

Ústní zkouška

z Úvodu do diskrétní matematiky

Verze: ez clap

Přednášející: His Divine Benevolence Sir Adam Clypatch

1. června 2023

**NENÍ-LI ŘEČENO JINAK, VŠECHNY POJMY A DŮKAZY FORMULUJTE
PEČLIVĚ S DŮRAZEM NA FORMÁLNÍ SPRÁVNOST.**

Část	Hodnocení
Základní definice	0 / 0
Lehké úlohy a důkazy	/ 6
Těžké úlohy a důkazy	/ 15

Neznalost základních definic znamená bezpodmínečné nesložení zkoušky.

- (1) Logický výrok.
- (2) Sjednocení, průnik a rozdíl dvou libovolných množin A, B užitím logických spojek a kvantifikátorů.
- (3) Sjednocení $n \in \mathbb{N}$ libovolných množin A_i , kde $i \in \{1, \dots, n\}$, užitím logických spojek a kvantifikátorů.
- (4) Konečná množina a velikost konečné množiny.
- (5) Ekvivalence a třída ekvivalence (relaci není třeba definovat).
- (6) Zobrazení (opět, relaci není třeba definovat).
- (7) Kodoména a doména zobrazení. Vzor a obraz prvku při zobrazení.
- (8) Složení zobrazení.
- (9) Permutace, řád permutace. **Neformálně** cyklický zápis permutace.
- (10) Kombinační číslo.
- (11) Graf (libovolná z definic).
- (12) Sled, tah a cesta v grafu (opět, libovolné z definic).
- (13) Souvislý graf, ohodnocený graf, strom.
- (14) Vzdálenost vrcholů v grafu, EFLP a SFLP.

Pojmy užívané v úlohách nemusíte definovat. Používáte-li k řešení úlohy nebo k důkazu předchozí tvrzení, zformulujte je.

- (1) O zobrazení $f : A \rightarrow B$ řekneme, že je *na*, když platí následující výrok:

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b.$$

Dokažte, že f je **na** právě tehdy, když $\text{im } f = \text{codom } f$.

- (2) Ať A, B, C jsou libovolné množiny. Je inkluze

$$(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \cap C)$$

vždy platná? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, najděte protipříklad.

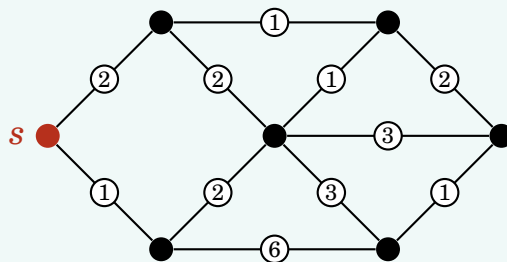
- (3) Zformulujte důkaz, že pro každé dvě **konečné** množiny A, B platí

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B.$$

- (4) Ve třídě 4.A je 27 studentů. Rozhodli se poškádlit svého třídního a náhodným losováním změnit svůj obvyklý zasedací pořádek. Spočítejte pravděpodobnost, že si přesně 7 žáků vylosovalo své obvyklé místo.

- (5) Ať $G = (V, E)$ je graf. Dokažte, že v G existuje **cesta** mezi u a v právě tehdy, když v G existuje **sled** mezi u a v pro libovolné dva vrcholy $u, v \in V$.

- (6) Užitím Dijkstrova algoritmu, nalezněte vzdálenosti všech vrcholů od počátečního vrcholu **s** v ohodnoceném grafu určeném následujícím obrázkem.



Nemusíte dokonale zformulovat svá řešení. Obecná idea rozvinutá důležitými detaily postačuje.

- (1) *Krychlí* dimenze $n \in \mathbb{N}$ myslíme graf na 2^n vrcholech číselovaných binárními čísly od 0 do $2^n - 1$. Budeme předpokládat, že každé binární číslo je doplněno nulami na n cifer, tedy například nultý vrchol krychle dimenze 5 je binární číslo 00000, první je 00001 atd.

Vzdáleností, značenou písmenem d , mezi binárními čísly nazveme počet míst, kde se jejich cifry liší. Tedy například $d(00100, 11100) = 2$ a $d(01100, 10010) = 4$. Hrana vede mezi dvěma vrcholy v a w právě tehdy, když $d(v, w) = 1$.

Dokažte indukcí, že počet hran krychle dimenze n je přesně $n \cdot 2^{n-1}$.

Jen pro zajímavost (tedy, stačí se zamyslet, ne dokazovat), odpovídá vzdálenost binárních čísel vzdálenosti mezi příslušnými vrcholy?

- (2) (jiný důkaz principu inkluze a exkluze) Ať A, B jsou množiny a $A \subseteq B$. *Charakteristickou funkcí* množiny A myslíme zobrazení

$$\chi_A : B \rightarrow \{0, 1\}$$

takové, že $\chi_A(x) = 1$, když $x \in A$, a $\chi_A(x) = 0$, když $x \notin A$.

Platí (to **nedokazujte**) následující vzorec:

$$\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = \sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} \left(\prod_{i \in I} x_i \right). \quad (*)$$

Ať nyní A_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, jsou konečné množiny a položme

$$A := \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Charakteristickou funkci množiny A_i označíme jednoduše jako χ_i .

- (a) Dokažte, že pro každé $a \in A$ platí

$$\prod_{i=1}^n (1 - \chi_i(a)) = 0.$$

- (b) Dosad'te $x_i = -\chi_i(a)$ do vzorce (*) a výslednou sumu napište.

- (c) Užitím výsledků z (a) a (b) dokažte, že

$$\sum_{I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{\#I} \left(\sum_{a \in A} \prod_{i \in I} \chi_i(a) \right) = 0.$$

Hint: Sčítejte výsledek z (b) přes všechny prvky $a \in A$ a pak prohod'te pořadí sumace.

- (d) Dokažte, že $\prod_{i \in I} \chi_i$ je charakteristická funkce množiny $\bigcap_{i \in I} A_i$.

- (e) Užitím (d), dokažte, že

$$\sum_{a \in A} \prod_{i \in I} \chi_i(a) = \# \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right).$$

- (f) Speciálně, pro $I = \emptyset$ je $\prod_{i \in \emptyset} \chi_i(a)$ prázdný součin, a tedy má hodnotu 1. Pročež platí

$$\sum_{a \in A} \prod_{i \in \emptyset} \chi_i(a) = \sum_{a \in A} 1 = \#A.$$

Dosaďte do (c) výsledek z (e) a rozložte na základě výpočtu výše vhodným způsobem vzniklou sumu, abyste dokázali princip inkluze a exkluze.

- (3) Zformulujte Kruskalův algoritmus a dokažte jeho správnost.