

# Jakýsi úvod do diskrétní matematiky

Áďa Klepáčovic

4. května 2023



# Obsah

<b>1</b>	<b>Teorie grafů</b>	<b>1</b>
1.1	Pohyb v grafu . . . . .	8
1.2	Stromy . . . . .	13
1.2.1	Minimální kostra . . . . .	16
1.2.2	Kruskalův algoritmus . . . . .	19
1.3	Jordanovo centrum . . . . .	23
1.3.1	Floydův-Warshallův algoritmus . . . . .	28
1.4	Vzdálenost vrcholů . . . . .	32



## 1 | Teorie grafů

Velkou část moderní matematiky (zcela jistě topologii, geometrii i algebru) tvoří studium „struktur“. Toto obecně nedefinované slovo obvykle značí množinu s nějakou další informací o vztahu mezi jejími prvky – tím obvykle bývá operace nebo třeba, jako v případě grafů, relace.

Tato kapitola zároveň značí jakýsi milník ve vývoji matematického myšlení, především algebraickým směrem. Můžeme se totiž začít bavit o speciálních zobrazeních, které zachovávají strukturu na množinách, mezi kterými vedou, tzv. *homomorfismech*; pochopit, že je dobré mít více popisů stejné struktury ekvivalentních v tom smyslu, že poskytují stejné množství informací, přestože se o žádné bijekci nedá formálně hovořit; uvidět, že je užitečné dva různé grafy (či obecně dvě různé struktury) považovat za stejné, když se liší pouze zanedbatelně.

Jednou, avšak zdaleka ne *jedinou*, motivací pro teorii grafů je schopnost analyzovat struktury tvořené množinou „uzlů“, mezi některýmiž vedou „spojnice“. Takováto struktura úspěšně modeluje až neuvěřitelné množství přírodních i společenských úkazů. Mezi nimi jmenujmež

- návrhy elektrických obvodů, kde uzly jsou elektrická zařízení a spojnice jsou kabely mezi nimi vedoucí;
- lingvistické modely, kde uzly jsou slova a spojnice vede mezi těmi syntakticky souvisejícími;
- studium molekul, kde uzly jsou atomy a spojnice vazby mezi nimi;
- analýza šíření fámy v sociologii, kde uzly jsou lidské komunity a spojnice vede mezi komunitami s bezprostředním kontaktem.

Snad pro to, že uzly a spojnice grafu se obvykle kreslí jako body a úsečky v prostoru, ujal se pro ně názvy *vrcholy* a *hrany* (jako v mnohoúhelnících), respektive. Struktura zvaná *graf* tedy sestává ze dvou údajů:

- (1) množiny (obvykle konečné) vrcholů značené  $V$  a
- (2) množiny hran  $E$ , která je spjata s množinou vrcholů; toto „sepětí“ se však definuje různě, v závislosti na vkusu a aplikaci. My si ukážeme tři z jistě většího množství různých definic.

Asi prvním přirozeným kandidátem pro „strukturu“ je množina s relací. To je také první způsob, jak si budeme definovat pojem *graf*. Je to také ten nejobecnější v tom smyslu, že jeho pouze drobné modifikace nám umožní definovat i obdobné struktury, jež také zmateně slují *grafy*, byť s přípojným atributem.

Abychom úsečky mezi body mohli popsat jako relaci, čili pomocí uspořádaných dvojic bodů, zcela jistě budeme požadovat, aby nevedly úsečky z bodu do něho samého. Úsečku délky 0 lze totiž triviálně ztotožnit s bodem. Dále, úsečka z bodu  $A$  do bodu  $B$  je jistě tatáž, která úsečka z bodu  $B$  do bodu  $A$ . Tento fakt musí rovněž relace  $E$  odrážet.

První vlastností relace se, snad nepřekvapivě, říká *antireflexivita*. Čili, relace  $E$  na  $V$  je *antireflexivní*, když hrana  $(v, v) \notin E$  pro každý vrchol  $v \in V$ .

Druhou vlastnost už jsme potkali a nazvali ji symetrií. Požadujeme, aby s hranou  $(v, w) \in E$  obsahovala  $E$  též hranu  $(w, v) \in E$  pro každé dva vrcholy  $v, w \in V$ .

**Definice 1.0.1 (Graf poprvé).** Dvojici  $G := (V, E)$ , kde  $V$  je konečná množina a  $E$  je relace na  $V$ , nazveme *grafem*, pokud je  $E$  **antireflexivní** a **symetrická**.

**Poznámka.** Z hlediska ryze formálního neodpovídá tato definice dokonale naší geometrické představě. My jsme totiž pouze požadovali, aby  $E$  obsahovala jak úsečku z  $v$  do  $w$ , tak úsečku z  $w$  do  $v$ , ale nikoli, aby se jednalo o *tutéž* úsečku. Tedy, jedna úsečka mezi body je v množině  $E$  reprezentována dvěma dvojicemi.

Nápravou by bylo definovat navíc ještě relaci  $R$  na  $E$ , kde  $(v, v')$  je v relaci  $R$  s  $(w, w')$  právě tehdy, když  $(w, w') = (v', v)$  nebo  $(w, w') = (v, v')$ . Jinak řečeno, úsečka z bodu  $v$  do bodu  $v'$  je v relaci sama se sebou a s úsečkou z bodu  $v'$  do bodu  $v$ .

Uvážíme-li pak jako hrany grafu  $G$  nikoli množinu  $E$ , ale její třídy ekvivalence podle  $R$  (**Ověřte, že  $R$  je ekvivalence!**), dostaneme již přesnou množinovou paralelu bodů a úseček.

My však budeme v zájmu přehlednosti tento nedostatek ignorovat, protože není pro pochopení ani rozvoj teorie relevantní.

Cesta k druhé možné definici grafu není od první daleká. Stačí vlastně relaci  $E$  interpretovat trochu jinak. Přece, antireflexivní a symetrická relace je „totéž“ jako množina dvouprvkových podmnožin  $V$ .

Vskutku, vezměme nějakou  $E' \subseteq \binom{V}{2}$ . Relaci  $E$  z [definice 1.0.1](#) sestojíme tak, že z množiny  $\{v, w\} \in E'$  vyrobíme dvojici  $(v, w)$  a  $(w, v)$ . Protože prvky v množině nejsou uspořádané a nemohou se opakovat, dává tato konstrukce opravdu antireflexivní a symetrickou relaci. Vizualně odpovídá rozdělení úsečky mezi  $v$  a  $w$  na šipku z  $v$  do  $w$  a šipku z  $w$  do  $v$ .

Z druhé strany, mějme nějakou antireflexivní a symetrickou relaci  $E$  na  $V$ . Protože s dvojicí  $(v, w)$  obsahuje  $E$  i dvojici  $(w, v)$ , můžeme z těchto dvojic ztvárnit množinu  $\{v, w\}$ . Relace  $E$  je antireflexivní, čili se nemůže stát, že  $v = w$ , a množina  $\{v, w\}$  je pročež vždy dvouprvková. Posbíráme-li všechny množiny  $\{v, w\}$  do jedné velké množiny  $E'$ , bude platit  $E' \subseteq \binom{V}{2}$ . Vizualně odpovídá tato konstrukce slepení šipky z  $v$  do  $w$  a šipky z  $w$  do  $v$  do jedné úsečky mezi  $v$  a  $w$ .

**Výstraha.** Mezi množinami  $E$  a  $E'$  **nemůže existovat bijekce**, třeba jen pro to, že  $\#E = 2\#E'$ . Co konstrukce v předchozích dvou odstavcích ukazují, je pouze fakt, že pro naše účely definují  $E$  a  $E'$  stejnou strukturu na množině  $V$ .

Ovšem, uvážili-li bychom místo  $E$  pouze třídy ekvivalence jejích prvků podle relace  $R$  popsané v poznámce pod [definicí 1.0.1](#), pak bychom skutečně tímto způsobem našli bijekci s množinou  $E'$ .

**Definice 1.0.2 (Graf podruhé).** Dvojici  $G := (V, E')$ , kde  $V$  je konečná množina a  $E' \subseteq \binom{V}{2}$ , nazveme *grafem*.

Třetí pohled na hrany v grafu je více „kategoriální“. Zatímco množiny  $E$  a  $E'$  jsou závislé ve své definici na množině  $V$ , třetí množina hran  $E''$ , kterou si zde definujeme, bude libovolná konečná množina.

Tento popis grafové struktury bude odpovídat trochu jiné představě; konkrétně takové, kdy začínáme s množinou bodů  $V$  a s množinou šipek  $E$  (jež jsou od sebe naprosto odděleny) a oba konce každé šipky zapíchneme do dvou různých bodů z  $V$ . Toto „zapíchnutí“ realizují zobrazení  $s, t : E'' \rightarrow V$  (z angl. *source* a *target*), která zobrazují šipky z  $E''$  do bodů z  $V$ . Přičemž

budeme trvat na tom, aby  $s(e) \neq t(e)$  pro všechny šipky  $e \in E''$  a navíc, aby pro každou  $e \in E''$  existovala šipka  $e' \in E''$  taková, že  $s(e) = t(e')$ ,  $t(e) = s(e')$ . Lidsky řečeno, nesmíme zapíchnout konce šipky do téhož vrcholu a, když zapíchneme začátek šipky do bodu  $v$  a její konec do bodu  $w$ , pak musíme vzít další šipku, jejíž začátek zapíchneme do  $w$  a konec do  $v$ .

Je snadné si rozmyslet, že z množiny šipek  $E''$  zrekonstruujeme množinu  $E$  z [definice 1.0.1](#) tak, že z šipky  $e \in E''$  vytvoříme dvojici  $(s(e), t(e)) \in E$ . Podmínky kladené na zobrazení  $s$  a  $t$  zaručují, že vzniklá množina  $E$  je relace na  $V$ , která je antireflexivní a symetrická. V tomto případě dává uvedená konstrukce dokonce bijekci  $E \cong E''$ , čili jsme opět definovali tutéž strukturu na  $V$ .

