Ústní zkouška

z Úvodu do diskrétní matematiky

Verze: R.I.P.

Přednášející: His Divine Benevolence Sir Adam Clypatch

23. června 2023

NENÍ-LI ŘEČENO JINAK, VŠECHNY POJMY A DŮKAZY FORMULUJTE PEČLIVĚ S DŮRAZEM NA FORMÁLNÍ SPRÁVNOST.

Část	Hodnocení
Základní definice	0 / 0
Lehké úlohy a důkazy	/ 6
Těžké ulohy a důkazy	/ 15

Základní definice (0 bodů)

Neznalost základních definic znamená bezpodmínečné nesložení zkoušky.

(1) Implikace ($\Rightarrow$) pomocí logických spojek *a* ($\wedge$) a *nebo* ($\vee$).

(2) Sjednocení, průnik a rozdíl dvou libovolných množin A,B užitím logických spojek a kvantifikátorů.

(3) Průnik $n \in \mathbb{N}$ libovolných množin A_i, kde $i \in \{1,\dots,n\}$, užitím logických spojek a kvantifikátorů.

(4) Podmnožina B množiny A a množina všech podmnožin množiny A.

(5) Ekvivalence a třída ekvivalence (relaci není třeba definovat).

(6) *Prosté* zobrazení, zobrazení *na* a *bijekce* (zobrazení není třeba definovat).

(7) Kodoména a doména zobrazení. Vzor a obraz prvku při zobrazení.

(8) **Neformálně** princip matematické indukce.

(9) Permutace, řád permutace. **Neformálně** cyklický zápis permutace.

(10) Kombinační číslo.

(11) Graf (libovolná z definic).

(12) Sled, tah a cesta v grafu (opět, libovolné z definic).

(13) Vzdálenost vrcholů v grafu.

(14) Excentricita vrcholu a Jordanovo centrum.

Lehké úlohy a důkazy (6 bodů)

Pojmy užité v úlohách nemusíte definovat. Používáte-li k řešení úlohy nebo k důkazu předchozí tvrzení, zformulujte je.

(1) Ať A je množina a $\sim$ je *ekvivalence* na A. Pro $x, y \in A$ značíme $[x]_\sim$ a $[y]_\sim$ třídy ekvivalence x a y podle $\sim$. Dokažte, že buď $[x]_\sim = [y]_\sim$, nebo $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \emptyset$.

(2) Ať A, B jsou libovolné množiny. Najděte množinu C (v závislosti na A, B) takovou, aby platila rovnost

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup B) \cap C.$$

(3) Zformulujte důkaz, že pro každá dvě přirozená čísla k, n, kde $k \leq n$, platí vzorec

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

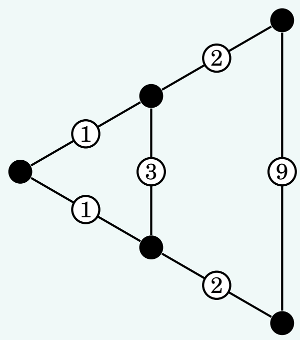
(4) Učitelé základní školy U Smrťáka často berou své žáky do zoologické zahrady a varují je, aby v každém případě stály tak blízko klecím, jak to jen lze. Zjistivše, že fyzické metody jeví sebe ovšem neúčinnými, souhlasně vydali se cestou psychického teroru. Za tímto účelem se dnešního výletu do zoo účastní i učitelka matematiky. Ona zadala dětem následující hádanku:

„Tak, milánkové. Živočichy umíme rozdělit na ty, kteří žijí pod vodou, na souši, a ve vzduchu. Tady v zahradě žije 30 živočichů ve vodě, 50 na souši a 20 ve vzduchu. Z těchto, 10 živočichů je schopno žít jak na souši, tak ve vzduchu, 5 ve vodě i na souši a 2 ve vzduchu i ve vodě. Je tu dokonce jeden zvlášť přizpůsobivý živočich, který umí žít v libovolném prostředí.

Tak, milánkové, kdo mi poví, kolik je tady v zahradě celkem živočichů, smí si jít hrát s tygrem."

