Gymnázium Evolution Jižní Město

Jakýsi úvod do matematické analýzy

Áďula vod Klepáčů

30. července 2024

Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předsešších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.

Obsah

Část I

Reálné funkce

Kapitola 1

Limity funkcí

Limita funkce je dost možná nejdůležitější ideou matematické analýzy a obecně matematických disciplín, jež využívá fyzika. Davši vzniknout teorii derivací a primitivních funkcí, umožnila popsat fyzikální jevy soustavami diferenciálních rovnic a je základem zatím nejlepších známých modelův světa – diferencovatelných struktur.

Principiálně se pojem *limity funkce* neliší pramnoho od limity posloupnosti. Matematici funkcí obyčejně myslíme zobrazení popisující vývoj systému v čase (tzv. funkce *jedné proměnné*), případně závislé na více parametrech než jen na čase (tzv. funkce *více proměnných*). Limita funkce v nějakém určeném okamžiku pak znamená vlastně „očekávanou hodnotu" této funkce v tomto okamžiku – hodnotu, ke které je funkce, čím méně času zbývá do onoho okamžiku, tím blíže.

V tomto textu budeme sebe zaobírati pouze funkcemi závislými na čase tvořícími systémy, jejichž stav je rovněž vyjádřen jediným číslem. Uvidíme, že i teorie takto primitivních objektů je veskrze širá.

Definice 1.0.1 (Reálná funkce jedné proměnné)

Ať $M \subseteq \mathbb{R}$ je libovolná podmnožina $\mathbb{R}$. Zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$ nazýváme *reálnou funkcí (jedné proměnné)*.

Ačkolivěk ve světě, jest-li nám známo, proudí čas pouze jedním směrem, matematiku takovými trivialitami netřeba třísnit. Pojem limity reálné funkce budeme tedy definovat bez ohledu na „proud času". Budeme zkoumat jak hodnotu reálné funkce, když se čas blíží *zleva* (tj. přirozeně) k danému okamžiku, tak její očekávanou hodnotu proti toku času.

Ona dva přístupa slujeta limita funkce *zleva* a limita funkce *zprava*. Před jejich výrokem ovšem učiníme kvapný formální obchvat. Bylo by totiž nanejvýš neelegantní musiti různými logickými výroky definovat konečné oproti nekonečným limitám v konečných oproti nekonečným bodům. Následující – čistě formální avšak se silnou geometrickou intuicí – pojem tyto případy skuje v jeden.

Definice 1.0.2 (Okolí a prstencové okolí bodu)

Ať $a \in \mathbb{R}^*$ a $\varepsilon \in (0, \infty)$. *Okolím* bodu a (o poloměru ε) myslíme množinu

$$B(a, \varepsilon) \coloneqq \begin{cases} (a - \varepsilon, a + \varepsilon), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ (1/\varepsilon, \infty), & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty. \end{cases}$$

Podobně, *prstencovým okolím a* (o velikosti ε) myslíme jeho okolí bez samotného bodu a. Konkrétně,

$$R(a, \varepsilon) \coloneqq \begin{cases} (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}, & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ (1/\varepsilon, \infty), & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty. \end{cases}$$

Pro účely definice levých a pravých limit, pojmenujeme rovněž množinu

$$B_+(a, \varepsilon) \coloneqq \begin{cases} [a, a + \varepsilon), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ \emptyset, & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty \end{cases}$$

pravým okolím bodu a a množinu

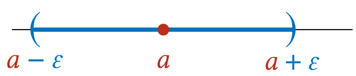
$$R_+(a, \varepsilon) \coloneqq \begin{cases} (a, a + \varepsilon), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ \emptyset, & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty \end{cases}$$

pravým prstencovým okolím bodu a. *Levé okolí* a *levé prstencové okolí* bodu a se definují analogicky.

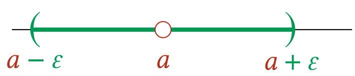
Poznámka 1.0.3

Písmena B a R v definici okolí a prstencového okolí pocházejí z angl. slov **b**all a **r**ing. Okolí se v angličtině přezdívá *ball* pro to, že okolí bodu a je ve skutečnosti (jednodimenzionální) kruh s poloměrem ε o středu a. Znázornění okolí bodu jako kruhu v rovině je vysoce účinným vizualizačním aparátem. Naopak, slovo *ring* vskutku přirozeně značí kruh s „dírou“ (velikosti jednoho bodu) v jeho středě.

Čtenáře možná zarazilo číslo $1/\varepsilon$ v definici okolí bodu ∞. Důvod užití $1/\varepsilon$ oproti prostému ε je spíše intuitivního rázu. V definici limity a v následných tvrzeních si matematici obvykle představujeme pod ε reálné číslo, které je „nekonečně malé“. Chceme-li tedy, aby se **zmenšujícím se** ε byla hodnota dané funkce stále blíže nekonečnu, musí se tato hodnota **zvětšovat**. Díky užité formulaci tomu tak je, neboť s menším ε je číslo $1/\varepsilon$ větší.



(a) Okolí $B(a, \varepsilon)$ bodu a.



(b) Prstencové okolí $R(a, \varepsilon)$ bodu a.

Obrázek 1.1: Okolí a prstencové okolí bodu $a \in \mathbb{R}$.

Definice 1.0.4 (Jednostranná limita funkce)

Ať $M \subseteq \mathbb{R}$, $f : M \to \mathbb{R}$ a $a \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že číslo $L \in \mathbb{R}^*$ je *limitou zleva* funkce f v bodě a, pokud

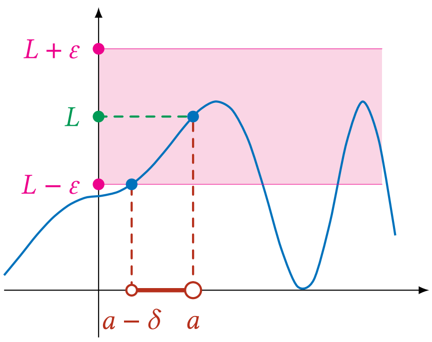
$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P_-(a, \delta) : f(x) \in B(L, \varepsilon).$$

Tento fakt zapisujeme jako $L = \lim_{x \to a^-} f(x)$.

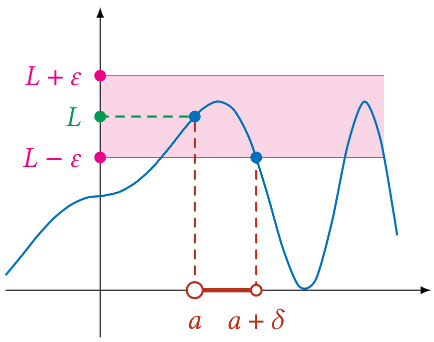
Podobně, číslo $K \in \mathbb{R}^*$ je *limitou zprava* funkce f v bodě a, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P_+(a, \delta) : f(x) \in B(K, \varepsilon).$$

Tento fakt zapisujeme jako $K = \lim_{x \to a^+} f(x)$.



(a) Limita f v bodě a zleva.



(b) Limita f v bodě a zprava.

Obrázek 1.2: Jednostranné limity funkce f v bodě a.

Varování 1.0.5

Fakt, že L je limita **zleva** funkce f v bodě a, vůbec neznamená, že hodnoty $f(x)$ se musejí blížit k L rovněž **zleva**. Adverbia *zleva* a *zprava* značí pouze směr, kterým se k číslu a přibližují **vstupy** funkce f, nikoli její **výstupy** k číslu L.

Pochopitelně, lze též požadovat, aby hodnoty f ležely v daném rozmezí kolem bodu L, jak se její vstupy blíží k a zleva i zprava zároveň. V principu, blíží-li se f ke stejnému číslu zleva i zprava, stačí vzít δ v definici 1.0.4 tak malé, aby $f(x)$ leželo v $B(L, \varepsilon)$ kdykoli je x ve vzdálenosti nejvýše δ od a.

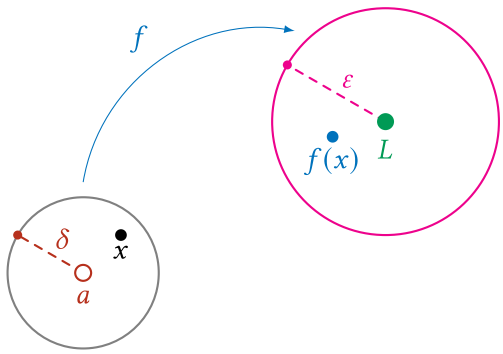
Definice 1.0.6 (Oboustranná limita funkce)

Ať $a, L \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce. Řekneme, že L je *(oboustrannou) limitou* funkce f v bodě a, pokud

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in B(L, \varepsilon).$$

Tento fakt zapisujeme jako $L = \lim_{x \to a} f(x)$.

Je jistě možné představovat si oboustrannou limitu funkce stejně jako limity jednostranné na obrázku 1.2. Ovšem, ona vlastnost „oboustrannosti" umožňuje ještě jiný – však ne rigorózní – pohled. Povýšíme-li situaci do roviny, tj. do prostoru druhé dimenze, a na funkci f budeme nahlížet jako na zobrazení bodů roviny na body roviny, pak L je limitou funkce f v bodě a, když zobrazuje všechny body zevnitř kruhu o poloměru δ a středu a do kruhu o poloměru ε a středu L. Jako na obrázku 1.3.



Obrázek 1.3: Oboustranná limita funkce „ve 2D“.

Doporučujeme čtenářům, aby se zamysleli, čím by v této dvoudimenzionální říši byla *jednostranná* limita funkce. Sen zámysl snad vedl k představě, že by se vstupy x musely blížit k bodu a po nějaké určené přímce. Existence „všestranné“ limity v a by pak byla ekvivalentní existenci nespočetně mnoha „jednostranných“ limit – jedné pro každou přímku procházející bodem a. Věříme, že není obtížné nahlédnout, jak zbytečný by takový pojem ve dvou dimenzích byl. Popsaná situace přímo souvisí s faktem, že první dimenze je z geometrického pohledu „degenerovaná“ – kružnice je pouze dvoubodovou množinou.

Oboustranné limity jsou spjaty jednostrannými velmi přirozeným způsobem. Existence oboustranné limity funkce v bodě je ekvivalentní existenci limity jak zleva, tak zprava, v témže bodě. Oboustrannou limitu vlastně dostaneme tak, že z levého a pravého prstencového okolí limitního bodu, ve kterém již je funkční hodnota blízko limitě, vybereme to menší.

Tvrzení 1.0.7 (Vztah jednostranných a oboustranných limit)

Ať f je reálná funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Pak $\lim_{x\to a} f(x)$ existuje právě tehdy, když existuje $\lim_{x\to a^+} f(x)$ i $\lim_{x\to a^-} f(x)$ a jsou si rovny.

Důkaz. Implikace ($\Rightarrow$) je triviální. Pokud existuje $L \coloneqq \lim_{x\to a} f(x)$, pak pro dané $\varepsilon > 0$ máme nalezeno $\delta > 0$ takové, že pro $x \in R(a,\delta)$ je $f(x) \in B(L,\varepsilon)$. Ovšem, jistě platí $R_+(a,\delta) \subseteq R(a,\delta)$ i $R_-(a,\delta) \subseteq R(a,\delta)$. To však znamená, že pro $x \in R_+(a,\delta)$ i pro $x \in R_-(a,\delta)$ rovněž platí $f(x) \in B(L,\varepsilon)$. To dokazuje, že existuje jak $\lim_{x\to a^+} f(x)$, tak $\lim_{x\to a^-} f(x)$ a

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = L.$$

Pro důkaz ($\Leftarrow$) položme $L \coloneqq \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$ a pro dané $\varepsilon > 0$ nalezněme $\delta_+ > 0$ a $\delta_- > 0$ splňující výroky

$$\forall x \in R_+(a,\delta_+) : f(x) \in B(L,\varepsilon),$$
$$\forall x \in R_-(a,\delta_-) : f(x) \in B(L,\varepsilon).$$

Ať $\delta \coloneqq \min(\delta_+,\delta_-)$. Pak $R(a,\delta) \subseteq R_+(a,\delta_+) \cup R_-(a,\delta_-)$, a tedy $\delta > 0$ splňuje, že

$$\forall x \in R(a,\delta) : f(x) \in B(L,\varepsilon),$$

čili $\lim_{x\to a} f(x) = L$. ∎

Příklad 1.0.8

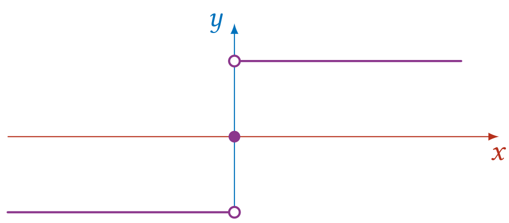
Tvrzení 1.0.7 je užitečné jak v uvedené, tak v kontrapozitivní formě, tj. při důkazu neexistence oboustranné limity za předpokladu nerovnosti (nikoli nutně *neexistence*) limit jednostranných.

Uvažme funkce $f(x) \coloneqq \operatorname{sgn}(x)$ a $g(x) \coloneqq |\operatorname{sgn}(x)|$. Ukážeme, že $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje, zatímco $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. Připomeňme, že funkce $\operatorname{sgn}(x)$ je definována předpisem

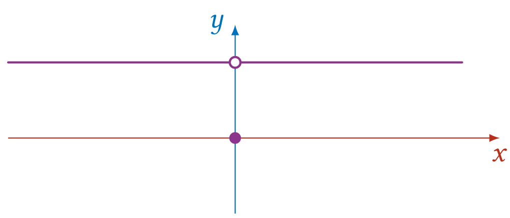
$$\operatorname{sgn}(x) \coloneqq \begin{cases} -1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Ověříme, že $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Volme například $\delta \coloneqq 1$. Potom pro $x \in R_+(0,1) = (0,1)$ platí $f(x) = 1$, čili zřejmě $f(x) \in B(1,\varepsilon) = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. Podobně se ověří, že $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$. To ovšem znamená, že $\lim_{x\to 0^+} f(x) \neq \lim_{x\to 0^-} f(x)$, tudíž dle tvrzení 1.0.7 $\lim_{x\to 0} f(x)$ neexistuje.

Velmi obdobným argumentem ukážeme, že $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^-} g(x) = 1$. Nuže, podle téhož tvrzení platí $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$.



(a) Graf funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$.



(b) Graf funkce $g(x) = |\operatorname{sgn}(x)|$.

Obrázek 1.4: Obrázek k příkladu 1.0.8.

Cvičení 1.0.9

Dokažte, že pro reálnou funkci f a $a \in \mathbb{R}^*$ platí

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

1.1 Základní poznatky o limitě funkce

Počneme nyní shrnovati intuitivně vcelku zřejmé výsledky o limitách reálných funkcí. Jakž jsme již vícekrát děli, ona „intuitivní zřejmost“ pravdivosti výroků nechce nabodnout k přeskoku či trivializaci jejich důkazů. Vodami nekonečnými radno broditi se ostražitě, bo tvrzení jako limita složené funkce ráda svědčí, že intuicí bez logiky člověk na břeh nedoplove.

Na první pád není překvapivé, že limita funkce je jednoznačně určena, pochopitelně za předpokladu její existence. Vyzýváme čtenáře, aby se při čtení důkazu drželi vizualizace oboustranné limity z obrázku 1.3.

Lemma 1.1.1 (Jednoznačnost limity)

Limita funkce (ať už jednostranná či oboustranná) je jednoznačně určená, pokud existuje.

Důkaz. Dokážeme lemma pouze pro oboustrannou limitu, důkaz pro limity jednostranné je v zásadě totožný.

Pro spor budeme předpokládat, že L i L' jsou limity f v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Nejprve ošetříme případ, kdy $L, L' \in \mathbb{R}$. Bez újmy na obecnosti smíme předpokládat, že $L > L'$. Volme $\varepsilon \coloneqq (L - L')/3$ (ve skutečnosti stačilo volit libovolné $\varepsilon < (L - L')/2$). K tomuto ε existují z definice limity $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ takové, že

$$\forall x \in R(a, \delta_1) : f(x) \in B(L, \varepsilon).$$

a rovněž

$$\forall x \in R(a, \delta_2) : f(x) \in B(L', \varepsilon).$$

Volíme-li ovšem $\delta \coloneqq \min(\delta_1, \delta_2)$, pak pro $x \in R(a, \delta)$ dostaneme

$$f(x) \in B(L, \varepsilon) \cap B(L', \varepsilon).$$

Poslední vztah lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon, \\ L' - \varepsilon < f(x) < L' + \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$L - \varepsilon < L' + \varepsilon,$$

což po dosazení $\varepsilon = (L - L')/3$ a následné úpravě vede na

$$2L - L' < 2L' - L,$$

z čehož ihned

$$L < L',$$

což je spor.

Nyní ať například $L = \infty$ a $L' \in \mathbb{R}$. Z definice okolí $B(L, \varepsilon)$ pro $L = \infty$ stačí nalézt $\varepsilon > 0$ takové, že

$$\frac{1}{\varepsilon} > L' + \varepsilon,$$

pak se totiž nemůže stát, že

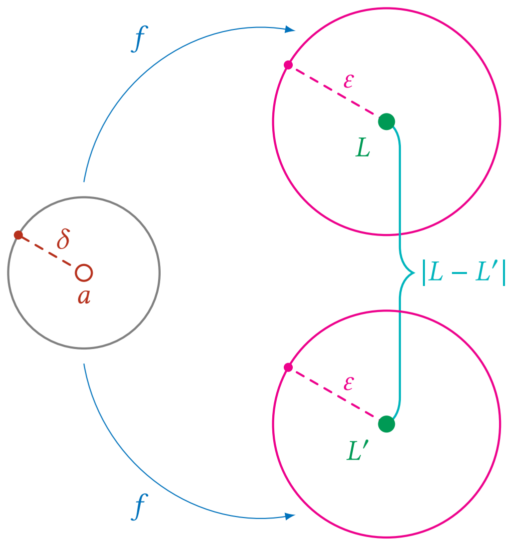
$$f(x) \in B(\infty, \varepsilon) \cap B(L', \varepsilon).$$

Snadným výpočtem zjistíme, že

$$\frac{1}{\varepsilon} > L' + \varepsilon$$

právě tehdy, když $\varepsilon < (\sqrt{L'^2 + 4} - L')/2$. Pro libovolné takové ε tudíž dostáváme spor stejně jako v předchozím případě.

Ostatní případy se ošetří obdobně. ∎



Obrázek 1.5: Spor v důkazu lemmatu 1.1.1.

Lemma 1.1.2

*Ať reálná funkce f má **konečnou** limitu $L \in \mathbb{R}$ v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Pak existuje prstencové okolí a, na němž je f omezená.*

Důkaz. Pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme z definice limity $\delta > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta)$ platí $f(x) \in B(L, \varepsilon)$. Protože však $B(L, \varepsilon) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ platí pro $x \in R(a, \delta)$ odhady

$$L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon,$$

čili je f na $R(a, \delta)$ omezená. ■

Vzhledem k základním aritmetickým operacím si limity funkcí počínají vychovaně. Za předpokladu, že výsledný výraz dává smysl, můžeme spočítat limitu součtu, součinu či podílu funkcí jako součet, součin či podíl limit těchto funkcí.

Věta 1.1.3 (Aritmetika limit funkcí)

Ať f, g jsou reálné funkce a $a \in \mathbb{R}^*$. Předpokládejme, že $\lim_{x \to a} f(x)$ i $\lim_{x \to a} g(x)$ existují a označme je po řadě L_f a L_g. Potom platí

(a) $\lim_{x \to a}(f + g)(x) = L_f + L_g$, *dává-li výraz napravo smysl.*

(b) $\lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = L_f \cdot L_g$, *dává-li výraz napravo smysl.*

(c) $\lim_{x \to a}(f/g)(x) = L_f / L_g$, *dává-li výraz napravo smysl.*

Důkaz. Dokážeme pouze část (c), neboť je výpočetně nejnáročnější, ač nepřináší mnoho intuice. Část (a) je triviální a (b) je lehká. Vyzýváme čtenáře, aby se je pokusili dokázat sami.

Už jen v důkazu samotné části (c) bychom správně měli rozlišit šest různých případů:

(1) $L_f \in \mathbb{R}, L_g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

(2) $L_f \in \mathbb{R}, L_g \in \{-\infty, \infty\}$,

(3) $L_f = \infty, L_g \in (0, \infty)$,

(4) $L_f = \infty, L_g \in (-\infty, 0)$,

(5) $L_f = -\infty, L_g \in (0, \infty)$,

(6) $L_f = -\infty, L_g \in (-\infty, 0)$.

Jelikož se výpočty limit v oněch případech liší vzájemně pramálo a získaná intuice je asymptoticky rovna té ze znalosti metod řešení exponenciálních rovnic, soustředíme se pouze na (nejzajímavější) případ (1).

Ať tedy $L_f \in \mathbb{R}, L_g \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Je nejprve dobré si uvědomit, proč vynecháváme 0 jako možnou hodnotu L_g. Totiž, L_f/L_g není definován **nikdy**, pokud $L_g = 0$, bez ohledu na hodnotu L_f. Hodnoty g se mohou k L_g limitně blížit zprava, zleva či střídavě z obou směrů. Nelze tudíž obecně určit, zda dělíme klesajícím kladným číslem, či rostoucím záporným číslem.

Položme $\varepsilon_g = |L_g|/2$. K tomuto ε_g existuje z definice limity δ_g takové, že pro $x \in R(a, \delta_g)$ platí $g(x) \in B(L_g, \varepsilon_g)$. Poslední vztah si přepíšeme na

$$L_g - \varepsilon_g < g(x) < L_g + \varepsilon_g,$$
$$L_g - \frac{|L_g|}{2} < g(x) < L_g + \frac{|L_g|}{2}.$$

Speciálně tedy pro $x \in R(a, \delta_g)$ máme odhad

$$|g(x)| > \left| L_g - \frac{|L_g|}{2} \right| > \frac{|L_g|}{2}.$$

Jelikož poslední výraz je z předpokladu kladný, má výraz $f(x)/g(x)$ smysl pro každé $x \in R(a, \delta_g)$, neboť pro tato x platí $g(x) \neq 0$.

Pro $x \in R(a, \delta_g)$ odhadujme

$$\begin{aligned}
\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_f}{L_g} \right| &= \frac{|f(x)L_g - g(x)L_f|}{|g(x)||L_g|} = \frac{|f(x)L_g - L_f L_g + L_f L_g - g(x)L_f|}{|g(x)||L_g|} \\
&\leq \frac{|L_g||f(x) - L_f| + |L_f||L_g - g(x)|}{|g(x)||L_g|} \\
&= \frac{1}{|g(x)|}|f(x) - L_f| + \frac{|L_f|}{|g(x)||L_g|}|L_g - g(x)| \\
&< \frac{2}{|L_g|}|f(x) - L_f| + \frac{2|L_f|}{|L_g|^2}|L_g - g(x)| \\
&\leq c(|f(x) - L_f| + |L_g - g(x)|)
\end{aligned}$$

pro $c \coloneqq \max(2/|L_g|, 2|L_f|/|L_g|^2)$.

Ať je nyní dáno $\varepsilon > 0$. K číslu $\varepsilon/2c$ existují z definice limity $\delta_1, \delta_2 > 0$ taková, že

$$\forall x \in R(a, \delta_1) : |g(x) - L_g| < \frac{\varepsilon}{2c},$$
$$\forall x \in R(a, \delta_2) : |f(x) - L_f| < \frac{\varepsilon}{2c}.$$

Položíme-li nyní $\delta \coloneqq \min(\delta_1, \delta_2, \delta_g)$, pak pro $x \in R(a, \delta)$ platí

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{L_f}{L_g}\right| < c(|f(x) - L_f| + |L_g - g(x)|) < c\left(\frac{\varepsilon}{2c} + \frac{\varepsilon}{2c}\right) = \varepsilon,$$

což dokazuje rovnost $\lim_{x\to a}(f/g)(x) = L_f/L_g$. ■

Varování 1.1.4

Předpoklad *definovanosti* výsledného výrazu ve znění věty o aritmetice limit je zásadní.

Uvažme funkce $f(x) = x + c$ pro libovolné $c \in \mathbb{R}$, $g(x) = -x$. Pak platí

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} f(x) &= \infty, \\ \lim_{x\to\infty} g(x) &= -\infty, \\ \lim_{x\to\infty} (f(x) + g(x)) &= c, \end{aligned}$$

ale $\lim_{x\to\infty} f(x) + \lim_{x\to\infty} g(x)$ není definován.

Cvičení 1.1.5

Dokažte tvrzení (b) a (c) ve větě 1.1.3.

Úloha 1.1.6

Spočtěte

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}.$$

Řešení. Jelikož limitním bodem je ∞, neliší se výpočet limity funkce v zásadě nijak od výpočtu limity sesterské posloupnosti. Stále je třeba identifikovat a vytknout „nejrychleji rostoucí“ členy z čitatele a jmenovatele zlomku a poté se odkázat na aritmetiku limit.

Přímým dosazením zjistíme, že bez dalších úprav vychází limitní výraz ∞/∞, na jehož základě nelze nic rozhodnout. Upravujeme tudíž následující způsobem:

$$\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \frac{x^{20}(2 - \frac{3}{x^{20}}) \cdot x^{30}(3 + \frac{2}{x^{30}})}{x^{50}(2 + \frac{1}{x^{50}})} = \frac{x^{50}}{x^{50}} \cdot \frac{(2 - \frac{3}{x^{20}})(3 + \frac{2}{x^{30}})}{2 + \frac{1}{x^{50}}}.$$

Předpokládajíce definovanost výsledného výrazu (již je třeba ověřit až na samotném konci výpočtu), smíme z aritmetiky limit tvrdit, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{50}}{x^{50}} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{(2 - \frac{3}{x^{20}})(3 + \frac{2}{x^{30}})}{2 + \frac{1}{x^{50}}}.$$

Zřejmě platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{50}}{x^{50}} = 1.$$

Opět použitím aritmetiky limit můžeme počítat

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2-x^{20})(3+\frac{2}{x^{30}})}{2+\frac{1}{x^{50}}} = \frac{\lim_{x\to\infty}(2-\frac{1}{x^{20}})\cdot\lim_{x\to\infty}(3+\frac{2}{x^{30}})}{\lim_{x\to\infty}(2+\frac{1}{x^{50}})} = \frac{(2-0)\cdot(3+0)}{2+0} = 3.$$

Celkem tedy

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}} = 1\cdot 3 = 3.$$

Protože výsledný výraz je definován, byla věta o aritmetice limit použita korektně. ♠

Úloha 1.1.7

Spočtěte

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$$

Řešení. Úlohy na výpočet limit funkcí v bodech jiných než $\pm\infty$ jsou však fundamentálně rozdílné od výpočtu limit posloupností. Nelze již rozumně hovořit o „rychlosti růstu některého členu“ či podobných konceptech. Výpočet se pochopitelně stále opírá o větu o aritmetice limit, ale často dožaduje jiných algebraických úprav – včetně dělení mnohočlenů.

Dosazením $x = 3$ do zadaného výrazu získáme $0/0$, tedy je třeba pro výpočet limity výraz nejprve upravit.

Zde postupujeme takto:

$$\begin{aligned}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{(x-3)(x+3)}\cdot\frac{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1}}\\ &= \frac{(x+13)-4(x+1)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}.\end{aligned}$$

Nyní,

$$(x+13)-4(x+1) = -3x+9 = -3(x-3).$$

Pročež,

$$\frac{(x+13)-4(x+1)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})} = \frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}.$$

Z aritmetiky limit máme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9} &= \lim_{x\to 3}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}\\ &= \frac{-3}{(3+3)(\sqrt{3+13}+2\sqrt{3+1})} = \frac{-3}{48}.\end{aligned}$$

Protože je konečný výraz definovaný, směli jsme použít větu o aritmetice limit. ♠

V důkazu věty o aritmetice limit jsme zmínili, že na jejím základě nelze nic rozhodnout v případě, že konečný výraz vyjde $a/0$, kde $a \in \mathbb{R}^*$. K rozřešení právě těchto situací slouží následující tvrzení.

Tvrzení 1.1.8

Ať f, g jsou reálné funkce, $a \in \mathbb{R}^*$. Dále ať $\lim_{x\to a} f(x) = A \in \mathbb{R}^*, A > 0$, $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ a existuje prstencové okolí bodu a, na němž je g kladná.

Potom $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$.

Důkaz. Ať je z předpokladu dáno $\eta > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \eta)$ je $g(x) > 0$. Rozlišíme dva případy.

První případ nastává, když $A \in \mathbb{R}$ je číslo. Mějme dáno $\varepsilon > 0$. Jelikož $\lim_{x\to a} f(x) = A$ a $A > 0$, nalezneme pro $A/2$ číslo $\delta_1 > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta_1)$ platí

$$f(x) \in B\left(A, \frac{A}{2}\right) = \left(\frac{A}{2}, \frac{3A}{2}\right),$$

čili $f(x) > A/2$. Podobně, za předpokladu $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta_2)$ platí

$$g(x) \in B\left(0, \frac{A}{2\varepsilon}\right) = \left(-\frac{A}{2\varepsilon}, \frac{A}{2\varepsilon}\right),$$

tedy speciálně $g(x) < A/2\varepsilon$, z čehož dostáváme $1/g(x) > 2\varepsilon/A$. Celkově pro $\delta \coloneqq \min(\delta_1, \delta_2, \eta)$ a $x \in R(a, \delta)$ můžeme počítat

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{f(x)}{g(x)} > \frac{A}{2} \cdot \frac{2\varepsilon}{A} = \varepsilon,$$

kde první rovnost plyne z toho, že pro $x \in R(a, \delta)$ platí $f(x) > 0$ i $g(x) > 0$. To dokazuje, že $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$ v případě $A \in \mathbb{R}$.