Tato struktura bude zvlášť užitečná, až budeme probírat *toky v síti*.

**Definice 1.0.3 (Graf potřetí).** Čtveřici  $G := (V, E'', s, t)$ , kde  $V$  a  $E''$  jsou konečné množiny a  $s$  a  $t$  jsou zobrazení  $E'' \rightarrow V$  nazveme *grafem*, pokud

- (a)  $s(e) \neq t(e) \forall e \in E''$  a
- (b)  $\forall e \in E'' \exists e' \in E'' : s(e) = t(e') \wedge t(e) = s(e')$ .

**Poznámka.** Opět, aby [definice 1.0.3](#) odpovídala představě bodů a úseků (nebo oboustranných šipek), museli bychom definovat relaci  $R$  na  $E$  tak, aby  $e$  a  $e'$  byly v  $R$ , právě když  $s(e) = s(e')$  a  $t(e) = t(e')$  nebo  $s(e) = t(e')$  a  $t(e) = s(e')$ . V takovém případě bychom mohli sestavit bijekci mezi  $E''$  a  $E'$  z [definice 1.0.2](#).

**Příklad.** Ať  $V := \{1, 2, 3, 4, 5\}$  a

- (1)  $E := \{(1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (1, 4), (4, 1), (1, 5), (5, 1), (2, 3), (3, 2), (4, 5), (5, 4)\}$ ;
- (2)  $E' := \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$ ;
- (3)  $E'' := \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e'_1, e'_2, e'_3, e'_4, e'_5, e'_6\}$ , kde
  - (a)  $s(e_1) = s(e_2) = s(e_3) = s(e_4) = 1, s(e_5) = 2, s(e_6) = 4,$

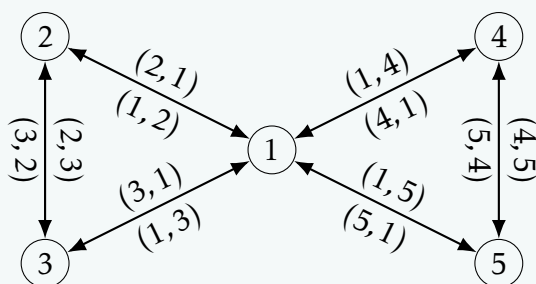


(b)  $t(e_1) = 2$ ,  $t(e_2) = t(e_5) = 3$ ,  $t(e_3) = 4$ ,  $t(e_4) = t(e_6) = 5$  a

(c)  $(s(e_i), t(e_i)) = (t(e'_i), s(e'_i))$  pro všechna  $i \leq 6$ .

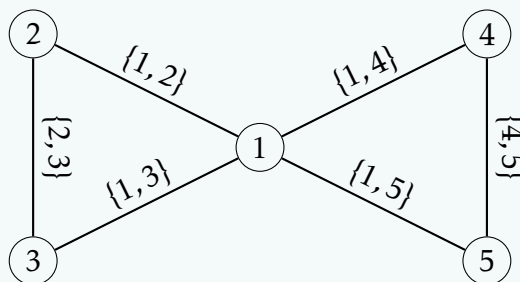
Není těžké nahlédnout, že  $E$ ,  $E'$  i  $(E'', s, t)$  definují tutéž strukturu na  $V$ . Nakreslíme si grafy  $G = (V, E)$ ,  $G' = (V, E')$  a  $G'' = (V, E'', s, t)$ . Přičemž hrany z  $E$  budeme kreslit jako oboustranné šipky, ty z  $E'$  jako prosté úsečky a ty z  $E''$  rozdělíme na dvě protichůdné šipky, abychom vyjádřili rozdíly v interpretaci těchto grafových struktur.

Graf  $G = (V, E)$  vypadá například [takto](#). Pomněte, že například oboustranná šipka mezi vrcholy 1 a 2 představuje ve skutečnosti **dvě** dvojice –  $(1, 2)$  a  $(2, 1)$  z relace  $E$ .



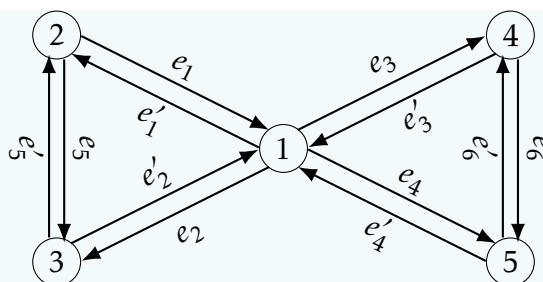
Obrázek 1: Graf jako množina  $V$  s relací  $E$ .

Zcela stejně vypadá i graf  $G' = (V, E')$ .

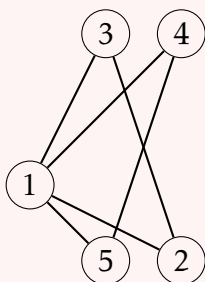


Obrázek 2: Graf jako množiny  $V$  a  $E' \subseteq \binom{V}{2}$ .

Konečně,  $G'' = (V, E'', s, t)$  můžeme načrtnout taktéž velmi podobně.

Obrázek 3: Graf jako množina  $V$  s trojicí  $(E'', s, t)$ .

**Výstraha.** Grafová struktura je obecně zcela nezávislá na jejím nakreslení. Například graf  $G = (V, E')$  z [předchozího příkladu](#) lze ekvivalentně vyobrazit třeba následovně.

Obrázek 4: Graf  $G = (V, E')$  nakreslený jinak.

V následujícím textu spojíme všechny tři interpretace dohromady a pro  $v, w \in V$  budeme hranu mezi  $v$  a  $w$  značit zjednodušeně jako  $vw$ . Pokud nehrozí nedorozumění, budeme pod tímto zápisem rozumět hranu, jejíž začátek je  $v$  a konec  $w$ , čili  $s(vw) = v$  a  $t(vw) = w$ . Avšak, kdykoli se nám to bude hodit, ztotožníme ji bez okolků s hranou  $wv$  s obrácenými konci.

Tento neformální přístup k popisu hran se může zdát jako nebezpečný, ale jak uvidíme, ve skutečnosti velmi zjednodušuje zápis a újma na rigorozitě je obecně minimální. Kompletněji řečeno, hranou mezi dvěma vrcholy  $v, w \in V$  myslíme buď dvojici  $(v, w) \in E$  nebo dvojici  $(w, v) \in E$  nebo množinu  $\{v, w\} \in E'$  nebo prvek  $e \in E''$  takový, že  $s(e) = v$  a  $t(e) = w$ , nebo prvek  $e' \in E''$  takový, že  $s(e') = w$  a  $t(e') = v$ , a je nám to u ...

Obecně, v teorii grafů se velmi často pracuje s konečnými posloupnostmi (či  $n$ -ticemi, chcete-li) vrcholů a hran. Zavedeme proto zjednodušené zna-

čení  $x_1 x_2 \cdots x_n$  pro uspořádanou  $n$ -tici  $(x_1, \dots, x_n)$ . Kdyby hrozil konflikt se zápisem součinu prvků  $x_1, \dots, x_n$ , samozřejmě tento úzus dočasně opustíme.

**Cvičení 1.0.1.** Nakreslete graf  $G = (V, E)$ , kde

- $V = \{1, \dots, 5\}, E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}.$
- $V = \{1, \dots, 5\}, E = \binom{V}{2}.$
- $V = \{1, \dots, 8\}, E = \{e_1, \dots, e_8\}$  a
  - $t(e_i) = s(e_{i+1}) = i + 1$  pro všechna  $i \leq 7$ ,
  - $t(e_8) = s(e_1) = 1.$

**Cvičení 1.0.2.** Popište všechny grafy  $G = (V, E)$ , kde  $E$  je relace na  $V$ , která je antireflexivní, symetrická (to je součástí definice grafu) a navíc **transitivní**.

**Cvičení 1.0.3.** Ať  $V$  je konečná množina a  $E$  je relace na  $V$ , která je antireflexivní a symetrická. Definujme navíc na  $E$  další relaci  $\sim$  předpisem

$$(v, v') \sim (w, w') \Leftrightarrow (v, v') = (w, w') \vee (v, v') = (w', w).$$

Dokažte, že pak existuje bijekce mezi  $[E]_{\sim}$  a množinou

$$E' := \{\{v, v'\} \mid (v, v') \in E\},$$

čili mezi množinou tříd ekvivalence  $E$  podle  $\sim$  a množinou, kterou dostanu tak, že z uspořádaných dvojic v  $E$  udělám neuspořádané dvojice, tj. dvoupvkové podmnožiny. Pro intuici vizte poznámku pod [definicí 1.0.1](#).

**Cvičení 1.0.4.** Spočítejte, kolik existuje grafů na  $n$  vrcholech.

## 1.1 Pohyb v grafu

Jak jsme zmínili na začátku kapitoly, mnoho aplikací teorie grafů využívá interpretace této struktury jako množiny „uzlů“ se „spojnicemi“, po kterých se dá mezi uzly pohybovat. V této podsekci dáme pohybu po spojnicích formální tvář.

Nejzákladnějším typem pohybu v grafu je libovolná posloupnost vrcholů se zcela přirozenou podmínkou, že mezi vrcholy v posloupnosti bezprostředně za sebou musí vést hrana. Takové posloupnosti se říká *sled* (angl. *walk*).

**Definice 1.1.1 (Sled poprvé).** Ať  $G = (V, E)$  je graf. Posloupnost vrcholů  $v_1 v_2 \cdots v_n$  nazveme *sledem* v grafu  $G$ , pokud  $v_i v_{i+1} \in E$  pro každý index  $i \in \{1, \dots, n-1\}$ .

