

GYMNÁZIUM EVOLUTION JIŽNÍ MĚSTO



---

## Jakýsi úvod do matematické analýzy

---

Ádula vod Klepáčů

29. března 2024



# Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předšedších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.



# Obsah

<b>1</b>	<b>Limity funkcí</b>	<b>7</b>
1.1	Základní poznatky o limitě funkce . . . . .	10



# Kapitola 1

## Limity funkcí

Limita funkce je dost možná nejdůležitější ideou matematické analýzy a obecně matematických disciplín, jež využívá fyzika. Davši vzniknout teorii derivací a primitivních funkcí, umožnila popsat fyzikální jevy soustavami diferenciálních rovnic a je základem zatím nejlepších známých modelů světa – diferencovatelných struktur.

Principiálně se pojem *limity funkce* neliší pramnoho od limity posloupnosti. Matematici funkcí obvykle myslíme zobrazení popisující vývoj systému v čase (tzv. funkce *jedné proměnné*), případně závislé na více parametrech než jen na čase (tzv. funkce *více proměnných*). Limita funkce v nějakém určeném okamžiku pak znamená vlastně „očekávanou hodnotu“ této funkce v tomto okamžiku – hodnotu, ke které je funkce, čím méně času zbývá do onoho okamžiku, tím blíže.

V tomto textu budeme sebe zabírat pouze funkcemi závislými na čase tvořícími systémy, jejichž stav je rovněž vyjádřen jediným číslem. Uvidíme, že i teorie takto primitivních objektů je veskrze širá.

### Definice 1.0.1 (Reálná funkce jedné proměnné)

Ať  $M \subseteq \mathbb{R}$  je libovolná podmnožina  $\mathbb{R}$ . Zobrazení  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  nazýváme *reálnou funkcí (jedné proměnné)*.

Ačkolivěk ve světě, jest-li nám známo, proudí čas pouze jedním směrem, matematiku takovými trivialitami netřeba třísnit. Pojem limity reálné funkce budeme tedy definovat bez ohledu na „proud času“. Budeme zkoumat jak hodnotu reálné funkce, když se čas blíží *zleva* (tj. přirozeně) k danému okamžiku, tak její očekávanou hodnotu proti toku času.

Ona dva přístupy slujeta limita funkce *zleva* a limita funkce *zprava*. Před jejich výrokem ovšem učiníme kvapný formální obchvat. Bylo by totiž nanejvýš neelegantní musiti různými logickými výroky definovat konečné oproti nekonečným limitám v konečných oproti nekonečným bodům. Následující – čistě formální avšak se silnou geometrickou intuicí – pojem tyto případy skuje v jeden.

**Definice 1.0.2** (Okolí a prstencové okolí bodu)

Ať  $a \in \mathbb{R}^*$  a  $\varepsilon \in (0, \infty)$ . Okolím bodu  $a$  (o poloměru  $\varepsilon$ ) myslíme množinu

$$B(a, \varepsilon) := \begin{cases} (a - \varepsilon, a + \varepsilon), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ (1/\varepsilon, \infty), & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty. \end{cases}$$

Podobně, *prstencovým okolím*  $a$  (o velikosti  $\varepsilon$ ) myslíme jeho okolí bez samotného bodu  $a$ . Konkrétně,

$$R(a, \varepsilon) := \begin{cases} (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \setminus \{a\}, & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ (1/\varepsilon, \infty), & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty. \end{cases}$$

Pro účely definice levých a pravých limit, pojmenujeme rovněž množinu

$$B_+(a, \varepsilon) := \begin{cases} [a, a + \varepsilon), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ \emptyset, & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty \end{cases}$$

*pravým okolím* bodu  $a$  a množinu

$$R_+(a, \varepsilon) := \begin{cases} (a, a + \varepsilon), & \text{pokud } a \in \mathbb{R}, \\ \emptyset, & \text{pokud } a = \infty, \\ (-\infty, -1/\varepsilon), & \text{pokud } a = -\infty \end{cases}$$

*pravým prstencovým okolím* bodu  $a$ . Levé okolí a levé prstencové okolí bodu  $a$  se definují analogicky.