Ošetřemež případ $A = \infty$. Argumentujíce analogicky předchozímu odstavci nalezneme $\delta_1 > 0$ takové, že pro $R(a, \delta_1)$ platí $f(x) > 1$ a pro dané $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta_2 > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta_2)$ platí $g(x) < 1/\varepsilon$, a tedy $1/g(x) > \varepsilon$. Potom, pro $x \in R(a, \min(\eta, \delta_1, \delta_2))$ platí

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = \frac{f(x)}{g(x)} > 1 \cdot \varepsilon = \varepsilon,$$

což dokazuje opět, že $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$ i v případě $A = \infty$.

Tím je důkaz završen. ∎

Poznámka 1.1.9

Předchozí tvrzení pochopitelně platí i při záměně ostrých nerovností v jeho znění. Konkrétně, za předpokladů

(<>) $\lim_{x\to a} f(x) = A < 0$ a $g(x) > 0$ na $R(a, \eta)$ platí $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = -\infty$;

(><) $\lim_{x\to a} f(x) = A > 0$ a $g(x) < 0$ na $R(a, \eta)$ platí $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = -\infty$;

(<<) $\lim_{x\to a} f(x) = A < 0$ a $g(x) < 0$ na $R(a, \eta)$ platí $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = \infty$.

Důkazy všech těchto případů jsou identické důkazu původního tvrzení.

Posledním základním tvrzením o limitách funkcí je vztah limit a uspořádání reálných čísel, vlastně jakási varianta lemmatu ?? pro posloupnosti.

Věta 1.1.10 (O srovnání)

Ať $a \in \mathbb{R}^*$ a f, g, h jsou reálné funkce.

(a) Pokud
$$\lim_{x \to a} f(x) > \lim_{x \to a} g(x),$$
pak existuje prstencové okolí bodu a, na němž $f > g$.

(b) Existuje-li prstencové okolí bodu a, na němž platí $f \leq g$, pak
$$\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x).$$

(c) Existuje-li prstencové okolí a, na němž $f \leq h \leq g$ a $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = A \in \mathbb{R}^*$, pak existujíc rovněž $\lim_{x \to a} h(x)$ jest rovna A.

Důkaz. Položme $L_f \coloneqq \lim_{x \to a} f(x)$ a $L_g \coloneqq \lim_{x \to a} g(x)$.

Dokážeme (a). Protože $L_f > L_g$, existuje $\varepsilon > 0$ takové, že $L_f - L_g > 2\varepsilon$. K tomuto ε nalezneme z definice limity $\delta_f > 0$ a $\delta_g > 0$ taková, že
$$\forall x \in R(a, \delta_f) : f(x) \in B(L_f, \varepsilon),$$
$$\forall x \in R(a, \delta_g) : g(x) \in B(L_g, \varepsilon).$$

To ovšem znamená, že pro $x \in R(a, \min(\delta_f, \delta_g))$ platí jak
$$f(x) > L_f - \varepsilon,$$
tak
$$g(x) < L_g + \varepsilon,$$
čili
$$f(x) - g(x) > L_f - \varepsilon - L_g - \varepsilon = L_f - L_g - 2\varepsilon > 0,$$
kterak chtiechom.

Část (b) dokážeme sporem. Ať $L_f > L_g$. Podle (a) pak existuje prstencové okolí $R(a, \delta)$ bodu a, na němž $f > g$. Ovšem, podle předpokladu existuje rovněž okolí $R(a, \eta)$ bodu a, kde zase $f \leq g$. Vezmeme-li tudíž $x \in R(a, \min(\delta, \eta))$, pak $f(x) > g(x) \geq f(x)$, což je spor.

V důkazu (c) rozlišíme dva případy. Položme $L \coloneqq L_f = L_g$ a ať nejprve $L \in \mathbb{R}$. Pro dané $\varepsilon > 0$ existují $\delta_f, \delta_g > 0$ taková, že pro $x \in R(a, \delta_f)$ platí
$$L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$$
a pro $x \in R(a, \delta_g)$ zas
$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon.$$
Z předpokladu existuje prstencové okolí $R(a, \eta)$, na němž $f \leq h \leq g$. Pročež, pro $x \in R(a, \min(\delta_f, \delta_g, \eta))$ máme
$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon,$$

z čehož plyne $h(x) \in B(L, \varepsilon)$, neboli $\lim_{x\to a} h(x) = L$.

Pro $L = \infty$ postupujeme jednodušeji, neboť stačí dolní odhad. K danému $\varepsilon > 0$ nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta)$ platí

$$f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Pak pro $x \in R(a, \min(\delta, \eta))$ máme odhad

$$\frac{1}{\varepsilon} < f(x) \le h(x),$$

čili $h(x) \in B(\infty, \varepsilon)$, což dokazuje rovnost $\lim_{x\to a} h(x) = \infty$.

Případ $L = -\infty$ se ošetří horním odhadem funkcí g. ■

Cvičení 1.1.11

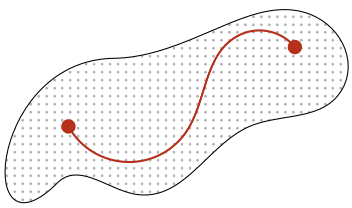
Spočtěte následující limity funkcí

$$\lim_{x\to 1} \frac{3x^4 - 4x^3 + 1}{(x-1)^2},$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{3x + \frac{2}{x}}{x + \frac{4}{x}},$$
$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt{x^2 + x} - x,$$
$$\lim_{x\to \infty} \frac{\sqrt{x-1} - 2x}{x - 7}.$$

1.2 Spojité funkce

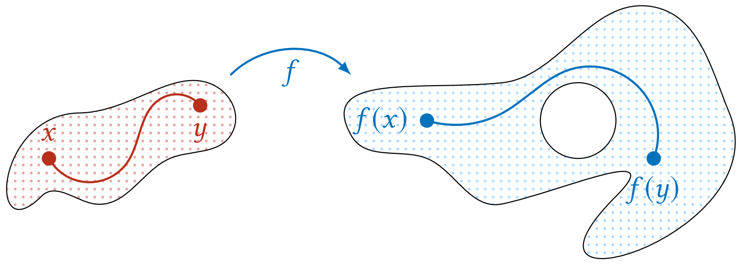
Vlastnost spojitosti funkce či zobrazení je zcela jistě tou nejdůležitější především v topologii (disciplíně zpytující „tvar“ prostoru), kde se vlastně s jinými zobrazeními než spojitými v obec nepracuje.

Intuitivně je zobrazení *spojité* v moment, kdy zobrazuje souvislé části prostoru na souvislé části prostoru. Souvislostí se zde myslí vlastnost konkrétní podmnožiny prostoru (třeba $\mathbb{R}^n$), kdy z každého bodu do každého jiného bodu existuje cesta (křivka v prostoru), která tuto podmnožinu neopustí (obrázek 1.6).



Obrázek 1.6: Souvislá podmnožina $\mathbb{R}^2$.

Spojité zobrazení lze tudíž definovat tím způsobem, že dva obrazy lze vždy spojit křivkou, která neopouští obraz souvislé podmnožiny obsahující jejich vzory. Jednodušeji, spojité zobrazení nesmí „roztrhnout“ souvislou podmnožinu prostoru, i když do ní může například „udělat díry“.



Obrázek 1.7: Spojité zobrazení $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

V první dimenzi je situace pochopitelně výrazně jednodušší. Souvislou podmnožinou $\mathbb{R}$ je *interval*, a tedy spojité zobrazení je takové, které zobrazuje interval na interval. Díry v intervalu zřejmě není možné dělat bez téhož kompletního roztržení. Takto se však, primárně z důvodův technických, spojité zobrazení obyčejně nedefinuje a vlastnost zachování intervalu dlužno dokázat.

Pojem limity funkce umožňuje definovat spojitou funkci jako tu, která se v každém bodě blíží ke své skutečné hodnotě, tj. nedělá žádné „skoky“.

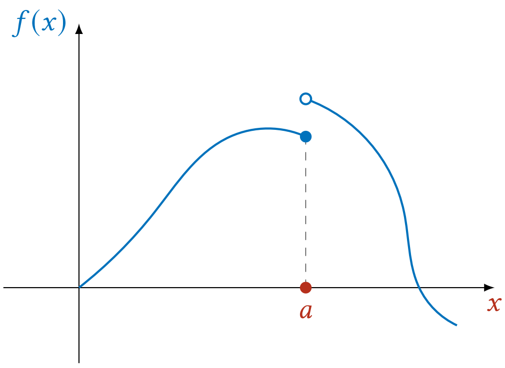
Definice 1.2.1 (Spojitá funkce)

Ať $a \in \mathbb{R}$. Řekneme, že reálná funkce f je *spojitá v bodě a*, pokud

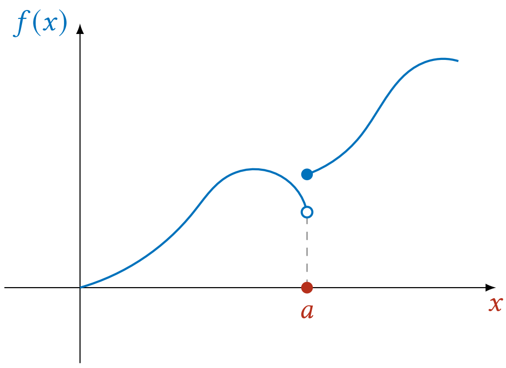
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Poznámka 1.2.2 (Jednostranně spojitá funkce)

Obdobně předchozí definici tvrdíme, že funkce f je *spojitá zleva, resp. zprava, v bodě* $a \in \mathbb{R}$, pokud $\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$, resp. $\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Ona funkce je pak spojitá v bodě a, když je v a spojitá zleva i zprava.



(a) Funkce f spojitá zleva (ale ne zprava) v bodě a.



(b) Funkce f spojitá zprava (ale ne zleva) v bodě a.

Obrázek 1.8: Jednostranná spojitost

Definice 1.2.3 (Funkce spojitá na intervalu)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že reálná funkce f je *spojitá na* I, je-li

- spojitá v každém vnitřním bodě I,
- spojitá zprava v levém krajním bodě I, pokud tento leží v I a
- spojitá zleva v pravém krajním bodě I, pokud tento leží v I.

Nyní se jmeme dokázat, že spojité funkce na intervalu (souvislé množině) mají skutečně ony přirozené vlastnosti, jimiž jsme je popsali v úvodu do této sekce. Konkrétně dokážeme, že spojité funkce zobrazují interval na interval. K tomu poslouží ještě jedno pomocné tvrzení, známé též pod přespříliš honosným názvem „Bolzanova věta o nabývání mezihodnot".

Věta 1.2.4 (Bolzanova)

Nechť f je reálná funkce spojitá na $[a, b]$ a $f(a) < f(b)$. Potom pro každé $y \in (f(a), f(b))$ existuje $x \in (a, b)$ takové, že $f(x) = y$.

Důkaz. Ať je $y \in (f(a), f(b))$ dáno. Označme

$$M \coloneqq \{z \in [a, b] \mid f(z) < y\}.$$

Ukážeme, že množina M má konečné supremum. K tomu potřebujeme ověřit, že je neprázdná a shora omezená. Protože $f(a) < y$, jistě $a \in M$. Podobně, jelikož $y < f(b)$, je b horní závorou M. Existuje tedy $\sup M$, které označíme S. Jistě platí $S \in (a, b)$. Ukážeme, že $f(S) = y$ vyloučením možností $f(S) < y$ a $f(S) > y$.

Ať nejprve $f(S) < y$. Protože f je z předpokladu spojitá (čili $\lim_{c \to S} f(c) = f(S) < y$), existuje $\varepsilon > 0$ takové, že pro každé $c \in (S, S + \varepsilon)$ platí $f(c) < y$. To je ovšem spor s tím, že S je horní závorou M. Nutně tedy $f(S) \geq y$.

Ať nyní $f(S) > y$. Opět ze spojitosti f nalezneme $\varepsilon > 0$ takové, že pro $c \in (S - \varepsilon, S)$ platí $f(c) > y$. Dostáváme spor s tím, že S je **nejmenší** horní závorou M.

Celkem vedly obě ostré nerovnosti ke sporu, tudíž $f(S) = y$ a důkaz je hotov. ■

Důsledek 1.2.5

Ať $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce spojitá na intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Pak $f(I)$ je interval.

Důkaz. Volme $y_1, y_2 \in f(I), y_1 < y_2$.

Protože $y_1, y_2 \in f(I)$, existují $x_1, x_2 \in I$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Bez újmy na obecnosti předpokládejme, že $x_1 < x_2$. Potom z Bolzanovy věty pro každé $y \in (f(x_1), f(x_2))$ existuje $z \in (x_1, x_2)$ takové, že $f(z) = y$. Potom však z definice $y \in f(I)$, a tedy je $f(I)$ interval. ■

1.3 Hlubší poznatky o limitě funkce

Kapitolu o limitách funkcí dovršíme několika – v dalším textu zásadními – tvrzeními. Některá z nich se vížou na pojem spojitosti funkce, některá nikoliv. Ukážeme si rovněž souvislost limit funkcí s limitami posloupností; uzříme, že je to v jistém širém smyslu týž koncept.

Nejprve se pozastavíme nad chováním limit funkcí vzhledem k jejich skládání. Je vskutku velmi přirozené – má-li funkce g limitu A v bodě a a funkce f limitu B v bodě A, pak $f \circ g$ má limitu B v bodě a, jak by jeden čekal. Toto tvrzení má však své předpoklady; pro libovolné dvě funkce pravdivé není.

Věta 1.3.1 (Limita složené funkce)

Ať $a, A, B \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou reálné funkce. Nechť navíc platí

$$\lim_{x \to a} g(x) = A \quad a \quad \lim_{y \to A} f(y) = B.$$

*Je-li splněna **aspoň jedna** z podmínek:*

(R) existuje prstencové okolí a, na němž platí $g \neq A$;

(S) funkce f je spojitá v A,

pak

$$\lim_{x \to a} (f \circ g)(x) = B.$$

Důkaz. Důkaz tvrzení není příliš obtížný, ovšem poněkud technický a alfabeticky tíživý. Potřebujeme ukázat, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že všechna $x \in R(a, \delta)$ splňují $f(g(x)) \in B(B, \varepsilon)$. Nechť je tedy $\varepsilon > 0$ dáno.

Předpokládejme, že platí (R) a máme $\eta > 0$, pro něž $g(x) \neq A$, kdykoli $x \in R(a, \eta)$. Ježto platí $\lim_{y \to A} f(y) = B$, existuje k danému $\varepsilon > 0$ číslo $\delta_f > 0$ takové, že pro $y \in R(A, \delta_f)$ platí $f(y) \in B(B, \varepsilon)$. K tomuto $\delta_f > 0$ pak existuje $\delta_g > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta_g)$ platí $g(x) \in B(A, \delta_f)$. Volíme-li nyní $\delta \coloneqq \min(\eta, \delta_g)$, pak pro $x \in R(a, \delta)$ platí

$$g(x) \in B(A, \delta_f) \quad \text{i} \quad g(x) \neq A,$$

kteréžtě dvě podmínce dávajíta celkem $g(x) \in B(A, \delta_f) \setminus \{A\} = R(a, \delta_f)$. Potom však pro $x \in R(a, \delta)$ platí $g(x) \in R(A, \delta_f)$, tudíž $f(g(x)) \in B(B, \varepsilon)$, jak jsme chtěli.

Ať naopak platí (S). Pak smíme pro spojitost f v A ve výroku

$$\forall y \in R(A, \delta_f) : f(y) \in B(B, \varepsilon)$$

místo prstencového okolí $R(A, \delta_f)$ brát plné okolí $B(A, \delta_f)$, neboť $f(A) = \lim_{y \to A} f(y) = B \in B(B, \varepsilon)$. Protože pro $x \in R(a, \delta_g)$ však platí $g(x) \in B(A, \delta_f)$, máme rovněž $f(g(x)) \in B(B, \varepsilon)$, čímž je důkaz hotov. ■

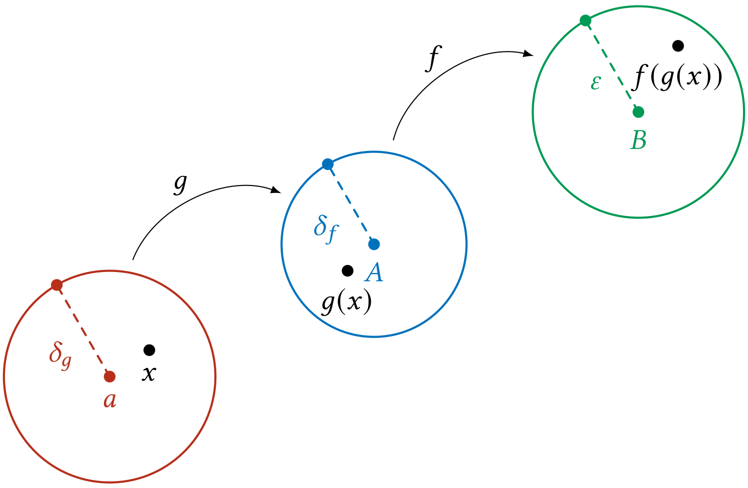
Varování 1.3.2

Platnost aspoň jedné z podmínek (R),(S) v předchozí větě je nezanedbatelná.

Vezměme $f(y) = |\operatorname{sgn} y|$ a $g(x) = 0$. Potom platí

$$\lim_{y\to 0} f(y) = 1 \quad \text{a} \quad \lim_{x\to 0} g(x) = 0,$$

ale $\lim_{x\to 0}(f \circ g)(x) = 0 \neq 1$. Závěr předchozí věty je v tomto případě neplatný pro to, že neexistuje okolí a, na němž $g \neq 0$ (tj. neplatí (R)), ani není f spojitá v 0 (tj. neplatí (S)).



Obrázek 1.9: Důkaz věty o limitě složené funkce.

Pokračujeme vztahem limit posloupností a limit funkcí. Ukazuje se, že limitu funkce možno v principu nahradit limitou posloupnosti jejích funkčních hodnot. Toto tvrzení je zvlášť užitečné při důkazu *neexistence* oné limity. Stačí totiž najít dvě posloupnosti, funkční hodnoty jejichž členů se blíží k rozdílným číslům či kterákolivěk z nich neexistuje.

Věta 1.3.3 (Heineho)

Ať f je reálná funkce a $a, L \in \mathbb{R}^*$. Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

(1) $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

(2) Pro ***každou*** *posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ takovou, že*

- $\lim_{n\to\infty} x_n = a$;
- $x_n \neq a$ *pro každé* $n \in \mathbb{N}$,

platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

Důkaz. Dokážeme nejprve (1) $\Rightarrow$ (2). Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Potřebujeme najít $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \geq n_0$ je $|f(x_n) - L| < \varepsilon$. Uvědomme si, že poslední výrok je ekvivalentní

$$L - \varepsilon < f(x_n) < L + \varepsilon,$$

neboli $f(x_n) \in B(L, \varepsilon)$. Z toho, že $\lim_{x\to a} f(x) = L$, existuje $\delta > 0$ takové, že všechna $x \in R(a, \delta)$ splňují $f(x) \in B(L, \varepsilon)$. Ježto $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, existuje k tomuto $\delta > 0$ index $n_0 \in \mathbb{N}$

takový, že

$$\forall n \geq n_0 : |x_n - a| < \delta,$$

neboli $x_n \in B(a, \delta)$. Předpokládáme ovšem, že $x_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, a tedy $x_n \in R(a, \delta)$, kdykoli $n \geq n_0$. Potom ale pro $n \geq n_0$ rovněž $f(x_n) \in B(L, \varepsilon)$, čili $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$.

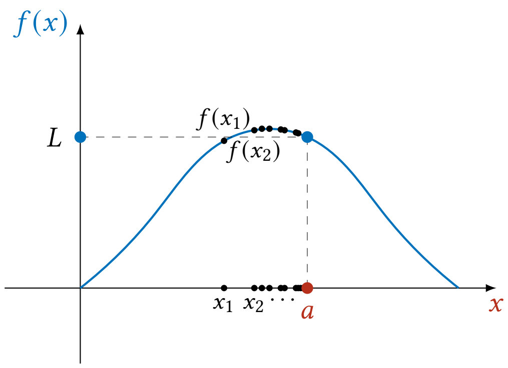
Místo přímého důkazu (2) $\implies$ (1) (který je zdlouhavý), dokážeme $\neg(1) \implies \neg(2)$. Předpokládejme tedy, že $\lim_{x\to a} f(x)$ buď neexistuje, nebo není rovna L. Chceme najít posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, která konverguje k a, žádný její člen není roven a, ale přesto $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ opět buď neexistuje, nebo není rovna L.

Uvědomíme si nejprve přesně, jak zní **negace** výroku $\lim_{x\to a} f(x) = L$. Tvrdíme, že

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in R(a, \delta) : f(x) \text{ není definováno} \lor f(x) \notin B(L, \varepsilon).$$

Nalezněme tedy ono $\varepsilon > 0$ z výroku výše. Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ existuje $x_n \in R(a, 1/n)$ pro které $f(x_n)$ není definováno, nebo neleží v $B(L, \varepsilon)$. Vlastně jsme ve výroku výše položili $\delta \coloneqq 1/n$ postupně pro každé $n \in \mathbb{N}$. Sestrojili jsme pročež posloupnost x_n takovou, že $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ a $x_n \neq a$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Nicméně, jak jsme psali výše, pro každé x_n buď $f(x_n)$ není definováno, nebo neleží v $B(L, \varepsilon)$. To ovšem znamená, že $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ buď neexistuje, nebo není rovna L. Platí tudíž předpoklady v (2), ale nikoli závěr v (2), tj. platí $\neg(2)$.

Tím je důkaz hotov. ■



Obrázek 1.10: Tvrzení (2) v Heineho větě.

Důsledek 1.3.4 (Heineho věta pro spojitost)

Ať $a \in \mathbb{R}^*$ a f je reálná funkce. Následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(1) *Funkce f je spojitá v bodě a.*

(2) *Pro každou posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ s limitou $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ platí $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Důkaz. Zkrátka použijeme Heineho větu pro $L = f(a)$. Poznamenejme pouze, že podmínka $x_n \neq a$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ je zde zbytečná, neboť f je z předpokladu spojitá v a. ■

Příklad 1.3.5

V zájmu nabytí představy, jak se Heineho věta používá pro důkaz neexistence limity funkce, budeme drze předpokládat, že čtenáři byli již seznámeni s funkcí $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$. Její formální debut dlí v kapitole o elementárních funkcích.

Ukážeme, že limita $\lim_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje. Volme posloupnosti

$$x_n \coloneqq 2\pi n \quad \text{a} \quad y_n \coloneqq 2\pi n + \pi/2.$$

Pak platí $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ i zřejmě $x_n \neq \infty$ a $y_n \neq \infty$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Jsou proto splněny předpoklady tvrzení (2) z Heineho věty. Platí však

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sin(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n) = 0,\\
\lim_{n\to\infty} \sin(y_n) &= \lim_{n\to\infty} \sin(2\pi n + \pi/2) = 1,
\end{aligned}$$

a tedy jsme našli dvě posloupnosti, funkční hodnoty jejichž členů konvergují k různým číslům. Podle Heineho věty $\lim_{x\to\infty} \sin x$ neexistuje.

Podobně jako monotónní posloupnosti mají vždy limitu (vizte lemma ??), stejně tak monotónní funkce ji vždy mají. Tento přirozený pojem briskně představíme. Řčeme, že reálná funkce f je *monotónní na intervalu* $I \subseteq \mathbb{R}$, když

($<$) je f *rostoucí*, tj. $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$,

($>$) je f *klesající*, tj. $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$,

($\leq$) je f *neklesající*, tj. $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$ nebo

($\geq$) je f *nerostoucí*, tj. $\forall x, y \in I : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$.

Věta 1.3.6 (Limita monotónní funkce)

Ať $(a, b) \subseteq \mathbb{R}^*$ a f je monotónní na (a, b). Potom,

(1) jsouc f rostoucí nebo neklesající má limity

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \inf f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \sup f((a, b));$$

(2) jsouc f klesající nebo nerostoucí má limity

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \sup f((a, b)) \quad a \quad \lim_{x\to b^-} f(x) = \inf f((a, b)).$$

Důkaz. Dokážeme pouze část (1), důkaz (2) je totožný.

Budeme nejprve předpokládat, že f je zdola omezená a označíme $m \coloneqq \inf f((a, b)) \in \mathbb{R}$. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Z definice infima nalezneme $y \in f((a, b))$ takové, že $y < m + \varepsilon$. Jelikož $y \in f((a, b))$, existuje $x \in (a, b)$, že $f(x) = y$. Z toho, že f je neklesající či rostoucí plyne, že pro každé $z \in (a, x)$ je $f(z) \leq f(x) = y$.

Nalezneme $\delta > 0$ takové, že $R_+(a, \delta) = (a, a + \delta) \subseteq (a, x)$. Potom ale pro $z \in R_+(a, \delta)$ platí $f(z) \leq y < m + \varepsilon$. Ježto nerovnost $f(z) > m - \varepsilon$ je zřejmá (m je dolní závora f), máme celkem pro $z \in R_+(a, \delta)$

$$m - \varepsilon < f(z) < m + \varepsilon,$$

čili $f(z) \in B(m, \varepsilon)$, jak bylo dokázati.

Ať nyní f není zdola omezená na (a, b). Pak $\inf f(a, b) = -\infty$ a pro každé $\varepsilon > 0$ nalezneme $z \in (a, b)$, pro nějž $f(z) < -1/\varepsilon$. To ovšem z definice znamená, že $\lim_{x \to a^+} f(x) = -\infty = \inf f((a, b))$.

Důkaz faktu, že $\lim_{x \to b^-} f(x) = \sup f((a, b))$ lze vést obdobně. ■

Cvičení 1.3.7

Dokažte bod (2) ve větě 1.3.6.

1.3.1 Extrémy funkce

V mnoha matematických i externích disciplínách jeden často hledá při studiu reálných funkcí body, v nichž je hodnota funkce největší či nejmenší. Obecně jsou maximalizační a minimalizační problémy jedny z nejčastěji řešených. Tyto problémy vedou přímo na výpočet tzv. *derivací* reálných funkcí, jsoucích dychtivým čtenářům představeny v následující kapitole. Zde pouze definujeme lokální a globální extrémy funkcí a ukážeme, že spojité funkce na uzavřených intervalech nutně na týchž nabývají svých nejmenších i největších hodnot.

Definice 1.3.8 (Lokální a globální extrém)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce a $X \subseteq M$. Řekneme, že funkce f v bodě $x \in X$ nabývá

- *globálního maxima* na X, když pro každé $y \in X$ platí $f(y) \leq f(x)$;
- *globálního minima* na X, když pro každé $y \in X$ platí $f(y) \geq f(x)$;
- *lokálního maxima*, když existuje okolí bodu x, na němž platí $f \leq f(x)$;
- *lokálního minima*, když existuje okolí bodu x, na němž platí $f \geq f(x)$.

Souhrnně přezdíváme globálnímu minimu a maximu *globální extrém* a lokálnímu maximu a minimu *lokální extrém*.

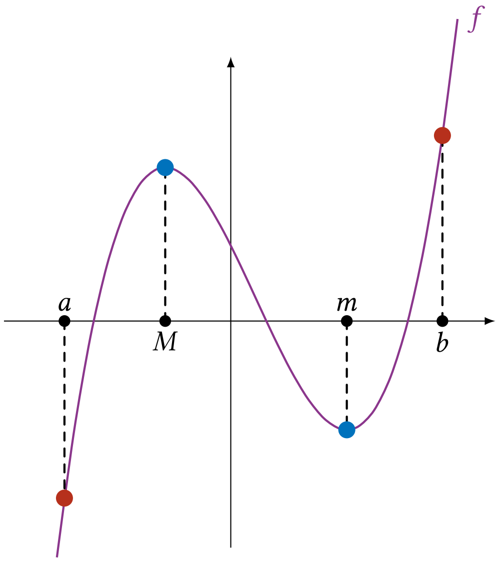
Jak jsme již zmínili v textu před definicí, spojité funkce nabývají na uzavřených intervalech globálních extrémů vždy.

Věta 1.3.9 (Extrémy spojité funkce)

Ať $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce. Pak f nabývá globálního minima a maxima na $[a, b]$.

Důkaz. Dokážeme, že f nabývá na $[a, b]$ globálního maxima. Pro globální minimum lze důkaz vést obdobně.

Využijeme důsledku 1.3.4. Nalezneme posloupnost, která se uvnitř intervalu $f([a, b])$ blíží k supremu funkce f na $[a, b]$ a ukážeme, že vzory členů této posloupnosti z intervalu $[a, b]$ se blíží k bodu, kde f nabývá maxima.