Je však užitečné si uvědomit, že každý sled lze ekvivalentně definovat jako posloupnost navazujících hran. Tento pohled (jak uvidíme později v kapitole) má své aplikace – často nás totiž zajímá, po kterých spojnicích chodíme, spíše než které uzly procházíme.

Máme-li sled  $v_1 v_2 \cdots v_n$ , tak každá dvojice  $v_i v_{i+1}$  musí být hranou v  $G$ . To ovšem znamená, že zcela identickou informaci poskytuje i posloupnost hran  $e_1 e_2 \cdots e_{n-1}$ , kde  $e_i = v_i v_{i+1}$ .

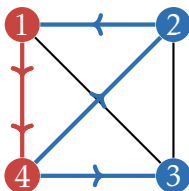
**Poznámka.** Tento princip, který prostupuje matematické struktury, je až překvapivě zásadního významu. Zobecníme-li trochu předchozí pozorování, uvědomíme si, že množina hran vlastně už v sobě obsahuje informaci o všech prvcích množiny  $V$ . Tedy bychom dokonce mohli definovat graf pouze jako množinu hran a množinu vrcholů bychom takto získali automaticky. Opak samozřejmě není pravdou.

Situace, kdy struktura na množině (či něčem složitějším) je dostatečně „hustá“, aby obsahovala kompletní informaci o této množině, je obecně velmi žádaná, jelikož struktura je často konstruována systematicky (a tedy ji rozumíme lépe) ve srovnání s náhodnou volbou její báze množiny.

Pro nedostatek představivosti uvedeme příklad z homologické alge-

bry, kde injektivní a projektivní rezolventy modulů obsahují již kompletní informaci o daném modulu. Tedy člověku pro pochopení teorie modulů z homologického hlediska „stačí“ studovat injektivní a projektivní moduly, které jsou z definice více omezené než moduly obecné, pročez snadněji popsatelné.

**Definice 1.1.2 (Sled podruhé).** Ať  $G = (V, E)$  je graf. Posloupnost hran  $e_1 e_2 \dots e_n$  nazveme *sledem* v grafu  $G$ , pokud  $t(e_i) = s(e_{i+1})$  pro všechna  $i \in \{1, 2, \dots, n-1\}$ .



Obrázek 5: Příklad sledu 142143 v grafu. Jednou navštívené hrany a vrcholy jsou značené **modře**, dvakrát navštívené **červeně**.

Méně obecným pohybem v grafu je sled, ve kterém se nesmějí opakovat hrany. Takové sledy lze najít často třeba v běžné situaci, kdy si jako rozvůzce jídla plánujete cestu městem. Jako uzly si označíte například místa, která musíte objet, a hrany budou nejkratší trasy mezi nimi. Projít přes některá místa vícekrát vám příliš vadit nemusí, ale ztrácet čas cestováním po stejné trase sem a tam byste neradi.

Takovému sledu se říká *tah* (angl. *trail*). Jeho definice je velmi přirozená.

**Definice 1.1.3 (Tah).** Ať  $G = (V, E)$ . *Tahem* v grafu  $G$  nazveme buď

- (1) sled (vrcholů)  $v_1 v_2 \dots v_n$  takový, že  $v_i v_{i+1} \neq v_j v_{j+1}$  pro všechna  $i \neq j$ , nebo
- (2) sled (hran)  $e_1 e_2 \dots e_{n-1}$  takový, že  $e_i \neq e_j$  pro všechna  $i \neq j$ .

**Výstraha.** Obě uvedené definice tahu jsou v našem (částečně neformálním) pojetí hran skutečně ekvivalentní. Napíšeme-li totiž  $v_i v_{i+1} \neq$

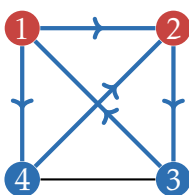
$v_j v_{j+1}$  myslíme tím vlastně dvě nerovnosti:

$$(v_i, v_{i+1}) \neq (v_j, v_{j+1}) \wedge (v_i, v_{i+1}) \neq (v_{j+1}, v_j);$$

nebo zápis můžeme též chápat jako

$$\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\},$$

čili každou hranu chceme projít (kterýmkoli směrem) maximálně jednou.



Obrázek 6: Příklad tahu 142312 v grafu. Jednou navštívené hrany a vrcholy jsou značené **modře**, dvakrát navštívené **červeně**.

Posledním, a asi nejčastěji zkoumaným, typem pohybu grafem je *cesta* (angl. *path*), což je sled, ve kterém se nesmějí opakovat ani hrany ani vrcholy. Pro jednoduchost je užitečné si uvědomit, že z podmínky neopakování vrcholů automaticky plyne podmínka neopakování hran. Pokud bychom totiž chtěli po nějaké hraně přejít dvakrát, tak zároveň dvakrát projdeme její koncové vrcholy. Definovat cestu pomocí sledu vrcholů je tudíž přímočaré.

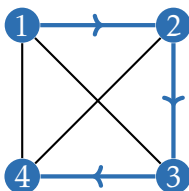
U sledu hran je to však horší. Protože každá hrana definuje dva vrcholy sledu, je třeba zařídit, aby se oba koncové body každé hrany lišily od obou koncových bodů jiné hrany, ale jenom tehdy, když hrany nejdou bezprostředně za sebou. To bohužel vede na trochu neintuitivní definici cesty přes hrany. Totiž, cesta obsahující  $n$  hran nutně obsahuje  $n + 1$  vrcholů, protože po sobě jdoucí hrany vždy sdílejí jeden vrchol. Rafinovaně se tedy cesta přes hrany dá vyjádřit jako tah, kde sjednocení přes všechny hrany (vnímané tentokrát jako množiny) má velikost právě  $n + 1$ .

Studium cest má aplikace například právě v návrhu elektrických obvodů, kdy zcela jistě nechcete, aby do připojených zařízení šel proud z více, než jednoho místa.

**Definice 1.1.4 (Cesta).** Ať  $G = (V, E)$  je graf. *Cestou* v grafu  $G$  nazveme buď

- (1) sled (vrcholů)  $v_1 v_2 \cdots v_n$  takový, že  $v_i \neq v_j$  pro všechna  $i \neq j$ , nebo
- (2) tah (hran)  $e_1 e_2 \cdots e_{n-1}$  takový, že

$$\# \bigcup_{i=1}^{n-1} e_i = n.$$



Obrázek 7: Příklad cesty 1234 v grafu. Navštívené hrany a vrcholy jsou značené modře.

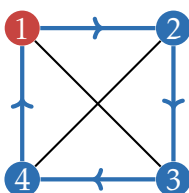
Posledním důležitým konceptem v grafu je tzv. *cyklus* (též *kružnice*, angl. *cycle*). Jedná se vlastně o „téměř cestu“, která končí tam, kde začala. Konkrétně je to tedy cesta prodloužená o svůj první vrchol (samozřejmě automaticky předpokládáme, že existuje hrana z posledního vrcholu do prvního).

**Definice 1.1.5 (Cyklus).** Ať  $G = (V, E)$  je graf. *Cyklem* v grafu nazveme buď

- (1) sled (vrcholů)  $v_1 v_2 \cdots v_n v_1$ , pokud  $v_1 v_2 \cdots v_n$  je cesta v  $G$ , nebo
- (2) tah (hran)  $e_1 e_2 \cdots e_{n-1} e_n$ , kde  $t(e_n) = s(e_1)$  a  $e_1 e_2 \cdots e_{n-1}$  je cesta v  $G$ .

Příklad cyklu vidíte na [obrázku 8](#). Jejich význam zatím necháme zahalen tajemstvím, jež má být odkryto v nejméně dramatickou chvíli.

**Cvičení 1.1.1.** Ať  $\mathcal{P}_1 = e_1^1 e_2^1 \cdots e_n^1$  a  $\mathcal{P}_2 = e_1^2 e_2^2 \cdots e_n^2$  jsou cesty. Za předpokladu, že  $t(e_n^1) = s(e_1^2)$ , definujeme jejich *sloučení*, které zapíšeme třeba



Obrázek 8: Příklad cyklu 12341 v grafu. Jednou navštívené hrany a vrcholy jsou značené **modře**, dvakrát navštívené **červeně**.

jako  $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$ , přirozeně jako posloupnost hran

$$\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 := e_1^1 e_2^1 \cdots e_n^1 e_1^2 e_2^2 \cdots e_n^2.$$

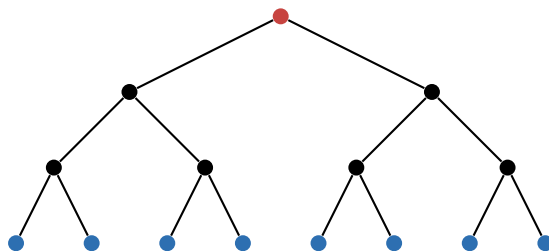
Určete, pro jaké cesty (v obecném grafu)  $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$  platí, že

- $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2 = \mathcal{P}_2 \oplus \mathcal{P}_1$ ;
- je  $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$  cesta;
- je  $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$  tah;
- je  $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$  sled;
- je  $\mathcal{P}_1 \oplus \mathcal{P}_2$  cyklus.



