Slinty o inverzních zobrazeních. Zobrazení $f : A \to B$ jsou pro nás automaticky **zobrazení definovaná všude**, tedy $f(a)$ je prvek B pro každé $a \in A$.

Když $f : A \to B$ a $g : B \to C$, pak složení zobrazení $g \circ f$, které je definováno stejně jako složení relací (bo zobrazení jsou relace), je zobrazení $A \to C$. Většinou budu vynechávat symbol $\circ$ a místo $g \circ f$ psát jenom gf. Dobře se složení zobrazení představují jako skládání šipek za sebe:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gf"'] & B \arrow[r, "g"] & C \end{tikzcd}$$

Dívat se na složení gf jako na základnu trojúhelníku s rameny f a g asi taky může pomoct:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "gf"'] & & C \end{tikzcd}$$

Zobrazení $f : A \to B$ a $g : C \to D$ lze v skládat pořadí $g \circ f$ jenom tehdy, když f končí tam, kde g začíná, formálně když $\operatorname{codom} f = \operatorname{dom} g$. V tomhle případě to znamená $B = C$. V opačném pořadí, tj. $f \circ g$, je lze skládat, když $\operatorname{codom} g = \operatorname{dom} f$ neboli $D = A$.

Na každé množině A je jedno speciální zobrazení, které každému prvku přiřadí ten samý. Budu mu říkat *identické zobrazení* a značit je $\mathbb{1}_A$. Tedy, $\mathbb{1}_A$ je zobrazení $A \to A$ takové, že $\mathbb{1}_A(a) = a$ pro každé $a \in A$.

Definice (Inverzní zobrazení). Ať $f : A \to B$. *Inverzním zobrazením* k f nazveme zobrazení $g : B \to A$ splňující

$$gf = \mathbb{1}_A \quad \text{a} \quad fg = \mathbb{1}_B.$$

Inverzní zobrazení samozřejmě nemusí existovat. Pokud existuje, značíme ho, pravdaže dost nesmyslně, f^{-1}. Čili $ff^{-1} = \mathbb{1}_B$ a $f^{-1}f = \mathbb{1}_A$.

Poznámka. *Všimněte si, že ff^{-1} je zobrazení $B \to B$ a $f^{-1}f$ je zobrazení $A \to A$! V obrázcích*

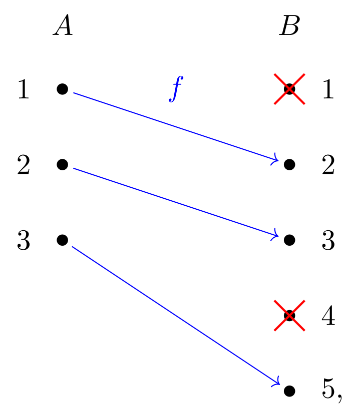
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "f^{-1}f=\mathbb{1}_A"'] & B \arrow[r, "f^{-1}"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "ff^{-1}=\mathbb{1}_B"'] & A \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

Možná vám někdo někdy řekl, že k zobrazení (asi jim říkali „funkce“) existuje zobrazení inverzní právě tehdy, když je prosté. To nám nestačí. My budeme uvažovat inverzní zobrazení pouze k bijekcím (tj. k zobrazením, která jsou prostá a na). Má to následující důvod.

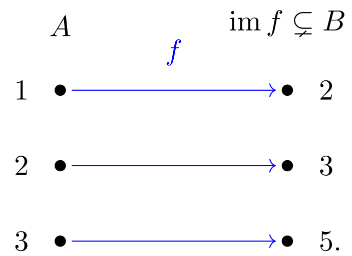
Prosté zobrazení $f : A \to B$ je totiž „to samé“, co bijekce $f : A \to \operatorname{im} f$, kde $\operatorname{im} f$ je množina všech obrazů prvků z A při zobrazení f. Symbolicky,

$$\operatorname{im} f = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq B.$$

Když zobrazení f není na, pak $\operatorname{im} f$ je pouze podmnožina B, a ne celé B. Když ale vynechám z B ty prvky, na které se nic z A nezobrazuje, tak přece dostanu úplně to samé zobrazení. V obrázcích si to můžete představovat tak, že pokud f je třeba následující zobrazení:



pak když vynechám z B prvky 1 a 4, které nejsou v $\operatorname{im} f$, pak dostanu opravdu to samé zobrazení. Konkrétně,



Skončíme následující větou, která potvrzuje, že přemýšlíme správným směrem.