Obrázek 1.11: Lokální a globální extrémy funkce f na $[a,b]$. Lokálních extrémů nabývá f v bodech m a M a globálních extrémů v bodech a a b.

Položme tedy $S \coloneqq \sup f([a,b])$. Sestrojíme posloupnost $y : \mathbb{N} \to f([a,b])$, která konverguje k S. Je-li $S = \infty$, stačí položit třeba $y_n = n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že $S \in \mathbb{R}$. Z definice suprema existuje pro každé $n \in \mathbb{N}$ prvek $z \in f([a,b])$ takový, že $S - 1/n < z \leq S$. Položíme $y_n \coloneqq z$. Tím jsme dali vzrůst posloupnosti y_n s $\lim_{n\to\infty} y_n = S$.

Z definice $f([a,b])$ nalezneme pro každé y_n číslo $x_n \in [a,b]$, pro něž $f(x_n) = y_n$. Posloupnost x_n je omezená (leží uvnitř $[a,b]$), a tedy z Bolzanovy-Weierstraßovy věty existuje její konvergentní podposloupnost. Můžeme pročež bez újmy na obecnosti předpokládat, že sama x_n konverguje. Položme $M \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_n$. Ježto $a \leq x_n \leq b$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, z lemmatu ?? plyne, že $M \in [a,b]$. Konečně, f je z předpokladu spojitá, a tedy v závěsu důsledku 1.3.4

$$f(M) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n = S,$$

čili f nabývá v bodě M maxima na $[a,b]$. ■

Důsledek 1.3.10

Je-li funkce f spojitá na $[a,b]$, pak je tamže omezená.

Důkaz. Z věty 1.3.9 plyne, že f nabývá na $[a,b]$ minima s a maxima S. Potom ale pro každé $x \in [a,b]$ platí

$$s \leq f(x) \leq S,$$

čili f je na $[a,b]$ omezená. ■

1.4 Pár příkladů na konec

Účelem této „přiložené" sekce je ukázat na dvou zajímavých příkladech obvyklé metody práce s limitami funkcí. Doufáme, že čtenářům dobře pomůže uchápění tohoto tématu, snad náročnějšího k vnětí než limity posloupností a součty řad.

Příklad 1.4.1

Ať g je rostoucí a spojitá funkce na $[1, \infty)$ s $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$ a f je **nekonstantní periodická** funkce na $\mathbb{R}$. Pak $\lim_{x \to \infty} (f \circ g)(x)$ neexistuje.

Pro důkaz neexistence limity máme (pochopitelně kromě samotné definice) zatím pouze dva nástroje – jednostranné limity a Heineho větu. Protože limitním bodem je ∞, použití jednostranných limit není možné. Zkusíme tedy Heineho větu.

Nejprve si uvědomíme, že z důsledku 1.2.5 je $g([1, \infty))$ je interval. Tento navíc není shora omezen, bo $\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$. Na oba tyto fakty se budeme vícekrát odvolávat. Označme rovněž písmenem $p > 0$ periodu funkce f.

Položme nyní $x_0 \coloneqq 1$ a označme $y_0 \coloneqq g(x_0)$, $A \coloneqq f(y_0)$. Induktivně sestrojíme posloupnosti $x : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ a $y : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Předpokládejme, že jsou dány členy $x_0, \ldots, x_k$ a $y_0, \ldots, y_k$, kde $y_i = g(x_i)$ pro každé $i \leq k$. Položíme $y_{k+1} \coloneqq y_k + p$. Potom $f(y_{k+1}) = f(y_k)$. Protože $g([1, \infty)) = [y_0, \infty)$ a $y_{k+1} > y_0$, nalezneme $x_{k+1} \in [1, \infty)$ takové, že $g(x_{k+1}) = y_{k+1}$. Jelikož g je rostoucí a

$$g(x_{k+1}) = y_{k+1} > y_k = g(x_k),$$

rovněž $x_{k+1} > x_k$. Celkem máme $x_{n+1} > x_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, čili $\lim_{n \to \infty} x_n = \infty$. Rovněž

$$\lim_{n \to \infty} (f \circ g)(x_n) = \lim_{n \to \infty} f(y_n) = \lim_{n \to \infty} A = A,$$

neboť členy posloupnosti y jsou od sebe vzdáleny o periodu p funkce f.

Konečně, nalezneme jinou posloupnost $\tilde{x} : \mathbb{N} \to [1, \infty)$ takovou, že $\lim_{n \to \infty} (f \circ g)(\tilde{x}_n) \neq A$, čímž završíme důkaz. Volme libovolné $0 < \varepsilon < p$. K tomuto ε nalezneme $\delta > 0$ takové, že

$$|g(x_0 + \delta) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

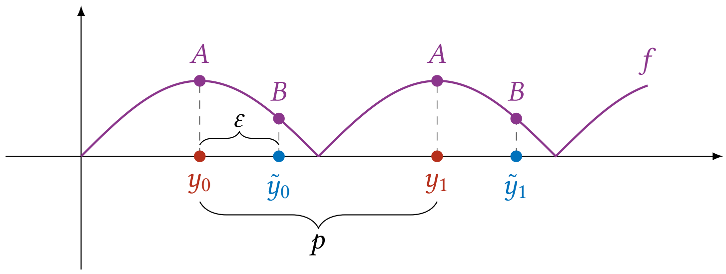
Toto δ vskutku existuje pro to, že g je rostoucí – tudíž $g(x_0 + \delta) > g(x_0)$ – a spojitá – tudíž dvě různé funkční hodnoty lze volit nekonečně blízké.

Položíme $\tilde{x}_0 \coloneqq x_0 + \delta$ a $\tilde{y}_0 \coloneqq g(\tilde{x}_0)$. Potom $f(\tilde{y}_0) = B \neq A$, ježto $\tilde{y}_0 \in (y_0, y_0 + p)$. Podobně jako dříve sestrojíme posloupnost $\tilde{x}_n$ takovou, že $\lim_{n \to \infty} \tilde{x}_n = \infty$ a $(f \circ g)(\tilde{x}_n) = B$ pro každé $n \in \mathbb{N}$.

Potom ale platí

$$\lim_{n \to \infty} (f \circ g)(\tilde{x}_n) = B \neq A = \lim_{n \to \infty} (f \circ g)(x_n),$$

čili z Heineho věty $\lim_{x \to \infty} (f \circ g)(x)$ neexistuje.



Obrázek 1.12: Posloupnosti y a $\tilde{y}$ z příkladu 1.4.1.

Příklad 1.4.2 (Singularity funkce)

Ať $a \in M$ a $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce definovaná aspoň na prstencovém okolí bodu a. Předpokládejme, že f není spojitá v a. Pak řekneme, že f má v a

- **odstranitelnou singularitu**, když existuje konečná $\lim_{x \to a} f(x)$. V tomto případě můžeme dodefinovat $f(a) \coloneqq \lim_{x \to a} f(x)$;
- **pól**, když existují $\lim_{x \to a^+} f(x)$ a $\lim_{x \to a^-} f(x)$, ale nejsou si rovny;
- **neodstranitelnou singularitu**, když aspoň jedna z jednostranných limit f v bodě a neexistuje.

Singularity funkcí tvoří důležitou část komplexní analýzy, kde poskytují obraz zejména o stabilitě fyzikálních systému popsaných těmito funkcemi. *Odstranitelné singularity* jsou velmi stabilní a většinou způsobeny pouze chybami v měření. *Póly* jsou stabilní při vhodné aproximaci, avšak v grafu komplexních funkcí jedné proměnné vypadají vlastně jako nekonečné stále se zúžující tuby. Lze si je představovat například jako Gabrielův roh. Vhodnou aproximací je zde uříznutí tohoto tělesa ve zvolené „výšce“. Konečně, *neodstranitelné singularity* jsou vskutku neodstranitelné. Dokonce platí věta, že komplexní funkce jedné proměnné s neodstranitelnou singularitou nabývají **úplně všech** hodnot z $\mathbb{C}$ na libovolně malém okolí této singularity. Menší stability již dosáhnout nelze. Neodstranitelné singularity si, tvrdíme, nelze ani rozumně představit.

Ukážeme, že aspoň pro funkce jedné *reálné* proměnné, jimiž se v tomto textu zabýváme, jsou množiny všech odstranitelných singularit i pólů spočetné.

K důkazu prvního tvrzení uvažme množiny

$$A \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{t \to x} f(t) < f(x)\} \quad \text{a} \quad B \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{t \to x} f(t) > f(x)\}.$$

Platí, že množina odstranitelných singularit f je rovna $A \cup B$. Zjevně tedy stačí dokázat, že každá z obou množin je spočetná. Provedeme onen důkaz pro množinu A, pro B lze vést analogicky.

Protože jsou $\mathbb{Q}$ hustá v $\mathbb{R}$, nalezneme pro každé $x \in A$ racionální číslo $r_x \in \mathbb{Q}$ takové, že

$$\lim_{t \to x} f(t) < r_x < f(x).$$

Pak platí $A = \bigcup_{r \in \mathbb{Q}} A_r$, kde

$$A_r = \{x \in A \mid r_x = r\}.$$

Dokážeme, že každá z množin A_r je spočetná. Volme $r \in \mathbb{Q}$. Protože $\lim_{t\to x} f(t) < r$ pro každé $x \in A_r$, nalezneme δ_x takové, že pro $t \in R(x, \delta_x)$ platí $f(t) < r$. Dále nahlédneme, že pro každé $x \neq y \in A_r$ platí

$$(x - \frac{1}{2}\delta_x, x + \frac{1}{2}\delta_x) \cap (y - \frac{1}{2}\delta_y, y + \frac{1}{2}\delta_y) = \emptyset.$$

Pro spor ať platí opak. Nalezneme $x \neq y \in A_r$ taková, že $|x - y| < \delta_x/2 + \delta_y/2$. Jest-li $\delta_x \leq \delta_y$, pak $|x - y| \leq \delta_y$, čili $f(x) < r_y = r$, neboť $x \in P(y, \delta_y)$. Z definice r_x však také $f(x) > r_x = r$, což je spor. Případ $\delta_x > \delta_y$ vede rovněž ke sporu na základě obdobného argumentu. Odtud plyne, že A_r je spočetná, bo každý bod A_r má kolem sebe okolí, v němž neleží žádné jiné body A_r. To mimo jiné znamená, že bodů A_r je nejvýše tolik, jak racionálních čísel, tj. spočetně. Ježto $A = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} A_r$, je i A spočetná.

Nyní dokážeme, že f má i spočetně pólů. Definujme opět množiny

$$U \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{t\to x^-} f(t) < \lim_{t\to x^+} f(t)\},$$
$$V \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid \lim_{t\to x^-} f(t) > \lim_{t\to x^+} f(t)\}.$$

Množina pólů funkce f je rovna $U \cup V$. Je třeba ukázat, že každá z množin U, V je spočetná. Důkaz pro U bude zjevně symetrický důkazu pro V, budeme se tudíž zabývat pouze množinou U. Pro každé $x \in U$ nalezneme $r_x \in \mathbb{Q}$ takové, že

$$\lim_{t\to x^-} f(t) < r_x < \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Pak jistě $U = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}} U_r$, kde

$$U_r \coloneqq \{x \in U \mid r_x = r\}.$$

Ukážeme, že každá $U_r, r \in \mathbb{Q}$, je spočetná. Pro každé $x \in U_r$ nalezneme $\delta_x > 0$ takové, že

$$\forall t \in R_-(x, \delta_x) : f(t) < r,$$
$$\forall t \in R_+(x, \delta_x) : f(t) > r.$$

Podobně jako v důkazu spočetnosti množiny odstranitelných singularit lze snadno ukázat, že

$$(x, x + \delta_x) \cap (y - \delta_y, y) = \emptyset$$

pro každá dvě $x \neq y \in U_r$, z čehož plyne, že U_r – a posléze i U – je spočetná.

Kapitola 2

Derivace

Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávejte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.

Derivace funkce je vlastně „velikost změny“ funkce v daný okamžik. Takový pojem se může zdát dost neintuitivní – „Jak se může cosi měnit v jeden okamžik?“ – ale vskutku se s ním setkáváme běžně a divné nám to ani nepřijde.

Kupříkladu rychlost je derivací polohy, tj. představuje velikost změny polohy v čase. Když automobilový tachometr ukazuje, že jedeme rychlostí 60 km/h, co to přesně znamená? Jak si mám představit, že *teď* se moje poloha mění o 60 kilometrů v rámci jedné hodiny? Jeden způsob vnímání dlí v obraze, že za příští hodinu urazím 60 km. Jako hrubá aproximace snad postačuje, ale je snad zřejmé, že pokud se moje rychlost během oné hodiny mění, změní se i výsledně uražená vzdálenost.

Mnoho lidí, kteří se dívají za jízdy na tachometr, si pravděpodobně neuvědomuje, že rychlost jízdy je limitní pojem. Fakt, že *přesně v tuto chvíli* jedu například právě 60 km/h znamená, že čím menší zlomek jedné hodiny nahlédnu do budoucnosti (či do minulosti), tím blíže bude velikost změny mojí polohy odpovídající zlomek 60 km. Za předpokladu, že moje rychlost není konstantní, nebude tato změna nikdy dokonale taková. Tudíž, vím-li, že se pohybuji rychlostí 60 km/h, nevím toho v principu mnoho. Nabývám tím pouze práva tvrdit, že se zmenšujícím se časovým rozdílem mezi přítomností a jistým okamžikem v budoucnu (či v minulu) klesá i rozdíl mezi skutečně překonanou vzdáleností a tou odpovídající uvedené rychlosti.

Formalizace *velikosti okamžité změny* není užitím pojmu limity funkce nikterak obtížná. Před formální definicí si ji ukážeme na příkladě z předšedších odstavců. Ať je moje poloha v čase daná funkcí $p : [0, 1] \to \mathbb{R}$, kde $p(0)$ je moje poloha na začátku cesty a $p(1)$ na jejím konci. Zanedbáme pro jednoduchost fakt, že polohu určuje pouze jediné reálné číslo místo své příslušné vícedimenzionální varianty.

Co přesně myslíme rychlostí změny? Napovědí již použité jednotky – km/h. *Změna polohy* je zde rozdíl výsledné polohy od nynější za daný čas. Pro daný čas $t \in [0, 1]$, pak *změna polohy* v tomto čase za danou dobu $h \in [0, 1]$ je

$$z_t(h) = \frac{p(t+h) - p(t)}{h}.$$

Vskutku, ať například $t = 0$, tedy jsem na začátku cesty, třeba na třicátém kilometru dálnice, čili $p(0) = 30$. Pojedu jednu hodinu. V půli cesty se podívám na postranní milník a vidím, že jsem na stém kilometru téže dálnice, čili $p(1/2) = 100$. Urazil jsem tudíž za půl hodiny přesně 70 km. Z těchto údajů soudím, že byla-li by moje rychlost konstantní, urazil bych 140 km za jednu hodinu. Vyjádřeno pomocí funkce změny, mám

$$z_0(1/2) = \frac{p(0+1/2) - p(0)}{1/2} = \frac{100-30}{1/2} = 140.$$

Velikost okamžité změny funkce p v daném čase t bude pročež limita uvedené funkce z, jak se bude doba h blížit 0.

Odstavce výše shrneme v následujících definicích.

Definice 2.0.1 (Funkce změny)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. *Funkcí změny* f v bodě $a \in M$ myslíme funkci $z_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ danou předpisem

$$z_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Definice 2.0.2 (Derivace funkce)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. *Derivací*, nebo též *funkcí okamžité změny*, funkce f v bodě $a \in M$ myslíme limitu

$$\lim_{h \to 0} z_a(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pokud tato existuje. V takovém případě ji značíme $f'(a)$.

Poznámka 2.0.3 (Jednostranné derivace)

Podobně lze rovněž definovat derivaci funkce f v bodě a zleva, resp. zprava, jako

$$\lim_{h \to 0^-} z_a(h), \ \text{resp.} \ \lim_{h \to 0^+} z_a(h).$$

Intuitivně tato aproximuje, jak se funkce f před okamžikem měnila, resp. bude za okamžik měnit. Přirozeně, derivace funkce existuje právě tehdy, když existují jednostranné derivace a jsou si rovny.

Přirozená substituce vede na alternativní vzorec pro výpočet $f'(a)$.

Lemma 2.0.4 (Alternativní vzorec derivace)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ a $a \in M$. Pak $f'(a)$ existuje právě tehdy, když existuje

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a v tomto případě se rovnají.

Důkaz. Dokážeme implikaci ($\Rightarrow$). Ať existuje $f'(a)$. Položme

$$F(h) := \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

tj. $\lim_{h\to 0} F(h) = f'(a)$, a rovněž

$$g(x) = x - a.$$

Pak platí $\lim_{x\to a} g(x) = 0$ a g je na okolí a prostá. Z věty o limitě složené funkce platí

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} F(h) = \lim_{x\to a} (F \circ g)(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pro důkaz ($\Leftarrow$) předpokládejme, že existuje

$$L := \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Položme

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a $g(h) = h + a$. Pak $\lim_{x\to a} F(x) = L$, $\lim_{h\to 0} g(h) = a$ a g je prostá na okolí a. Opět z věty o limitě složené funkce dostaneme rovnost

$$L = \lim_{x\to a} F(x) = \lim_{h\to 0} (F \circ g)(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a),$$

což zakončuje důkaz. ■

Úloha 2.0.5 (Derivace konstantní funkce)

Ať $f(x) = c \in \mathbb{R}$ pro každé $x \in M$. Dokažte, že pak platí $f'(a) = 0$ pro každé $a \in M$.

Řešení. Platí

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{0}{x - a} = 0,$$

jak jsme chtěli. ♠

Úloha 2.0.6 (Derivace polynomu)

Ať $f(x) := x^n$, kde $n \in \mathbb{N}$. Dokažte, že $f'(a) = na^{n-1}$.

Řešení. Počítáme

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{x^n - a^n}{x - a}.$$

Snadno ověříme, že platí

$$x^n - a^n = (x - a)\left(\sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i}\right).$$

Z čehož ihned

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i},$$

a tedy

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\sum_{i=0}^{n-1}x^i a^{n-i}=\sum_{i=0}^{n-1}a^i a^{n-i}=\sum_{i=0}^{n-1}a^{n-1}=na^{n-1},$$

což bylo dokázati. ♠

Cvičení 2.0.7

Dokažte, že derivace funkce $f(x)=|x|$ v bodě 0 neexistuje.

Cvičení 2.0.8

Připomeňme, že funkce *signum* je definována následovně.

$$\operatorname{sgn}(x)\coloneqq\begin{cases}1, & \text{když } x>0,\\ 0, & \text{když } x=0,\\ -1, & \text{když } x<0.\end{cases}$$

Dokažte, že $\operatorname{sgn}'(0)=\infty$.

Lemma 2.0.9 (Vztah derivace a spojitosti)

*Ať $f: M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, $a \in M$ a existuje **konečná** $f'(a)$. Pak je f v bodě a spojitá.*

Důkaz. Jelikož $f'(a)$ existuje konečná, z věty o aritmetice limit plyne, že

$$\lim_{x\to a}f'(a)\cdot(x-a)=0.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\cdot(x-a)=\lim_{x\to a}f(x)-f(a)=0,$$

z čehož ihned

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a),$$

čili f je spojitá v a. ■

Varování 2.0.10

Předpoklad nejen existence, ale i **konečnosti** derivace ve znění lemmatu 2.0.9 nelze vynechat. Z cvičení 2.0.8 plyne, že $\operatorname{sgn}'(0)$ existuje, ale funkce sgn zcela jistě není v bodě 0 spojitá.

2.1 Základní poznatky o derivaci

Tato sekce shrnuje základní tvrzení, která činí z výpočtu derivací překvapivě silně algoritmický proces, přirozeně za předpokladu znalosti derivací jistých „běžných“ funkcí.

Začneme tím, jak se derivace chová vzhledem ke součtu, součinu a podílu funkcí.

Věta 2.1.1 (Aritmetika derivací)

Ať $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a $a \in M$. Pak platí

(1) $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$, *dává-li pravá strana smysl;*

(2) $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$, *dává-li pravá strana smysl, g je spojitá v a a platí $g(a) \neq 0$;*

(3) $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^2(a)}$, *dává-li pravá strana smysl a f/g je spojitá v a.*

Důkaz. Podobně jako tomu bylo i v případě věty o aritmetice limit, je důkaz tohoto tvrzení zdlouhavý a výpočetní. Důkaz bodu (1) je triviální a bodu (2) snadný; jsou pročež přenechány čtenáři. Dokážeme bod (3).

Protože f/g je z předpokladu spojitá v a, nalezneme $\delta > 0$ takové, že g je nenulová na $B(a, \delta)$. Pro $x \in B(a, \delta)$ počítáme

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\
&= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\
&= \frac{1}{g(x)g(a)} \left((f(x) - f(a))g(a) - f(a)(g(x) - g(a)) \right).
\end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \to a} \frac{1}{x-a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} \right) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) - f(a) \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) \\
&= \lim_{x \to a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left(\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} g(a) - \lim_{x \to a} f(a) \frac{g(x)-g(a)}{x-a} \right) \\
&= \frac{1}{g^2(a)} \left(f'(a)g(a) - f(a)g'(a) \right),
\end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ■

Cvičení 2.1.2

Dokažte body (1) a (2) ve větě 2.1.1.

Věta 2.1.3 (Derivace složené funkce)

Ať g je spojitá v bodě $a \in \mathbb{R}$ a má v tomto bodě derivaci. Nechť f má derivaci v bodě $g(a)$. Potom

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$$

Důkaz. Zdlouhavý a výpočetní. Přeskočíme. ■

Věta 2.1.4 (Derivace inverzní funkce)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá a rostoucí či klesající na I. Pak pro bod a ve vnitřku I platí:

(1) Je-li $f'(a) \neq 0$, potom $(f^{-1})'(f(a)) = 1/f'(a)$;

(2) je-li $f'(a) = 0$, potom $(f^{-1})'(f(a)) = \infty$, když f je rostoucí, a $f^{-1}(f'(a)) = -\infty$, když f je klesající.

Důkaz. Předpokládejme, že f je rostoucí. Pro klesající funkci lze důkaz vést obdobně.

Protože f je spojitá, je z Bolzanovy věty $J \coloneqq f(I)$ interval. Dále, ježto a leží ve vnitřku I, leží rovněž $f(a)$ ve vnitřku J. Existuje pročež $\varepsilon > 0$ takové, že $B(f(a), \varepsilon) \subseteq J$. Dále, f je rostoucí, tedy speciálně prostá, takže existuje $f^{-1} : J \to I$, která je (ze spojitosti f) rovněž spojitá.

Volme nyní $\delta > 0$ tak, aby $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$ a pro $x \in B(a, \delta)$ definujme

$$\varphi(x) \coloneqq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pak přirozeně $\lim_{x \to a} \varphi(x) = f'(a)$. Díky prostotě f^{-1} na $B(f(a), \varepsilon)$ lze díky větě o limitě složené funkce počítat

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{y \to f(a)} (\varphi \circ f^{-1})(y) \\ &= \lim_{y \to f(a)} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y \to f(a)} \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - a}. \end{aligned} \tag{$\heartsuit$}$$

Předpokládejme nejprve, že $f'(a) \neq 0$. Pak z věty o aritmetice limit platí

$$\frac{1}{f'(a)} = \lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - a}{y - f(a)} = \lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = (f^{-1})'(f(a)).$$

Nyní ať $f'(a) = 0$. Pak díky ($\heartsuit$) máme

$$\lim_{y \to f(a)} \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y \to f(a)} \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))} = 0.$$

Funkce

$$\psi(y) \coloneqq \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}$$

je na okolí $R(f(a), \varepsilon)$ kladná, neboť f^{-1} je rostoucí – a tedy $y - f(a) > 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a)) > 0$. Podle tvrzení 1.1.8 platí

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y \to f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y \to f(a)} \frac{1}{\psi(y)} = \infty,$$

což zakončuje důkaz. ■

Úloha 2.1.5

Dokažte, že derivací funkce $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ na intervalu $(0, \infty)$ je $x \mapsto \sqrt[n]{x}/nx$, kde $\mathbb{N} \ni n \geq 1$.

Řešení. Funkce $f(x) = \sqrt[n]{x}$ je jistě spojitá a rostoucí na $(0, \infty)$. Její inverzní funkcí je rovněž rostoucí a spojitá $f^{-1}(y) = y^n$, jejíž derivací je $(f^{-1})'(y) = ny^{n-1}$. Podle věty o derivaci inverzní funkce platí pro $x \in (0, \infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{nf^{n-1}(x)} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx},$$

jak jsme chtěli. ♠

Sekci zakončíme vztahem derivaci k extrémům původní funkce, který hraje stěžejní roli mimo jiné v optimalizačních problémech, bo často vedou na hledání minima/maxima jisté funkce.

Tvrzení 2.1.6 (Vztah derivace a extrému)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ má v $a \in M$ lokální extrém. Pak $f'(a)$ buď neexistuje, nebo je nulová.

Důkaz. Dokážeme kontrapozitivní formu tvrzení. Budeme předpokládat, že $f'(a)$ existuje a je různá od nuly. Z toho odvodíme, že f nemá v a lokální extrém.

Ať nejprve $f'(a) > 0$. Pak existuje okolí $R(a, \delta)$, na němž platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Odtud plyne, že $f(x) < f(a)$ pro $x \in (a - \delta, a)$ a $f(x) > f(a)$ pro $x \in (a, a + \delta)$, čili f nemá v a lokální extrém. Případ $f'(a) < 0$ se ošetří obdobně. ■

Varování 2.1.7

Radíme čtenářům, by sobě všimli, že předchozí tvrzení je ve formě *implikace*. Tedy, **má-li** funkce f v bodě a **extrém, pak** $f'(a) = 0$, nebo tato neexistuje. Rovnost $f'(a) = 0$ ani neexistence derivace v bodě a ještě nezaručují, že f má v bodě a jakýkoli extrém.

Jako protipříklad stačí jednoduchá funkce $f(x) = x^3$. Zřejmě $f'(x) = 3x^2$, která je rovna 0 pro $x = 0$, ale x^3 nemá v 0 ani lokální extrém.

Cvičení 2.1.8

Nalezněte lokální i globální extrémy funkce $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 4$.

2.2 Věty o střední hodnotě

Spojitá funkce, jež ve dvou různých bodech nabývá stejných hodnot, musí mít na nějakém místě mezi těmito body konstantní růst – přestat růst a začít klesat či přestat klesat a začít růst. Spojitá funkce musí někde mezi libovolnými dvěma body mít tečnu rovnoběžnou k úsečce spojující odpovídající body v grafu této funkce. Stejný závěr platí i pro spojitou křivku v prostoru.

Tato tvrzení souhrnně slují *věty o střední hodnotě*. Přestože je jejich geometrický význam lákavý, samy o sobě mnoha účelům neslouží. Jejich důležitost dlí spíše v rozvoji další teorie derivací. Formulujeme a dokážeme si je.

Věta 2.2.1 (Rolleova věta o střední hodnotě)

Ať $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, $f(a) = f(b)$ a f má derivaci v každém bodě (a, b). Pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Podle věty 1.3.9 nabývá f na $[a, b]$ svého minima m a maxima M. Pak zřejmě

$$m \le f(a) \le f(b) \le M. \tag{$*$}$$

Pokud $m = M$, pak je f konstantní na $[a, b]$, a tudíž $f'(c) = 0$ dokonce pro všechna $c \in (a, b)$.

Předpokládejme, že $m < M$. Pak musí být aspoň jedna z nerovností v ($*$) ostrá. Bez újmy na obecnosti, ať $f(b) < M$. Ať $c \in (a, b)$ je takové, že $f(c) = M$. Dle předpokladu nabývá f v bodě c maxima na $[a, b]$, a tedy podle tvrzení 2.1.6 platí $f'(c) = 0$. V případě, kdy $m < f(a)$ postupujeme obdobně. ■

Věta 2.2.2 (Lagrangeova o střední hodnotě)

Ať $a < b$ a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá na $[a, b]$ majíc derivaci v každém bodě (a, b). Potom existuje c takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Důkaz. Převedeme problém na použití Rolleovy věty. Definujme funkci

$$g(x) \coloneqq f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Potom je g spojitá na $[a, b]$, má derivaci v každém bodě (a, b) a platí $g(a) = g(b)$. Z Rolleovy věty plyne, že existuje $c \in (a, b)$ takové, že $g'(c) = 0$. Tato rovnost rozepsána znamená, že

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

čili

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

jak jsme chtěli. ■

Poznámka 2.2.3

Lagrangeova věta říká, že v jistém bodě $c \in (a, b)$ musí být derivace f v bodě c rovna směrnici přímky spojující body $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$.

Důsledek 2.2.4 (Vztah derivace a monotonie)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce majíc v každém bodě (a, b) kladnou, resp. zápornou, derivaci. Pak je f rostoucí, resp. klesající, na I.

Důkaz. Volme $[a, b] \subseteq I$ libovolně a předpokládejme, že f' je kladná na I. Podle Lagrangeovy věty existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ježto $f'(c) > 0$, plyne odtud, že $f(b) > f(a)$. Čili f je rostoucí na $[a, b]$. Jelikož $a < b \in I$ byla volena libovolně, je f rostoucí na I. Případ $f' < 0$ na I se ošetří analogicky. ■

Cvičení 2.2.5

Použijte důsledek 2.2.4 k důkazu, že spojitá funkce $f : I \to \mathbb{R}$ mající nulovou derivaci na I, je konstantní.