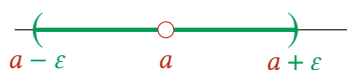
**Poznámka 1.0.3**

Písmena  $B$  a  $R$  v definici okolí a prstencového okolí pocházejí z angl. slov **ball** a **ring**. Okolí se v angličtině přezdívá „ball“ pro to, že okolí bodu  $a$  je ve skutečnosti (jednodimenzionální) kruh s poloměrem  $\varepsilon$  o středu  $a$ . Znázornění okolí bodu jako kruhu v rovině je vysoce účinným vizualizačním aparátem.

Čtenáře možná zarazilo číslo  $1/\varepsilon$  v definici okolí bodu  $\infty$ . Důvod užití  $1/\varepsilon$  oproti prostému  $\varepsilon$  je spíše intuitivního rázu. V definici limity  $a$  v následných tvrzení si matematici obvykle představujeme pod  $\varepsilon$  reálné číslo, které je „nekonečně malé“. Chceme-li tedy, aby se **zmenšujícím se**  $\varepsilon$  byla hodnota dané funkce stále blíže nekonečnu, musí se tato hodnota zvětšovat. Díky užití formulaci tomu tak je, neboť s menším  $\varepsilon$  je číslo  $1/\varepsilon$  větší.



(a) Okolí  $B(a, \varepsilon)$  bodu  $a$ .



(b) Prstencové okolí  $R(a, \varepsilon)$  bodu  $a$ .

Obrázek 1.1: Okolí a prstencové okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ .



**Definice 1.0.4** (Jednostranná limita funkce)

Ať  $M \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a  $a \in \mathbb{R}^*$ . Řekneme, že číslo  $L \in \mathbb{R}^*$  je *limitou zleva* funkce  $f$  v bodě  $a$ , pokud

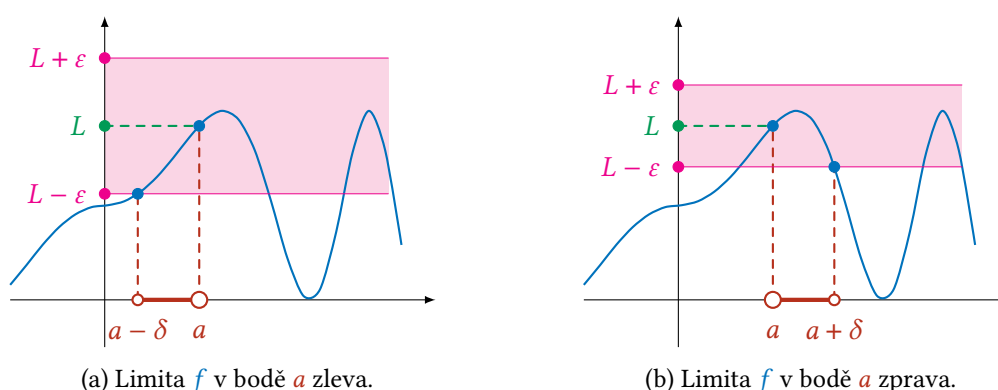
$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P_-(a, \delta) : f(x) \in B(L, \varepsilon).$$

Tento fakt zapisujeme jako  $L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

Podobně, číslo  $K \in \mathbb{R}^*$  je *limitou zprava* funkce  $f$  v bodě  $a$ , pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P_+(a, \delta) : f(x) \in B(K, \varepsilon).$$

Tento fakt zapisujeme jako  $K = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .



Obrázek 1.2: Jednostranné limity funkce  $f$  v bodě  $a$ .

