Gymnázium Evolution Jižní Město

Jakýsi úvod do matematické analýzy

Áďula vod Klepáčů

6. června 2024

Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předšedších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.

Obsah

Kapitola 1

Elementární funkce

Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávejte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.

Jisté speciální funkce v matematické analýze si vysloužily přízvisko *elementární*. Původ jejich speciality je ryze fyzikální. Jsou to funkce, jejich prostřednictvím fyzikové modelují mnoho přírodních jevů a pojmů – růst, vlnění, proud, gravitaci, úhel …

Ježto fyzikální model světa radno ponechati do textů menší náročnosti, soustředit se budeme pouze na prezentaci těchto funkcí a důkazy jejich základních vlastností.

Všechny elementární funkce definujeme jako součty nekonečných řad. V tomto textu jsme se nezabývali pramnoho konvergencí řad s libovolnými členy. Všechna tvrzení, která tímto směrem budeme vyžadovat, zformulujeme, ač nedokážeme.

1.1 Exponenciála a logaritmus

První na seznamu je *exponenciála* – funkce spojitého růstu. Toto pojmenování ještě níže odůvodníme. Nyní přikročíme k definici. Pro stručnost zápisu, budeme v následujícím textu používat konvenci, že $0^0 = 1$.

Definice 1.1.1 (Exponenciála)

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\exp x \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Jak jsme čtenáře vystříhali, musíme nyní na krátkou chvíli odbočit k číselným řadám, abychom uměli v obec dokázat, že právě definovaná exponenciála je skutečně reálnou funkcí.

Definice 1.1.2 (Absolutní konvergence řady)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je číselná řada, kde $a_n \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolutně konverguje*, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Lemma 1.1.3

Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

Důkaz. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m \geq n \geq n_0$ platí

$$\left|\sum_{k=n}^{m} |a_k|\right| = \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon.$$

Potom ale z trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| < \varepsilon,$$

čili $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje. ■

Definice 1.1.4 (Cauchyho součin řad)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou číselné řady. Jejich *Cauchyho součinem* myslíme číselnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Věta 1.1.5 (Mertensova)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní *číselné řady, přičemž $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je navíc absolutně konvergentní. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k$ konverguje a platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} b_k.$$

Věta 1.1.6 (Vlastnosti exponenciály)

Funkce exp *je dobře definována a platí*

(E1) $\exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y$;

(E2) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 0$.

Důkaz. *Dobrá definovanost* zde znamená, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} x_n/n!$ konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že konverguje absolutně. Je-li $x = 0$, pak řada konverguje zřejmě. Volme tedy $x \in$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|}{\left|\frac{x^n}{n!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

čili podle věty **??** řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x^n|/n!$ konverguje, což znamená, že konverguje i $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$.

Dokážeme vlastnost (E1). Počítáme

$$\begin{aligned}\exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}y^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{x^{n-k}y^k}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}.\end{aligned}$$

Všimněme si, že poslední řada je Cauchyho součinem řad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ a $\sum_{n=0}^{\infty} y^n/n!$. Protože jsou obě tyto řady (podle výše dokázaného) absolutně konvergentní, platí z Mertensovy věty

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right) = \exp x \cdot \exp y.$$

Nyní vlastnost (E2). Pro $x \in (-1, 1)$ odhadujme

$$\begin{aligned}\left|\frac{\exp x - 1}{x} - 1\right| &= \left|\frac{\exp x - 1 - x}{x}\right| = \frac{1}{|x|}\left|\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - x - 1\right| = \frac{1}{|x|}\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right| \\ &= |x|\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!}\right| \le |x|\left|\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\right| = c \cdot |x|,\end{aligned}$$

kde $c > 0$ je hodnota součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$, která zjevně konverguje (například díky nerovnosti $1/n! \le 1/n^2$). Jelikož $\lim_{x\to 0} c \cdot |x| = 0$, plyne odtud ihned, že

$$\lim_{x\to 0}\left|\frac{\exp x - 1}{x} - 1\right| = 0,$$

z čehož zase

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Tím je důkaz završen. ■

Ihned si odvodíme další vlastnosti exponenciály plynoucí z (E1) a (E2). Postupně dokážeme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí následující.