Věta 2.2.6 (Cauchyho o střední hodnotě)

Ať f, g jsou spojité funkce na $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, f má v každém bodě (a, b) derivaci a g má v každém bodě (a, b) ***konečnou nenulovou*** *derivaci. Potom $g(a) \neq g(b)$ a existuje $c \in (a, b)$ takové, že*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Důkaz. Z Lagrangeovy věty plyne existence $d \in (a, b)$ takového, že

$$g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Jelikož z předpokladu $g'(d) \neq 0$, rovněž $g(b) \neq g(a)$.

Opět převedeme problém na Rolleovu větu. Definujme funkci

$$\varphi(x) \coloneqq (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)).$$

Pak je φ spojitá na $[a, b]$ (neboť f a g jsou tamže spojité) a má v každém bodě (a, b) derivaci – to plyne z věty o aritmetice derivací a faktu, že f i g mají na (a, b) derivaci.

Navíc, $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Z Rolleovy věty existuje $c \in (a, b)$ splňující $\varphi'(c) = 0$. Platí

$$0 = \varphi'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Odtud úpravou

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

což zakončuje důkaz. ■

Poznámka 2.2.7

Cauchyho věta říká, že křivka v rovině $t \mapsto (f(t), g(t))$ má v jistém bodě $c \in (a, b)$ derivaci rovnou směrnici přímky spojující body $(f(a), g(a))$ a $(f(b), g(b))$.

Poznámka 2.2.8

Uvědomme si, že Lagrangeova věta je speciálním případem Cauchyho věty pro $g(x) = x$ a Rolleova věta je zase speciálním případem Lagrangeovy věty, když $f(a) = f(b)$. Ovšem, k důkazu jak Lagrangeovy věty, tak Cauchyho věty, jsme použili téměř výhradně Rolleovu větu. Jedná se pročež o vzájemně ekvivalentní tvrzení, ač to tak na první pohled nevypadá.

2.3 l'Hospitalovo pravidlo

Výpočet limit podílu funkcí patří k nejčastějším úlohám matematické analýzy. Limita podílu funkcí totiž v principu porovnává, o kolik je jedna funkce na okolí tohoto bodu větší než druhá. Je pročež základem aproximace funkcí na okolí bodu mnohem hezčími (například polynomiálními) funkcemi, jak bude vidno v kapitole o Taylorově polynomu. Následující věta – všeobecně známa pod jménem *l'Hospitalovo pravidlo* – že limita podílu funkcí je (za jistých volných podmínek) rovna limitě podílu rychlosti jejich růstu.

Věta 2.3.1 (l'Hospitalovo pravidlo)

Ať $a \in \mathbb{R}^*$, $f, g : M \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a existuje $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Jestliže platí buď

(a) $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, *nebo*

(b) $\lim_{x\to a} |g(x)| = \infty$,

pak

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Položme $L \coloneqq \lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$. Budeme postupovat vcelku přirozeně – sevřeme podíl $f(x)/g(x)$ pro vhodná x v nekonečně malém intervalu (α, β) okolo L. Ačkoli idea je tato přímočará, její realizace je mírně technická. Pro přehlednost povedeme důkaz přes následující pomocné lemma.

Lemma (pomocné)

(1) Pro každé $\alpha > L$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in R(a, \delta) : \frac{f(x)}{g(x)} < \alpha.$$

(2) Pro každé $\beta < L$ existuje $\delta > 0$ takové, že

$$\forall x \in R(a, \delta) : \frac{f(x)}{g(x)} > \beta.$$

Důkaz. Dokážeme část (1), důkaz (2) je analogický.

Ať je $\alpha > L$ dáno. Volme $r \in (L, \alpha)$. Díky předpokladu existence limity $\lim_{x\to a} f'(x)/g'(x)$ existuje okolí $R(a, \delta_1)$ takové, že f i g jsou definovány na $R(a, \delta_1)$, f má tamže konečnou derivaci a g konečnou nenulovou derivaci. Navíc lze δ_1 volit dostatečně malé, aby

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r \quad \forall x \in R(a, \delta_1).$$

Volme libovolná $x < y \in R(a, \delta_1)$. Podle Cauchyho věty existuje $c \in (x, y)$ splňující

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)}.$$

Potom tedy pro každý pár $x < y \in R(a, \delta_1)$ platí

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} < r.$$

Předpokládejme nyní, že platí podmínka (a) ve znění věty, tj. předpokládejme rovnosti

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Pak pro fixní $y \in (a, a + \delta_1)$ dostaneme

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f(y)}{g(y)} \leq r < \alpha$$

a pro $\tilde{y} \in (a - \delta_1, a)$ zase

$$\lim_{x \to a} \frac{f(\tilde{y}) - f(x)}{g(\tilde{y}) - g(x)} = \frac{f(\tilde{y})}{g(\tilde{y})} \leq r < \alpha.$$

Celkově tedy nerovnost $f(y)/g(y) < \alpha$ platí pro každé $y \in R(a, \delta_1)$.

Konečně, ať platí podmínka (b), tj. $\lim_{x \to a} |g(x)| = \infty$. Volme pevné $\tilde{y} \in (a, a + \delta_1)$. Pak

$$\lim_{x \to a} r \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} = r \cdot (1 - 0) + 0 = r < \alpha.$$

Existuje tudíž $\delta_2 \in (0, \delta_1)$ takové, že pro každé $x \in (a, a + \delta_2)$

$$r \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha.$$

Navíc, díky podmínce (b) lze volit δ_2 dostatečně malé, aby

$$\frac{g(\tilde{y})}{g(x)} < 1 \quad \forall x \in (a, a + \delta_2).$$

Pro $x \in (a, a + \delta_2)$ počítejme

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\
&= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \cdot \frac{g(x) - g(\tilde{y})}{g(x)} + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} \\
&= \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)}.
\end{aligned}$$

Můžeme odhadnout

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(\tilde{y})}{g(x) - g(\tilde{y})} \left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < r\left(1 - \frac{g(\tilde{y})}{g(x)}\right) + \frac{f(\tilde{y})}{g(x)} < \alpha.$$

Podobně dokážeme i rovnost $f(x)/g(x) < \alpha$ v případě, kdy x je z vhodného levého prstencového okolí a.

Jelikož důkaz části (b) je zcela symetrický, je pomocné lemma dokázáno. ■

Důkaz (věty 2.3.1). Je-li $L = -\infty$, resp. $L = \infty$, pak tvrzení plyne ihned z části (1), resp. části (2), *pomocného lemmatu.*

Ať $L \in \mathbb{R}$. Volme $\varepsilon > 0$ a pro $\alpha \coloneqq L + \varepsilon$ nalezněme z *pomocného lemmatu*, části (1), $\delta > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta)$ platí $f(x)/g(x) < \alpha$. Podobně nalezněme, z *pomocného lemmatu* části (2) pro $\beta \coloneqq L - \varepsilon$, číslo $\delta' > 0$ takové, že pro $x \in R(a, \delta')$ platí $f(x)/g(x) > \beta$. Pak ale pro $x \in R(a, \min(\delta, \delta'))$ máme

$$\frac{f(x)}{g(x)} \in (\beta, \alpha) = (L - \varepsilon, L + \varepsilon),$$

čili $\lim_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. ■

Použití l'Hospitalova pravidla pro výpočet limit ponecháme do kapitoly o elementárních funkcích.

Kapitola 3

Elementární funkce

Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávejte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.

Jisté speciální funkce v matematické analýze si vysloužily přízvisko *elementární*. Původ jejich speciality je ryze fyzikální. Jsou to funkce, jejich prostřednictvím fyzikové modelují mnoho přírodních jevů a pojmů – růst, vlnění, proud, gravitaci, úhel …

Ježto fyzikální model světa radno ponechati do textů menší náročnosti, soustředit se budeme pouze na prezentaci těchto funkcí a důkazy jejich základních vlastností.

Všechny elementární funkce definujeme jako součty nekonečných řad. V tomto textu jsme se nezabývali pramnoho konvergencí řad s libovolnými členy. Všechna tvrzení, která tímto směrem budeme vyžadovat, zformulujeme, ač nedokážeme.

3.1 Exponenciála a logaritmus

První na seznamu je *exponenciála* – funkce spojitého růstu. Toto pojmenování ještě níže odůvodníme. Nyní přikročíme k definici. Pro stručnost zápisu, budeme v následujícím textu používat konvenci, že $0^0 = 1$.

Definice 3.1.1 (Exponenciála)

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\exp x \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Jak jsme čtenáře vystříhali, musíme nyní na krátkou chvíli odbočit k číselným řadám, abychom uměli v obec dokázat, že právě definovaná exponenciála je skutečně reálnou funkcí.

Definice 3.1.2 (Absolutní konvergence řady)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je číselná řada, kde $a_n \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolutně konverguje*, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Lemma 3.1.3

Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Důkaz. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m \geq n \geq n_0$ platí

$$\left|\sum_{k=n}^{m} |a_k|\right| = \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon.$$

Potom ale z trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon,$$

čili $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje. ∎

Definice 3.1.4 (Cauchyho součin řad)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou číselné řady. Jejich *Cauchyho součinem* myslíme číselnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Věta 3.1.5 (Mertensova)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní *číselné řady, přičemž $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je navíc absolutně konvergentní. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ konverguje a platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Věta 3.1.6 (Vlastnosti exponenciály)

Funkce exp *je dobře definována a platí*

(E1) $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$;

(E2) $\lim_{x \to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 0$.

Důkaz. *Dobrá definovanost* zde znamená, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} x_n/n!$ konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že konverguje absolutně. Je-li $x = 0$, pak řada konverguje zřejmě. Volme tedy $x \in$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

čili podle věty ?? řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x^n|/n!$ konverguje, což znamená, že konverguje i $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$.

Dokážeme vlastnost (E1). Počítáme

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}y^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{x^{n-k}y^k}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{y^k}{k!}.\end{aligned}$$

Všimněme si, že poslední řada je Cauchyho součinem řad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ a $\sum_{n=0}^{\infty} y^n/n!$. Protože jsou obě tyto řady (podle výše dokázaného) absolutně konvergentní, platí z Mertensovy věty

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!}\frac{y^k}{k!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \exp x \cdot \exp y.$$

Nyní vlastnost (E2). Pro $x \in (-1,1)$ odhadujme

$$\begin{aligned}\left|\frac{\exp x - 1}{x} - 1\right| &= \left|\frac{\exp x - 1 - x}{x}\right| = \frac{1}{|x|}\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - x - 1\right| = \frac{1}{|x|}\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \\ &= |x|\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!}\right| \le |x|\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\right| = c \cdot |x|,\end{aligned}$$

kde $c > 0$ je hodnota součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$, která zjevně konverguje (například díky nerovnosti $1/n! \le 1/n^2$). Jelikož $\lim_{x\to 0} c \cdot |x| = 0$, plyne odtud ihned, že

$$\lim_{x\to 0} \left|\frac{\exp x - 1}{x} - 1\right| = 0,$$

z čehož zase

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Tím je důkaz završen. ■

Ihned si odvodíme další vlastnosti exponenciály plynoucí z (E1) a (E2). Postupně dokážeme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí následující.

(E3) $\exp 0 = 1$;

(E4) $\exp' x = \exp x$;

(E5) $\exp(-x) = 1/\exp(x)$;

(E6) $\exp x > 0$;

(E7) exp je spojitá na $\mathbb{R}$;

(E8) exp je rostoucí na $\mathbb{R}$;

(E9) $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$;

(E10) $\operatorname{im} \exp = (0, \infty)$.

Z (E1) platí $\exp(0 + x) = \exp 0 \cdot \exp x$. Protože zřejmě existuje $x \in \mathbb{R}$, pro něž $\exp x \neq 0$, plyne odtud $\exp 0 = 1$, tj. vlastnost (E3).

Pro důkaz (E4) počítáme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp h \cdot \exp x - \exp h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\exp h - 1)\exp x}{h}$$
$$= \exp x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\exp h - 1}{h} = \exp x \cdot 1 = \exp x,$$

kde jsme v červené rovnosti použili vlastnost (E1) a v modré zas vlastnost (E2).

Pokračujeme vlastností (E5). Z (E1) máme

$$\exp(x + (-x)) = \exp x \cdot \exp(-x).$$

Protože z (E3) je $\exp(x + (-x)) = \exp 0 = 1$, dostáváme

$$1 = \exp x \cdot \exp(-x),$$

čili

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

Ježto má řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ zjevně kladný součet pro $x > 0$, plyne (E6) přímo z právě dokázané (E5).

Vlastnost (E7) je okamžitým důsledkem vlastnosti (E4), díky níž má exp konečnou derivaci na $\mathbb{R}$, a tudíž je podle lemmatu 2.0.9 tamže spojitá.

Vlastnost (E8) je důsledkem vlastností (E4) a (E6), neboť funkce majíc na intervalu (v tomto případě celém $\mathbb{R}$) kladnou derivaci, je na tomto intervalu – podle důsledku 2.2.4 – rostoucí.

Platí $\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} > 1$, čili z vlastnosti (E1) plyne, že exp není shora omezená, neboť $\exp(x + 1) = \exp x \cdot \exp 1 > \exp x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. To spolu s vlastnostmi (E7) a (E8) dává $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$. Dále, použitím (E5),

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{x\to\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp x} = 0,$$

což dokazuje (E9).

Konečně, vlastnost (E10) plyne z (E9) a Bolzanovy věty.

Příklad 3.1.7

V úvodu do této sekce jsme nazvali exponenciálu „funkcí spojitého růstu“. Tuto intuici nyní částečně formalizujeme. Dalšího pohledu nabudeme po definici obecné mocniny.

Uvažme následující přímočarý populační model. V čase $t \in (0, \infty)$ je počet jedinců dán funkcí $P(t)$. Množství nově narozených jedinců závisí pouze na počtu právě žijících a na konstantě $r \in [0, \infty)$ – zvané *reproduction rate* – která značí, kolik nových jedinců se narodí za jednoho právě živého. Vnímáme-li derivaci $P'(t)$ jako *rychlost růstu* populace v čase t, pak dostáváme diferenciální rovnici

$$P'(t) = r \cdot P(t),$$

jelikož v čase t se podle našeho modelu narodí r jedinců za každého živého. Díky vlastnosti (E4) vidíme, že například funkce $P(t) = \exp(rt)$ řeší rovnici výše. Teorii diferenciálních rovnic v tomto textu probírat nebudeme, bez důkazu však zmíníme, že řešení takto triviálních rovnic až na konstantu určena jednoznačně. V tomto jednoduchém populačním modelu je tudíž počet živých jedinců v čase t dán funkcí $t \mapsto \exp(rt)$.

Na závěr si dokážeme jeden možná překvapivý fakt, že vlastnosti (E1) a (E2) již určují funkci exp jednoznačně.

Věta 3.1.8 (Jednoznačnost exponenciály)

Existuje právě jedna funkce definovaná na celém $\mathbb{R}$ splňující (E1) a (E2).

Důkaz. Existenci jsme dokázali konstruktivně. Dokážeme jednoznačnost. Ať $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje (E1) a (E2). Ukážeme, že $f = \exp$.

Z úvah výše plyne, že f splňuje rovněž vlastnosti (E3) - (E10), protože k jejich důkazu byly použity pouze (E1) a (E2). Platí tedy $f(0) = 1$ a $f'(x) = f(x)$. Jelikož $\exp x \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, máme z věty o aritmetice derivací

$$\left(\frac{f}{\exp}\right)'(x) = \frac{f'(x)\exp x - f(x)\exp' x}{\exp^2 x} = \frac{f(x)\exp x - f(x)\exp x}{\exp^2 x} = 0.$$

Podle cvičení 2.2.5 je $f/\exp$ konstatní funkce, čili existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x)/\exp x = c$ pro každé $c \in \mathbb{R}$. Dosazením $x = 0$ zjistíme, že $c = f(0)/\exp 0 = 1$, čili $c = 1$ a $f = \exp$. ■

3.1.1 Logaritmus

Jelikož je funkce exp spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$, má na celém $\mathbb{R}$ inverzní funkci, které přezdíváme *logaritmus* a značíme ji log. Z vlastností exp ihned plyne, že log je reálná funkce $(0, \infty) \to \mathbb{R}$. Na rozdíl od exp však log není dána číselnou řadou – aspoň ne pro všechna $x \in (0, \infty)$, více v kapitole o Taylorově polynomu.

Vlastnosti exponenciály nám rovnou umožňují do značné míry prozkoumat k ní inverzní funkci.

Tvrzení 3.1.9 (Vlastnosti logaritmu)

Pro každá $x, y \in (0, \infty)$ platí

(L1) $\log$ *je spojitá a rostoucí na* $(0, \infty)$*;*

(L2) $\log(xy) = \log x + \log y$*;*

(L3) $\log' x = 1/x$*;*

(L4) $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$ *a* $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$.

Důkaz.

(L1) Plyne ihned z faktu, že exp je spojitá a rostoucí.

(L2) Užitím vlastností exponenciály spočteme

$$xy = \exp(\log x) \cdot \exp(\log y) = \exp(\log x + \log y),$$

z čehož po aplikace log na obě strany rovnosti plyne

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

(L3) Podle věty o derivaci inverzní funkce platí

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

(L4) Protože $\operatorname{im} \log = \mathbb{R}$, není log zdola ani shora omezená. Z (L1) plyne kýžený závěr. ∎

3.1.2 Obecná mocnina

Užitím funkcí log a exp definujeme pro $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ výraz a^b předpisem

$$a^b \coloneqq \exp(b \cdot \log a).$$

Stojí za to věnovat krátkou chvíli ověření, že tato funkce odpovídá naší představě *mocniny* v případě, kdy $b = n \in \mathbb{N}$. Máme

$$a^n = \exp(n \cdot \log a) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \log a\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(\log(a)) = \prod_{k=1}^{n} a,$$

tedy a^n je vskutku a n-krát vynásobené samo sebou.

Varování 3.1.10

Uvědomme si, že a^b je definováno pouze pro $a \in (0, \infty)$. Pro $a \leq 0$ není tato funkce nad reálnými čísly rozumně definovatelná. Důvod je mimo jiné následující: pro n sudé a $a < 0$ je $a^n > 0$, ale $a^{n+1} < 0$. Tedy, měla-li by a^b být spojitá funkce, pak by pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $a < 0$ existovalo $\xi \in (n, n+1)$ takové, že $a^\xi = 0$. Mocninná funkce, jež je nulová pro nekonečně mnoho čísel je i pro matematiky zřejmě příliš divoká představa.

Poznamenejme však, že nad komplexními čísly je funkce log definována i pro záporná reálná čísla, tedy a^b dává – se stejnou definicí – smysl pro všechna $a, b \in \mathbb{C}$.

Z vlastností log a exp plynou ihned vlastnosti obecné mocniny. Jelikož její definice dává vzniknout **dvěma** reálným funkcím, konkrétně

$$f(x) = a^x \text{ pro } x \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad g(x) = x^b \text{ pro } x \in (0, \infty),$$

musíme tyto při zkoumání vlastností obecné mocniny pochopitelně rozlišovat. Aby nedošlo ke zmatení, budeme tyto funkce značit zkrátka jako $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto x^b$, kde $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ jsou fixní.

Tvrzení 3.1.11 (Vlastnosti obecné mocniny)

Pro všechna $a \in (0, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$ platí

(O1) *Funkce $x \mapsto a^x$ i $x \mapsto x^b$ jsou spojité na svých doménách.*

(O2) *Funkce $x \mapsto a^x$ je na celém $\mathbb{R}$*

- *rostoucí pro $a > 1$,*
- *konstantní pro $a = 1$,*
- *klesající pro $a < 1$.*

(O3) *Funkce $x \mapsto x^b$ je na $(0, \infty)$*

- *rostoucí pro $b > 0$,*
- *konstantní pro $b = 0$,*
- *klesající pro $b < 0$.*

(O4) $(x \mapsto a^x)' = (x \mapsto a^x \log a)$.

(O5) $(x \mapsto x^b)' = (x \mapsto bx^{b-1})$.

(O6) *Je-li*

- *$a > 1$, pak $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$;*
- *$a < 1$, pak $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ a $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$;*

(O7) *Je-li*

- *$b > 0$, pak $\lim_{x\to0^+} x^b = 0$ a $\lim_{x\to\infty} x^b = \infty$.*
- *$b < 0$, pak $\lim_{x\to0^+} x^b = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} x^b = 0$.*

(O8) $\log(a^b) = b \cdot \log a$.

Důkaz. Vlastnosti (O2), (O3), (O6) a (O7) dokážeme pouze v případě, že $a > 1$ a $b > 0$. Důkaz tvrzení v případech $a < 1$ a $b < 0$ plyne ihned z rovnosti $\exp(-x) = 1/\exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$.

(O1) Jelikož $a^b = \exp(b \log a)$ plyne spojitost obou funkcí ze spojitosti exp a log.

(O2) Platí $a^x = \exp(x \log a)$. Protože $a > 1$, je $\log a > 0$. Funkce exp je rostoucí, a tedy je rostoucí rovněž $a \mapsto a^x$.

(O3) Máme $x^b = \exp(b \log x)$. Jelikož je b z předpokladu kladné a log je rostoucí, je $x \mapsto x^b$ též rostoucí.

(O4) Počítáme

$$(a^x)' = (\exp(x\log a))' = \exp'(x\log a)\cdot(x\log a)' = \exp(x\log a)\cdot\log a = a^x\log a.$$

(O5) Opět počítáme

$$(x^b)' = (\exp(b\log x))' = \exp'(b\log x)\cdot(b\log x)' = \exp(b\log x)\cdot\frac{b}{x} = \frac{bx^b}{x} = bx^{b-1}.$$

(O6) Podobně jako v důkazu (O2) plyne z $a > 1$, že $\log a > 0$. Potom jsou ale limity v $\pm\infty$ funkce $a^x = \exp(x\log a)$ stejné jako tytéž limity funkce $\exp x$. Odtud tvrzení.

(O7) Jelikož je $b > 0$, máme z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to 0^+} x^b = \lim_{x\to 0^+}\exp(b\cdot\log x) = \lim_{y\to-\infty}\exp(b\cdot y) = 0,$$
$$\lim_{x\to\infty} x^b = \lim_{x\to\infty}\exp(b\cdot\log x) = \lim_{y\to\infty}\exp(b\cdot y) = \infty.$$

(O8) Jest

$$\log(a^b) = \log(\exp(b\cdot\log a)) = b\cdot\log a.$$

■

Příklad 3.1.12 (Exponenciála jako funkce růstu podruhé)

V příkladě 3.1.7 jsme slíbili čtenářům ještě jeden pohled na exponenciálu jako na funkci „spojitého" růstu. Uvažme následující obvyklý finanční model.

Naším prvotním vkladem na spořící účet je částka $P > 0$. Ve smlouvě k účtu je uvedeno, že z něj nesmíme vybírat po dobu pěti let za roční úrokové sazby 5 %. Tedy, každý rok se právě uložená částka na účtu zvýší o přesně 5 %. Když chceme vypočítat, kolik budeme mít na účtu za oněch pět let, stačí provést snadný výpočet

$$P\cdot 1.05\cdot 1.05\cdot 1.05\cdot 1.05\cdot 1.05 = P\cdot 1.05^5.$$

V zájmu rozšíření tohoto příkladu si zapíšeme tentýž výsledek jako

$$P\cdot(1+0.05)^5\,.$$

Tento model však předpokládá úročení uložené částky jednou ročně. Když bude však úročení probíhat například měsíčně, pak se roční úroková sazba samozřejmě rozdělí dvanácti, avšak výpočet úročení je rovněž třeba provést dvanáctkrát do roka. Finální částkou po pěti letech bude tudíž

$$P\cdot\left(\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{12}\right)^5 = P\cdot\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{60}.$$

S postupným zkracováním úrokového období se nabízí otázka, jaká by byla finální částka, kdyby se původní vklad úročil „nekonečněkrát" do roka, tj. uložená částka by se zvyšovala doslova v každém okamžiku (tedy „spojitě"). Odpovědí je výraz

$$\lim_{n\to\infty} P\cdot\left(1+\frac{0.05}{n}\right)^n.$$

Ukážeme, že touto limitou je hodnota funkce exp v bodě 0.05. Obecněji, spočteme, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp x. \tag{♠}$$

Výpočet je to v celku triviální. Z definice obecné mocniny a Heineho věty platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

Stačí tedy ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = x.$$

Užitím l'Hospitalova pravidla dostaneme (derivujeme podle n – to smíme opět díky Heineho větě)

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\cdot\frac{-x}{n^2}\cdot(-n^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n+x} = x.$$

Tím je rovnost (♠) dokázána.

3.2 Goniometrické funkce

Název „úhloměrné“ funkce je zastaralý a nepřesný. Funkce sin a cos, které se jmeme definovati, úspěšně modelují fyzikální jevy jakkoli související s vibrací či vlněním. Jak si brzy rozmyslíme, jsou to ve skutečnosti funkce v zásadě exponenciální. To by nemělo být na druhý pohled až tak překvapivé – vibrace jsou v zásadě jen periodicky se střídající růst a pokles.

Definice 3.2.1 (Goniometrické funkce)

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme funkce

$$\sin x \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos x \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Věta 3.2.2 (Vlastnosti goniometrických funkcí)

Funkce sin *a* cos *jsou dobře definované a splňují:*

(G1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x,$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y;$$

(G2) sin *je lichá a* cos *je sudá funkce;*

(G3) $\exists \pi \in \mathbb{R}$ *takové, že* $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \pi/2]$, $\sin(0) = 0$ *a* $\sin(\pi/2) = 1$.

(G4) $\sin'(0) = 1$.

K důkazu použijeme následující pomocné lemma.

Lemma (Pomocné)

Ať $x \in \mathbb{R}$. *Pak existuje* $C > 0$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a každé* $h \in (-1, 1)$ *platí nerovnost*

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq h^2 C^n.$$

Důkaz. Položme $C \coloneqq 2(|x| + 1)$. Pro $n = 1$ máme

$$|(x+h)^1 - x^1 - hx^0| = |x + h - x - h| = 0 \leq 2h^2(|x| + 1)$$

pro každé $h \in (-1, 1)$.

Pro $n \geq 2$ lze použít binomickou větu a počítat

$$(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k. \qquad (\triangle)$$

Protože $|x| + 1 \geq |x|$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, platí $(|x| + 1)^n \geq |x|^k$, kdykoli $k \leq n$. Rovněž, z předpokladu $|h| < 1$, a tedy naopak platí $|h|^k \leq |h|^n$ pro $k \leq n$. Užitím těchto nerovností a rovnosti ($\triangle$) můžeme odhadnout

$$\begin{aligned} |(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| &\leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^k \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (|x| + 1)^n h^2 \\ &\leq h^2 (|x| + 1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = h^2 (|x| + 1)^n 2^n = h^2 C^n, \end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ■

Důkaz (Věty 3.2.2). Je zřejmé, že řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

konvergují absolutně (použitím stejného argumentu jako v důkazu korektnosti exponenciály ve větě 3.1.6). Podle lemmatu 3.1.3 jsou obě řady rovněž konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$, což dokazuje dobrou definovanost obou funkcí.

Ukážeme nejprve, že $\sin' x = \cos x$. Volme pevné $x \in \mathbb{R}$. Pro $h \in (-1, 1)$ platí

$$\begin{aligned} \sin(x+h) - \sin x - h \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{hx^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left((x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n} \right). \end{aligned}$$

Z **pomocného lemmatu** nalezneme $C > 0$ takové, že

$$|(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n}| \leq C^{2n+1}h^2.$$

Pak

$$|\sin(x+h) - \sin x - h\cos x| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}h^2 = h^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} C^{2n+1}/(2n+1)!$ je konvergentní, a tedy

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{\sin(x+h) - \sin x - h\cos x}{h} \right| = 0,$$

z čehož ihned

$$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

Pro důkaz (G1) volme pevné $a \in \mathbb{R}$ a položme

$$\psi(x) \coloneqq (\sin(x+a) - \sin x \cos a - \sin a \cos x)^2 + (\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin a \sin x)^2.$$

Snadno spočteme, že $\psi'(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy je díky cvičení 2.2.5 ψ konstantní na $\mathbb{R}$. Dosazením dostaneme, že

$$\begin{aligned}
\sin(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0, \\
\cos(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n)!} = (-1)^0 \frac{0^0}{0!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n!)} = 1.
\end{aligned}$$

Díky těmto rovnostem spočteme $\psi(0) = 0$. Z toho, že ψ je konstantní, plyne, že $\psi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. To dokazuje obě rovnosti v (G1), neboť ψ je nulová funkce, jež je zároveň součtem čtverců, které musejí být tudíž oba nulové.

Vlastnost (G2) je vidět ihned z definice, neboť proměnná x se v definici sin objevuje pouze v liché mocnině a v definici cos pouze v sudé.

Vlastnost (G3) dokazovat nebudeme. Je výpočetně náročná a neintuitivní.