## 1.2 Stromy

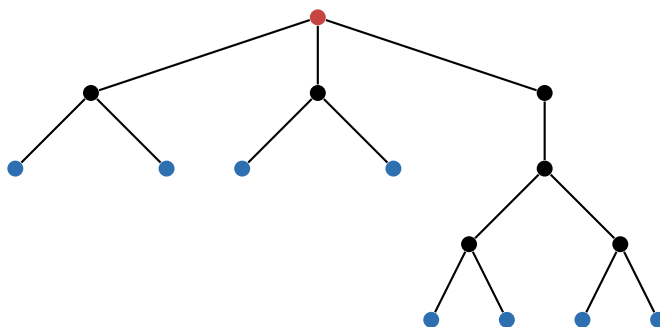
Chvíli se budeme bavit o stromech – ano, těch s listy a kořenem. Stromy jsou speciální typy grafů, které se takto nazývají ne nadarmo. Jsou to totiž grafy, u kterých si člověk může zvolit jakýsi „počáteční“ vrchol (zvaný *kořen*), z nějž se po cestě (ve smyslu [definice 1.1.4](#)) vždy dostane do jednoho z „koncových“ vrcholů, tzv. *listů*. Příklad stromu je na [obrázku 9](#).



Obrázek 9: Příklad stromu. Kořen je značen červeně a listy modře.

**Výstraha.** Listy stromu jsou určeny jednoznačně jeho strukturou (jsou to ty jediné vrcholy, do nichž cesty od kořene mohou pouze vést a nikoli jimi procházet). Za kořen lze však volit libovolný vrchol, klidně i jeden z listů. Strom z [obrázku 9](#) může proto vypadat i jak ukazuje [obrázek 10](#).

Často není nutno o kořenu a listech stromu hovořit, pokud je v konkrétní situaci irelevantní rozlišovat jednotlivé vrcholy. Součástí definice stromu (kterou si záhy odvodíme) kořen ani listy nejsou.



Obrázek 10: Strom z obrázku 9 s jinou volbou kořene.

Nyní si rozmyslíme dvě ekvivalentní definice stromu.

Za první podmínku, abychom mohli graf nazvat stromem, budeme považovat fakt, že od kořene se dá dostat po hranách do každého z listů. Ekvivalentně, že z každého vrcholu se dá cestou dostat do každého vrcholu, protože za kořen lze, jak jsme nahlédli, volit kterýkoli vrchol, a cestu z kořene do vrcholu můžeme zkrátit tak, aby končila v nějakém vrcholu, jímž původně procházela. Grafy splňující tuto podmínku slují *souvislé*.

**Definice 1.2.1 (Souvislý graf).** Graf  $G = (V, E)$  nazveme *souvislým*, pokud pro každé dva vrcholy  $v, w \in V$  existuje cesta z  $v$  do  $w$ , tedy cesta  $v_1 v_2 \cdots v_n$ , kde  $v_1 = v$  a  $v_n = w$ .

Samotný název „strom“ plyne z faktu, že se jako graf pouze „větví“, čímž míníme, že při cestě směrem od (libovolného) kořene se jeden může pouze přibližovat k listům, ale nikoli se dostat zpět blíže ke kořeni. To lze snadno zařídit tak, že zakážeme cykly. Totiž, neexistuje-li v grafu cyklus, pak se po libovolné cestě ze zvoleného vrcholu můžeme od tohoto vrcholu pouze vzdalovat. Takové grafy nazveme, přirozeně, *acyklické*.

**Definice 1.2.2 (Acyklický graf).** Graf  $G = (V, E)$  nazveme *acyklický*, pokud neobsahuje cyklus o aspoň třech vrcholech (samotné vrcholy jsou totiž z [definice](#) vždy cykly).

**Definice 1.2.3 (Strom).** Graf  $G = (V, E)$  nazveme *stromem*, je-li souvislý a acyklický.

Na začátku sekce jsme slíbili ještě ekvivalentní definici stromu; ta činí značnou část důvodu užitečnosti stromů, především v informatice.

Ukazuje se totiž, že neexistence cyklů spolu se souvislostí způsobují, že mezi dvěma vrcholy vede vždy **přesně jedna cesta**. Po chvíli zamyšlení snad toto nepřichází jako nijak divoké tvrzení. Přeci, pokud by mezi vrcholy vedly cesty dvě, pak vrchol, kde se rozpojují, a vrchol, kde se opět spojují, by byly součástí cyklu uvnitř stromu, který jsme výslovně zakázali. Třeba překvapivější je fakt, že platí i opačná implikace.

**Tvrzení 1.2.4 (Ekvivalentní definice stromu).** Graf  $G = (V, E)$  je stromem ve smyslu [definice 1.2.3](#) právě tehdy, když mezi každými dvěma

vrcholy  $G$  vede přesně jedna cesta.

**Důkaz.** Dokazujeme dvě implikace. Obě budeme dokazovat v jejich *kontrapozitivní* formě, tedy jako obrácenou implikaci mezi negacemi výroků. Lidsky, dokážeme, že (1) když existují vrcholy, mezi kterými nevede žádná nebo vede více než jedna cesta, pak  $G$  není strom, a (2) když  $G$  není strom, tak existují vrcholy, mezi kterými nevede žádná cesta nebo vede více než jedna.

- (1) Pokud existují vrcholy, mezi kterými nevede cesta, pak  $G$  není souvislý, což odporuje [definici stromu](#). Budeme tedy předpokládat, že existují vrcholy  $v, w$ , mezi kterými vedou různé cesty  $v_1 \cdots v_n$  a  $v'_1 \cdots v'_m$ , kde  $v_1 = v'_1 = v$  a  $v_n = v'_m = w$ . Myšlenka důkazu je najít cyklus obsahující vrchol, kde se cesty rozdělují, a vrchol, kde se opět spojují. Vizte [obrázek 11a](#).

Ať  $r$  (od rozpojení) je **největší** index takový, že  $v_i = v'_i$  pro všechna  $i \leq r$  (čili  $v_r = v'_r$  je vrchol, ve kterém se cesty rozpojují). Ten určitě existuje, protože cesty se v nejhorším případě dělí už ve vrcholu  $v = v_1$ .

Podobně, ať  $s$  (od spojení) je **nejmenší** index takový, že existuje  $k \in \mathbb{Z}$  splňující  $v_j = v'_{j+k}$  pro všechna  $j \geq s$ . Čili, vrchol  $v_s = v'_{s+k}$  je vrchol, ve kterém se cesty opět spojily. Ovšem, mohlo se tak stát v okamžiku, kdy jsme po jedné cestě prošli více nebo méně vrcholů než po druhé – tento počet vyjadřuje ono číslo  $k$ . Takový vrchol jistě existuje, v nejhorším je to přímo koncový vrchol  $w = v_n$ .

Zřejmě platí  $r < s$ , jinak by cesty nebyly různé. Potom je ovšem například posloupnost vrcholů

$$(v_r, v_{r+1}, \dots, v_s = v'_{s+k}, v'_{s+k-1}, \dots, v'_r = v_r)$$

cyklem v  $G$ . Tedy ani v tomto případě  $G$  není strom.

- (2) Když  $G$  není strom, tak není souvislý nebo obsahuje cyklus. Když  $G$  není souvislý, tak existují vrcholy, mezi nimiž nevede v  $G$  cesta, což protirečí podmínce, aby mezi každým párem vrcholů vedla přesně jedna.

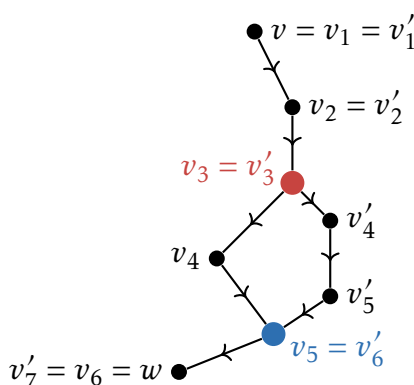
Budeme tedy předpokládat, že  $G$  obsahuje cyklus  $v_1 v_2 \cdots v_n$  (tedy  $v_n = v_1$  a  $n \geq 3$ ). Pak ovšem pro libovolné indexy  $i < j \leq n$  jsou

posloupnosti

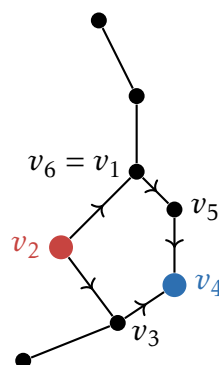
$$(v_i, v_{i+1}, \dots, v_j) \quad \text{a} \quad (v_i, v_{i-1}, \dots, v_1 = v_n, v_{n-1}, \dots, v_j)$$

dvě různé cesty mezi  $v_i$  a  $v_j$ . Vizte [obrázek 11b](#).

Tím je důkaz dokončen. □



(a) Část (1) důkazu [tvrzení 1.2.4](#). Zde  $r = 3, s = 5$  a  $k = 1$ . Sestrojený cyklus je  $v_3 v_4 v_5 v'_5 v'_4 v'_3$ .



(b) Část (2) důkazu [tvrzení 1.2.4](#). Zde  $i = 2, j = 4$  a sestrojené cesty jsou  $v_2 v_3 v_4$  a  $v_2 v_1 v_5 v_4$ .

Obrázek 11: Ilustrace k důkazu [tvrzení 1.2.4](#).

**Cvičení 1.2.1.** Dokažte, že je-li  $T = (V, E)$  strom, pak  $\#E = \#V - 1$ .

**Cvičení 1.2.2.** Spočítejte, kolik existuje stromů na  $n$  vrcholech.

### 1.2.1 Minimální kostra

Ne všechny hrany jsou si rovny. Kterési se rodí krátké, jiné dlouhé; kteréši štíhlé, jiné otlilé; kteréši racionální, jiné iracionální.

Často nastávají situace, kdy jeden potřebuje hranám grafu přiřadit nějakou hodnotu, obvykle číselnou, která charakterizuje klíčovou vlastnost této hrany. Při reprezentaci dopravní sítě grafem to může být délka silnice či její vytížení, při reprezentaci elektrických obvodů pak například odpor. V teorii grafů takové přiřazení hodnoty hranám grafu sluje *ohodnocení*.