(E3) $\exp 0 = 1$;

(E4) $\exp' x = \exp x$;

(E5) $\exp(-x) = 1/\exp(x)$;

(E6) $\exp x > 0$;

(E7) $\exp$ je spojitá na $\mathbb{R}$;

(E8) exp je rostoucí na $\mathbb{R}$;

(E9) $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$;

(E10) $\operatorname{im} \exp = (0, \infty)$.

Z (E1) platí $\exp(0 + x) = \exp 0 \cdot \exp x$. Protože zřejmě existuje $x \in \mathbb{R}$, pro něž $\exp x \neq 0$, plyne odtud $\exp 0 = 1$, tj. vlastnost (E3).

Pro důkaz (E4) počítáme

$$\lim_{h\to 0} \frac{\exp(x+h) - \exp h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\exp h \cdot \exp x - \exp h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(\exp h - 1)\exp x}{h}$$
$$= \exp x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\exp h - 1}{h} = \exp x \cdot 1 = \exp x,$$

kde jsme v červené rovnosti použili vlastnost (E1) a v modré zas vlastnost (E2).

Pokračujeme vlastností (E5). Z (E1) máme

$$\exp(x + (-x)) = \exp x \cdot \exp(-x).$$

Protože z (E3) je $\exp(x + (-x)) = \exp 0 = 1$, dostáváme

$$1 = \exp x \cdot \exp(-x),$$

čili

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

Ježto má řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ zjevně kladný součet pro $x > 0$, plyne (E6) přímo z právě dokázané (E5).

Vlastnost (E7) je okamžitým důsledkem vlastnosti (E4), díky níž má exp konečnou derivaci na $\mathbb{R}$, a tudíž je podle lemmatu **??** tamže spojitá.

Vlastnost (E8) je důsledkem vlastností (E4) a (E6), neboť funkce majíc na intervalu (v tomto případě celém $\mathbb{R}$) kladnou derivaci, je na tomto intervalu – podle důsledku **??** – rostoucí.

Platí $\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} > 1$, čili z vlastnosti (E1) plyne, že exp není shora omezená, neboť $\exp(x + 1) = \exp x \cdot \exp 1 > \exp x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. To spolu s vlastnostmi (E7) a (E8) dává $\lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$. Dále, použitím (E5),

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{x\to\infty} \exp(-x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp x} = 0,$$

což dokazuje (E9).

Konečně, vlastnost (E10) plyne z (E9) a Bolzanovy věty.

Příklad 1.1.7

V úvodu do této sekce jsme nazvali exponenciálu „funkcí spojitého růstu“. Tuto intuici nyní částečně formalizujeme. Dalšího pohledu nabudeme po definici obecné mocniny.

Uvažme následující přímočarý populační model. V čase $t \in (0, \infty)$ je počet jedinců dán funkcí $P(t)$. Množství nově narozených jedinců závisí pouze na počtu právě žijících a na konstantě $r \in [0, \infty)$ – zvané *reproduction rate* – která značí, kolik nových jedinců se narodí za jednoho právě živého. Vnímáme-li derivaci $P'(t)$ jako *rychlost růstu* populace v čase t, pak dostáváme diferenciální rovnici

$$P'(t) = r \cdot P(t),$$

jelikož v čase t se podle našeho modelu narodí r jedinců za každého živého. Díky vlastnosti (E4) vidíme, že například funkce $P(t) = \exp(rt)$ řeší rovnici výše. Teorii diferenciálních rovnic v tomto textu probírat nebudeme, bez důkazu však zmíníme, že řešení takto triviálních rovnic až na konstantu určena jednoznačně. V tomto jednoduchém populačním modelu je tudíž počet živých jedinců v čase t dán funkcí $t \mapsto \exp(rt)$.

