Cheatsheet z logiky a teorie množin

2.AB PreIB Math

Adam Klepáč

Logika

Logika je jazykem matematiky. Využívá výroků, aby mluvila o množinách.

Výroky jsou věty, které jsou buď pravdivé, nebo lživé.

Například,

- '**Kočky jsou černé.**' je výrok.;
- '**Jak se máš?**' *není* výrok;
- '**Do roku 2500 kolonisujeme Mars.**' je taky výrok.

Jak třetí příklad napovídá, nemusíme nutně vědět, jestli je nějaký výrok pravdivý, nebo ne. Výrok je to stále.

Logické operátory

Výroky umíme přetvářet a slučovat pomocí logických operátorů. Svým významem víceméně odpovídají spojkám v běžném jazyce. Uvažme dva výroky:

$$p = \text{'Venku prší.'}$$
$$q = \text{'Zůstanu doma.'}$$

(∧) Logické a slučuje dva výroky do výroku, které je pravda jedině ve chvíli, kdy jsou oba dílčí výroky rovněž pravdivé. Přirozeně můžeme výrok $p \wedge q$ vyjádřit větou

$$p \wedge q = \text{'Venku prší a zůstanu doma.'}$$

(∨) Logické nebo slučuje dva výroky do výroku, který je pravdivý, když je aspoň jeden z dílčích výroků rovněž pravdivý. Přirozeně můžeme výrok $p \vee q$ vyjádřit větou

$$p \vee q = \text{'Venku prší nebo zůstanu doma.'}$$

V matematické logice **není** nebo **výlučné**! To znamená, že $p \vee q$ je pravda, i když oba výroky p i q jsou pravdivé.

(¬) Logické ne obrací pravdivostní hodnotu výroku. V jazyce ji můžeme vyjádřit prostým záporem:

$$\neg p = \text{'Venku neprší.'}$$

Uvědomme si, že $\neg p$ je pravda přesně ve chvíli, kdy p je lež a naopak.

(⇒) Logická implikace je operátor, který z prvního výroku dělá *předpoklad* a z druhého *závěr*. Výrok $p \Rightarrow q$ se čte mnoha způsoby. Například:

$$p \Rightarrow q = \text{'Když venku prší, tak zůstanu doma.'}$$
$$p \Rightarrow q = \text{'To, že venku prší, implikuje, že zůstanu doma.'}$$
$$p \Rightarrow q = \text{'Za předpokladu, že venku prší, zůstanu doma.'}$$

Implikace umí být zákeřná. Je pravdivá, když p i q jsou pravdivé a lživá, když p je pravda, ale q ne. Ovšem, implikace je taky vždy pravdivá, když p je lež. V matematické logice cokoli, co plyne ze lži, je automaticky pravdivé.

(⇔) Logická ekvivalence je pravdivá, jedině když jsou buď oba výroky naráz pravdivé, nebo naráz lživé. V jazyce se většinou čte takto:

$$p \Leftrightarrow q = \text{'Prší právě tehdy, když zůstávám doma.'}$$

Ekvivalence je v zásadě implikace oběma směry. Výrok p je jak předpoklad, tak závěr, výroku q a výrok q je jak předpoklad, tak závěr, výroku p. Když prší, zůstávám doma, a když zůstávám doma, tak prší.

Pravdivostní tabulky

Výrok složený z dílčích výroků je pravdivý nebo lživý na základě pravdivosti výroku, jež jej tvoří. Všechny možné případy lze shrnout v tzv. pravdivostní tabulce. Je jí prostě tabulka s výčtem všech možných kombinací pravdivostí p a q (nebo vlastně jakéhokoliv množství výroků).

Pravdivostní tabulka základních logických operátorů vypsaných výše vypadá takto (pravdivost výroku označíme číslem 1 a lživost číslem 0).

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \Rightarrow q$	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

Množiny

Množiny jsou 'hmotou', která tvoří svět matematiky. Jejich základní vlastnosti jsou popsány pomocí logiky.

Množiny nelze definovat uvnitř teorie množin, ale obvykle si je představujeme jako *skupiny věcí*.

V teorii množin existuje pouze jediný základní *logický výrok* – výrok 'Objekt je prvkem množiny.' Když označíme zmíněný objekt x a množinu A, pak tento výrok zapisujeme jako $x \in A$ (symbol $\in$ je jen zkroucené 'e' z anglického slova *element*, „prvek“). Slučování takových výroků pomocí logických operátorů dá vzniknout různým konstrukcím v teorii množin.