Již víme, že $\sin'(x) = \cos x$ a že $\cos(0) = 1$. Odtud (G4). ■

Poznámka 3.2.3

V úvodu jsme zmínili, že sin a cos jsou vlastně exponenciální funkce. Vskutku, když se jeden zadívá na jejich řady, vidí (až na znaménko $(-1)^n$ zařizující právě onen „růst a pokles“) v zásadě exponenciální funkci. Konkrétně, sin je rozdílem *lichých* částí exponenciály a cos těch *sudých*. Rozdělme $\exp x$ na čtyři části podle zbytku po dělení indexu n čtyřmi.

$$\exp x = \sum_{n \bmod 4 = 0} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \bmod 4 = 1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \bmod 4 = 2} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \bmod 4 = 3} \frac{x^n}{n!}$$

Označme tyto části $\exp_0$, $\exp_1$, $\exp_2$ a $\exp_3$. Všimněme si, že když $n \bmod 4 = a$, pak $n = 4k + a$

pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Čili například $\exp_2$ lze zapsat ve tvaru

$$\exp_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}$$

Tvrdíme, že $\sin = \exp_1 - \exp_3$ a $\cos = \exp_0 - \exp_2$. Vskutku, když je n liché, pak $2n+1 \bmod 4 = 3$ (protože $4 \nmid 2n$), a když je n sudé, tak $2n+1 \bmod 4 = 1$. Čili, pro n lichá je $2n+1$ tvaru $4k+3$ a pro n sudá zase tvaru $4k+1$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned} \exp_1(x) - \exp_3(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} \\ &= \sum_{n \text{ sudé}} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n \text{ liché}} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x, \end{aligned}$$

neboť $(-1)^n$ je rovno 1 pro n sudé a -1 pro n liché. Podobně odvodíme i vztah pro cos.

Definice 3.2.4 (Tangens a kotangens)

Definujeme goniometrické funkce tan a cot předpisy

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce tan je definována pro $x \neq n\pi + \pi/2$, kde je funkce cos nulová, a cot je definována pro x různé od násobků π.

Zformulujeme si několik vlastností funkcí tan a cot, ale dokazovat je nebudeme. Důkazy se významně neliší od již spatřených důkazů vlastností jiných elementárních funkcí.

Tvrzení 3.2.5 (Vlastnosti tangenty a kotangenty)

Platí:

(G5) tan *i* cot *jsou spojité na svých doménách;*

(G6) tan *i* cot *jsou liché;*

(G7) $\tan' x = 1/\cos^2 x$ *a* $\cot' x = -1/\sin^2 x$*;*

(G8) $\tan \frac{\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = 1$*;*

(G9) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$ *a* $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$.

(G10) $\lim_{x \to 0^+} \cot x = \infty$ *a* $\lim_{x \to \pi^-} \cot x = -\infty$.

(G11) tan *je rostoucí na* $(-\pi/2, \pi/2)$ *a* cot *je klesající na* $(0, \pi)$.

3.3 Limity elementárních funkcí

Tato sekce je věnována výpočtu limit, ve kterých figurují elementární funkce. Nejtěžšími (ale zároveň nejužitečnějšími) úlohami na vyřešení jsou limity racionálních kombinací (tj. součtů, násobků a především podílů) elementárních funkcí. Samotné řešení pak obvykle zahrnuje převod výrazu do tvaru, v němž lze naň uplatnit jisté „známé“ limity, případně použít l'Hospitalova pravidla.

Tvrzení 3.3.1 (Běžné limity)

Platí

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \tag{a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \tag{b}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1, \tag{c}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1. \tag{d}$$

Důkaz. K výpočtu všech limit lze použít l'Hospitalova pravidla. Máme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = \cos(0) = 1, \tag{a}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{(a)}{=} \frac{1}{2}, \tag{b}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp x}{1} = \exp(0) = 1, \tag{c}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{1} = 1. \tag{d}$$

Tím je důkaz hotov. ■

Aplikujeme nyní tvrzení 3.3.1 k výpočtu některých limit kombinací elementárních funkcí.

Úloha 3.3.2

Spočtěte

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log(\sqrt{1+x^2})}.$$

Řešení. Zřejmě platí

$$\lim_{x\to 0} \cos(\sin x) - 1 = \lim_{x\to 0} \log(\sqrt{1+x^2}) = 0,$$

je tedy třeba výraz nejprve upravit. l'Hospitalovo pravidlo zde pravděpodobně není vhodným prostředkem, neboť derivace obou funkcí jsou značně komplikované. Učiníme nejprve úpravu

$$\frac{\cos(\sin x) - 1}{\log(\sqrt{1+x^2})} = \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\log(\sqrt{1+x^2})}.$$

Protože $\lim_{x\to 0} \sin x/x = 1$, platí z věty o limitě složené funkce

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\sin^2 x} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos y - 1}{y^2} = -\frac{1}{2}.$$

Dále máme (z vlastností logaritmu)

$$\frac{\sin^2 x}{\log(\sqrt{1+x^2})} = \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{\frac{1}{2}\log(1+x^2)} = 2 \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^2}{\log(1+x^2)}.$$

Opět z věty o limitě složené funkce jest

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\log(1+x^2)} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\log(1+y)} = 1.$$

Celkem tedy,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{\log(\sqrt{1+x^2})} = 2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\log(1+x^2)} = 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 2.$$

Spolu s předchozím výpočtem dostaneme

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin x) - 1}{\log(\sqrt{1+x^2})} = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1.$$

♠

Před další úlohou spočteme další obecně užitečnou limitu.

Lemma 3.3.3

Pro každá $\alpha > 0, \beta > 0$ platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^\beta} = 0.$$

Důkaz. Protože $\lim_{x\to\infty} x^\beta = \infty$, použijeme l'Hospitalovo pravidlo. Dostaneme

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^\alpha x}{x^\beta} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\log^{\alpha-1} x \cdot \frac{1}{x}}{x^{\beta-1}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{\log^{\alpha-1} x}{x^\beta}.$$

Snadno nahlédneme, že se každým použitím l'Hospitalova pravidla mocnina u log sníží o 1 (dokud je větší než 0) a mocnina u x zůstane stejná. Nalezneme tedy $n \in \mathbb{N}$ takové, že $\alpha - n \in (-1, 0]$. Iterovaným použitím l'Hospitalova pravidla upravíme původní limitu na

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \alpha - i}{\beta^n} \cdot \frac{\log^{\alpha-n} x}{x^\beta} = \frac{\prod_{i=0}^{n-1} \alpha - i}{\beta^n} \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log^{n-\alpha} x \cdot x^\beta}.$$

Jelikož $n - \alpha \geq 0$ a $\beta > 0$, dostáváme, že

$$\lim_{x\to\infty} \log^{n-\alpha} x \cdot x^\beta = \lim_{x\to\infty} \log^{n-\alpha} x \cdot \lim_{x\to\infty} x^\beta = \infty,$$

z čehož již plyne dokazovaná rovnost. ■

Úloha 3.3.4

Spočtěte

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)} \cdot \log^2(1+x^3).$$

Řešení. Upravíme

$$\sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)} \cdot \log^2(1+x^3) = \frac{\sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{\sqrt{\frac{3}{x}}} \cdot \sqrt{\frac{3}{x}} \cdot \log^2(1+x^3).$$

Jelikož

$$\frac{\sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{\sqrt{\frac{3}{x}}} = \sqrt{\frac{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{3}{x}}}$$

a $\lim_{x\to\infty} 3/x = 0$, plyne z běžných limit a z věty o limitě složené funkce, že

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)}}{\sqrt{\frac{3}{x}}} = \sqrt{1} = 1.$$

Dále,

$$\sqrt{\frac{3}{x}} \cdot \log^2(1+x^3) = \frac{\log^2(1+x^3)}{\sqrt{\frac{x}{3}}} = \frac{\log^2(1+x^3)}{\sqrt[6]{1+x^3}} \cdot \frac{\sqrt[6]{1+x^3}}{\sqrt{\frac{x}{3}}}.$$

Podle předchozího lemmatu (a věty o limitě složené funkce) platí

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\log^2(1+x^3)}{\sqrt[6]{1+x^3}} = 0.$$

Jelikož

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[6]{1+x^3}}{\sqrt{\frac{x}{3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\sqrt[6]{\frac{1}{x^3}+1}}{\sqrt{x}\sqrt{\frac{1}{3}}} = \sqrt{3},$$

dostáváme celkem, že

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{\log\left(1+\frac{3}{x}\right)} \cdot \log^2(1+x^3) = 1 \cdot 0 \cdot \sqrt{3} = 0.$$

♠

Úloha 3.3.5

Spočtěte

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}}.$$

Řešení. Z definice obecné mocniny máme

$$\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)^{\frac{1}{x}} = \exp\left(\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)\right).$$

Spočteme

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)$$

a výslednou limitu dostaneme přes větu o limitě složené funkce.

Jelikož

$$\lim_{x\to 0^+}\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right) = \lim_{x\to 0^+} x = 0,$$

lze použít l'Hospitalovo pravidlo. Podle něj a vlastností obecné mocniny platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\frac{\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)}{x} &= \lim_{x\to 0^+}\frac{3}{4^x+5^x+6^x}\cdot\frac{4^x\log 4+5^x\log 5+6^x\log 6}{3}\\ &= \frac{3}{1+1+1}\cdot\frac{\log 4+\log 5+\log 6}{3} = \frac{\log 120}{3}.\end{aligned}$$

Nyní můžeme dopočíst

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\exp\left(\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)\right) &= \exp\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\cdot\log\left(\frac{4^x+5^x+6^x}{3}\right)\right)\\ &= \exp\left(\frac{\log 120}{3}\right) = 120 - \exp 3.\end{aligned}$$

♠

Cvičení 3.3.6 (Pár limit elementárních funkcí)

Spočtěte následující limity.

$$\lim_{x\to 3\pi/2}(4x^2-9\pi^2)\frac{\cos x}{1+\sin x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(\arctan x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to\infty}\arcsin\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\exp\left(\frac{\sin x}{2}\right)-\cos(\sqrt{x})}{\log^2(1+\sqrt{x})} \qquad \lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{\exp 2-\exp 2x}}{\arccos x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x}\sin x}{\exp(x^2)-1}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(1-\sqrt{\arcsin x}\right)^{\frac{1}{\sqrt[4]{1-\cos x}}} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2} \qquad \lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\cot^2 x}$$

Kapitola 4

Taylorův polynom

Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávejte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.

Polynomy jsou hezké funkce. Dají se donekonečna derivovat – všechny tyto derivace jsou navíc spojité – pomocí Hornerova schématu se snadno počítá jejich hodnota v daném bodě a stejně snadno se hledají jejich kořeny – body, kde jsou nulové. Není proto překvapivé, že se matematici již dlouho snaží aproximovat hodnoty nepolynomiálních funkcí (jako exp, log atd.) hodnotami polynomů. V této kapitole si ujasníme, co vlastně myslíme *aproximací*, jak jednu konkrétní sestrojit a (aspoň povrchově), k čemu je dobrá.

Definice 4.0.1 (Polynomiální funkce)

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je *polynomiální*, když existuje $n \in \mathbb{N}$ a koeficienty $a_i \in \mathbb{R}, i \leq n$, takové, že

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Poznámka 4.0.2

Striktně vzato je rozdíl mezi *polynomem* a *polynomiální funkcí*. Polynom je formální výraz tvaru

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^i,$$

kde x je pouze symbol a nepředstavuje žádnou hodnotu. Polynomiální funkce je pak funkce, která vlastně dosazuje do nějakého polynomu za x číslo.

My však těchto rozdílů dbát nebudeme a slovy *polynom* i *polynomiální funkce* budeme mínit objekt z definice 4.0.1.

Co vlastně znamená *aproximovat* funkci? Funkci exp můžeme například na intervalu $[0, 1]$ aproximovat číslem -69, ale intuice čtenářům, doufáme, napovídá, že toto není „dobrá“ aproximace. Jistě nemůžeme obecně doufat v aproximaci funkce polynomem na celé její doméně; smysluplným však zdá sebe býti snažit se aproximovat na okolí zvoleného bodu.

Úspěšnost polynomiální aproximace má dobrý smysl měřit rovněž polynomem. Totiž, z výpočetních důvodů často potřebujeme omezit stupeň (nejvyšší mocninu) aproximujícího polynomu. Přejeme si, aby chyba aproximace polynomem stupně n na okolí daného bodu klesala (při blížení se k tomuto bodu) aspoň tak rychle, jak nejrychleji může polynom stupně n na okolí nějakého bodu k 0 klesat. Je patrné, že nejrychleji ze všech polynomů stupně n klesá na okolí bodu a k nule polynom $(x-a)^n$, neb má v a n-násobný kořen. Ukážeme, že ve skutečnosti můžeme požadovat, aby chyba aproximace na okolí a klesala k 0 ještě rychleji.

Definice 4.0.3 (Aproximace stupně n)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, $a \in M$ a $n \in \mathbb{N}$. Řekneme, že polynom P je *aproximací f na okolí a stupně n*, když

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Vyjádřeno slovy: P je aproximací f na okolí a stupně n, když chyba aproximace na okolí a klesá k 0 rychleji, než $(x-a)^n$.

Pojďme si nyní rozmyslet, jak aproximace f hledat. Začněme nejjednodušším případem – lineární aproximací (tj. aproximací stupně 1) polynomem rovněž stupně nejvýše 1, tedy „přímkou“. Položme tedy $P(x) \coloneqq \psi x + \omega$ a počítejme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - \psi x - \omega}{x-a} = 0.$$

Poslední rovnost bystrým čtenářům připomene definici derivace. Vskutku, přepokládáme-li, že existuje konečná $f'(a)$, pak můžeme poslední limitu upravit do tvaru

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - \psi x - \omega}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - \lim_{x\to a} \frac{\psi x + \omega - f(a)}{x-a} = f'(a) - \lim_{x\to a} \frac{\psi x + \omega - f(a)}{x-a}.$$

Náš úkol je tímto výrazně zjednodušen. Potřebujeme, aby se poslední limita rovnala konstantě $f'(a)$. Toho lze docílit více způsoby; ten nejvíce přímočarý je snad zařídit, aby se čitatel zlomku rovnal $f'(a)(x-a)$, neboť zřejmě

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(a)(x-a)}{x-a} = f'(a).$$

Odtud plyne rovnost

$$\psi x + \omega - f(a) = f'(a)(x-a),$$

ze které již snadno

$$\begin{aligned} \psi &= f'(a), \\ \omega &= f(a) - a \cdot f'(a), \end{aligned}$$

čili

$$P(x) = \psi x + \omega = f'(a)(x-a) + f(a)$$

je lineární aproximací funkce f na okolí a. Funkci $P(x)$ se obvykle přezdívá *tečna ke grafu* funkce f v bodě a, neboť je to přímka, která prochází bodem $(a, f(a))$ a na okolí a roste stejně rychle jako f.

Definice 4.0.4 (Derivace vyšších řádů)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce. Induktivně definujeme *n-tou derivaci funkce f v bodě a* předpisem

$$f^{(n)}(a) \coloneqq \lim_{h\to 0} \frac{f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a},$$

kde $f^{(0)} \coloneqq f$.

Poznámka 4.0.5 (Značení derivací)

V této kapitole budeme vždy n-tou derivaci (vizte definici 4.0.4) funkce f značit symbolem $f^{(n)}$, a to i tehdy, když je tato derivace první. Místo f' tedy dočasně píšeme $f^{(1)}$.

Podobným postupem je možné hledat aproximace vyšších stupňů. Hledáme-li polynom $Q(x)$ stupně nejvýše 2 splňující

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - Q(x)}{(x-a)^2},$$

upravíme nejprve tuto limitu na

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-Q(x)}{x-a}}{x-a}.$$

Již totiž víme, že $P(x) = f'(a)(x-a)+f(a)$ je lineární aproximací funkce f na okolí a. Budeme tedy směle předpokládat, že $Q(x) = P(x) + R(x)$ a spočteme, čemu se rovná polynom $R(x)$. Počítáme

$$\lim_{x\to a} \frac{\frac{f(x)-Q(x)}{x-a}}{x-a} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^2} - \lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^2}.$$

Užitím l'Hospitalova pravidla spočteme

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a) - f^{(1)}(a)(x-a)}{(x-a)^2} = \lim_{x\to a} \frac{f^{(1)}(x) - f^{(1)}(a)}{2(x-a)} = \frac{f^{(2)}(a)}{2}.$$

Chceme tudíž, aby platilo

$$\lim_{x\to a} \frac{R(x)}{(x-a)^2} = \frac{f^{(2)}(a)}{2},$$

z čehož plyne přirozená volba

$$R(x) \coloneqq \frac{f^{(2)}(a)}{2}(x-a)^2.$$

Iterováním tohoto postupu se dostaneme k tzv. *Taylorovu polynomu.*

4.1 Definice Taylorova polynomu

Definice 4.1.1 (Taylorův polynom)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, majíc konečné derivace všech řádů do $n \in \mathbb{N}$ včetně, a $a \in M$. Pak *Taylorovým polynomem stupně n funkce f v bodě a* rozumíme polynom

$$T_n^{f,a}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Lemma 4.1.2 (Derivace Taylorova polynomu)

Platí

$$(T_n^{f,a})^{(1)} = T_{n-1}^{f^{(1)},a}.$$

Důkaz. Z definice Taylorova polynomu počítáme

$$\begin{aligned}(T_n^{f,a})^{(1)}(x) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k\right)^{(1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(f^{(1)})^{(k)}}{k!}(x-a)^k = T_{n-1}^{f^{(1)},a}(x).\end{aligned}$$

■

Tvrzení 4.1.3 (Aproximace Taylorovým polynomem)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, majíc konečné derivace do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně, a $a \in M$. Pak je $T_n^{f,a}$ aproximací f stupně n na okolí a.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle stupně $n \in \mathbb{N}$. Již víme, že pro $n = 1$ je $T_1^{f,a}(x) = f(a) + f^{(1)}(a)(x-a)$ lineární aproximací f na okolí a.

Pro $n > 1$ máme z l'Hospitalova pravidla a předchozího lemmatu

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(1)}(x) - T_{n-1}^{f^{(1)},a}(x)}{n(x-a)^{n-1}}.$$

Protože $f^{(1)}$ je reálná funkce a má konečné derivace do řádu $n-1$ včetně, je z indukčního předpokladu $T_{n-1}^{f^{(1)},a}$ aproximací $f^{(1)}$ stupně $n-1$ na okolí a. Platí proto

$$\lim_{x \to a} \frac{f^{(1)}(x) - T_{n-1}^{f^{(1)},a}(x)}{n(x-a)^{n-1}} = 0,$$

a tedy i

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0,$$

jak jsme chtěli. ■

Překvapivé možná je, že Taylorův polynom je *jedinou* aproximací funkce f stupně n polynomem stupně nejvýše n. K důkazu tohoto faktu si pomůžeme jedním technickým lemmatem.

Lemma 4.1.4

Ať $n \in \mathbb{N}$ a Q je polynom stupně nejvýše n. Platí-li $\lim_{x \to a} Q(x)/(x-a)^n = 0$, pak $Q = 0$.

Důkaz. Budeme pro spor předpokládat, že Q není nulový. Bez důkazu využijeme tvrzení, že když a je kořenem Q, pak $x - a \mid Q$. Protože $\lim_{x \to a} Q(x)/(x-a)^n$, jistě platí $Q(a) = 0$, čili existuje $k \in \mathbb{N}$ takové, že $Q(x) = (x-a)^k \cdot R(x)$, kde R je polynom nemaje kořen a. Pak ale

$$\lim_{x \to a} \frac{Q(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{R(x)}{(x-a)^{n-k}}.$$

Tato limita buď neexistuje (pokud $k < n$), nebo je rovna $R(a) \neq 0$ (pokud $k = n$). V obou případech je nenulová, což je spor. ∎

Věta 4.1.5 (Jednoznačnost Taylorova polynomu)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je funkce, majíc konečné derivace do řádu $n \in \mathbb{N}$ včetně, a $a \in M$. Předpokládejme, že P je polynom stupně nejvýše n, jenž je rovněž aproximací f na okolí a stupně n. Pak $P = T_n^{f,a}$.

Důkaz. Podle tvrzení 4.1.3 platí

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Z předpokladu a věty o aritmetice limit

$$\lim_{x \to a} \frac{T_n^{f,a}(x) - P(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \to a} \frac{T_n^{f,a}(x) - f(x)}{(x-a)^n} + \lim_{x \to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0 + 0 = 0,$$

čili podle lemmatu 4.1.4 jest $P - T_n^{f,a} = 0$. ∎

Úloha 4.1.6

Spočtěte $T_3^{\tan,\pi/4}$, tj. Taylorův polynom stupně 3 v bodě $\pi/4$ funkce tan.

Řešení. Platí

$$\begin{aligned}
\tan^{(1)}(x) &= \frac{1}{\cos^2 x}, \\
\tan^{(2)}(x) &= \left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{(1)} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}, \\
\tan^{(3)}(x) &= \left(\frac{2\sin x}{\cos^3 x}\right)^{(1)} = \frac{2 \cdot (2 - \cos(2x))}{\cos^4(x)}.
\end{aligned}$$

A tedy,

$$\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1, \quad \tan^{(1)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad \tan^{(2)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4, \quad \tan^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16.$$

Z čehož již snadno dopočteme

$$\begin{aligned} T_3^{\tan,\pi/4}(x) &= \sum_{k=0}^{3} \frac{\tan^{(k)}(\pi/4)}{k!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^k \\ &= 1 + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + 2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{8}{3}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3. \end{aligned}$$

♠

Cvičení 4.1.7

Spočtěte $T_5^{\sin\cdot\cos,\pi/2}$.

4.2 Tvary zbytku

V této sekci spočteme tzv. „tvary zbytku" Taylorova polynomu. Jsou to výrazy, které vyjadřují – aspoň řádově – velikost chyby při aproximace funkce Taylorovým polynomem na okolí daného bodu. Budou se hodit primárně při zpytu poloměru okolí, na němž můžeme stále tvrdit, že Taylorův polynom aproximuje funkci „dobře".

Věta 4.2.1 (Obecný tvar zbytku)

Ať $a, x \in \mathbb{R}$ a f má na $[a,x]$ konečné derivace do řádu $n+1$ včetně. Ať je dále φ libovolná spojitá funkce na $[a,x]$ s konečnou první derivací na (a,x). Pak existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!}\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi^{(1)}(\xi)} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n.$$

Důkaz. Definujme funkci $F : [a,x] \to \mathbb{R}$ předpisem

$$F(t) \coloneqq f(x) - \left(f(t) + f^{(1)}(t)(x-t) + \frac{1}{2}f^{(2)}(t)(x-t)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(t)(x-t)^n\right).$$

Pak je F spojitá na $[a,x]$ a $F^{(1)}$ existuje konečná na (a,x). Podle Cauchyho věty o střední hodnotě existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$\frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{F^{(1)}(\xi)}{\varphi^{(1)}(\xi)}. \tag{$\diamond$}$$

Snadno spočteme, že

$$\begin{aligned} F^{(1)}(\xi) &= -f^{(1)}(\xi) + f^{(1)}(\xi) - f^{(2)}(\xi) + f^{(2)}(\xi) - \ldots - \frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n \\ &= -\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n. \end{aligned}$$

Zřejmě $F(x) = 0$ a $F(a) = f(x) - T_n^{f,a}(x)$. Čili z rovnosti ($\diamond$) máme

$$\frac{T_n^{f,a}(x) - f(x)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = -\frac{1}{\varphi^{(1)}(x)}\left(\frac{1}{n!}f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n\right).$$

Odtud přímočarou úpravou plyne tvrzení. ■

Uvědomme si, že ve větě 4.2.1 je φ *zcela libovolná funkce* s dodatečnými podmínkami spojitosti a diferencovatelnosti. Tím máme k dispozici celou třídu vyjádření zbytků Taylorova polynomu pouhým dosazováním za φ. Dvě konkrétní dosazení (jež sobě dokonce vysloužila jména) se nám budou v dalším textu hodit více než jiná.

Důsledek 4.2.2 (Lagrangeův tvar zbytku)

Ať f je spojitá na $[a,x]$ a má konečné derivace na (a,x) do řádu $n+1$ včetně. Pak existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(x-a)^{n+1}.$$

Důkaz. Plyne z dosazení $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$ ve větě 4.2.1. ■

Důsledek 4.2.3 (Cauchyho tvar zbytku)

Ať f je spojitá na $[a,x]$ a má konečné derivace na (a,x) do řádu $n+1$ včetně. Pak existuje $\xi \in (a,x)$ takové, že

$$f(x) - T_n^{f,a}(x) = \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)(x-\xi)^n(x-a).$$

Důkaz. Plyne z věty 4.2.1 dosazením $\varphi(t) = t$. ■

4.3 Taylorova řada

Když už víme, že Taylorův polynom je nejlepší možnou aproximací stupně n nějaké funkce f na okolí daného bodu polynomem stupně nejvýše n, je přirozené se ptát, co se stane, nahradíme-li tento polynom nekonečnou řadou se stejnými koeficienty? Rozumná, však naivní, domněnka zní, že taková řada aproximuje danou funkci *nekonečně dobře*, to jest je jí přímo rovna. Lze snad každou reálnou funkci zapsat nekonečnou řadou?

Jak je tomu u spousty nadějných domněnek, odpověď zní důrazně **ne**. Ovšem, mnoho dostatečně hezkých funkcí lze zapsat nekonečnou řadou aspoň na nějakém okolí zvolených bodů. Částečně překvapivé snad je, že samotná konvergence takové řady nestačí k tomu, aby byla rovna aproximované funkci.

Nebudeme do této problematiky zabíhat hlouběji, rozmyslíme si pouze jeden význačný příklad.

Definice 4.3.1 (Taylorova řada)

Ať $f : M \to \mathbb{R}$ je reálná funkce mající derivace všech řádů v $a \in M$. Pak nekonečnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

nazýváme *Taylorovou řadou* funkce f v bodě a.

Varování 4.3.2

Bohužel existují nekonečně diferencovatelné funkce, kterým jejich Taylorova řada odpovídá pouze v jediném bodě, ale nikoli na sebemenším okolí tohoto bodu. Uvažme například

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Protože $\lim_{x\to 0} \exp\left(-1/x^2\right) = 0$, je f spojitá v bodě 0 a zřejmě je tam nekonečně diferencovatelná. Platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0,$$

neboť $f^{(n)}(0) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Avšak $f(x) \neq 0$ pro libovolné $x \neq 0$.

Poznámka 4.3.3

Taylorova řada funkce definované součtem nekonečné řady je (zřejmě z podstaty věci) přesně tato řada. Tento fakt nebudeme dokazovat; pro elementární funkce jej ponecháme jako snadné cvičení.

Cvičení 4.3.4

Dokažte, že Taylorovy řady elementárních funkcí exp, sin a cos jsou přesně řady z jejich definic.

Zbytek sekce věnujeme studiu Taylorovy řady funkce log. Na rozdíl od svého inverzu není log dána nekonečnou řadou. Existuje však relativně malé okolí bodu 1, kde je log shodná se svojí Taylorovou řadou. Pro snadnost výpočtů budeme však místo bodu 1 uvažovat bod 0 a místo $\log x$ funkci $\log(1 + x)$. Tento přístup je zjevně ekvivalentní původnímu.

Věta 4.3.5 (Taylorova řada funkce log)

Pro $x \in (-1, 1]$ *platí*

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Důkaz. Nejprve ukážeme, že uvedená řada je vskutku Taylorovou řadou funkce log v bodě 0.

Položme $f(x) = \log(1 + x)$. Indukcí ověříme, že

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Jistě

$$f^{(1)}(x) = \frac{1}{1+x} = (-1)^0 \cdot \frac{0!}{(1+x)^1}.$$

Dále, z indukčního předpokladu

$$f^{(n+1)}(0) = (f^{(n)})^{(1)}(0) = \left((-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\right)^{(1)}$$
$$= -n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{(1+x)^{n+1}} = (-1)^n \cdot \frac{n!}{(1+x)^{n+1}},$$

tedy závěr platí.

Odtud ihned plyne, že $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!$. Čili, Taylorovou řadou funkce $\log(1+x)$ v bodě 0 je vskutku

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

Pokračujme druhou částí tvrzení. Je zřejmé, že pro $|x| > 1$ tato řada není ani konvergentní, neboť neplatí $\lim_{n\to\infty} x^n/n = 0$. Pro $x = -1$ máme

$$(-1)^{n-1} \frac{(-1)^n}{n} = (-1)^{2n-1} \frac{1}{n} = -\frac{1}{n}$$

a řada $\sum_{n=1}^{\infty} -1/n$ je divergentní. Konečně, pro $x \in (-1, 1]$ řada vskutku konvergentní je. Plyne to však z tvrzení o konvergenci obecných řad, jež jsme si nedokázali; stavíme tudíž tento fakt na slepé víře.

Nyní dokážeme, že je na tomto intervalu rovna $\log(1+x)$. K tomu stačí ověřit, že chyba aproximace

$$|\log(1+x) - T_n^{\log(1+x),0}(x)| = \left|\log(1+x) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}\right| \tag{$\clubsuit$}$$

jde pro $n \to \infty$ k 0.