Na závěr si dokážeme jeden možná překvapivý fakt, že vlastnosti (E1) a (E2) již určují funkci exp jednoznačně.

Věta 1.1.8 (Jednoznačnost exponenciály)

Existuje právě jedna funkce definovaná na celém $\mathbb{R}$ splňující (E1) a (E2).

Důkaz. Existenci jsme dokázali konstruktivně. Dokážeme jednoznačnost. Ať $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ splňuje (E1) a (E2). Ukážeme, že $f = \exp$.

Z úvah výše plyne, že f splňuje rovněž vlastnosti (E3) - (E10), protože k jejich důkazu byly použity pouze (E1) a (E2). Platí tedy $f(0) = 1$ a $f'(x) = f(x)$. Jelikož $\exp x \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, máme z věty o aritmetice derivací

$$\left(\frac{f}{\exp}\right)'(x) = \frac{f'(x)\exp x - f(x)\exp' x}{\exp^2 x} = \frac{f(x)\exp x - f(x)\exp x}{\exp^2 x} = 0.$$

Podle cvičení **??** je $f/\exp$ konstatní funkce, čili existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x)/\exp x = c$ pro každé $c \in \mathbb{R}$. Dosazením $x = 0$ zjistíme, že $c = f(0)/\exp 0 = 1$, čili $c = 1$ a $f = \exp$. ■

1.1.1 Logaritmus

Jelikož je funkce exp spojitá a rostoucí na $\mathbb{R}$, má na celém $\mathbb{R}$ inverzní funkci, které přezdíváme *logaritmus* a značíme ji log. Z vlastností exp ihned plyne, že log je reálná funkce $(0, \infty) \to \mathbb{R}$. Na rozdíl od exp však log není dána číselnou řadou – aspoň ne pro všechna $x \in (0, \infty)$, více v kapitole o Taylorově polynomu.

Vlastnosti exponenciály nám rovnou umožňují do značné míry prozkoumat k ní inverzní funkci.

Tvrzení 1.1.9 (Vlastnosti logaritmu)

Pro každá $x, y \in (0, \infty)$ platí

(L1) $\log$ *je spojitá a rostoucí na* $(0, \infty)$;

(L2) $\log(xy) = \log x + \log y$;

(L3) $\log' x = 1/x$;

(L4) $\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty$ *a* $\lim_{x\to\infty} \log x = \infty$.

Důkaz.

(L1) Plyne ihned z faktu, že exp je spojitá a rostoucí.

(L2) Užitím vlastností exponenciály spočteme

$$xy = \exp(\log x) \cdot \exp(\log y) = \exp(\log x + \log y),$$

z čehož po aplikace log na obě strany rovnosti plyne

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

(L3) Podle věty o derivaci inverzní funkce platí

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

(L4) Protože $\operatorname{im}\log = \mathbb{R}$, není log zdola ani shora omezená. Z (L1) plyne kýžený závěr. ■

1.1.2 Obecná mocnina

Užitím funkcí log a exp definujeme pro $a \in (0,\infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ výraz a^b předpisem

$$a^b \coloneqq \exp(b \cdot \log a).$$

Stojí za to věnovat krátkou chvíli ověření, že tato funkce odpovídá naší představě *mocniny* v případě, kdy $b = n \in \mathbb{N}$. Máme

$$a^n = \exp(n \cdot \log a) = \exp\left(\sum_{k=1}^{n} \log a\right) = \prod_{k=1}^{n} \exp(\log(a)) = \prod_{k=1}^{n} a,$$

tedy a^n je vskutku a n-krát vynásobené samo sebou.

Varování 1.1.10

Uvědomme si, že a^b je definováno pouze pro $a \in (0,\infty)$. Pro $a \le 0$ není tato funkce nad reálnými čísly rozumně definovatelná. Důvod je mimo jiné následující: pro n sudé a $a < 0$ je $a^n > 0$, ale $a^{n+1} < 0$. Tedy, měla-li by a^b být spojitá funkce, pak by pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $a < 0$ existovalo $\xi \in (n, n+1)$ takové, že $a^\xi = 0$. Mocninná funkce, jež je nulová pro nekonečně mnoho čísel je i pro matematiky zřejmě příliš divoká představa.