**Definice 1.2.5 (Ohodnocený graf).** Ať  $G = (V, E)$  je graf. Libovolné zobrazení  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$  nazveme *ohodnocením* grafu  $G$ . Trojici  $(V, E, w)$ , kde  $w$  je ohodnocení  $G$ , nazveme *ohodnoceným grafem*.

**Poznámka.** Každý graf  $G = (V, E)$  lze triviálně ztotožnit s ohodnoceným grafem  $(V, E, w)$ , kde  $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$  je konstantní zobrazení. Obvykle se volí konkrétně  $w \equiv 1$ , tedy zobrazení  $w$  takové, že  $w(e) = 1$  pro každou  $e \in E$ .

Porozumění struktuře ohodnocených grafů může odpovědět na spoustu zajímavých (jak prakticky tak teoreticky) otázek. Můžeme se kupříkladu ptát, jak se nejlépe (vzhledem k danému ohodnocení) dostaneme cestou z jednoho vrcholu do druhého. Slovo „nejlépe“ zde chápeme pouze intuitivně. V závislosti na zpytovaném problému můžeme požadovat, aby cesta třeba minimalizovala či maximalizovala součet hodnot všech svých hran přes všechny možné cesty mezi danými vrcholy. Jsou však i případy, kdy člověk hledá cestu, která je nejbližší „průměru“.

Abychom pořád neříkali „součet přes všechny hrany cesty“, zavedeme si pro toto často zkoumané množství název *váha cesty*. Čili, je-li  $\mathcal{P} := e_1 \cdots e_n$  cesta v nějakém ohodnoceném grafu  $G$ , pak její vahou rozumíme výraz

$$w(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^n w(e_i).$$

Zápis  $w(\mathcal{P})$  můžeme vnímat buď jako zneužití zavedeného značení, nebo jako fakt, že jsme zobrazení  $w$  rozšířili z množiny všech hran na množinu všech cest v grafu  $G$  (kde samotné hrany jsou z [definice](#) též cesty).

**Poznámka.** Záměrně jsme užili slovního spojení *váha cesty* místo snad přirozenějšího *délka cesty*. V teorii grafů se totiž délkou cesty myslí obvykle počet hran (nebo vrcholů), které obsahuje. Délka cesty  $\mathcal{P} = e_1 \cdots e_n$  je tudíž  $n$  (resp.  $n + 1$ ), bo obsahuje  $n$  hran (resp.  $n + 1$  vrcholů).

Tento úzus svědčí účelu [předchozí poznámky](#). Pokud totiž každý graf bez ohodnocení vnímáme vlastně jako ohodnocený graf, kde každá hrana má váhu přesně 1, pak váha každé cesty je rovna její délce.

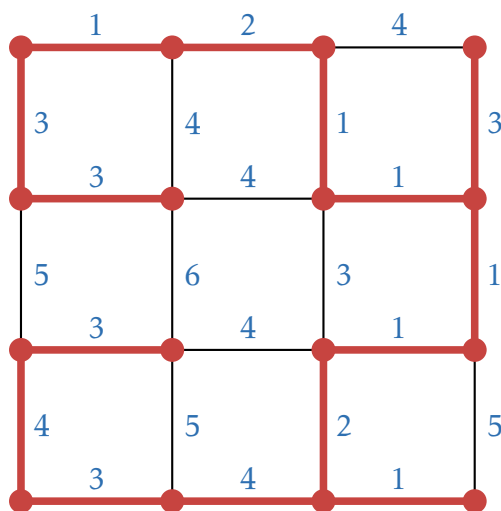
První (a nejjednodušší) problém, kterým se budeme zabývat, je nalezení

*minimální kostry* (angl. *spanning tree*).

**Definice 1.2.6 (Minimální kostra).** Ať  $G = (V, E, w)$  je **souvislý** ohodnocený graf. Ohodnocený graf  $K = (V', E', w)$  nazveme *minimální koustou* grafu  $G$ , pokud je souvislý,  $V' = V$  (tedy  $K$  obsahuje všechny vrcholy  $G$ ),  $E' \subseteq E$  a

$$\sum_{e \in E'} w(e)$$

je minimální vzhledem ke všem možným volbám podmnožiny  $E' \subseteq E$ . Lidsky řečeno, graf  $K$  spojuje všechny vrcholy  $G$  tím „nejlevnějším“ způsobem vzhledem k ohodnocení  $w$ .



Obrázek 12: **Minimální kostra** grafu s ohodnocením  $w$ .

**Pozorování.** Minimální kostra ohodnoceného grafu je strom.

**Důkaz.** Kdyby minimální kostra nebyla strom, pak buď není souvislá, což jsme výslovně zakázali, nebo obsahuje cyklus. Tudiž se mezi nějakými dvěma vrcholy dá jít po více než jedné cestě, a proto můžeme přinejmenším jednu hranu z kostry odebrat. Protože každá hrana má kladné ohodnocení, snížili jsme tím součet hodnot všech hran. To je spor.  $\square$

**Důsledek 1.2.7.** Minimální kostra ohodnoceného stromu je s ním totožná.

Minimální kostra je zvláště užitečná právě při návrhů elektrických obvodů, kdy je potřeba zařídit, aby všechna připojená zařízení čerpala co nejmenší množství energie. Protože elektřina proudí rychlostí světla, délka kabelu (pokud není zrovna mezigalaktický) nás příliš netrápí, ale právě odpor či kvalita/vodivost konkrétních spojů by mohly.

Další praktickou grafovou úlohou vedoucí na problém nalezení minimální kostry je potřeba spojit vzdálené servery. Korporace mají obvykle mnoho různých serverů rozmístěných po světě, jež spolu ale musejí sdílet data. Problém je v tom, že propojení mezi servery by nejen mělo vést k nejmenší možné prodlevě při přenosu dat (od toho **minimální**), ale nesmí ani obsahovat cykly (od toho **kostra**). Kdyby totiž cykly obsahovalo, pak by se při přenosu dat stalo, že by aspoň jeden server v tomto cyklu dostal aspoň dvakrát stejnou informaci z dvou různých zdrojů, ale v odlišný čas. Taková situace vede nezbytně dříve nebo později ke korupci dat; řekněme, když daný server už s obdrženou informací začal po přijetí provádět výpočet. Pro více detailů k tomuto využití minimálních koster vizte [Spanning Tree Protocol](#).

### 1.2.2 Kruskalův algoritmus

Na problém nalezení minimální kostry souvislého ohodnoceného grafu existuje skoro až zázračně přímočarý algoritmus, pojmenovaný po americkém matematiku, Josephu B. Kruskalovi. Jeho základní myšlenkou je prostě začít s grafem  $K$  obsahujícím všechny vrcholy z  $V$  a přidávat hrany od těch s nejnižším ohodnocením po ty s nejvyšším tak dlouho, dokud nevznikne souvislý graf. Je potřeba pouze dávat pozor na cykly. K tomu stačí si pamatovat stromy (jako množiny vrcholů), které přidáváním hran vytváříme, a povolit přidání hrany jedině v případě, že spojuje dva různé stromy.

Pro zápis v pseudokódu vizte [algoritmus 1](#). Manim s průběhem algoritmu s náhodně vygenerovaným hodnocením je k dispozici [zde](#).

**Algoritmus 1:** Kruskalův algoritmus.

---

**input** : souvislý ohodnocený graf  $G = (V, E, w)$ , kde  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$   
**output**: množina hran  $E'$  minimální kostry grafu  $G$

---

```

1 Inicializace;
2  $E' \leftarrow \emptyset$ ;
3 Množina hran, které nelze přidat (jinak by vznikl cyklus);
4  $X \leftarrow \emptyset$ ;
5 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
6   Každý strom nejprve obsahuje pouze jediný vrchol;
7    $T_i \leftarrow \{v_i\}$ ;
8 Množina indexů pro pamatování sloučených stromů;
9  $I \leftarrow \{1, \dots, n\}$ ;
10 Přidávám hrany, dokud mám pořád víc než jeden strom;
11 while  $\#I > 1$  do
12    $e \leftarrow$  libovolná hrana s minimální  $w(e)$ , která není v  $E'$  ani v  $X$ ;
13    $i \leftarrow$  index v  $I$  takový, že  $s(e) \in T_i$ ;
14    $j \leftarrow$  index v  $I$  takový, že  $t(e) \in T_j$ ;
15   if  $i = j$  then
16     Hrana spojuje vrcholy ve stejném stromě, jejím přidáním by
17     vznikl cyklus;
18      $X \leftarrow X \cup \{e\}$ ;
19   else
20     Hrana spojuje různé stromy. Přidávám ji do kostry;
21      $E' \leftarrow E' \cup \{e\}$ ;
22      $T_i \leftarrow T_i \cup T_j$ ;
23      $I \leftarrow I \setminus \{j\}$ ;
23 return  $E'$ ;

```

---

**Tvrzení 1.2.8.** Kruskalův algoritmus je korektní.

**Důkaz.** Potřebujeme ověřit, že

- (1) algoritmus provede pouze konečný počet kroků;
- (2) algoritmus vrátí správnou odpověď.

Případ (1) je zřejmý, protože  $\#E < \infty$ , čili algoritmus přidá do  $E'$  pouze



konečně mnoho hran. Navíc, graf  $G$  je z předpokladu souvislý, a tedy vždy existuje hrana  $e$  spojující dva různé stromy  $T_i$  a  $T_j$ .

V případě (2) uvažme, že  $K = (V, E', w)$  není minimální kostra  $G$ . V takovém případě se mohlo stát, že

- (a)  $K$  není strom – tedy buď není souvislý nebo obsahuje cyklus;
- (b) existuje podmnožina  $E'' \subseteq E$  taková, že  $K' = (V, E'', w)$  je strom a

$$\sum_{e \in E''} w(e) < \sum_{e \in E'} w(e).$$

Případ (a) lze vyloučit snadno, neboť souvislost  $K$  plyne ihned ze souvislosti  $G$ , tedy, jak již bylo řečeno v bodě (1), vždy lze nalézt hranu spojující do té doby dva různé stromy. Pokud  $K$  obsahuje cyklus, tak algoritmus musel v jednom kroku spojit hranou dva vrcholy ze stejného stromu, což je spor.