**Varování 1.0.5**

Fakt, že  $L$  je limita **zleva** funkce  $f$  v bodě  $a$ , vůbec neznamena, že hodnoty  $f(x)$  se musejí blížit k  $L$  rovněž **zleva**. Adverbia *zleva* a *zprava* značí pouze směr, kterým se k číslu  $a$  přibližují **vstupy** funkce  $f$ , nikoli její **výstupy** k číslu  $L$ .

Pochopitelně, lze též požadovat, aby hodnoty  $f$  ležely v daném rozmezí kolem bodu  $L$ , jak se její vstupy blíží k  $a$  zleva i zprava zároveň. V principu, blíží-li se  $f$  ke stejnému číslu zleva i zprava, stačí vzít  $\delta$  v [definici 1.0.4](#) tak malé, aby  $f(x)$  leželo v  $B(L, \varepsilon)$  kdykoli je  $x$  ve vzdálenosti nejvýše  $\delta$  od  $a$ .

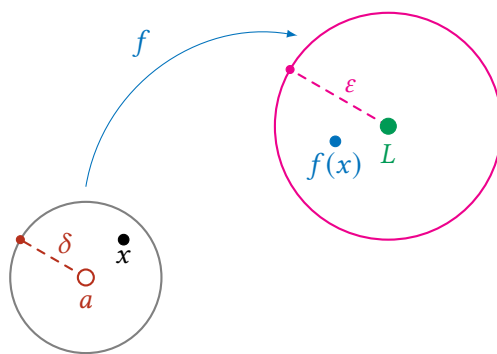
**Definice 1.0.6** (Oboustranná limita funkce)

Ať  $a, L \in \mathbb{R}^*$  a  $f$  je reálná funkce. Řekneme, že  $L$  je (*oboustrannou*) *limitou* funkce  $f$  v bodě  $a$ , pokud

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in P(a, \delta) : f(x) \in B(L, \varepsilon).$$

Tento fakt zapisujeme jako  $L = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ .

Je jistě možné představovat si oboustrannou limitu funkce stejně jako limity jednostranné na [obrázku 1.2](#). Ovšem, ona vlastnost „oboustrannosti“ umožňuje ještě jiný – však ne rigorózní – pohled. Povýšíme-li situaci do roviny, tj. do prostoru druhé dimenze, a na funkci  $f$  budeme nahlížet jako na zobrazení bodů roviny na body roviny, pak  $L$  je limitou funkce  $f$  v bodě  $a$ , když zobrazuje všechny body zevnitř kruhu o poloměru  $\delta$  a středu  $a$  do kruhu o poloměru  $\varepsilon$  a středu  $L$ . Jako na [obrázku 1.3](#).



Obrázek 1.3: Oboustranná limita funkce „ve 2D“.

Doporučujeme čtenářům, aby se zamysleli, čím by v této dvoudimenzionální říši byla *jednostranná* limita funkce. Sen zámysl snad vedl k představě, že by se vstupy  $x$  musely blížit k bodu  $a$  po nějaké určené přímce. Existence „všestranné“ limity v  $a$  by pak byla ekvivalentní existenci nespočetně mnoha „jednostranných“ limit – jedné pro každou přímku procházející bodem  $a$ . Věříme, že není obtížné nahlédnout, jak zbytečný by takový pojem ve dvou dimenzích byl. Popsaná situace přímo souvisí s faktem, že první dimenze je z geometrického pohledu „degenerovaná“ – kružnice je pouze dvoubodovou množinou.

## 1.1 Základní poznatky o limitě funkce

Počneme nyní shrnovati intuitivně vcelku zřejmé výsledky o limitech reálných funkcí. Jakž jsme již vícekrát děli, ona „intuitivní zřejmost“ pravdivosti výroků nechce nabodnout k přeskoku či trivializaci jejich důkazů. Vodami nekonečnými radno brodit se ostražitě, bo tvrzení jako *limita složené funkce* ráda svědčí, že intuici bez logiky člověk na břeh nedoplove.