Poznamenejme však, že nad komplexními čísly je funkce log definována i pro záporná reálná čísla, tedy a^b dává – se stejnou definicí – smysl pro všechna $a, b \in \mathbb{C}$.

Z vlastností log a exp plynou ihned vlastnosti obecné mocniny. Jelikož její definice dává vzniknout **dvěma** reálným funkcím, konkrétně

$$f(x) = a^x \text{ pro } x \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad g(x) = x^b \text{ pro } x \in (0, \infty),$$

musíme tyto při zkoumání vlastností obecné mocniny pochopitelně rozlišovat. Aby nedošlo ke zmatení, budeme tyto funkce značit zkrátka jako $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto x^b$, kde $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ jsou fixní.

Tvrzení 1.1.11 (Vlastnosti obecné mocniny)

Pro všechna $a \in (0, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$ platí

(O1) *Funkce $x \mapsto a^x$ i $x \mapsto x^b$ jsou spojité na svých doménách.*

(O2) *Funkce $x \mapsto a^x$ je na celém $\mathbb{R}$*

- *rostoucí pro $a > 1$,*
- *konstantní pro $a = 1$,*
- *klesající pro $a < 1$.*

(O3) *Funkce $x \mapsto x^b$ je na $(0, \infty)$*

- *rostoucí pro $b > 0$,*
- *konstantní pro $b = 0$,*
- *klesající pro $b < 0$.*

(O4) $(x \mapsto a^x)' = (x \mapsto a^x \log a)$.

(O5) $(x \mapsto x^b)' = (x \mapsto bx^{b-1})$.

(O6) *Je-li*

- *$a > 1$, pak $\lim_{x\to\infty} a^x = \infty$ a $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0$;*
- *$a < 1$, pak $\lim_{x\to\infty} a^x = 0$ a $\lim_{x\to-\infty} a^x = \infty$;*

(O7) *Je-li*

- *$b > 0$, pak $\lim_{x\to 0^+} x^b = 0$ a $\lim_{x\to\infty} x^b = \infty$.*
- *$b < 0$, pak $\lim_{x\to 0^+} x^b = \infty$ a $\lim_{x\to\infty} x^b = 0$.*

(O8) $\log(a^b) = b \cdot \log a$.

Důkaz. Vlastnosti (O2), (O3), (O6) a (O7) dokážeme pouze v případě, že $a > 1$ a $b > 0$. Důkaz tvrzení v případech $a < 1$ a $b < 0$ plyne ihned z rovnosti $\exp(-x) = 1/\exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$.

(O1) Jelikož $a^b = \exp(b \log a)$ plyne spojitost obou funkcí ze spojitosti exp a log.

(O2) Platí $a^x = \exp(x \log a)$. Protože $a > 1$, je $\log a > 0$. Funkce exp je rostoucí, a tedy je rostoucí rovněž $a \mapsto a^x$.

(O3) Máme $x^b = \exp(b \log x)$. Jelikož je b z předpokladu kladné a log je rostoucí, je $x \mapsto x^b$ též rostoucí.

(O4) Počítáme

$$(a^x)' = (\exp(x\log a))' = \exp'(x\log a)\cdot(x\log a)' = \exp(x\log a)\cdot\log a = a^x\log a.$$

(O5) Opět počítáme

$$(x^b)' = (\exp(b\log x))' = \exp'(b\log x)\cdot(b\log x)' = \exp(b\log x)\cdot\frac{b}{x} = \frac{bx^b}{x} = bx^{b-1}.$$

(O6) Podobně jako v důkazu (O2) plyne z $a > 1$, že $\log a > 0$. Potom jsou ale limity v $\pm\infty$ funkce $a^x = \exp(x\log a)$ stejné jako tytéž limity funkce $\exp x$. Odtud tvrzení.