Pokud nastal případ (b), pak musejí existovat hrany  $e'' \in E'' \setminus E'$  a  $e' \in E' \setminus E''$  takové, že  $w(e'') < w(e')$ . Protože algoritmus zkouší přidávat hrany vždy počínaje těmi s nejmenší vahou, musel v nějakém kroku narazit na hranu  $e''$  a zavrhnout ji. To ovšem znamená, že hrana  $e''$  spojila dva různé vrcholy téhož stromu a graf  $K' = (V, E'', w)$  obsahuje cyklus. To je spor s předpokladem, že  $K'$  je strom. Tedy, taková podmnožina  $E'' \subseteq E$  nemůže existovat a  $K$  je vskutku minimální kostra  $G$ .  $\square$

**Výstraha.** Minimální kostra grafu **není jednoznačně určena!** Všimněte si, že na řádku 12 **Kruskalova algoritmu** volím **libovolnou** hranu, která má ze všech zatím nepřidaných nejnižší váhu a jejímž přidáním nevznikne cyklus.

**Poznámka.** V **definici minimální kostry** požadujeme, aby  $G$  byl souvislý graf. Pokud tomu však tak není, je pořád možné zkonstruovat minimální kostru pro každou část  $G$ , která souvislá je (pro každou jeho tzv. *komponentu souvislosti*), zkrátka tím, že **Kruskalův algoritmus** spouštíme opakovaně.

**Cvičení 1.2.3** (Těžké ale fun). Ať  $V$  je množina  $n$  bodů v rovině. Pro každé dva body  $x, y \in V$  definujme váhu hrany  $xy$  jako vzdálenost bodů  $x$  a  $y$ . Čili, pokud  $x = (x_1, x_2)$  a  $y = (y_1, y_2)$ , pak

$$w(xy) := \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}.$$

Vzniklý graf označme obvykle  $G$ .

- (a) Ukažte, že v každé minimální kostře  $G$  vede z každého vrcholu maximálně 6 hran.
- (b) Ukažte, že existuje minimální kostra  $G$ , jejíž hrany se (jakožto úsečky v rovině) nekříží.

**Cvičení 1.2.4.** Úplným grafem na  $n$  vrcholech myslíme graf  $G = (V, \binom{V}{2})$ , tedy graf, mezi každým párem jehož vrcholů vede hrana. Takový graf se obvykle značí  $K_n$ . Najděte minimální kostru  $K_n$  a spočtěte její váhu (tj, součet vah všech jejích hran), je-li  $V = \{1, \dots, n\}$  a

- (a)  $w(ij) = \max(i, j)$ ,
- (b)  $w(ij) = i + j$ ,

pro všechny páry  $i, j \leq n$ .

**Cvičení 1.2.5.** Dokažte, že když  $w$  (tj. ohodnocení  $G$ ) je prosté zobrazení, pak je minimální kostra  $G$  určena jednoznačně.

### 1.3 Jordanovo centrum

V návaznosti na [sekcí o minimální kostře](#) se rozhovoříme o jednom dalším optimalizačním problému – konkrétně hledání „centra“ ohodnoceného grafu.

Motivační úlohou je tzv. *facility location problem*, v přibližném překladu *úloha umístění střediska*. Jde o úlohu, kdy máte danu dopravní síť sídlišť (obecně obydlených zón) a význačných uzlů, přes které se chtít nechtít musí jezdit (například velké křižovatky, Nuselák apod.). Hrany vedou mezi sídlišti či uzly, když od jednoho k druhému vede bezprostřední cesta (tedy cesta neprocházející žádným jiným sídlištěm nebo uzlem).

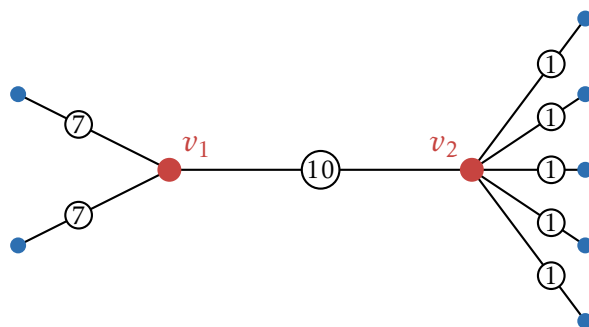
Pojďme si úlohu rozmyslet podrobně. Máme u nějakého uzlu v síti dopravních křižovatek postavit středisko. Bez ohledu na typ střediska nás pravděpodobně zajímá, aby se všichni z obydlených zón, které má toto středisko pokrýt, dostali k němu co nejdříve. Ovšem, výraz „co nejdříve“ je matematicky příliš vágní. Jistě hledáme optimální řešení, ale v jakém smyslu konkrétně?

Snad bude užitečné kýžený smysl optimality vyzkoumat na příkladě. Řekněme, že střediskem, jež potřebujeme umístit, je nemocnice. Co znamená, že je vzhledem k dané síti nemocnice *optimálně* umístěna? První, co by nás mohlo napadnout, je chtít, aby průměr vzdáleností od obydlených zón k nemocnici byl co nejmenší. To je přirozená myšlenka, ale jak si ihned rozmyslíme, vcelku morbidní.

U průměru totiž často nastává situace, že značný počet nízkých hodnot převáží nad zanedbatelným počtem hodnot vysokých. Uvažte síť uzlů a sídlišť danou grafem na [obrázku 13](#), kde sídliště jsou značena [modře](#), dopravní uzly [červeně](#) a ohodnocení hran, jak je vlastně zvykem, značí průměrnou dobu jízdy po těchto cestách.

V tomto případě by uzel [v<sub>2</sub>](#) jistě nabízel mnohem lepší průměrné řešení, neboť můžeme snadno spočítat, že průměrná doba jízdy od libovolného sídliště k němu je asi pět a půl minuty. Naopak, průměrná doba jízdy k uzlu [v<sub>1</sub>](#) činí těsně pod deset minut.

My se ale přesto rozhodneme postavit nemocnici v uzlu [v<sub>1</sub>](#). Proč? Totiž, při stavbě nemocnice nám nejde ani tolik o to, aby se do ní dostalo co nejvíce lidí co nejrychleji, ale **aby to nikdo neměl příliš daleko**. Kdybychom



Obrázek 13: Špatně vyvážená síť **sídlíšť** a **dopravních uzlů**.

učinili opak a postavili nemocnici v uzlu  $v_2$ , pak by sice lidé ze sídlíšť na pravé straně to měli do nejbližší nemocnice pouhou minutu, ale lidé z levých sídlíšť by cestovali průměrně až sedmnáct minut. Do uzlu  $v_1$  se dostane každý člověk nejpozději za jedenáct minut.

Tento způsob měření vhodnosti umístění nemocnice v dopravních sítích je skutečně v praxi používaný a je dozajista nepěkným příkladem volby menšího ze dvou zel. Tedy, není prioritou, aby se někomu dostalo pomoci velmi brzy, ale aby se nikomu nedostalo pomoci příliš pozdě.

Problém, jenž jsme právě zformulovali, je variantou výše zmíněného *facility location problem* (dále jen FLP), která sluje EFLP, tedy *emergency facility location problem*. Úlohou je nalézt takový uzel, jehož **maximální** vzdálenost ke všem ostatním uzlům je minimální, čili uzel pro umístění středisek jako jsou právě nemocnice a polikliniky, či obecněji „pohotovostní“ střediska.

Druhou známou variantou je SFLP, čili *service facility location problem* – úloha nalézt vhodný uzel pro umístění střediska „služeb“, kde je naopak žádoucí, aby nastala druhá z výše diskutovaných situací, aby se k němu přiblížilo co nejvíce lidí co nejrychleji. Ti, již cestují dlouho, budou na nejméně libý pád kalé nálady sedíce rozčileně ve voze a shrbení klejíce ustavičně v kolena, však nezhytnou.

Formálně tedy hledáme uzel, který minimalizuje průměr všech vzdáleností od něj ke všem ostatním uzlům. Pro usnadnění výpočtu je dobré si uvědomit, že minimalizovat **průměr** všech vzdáleností je totéž, co minimalizovat **součet** všech vzdáleností, neboť počet uzlů se nemění (**Rozmyslete si to!**).

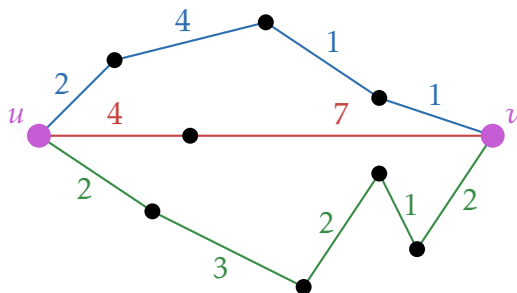
K formulaci obou úloh potřebujeme zavést základní pojem *vzdálenosti* mezi vrcholy v ohodnoceném grafu.

V zájmu strohosti vyjádření označíme pro libovolné dva vrcholy  $u, v \in V$  grafu  $(V, E, w)$  symbolem  $\mathcal{P}(u, v)$  množinu všech cest mezi  $u$  a  $v$ . Speciálně,  $\mathcal{P}(v, v) = \{v\}$ , čili cesta z vrcholu do něj samého obsahuje pouze tento jeden vrchol, a  $\mathcal{P}(u, v) = \emptyset$ , pokud mezi  $u$  a  $v$  nevede v  $G$  cesta.