Když má množina A, například, přesne tři prvky – $\square$, $\triangle$ a $\bigcirc$, pak ji můžeme zapsat jako seznam těchto tří prvků uvnitř složených závorek $\{\}$. V tomto případě

$$A = \{\square, \triangle, \bigcirc\}.$$

Dvě výstrahy ohledně množin:

- **Množiny nejsou uspořádané**. Neexistuje nic jako 'první', 'druhý' nebo 'poslední' prvek množiny. Buď nějaký objekt **je** prvkem množiny, nebo **není**. Nic víc, nic míň. Například, tyto tři množiny jsou dokonale stejné, akorát zapsané jinak.
$$\{\square, \triangle, \bigcirc\} = \{\bigcirc, \triangle, \square\} = \{\triangle, \square, \bigcirc\}$$
- **Prvky množin nemají četnost**. Opět, prvek buď leží v množině, nebo ne. Nemůže v ní ležet dvakrát, třikrát nebo milionkrát. Buď jednou, nebo vůbec. Tyto tři množiny jsou rovněž dokonale stejné.
$$\{\square, \triangle, \bigcirc\} = \{\square, \triangle, \bigcirc, \triangle, \bigcirc\} = \{\triangle, \square, \square, \triangle, \bigcirc, \triangle\}$$

Existuje více způsobů, jak tvořit množiny. My se podíváme na dva: *výčtem prvků* a *podmínkou*.

Výčtem myslíme zkrátka definici množiny přes vypsaní všech jejích prvků, jako výše. Rovnost $A = \{\square, \triangle, \bigcirc\}$ je příkladem tvorby množiny výčtem.

Mnohem užitečnější způsob tvorby množin užívá logických výroků. Ať x je nějaký objekt a $p(x)$ libovolný výrok hovořící o x. Například,

$$p(x) = \text{'}x \text{ je nádherný.'}$$
$$p(x) = \text{'}x \text{ je číslo.'}$$

Množina $\{x \mid p(x)\}$ je množina všech objektů x, pro něž je výrok $p(x)$ pravda. Představme si, že

$$p(x) = \text{'}x \text{ je přirozené číslo, které je menší než } 5\text{'}.$$

Pak,

$$\{x \mid p(x)\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Množinové operace

Užitím logických výroků můžeme vytvořit nové množiny z existujících nebo stanovit jisté vztahy mezi množinami. Uvažme dvě množiny – A a B.

(∩) Můžeme vyrobit množinu $\{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, tedy množinu všech objektů, které leží jak v A, tak v B. Této množině přezdíváme průnik A a B a značíme ji $A \cap B$. Například,

$$\{\bigcirc, \triangle, \square\} \cap \{\times, \bigcirc, \square, \sim\} = \{\bigcirc, \square\}.$$

(∪) Můžeme vyrobit množinu $\{x \mid x \in A \vee x \in B\}$, tedy množinu všech objektů, které leží v A nebo v B. Říká se jí sjednocení A s B a píše se jako $A \cup B$. Všechny prvky v $A \cup B$ buď leží *pouze* v A, *pouze* v B, nebo v A i v B. Například,

$$\{\bigcirc, \triangle, \square\} \cup \{\times, \bigcirc, \square, \sim\} = \{\bigcirc, \triangle, \square, \times, \sim\}.$$

(¬) S negací samotnou toho moc nesvedeme, ale můžeme ji použít společně s konjunkcí (∧), abychom vytvořili rozdíl dvou množin. Množina $\{x \mid x \in A \wedge \neg(x \in B)\} = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ obsahuje všechny prvky, které leží v A, ale **ne**leží v B a píšeme ji $A \setminus B$. Například,

$$\{\bigcirc, \triangle, \square\} \setminus \{\times, \bigcirc, \square, \sim\} = \{\triangle\}.$$

Pozor: rozdíl množin (oproti sjednocení a průniku) není komutativní, tj. $A \setminus B \neq B \setminus A$. V příkladu výše

$$\{\times, \bigcirc, \square, \sim\} \setminus \{\bigcirc, \triangle, \square\} = \{\times, \sim\}.$$

(⇒) Použití implikace v teorii množin se trochu liší od průniku či sjednocení. Popisuje mnoho různých množin jediným logickým výrokem. Můžeme se ptát: „Které množiny A splňují výrok $x \in A \Rightarrow x \in B$?“ Jinak řečeno, které množiny A mají všechny své prvky obsaženy v množině B? Odpovědí jsou podmnožiny B.
Fakt, že A je podmnožina B píšeme jako $A \subseteq B$. Množina A smí obsahovat pouze prvky, které obsahuje rovněž B, ale ne nutně všechny. Všechny podmnožiny množiny $B = \{\triangle, \bigcirc\}$ jsou vypsány níže.