(O7) Jelikož je $b > 0$, máme z věty o limitě složené funkce

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+} x^b &= \lim_{x\to 0^+}\exp(b\cdot\log x) = \lim_{y\to-\infty}\exp(b\cdot y) = 0,\\ \lim_{x\to\infty} x^b &= \lim_{x\to\infty}\exp(b\cdot\log x) = \lim_{y\to\infty}\exp(b\cdot y) = \infty.\end{aligned}$$

(O8) Jest

$$\log(a^b) = \log(\exp(b\cdot\log a)) = b\cdot\log a.$$

■

Příklad 1.1.12 (Exponenciála jako funkce růstu podruhé)

V příkladě 1.1.7 jsme slíbili čtenářům ještě jeden pohled na exponenciálu jako na funkci „spojitého“ růstu. Uvažme následující obvyklý finanční model.

Naším prvotním vkladem na spořící účet je částka $P > 0$. Ve smlouvě k účtu je uvedeno, že z něj nesmíme vybírat po dobu pěti let za roční úrokové sazby 5 %. Tedy, každý rok se právě uložená částka na účtu zvýší o přesně 5 %. Když chceme vypočítat, kolik budeme mít na účtu za oněch pět let, stačí provést snadný výpočet

$$P\cdot 1.05\cdot 1.05\cdot 1.05\cdot 1.05\cdot 1.05 = P\cdot 1.05^5.$$

V zájmu rozšíření tohoto příkladu si zapíšeme tentýž výsledek jako

$$P\cdot(1+0.05)^5.$$

Tento model však předpokládá úročení uložené částky jednou ročně. Když bude však úročení probíhat například měsíčně, pak se roční úroková sazba samozřejmě rozdělí dvanácti, avšak výpočet úročení je rovněž třeba provést dvanáctkrát do roka. Finální částkou po pěti letech bude tudíž

$$P\cdot\left(\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{12}\right)^5 = P\cdot\left(1+\frac{0.05}{12}\right)^{60}.$$

S postupným zkracováním úrokového období se nabízí otázka, jaká by byla finální částka, kdyby se původní vklad úročil „nekonečněkrát“ do roka, tj. uložená částka by se zvyšovala doslova v každém okamžiku (tedy „spojitě“). Odpovědí je výraz

$$\lim_{n\to\infty} P\cdot\left(1+\frac{0.05}{n}\right)^n.$$

Ukážeme, že touto limitou je hodnota funkce exp v bodě 0.05. Obecněji, spočteme, že

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \exp x. \tag{♠}$$

Výpočet je to v celku triviální. Z definice obecné mocniny a Heineho věty platí

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\exp\left(n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

Stačí tedy ukázat, že

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = x.$$

Užitím l'Hospitalova pravidla dostaneme (derivujeme podle n – to smíme opět díky Heineho větě)

$$\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{x}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{x}{n}}\cdot\frac{-x}{n^2}\cdot(-n^2) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n+x} = x.$$

Tím je rovnost (♠) dokázána.

1.2 Goniometrické funkce

Název „úhloměrné“ funkce je zastaralý a nepřesný. Funkce sin a cos, které se jmeme definovati, úspěšně modelují fyzikální jevy jakkoli související s vibrací či vlněním. Jak si brzy rozmyslíme, jsou to ve skutečnosti funkce v zásadě exponenciální. To by nemělo být na druhý pohled až tak překvapivé – vibrace jsou v zásadě jen periodicky se střídající růst a pokles.

Definice 1.2.1 (Goniometrické funkce)

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme funkce

$$\sin x \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
$$\cos x \coloneqq \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Věta 1.2.2 (Vlastnosti goniometrických funkcí)

Funkce sin *a* cos *jsou dobře definované a splňují:*

(G1) $\forall x, y \in \mathbb{R}:$

$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y\cos x,$$
$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y;$$

(G2) sin *je lichá a* cos *je sudá funkce;*

(G3) $\exists \pi \in \mathbb{R}$ *takové, že* $\sin$ *je rostoucí na* $[0, \pi/2]$, $\sin(0) = 0$ *a* $\sin(\pi/2) = 1$.