**Definice 1.3.1 (Vzdálenost v grafu).** Ať  $G = (V, E, w)$  je ohodnocený graf a  $u, v \in V$ . *Vzdálenost* mezi  $u$  a  $v$  v grafu  $G$ , značenou  $d_G(u, v)$  (z angl. **d**istance), definujeme jako

$$d_G(u, v) := \begin{cases} \min_{\mathcal{P} \in \mathcal{P}(u, v)} w(\mathcal{P}), & \text{pokud } \mathcal{P}(u, v) \neq \emptyset; \\ \infty, & \text{pokud } \mathcal{P}(u, v) = \emptyset. \end{cases}$$

Lidsky řečeno, vzdáleností mezi vrcholy je váha nejkratší cesty mezi nimi vedoucí, pokud taková existuje.



Obrázek 14: Zde  $d_G(u, v)$  je váha nejkratší, to jest **modré**, cesty.

Abychom našli pro daný graf  $G = (V, E, w)$  řešení EFLP, musíme najít takový vrchol, který minimalizuje největší možnou vzdálenost od něj ke všem ostatním vrcholům  $G$ . Takový vrchol (nebo vrcholy?) nazveme *Jordanovým centrem* grafu  $G$ , po žabožroutím počtáři, Marie E. C. Jordanovi.

Samozřejmě, nezajímá-li nás vzdálenost ke **všem** vrcholům, jako je tomu v příkladě umístění nemocnice, uvážíme pouze maximum vzdáleností k relevantním vrcholům (tedy k sídlištím). Na principu úlohy to nic nemění.

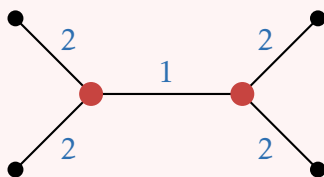
Formálně, *excentricita* vrcholu  $v \in V$  je kvantita  $e(v) := \max_{u \in V} d_G(v, u)$ , tedy maximum přes všechny vzdálenosti od něj k ostatním vrcholům. Toto číslo vyjadřuje, jak moc je vrchol vzdálen od „ideálního centra“ grafu,

tedy od bodu, od kterého by každý vrchol byl stejně daleko. Samozřejmě, toto ideální centrum málokdy existuje, takže hledáme pouze vrchol s nejmenší excentricitou, s nejmenší *odchylkou* od centra.

**Definice 1.3.2 (Emergency Facility Location Problem).** Ať  $G = (V, E, w)$  je **souvislý** ohodnocený graf. Úlohu nalézt vrchol s minimální excentricitou nazveme EFLP. Jejím *řešením* je vrchol s touto vlastností, tedy vrchol  $c \in V$  splňující

$$e(c) = \min_{v \in V} e(v).$$

**Výstraha.** Řešení EFLP **není jednoznačně určeno!** Vizte např. graf na obrázku 15.



Obrázek 15: **Vrcholy s minimální excentricitou** v grafu  $G = (V, E, w)$ .

**Definice 1.3.3 (Jordanovo centrum).** Množinu všech řešení EFLP pro graf  $G = (V, E, w)$  nazýváme *Jordanovým centrem* grafu  $G$ .

**Definice 1.3.4 (Poloměr grafu).** Je-li  $c$  vrchol v Jordanově centru grafu  $G = (V, E, w)$ , pak hodnotu  $e(c)$  nazýváme *poloměrem* grafu  $G$  a značíme ji  $\rho(G)$ .

**Poznámka.** V *definici EFLP* jsme požadovali, aby byl graf souvislý. To z ryze technického hlediska není nutné, protože excentricita vrcholu je definována i pro nesouvislý graf. Uvědomme si ale, že pro nesouvislý graf je excentricita každého vrcholu rovna  $\infty$ , tedy Jordanovým centrem je celý graf a úloha poněkud pozbývá smyslu.

Obdobným způsobem si formalizujeme i SFLP.

Nyní chceme nalézt vrchol, který minimalizuje průměr (nebo ekvivalent-

ně součet) vzdáleností od něj  $k$ , buď všem nebo pouze zajímavým, vrcholům. Názvosloví zde poněkud selhává a tomuto součtu přes vzdálenosti ke všem vrcholům se rovněž často přezdívá *excentricita*. Abychom pojmy odlišili, slovo „excentricita“ přeložíme a budeme říkat „výstřednost“. Tedy, *výstředností* vrcholu  $v \in V$  v ohodnoceném grafu  $G = (V, E, w)$  myslíme číslo

$$e'(v) := \sum_{u \in V} d_G(v, u).$$

**Definice 1.3.5 (Service Facility Location Problem).** Ať  $G = (V, E, w)$  je souvislý ohodnocený graf. Úlohu nalézt vrchol s minimální výstředností nazveme SFLP. Jejím řešením je vrchol  $c' \in V$  s touto vlastností, tedy takový, že

$$e'(c') = \min_{v \in V} e'(v).$$

Pochopitelně, stejně jako EFLP, i SFLP může mít více řešení. Avšak, podle našeho nejlepšího vědomí se množině řešení SFLP nijak význačně neříká. Minimální výstřednost se občas nazývá *status* grafu  $G$ . Etymologie tohoto názvosloví je spjata s novodobým využitím SFLP při vyvažování nervových sítí a její zevrubné objasnění je nad rámec tohoto textu.

**Definice 1.3.6 (Status grafu).** Ať  $G = (V, E, w)$  je souvislý ohodnocený graf. Když  $c' \in V$  je řešení SFLP, pak se hodnota  $e'(c')$  nazývá *status* grafu  $G$  a značí se  $\sigma(G)$ .

**Výstraha.** Řešení EFLP a řešení SFLP mohou (ale **nemusí**) být disjunktní. Vrátime-li se ke grafu na [obrázku 13](#), pak řešením EFLP je pouze vrchol  $v_1$ , zatímco řešením SFLP je pouze vrchol  $v_2$ .

Následující podsekcí dedikujeme obecnému algoritmu, pomocí nějž lze také hledat řešení jak EFLP, tak SFLP. Poznamenejme však, že existují mnohem efektivnější algoritmy, jež naleznou řešení těchto úloh; tyto ale vyžadují o poznání hlubší poznatky teorie grafů.

### 1.3.1 Floydův-Warshallův algoritmus

Vlastně jedinou výzvou na cestě k vyřešení FLP je umět aspoň rámcově efektivně najít vzdálenost mezi všemi dvojicemi vrcholů. Bohužel, žádná pěkná věta jako Pythagorova, která umožňuje okamžitě počítat vzdálenosti bodů v Eukleidovských prostorech, v teorii grafů neexistuje a existovat nemůže.

Připomeňme, že v ohodnoceném grafu  $G = (V, E, w)$  je vzdálenost vrcholů  $u, v \in V$  **definována** jako váha nejkratší cesty. Poznamenejme, že zde slovo „nejkratší“ chápeme ve smyslu *váhy* cesty (tedy součtu vah všech jejích hran), nikoli ve smyslu *délky* cesty (tedy počtu jejích hran). Asi bychom měli říkat „nejlehčí“ cesta, to je ale poněkud nepřírozené...

Floydův-Warshallův algoritmus nesouvisí přímo s FLP. Je to algoritmus, který nalezne vzdálenost (tedy váhu nejkratší cesty) mezi všemi dvojicemi vrcholů. Je však zřejmé, jak znalost této informace vede okamžitě k řešení EFLP, resp. SFLP. V moment, kdy známe vzdálenost každého vrcholu od každého, stačí pouze spočítat excentricitu, resp. výstřednost, každého vrcholu a vybrat pouze ty s minimální.

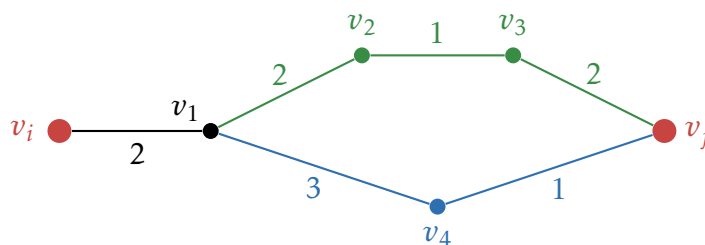
Jistě není překvapením, že zkoušet z každého vrcholu všechny možné cesty do všech ostatních vrcholů a z nich vybírat ty nejkratší, není dvakrát efektivní. Floydův-Warshallův algoritmus stojí na dvou principech, jimž se především v programování říká *rekurze* a *dynamické programování*. Jejich úplné pochopení a nabytí schopnosti využívat může být časově náročné, ale Floydův-Warshallův algoritmus jich využívá velmi přímočaře. Postupně si rozebereme, že ze znalosti váhy nejkratší cesty mezi dvěma vrcholy, **která využívá jen nějakou podmnožinu ostatních vrcholů**, lze zvětšováním této podmnožiny získat nakonec váhu nejkratší cesty mezi těmito vrcholy v celém grafu (odtud *rekurze*). Dále, ze znalosti vzdálenosti mezi určitými dvojicemi vrcholů můžeme rychle určit vzdálenost mezi párem, u kterého jsme ji zatím neznali (odtud *dynamické programování*).

Naši práci v této podsekci je dát předchozímu odstavci formální podobu. Ať  $G = (V, E, w)$  je souvislý ohodnocený graf, kde  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ . Definujme zobrazení  $\delta : \{1, \dots, n\}^3 \rightarrow \mathbb{R}^+$  následovně. Ať  $\delta(i, j, k)$  je váha nejkratší cesty mezi  $v_i$  a  $v_j$  **využívající pouze vrcholy z podmnožiny vrcholů**  $\{v_1, \dots, v_k\}$  (samozřejmě, kromě počátečního  $v_i$  a koncového  $v_j$ ). I když je  $G$  souvislý, tak taková cesta nemusí vždy existovat; v takovém případě je  $\delta(i, j, k) = \infty$ . Je snadné si uvědomit, že  $d_G(v_i, v_j) = \delta(i, j, n)$ , čili vzdále-



nost mezi vrcholy v grafu  $G$  je váha nejkratší cesty, která smí využít jeho všechny vrcholy.