(5) Ať K_n je úplný graf na n vrcholech, čili graf, mezi každým párem jehož vrcholů vede hrana. Nalezněte minimální kostru K_n pro každé $n \in \mathbb{N}$ a spočtěte její váhu za předpokladu, že množina vrcholů je $V := \{1, \ldots, n\}$ a váha každé hrany $ij \in E$ je dána funkcí $w(ij) := \max(i, j)$.

(6) V grafu daném obrázkem níže



nalezněte **všechna** řešení EFLP i SFLP **užitím Floydova-Warshallova algoritmu**. Existuje vrchol, který je řešením obou?

Těžké úlohy a důkazy (15 bodů)

Nemusíte dokonale zformulovat svá řešení. Obecná idea rozvinutá důležitými detaily postačuje.

(1) Staří Egypťané měli zajímavý způsob zápisu zlomků. Každý zlomek byl pro ně součtem zlomků s čitatelem 1 a navzájem různými jmenovateli, například

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}, \quad \frac{4}{7} = \frac{1}{2} + \frac{1}{14} \quad \text{nebo} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Algoritmus rozpisu libovolného zlomku tímto způsobem pracuje následovně. Ať jsou dána dvě přirozená čísla $m, n \in \mathbb{N}$ taková, že $m < n$, tedy zlomek m/n je menší než 1.

(a) Polož $m_0 := m$, $n_0 := n$ a $i := 0$.

(b) Spočti
$$z_i := \frac{1}{\lceil n_i/m_i \rceil}.$$
a
$$\frac{m_{i+1}}{n_{i+1}} := \frac{m_i}{n_i} - z_i.$$

(c) Je-li $m_{i+1} = 1$, polož $z_{i+1} := m_{i+1}/n_{i+1}$ a skonči. Jinak polož $i := i + 1$ a opakuj část (b).

Po skončení algoritmu je rozkladem zlomku m/n na zlomky s různými jmenovateli a čitateli rovny 1 právě
$$\frac{m}{n} = z_0 + z_1 + \ldots + z_{i+1}.$$

Dokažte indukcí, že je tento algoritmus korektní (tj. skončí a dá správný výsledek). *Poznámka*: Výraz $\lceil n \rceil$ značí **horní celou část** čísla n, tj. nejmenší přirozené číslo větší než n.

(2) Dokažte, že počet všech zobrazení mezi konečnými množinami A a B je přesně $\#B^{\#A}$.

(3) *Trojúhelníkem* myslíme graf K_3, tj. úplný graf na třech vrcholech. Ať G je libovolný graf na n vrcholech. Takový graf má nejvíce $\binom{n}{2}$ hran, v takovém případě je to K_n. Co se ovšem stane, když zakážeme trojúhelníky, tedy když G **nyní nesmí obsahovat** K_3 jako podgraf? Už jistě nemůže mít $\binom{n}{2}$ hran, neboť úplné grafy K_n pro $n \geq 3$ trojúhelníky obsahují.

Označme výrazem $T(n)$ maximální počet hran, který může mít graf bez trojúhelníků na n vrcholech. Platí $T(n) = \lfloor n^2/4 \rfloor$, to však není snadné dokázat. V této úloze dokážete zeslabenou verzi, tj. že $T(n) \geq \lfloor n^2/4 \rfloor$, neboli, že existují grafy bez trojúhelníků na n vrcholech mající aspoň $\lfloor n^2/4 \rfloor$ hran.

(a) Ať $K_{a,b}$ značí úplný bipartitní graf na $a + b$ vrcholech. Tím myslíme graf $K_{a,b} = (V_1 \cup V_2, E)$ takový, že V_1 a V_2 jsou disjunktní množiny vrcholů, $\#V_1 = a$, $\#V_2 = b$ a z každého vrcholu z V_1 vede hrana do každého vrcholu z V_2, ale mezi dvěma vrcholy ze stejné množiny žádné hrany nevedou. Dokažte, že $K_{a,b}$ má přesně $a \cdot b$ hran.

(b) Dokažte, že $K_{a,b}$ neobsahuje trojúhelník.

(c) Najděte čísla $a, b \in \mathbb{N}$ taková, že $a + b = n$ a $a \cdot b \geq \lfloor n^2/4 \rfloor$.
Hint: Rozlište dva případy: n sudé a n liché.

(d) Odůvodněte, proč z (a) až (c) už plyne původní tvrzení.