(G4) $\sin'(0) = 1$.

K důkazu použijeme následující pomocné lemma.

Lemma (Pomocné)

Ať $x \in \mathbb{R}$. *Pak existuje* $C > 0$ *takové, že pro každé* $n \in \mathbb{N}$ *a každé* $h \in (-1, 1)$ *platí nerovnost*

$$|(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| \leq h^2 C^n.$$

Důkaz. Položme $C \coloneqq 2(|x| + 1)$. Pro $n = 1$ máme

$$|(x+h)^1 - x^1 - hx^0| = |x + h - x - h| = 0 \leq 2h^2(|x| + 1)$$

pro každé $h \in (-1, 1)$.

Pro $n \geq 2$ lze použít binomickou větu a počítat

$$(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k - x^n - nhx^{n-1} = \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} h^k. \qquad (\triangle)$$

Protože $|x| + 1 \geq |x|$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, platí $(|x| + 1)^n \geq |x|^k$, kdykoli $k \leq n$. Rovněž, z předpokladu $|h| < 1$, a tedy naopak platí $|h|^k \leq |h|^n$ pro $k \leq n$. Užitím těchto nerovností a rovnosti ($\triangle$) můžeme odhadnout

$$\begin{aligned} |(x+h)^n - x^n - nhx^{n-1}| &\leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} |x|^{n-k} |h|^k \leq \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} (|x| + 1)^n h^2 \\ &\leq h^2 (|x| + 1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = h^2 (|x| + 1)^n 2^n = h^2 C^n, \end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ■

Důkaz (Věty 1.2.2). Je zřejmé, že řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{a} \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

konvergují absolutně (použitím stejného argumentu jako v důkazu korektnosti exponenciály ve větě 1.1.6). Podle lemmatu 1.1.3 jsou obě řady rovněž konvergentní pro každé $x \in \mathbb{R}$, což dokazuje dobrou definovanost obou funkcí.

Ukážeme nejprve, že $\sin' x = \cos x$. Volme pevné $x \in \mathbb{R}$. Pro $h \in (-1, 1)$ platí

$$\begin{aligned} \sin(x+h) - \sin x - h \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \frac{hx^{2n}}{(2n)!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left((x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1) x^{2n} \right). \end{aligned}$$

Z **pomocného lemmatu** nalezneme $C > 0$ takové, že

$$|(x+h)^{2n+1} - x^{2n+1} - h(2n+1)x^{2n}| \le C^{2n+1}h^2.$$

Pak

$$|\sin(x+h) - \sin x - h\cos x| \le \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!} h^2 = h^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Řada $\sum_{n=0}^{\infty} C^{2n+1}/(2n+1)!$ je konvergentní, a tedy

$$\lim_{h\to 0} \left| \frac{\sin(x+h) - \sin x - h\cos x}{h} \right| = 0,$$

z čehož ihned

$$\sin' x = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

Pro důkaz (G1) volme pevné $a \in \mathbb{R}$ a položme

$$\psi(x) \coloneqq (\sin(x+a) - \sin x \cos a - \sin a \cos x)^2 + (\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin a \sin x)^2.$$

Snadno spočteme, že $\psi'(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$, a tedy je díky cvičení **??** ψ konstantní na $\mathbb{R}$. Dosazením dostaneme, že

$$\sin(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0,$$

$$\cos(0) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n)!} = (-1)^0 \frac{0^0}{0!} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{0^{2n}}{(2n!)} = 1.$$

Díky těmto rovnostem spočteme $\psi(0) = 0$. Z toho, že ψ je konstantní, plyne, že $\psi(x) = 0$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. To dokazuje obě rovnosti v (G1), neboť ψ je nulová funkce, jež je zároveň součtem čtverců, které musejí být tudíž oba nulové.