Na první pád není překvapivé, že limita funkce je jednoznačně určena, pochopitelně za předpokladu její existence. Vyzýváme čtenáře, aby se při čtení důkazu drželi vizualizace oboustranné limity z [obrázku 1.3](#).

### Lemma 1.1.1 (Jednoznačnost limity)

*Limita funkce (ať už jednostranná či oboustranná) je jednoznačně určená, pokud existuje.*

**DŮKAZ.** Dokážeme lemma pouze pro oboustrannou limitu, důkaz pro limity jednostranné je v zásadě totožný.

Pro spor budeme předpokládat, že  $L$  i  $L'$  jsou limity  $f$  v bodě  $a \in \mathbb{R}^*$ . Nejprve ošetříme případ, kdy  $L, L' \in \mathbb{R}$ . Bez újmy na obecnosti smíme předpokládat, že  $L > L'$ . Volme  $\varepsilon := (L - L')/3$ . K tomuto  $\varepsilon$  existují z [definice limity](#)  $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$  takové, že

$$\forall x \in R(a, \delta_1) : f(x) \in B(L, \varepsilon).$$

a rovněž

$$\forall x \in R(a, \delta_2) : f(x) \in B(L', \varepsilon).$$

Volíme-li ovšem  $\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$ , pak pro  $x \in R(a, \delta)$  dostaneme

$$f(x) \in B(L, \varepsilon) \cap B(L', \varepsilon).$$

Poslední vztah lze přepsat do tvaru

$$\begin{aligned} L - \varepsilon &< f(x) < L + \varepsilon, \\ L' - \varepsilon &< f(x) < L' + \varepsilon. \end{aligned}$$

Odtud plyne, že

$$L - \varepsilon < L' + \varepsilon,$$

což po dosazení  $\varepsilon = (L - L')/3$  a následné úpravě vede na

$$2L - L' < 2L' - L,$$

z čehož ihned

$$L < L',$$

což je spor.

Nyní ať například  $L = \infty$  a  $L' \in \mathbb{R}$ . Z [definice okolí](#)  $B(L, \varepsilon)$  pro  $L = \infty$ , stačí nalézt  $\varepsilon > 0$  takové, že

$$\frac{1}{\varepsilon} > L' + \varepsilon,$$

pak se totiž nemůže stát, že

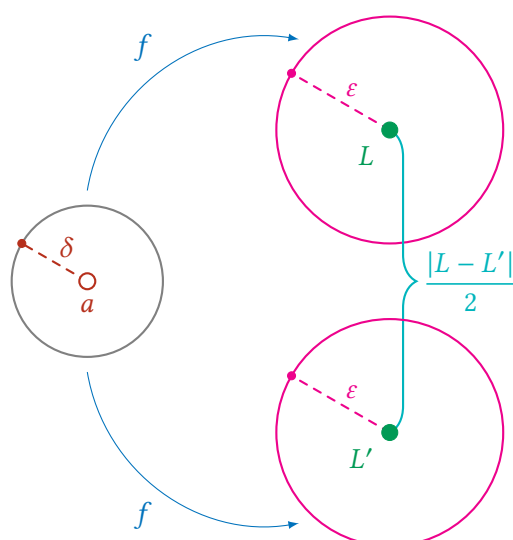
$$f(x) \in B(\infty, \varepsilon) \cap B(L', \varepsilon).$$

Snadným výpočtem zjistíme, že

$$\frac{1}{\varepsilon} > L' + \varepsilon$$

právě tehdy, když  $\varepsilon < (\sqrt{L'^2 + 4} - L')/2$ . Pro libovolné takové  $\varepsilon$  tudíž dostáváme spor stejně jako v předchozím případě.

Ostatní případy se ošetří obdobně. ■



Obrázek 1.4: Spor v důkazu [lemmatu 1.1.1.](#)