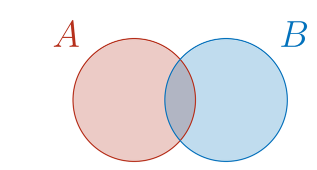
$$\{\}, \{\triangle\}, \{\bigcirc\}, \{\triangle, \bigcirc\},$$

kde $\{\}$ je prázdná množina – množina bez prvků.

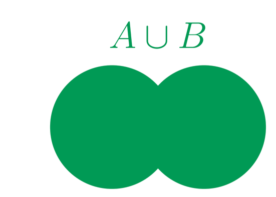
(⇔) Logická ekvivalence definuje rovnost mezi množinami. Když množiny A a B splňují výrok $x \in A \Leftrightarrow x \in B$, pak musejí být stejné, poněvadž všechny prvky A leží též v B a všechny prvky B leží též v A. Tedy, $A = B$.

Kreslení množinových operací

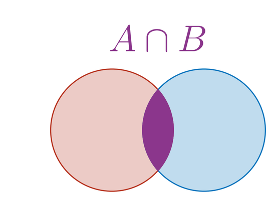
Množinové operace lze visualisovat užitím tzv. *Vennových diagramů*. Ty spočívají v nakreslení množin pomocí protínajících se kruhů. Například, dvě množiny – A a B – lze nakreslit takto:



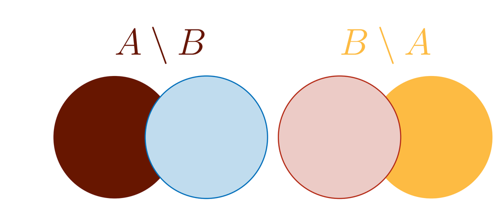
Snadno též nakreslíme operace sjednocení, průniku a rozdílu. Sjednocení $A \cup B$ je celá oblast pokrytá kruhy A a B. Vypadá takto:



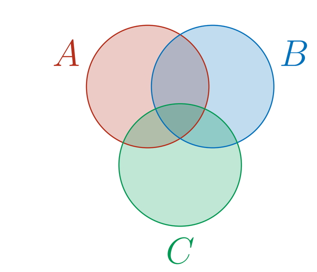
Průnik $A \cap B$ je ten „proužek“ veprostřed – ta oblast, kterou sdílejí kruhy A a B. Můžeme ho vykreslit takto:



Rozdíl $A \setminus B$ je část červeného kruhu A, která neprotíná modrý kruh B. Rozdíl $B \setminus A$ je zrcadlením téhož obrázku.



Přidáním třetí množiny C dostaneme takovýto obrázek.

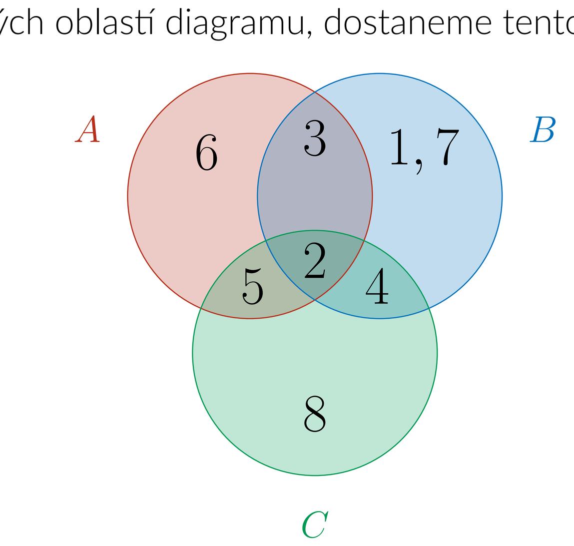


Každá oblast na tomto obrázku odpovídá jiné kombinaci množinových operací. Například, isolovaná část červeného kruhu obsahuje prvky, které leží pouze v A, ale nikoli v B nebo v C. Taková množina je výsledkem operace $(A \setminus B) \setminus C$. Středová oblast, kde se protínají všechny tři kruhy je odpovídá množině $A \cap B \cap C$.

Uveďme konkrétní příklad. Volme množiny

$$A = \{2, 3, 5, 6\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4, 7\}, \quad C = \{2, 4, 5, 8\}.$$

Když umístíme čísla do správných oblastí diagramu, dostaneme tento obrázek.



Nakonec se podíváme na dva příklady různých kombinací množinových operací.