Vlastnost (G2) je vidět ihned z definice, neboť proměnná x se v definici sin objevuje pouze v liché mocnině a v definici cos pouze v sudé.

Vlastnost (G3) dokazovat nebudeme. Je výpočetně náročná a neintuitivní.

Již víme, že $\sin'(x) = \cos x$ a že $\cos(0) = 1$. Odtud (G4). ■

Poznámka 1.2.3

V úvodu jsme zmínili, že sin a cos jsou vlastně exponenciální funkce. Vskutku, když se jeden zadívá na jejich řady, vidí (až na znaménko $(-1)^n$ zařizující právě onen „růst a pokles“) v zásadě exponenciální funkci. Konkrétně, sin je rozdílem *lichých* částí exponenciály a cos těch *sudých*. Rozdělme $\exp x$ na čtyři části podle zbytku po dělení indexu n čtyřmi.

$$\exp x = \sum_{n \bmod 4=0} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \bmod 4=1} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \bmod 4=2} \frac{x^n}{n!} + \sum_{n \bmod 4=3} \frac{x^n}{n!}$$

Označme tyto části $\exp_0$, $\exp_1$, $\exp_2$ a $\exp_3$. Všimněme si, že když $n \bmod 4 = a$, pak $n = 4k + a$

pro nějaké $k \in \mathbb{N}$. Čili například $\exp_2$ lze zapsat ve tvaru

$$\exp_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!}$$

Tvrdíme, že $\sin = \exp_1 - \exp_3$ a $\cos = \exp_0 - \exp_2$. Vskutku, když je n liché, pak $2n+1 \bmod 4 = 3$ (protože $4 \nmid 2n$) a když je n sudé, tak $2n+1 \bmod 4 = 1$. Čili, pro n lichá je $2n+1$ tvaru $4k+3$ a pro n sudá zase tvaru $4k+1$. Můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}\exp_1(x) - \exp_3(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+1}}{(4k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+3}}{(4k+3)!} \\ &= \sum_{n \text{ sudé}} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} - \sum_{n \text{ liché}} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x,\end{aligned}$$

neboť $(-1)^n$ je rovno 1 pro n sudé a -1 pro n liché. Podobně odvodíme i vztah pro cos.

Definice 1.2.4 (Tangens a kotangens)

Definujeme goniometrické funkce tan a cot předpisy

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Funkce tan je definována pro $x \neq n\pi + \pi/2$, kde je funkce cos nulová, a cot je definována pro x různé od násobků π.

Zformulujeme si několik vlastností funkcí tan a cot, ale dokazovat je nebudeme. Důkazy se významně neliší od již spatřených důkazů vlastností jiných elementárních funkcí.

Tvrzení 1.2.5 (Vlastnosti tangenty a kotangenty)

Platí:

(G5) tan *i* cot *jsou spojité na svých doménách;*

(G6) tan *i* cot *jsou liché;*

(G7) $\tan' x = 1/\cos^2 x$ *a* $\cot' x = -1/\sin^2 x$*;*

(G8) $\tan \frac{\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = 1$*;*

(G9) $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = \infty$ *a* $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty$.

(G10) $\lim_{x \to 0^+} \cot x = \infty$ *a* $\lim_{x \to \pi^-} \cot x = -\infty$.

(G11) tan *je rostoucí na* $(-\pi/2, \pi/2)$ *a* cot *je klesající na* $(0, \pi)$.

1.3 Limity elementárních funkcí

Tato sekce je věnována výpočtu limit, ve kterých figurují elementární funkce. Nejtěžšími (ale zároveň nejužitečnějšími) úlohami na vyřešení jsou limity racionálních kombinací (tj. součtů, násobků a především podílů) elementárních funkcí. Samotné řešení pak obvykle zahrnuje převod výrazu do tvaru, v němž lze naň uplatnit jisté „známé“ limity, případně použít l'Hospitalova pravidla.