

GYMNÁZIUM EVOLUTION JIŽNÍ MĚSTO



---

## Jakýsi úvod do matematické analýzy

---

Ádula vod Klepáčů

12. března 2024



# Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předšedších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.



# Obsah

1	Limity funkcí
---	---------------



# Kapitola 1

## Limity funkcí

Limita funkce je dost možná nejdůležitější ideou matematické analýzy a obecně matematických disciplín, jež využívá fyzika. Davši vzniknout teorii derivací a primitivních funkcí, umožnila popsat fyzikální jevy soustavami diferenciálních rovnic a je základem zatím nejlepších známých modelů světa – diferencovatelných struktur.

Principiálně se pojem *limity funkce* neliší pramnoho od limity posloupnosti. Matematici funkcí obvykle myslíme zobrazení popisující vývoj systému v čase (tzv. funkce *jedné proměnné*), případně závislé na více parametrech než jen na čase (tzv. funkce *více proměnných*). Limita funkce v nějakém určeném okamžiku pak znamená vlastně „očekávanou hodnotu“ této funkce v tomto okamžiku – hodnotu, ke které je funkce, čím méně času zbývá do onoho okamžiku, tím blíže.

V tomto textu budeme sebe zabírat pouze funkcemi závislými na čase tvořícími systémy, jejichž stav je rovněž vyjádřen jediným číslem. Uvidíme, že i teorie takto primitivních objektů je veskrze širá.

### Definice 1.0.1 (Reálná funkce jedné proměnné)

Ať  $M \subseteq \mathbb{R}$  je libovolná podmnožina  $\mathbb{R}$ . Zobrazení  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme *reálnou funkcí (jedné proměnné)*.

Ačkolivěk ve světě, jest-li nám známo, proudí čas pouze jedním směrem, v matematice se takovými trivialitami netřeba zabývat. Pojem limity reálné funkce budeme tedy definovat bez ohledu na „proud času“. Budeme zkoumat jak hodnotu reálné funkce, když se čas blíží *zleva* (tj. přirozeně) k danému okamžiku, tak její očekávanou hodnotu proti toku času.

Ona dva přístupy slujeta limita funkce *zleva* a limita funkce *zprava*. Před jejich výrokem ovšem učiníme kvapný formální obchvat. Bylo by totiž nanejvýš neelegantní musiti různými logickými výroky definovat konečné oproti nekonečným limitám v konečných oproti nekonečným bodům. Následující – čistě formální avšak se silnou geometrickou intuicí – pojem tyto případy spojuje v jeden.

**Definice 1.0.2** (Okolí a prstencové okolí bodu)

Ať  $a \in \mathbb{R}^*$  a  $\varepsilon \in (0, \infty)$ . Okolím bodu  $a$  (o poloměru  $\varepsilon$ ) myslíme množinu

$$B(a, \varepsilon) := \begin{cases} (a - \varepsilon, a + \varepsilon), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ (1/\varepsilon, \infty), & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty. \end{cases}$$

Podobně, *prstencovým okolím*  $a$  (o velikosti  $\varepsilon$ ) myslíme jeho okolí bez samotného bodu  $a$ . Konkrétně,

$$R(a, \varepsilon) := \begin{cases} (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}, & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ (1/\varepsilon, \infty), & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty. \end{cases}$$

Pro účely definice levých a pravých limit, pojmenujeme rovněž množinu

$$B_+(a, \varepsilon) := \begin{cases} (a - \varepsilon, a], & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ (1/\varepsilon, \infty), & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty \end{cases}$$

*pravým okolím* bodu  $a$  a množinu

$$R_+(a, \varepsilon) := \begin{cases} (a - \varepsilon, a), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ (1/\varepsilon, \infty), & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty \end{cases}$$

*pravým prstencovým okolím* bodu  $a$ . *Levé okolí* a *levé prstencové okolí* bodu  $a$  se definují analogicky.

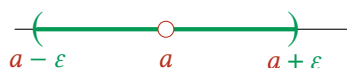
**Poznámka 1.0.3**

Písmena  $B$  a  $R$  v definici okolí a prstencového okolí pocházejí z angl. slov **ball** a **ring**. Okolí se v angličtině přezdívá „ball“ pro to, že okolí bodu  $a$  je ve skutečnosti (jednodimenzionální) kruh s poloměrem  $\varepsilon$  o středu  $a$ . Znázornění okolí bodu jako kruhu v rovině je vysoce účinným vizualizačním aparátem.

Čtenáře možná zarazilo číslo  $1/\varepsilon$  v definici okolí bodu  $\infty$ . Důvod užití  $1/\varepsilon$  oproti prostému  $\varepsilon$  je spíše intuitivního rázu. V definici limity a v následných tvrzení si matematici obvykle představujeme pod  $\varepsilon$  reálné číslo, které je „nekonečně malé“. Chceme-li tedy, aby se **zmenšujícím se**  $\varepsilon$  byla hodnota dané funkce stále blíže nekonečnu, musí se tato hodnota zvětšovat. Díky užití formulaci tomu tak je, neboť s menším  $\varepsilon$  je číslo  $1/\varepsilon$  větší.



(a) Okolí  $B(a, \varepsilon)$  bodu  $a$ .



(b) Prstencové okolí  $R(a, \varepsilon)$  bodu  $a$ .

Obrázek 1.1: Okolí a prstencové okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ .