

Ústní zkouška

z Úvodu do matematické analýzy, části první

Verze: reKt

Přednášející: His Divine Wisdom Sir Adam Clypatch

19. ledna 2024

**NENÍ-LI ŘEČENO JINAK, VŠECHNY POJMY A DŮKAZY FORMULUJTE
PEČLIVĚ S DŮRAZEM NA FORMÁLNÍ SPRÁVNOST.**

Část	Hodnocení
Základní definice	0 / 0
Lehké úlohy a důkazy	/ 6
Těžké úlohy a důkazy	/ 12

Základní definice (0 bodů)

Neznalost základních definic znamená bezpodmínečné nesložení zkoušky.

- (1) Konvergentní racionální posloupnost (včetně definice racionální posloupnosti).
- (2) Reálné číslo. Vysvětlete též, v jakém smyslu jsou \mathbb{Q} podmnožinou \mathbb{R} .
- (3) Celé číslo.
- (4) Limita posloupnosti.
- (5) Supremum a infimum.

Lehké úlohy a důkazy (6 bodů)

Pojmy užívané v úlohách nemusíte definovat. Používáte-li k řešení úlohy nebo k důkazu předchozí tvrzení, zformulujte je.

- (1) Dokažte, že relace \sim na $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ daná předpisem

$$(a, b) \sim (c, d) \stackrel{\text{def.}}{\iff} a \cdot d = b \cdot c$$

je ekvivalence a že operace $+$ a \cdot na třídách ekvivalence \sim dané předpisy

$$[(a, b)]_{\sim} + [(c, d)]_{\sim} := [(a \cdot d + b \cdot c, b \cdot d)]_{\sim},$$

$$[(a, b)]_{\sim} \cdot [(c, d)]_{\sim} := [(a \cdot c, b \cdot d)]_{\sim}$$

jsou dobře definované.

- (2) Dokažte, že každá konvergentní posloupnost (reálných čísel) je omezená.

- (3) Spočítejte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{9 + n^2}{4n^2}}.$$

Uveďte všechna tvrzení, jež používáte, a ověřte jejich předpoklady.

Nemusíte dokonale zformulovat svá řešení. Obecná idea rozvinutá důležitými detaily postačuje.

(1) Alternativní důkaz Bolzanovy-Weierstrašovy věty.

(a) Dokažte, že každá posloupnost $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ má *monotónní* podposloupnost.

- i. Předpokládejte nejprve, že pro každé $m \in \mathbb{N}$ má množina $\{a_n \mid n \geq m\}$ maximum. Využijte tohoto předpokladu k sestrojení nerostoucí posloupnosti $b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ jako posloupnosti maxim stále menších podmnožin prvků posloupnosti a . Zkuste to *induktivně*.
- ii. Nyní naopak předpokládejte, že existuje $m \in \mathbb{N}$, pro které množina $\{a_n \mid n \geq m\}$ maximum nemá. V tomto případě rovněž $\{a_n \mid n \geq m'\}$ nemá maximum pro všechna $m' \geq m$. Induktivní konstrukcí velmi obdobnou té z bodu i. sestrojte podposloupnost b posloupnosti a , jež je rostoucí.

(b) Dokažte Bolzanovu-Weierstrašovu větu (tedy tvrzení, že každá omezená posloupnost má konvergentní podposloupnost) užitím bodu (a) a tvrzení, že každá monotónní omezená posloupnost je konvergentní.

(2) Posloupnost $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ je zadána rekurentně vztahy

$$\begin{aligned} a_0 &:= 1, \\ a_{n+1} &:= \frac{1}{1 + a_n}. \end{aligned}$$

Spočtěte $\lim a$.