Ať je nejprve $x \in [0, 1]$. Podle důsledku 4.2.2 existuje pro každé $n \in N$ číslo $\xi_n \in [0, x)$ takové, že

$$(\clubsuit) = \left|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n) x^n\right|,$$

kde opět $f(x) = \log(1+x)$. Využitím výpočtu $f^{(n+1)}$ výše a odhadu $0 \le x/(1+\xi_n) \le 1$ spočteme

$$(\clubsuit) = \left|\frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi_n) x^n\right| = \left|\frac{1}{(n+1)!} (-1)^n \frac{n!}{(1+\xi_n)^{n+1}} x^{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{n+1} \left(\frac{x}{1+\xi_n}\right)^{n+1} \le \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

jak jsme chtěli.

Konečně, ať $x \in (-1, 0)$. Nyní naopak použijeme důsledek 4.2.3 a pro každé $n \in \mathbb{N}$ nalezneme $\xi_n \in (x, 0)$ splňující

$$(\clubsuit) = \left|\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_n) x (x - \xi_n)^n\right|.$$

Jelikož $\xi_n \in (-1,0)$, platí pro $x \in (-1,0)$ odhad

$$\frac{1+x}{1+\xi_n} \geq 1+x,$$

z nějž úpravou

$$1 - \frac{1+x}{1+\xi_n} \leq -x.$$

Čili,

$$\begin{aligned}
(\clubsuit) &= \left|\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi_n) x (x-\xi_n)^n\right| = \left|\frac{1}{n!}(-1)^n \frac{n!}{(1+\xi_n)^{n+1}} x (x-\xi_n)^n\right| \\
&= |x| \frac{(\xi_n - x)^n}{(1+\xi_n)^{n+1}} = \frac{|x|}{1+\xi_n}\left(\frac{\xi_n - x}{1+\xi_n}\right)^n = \frac{|x|}{1+\xi_n}\left(1 - \frac{1+x}{1+\xi_n}\right) \\
&\leq (-x)^n \frac{|x|}{1+\xi_n} = \frac{|x|^{n+1}}{1+\xi_n} \xrightarrow{n\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

což zakončuje důkaz kýžené rovnosti pro $x \in (-1,0)$ a tím i důkaz celé věty. ■

4.4 Výpočet limit přes Taylorův polynom

Fakt, že funkce lze na okolí bodů aproximovat polynomem je mimo jiné užitečný při výpočtech rozličných limit. Totiž, počítáme-li například limitu v 0 podílu funkce a polynomu stupně 4, jistě není třeba uvažovat Taylorův polynom této funkce stupně většího než 4, neboť x^n pro $n > 4$ „jde k 0 mnohem rychleji“ než x^4. Nejprve trocha formalizmu.

Definice 4.4.1 (Symbol „malé o“)

Ať $f, g : M \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a $a \in M$. Řekneme, že funkce f je *malé o* od g v bodě a, pokud

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Tento fakt značíme $f(x) = o(g(x)), x \to a$, přičemž příkmetek $x \to a$ vynecháváme, je-li limitní bod zřejmý z kontextu, a píšeme pouze $f = o(g)$.

Tvrzení 4.4.2 (Vlastnosti malého o)

Ať $f, f_1, f_2, g, g_1, g_2 : M \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a $a \in M$. V následujícím výčtu vždy předpokládáme, že právě a je limitním bodem. Platí

(1) *Je-li $f_1 = o(g)$ a $f_2 = o(g)$, pak $f_1 + f_2 = o(g)$.*

(2) *Je-li $f_1 = o(g_1)$ a $f_2 = o(g_2)$, pak $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.*

(3) *Je-li $f_1 = o(g)$ a f_2 je nenulová na jistém prstencovém okolí a, pak $f_1 f_2 = o(g_1 f_2)$.*

(4) *Je-li $f = o(g_1)$ a $\lim_{x\to a} g_1(x)/g_2(x)$ je konečná, pak $f = o(g_2)$.*

(5) *Je-li $f = o(g)$ a $h : M \to \mathbb{R}$ je omezená na jistém prstencovém okolí a, pak $hf = o(g)$.*

(6) Jsou-li $m \leq n \in \mathbb{N}$ a $f = o((x-a)^n)$, pak $f = o((x-a)^m)$.

DŮKAZ. Plyne okamžitě z věty o aritmetice limit. ■

Raději než budovat komplikovanou teorii, ukážeme výpočet limit přes Taylorův polynom na několika příkladech.

Úloha 4.4.3

Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4}.$$

ŘEŠENÍ. Protože pro $x \in \mathbb{R}$ je z definice

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

je Taylorova řada funkce cos v libovolném bodě přesně tato. Rozepíšeme si její začátek.

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

V červené řadě jsou všechna x v mocnině větší než 6. Platí pročež

$$\sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = o(x^5).$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}{x^4} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - 1 + \frac{1}{2}x^2 + o(x^5)}{x_4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{24}x^4}{x^4} + \frac{o(x^5)}{x^4} = \frac{1}{24} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^5)}{x^4} = \frac{1}{24} + 0 = \frac{1}{24}.\end{aligned}$$ ♠

Úloha 4.4.4

Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \cot^2 x.$$

ŘEŠENÍ. Upravíme nejprve výraz do tvaru

$$\frac{1}{x^2} - \cot^2 x = \frac{1}{x^2} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^2 \sin^2 x} = \frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x - x^2 \cos^2 x}{x^4}.$$

Podle tvrzení 3.3.1 je

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 x} = 1.$$

Druhou limitu spočteme užitím Taylorova polynomu.

Je dobré si nejprve rozmyslet, do kterého stupně je třeba Taylorovy polynomy zastoupených funkcí počítat. V Taylorově řadě funkce cos se objevuje proměnná v mocninách 0, 2, 4, ... a v řadě sin v mocninách 1, 3, 5, ... Obě tyto funkce jsou v čitateli na druhou a vyděleny x^4. Jejich první dva nenulové členy musejí stačit. Spočteme tedy Taylorovy polynomy stupně 3 funkcí sin a cos v bodě 0.

$$\begin{aligned} T_3^{\sin,0}(x) &= x - \frac{1}{6}x^3, \\ T_3^{\cos,0}(x) &= 1 - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

Tedy,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x - x^2\cos^2 x}{x^4} &= \frac{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^4)\right)^2 - x^2\left(1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^3)\right)^2}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^4) - x^2 + x^4 + o(x^4)}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{3}x^4 + x^4}{x^4} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^4)}{x^4} = \frac{-\frac{1}{3}+1}{1} + 0 = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

♠

Úloha 4.4.5

Spočtěte limitu

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^3) - 1}{\sin x - x}.$$

Řešení. Platí

$$\begin{aligned} \exp(x^3) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^n)^3}{n!} = 1 + x^3 + o(x^3), \\ \sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Čili,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x^3) - 1}{\sin x - x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 + x^3 + o(x^3) - 1}{x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3) - x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{-\frac{1}{6}x^3 + o(x^3)} = -6 + 0 = -6. \end{aligned}$$

♠

Cvičení 4.4.6

Spočtěte následující limity.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \exp(-x^2/2)}{x^4} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x} \qquad \lim_{x\to 0} \frac{2(\sin x - \tan x) + x^3}{(\exp x - 1)(\exp(-x^2) - 1)^2}$$

Kapitola 5

Primitivní funkce

Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávejte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.

Příčina vzniku *primitivní funkce* (též *integrálu*) reálné funkce je veskrze fyzikální, jak bude objasněno v příští kapitole. My, majíce k dispozici již úplnou teorii integrálu, půjdeme směrem opačným jejímu původnímu vývoji. Začneme tedy definicí a základními vlastnostmi primitivních funkcí (vlastně *antiderivací*) a teprve poté si vysvětlíme jejich fyzikálně-geometrický význam.

Definice 5.0.1 (Primitivní funkce)

Ať $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ reálná funkce. Řekneme, že $F : (a, b) \to \mathbb{R}$ je *primitivní* k f na (a, b), když platí $F'(x) = f(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$. Je-li interval zřejmý z kontextu, píšeme též $F = \int f$ nebo „úplněji“ $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $x \in (a, b)$.

Poznámka 5.0.2 (Proč otevřený interval?)

Primitivní funkci definujeme pouze na **otevřeném intervalu**. Důvod tomu není nikterak hluboký, spíše technický. Při definici na uzavřeném intervalu bychom totiž museli v jeho krajních bodech uvažovat jednostranné derivace a tím zkomplikovat zápis i budoucí diskuse vlastností primitivních funkcí.

Je zajímavé, že „akce derivace“ funkce způsobuje ztrátu pouze *konstantního* množství dat o této funkci. To se projevuje tak, že dvě primitivní funkce na témže intervalu k téže funkci se liší pouze o konstantu.

Lemma 5.0.3 (Jednoznačnost primitivní funkce)

Ať $F, G : (a, b) \to \mathbb{R}$ jsou primitivní k $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ na (a, b). Pak existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $F(x) = G(x) + c$ pro $x \in (a, b)$.

Důkaz. Položme $H(x) \coloneqq F(x) - G(x)$ pro $x \in (a, b)$. Potom

$$H'(x) = (F(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0,$$

tedy je podle cvičení 2.2.5 H konstantní na (a, b). Odtud tvrzení. ∎

Poznámka 5.0.4

V závěsu předchozího lemmatu budeme symbolem $\int f$ označovat *kteroukoli* primitivní funkci k f na daném intervalu a rozlišující konstantu zanedbáme. Formalizmem nakažený čtenář může přemýšlet o symbolu $\int f$ jako značícím *třídu ekvivalence* všech funkcí jsoucích primitivních k f, kde relací je zde pochopitelně rovnost až na konstantu.

Příklad 5.0.5

Platí

$$\int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}, & \alpha \neq -1, \\ \log x, & \alpha = -1. \end{cases}$$

Vskutku, máme $\log' x = 1/x$ a

$$\left(\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right)' = \frac{\alpha+1}{\alpha+1}x^{\alpha+1-1} = x^\alpha$$

pro $\alpha \neq -1$.

Věta 5.0.6 (Aritmetika primitivních funkcí)

Ať $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ a $F : (a,b) \to \mathbb{R}$, resp. $G : (a,b) \to \mathbb{R}$, je primitivní k f, resp. ke g, na (a,b). Ať dále $c, d \in \mathbb{R}$. Pak je $cF + dG$ primitivní k $cf + dg$ na (a,b).

Důkaz. Zřejmý, z věty o aritmetice derivací. Ponechán jako snadné cvičení. ■

Cvičení 5.0.7

Dokažte větu o aritmetice primitivních funkcí.

Kompletní charakteristika funkcí, k nímž na jistém intervalu existuje primitivní, je stále otevřeným problémem matematické analýzy. My si pouze uvedeme, a v sekci o Riemannově integrálu, dokážeme, že spojité funkce primitivní funkci mají vždy. Ovšem, tato podmínka je pouze postačující, nikoli nutná. Existuje mnoho nespojitých funkcí, k nímž primitivní funkce existuje rovněž.

Věta 5.0.8 (Spojitost a existence primitivní funkce)

Ať $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je spojitá na (a,b). Pak má na tomto intervalu primitivní funkci.

Důkaz. Vyplyne ze základní věty kalkulu. ■

Je ovšem známo mnoho vlastností, které funkce, majíc na jistém intervalu primitivní funkci, splňovat musejí. Jedna z nich je tzv. *Darbouxova vlastnost* – vlastnost funkce zobrazovat interval na interval, která je slabší než spojitost, ale přesto do značné míry omezující.

Věta 5.0.9 (Darbouxova)

Ať má f na (a,b) primitivní funkci F. Pak pro každý interval $I \subseteq (a,b)$ platí, že $f(I)$ je rovněž interval.

Důkaz. Volme interval $I \subseteq (a, b)$ libovolně a nechť $y_1, y_2 \in f(I)$. Je třeba ukázat, že je-li $y_1 < z < y_2$, pak $z \in f(I)$.

Položme $H(x) \coloneqq F(x) - zx$, $x \in (a, b)$. Pak platí $H'(x) = f(x) - z$. Nalezněme z definice $f(I)$ čísla $x_1, x_2 \in I$ taková, že $f(x_1) = y_1$ a $f(x_2) = y_2$. Protože má H na (a, b) konečnou derivaci, je na tomto intervalu podle lemmatu 2.0.9 spojitá. Jelikož $[x_1, x_2] \subseteq (a, b)$, nabývá podle věty 1.3.9 funkce H na $[x_1, x_2]$ minima. Ať je tomu tak v bodě x_0.

Ukážeme, že x_0 není ani jeden z bodů x_1, x_2. Máme $H'(x_1) = f(x_1) - z = y_1 - z < 0$, tj.

$$\lim_{x \to x_1} \frac{H(x) - H(x_1)}{x - x_1} < 0,$$

a tedy existuje okolí bodu x_1 na němž platí $H(x) < H(x_1)$. Ergo, x_1 není bodem minima H na $[x_1, x_2]$. Podobně odvodíme, že ani x_2 není bodem minima H. Pak je ale $x_0 \in (x_1, x_2)$ a podle tvrzení 2.1.6 platí $H'(x_0) = 0$, neboli $f(x_0) = z$, což dokazuje výrok $z \in f(I)$. ■

5.1 Výpočet primitivních funkcí

Na rozdíl od výpočtu derivace funkce, je hledání funkce primitivní téměř vždy silně nedeterministický úkon. Existují pomůcky k jejich výpočtu, jimž je tato sekce ovšem věnována, avšak mnohdy musí jeden pracovat v jistém smyslu „zpětně“, tj. očekávat jistý výsledek a zpytovanou funkci upravit do tvaru, která co nejblíže odpovídá derivaci právě tohoto očekávaného výsledku. Situaci nezjednodušuje to, že mnoho (i snadno vyjádřitelných funkcí) nemá primitivní funkci zapsatelnou použitím pouze funkcí elementárních. Jako příklad vezměme funkci $\exp(x^2)$, která je na $\mathbb{R}$ spojitá, a tedy má, podle věty 5.0.8 na $\mathbb{R}$ primitivní funkci. Avšak, a to bylo jest dokázáno, tato funkce nemá vyjádření pomocí elementárních funkcí.

Základními nástroji pro výpočet primitivních funkcí jsou *integrace per partes* a *substituční věty*. Uvedeme a dokážeme všechny.

Věta 5.1.1 (Integrace per partes)

Ať $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce, F je primitivní k f a G primitivní ke g na (a, b). Pak platí

$$\int (f \cdot G) = F \cdot G - \int (F \cdot g).$$

Důkaz. Funkce F i G jsou spojité, protože mají podle předpokladu konečné derivace na (a, b). Funkce f i g mají z předpokladu primitivní funkce, takže i funkce $f \cdot G$ a $F \cdot g$ mají primitivní funkce na (a, b).

Položme $H \coloneqq \int (F \cdot g)$. Pak z aritmetiky derivací

$$(F \cdot G - H)' = f \cdot G + F \cdot g - F \cdot g = f \cdot G,$$

což dokazuje kýženou rovnost. ■

Poznámka 5.1.2

Pro další výpočty bude dobré si povšimnout, že pro libovolnou reálnou funkci f platí

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, dx = \log(f(x)).$$

Vskutku, plyne to z přímočarého výpočtu využívajícího větu o derivaci složené funkce:

$$(\log(f(x)))' = f'(x) \cdot \log' f(x) = f'(x) \cdot \frac{1}{f(x)}.$$

Příklad 5.1.3

Použitím věty 5.1.1 spočteme

$$\int \arctan x \, dx$$

pro $x \in (-\pi/2, \pi/2)$.

Čtenáři použitím věty o derivaci inverzní funkce sobě snadno ověří, že

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Označme $f(x) \coloneqq 1$ a $G(x) \coloneqq \arctan x$. Pak ve značení věty 5.1.1 jest $F(x) = x$ a $g(x) = 1/(1+x^2)$. Počítáme

$$\begin{aligned} \int f(x)G(x) \, dx &= F(x)G(x) - \int F(x)g(x) \, dx \\ &= x \cdot \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx. \end{aligned}$$

Protože $(1+x^2)' = 2x$, poslední integrál snadno spočteme úpravou

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \log(1+x^2).$$

Celkem tedy máme

$$\int \arctan x \, dx = x \cdot \arctan x - \frac{1}{2} \log(1+x^2).$$

Úloha 5.1.4

Pro $x \in \mathbb{R}$ spočtěte

$$\int x \exp x \, dx.$$

Řešení. Protože funkce $\exp x$ se nemění derivací či integrací, je dobré si před použitím integrace per partes rozmyslet, zda je druhou funkci jednodušší integrovat či derivovat. Zde platí $x' = 1$, tedy budeme x derivovat a $\exp x$ integrovat. Ve značení věty 5.1.1 máme $f(x) = \exp x$

a $G(x) = x$. Pak $F(x) = \exp x$ a $g(x) = 1$. Odtud,

$$\begin{aligned}\int f(x)G(x)\,\mathrm{d}x &= F(x)G(x) - \int F(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \exp x \cdot x - \int \exp x \cdot 1\,\mathrm{d}x = x\exp x - \exp x,\end{aligned}$$

čímž je výpočet završen. ♠

Cvičení 5.1.5

Spočtěte

$$\int \frac{\log^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Věta 5.1.6 (první o substituci)

Ať $a < b, \alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je reálná funkce, F je primitivní k f na (a,b) a $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ je reálná funkce s konečnou φ' na (α,β). Potom

$$\int (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t).$$

Důkaz. Podle věty o derivaci složené funkce platí

$$(F \circ \varphi)'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t),$$

což dokazuje tvrzení. ■

Úloha 5.1.7

Spočtěte

$$\int \sin^4 t \cos t\,\mathrm{d}t.$$

Řešení. Položme $f(x) = x^4$ a $\varphi(t) = \sin t$. Pak $F(x) = x^5/5$, $\varphi'(t) = \cos t$ a

$$f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = \sin^4 t \cos t.$$

Podle první věty o substituci platí

$$\int \sin^4 t \cos t\,\mathrm{d}t = \int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = F(\varphi(t)) = \frac{\sin^5 t}{5}.$$

♠

Cvičení 5.1.8

Spočtěte

$$\int \frac{x}{\sqrt{2 + 5x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Cvičení 5.1.9

Spočtěte

$$\int \frac{1}{\sqrt{8+6x-9x^2}}\,\mathrm{d}x.$$

Hint: platí $\arcsin' x = 1/\sqrt{1-x^2}$.

Věta 5.1.10 (druhá o substituci)

Ať $a < b, \alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $\varphi : (\alpha,\beta) \to (a,b)$ je na a má na (α,β) konečnou nenulovou derivaci. Platí-li pro každé $t \in (\alpha,\beta)$ rovnost

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = G(t),$$

pak

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = (G \circ \varphi^{-1})(x)$$

pro $x \in (a,b)$.

Důkaz. Protože φ' má na (α,β) primitivní funkci, zobrazuje podle Darbouxovy věty interval na interval. Z předpokladu je φ' nenulová, což spolu s předchozí větou implikuje, že buď $\varphi' > 0$ nebo $\varphi' < 0$ na celém (α,β). V prvním případě je φ podle důsledku 2.2.4 buď rostoucí, nebo klesající, na (α,β). V každém případě je prostá, a tedy existuje $\varphi^{-1} : (a,b) \to (\alpha,\beta)$.

Podle věty o derivaci inverzní funkce a též věty o derivaci složené funkce platí pro $x \in (a,b)$

$$\begin{aligned}(G \circ \varphi^{-1})'(x) &= G'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \\ &= f(\varphi(\varphi^{-1}(x))) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot (\varphi^{-1})'(x) \\ &= f(x) \cdot \varphi'(\varphi^{-1}(x)) \cdot \frac{1}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = f(x),\end{aligned}$$

jak bylo jest dokázati. ■

Příklad 5.1.11

Pro $x \in (-1,1)$ platí

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{4}\sin(2\arcsin x).$$

Vskutku, položme $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $(\alpha,\beta) = (-\pi/2, \pi/2)$ a $\varphi(t) = \sin t$. Pak $\varphi : (-\pi/2,\pi/2) \to (-1,1)$ je na a platí $\varphi'(t) = \cos t \neq 0$ pro $t \in (-\pi/2,\pi/2)$. Dále $\varphi^{-1}(x) = \arcsin x$ a

$$\int f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cdot \cos t\,\mathrm{d}t = \int \cos^2 t\,\mathrm{d}t.$$

Užitím vlastností goniometrických funkcí se snadno ověří, že

$$\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t).$$

Odtud

$$\int \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{2} \,\mathrm{d}t + \int \frac{1}{2} \cos 2t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t.$$

Čili, ve značení druhé věty o substituci jest

$$G(t) = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t.$$

Podle téže věty máme

$$\int \sqrt{1 - x^2} \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x)) = \frac{1}{2} \arcsin x + \frac{1}{4} \sin(2 \arcsin x).$$

5.1.1 Integrace racionálních funkcí

Mezi funkce, jež umíme „algoritmicky“ integrovat, patří (dle příkladu 5.0.5) jistě funkce polynomiální. Zvlášť užitečné v závěsu vět o substituci je rovněž umět algoritmicky integrovat funkce *racionální*, tedy reálné funkce tvaru $R(x) = p(x)/q(x($, kde p, q jsou polynomy.

Rádi bychom uměli libovolnou racionální funkci rozložit na součet výrazně jednodušších racionálních funkcí, jejichž integrály umíme spočítat. To lze, metodou slující *rozklad na parciální zlomky*.

Poznámka 5.1.12

V následující větě použijeme sebou nedokázané tvrzení z algebry, že každý reálný polynom se rozkládá na součin lineárních a kvadratických činitelů. Tedy, je-li $p(x)$ polynom, pak existuje konstanta $c \in \mathbb{R}$ a pro vhodná $k, l \in \mathbb{N}$ čísla $a_1, \ldots, a_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \ldots, \beta_l \in \mathbb{R}$ a přirozená čísla $n_1, \ldots, n_k, m_1, \ldots, m_l \in \mathbb{N}$ splňující

$$p(x) = c(x - a_1)^{n_1}(x - a_2)^{n_2} \cdots (x - a_k)^{n_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{m_1} \cdots (x^2 + \alpha_l x + \beta_l)^{m_l},$$

kde všechny $x^2 + \alpha_i x + \beta_i$ nemají reálný kořen.

Věta 5.1.13 (Rozklad na parciální zlomky)

Ať $p(x), q(x)$ jsou polynomy a q je rozložený jako v poznámce výše. Pak existují jednoznačně určená *čísla*

$$A_1^1, A_2^1, \ldots, A_{n_1}^1, A_1^2, A_2^2, \ldots, A_{n_2}^2, A_1^3, A_2^3, \ldots, A_1^k, \ldots, A_{n_k}^k \in \mathbb{R},$$
$$B_1^1, B_2^1, \ldots, B_{m_1}^1, B_1^2, B_2^2, \ldots, B_{m_2}^2, B_1^3, B_2^3, \ldots, B_1^l, \ldots, B_{m_l}^l \in \mathbb{R},$$
$$C_1^1, C_2^1, \ldots, C_{m_1}^1, C_1^2, C_2^2, \ldots, C_{m_2}^2, C_1^3, C_2^3, \ldots, C_1^l, \ldots, C_{m_l}^l \in \mathbb{R},$$

taková, že

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \frac{A_1^1}{x-a_1} + \frac{A_2^1}{(x-a_1)^2} + \cdots + \frac{A_{n_1}^1}{(x-a_1)^{n_1}} + \frac{A_1^2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_{n_2}^2}{(x-a_2)^{n_2}} + \cdots + \frac{A_{n_k}^k}{(x-a_k)^{n_k}}\\ &+ \frac{B_1^1x + C_1^1}{x^2+\alpha_1x+\beta_1} + \frac{B_2^1x+C_2^1}{(x^2+\alpha_1x+\beta_1)^2} + \cdots + \frac{B_{m_1}^1x + C_{m_1}^1}{(x^2+\alpha_1x+\beta_1)^{m_1}} + \frac{B_1^2x+C_1^2}{x^2+\alpha_2x+\beta_2}\\ &+ \cdots + \frac{B_{m_2}^2x + C_{m_2}^2}{(x^2+\alpha_2x+\beta_2)^{m_2}} + \cdots + \frac{B_{m_l}^lx + C_{m_l}^l}{(x^2+\alpha_lx+\beta_l)^{m_l}}\\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i}\frac{A_j^i}{(x-a_i)^j} + \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i}\frac{B_j^ix+C_j^i}{(x^2+\alpha_ix+\beta_i)^j}.\end{aligned}$$

Důkaz. Triviální, indukcí podle stupně q. Ale moc písmenek. ■

Příklad 5.1.14

Rozložíme

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{3x^3-3x^2+4x+10}{(x-2)^2(x^2+2x+2)}$$

na parciální zlomky. Podle věty 5.1.13 existují čísla $A_1, A_2, B, C \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{3x^3-3x^2+4x+10}{(x-2)^2(x^2+2x+2)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{(x-2)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+2}. \qquad (\heartsuit)$$

Tato čísla nalezneme porovnáním koeficientů obou stran po roznásobení jmenovatelem a vyřešením získané soustavy rovnic.

Roznásobením obou stran ($\heartsuit$) polynomem $q(x)$ dostaneme

$$3x^3-3x^2+4x+10 = A_1(x-2)(x^2+2x+2) + A_2(x^2+2x+2) + (Bx+C)(x-2)^2.$$

Tato rovnost musí platit pro všechna $x \in \mathbb{R}$, speciálně tedy pro $x = 2$. Dosazením dostaneme první rovnici

$$3\cdot 2^3 - 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 10 = A_2(2^2 + 2\cdot 2 + 2),$$

z níž ihned $A_2 = 3$. Nyní dosaďme například $x = 0$. Dosazení dá

$$4 = -4A_1 + 4C.$$

Volbami $x = 1$ a $x = 3$ dostaneme další dvě rovnice

$$\begin{aligned}-1 &= -5A_1 + B + C,\\ 25 &= 17A_1 + 3B + C.\end{aligned}$$

Snadno spočteme, že řešením soustavy těchto tří rovnic je $A_1 = 1, B = 2$ a $C = 2$. Platí tedy

$$\frac{3x^3-3x^2+4x+10}{(x-2)^2(x^2+2x+2)} = \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{2x+2}{x^2+2x+2}.$$

Pochopitelně, rozklad na parciální zlomky nám není mnoho užitečný, neumíme-li spočítat integrály typu

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x \quad \text{a} \quad \int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}\,\mathrm{d}x,$$

pro $a, \alpha, \beta, A, B, C \in \mathbb{R}$ a $k, l \in \mathbb{N}$. První z těchto integrálů už jsme v zásadě spočetli v příkladě 5.0.5. Druhý je na výpočet výrazně těžší a hledaná primitivní funkce se nejsnadněji zapisuje rekurzivně.

Čtenáři snadno ověří, že

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{A}{(1-k)(x-a)^{k-1}}, & k > 1, \\ A\log|x-a|, & k = 1. \end{cases}$$

Integrál druhého typu nejprve rozložíme

$$\int \frac{Bx+C}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}\,\mathrm{d}x = \frac{B}{2}\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}\,\mathrm{d}x + \left(C - \frac{B\alpha}{2}\right)\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}\,\mathrm{d}x.$$

Protože $(x^2+\alpha x+\beta)' = 2x+\alpha$, je první z těchto integrálů rovněž spočten přímočaře. Vskutku,

$$\int \frac{2x+\alpha}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{1-l}\cdot\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^{l-1}}, & l > 1, \\ \log(x^2+\alpha x+\beta), & l = 1. \end{cases}$$

Výraz v druhém integrálu nejprve upravíme

$$\frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^l} = \frac{1}{\left(\left(x+\frac{\alpha}{2}\right)^2+\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^l} = \frac{1}{\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^l}\cdot\frac{1}{\left(1+\left(\frac{x+\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{\beta-\frac{\alpha^2}{4}}}\right)^2\right)^l}.$$

Položíme-li nyní $\varphi(x) \coloneqq \frac{x+\alpha/2}{\sqrt{\beta-\alpha^2/4}}$ a pro strohost zápisu označíme $t = \varphi(x)$, pak z první věty o substituci platí

$$\int \frac{1}{(x^2+\alpha x+\beta)^l}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\left(\beta-\frac{\alpha^2}{4}\right)^l}\int \frac{1}{(1+t^2)^l}\,\mathrm{d}t.$$

Označme

$$I_l \coloneqq \int \frac{1}{(1+t^2)^l}\,\mathrm{d}t.$$

Lemma 5.1.15

Platí

$$I_{l+1} = \frac{t}{2l(1+t^2)^l} + \frac{2l-1}{2l}I_l$$

pro $t \in \mathbb{R}$, *přičemž* $I_1 = \arctan t$.

Důkaz. Jistě

$$I_1 = \int \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan t.$$

pro $t \in \mathbb{R}$.

Dále, pro každé $l \in \mathbb{N}$ je $t \mapsto 1/(1+t^2)^l$ spojitá funkce na $\mathbb{R}$, tudíž má podle věty 5.0.8 primitivní funkci na celém $\mathbb{R}$.

