budeme v následujícím textu používat konvenci, že $0^0 = 1$.

Definice 1.1.1 (Exponenciála)

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\exp x \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Jak jsme čtenáře vystříhali, musíme nyní na krátkou chvíli odbočit k číselným řadám, abychom uměli v obec dokázat, že právě definovaná exponenciála je skutečně reálnou funkcí.

Definice 1.1.2 (Absolutní konvergence řady)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je číselná řada, kde $a_n \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolutně konverguje*, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Lemma 1.1.3

Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Důkaz. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m \geq n \geq n_0$ platí
$$\left|\sum_{k=n}^{m} |a_k|\right| = \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon.$$
Potom ale z trojúhelníkové nerovnosti platí
$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon,$$
čili $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje. ■

Definice 1.1.4 (Cauchyho součin řad)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou číselné řady. Jejich *Cauchyho součinem* myslíme číselnou řadu
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Věta 1.1.5 (Mertensova)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní *číselné řady, přičemž $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je navíc absolutně konvergentní. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ konverguje a platí*
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Věta 1.1.6 (Vlastnosti exponenciály)

Funkce exp *je dobře definována a platí*

(E1) $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$*;*

(E2) $\lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 0$.

Důkaz. *Dobrá definovanost* zde znamená, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} x_n/n!$ konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že konverguje absolutně. Je-li $x = 0$, pak řada konverguje zřejmě. Volme tedy $x \in$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

čili podle věty ?? řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x^n|/n!$ konverguje, což znamená, že konverguje i $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$.

Dokážeme vlastnost (E1). Počítáme

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}y^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{x^{n-k}y^k}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}.\end{aligned}$$

Všimněme si, že poslední řada je Cauchyho součinem řad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ a $\sum_{n=0}^{\infty} y^n/n!$. Protože jsou obě tyto řady (podle výše dokázaného) absolutně konvergentní, platí z Mertensovy věty

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \exp x \cdot \exp y.$$

Nyní vlastnost (E2). Pro $x \in (-1, 1)$ odhadujme

$$\begin{aligned}\left|\frac{\exp x - 1}{x} - 1\right| &= \left|\frac{\exp x - 1 - x}{x}\right| = \frac{1}{|x|}\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - x - 1\right| = \frac{1}{|x|}\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \\ &= |x| \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!}\right| \le |x| \left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\right| = c \cdot |x|,\end{aligned}$$

kde $c > 0$ je hodnota součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$, která zjevně konverguje (například díky nerovnosti $1/n! \le 1/n^2$). Jelikož $\lim_{x\to 0} c \cdot |x| = 0$, plyne odtud ihned, že

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{\exp x - 1}{x} - 1\right| = 0,$$

z čehož zase

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Tím je důkaz završen. ■

Ihned si odvodíme další vlastnosti exponenciály plynoucí z (E1) a (E2). Postupně dokážeme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí následující.

(E3) $\exp 0 = 1$;

(E4) $\exp' x = \exp x$;

(E5) $\exp(-x) = 1/\exp(x)$;

(E6) $\exp x > 0$;

(E7) $\exp$ je spojitá na $\mathbb{R}$;

(E8) exp je rostoucí na $\mathbb{R}$;

(E9) $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$;

(E10) $\operatorname{im} \exp = (0, \infty)$.

Z (E1) platí $\exp(0 + x) = \exp 0 \cdot \exp x$. Protože zřejmě existuje $x \in \mathbb{R}$, pro něž $\exp x \neq 0$, plyne odtud $\exp 0 = 1$, tj. vlastnost (E3).

Pro důkaz (E4) počítáme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp h \cdot \exp x - \exp h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\exp h - 1)\exp x}{h}$$
$$= \exp x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\exp h - 1}{h} = \exp x \cdot 1 = \exp x,$$

kde jsme v červené rovnosti použili vlastnost (E1) a v modré zas vlastnost (E2).

Pokračujeme vlastností (E5). Z (E1) máme

$$\exp(x + (-x)) = \exp x \cdot \exp(-x).$$

Protože z (E3) je $\exp(x + (-x)) = \exp 0 = 1$, dostáváme

$$1 = \exp x \cdot \exp(-x),$$

čili

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

Ježto má řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ zjevně kladný součet pro $x > 0$, plyne (E6) přímo z právě dokázané (E5).