Věta (Bijekce $\iff$ existuje inverzní zobrazení)**.** *Ať $f : A \to B$ je zobrazení. Pak f je bijekce (prosté a na) právě tehdy, když k němu existuje inverzní zobrazení.*

Důkaz. Tvrzení je ekvivalence, takže budeme dokazovat dvě implikace.

Nejdřív dokážeme implikaci „zleva doprava“, tj. že k bijekci vždycky existuje inverzní zobrazení. Ať f je tedy bijekce, tedy prosté a na. Potřebujeme definovat zobrazení $g : B \to A$ takové, aby $fg = \mathbb{1}_B$ a $gf = \mathbb{1}_A$.

Uděláme to prostě prvek po prvku. Zvolme si náhodně nějaké $b \in B$. Protože f je na, existuje $a \in A$, že $f(a) = b$. Navíc, protože f je prosté, tohle a je právě jedno, tj. žádný jiný prvek z A se na b nezobrazuje. Definujme $g(b) = a$. Pak máme $fg(b) = f(a) = b$ (tady využíváme toho, že f je na, tedy máme prvek a, který se zobrazuje na b) a taky $gf(a) = g(b) = a$ (tady využíváme toho, že f je prosté, tedy že opravdu jenom a se zobrazí na b). Čili, $g = f^{-1}$.

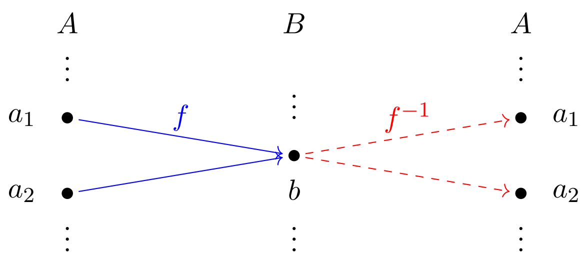
Implikaci zprava doleva uděláme trochu jinak. Pamatujte z logiky, že implikace $p \Rightarrow q$ je to samé, jako implikace $\neg q \Rightarrow \neg p$. Takže budeme předpokládat, že f **není** bijekce (tedy není prosté nebo není na) a chceme dokázat, že f **nemá** k sobě inverzní funkci. Pro spor tedy budeme předpokládat, že f^{-1} existuje a ukážeme, že to vede na nesmysl.

Máme celkem dvě možnosti:

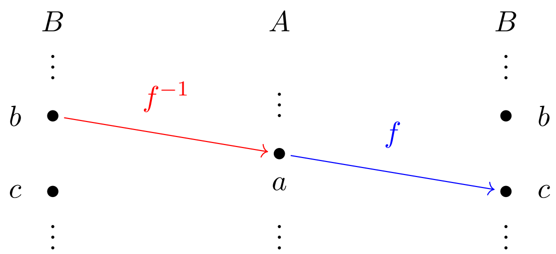
(1) Zobrazení f není prosté. Pak existují dva prvky $a_1, a_2 \in A$ takové, že $f(a_1) = f(a_2)$. Označíme jejich obraz b. Pak ale $f^{-1}f$ nemůže být rovno $\mathbb{1}_A$, protože buď

  (a) $f^{-1}(b) = a_1$ a pak $f^{-1}f(a_2) = f^{-1}(b) = a_1$, nebo
  (b) $f^{-1}(b) = a_2$ a pak $f^{-1}f(a_1) = f^{-1}(b) = a_2$.

  V obou případech jsme se dostali z jednoho prvku pomocí zobrazení $f^{-1}f$ do jiného, tedy to nemůže být identické zobrazení. Pomocný obrázek ukazuje ten problém – f^{-1} totiž může b zobrazovat jen na jeden prvek, což je ale dost problém, když f na b zobrazuje prvky **dva**.



(2) Zobrazení f není na. Pak existuje prvek $b \in B$, na který se žádné $a \in A$ nezobrazuje. To je ovšem taky dost problém, protože potom se b pomocí ff^{-1} nemůže zobrazit zpátky na b. Vskutku, ať $f^{-1}(b)$ je nějaký prvek a. Pak ale $f(a) \neq b$, protože f nezobrazuje nic na b. tedy $ff^{-1}(b) \neq b$, takže $ff^{-1} \neq \mathbb{1}_B$. Problém opět vidíte na obrázku.



Shrnuto, když f není prosté, pak nemůže platit $f^{-1}f = \mathbb{1}_A$, a když f není na, pak nemůže platit $ff^{-1} = \mathbb{1}_B$. Celkově, zobrazení, které není bijektivní, k sobě nemůže mít inverzní zobrazení. $\square$