Je zřejmé, že  $\delta(i, j, k) \leq \delta(i, j, k-1)$ , neboť máme jeden vrchol navíc, a přes ten může vést nějaká kratší cesta. Základní, a vlastně jedinou, myšlenkou Floydova-Warshallova algoritmu je pozorování, že když nastane situace, kdy  $\delta(i, j, k) < \delta(i, j, k-1)$ , pak ta kratší cesta musí využívat vrchol  $v_k$ . Ovšem, takovou cestu lze rozdělit na dvě – na cestu z  $v_i$  do  $v_k$  a cestu  $v_k$  do  $v_j$ . Původní cesta  $v_i \cdots v_k \cdots v_j$  využívala pouze vrcholy z  $\{v_1, \dots, v_k\}$ , takže obě její části,  $v_i \cdots v_k$  i  $v_k \cdots v_j$  využívají pouze vrcholy z  $\{v_1, \dots, v_{k-1}\}$ . Zároveň to musejí být právě ty nejkratší cesty mezi  $v_i$  a  $v_k$  a  $v_k$  a  $v_j$ , jinak by celková cesta  $v_i \cdots v_k \cdots v_j$  nebyla ta nejkratší. Mrkněte na [obrázek 16](#).



Obrázek 16: Zde  $\delta(i, j, 3) = 7$ , ale  $\delta(i, j, 4) = 6$ .

Odtud plyne, že  $\delta(i, j, k)$  je buď

- rovna  $\delta(i, j, k-1)$ , pokud přes vrchol  $v_k$  nevede žádná kratší cesta z  $v_i$  do  $v_j$ , nebo
- rovna součtu vah nejkratší cesty z  $v_i$  do  $v_k$  a nejkratší cesty z  $v_k$  do  $v_j$ , pokud přes vrchol  $v_k$  nějaká kratší cesta z  $v_i$  do  $v_j$  vede. V symbolech je tento součet roven  $\delta(i, k, k-1) + \delta(k, j, k-1)$ .

Předchozí body se dají shrnout do jednoho zápisu, neboť  $\delta(i, j, k)$ , jakožto váha **nejkratší** cesty, je vždy menším z obou množství. Konkrétně, vzoreček stojící za celým Floydovým-Warshallovým algoritmem je tento:

$$\delta(i, j, k) = \min(\delta(i, j, k-1), \delta(i, k, k-1) + \delta(k, j, k-1)). \quad (\Delta)$$

Možná už vás napadá, jak samotný algoritmus bude fungovat. Přeci, čísla  $\delta(i, j, k)$  mohu spočítat pro všechny dvojice  $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$  v moment, kdy znám  $\delta(i, j, k-1)$  opět pro všechny dvojice  $(i, j)$ . Jenže,  $\delta(i, j, 0)$  je váha hrany

mezi  $v_i$  a  $v_j$ , pokud existuje, jinak  $\infty$ . Symbolicky,

$$\delta(i, j, 0) = \begin{cases} w(v_i v_j), & \text{pokud } v_i v_j \in E, \\ \infty, & \text{jinak.} \end{cases}$$

To znamená, že znám hodnotu  $\delta(i, j, 0)$  pro všechny dvojice  $(i, j)$ , a tedy postupným zvyšováním  $k$  umím spočítat i všechny hodnoty  $\delta(i, j, k)$ , a tím i nakonec, pro  $k = n$ , vzdálenosti mezi všemi páry vrcholů.

Nyní, když jsme myšlenku algoritmu doufám objasnili, zbývá jeho postup nějak rozumně zapsat. Naštěstí to lze velmi přímočaře, dokonce výrazně snadněji než například [Kruskalův algoritmus](#).

Vlastně nám jde o to postupně nacházet kratší a kratší cesty mezi všemi dvojicemi vrcholů. Ten fakt, že hledáme vzdálenosti mezi **všemi** dvojicemi, nám umožňuje díky závěrům v předchozích odstavcích toto dělat efektivně.

Algoritmus vytváří zobrazení  $D : V^2 \rightarrow (0, \infty]$ , kterým si vlastně „pamatuje“ váhu zatím nejkratší nalezené cesty mezi každými dvěma vrcholy. Na začátku algoritmu je tudíž  $D(v, v) := 0$  pro všechny  $v \in V$  a  $D(u, v) := w(uv)$  pro všechny dvojice  $(u, v) \in V^2$ , mezi kterými vede hrana. Pro všechny ostatní dvojice  $(u, v)$  pokládáme  $D(u, v) := \infty$ .

Opíraje se o předšedší úvahy víme, že budeme muset učinit v algoritmu  $n$  kroků (to je počet vrcholů  $G$ ) a v  $k$ -tém kroku vždy počítat hodnoty  $\delta(i, j, k)$  pro všechny dvojice  $(i, j)$ . Přejeme si tudíž, aby hodnoty z předchozího kroku, tj.  $\delta(i, j, k-1)$ , byly před spuštěním  $k$ -tého kroku všechny již zakódovány v zobrazení  $D$ , jakožto čísla  $D(v_i, v_j)$ , představující **zatím** nejkratší známé cesty mezi všemi dvojicemi vrcholů. Rovnost ( $\Delta$ ) se pročež překládá (**v rámci  $k$ -tého kroku algoritmu**) do rovnosti

$$D(v_i, v_j) = \min(D(v_i, v_j), D(v_i, v_k) + D(v_k, v_j)).$$

Po skončení  $n$ -tého kroku bude tedy zobrazení  $D$  přesně odpovídat zobrazení  $d_G$ . Konečně můžeme přikročit k samotnému pseudokódu, jenž si prohlédněte [níže](#).

**Cvičení 1.3.1.** Dokažte, že [Floydův-Warshallův](#) algoritmus selže, když připustíme i záporná ohodnocení hran.

---

**Algoritmus 2:** Floydův-Warshallův algoritmus.

---

**input** : souvislý ohodnocený graf  $G = (V, E, w)$ , kde  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ **output**: zobrazení  $D : V^2 \rightarrow (0, \infty]$  takové, že  $D \equiv d_G$ 

```

1 Inicializace;
2 for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
3   for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
4     if  $i = j$  then
5       Vzdálenost od vrcholu k němu samému je 0;
6        $D(v_i, v_i) \leftarrow 0$ ;
7     else
8       if  $v_i v_j \in E$  then
9         Vzdálenost mezi různými vrcholy je váha hrany, pokud
          existuje;
10         $D(v_i, v_j) \leftarrow w(v_i v_j)$ ;
11       else
12         Jinak nastavíme hodnotu na  $\infty$ ;
13         $D(v_i, v_j) \leftarrow \infty$ ;

14 Postupně pro každé  $k$  od 1 do  $n$  budeme zmenšovat hodnoty  $D(v_i, v_j)$ 
    pro všechny dvojice  $(i, j)$ ;
15 for  $k \leftarrow 1$  to  $n$  do
16   for  $i \leftarrow 1$  to  $n$  do
17     for  $j \leftarrow 1$  to  $n$  do
18        $D(v_i, v_j) \leftarrow \min(D(v_i, v_j), D(v_i, v_k) + D(v_k, v_j))$ ;

19 return  $D$ ;
```

---

## 1.4 Vzdálenost vrcholů

Sekci motivujeme úlohou „jako ze života“, která ve mě budí jistou míru nostalgie, jelikož jsem ji řešil na konci prvního ročníku v rámci zkoušky z programování.

**Úloha** (Rodinný výlet). Je prodloužený víkend a slezská rodina Koláčků plánuje cyklistický výlet oblastí Karviná. Jedou děda Koláček se svou chotí, babičkou Koláčkovou, a jejich čtyři uřvaná rozmazlená vnoučata – Matouš, Marek, Lukáš a Jan.

Z Třince do Orlové dánť jest směr a, i přes relativní nenáročnost trasy, vnoučata ustavičně fňukají, že chtějí jet tou nejkratší trasou. Děda Koláček, dobrodinec ten od kosti, snaží se vnoučatům vyhovět a nejkratší trasu úpěnlivě hledá. Do vřavy se přidává babička Koláčková, která ví, že trasa z Třince do Orlové vede přes mnoho malých vesnic, mnohoze z nich hostí aspoň jednu hospodu.

Vědouc velmi dobře, že každá hospoda zbrzdí cestu na nejméně půl hodiny, trvá babička Koláčková na tom, aby se vybraná cesta z Třince do Orlové hospodám vyhnula. Křik vnoučat brzy ji však přesvědčí, že délka trasy převažuje nad množstvím hospod, které po cestě potkají.

Rodina Koláčková tudíž stojí před nelehkým úkolem vybrat ze všech nejkratších cest z Třince do Orlové tu, která se vyhne co nejvíce hospodám.

Brzy znaven, děda Koláček posílá nezkrotná vnoučata s konečně neosedlanými bicykly domů a výlet do Orlové se odkládá na příští školní prázdniny. Pomozme mu jej zorganizovat předem.

Úlohu si modelujeme ohodnoceným grafem  $G = (V, E, w)$ . Vrcholy představují vesnice, případně města, mezi Třincem a Orlovou, z nichž některé jsou označeny vykřičníkem minicím přítomnost jedné či více hospod.

Nejprve se soustředíme na nejpodstatnější část úlohy, tou jest nalezení nejkratší cest mezi Třincem a Orlovou, kterážto města si v zájmu strohosti označíme písmeny  $t, o \in V$ .