Vlastnost (E7) je okamžitým důsledkem vlastnosti (E4), díky níž má exp konečnou derivaci na $\mathbb{R}$, a tudíž je podle lemmatu **??** tamže spojitá.

Vlastnost (E8) je důsledkem vlastností (E4) a (E6), neboť funkce majíc na intervalu (v tomto případě celém $\mathbb{R}$) kladnou derivaci, je na tomto intervalu – podle důsledku **??** – rostoucí.

Platí $\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} > 1$, čili z vlastnosti (E1) plyne, že exp není shora omezená, neboť $\exp(x + 1) = \exp x \cdot \exp 1 > \exp x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. To spolu s vlastnostmi (E7) a (E8) dává $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$. Dále, použitím (E5),

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{x\to\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp x} = 0,$$

což dokazuje (E9).

Konečně, vlastnost (E10) plyne z (E9) a Bolzanovy věty.

Příklad 1.1.7

V úvodu do této sekce jsme nazvali exponenciálu „funkcí spojitého růstu“. Tuto intuici nyní částečně formalizujeme. Dalšího pohledu nabudeme po definici obecné mocniny.

Uvažme následující přímočarý populační model. V čase $t \in (0, \infty)$ je počet jedinců dán funkcí $P(t)$. Množství nově narozených jedinců závisí pouze na počtu právě žijících a na konstantě $r \in [0, \infty)$ – zvané *reproduction rate* – která značí, kolik nových jedinců se narodí za jednoho právě živého. Vnímáme-li derivaci $P'(t)$ jako *rychlost růstu* populace v čase t, pak dostáváme diferenciální rovnici

$$P'(t) = r \cdot P(t),$$

jelikož v čase t se podle našeho modelu narodí r jedinců za každého živého. Díky vlastnosti (E4) vidíme, že například funkce $P(t) = \exp(rt)$ řeší rovnici výše. Teorii diferenciálních rovnic v tomto textu probírat nebudeme, bez důkazu však zmíníme, že řešení takto triviálních rovnic až na konstantu určena jednoznačně. V tomto jednoduchém populačním modelu je tudíž počet živých jedinců v čase t dán funkcí $t \mapsto \exp(rt)$.

Na závěr si dokážeme jeden možná překvapivý fakt, že vlastnosti (E1) a (E2) již určují funkci exp jednoznačně.

Věta 1.1.8 (Jednoznačnost exponenciály)

Existuje právě jedna funkce definovaná na celém $\mathbb{R}$ splňující (E1) a (E2).

Důkaz. Existenci jsme dokázali konstruktivně. Dokážeme jednoznačnost. Ať $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje (E1) a (E2). Ukážeme, že $f = \exp$.

Z úvah výše plyne, že f splňuje rovněž vlastnosti (E3) - (E10), protože k jejich důkazu byly použity pouze (E1) a (E2). Platí tedy $f(0) = 1$ a $f'(x) = f(x)$. Jelikož $\exp x \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, máme z věty o aritmetice derivací

$$\left(\frac{f}{\exp}\right)'(x) = \frac{f'(x)\exp x - f(x)\exp' x}{\exp^2 x} = \frac{f(x)\exp x - f(x)\exp x}{\exp^2 x} = 0.$$

Podle cvičení **??** je $f/\exp$ konstatní funkce, čili existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x)/\exp x = c$ pro každé $c \in \mathbb{R}$. Dosazením $x = 0$ zjistíme, že $c = f(0)/\exp 0 = 1$, čili $c = 1$ a $f = \exp$. ■

1.1.1 Logaritmus

Jelikož je funkce exp spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$, má na celém $\mathbb{R}$ inverzní funkci, které přezdíváme *logaritmus* a značíme ji log. Z vlastností exp ihned plyne, že log je reálná funkce $(0, \infty) \to \mathbb{R}$. Na rozdíl od exp však log není dána číselnou řadou – aspoň ne pro všechna $x \in (0, \infty)$, více v kapitole o Taylorově polynomu.