Z věty o integraci per partes platí

$$\int 1 \cdot \frac{1}{(1+t^2)^l}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(1+t^2)^l} - \int \frac{-2lt^2}{(1+t^2)^{l+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(1+t^2)^l} + 2l\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{l+1}}\,\mathrm{d}t.$$

Dále spočteme

$$\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{l+1}}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{(1+t^2)^l}\,\mathrm{d}t - \int \frac{1}{(1+t^2)^{l+1}}\,\mathrm{d}t = I_l - I_{l+1}.$$

To nám dává rovnost

$$I_l = \int \frac{1}{(1+t^2)^l}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(1+t^2)^l} + 2l\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{l+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(1+t^2)^l} + 2l(I_l - I_{l+1}),$$

z níž již snadnou úpravou plyne tvrzení. ■

Úloha 5.1.16

Spočtěte

$$\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Nejprve rozložíme

$$x^4 + 1 = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Podle věty o rozkladu na parciální zlomky existují $B_1, C_1, B_2, C_2 \in \mathbb{R}$ taková, že

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{B_1x + C_1}{x^2 + \sqrt{2}x + 1} + \frac{B_2x + C_2}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}.$$

Roznásobením této rovnosti polynomem $x^4 + 1$ získáme

$$1 = (B_1x + C_1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1) + (B_2x + C_2)(x^2 - \sqrt{2}x + 1).$$

Postupným dosazením čtyř libovolných hodnot za x dostaneme soustavu čtyř lineárních rovnic s řešením

$$B_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}},\; C_1 = \frac{1}{2},\; B_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}},\; C_2 = \frac{1}{2}.$$

Čili,

$$\int \frac{1}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 - \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

První integrál rozložíme jako

$$\int \frac{\frac{1}{2\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x + \sqrt{2})}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\frac{1}{4}}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}\,\mathrm{d}x.$$

Snadno spočteme, že

$$\int \frac{\frac{1}{4\sqrt{2}}(2x+\sqrt{2})}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\sqrt{2}}\log(x^2+\sqrt{2}x+1).$$

Dále,

$$\int \frac{\frac{1}{4}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{(\sqrt{2}x+1)^2+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1).$$

Obdobným postupem dostaneme i primitivní funkci

$$\int \frac{-\frac{1}{2\sqrt{2}}x+\frac{1}{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x = -\log(x^2-\sqrt{2}x+1) + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1).$$

Celkem tedy

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(\log(x^2+\sqrt{2}x+1) - \log(x^2-\sqrt{2}x+1)) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{2}}(\arctan(\sqrt{2}x+1) + \arctan(\sqrt{2}x-1)).\end{aligned}$$

♠

Cvičení 5.1.17

Spočtěte

$$\int \frac{1}{x(1+x)(1+x+x^2)}\,\mathrm{d}x.$$

5.2 Riemannův integrál

V této sekci si ukážeme velmi intuitivní způsob, jak počítat *orientovanou* plochu sevřenou grafem dané funkce a osou x. Spojením *orientovaná plocha* zde neznačí to, jež bychom přirozeně nazvali „obsahem“ útvaru mezi grafem funkce a osou x, nýbrž rozdíl obsahu útvaru takto vzniknuvšího **nad** osou x a toho **pod** osou x. Fyzikální využití takového konceptu jsou výrazně širší.

Je velmi překvapivé, že obsah pod grafem funkce jakkoli souvisí s její primitivní funkcí. Toto spojení, jeho příčina a intuitivní vysvětlení budou zveřejněny v sekci o Newtonově integrálu.

Riemannův integrál je způsob výpočtu řečené plochy, který a priori s primitivní funkcí nesouvisí nijak. Pracuje na přirozeném principu aproximace plochy pod grafem funkce stále větším množstvím stále užších obdélníku (útvarů, jejichž obsah jsme schopni triviálně spočíst) jednou seshora, jednou zespoda. Blíží-li se zvyšováním počtu obdélníků k sobě tyto aproximace, jejich společná limita je právě plochou pod grafem funkce. K formalizaci tohoto odstavce potřebujeme několik úvodních definic.

Definice 5.2.1 (Dělení intervalu)

Ať $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Jeho *dělením* nazveme libovolnou konečnou posloupnost $x_0, \dots, x_n$ pro $n \in \mathbb{N}$, kde $x_0 = a, x_n = b$ a platí $x_{i-1} < x_i$ pro každé $1 \leq i \leq n$.

Takovou posloupnost značíme $D = (x_i)_{i=0}^n$ a délku nejdelšího intervalu tvaru $[x_i, x_{i+1}]$ nazveme *normou* D, značenou
$$\|D\| \coloneqq \max_{1 \leq i \leq n} (x_i - x_{i-1}).$$
Jsou-li D', D dvě dělení $[a,b]$, pak říkáme, že D' *zjemňuje* D (značíme $D' \leq D$), patří-li každý dělící bod D rovněž do D'. Speciálně, D zjemňuje samo sebe.

Definice 5.2.2 (Horní a dolní součty)

Ať $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **omezená** funkce a D dělení $[a,b]$. Definujeme hodnotu

$$\overline{S}(f,D) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} \sup_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}), \text{ resp.}$$
$$\underline{S}(f,D) \coloneqq \sum_{i=0}^{n} \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

a nazýváme ji *horním*, resp. *dolním*, součtem f při dělení D. Zde výraz $\sup_{[x_{i-1},x_i]} f$, resp. $\inf_{[x_{i-1},x_i]} f$, značí supremum, resp. infimum, funkce f na intervalu $[x_{i-1}, x_i]$.

Užitím horních a dolních součtů je již přímočaré definovat „plochu pod funkcí“. Totiž, horní součty jsou právě aproximací grafu f seshora posloupností obdélníků o šířkách přesně odpovídajících délkám dělících intervalů (tj. $x_i - x_{i-1}$) a výškách $\sup_{[x_{i-1},x_i]} f$, a dolní součty zase aproximací grafu f zespoda obdélníky o stejných šířkách a výškách $\inf_{[x_{i-1},x_i]} f$.

Nyní vezmeme *nejlepší možné* aproximace plochy pod grafem f seshora i zespoda. Uděláme to tak, že „vyzkoušíme“ úplně všechna dělení $[a,b]$ a z nich vybereme to, jež dává nejmenší horní součty. Formálně, vezmeme infimum horních součtů přes všechna možná dělení $[a,b]$. Z druhé strany zase supremum dolních součtů přes všechna dělení $[a,b]$. Je dobré si rozmyslet, že je-li plocha pod grafem funkce „aproximovatelná“ pomocí obdélníků, pak tento postup skutečně dává kýženou hodnotu orientované plochy.

Definice 5.2.3 (Riemannův integrál)

Ať $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **omezená** funkce. Definujeme hodnotu

$$\overline{\int_a^b} f \coloneqq \inf\{\overline{S}(f,D) \mid D \text{ dělení } [a,b]\}, \text{ resp.,}$$
$$\underline{\int_a^b} f \coloneqq \sup\{\underline{S}(f,D) \mid D \text{ dělení } [a,b]\},$$

a nazýváme ji *horním Riemannovým integrálem*, resp. *dolním Riemannovým integrálem*, funkce f na $[a,b]$.

Platí-li

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f,$$

říkáme, že funkce f *má Riemannův integrál* na $[a, b]$, což symbolicky značíme $f \in \mathcal{R}(a, b)$. Společnou hodnotu obou integrálů poté zkrátka $\int_a^b f$ a říkáme jí *Riemannův integrál* funkce f na $[a, b]$.

Varování 5.2.4

Riemannův integrál je definován pouze pro **omezenou** funkci na **uzavřeném** intervalu.

Důvodem předpokladu omezenosti je potřeba dobré definovanosti horních a dolních součtů. U neomezených funkcí mohou být hodnoty $\sup_{[x_{i-1},x_i]} f$ a $\inf_{[x_{i-1},x_i]} f$ totiž nekonečné.

Předpoklad uzavřenosti intervalu existuje v zásadě ze stejného důvodu. Při definici dělení otevřeného intervalu a následně součtů dané funkce při tomto dělení by byl jeden nucen studovat limitní chování takové funkce v jeho krajních bodech.

Následuje několik tvrzení o vlastnostech dělení uzavřených intervalů a Riemannova integrálu, která později pomohou sloučit tento s konceptem primitivní funkce.

Lemma 5.2.5 (Vlastnosti dělení)

Nechť $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce.

(a) *Ať D, D' jsou dělení $[a, b]$ a $D' \leq D$. Potom*

$$\underline{S}(f, D) \leq \underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D).$$

(b) *Ať D_1, D_2 jsou libovolná dělení $[a, b]$. Pak*

$$\underline{S}(f, D_1) \leq \overline{S}(f, D_2)$$

(c) *Platí*

$$\underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f.$$

Důkaz. Bod (a) dokážeme v případě, kdy D' má oproti D přesně jeden dělící bod navíc. Zbytek důkazu je triviální využití indukce. Poznamenejme, že prostřední nerovnost (tj. $\underline{S}(f, D') \leq \overline{S}(f, D')$) plyne přímo z definice. Označme $D = (x_i)_{i=0}^n$ a ať D' má navíc dělící bod $y \in (x_{i-1}, x_i)$ pro jisté $i \in \{1, \ldots, n\}$. Potom

$$\underline{S}(f, D') - \underline{S}(f, D) = \inf_{[x_{i-1},y]} f \cdot (y - x_{i-1}) + \inf_{[y,x_i]} f \cdot (x_i - y) - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}),$$

neboť $\underline{S}(f, D)$ sdílí s $\underline{S}(f, D')$ všechny sčítance typu $\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \cdot (x_j - x_{j-1})$ pro $j \neq i$. Jistě platí

$$\inf_{[x_{i-1},x_i]} f \leq \inf_{[x_{i-1},y]} f \quad \text{a} \quad \inf_{[x_{i-1},x_i]} f \leq \inf_{[y,x_i]} f,$$

čili lze odhadnout

$$\begin{aligned}\underline{S}(f,D') - \underline{S}(f,D) &= \inf_{[x_{i-1},y]} f\cdot(y-x_{i-1}) + \inf_{[y,x_i]} f\cdot(x_i-y) - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(x_i-x_{i-1})\\ &\geq \inf_{[x_{i-1},x_i]} f\cdot(y-x_{i-1}+x_i-y-x_i+x_{i-1}) = 0,\end{aligned}$$

což po přeuspořádání dá ihned

$$\underline{S}(f,D') \geq \underline{S}(f,D).$$

Třetí nerovnost, $\overline{S}(f,D') \leq \overline{S}(f,D)$, se dokáže obdobně.

Pro důkaz (b) uvažme dělení D zjemňující jak D_1, tak D_2. Potom podle bodu (a) platí

$$\underline{S}(f,D_1) \leq \underline{S}(f,D) \leq \overline{S}(f,D) \leq \overline{S}(f,D_2),$$

což je přímo dokazovaná nerovnost.

Bod (c) plyne okamžitě z (b) a definice Riemannova integrálu. ■

Znění předchozího lemmatu je vyjádření geometricky intuitivního faktu, že libovolný odhad plochy pod funkcí posloupností obdélníků seshora je vždy vyšší než odhad téhož posloupností obdélníku zespoda. Jeden přímočarý důsledek je následující.

Důsledek 5.2.6

Ať $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce. Položme $m \coloneqq \inf_{[a,b]} f$ a $M \coloneqq \sup_{[a,b]} f$. Pak pro libovolné D dělení $[a,b]$ platí

$$m(b-a) \overset{(1)}{\leq} \underline{S}(f,D) \overset{(2)}{\leq} \underline{\int_a^b} f \overset{(3)}{\leq} \overline{\int_a^b} f \overset{(4)}{\leq} \overline{S}(f,D) \overset{(5)}{\leq} M(b-a).$$

Důkaz. Nerovnosti (2), (3) a (4) plynou ihned z definic.

Dále pak (1), resp. (5), plyne okamžitě z předchozího lemmatu dosazením za D_1, resp. za D_2, triviální dělení $D' \coloneqq (x_0,x_1) = (a,b)$. Platí totiž

$$\underline{S}(f,D') = \inf_{[a,b]} f\cdot(b-a) = m(b-a) \quad \text{a} \quad \overline{S}(f,D') = \sup_{[a,b]} f\cdot(b-a) = M(b-a).$$ ■

Nyní dokážeme technické tvrzení, které nám posléze umožní Riemannův integrál z definice počítat. Je vyjádřením idey, že dolní, resp. horní, Riemannův integrál lze libovolně dobře aproximovat dolním, resp. horním, součtem přes vhodné dělení příslušného intervalu. Vzhledem k definici dolního, resp. horního, Riemannova integrálu jako suprema dolních, resp. infima horních, součtů snad není tento fakt příliš překvapivý. Dlužno podotknout, že platnost podobných tvrzení se obyčejně stanovuje důkazovou technikou *mávnutí ruky*, ne však při bakalářském studiu.

Věta 5.2.7 (Aproximace Riemannova integrálu)

Ať $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce. Pak pro $\varepsilon > 0$ libovolně malé existuje

$\delta > 0$ takové, že kdykoli je $D = (x_i)_{i=0}^n$ dělení $[a,b]$ s normou $\|D\| < \delta$, pak

$$\overline{\int_a^b} f \le \overline{S}(f,D) \le \overline{\int_a^b} f + \varepsilon, \tag{5.1}$$

$$\underline{\int_a^b} f \ge \underline{S}(f,D) \ge \underline{\int_a^b} f - \varepsilon. \tag{5.2}$$

Důkaz. Poznamenejme, že omezenost f na $[a,b]$ dává existenci čísla $K > 0$ takového, že $|f(x)| < K$ pro $x \in [a,b]$. Speciálně tedy $\sup_{[a,b]} f \le K$ a $\inf_{[a,b]} f \ge -K$.

Dokážeme například pár nerovností v (5.1). Nerovnosti v (5.2) se dokazují analogicky. Všimněme si nejprve, že první nerovnost v (5.1) plyne ihned z definice Riemannova integrálu. Důkaz té druhé je poněkud komplikovaný. Totiž, připomeňme zmíněnou definici:

$$\overline{\int_a^b} f = \inf\{\overline{S}(f,D) \mid D \text{ dělení } [a,b]\}.$$

Z definice infima existuje nějaký prvek množiny napravo, tedy nějaké dělení D_0 intervalu $[a,b]$, takové, že

$$\overline{S}(f,D_0) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon,$$

protože $\overline{\int_a^b} f$ je *nejmenší* dolní závorou množiny horních součtů přes všechna možná dělení intervalu $[a,b]$. Proč toto není konec důkazu? Protože o normě D_0 nemůžeme říct vůbec nic. My nepotřebujeme nalézt dělení, které dobře (závisle na ε) aproximuje $\overline{\int_a^b} f$, ale ukázat, že *úplně každé* dělení s dostatečně malou normou jej aproximuje dobře. Ukážeme, že (až na konstantu) stačí, aby tato norma byla maximálně tak velká jako délka nejmenšího z dělících intervalů v D_0.

Označme tedy $D_0 = (x_i)_{i=0}^n$, nechť $\mu(D_0) \coloneqq \min\{x_i - x_{i-1} \mid 1 \le i \le n\}$ a položme $\delta_1 \coloneqq \min\{\mu(D_0), \varepsilon\}$. Ať je nyní D libovolné dělení $[a,b]$ s $\|D\| < \delta_1$. Definujme nové dělení P intervalu $[a,b]$ sestávající ze všech dělících bodů D i D_0. Neformálně můžeme psát $P = D \cup D_0$. Pro pohodlí označme písmenem $\mathcal{D}$ množinu všech intervalů v dělení D a $\mathcal{P}$ množinu všech intervalů v dělení P. Z definice

$$\overline{S}(f,D) = \sum_{I \in \mathcal{D}} \sup_I f \cdot \ell(I),$$

$$\overline{S}(f,P) = \sum_{I \in \mathcal{P}} \sup_I f \cdot \ell(I),$$

kde, připomeňme, $\ell(I)$ značí délku intervalu I.

Vezměme libovolný $I \in \mathcal{D}$. Mohou nastat dva případy:

(1) I leží rovněž v $\mathcal{P}$. Potom je sčítanec $\sup_I f \cdot \ell(I)$ přítomen jak v součtu $\overline{S}(f,D)$, tak v $\overline{S}(f,P)$.

(2) I neleží v $\mathcal{P}$. Pak vnitřek tohoto intervalu protíná nějaký dělící interval v D_0. To jest, existuje index $j \in \{0,\dots,n\}$ takový, že x_j leží ve vnitřku (není krajním bodem) intervalu

I. Jelikož bylo však D zvoleno tak, že $\|D\| < \mu(D_0)$ – slovy, nejdelší interval v D je kratší než nejkratší interval v D_0 – existuje takový index j *právě jeden*.

Nadále předpokládejme, že nastal případ (2) a označme $I = [\alpha, \beta]$. Pak $x_j \in (\alpha, \beta)$. V $\overline{S}(f, D)$ se nachází sčítanec $\sup_I f \cdot (\beta - \alpha)$, zatímco v $\overline{S}(f, P)$ na místě tohoto sčítance máme

$$\sup_{[\alpha,x_j]} f \cdot (x_j - \alpha) + \sup_{[x_j,\beta]} f \cdot (\beta - x_j).$$

Jejich rozdíl odhadneme

$$\begin{aligned}&|\sup_{[\alpha,\beta]} f \cdot (\beta - \alpha) - (\sup_{[\alpha,x_j]} f \cdot (x_j - \alpha) + \sup_{[x_j,\beta]} f \cdot (\beta - x_j))|\\ &\le K(\beta - \alpha) + K(x_j - \alpha) + K(\beta - x_j) = 2K(\beta - \alpha) \le 2K \cdot \|D\|.\end{aligned}$$

Protože D_0 má $n + 1$ dělících bodů, může případ (2) nastat pro maximálně n intervalů z $\mathcal{D}$. Celkem tedy

$$|\overline{S}(f, D) - \overline{S}(f, P)| \le 2K \cdot n \cdot \|D\|$$

a speciálně $\overline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, P) + 2Kn\|D\|$. Odtud již přímočaře spočteme

$$\overline{\int_a^b} f \le \overline{S}(f, D) \le \overline{S}(f, P) + 2Kn\|D\| = \overline{S}(f, D_0) + 2Kn\varepsilon < \overline{\int_a^b} f + (2Kn + 1)\varepsilon,$$

kde předposlední nerovnost plyne z toho, že $P \le D_0$ a z volby $\|D\| < \varepsilon$ a poslední nerovnost z volby D_0 na začátku důkazu. Protože $2Kn + 1$ je konstanta nezávislá na ε, je tímto důkaz (5.1) dokončen.

Podobně bychom nalezli $\delta_2 > 0$, pro něž platí (5.2). Volba $\delta \coloneqq \min(\delta_1, \delta_2)$ zakončuje důkaz. ■

Nyní si zformulujeme dva důsledky právě dokázané věty, které nám umožní hodnotu Riemannova integrálu spočíst jako limitu posloupnosti horních (či dolních) součtů přes dělení se stále menší normou.

Důsledek 5.2.8

Ať $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce a $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost dělení $[a, b]$ splňující $\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$. *Potom*

$$\overline{\int_a^b} f = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) \quad a \quad \underline{\int_a^b} f = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n).$$

Důkaz. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Podle věty 5.2.7 k němu existuje $\delta > 0$, že pro každé dělení D s $\|D\| < \delta$ platí

$$\overline{S}(f, D) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon.$$

Nalezněme index $n_0 \in \mathbb{N}$ takový, že pro $n \ge n_0$ je $\|D_n\| < \delta$. Pak ale rovněž pro každé $n \ge n_0$ máme odhady

$$\overline{\int_a^b} f \le \overline{S}(f, D_n) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon,$$

což dokazuje, že

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \overline{\int_a^b} f.$$

Druhá rovnost se dokáže obdobně. ■

Důsledek 5.2.9

Ať $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omezená funkce a $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost dělení taková, že

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n).$$

Potom $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a platí

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n).$$

Důkaz. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí

$$\underline{S}(f, D_n) \leq \underline{\int_a^b} f \leq \overline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f, D_n),$$

což podle lemmatu **??** znamená, že

$$\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n),$$

jak jsme chtěli. ■

Příklad 5.2.10

Poslední dva důsledky dávají vcelku přímočarý, ač výpočetně obvykle nesnadný postup výpočtu Riemannova integrálu. Vypadá následovně.

(1) Nalezneme posloupnost dělení $[a, b]$ s klesající normou. Volba „vhodné“ posloupnosti dělení závisí velmi na zadané funkci. Možností je nespočetně.

(2) Pomocí důsledku 5.2.9 dokážeme, že Riemannův integrál z f na $[a, b]$ existuje.

(3) Důsledek 5.2.8 pak říká, že jeho hodnota je rovna limitě horních, nebo dolních, součtů přes zvolenou posloupnost dělení.

Body (2) a (3) všedně splývají v jeden, neboť bod (2) káže ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n),$$

což obvykle zahrnuje explicitní výpočet obou limit jsoucí obsahem bodu (3).

Navržený postup vykreslíme výpočtem integrálu

$$\int_0^1 x^2 \, dx.$$

Volme například posloupnost rovnoměrných dělení intervalu $[0, 1]$ danou předpisem

$$D_n \coloneqq \left\{\frac{i}{n}\right\}_{i=0}^{n}.$$

Protože $f(x) = x^2$ je rostoucí spojitá funkce na $[0, 1]$ je její infimum na každém dělícím intervalu přesně její hodnota v levém krajním bodě a její supremum zase ta v pravém. Délka každého intervalu v D_n je přesně $1/n$, takže pro $n \in \mathbb{N}$ dostáváme

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n};$$
$$\overline{S}(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n}.$$

Upravíme

$$\underline{S}(f, D_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i^2.$$

Snadná indukce dá

$$\sum_{i=0}^{n-1} i^2 = n(n-1)(2n-1)$$

pro každé $n \geq 1$. Čili,

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)(2n-1)}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Podobně spočteme, že rovněž

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{3}.$$

Podle důsledku 5.2.9 existuje Riemannův integrál z funkce f na $[0, 1]$. Důsledek 5.2.8 pak dává, že

$$\int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) = \frac{1}{3}.$$

Cvičení 5.2.11

Spočtěte následující Riemannovy integrály:

(1) z funkce $f(x) = x^3$ na intervalu $[0, 1]$;

(2) z funkce $f(x) = 7x + 2$ na intervalu $[-2, 3]$.

5.2.1 Integrovatelné funkce

Chvíli se budeme zabývat nalezením jistých obecných kritérií pro funkce, jejichž splnění již zaručuje existenci jejich Riemannova integrálu. Snad překvapivě, kompletní charakterizace integrovatelných funkcí je otevřený problém a žádný jejich přímočarý popis není znám. My si ukážeme, že dvě důležité třídy funkcí – spojité a monotónní – integrovatelné vždy jsou.

Za tímto účelem vyžadujeme jedno technické lemma.

Lemma 5.2.12 (Kritérium existence integrálu)

Ať $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Pak jsou následující tvrzení ekvivalentní.

(1) $f \in \mathcal{R}(a,b)$;

(2) Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje D, dělení $[a,b]$, takové, že

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Důkaz. Začneme implikací (1) $\Rightarrow$ (2). Ať tedy $f \in \mathcal{R}(a,b)$ a $\varepsilon > 0$ je dáno. Z definic suprema a infima nalezneme dělení D_1 a D_2 taková, že

$$\overline{S}(f,D_1) < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon = \int_a^b f + \varepsilon \quad \text{a} \quad \underline{S}(f,D_2) > \underline{\int_a^b} f - \varepsilon = \int_a^b f - \varepsilon.$$

Nechť D je dělení zjemňující D_1 i D_2. Potom podle lemmatu 5.2.5 platí

$$\begin{aligned}\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) &\leq \overline{S}(f,D_1) - \underline{S}(f,D_2)\\ &\leq \int_a^b f + \varepsilon - \int_a^b f + \varepsilon = 2\varepsilon,\end{aligned}$$

jak jsme chtěli.

Pro důkaz (2) $\Rightarrow$ (1) mějme rovněž dáno $\varepsilon > 0$ a nalezněme dělení D splňující

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Potom ale

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leq \overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon,$$

čili

$$\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f,$$

což znamená, že $f \in \mathcal{R}(a,b)$. ■

Užitím tohoto lemmatu můžeme ihned dokázat, že monotónní funkce jsou vždy integrovatelné.

Tvrzení 5.2.13 (Integrovatelnost monotónní funkce)

Ať f je monotónní funkce na intervalu $[a,b]$. Pak $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Důkaz. Předpokládejme například, že f je neklesající. Zbylé tři případy se dokazují v zásadě stejně. Funkce f je v tomto případě jistě omezená, neboť $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ pro každé

$x \in [a, b]$. Nyní využijeme lemma 5.2.12. Ať je tedy $\varepsilon > 0$ dáno. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ dostatečně velké, aby

$$\frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{n} < \varepsilon.$$

Zde $(b-a)(f(b)-f(a))$ je obsah obdélníku obklopujícího celou plochu pod f na $[a, b]$, neboť f je neklesající. Volba řečeného $n \in \mathbb{N}$ představuje jeho rozdělení na dostatečně mnoho proužků, aby každý jeden proužek měl obsah nižší než dané číslo ε. Volme dělení $D = (x_i)_{i=0}^n$ tak, aby dolní rohy těchto proužků byly přesně dělícími body; symbolicky

$$x_i \coloneqq a + \frac{b-a}{n} i, \text{ pro } i \in \{0, \dots, n\}.$$

Nahlédněme, že z monotonie f plynou rovnosti

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_i) \quad \text{a} \quad \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f = f(x_{i-1})$$

pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Pročež můžeme odhadnout

$$\begin{aligned}
\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^n \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n \Big(\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \Big)(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1}))(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (f(x_i) - f(x_{i-1})) \frac{b-a}{n} \\
&= (f(b) - f(a)) \frac{b-a}{n} < \varepsilon,
\end{aligned}$$

což podle lemmatu 5.2.12 znamená, že $f \in \mathcal{R}(a, b)$. ■

Abychom rovněž dokázali, že spojité funkce jsou integrovatelné, odbočíme na krátkou chvíli k pojmu *stejnosměrně spojité* funkce. Jde o pojem důležitý primárně při studiu funkcí daných nekonečným součtem (jakými jsou například funkce elementární) a je ten vlastně zesílením vlastnosti spojitosti o požadavek, že daná funkce „roste všude stejně rychle". Z toho důvodu nedává pojem stejnosměrné spojitosti *v bodě* žádný smysl, nýbrž je potřeba určit interval, na němž má být funkce stejnosměrně spojitá. Uvedeme nyní definici a srovnáme ji s již známou limitní definicí spojitosti.

Definice 5.2.14 (Stejnoměrná spojitost)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je *stejnoměrně spojitá* na I, pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in I : |x - y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{5.3}$$

Onen zásadní rozdíl mezi spojitostí a stejnoměrnou spojitostí funkce dlí ve faktu, že spojitost je vlastnost *lokální*, ovšem stejnoměrná spojitost je vlastnost *globální*. Abychom toto nahlédli, přepíšeme definici spojitosti funkce na intervalu, aby byla co nejblíže definici spojitosti stejnoměrné.

Funkce $f : I \to \mathbb{R}$ je spojitá na I, když je spojitá v každém jeho bodě (zde se projevuje ona „lokálnost"), tedy, když pro každé $y \in I$ platí, že

$$\lim_{x \to y} f(x) = f(y).$$

Přepsáno přes definici limity, tento výrok zní

$$\forall y \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in R(y,\delta) : f(x) \in B(f(y),\varepsilon).$$

Můžeme výrok dále přepsat v absolutních hodnotách s užitím implikace.

$$\forall y \in I\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in I : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon.$$

Srovnejte výrok výše s (5.3). Liší se pouze pozicí termu $\forall y \in I$. Tento zdánlivě bezvýznamný rozdíl je však zásadní. Značí totiž, že čísla ε i δ v definici spojitosti závisejí na volbě bodu $y \in I$, kolem nějž spojitost funkce „měříme", zatímco v definici *stejnoměrné* spojitosti nesmí rozdíl hodnot funkce f v libovolných dvou bodech vzdálených maximálně δ překročit ε. Druhá vlastnost je tudíž závislá na volbě vzdálenosti ε a naopak zcela oddělena od volby konkrétního páru bodů v intervalu I.

Příklad 5.2.15

Stejnoměrná spojitost je zřejmě (aspoň *intuitivně* zřejmě) silnější vlastnost než pouhá spojitost. Rigorózní důkaz následuje. Například funkce $f(x) = 1/x$ je *spojitá* na intervalu $(0,1)$, ale není tamže *stejnoměrně spojitá.*

Vskutku, platí, že

$$\lim_{x\to y} \frac{1}{x} = \frac{1}{y}$$

pro každé $y \in (0,1)$. Naopak, volme třeba $\varepsilon \coloneqq 1$. Pak žádná volba $\delta > 0$ nezaručí, že $|1/x - 1/y| < 1$, kdykoli $|x-y| < \delta$. Problém, je totiž v tom, že čím blíže jsme bodu 0, tím rychleji se od sebe funkční hodnoty v různých bodech vzdalují. Formálně, ať je dána libovolná vzdálenost $\delta > 0$. Nalezneme $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \delta$. Potom pro $x = 1/n$ a $y = 1/(n+1)$ platí

$$|x-y| = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right| = \left|\frac{1}{n(n+1)}\right| < \delta,$$

ale přesto

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = |n-(n+1)| = 1 \not< \varepsilon.$$

Tedy, $1/x$ není stejnoměrně spojitá na $(0,1)$.