Vlastnosti exponenciály nám rovnou umožňují do značné míry prozkoumat k ní inverzní funkci.

Tvrzení 1.1.9 (Vlastnosti logaritmu)

Pro každá $x, y \in (0, \infty)$ platí

(L1) $\log$ *je spojitá a rostoucí na* $(0, \infty)$*;*

(L2) $\log(xy) = \log x + \log y$*;*

(L3) $\log' x = 1/x$;

(L4) $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$ *a* $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$.

Důkaz.

(L1) Plyne ihned z faktu, že exp je spojitá a rostoucí.

(L2) Užitím vlastností exponenciály spočteme

$$xy = \exp(\log x)\cdot\exp(\log y) = \exp(\log x + \log y),$$

z čehož po aplikace log na obě strany rovnosti plyne

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

(L3) Podle věty o derivaci inverzní funkce platí

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

(L4) Protože $\operatorname{im}\log = \mathbb{R}$, není log zdola ani shora omezená. Z (L1) plyne kýžený závěr. ■

1.1.2 Obecná mocnina

Užitím funkcí log a exp definujeme pro $a \in (0,\infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ výraz a^b předpisem

$$a^b \coloneqq \exp(b\cdot\log a).$$

Stojí za to věnovat krátkou chvíli ověření, že tato funkce odpovídá naší představě *mocniny* v případě, kdy $b = n \in \mathbb{N}$. Máme

$$a^n = \exp(n\cdot\log a) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n}\log a\right) = \prod_{k=1}^{n}\exp(\log(a)) = \prod_{k=1}^{n} a,$$

tedy a^n je vskutku a n-krát vynásobené samo sebou.

Varování 1.1.10

Uvědomme si, že a^b je definováno pouze pro $a \in (0,\infty)$. Pro $a \leq 0$ není tato funkce nad reálnými čísly rozumně definovatelná. Důvod je mimo jiné následující: pro n sudé a $a < 0$ je $a^n > 0$, ale $a^{n+1} < 0$. Tedy, měla-li by a^b být spojitá funkce, pak by pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $a < 0$ existovalo $\xi \in (n, n+1)$ takové, že $a^\xi = 0$. Mocninná funkce, jež je nulová pro nekonečně mnoho čísel je i pro matematiky zřejmě příliš divoká představa.

Poznamenejme však, že nad komplexními čísly je funkce log definována i pro záporná reálná čísla, tedy a^b dává – se stejnou definicí – smysl pro všechna $a, b \in \mathbb{C}$.

Z vlastností log a exp plynou ihned vlastnosti obecné mocniny. Jelikož její definice dává vzniknout **dvěma** reálným funkcím, konkrétně

$$f(x) = a^x \text{ pro } x \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad g(x) = x^b \text{ pro } x \in (0, \infty),$$

musíme tyto při zkoumání vlastností obecné mocniny pochopitelně rozlišovat. Aby nedošlo ke zmatení, budeme tyto funkce značit zkrátka jako $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto x^b$, kde $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ jsou fixní.

Tvrzení 1.1.11 (Vlastnosti obecné mocniny)

Pro všechna $a \in (0, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$ platí

(O1) *Funkce $x \mapsto a^x$ i $x \mapsto x^b$ jsou spojité na svých doménách.*

(O2) *Funkce $x \mapsto a^x$ je na celém $\mathbb{R}$*

- *rostoucí pro $a > 1$,*
- *konstantní pro $a = 1$,*
- *klesající pro $a < 1$.*

(O3) *Funkce $x \mapsto x^b$ je rostoucí na $(0, \infty)$.*

(O4) $(x \mapsto a^x)' = (x \mapsto a^x \log a)$.

(O5) $(x \mapsto x^b)' = (x \mapsto bx^{b-1})$.

(O6) $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ *a* $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$.

(O7) *Pokud $b \neq 0$, pak* $\lim_{x\to 0^+} x^b = 0$ *a* $\lim_{x\to\infty} x^b = \infty$.

(O8) $\log(a^b) = b \cdot \log a$.

Důkaz.

(O1)