Stejnoměrně spojité funkce jsou vždy spojité, ale, jak jsme právě viděli, opačná implikace neplatí. Uvedli jsme je však z toho důvodu, že jest-li I *uzavřený* interval, pak opačná implikace pravdivosti nabývá.

Tvrzení 5.2.16

Každá stejnoměrně spojitá funkce je spojitá.

Důkaz. Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je stejnoměrně spojitá na I. Ukážeme, že f je spojitá v každém bodě $a \in I$. Ať je vzdálenost $\varepsilon > 0$ dána. Pro toto ε existuje z definice stejnoměrné spojitosti $\delta > 0$ takové, že pro každá dvě $x, y \in I$ s $|x-y| < \delta$ je $|f(x)-f(y)| < \varepsilon$. Speciálně, volbou $y \coloneqq a$ dostaneme, že $|x-a| < \delta$ implikuje $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$. To je ale pouze přepis výroku, že pro všechna $x \in B(a,\delta)$ je $f(x) \in B(f(a),\varepsilon)$, čili $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ a f je spojitá v a. ■

Věta 5.2.17

Je-li $I = [a,b]$ uzavřený interval, pak f je stejnoměrně spojitá na I, právě když je na I spojitá.

Důkaz. Z tvrzení 5.2.16 víme, že je-li f na I stejnoměrně spojitá, pak je tamže spojitá. Dokážeme opačnou implikaci tak, že z stejnoměrné nespojitosti f odvodíme nespojitost.

Ať tedy f není stejnoměrně spojitá na $[a,b]$, to jest,

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x, y \in [a,b] : |x-y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon. \tag{5.4}$$

Dokážeme, že existuje bod $x \in [a,b]$ takový, že $\lim_{t\to x} f(t) \neq f(x)$ použitím Heineho věty. Mějme $\varepsilon > 0$ z výroku (5.4). Pak pro každé $n \in \mathbb{N}$ dostaneme volbou $\delta \coloneqq 1/n$ existenci bodů $x_n, y_n \in [a,b]$ takových, že

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \wedge |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

Protože $a \leq x_n \leq b$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ je posloupnost x_n omezená. Díky Bolzanově-Weierstraßově větě můžeme předpokládat, že je konvergentní. Z lemmatu ?? platí $x \coloneqq \lim_{n\to\infty} x_n \in [a,b]$. Jelikož

$$|x - y_n| \leq |x - x_n| + |x_n - y_n| \leq |x - x_n| + \frac{1}{n},$$

neboli $\lim_{n\to\infty} |x - y_n| = 0$, rovněž $\lim_{n\to\infty} y_n = x$. Pro spor předpokládejme, že f je spojitá v x. Podle Heineho věty platí

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n).$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ máme

$$0 \leq |f(x_n) - f(y_n)| \leq |f(x_n) - f(x)| + |f(x) - f(y_n)|,$$

ale také

$$\lim_{n\to\infty} (|f(x_n) - f(x)| + |f(x) - f(y_n)|) = 0,$$

odkud

$$\lim_{n\to\infty} |f(x_n) - f(y_n)| = 0,$$

což je ve sporu s tím, že $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Tedy, f není spojitá v x, což zakončuje důkaz. ■

Závěrem pododdílu konečně dokážeme, že spojité funkce jsou integrovatelné.

Věta 5.2.18 (Integrovatelnost spojité funkce)

Ať je f spojitá na $[a,b]$. Pak $f \in \mathcal{R}(a,b)$.

Důkaz. Podle věty 1.3.9 nabývá f na $[a,b]$ maxima i minima, tudíž je na $[a,b]$ omezená. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Nalezneme dělení D takové, že

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Tím bude díky lemmatu 5.2.12 důkaz hotov.

Podle věty 5.2.17 je f stejnosměrně spojitá na $[a, b]$. Čili k danému ε existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x, y \in [a, b]$ platí $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Volme libovolné dělení $D = (x_i)_{i=0}^n$ intervalu $[a, b]$ s $\|D\| < \delta$. Protože f nabývá na každém z dělících intervalů $[x_{i-1}, x_i]$ minima i maxima (speciálně tedy **konečného** infima i suprema), platí díky stejnoměrně spojitosti

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f < \varepsilon$$

pro každé $i \in \{1, \ldots, n\}$. Počítáme

$$\begin{aligned}\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sup_{[x_{i-1},x_i]} f - \inf_{[x_{i-1},x_i]} f\Big)(x_i - x_{i-1}) \\ &< \sum_{i=1}^{n} \varepsilon(x_{i-1} - x_i) = \varepsilon(b - a),\end{aligned}$$

což bylo dokázati. ■

5.2.2 Základní věta kalkulu

Zbytek oddílu o Riemannově integrálu věnován jest důkazu *základní věty kalkulu* – tvrzení o souvislosti mezi primitivní funkcí a Riemannovým integrál její derivace. Vlastně říká, že hodnota primitivní funkce v bodě je orientovanou plochou pod její derivací od nějakého konstantního bodu do tohoto. K jeho důkazu potřebujeme jen pár základní aritmetických vlastností Riemannova integrálu.

Věta 5.2.19 (Linearita Riemannova integrálu)

Ať $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ jsou integrovatelné funkce na $[a, b]$ a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak jsou $f + g$ i αf integrovatelné na $[a, b]$ a platí

(1) $\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$;

(2) $\int_a^b \alpha f = \alpha \int_a^b f$.

Důkaz. Dokážeme vzorec (1). Ježto f i g jsou funkce omezené na $[a, b]$, je taktéž $f + g$ omezená na $[a, b]$. Snadno nahlédneme, že pro libovolný interval $I \subseteq \mathbb{R}$ platí nerovnosti

$$\begin{aligned}\inf_I f + \inf_I g &\le \inf_I (f + g), \\ \sup_I f + \sup_I g &\ge \sup_I (f + g).\end{aligned}$$

Odtud plyne, že pro libovolné dělení D intervalu $[a, b]$ máme

$$\underline{S}(f, D) + \underline{S}(g, D) \le \underline{S}(f + g, D) \le \overline{S}(f + g, D) \le \overline{S}(f, D) + \overline{S}(g, D). \tag{5.5}$$

Volme posloupnost dělení $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ s $\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$. Podle důsledku 5.2.8 a věty o aritmetice limit jest

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}(f, D_n) + \underline{S}(g, D_n) = \int_a^b f + \int_a^b g = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) + \overline{S}(g, D_n),$$

čili z nerovností (5.5) užitím lemmatu ?? rovněž

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}(f+g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n) = \int_a^b f + \int_a^b g.$$

Podle důsledku 5.2.9 nyní platí $f+g \in \mathcal{R}(a,b)$ a

$$\int_a^b (f+g) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f+g, D_n) = \lim_{n\to\infty} \underline{S}(f+g, D_n) = \int_a^b f + \int_a^b g,$$

jak jsme chtěli.

Platnost vzorce (2) se ověří podobně a její důkaz je přenechán čtenáři. ■

Cvičení 5.2.20

Dokažte vzorec (2) ve větě 5.2.19.

Věta 5.2.21 (Pár vlastností Riemannova integrálu)

Ať $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ jsou integrovatelné na $[a,b]$ a $c \in (a,b)$. Potom platí následující.

(1) Je-li $f \le g$ na $[a,b]$, pak $\int_a^b f \le \int_a^b g$;

(2) $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$;

(3) $\left|\int_a^b f\right| \le \int_a^b |f|$.

Důkaz. Tvrzení (1) je triviální. Z $f \le g$ na $[a,b]$ plyne, že pro každý interval $I \subseteq [a,b]$ jest $\sup_I f \le \sup_I g$ i $\inf_I f \le \inf_I g$, a tedy pro každé dělení D platí odhady

$$\underline{S}(f,D) \le \underline{S}(g,D) \quad \text{a} \quad \overline{S}(f,D) \le \overline{S}(g,D),$$

odkud již plyne tvrzení.

Pro důkaz (2) volme posloupnost $\{D_n^1\}_{n=0}^\infty$ dělení intervalu $[a,c]$ a posloupnost $\{D_n^2\}_{n=0}^\infty$ intervalu $[c,b]$ s $\lim_{n\to\infty} \|D_n^1\| = \lim_{n\to\infty} \|D_n^2\| = 0$. Potom posloupnost dělení D_n intervalu $[a,b]$ sestávajíc z dělících bodů D_n^1 a D_n^2 splňuje $\lim_{n\to\infty} \|D_n\| = 0$.

Předpokládejme nejprve, že $f \in \mathcal{R}(a,b)$. Ukážeme, že $f \in \mathcal{R}(a,c) \cap \mathcal{R}(c,b)$ přes lemma 5.2.12. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Nalezneme $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení D intervalu $[a,b]$ s $\|D\| < \delta$ jest

$$\overline{S}(f,D) - \underline{S}(f,D) < \varepsilon.$$

Tedy, existuje rovněž $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $n \ge n_0$ máme

$$\overline{S}(f,D_n) - \underline{S}(f,D_n) < \varepsilon.$$

Z definice D_n jest

$$\overline{S}(f,D_n) = \overline{S}(f,D_n^1) + \overline{S}(f,D_n^2) \quad \text{a} \quad \underline{S}(f,D_n) = \underline{S}(f,D_n^1) + \underline{S}(f,D_n^2).$$

Pak

$$\overline{S}(f,D_n) - \underline{S}(f,D_n) = (\overline{S}(f,D_n^1) - \underline{S}(f,D_n^1)) + (\overline{S}(f,D_n^2) - \underline{S}(f,D_n^2)) < \varepsilon.$$

Protože $\overline{S}(f, D_n^i) - \underline{S}(f, D_n^i)$, kde $i = 1, 2$, je kladné číslo, plyne z předchozího, že

$$\overline{S}(f, D_n^1) - \underline{S}(f, D_n^1) < \varepsilon \quad \text{i} \quad \overline{S}(f, D_n^2) - \underline{S}(f, D_n^2) < \varepsilon,$$

čili $f \in \mathcal{R}(a, c)$ i $f \in \mathcal{R}(c, b)$. Z důsledku 5.2.8 a věty o aritmetice limit dopočteme

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^1) + \lim_{n\to\infty} \overline{S}(f, D_n^2) = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Je-li naopak $f \in \mathcal{R}(a, c) \cap \mathcal{R}(c, b)$, pak zcela obráceným argumentem ukážeme, že $f \in \mathcal{R}(a, b)$, a stejný výpočet pak dokončuje důkaz vzorce (2).

Vzorec (3) plyne z triviálního pozorování, že

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \le \sup_I f - \inf_I f,$$

který přenecháme k ověření čtenáři. Odtud

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \le \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D)$$

pro libovolné dělení D. Je-li tedy $f \in \mathcal{R}(a, b)$ pak z lemmatu 5.2.12 rovněž $|f| \in \mathcal{R}(a, b)$, neboť pro dané $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ a dělení D s $\|D\| < \delta$ máme

$$\overline{S}(|f|, D) - \underline{S}(|f|, D) \le \overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < \varepsilon.$$

Dále, jistě platí

$$\int_a^b f \le \overline{S}(f, D) \le \overline{S}(|f|, D),$$

čili

$$\int_a^b f \le \int_a^b |f|.$$

Podle věty 5.2.19 je funkce $-f$ integrovatelná a jejím dosazením do rovnosti výše obdržíme

$$-\int_a^b f = \int_a^b -f \le \int_a^b |-f| = \int_a^b |f|.$$

Sloučení obou nerovností dává konečně

$$\left| \int_a^b f \right| \le \int_a^b |f|,$$

čímž je důkaz hotov. ■

Cvičení 5.2.22

Dokažte, že pro každý interval $I \subseteq \mathbb{R}$ a omezenou funkci $f : I \to \mathbb{R}$ platí

$$\sup_I |f| - \inf_I |f| \le \sup_I f - \inf_I f.$$

Věta 5.2.23 (Základní věta kalkulu)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a $f : I \to \mathbb{R}$ je funkce integrovatelná na každém podintervalu $[a, b] \subseteq I$. Pak pro libovolné $c \in I$ je funkce

$$F(x) \coloneqq \int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

spojitá na I a pro všechna $x_0 \in I$, v nichž je f spojitá, platí $F'(x_0) = f(x_0)$.

Důkaz. Nejprve ukážeme, že F je spojitá na I. Ať $y_0 \in I$ leží ve vnitřku I (pro krajní body bychom postupovali obdobně, akorát bychom nahradili příslušné limity jednostrannými variantami). Díky tomuto předpokladu lze nalézt $\delta > 0$ takové, že $[y_0 - \delta, y_0 + \delta] \subseteq I$. Podle předpokladu je f integrovatelná na $[y_0 - \delta, y_0 + \delta]$, tedy je tamže omezená například číslem $K > 0$. Pro $y \in [y_0 - \delta, y_0 + \delta]$ odhadujme

$$|F(y) - F(y_0)| = \left| \int_c^y f - \int_c^{y_0} f \right| \overset{(\alpha)}{=} \left| \int_y^{y_0} f \right| \overset{(\beta)}{\leq} \int_y^{y_0} |f| \leq K|y - y_0|,$$

kde rovnost (α) plyne z věty 5.2.21, části (2), a nerovnost (β) z téže věty, části (3). Odtud

$$\lim_{y \to y_0} |F(y) - F(y_0)| = 0,$$

čili $\lim_{y \to y_0} F(y) = F(y_0)$ a F je spojitá v y_0.

Pokračujme důkazem, že v bodech spojitosti f platí $F' = f$. Ať je tedy $x_0 \in I$ takovým bodem. Volme $\varepsilon > 0$. K němu z definice limity existuje $\delta > 0$ takové, že pro $x \in B(x_0, \delta)$ jest $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Počítejme (opět za pomoci věty 5.2.21)

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \left| \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - f(x_0) \right| \\
&= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t - \int_{x_0}^x f(x_0)\,\mathrm{d}t \right| \\
&\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t \right| \\
&< \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x \varepsilon\,\mathrm{d}t \right| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Z tohoto výpočtu plyne, že

$$\lim_{x \to x_0} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| = 0,$$

neboli

$$F'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0),$$

jak jsme chtěli. ■

Poznámka 5.2.24

Základní věta kalkulu dává mimo jiné geometrický pohled na fakt, že se dvě různé primitivní funkce liší o konstantu. Vyjadřují totiž orientovanou plochu pod svojí derivací od dvou různých počátečních bodů.

Koncem oddílu uvedeme technické lemma, které později použijeme k důkazu ekvivalence Newtonova a Riemannova integrálu.

Lemma 5.2.25

Ať $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je funkce (ne nutně omezená). Pak jsou následující výroky ekvivalentní.

(1) $f \in \mathcal{R}(a, b)$*;*

(2) Existuje číslo $I \in \mathbb{R}$ takové, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ splňující: kdykoli je $D = (x_i)_{i=0}^n$ dělení $[a, b]$ s $\|D\| < \delta$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i], i \in \{1, \dots, n\}$, libovolné body ležící v dělících intervalech, tak

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| < \varepsilon. \tag{5.6}$$

Důkaz. Dokážeme implikaci (1) $\Rightarrow$ (2). Ať $f \in \mathcal{R}(a, b)$ a položme $I \coloneqq \int_a^b f$. Nechť je $\varepsilon > 0$ dáno. Podle lemmatu 5.2.12 existuje k tomuto $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $D = (x_i)_{i=0}^n$ s $\|D\| < \delta$ platí

$$I - \varepsilon = \int_a^b f - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \overline{S}(f, D) < \int_a^b f + \varepsilon = I + \varepsilon.$$

Pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$ a $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ zřejmě platí

$$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f \leq f(t_i) \leq \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f,$$

čili

$$I - \varepsilon < \underline{S}(f, D) \leq \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \overline{S}(f, D) < I + \varepsilon,$$

takže (5.6) platí.

Ad (2) $\Rightarrow$ (1). Nejprve je třeba ukázat, že f je omezená. Pro $\varepsilon \coloneqq 1$ nalezneme z platnosti výroku (2) číslo $\delta > 0$ takové, že pro jakoukoli volbu $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ jest

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right| < \varepsilon.$$

Položme

$$\begin{aligned} \mu(D) &\coloneqq \min\{x_i - x_{i-1} \mid \in \{1, \dots, n\}\}, \\ K &\coloneqq \max\{|f(x_i)| \mid i \in \{0, \dots, n\}\}. \end{aligned}$$

Ať $t \in [a, b]$. Nalezneme index $j \in \{1, \dots, n\}$ takový, že $t \in [x_{j-1}, x_j]$. Volme body

$$t_i \coloneqq \begin{cases} t, & i = j, \\ x_i, & i \neq j. \end{cases}$$

Potom můžeme odhadnout

$$\begin{aligned} |f(t)(x_j - x_{j-1})| &= \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I + I - \sum_{i \neq j} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\leq \left| \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| + |I| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(x_i - x_{i-1})| \\ &\leq 1 + |I| + \sum_{i=1}^{n} K(x_i - x_{i-1}) = 1 + |I| + K(b - a). \end{aligned}$$

Odtud,

$$|f(t)| \leq \frac{1}{\mu(D)}(1 + |I| + K(b - a)),$$

čili f je omezená, neboť $t \in [a, b]$ bylo voleno libovolně.

Pro důkaz integrovatelnosti f použijeme opět lemma 5.2.12. Ať je nyní $\varepsilon > 0$ dáno libovolné a nalezněme z (2) číslo $\delta > 0$ a mějme určeno dělení $D = (x_i)_{i=0}^{n}$ splňující $\|D\| < \delta$. Z definice suprema nalezněme body $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ takové, že

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f < f(t_i) + \varepsilon$$

pro každé $i \in \{1, \dots, n\}$. Pak

$$\begin{aligned} \overline{S}(f, D) &= \sum_{i=1}^{n} \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f \cdot (x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} (f(t_i) + \varepsilon)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + \varepsilon(b - a) < I + \varepsilon + \varepsilon(b - a). \end{aligned}$$

Podobně odhadneme i

$$\underline{S}(f, D) > I - \varepsilon - \varepsilon(b - a).$$

Celkem dostaneme, že

$$\overline{S}(f, D) - \underline{S}(f, D) < 2(1 + b - a)\varepsilon,$$

takže $f \in \mathcal{R}(a, b)$ z lemmatu 5.2.12. ∎

5.3 Newtonův integrál

Základní věta kalkulu nabízí druhou metodu výpočtu orientované plochy pod danou funkcí. Jsou-li splněny její předpoklady, pak

$$\int_a^b f = F(b) - F(a) \tag{5.7}$$

pro reálnou funkci F definovanou jako $F(x) \coloneqq \int_c^x f$ s jistou konstantou $c \in (a,b)$ a všechna $x \in [a,b]$. Přestože historicky je „definice“ integrálu v (5.7) ta původní, my k ní docházíme teprve prostřednictvím integrálu Riemannova. Lze tvrdit, že tato cesta je více přirozená, stavějíc intuitivní definici plochy před tu odvozenou z vlastností primitivních funkcí, jež – na první pohled zcela jistě – s orientovanou plochou nikterak nesouvisí.

Výhodou takto definovaného integrálu je jeho existence i pro jisté neomezené funkce na otevřených intervalech – v (5.7) lze totiž nahradit $F(b)$ a $F(a)$ příslušnými jednostrannými limitami, jak též záhy učiníme. Na druhou stranu se takto omezujeme na funkce, k nimž existuje funkce primitivní. Takto definovaný integrál sluje *Newtonův.*

Definice 5.3.1 (Newtonův integrál)

Ať $a, b \in \mathbb{R}^*$. Řekneme, že funkce $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ je *newtonovsky* integrovatelná, píšeme $f \in \mathcal{N}(a,b)$, pakližeť

(1) má funkce f na (a,b) primitivní funkci F,

(2) rozdíl $\lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x)$ je definován.

Jsou-li splněny obě podmínky, je tento rozdíl nazýván hodnotou *Newtonova integrálu* z funkce f na (a,b). Symbolicky

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f \coloneqq \lim_{x\to b^-} F(x) - \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Pro stručnost zápisu budeme nadále onen rozdíl značit symbolem $[F]_a^b$.

Poznámka 5.3.2

V dalším textu budeme muset jistou chvíli rozlišovat mezi Newtonovým a Riemannovým integrálem – přinejmenším, dokud neukážeme jejich ekvivalenci pro funkce newtonovsky i riemannovsky integrovatelné. Učiníme to uvedením písmene $(\mathcal{N})$ či $(\mathcal{R})$ před samotný symbol integrálu, jako v předchozí definici, v případě, že uvažovaný typ integrálu není zřejmý z kontextu. V celém zbytku oddílu, není-li uvedeno jinak, značí symbol $\int_a^b$ integrál *Newtonův.*

Varování 5.3.3

Je dobré vzít na mysl, že Newtonův integrál z dané funkce může být i nekonečný. Podmínkou jeho existence byla pouze *definovanost* výrazu $[F]_a^b$, nikoli jeho *konečnost.* V této souvislosti si všimněme, že jeho meze mohou z definice nabývat i hodnot $\pm\infty$. Tím se přímo liší od integrálu Riemannova, neboť omezenost funkce v tomto případě konečnost horních i dolních součtů zaručuje.

Příklad 5.3.4

Platí

$$\int_0^1 x^\alpha \,\mathrm{d}x = \begin{cases} \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\alpha+1}, & \text{pro } \alpha \in (-1,\infty);\\ \left[\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}\right]_0^1 = -\infty, & \text{pro } \alpha \in (-\infty,-1);\\ [\log x]_0^1 = \infty, & \text{pro } \alpha = -1. \end{cases}$$

Vskutku, primitivní funkce k x^α byla spočtena v příkladě 5.0.5 a výpočet příslušných limit je triviální.

Příklad 5.3.5

(1) Funkce $f(x) = 1/x$ je na intervalu $(0,1)$ newtonovsky integrovatelná, konkrétně

$$(\mathcal{N}) \int_0^1 \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \infty,$$

podle příkladu 5.3.4 pro $\alpha = -1$, ale není na $[0,1]$ riemannovsky integrovatelná, protože na tomto intervalu není omezená.

(2) Naopak, funkce $\operatorname{sgn} x$ je na intervalu $[-1,1]$ riemannovsky integrovatelná, díky tvrzení 5.2.13, protože je na $[-1,1]$ monotónní. Avšak, na $(-1,1)$ newtonovsky integrovatelná není, neboť nemá na celém tomto intervalu primitivní funkci.

Newtonův integrál je člověku výpočetně bližší než integrál Riemannův; je k němu třeba umět hledat primitivní funkci. Naopak, Riemannův integrál je mnohem blíže způsobu, kterým počítače vyhodnocují integrály, neboť limity konvergentních posloupností (v tomto případě součtů přes zjemňující se dělení) se aproximují triviálně. Je rozumné se domnívat, že metody výpočtu primitivních funkcí představené v sekci 5.1 lze úspěšně použít i k výpočtu Newtonových integrálů.

Věta 5.3.6 (Linearita Newtonova integrálu)

Ať $a, b \in \mathbb{R}^*$, $f, g \in \mathcal{N}(a,b)$ a $c \in \mathbb{R}$. Pak $f+g, cf \in \mathcal{N}(a,b)$ a platí

$$\int_a^b f(x) + g(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x.$$

$$\int_a^b cf(x) \,\mathrm{d}x = c \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Ať F, G jsou primitivní k f, g na (a,b). Potom jsou $F+G$ a cF primitivní k $f+g$ a cf na (a,b) a z věty o aritmetice limit máme

$$[F+G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b \quad \text{a} \quad [cF]_a^b = c[F]_a^b.$$

Odtud,

$$\int_a^b f(x) + g(x) \,\mathrm{d}x = [F+G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b = \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x) \,\mathrm{d}x,$$

$$\int_a^b cf(x) \,\mathrm{d}x = [cF]_a^b = c[F]_a^b = c \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x,$$

jak bylo dokázati. ■

Věta 5.3.7 (Per partes pro Newtonův integrál)

Ať $a, b \in \mathbb{R}^*$, $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a F, resp. G, je primitivní k f, resp. g, na (a, b) Potom platí

$$\int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x = [FG]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x,$$

dává-li pravá strana smysl.

Důkaz. Protože pravá strana je z předpokladu dobře definována, existuje primitivní funkce k Fg na (a, b). Označme ji H. Platí

$$(FG - H)' = fG + Fg - Fg = fG,$$

čili $FG - H$ je primitivní k fG na (a, b). Dále

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x &= [FG - H]_a^b = \lim_{x\to b^+}(F(x)G(x) - H(x)) - \lim_{x\to a^+}(F(x)G(x) - H(x))\\ &= \lim_{x\to b^-} F(x)G(x) - \lim_{x\to b^-} F(x)G(x) - (\lim_{x\to b^-} H(x) - \lim_{x\to a^+} H(x))\\ &= [FG]_a^b - [H]_a^b = [FG]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ■

Věta 5.3.8 (Substituce pro Newtonův integrál)

Nechť $a, b, \alpha, \beta \in \mathbb{R}^*$, $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ a $\varphi : (\alpha, \beta) \to (a, b)$. Ať má φ dále konečnou nenulovou derivaci na (α, β) a platí $\varphi((\alpha, \beta)) = (a, b)$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

dává-li aspoň jedna strana smysl.

Důkaz. Funkce φ má na (α, β) z předpokladu konečnou derivaci. Z věty 5.0.9 je $\varphi'((\alpha, \beta))$ interval a opět z předpokladu $0 \notin \varphi'((\alpha, \beta))$. Tedy, φ' je na (α, β) buď záporná, nebo kladná. Bez újmy na obecnosti budeme předpokládat, že $\varphi' > 0$ na (α, β), čili φ je na (α, β) rostoucí. Rozlišíme dvě možnosti: budeme předpokládat, že existuje levá strana rovnosti a dokážeme existenci integrálu na pravé straně, a naopak.

Ať nejprve existuje $\int_a^b f$. Pak má f na (a, b) primitivní funkci F a existují limity $\lim_{x\to a^+} F(x)$ i $\lim_{x\to b^-} F(x)$. Z věty o derivaci složené funkce (φ je rostoucí, tedy prostá), má i $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na intervalu (α, β) primitivní funkci, konkrétně funkci $F \circ \varphi$. Platí

$$\lim_{t\to\beta^-} \varphi(t) = b \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\alpha^+} \varphi(t) = a.$$

Z věty o limitě složené funkce (opět, φ je prostá) máme

$$\lim_{t\to\beta^-} (F \circ \varphi)(t) = \lim_{x\to b^-} F(x) \quad \text{a} \quad \lim_{t\to\alpha^+} (F \circ \varphi)(t) = \lim_{x\to a^+} F(x).$$

Můžeme proto počítat

$$\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = [F\circ\varphi]_\alpha^\beta$$
$$= [F]_a^b = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nyní ať existuje $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)\cdot|\varphi'|$. Označme G primitivní funkci k $(f\circ\varphi)\cdot|\varphi'| = (f\circ\varphi)\cdot\varphi'$. Z druhé věty o substituci plyne, že $G\circ\varphi^{-1}$ je primitivní k f na (a,b). Platí

$$\lim_{x\to a^+}\varphi^{-1}(x) = \alpha \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b^-}\varphi^{-1}(x) = \beta,$$

a tedy

$$\lim_{x\to a^+}(G\circ\varphi^{-1})(x) = \lim_{t\to\alpha^+} G(t) \quad \text{a} \quad \lim_{x\to b^-}(G\circ\varphi^{-1})(x) = \lim_{t\to b^-} G(t).$$

Dopočteme

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [G\circ\varphi^{-1}]_a^b = [G]_\alpha^\beta = \int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(t)|\varphi'(t)|\,\mathrm{d}t,$$

jak jsme chtěli. ■

Úloha 5.3.9

Spočtěte

$$\int_{-1}^1 x^2\exp(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Řešení. Položme $f(x) = \exp(-x)$ a $G(x) = x^2$. Pak $F(x) = -\exp(-x)$ a $g(x) = 2x$. Podle věty 5.3.7 platí

$$\int_{-1}^1 x^2\exp(-x)\,\mathrm{d}x = [-x^2\exp(-x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -2x\exp(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Jistě

$$[-x^2\exp(-x)]_{-1}^1 = -1\cdot\exp(-1) - (-1)\exp(1) = -\frac{1}{e} + e.$$

Z linearity integrálu platí

$$\int_{-1}^1 -2x\exp(-x)\,\mathrm{d}x = -2\int_{-1}^1 x\exp(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Opětovným použitím per partes dostaneme

$$\int_{-1}^1 x\exp(-x)\,\mathrm{d}x = [-x\exp(-x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -\exp(-x)\,\mathrm{d}x.$$

Snadno spočteme, že

$$[-x\exp(-x)]_{-1}^1 = -1\cdot\exp(-1) - 1\cdot\exp(1) = -\frac{1}{e} - e,$$
$$\int_{-1}^1 -\exp(-x)\,\mathrm{d}x = [\exp(-x)]_{-1}^1 = \exp(-1) - \exp(1) = \frac{1}{e} - e.$$

Celkem tedy,

$$\int_{-1}^{1} x \exp(-x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{e} - e - \frac{1}{e} + e = -\frac{2}{e}.$$

Dopočteme,

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} x^2 \exp(-x)\,\mathrm{d}x &= [-x^2 \exp(-x)]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -2x \exp(-x)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{e} + e + 2\left(-\frac{2}{e}\right) = -\frac{5}{e} + e.\end{aligned}$$

♠