

GYMNÁZIUM EVOLUTION JIŽNÍ MĚSTO



---

## Jakýsi úvod do matematické analýzy

---

Ádula vod Klepáčů

27. května 2024



# Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předšedších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.



# Obsah

<b>1</b>	<b>Derivace</b>	<b>7</b>
1.1	Základní poznatky o derivaci . . . . .	10
1.2	Věty o střední hodnotě . . . . .	13
1.3	l'Hospitalovo pravidlo . . . . .	15



# Kapitola 1

## Derivace

**Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávejte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.**

Derivace funkce je vlastně „velikost změny“ funkce v daný okamžik. Takový pojem se může zdát dost neintuitivní – „Jak se může cosi měnit v jeden okamžik?“ – ale vskutku se s ním setkáváme běžně a divné nám to ani nepřijde.

Kupříkladu rychlost je derivací polohy, tj. představuje velikost změny polohy v čase. Když automobilový tachometr ukazuje, že jedeme rychlostí 60 km/h, co to přesně znamená? Jak si mám představit, že *ted'* se moje poloha mění o 60 kilometrů v rámci jedné hodiny? Jeden způsob vnímání dlí v obraze, že za příští hodinu urazím 60 km. Jako hrubá aproximace snad postačuje, ale je snad zřejmé, že pokud se moje rychlost během oné hodiny mění, změní se i výsledně uražená vzdálenost.

Mnoho lidí, kteří se dívají za jízdy na tachometr, si pravděpodobně neuvědomuje, že rychlost jízdy je limitní pojem. Fakt, že *přesně v tuto chvíli* jedu například právě 60 km/h znamená, že čím menší zlomek jedné hodiny nahlédnu do budoucnosti (či do minulosti), tím blíže bude velikost změny mé polohy odpovídající zlomek 60 km. Za předpokladu, že moje rychlost není konstantní, nebude tato změna nikdy dokonale taková. Tudíž, vím-li, že se pohybuji rychlostí 60 km/h, nevím toho v principu mnoho. Nabývám tím pouze práva tvrdit, že se zmenšujícím se časovým rozdílem mezi přítomností a jistým okamžikem v budoucnu (či v minulosti) klesá i rozdíl mezi skutečně překonanou vzdáleností a tou odpovídající uvedené rychlosti.

Formalizace *velikosti okamžité změny* není užitím pojmu limity funkce nikterak obtížná. Před formální definicí si ji ukážeme na příkladě z předšedších odstavců. Ať je moje poloha v čase daná funkcí  $p : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , kde  $p(0)$  je moje poloha na začátku cesty a  $p(1)$  na jejím konci. Zanedbáme pro jednoduchost fakt, že polohu určuje pouze jediné reálné číslo místo své příslušné vícedimenzionální varianty.

Co přesně myslíme rychlostí změny? Napovědí již použité jednotky – km/h. *Změna polohy* je zde rozdíl výsledné polohy od nynější za daný čas. Pro daný čas  $t \in [0, 1]$ , pak *změna polohy* v tomto čase za danou dobu  $h \in [0, 1]$  je

$$z_t(h) = \frac{p(t+h) - p(t)}{h}.$$

Vskutku, ať například  $t = 0$ , tedy jsem na začátku cesty, třeba na třicátém kilometru dálnice, čili  $p(0) = 30$ . Pojedu jednu hodinu. V půli cesty se podívám na postranní milník a vidím, že jsem na stém kilometru téže dálnice, čili  $p(1/2) = 100$ . Urazil jsem tudíž za půl hodiny přesně 70 km. Z těchto údajů soudím, že byla-li by moje rychlost konstantní, urazil bych 140 km za jednu hodinu. Vyjádřeno pomocí funkce změny, mám

$$z_0(1/2) = \frac{p(0 + 1/2) - p(0)}{1/2} = \frac{100 - 30}{1/2} = 140.$$

Velikost okamžité změny funkce  $p$  v daném čase  $t$  bude pročež limita uvedené funkce  $z$ , jak se bude doba  $h$  blížit 0.

Odstavce výše shrneme v následujících definicích.

#### Definice 1.0.1 (Funkce změny)

Ať  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  je reálná funkce. *Funkcí změny*  $f$  v bodě  $a \in M$  myslíme funkci  $z_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  danou předpisem

$$z_a(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

#### Definice 1.0.2 (Derivace funkce)

Ať  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  je reálná funkce. *Derivací*, nebo též *funkcí okamžité změny*, funkce  $f$  v bodě  $a \in M$  myslíme limitu

$$\lim_{h \rightarrow 0} z_a(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

pokud tato existuje. V takovém případě ji značíme  $f'(a)$ .

#### Poznámka 1.0.3 (Jednostranné derivace)

Podobně lze rovněž definovat derivaci funkce  $f$  v bodě  $a$  zleva, resp. zprava, jako

$$\lim_{h \rightarrow 0^-} z_a(h), \text{ resp. } \lim_{h \rightarrow 0^+} z_a(h).$$

Intuitivně tato aproximuje, jak se funkce  $f$  před okamžikem měnila, resp. bude za okamžik měnit. Přirozeně, derivace funkce existuje právě tehdy, když existují jednostranné derivace a jsou si rovny.

Přirozená substituce vede na alternativní vzorec pro výpočet  $f'(a)$ .

#### Lemma 1.0.4 (Alternativní vzorec derivace)

Ať  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  a  $a \in M$ . Pak  $f'(a)$  existuje právě tehdy, když existuje

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a v tomto případě se rovnají.



DŮKAZ. Dokážeme implikaci ( $\Rightarrow$ ). Ať existuje  $f'(a)$ . Položme

$$F(h) := \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

tj.  $\lim_{h \rightarrow 0} F(h) = f'(a)$ , a rovněž

$$g(x) = x - a.$$

Pak platí  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  a  $g$  je na okolí  $a$  prostá. Z věty o limitě složené funkce platí

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} F(h) = \lim_{x \rightarrow a} (F \circ g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pro důkaz ( $\Leftarrow$ ) předpokládejme, že existuje

$$L := \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Položme

$$F(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a  $g(h) = h + a$ . Pak  $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = L$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0} g(h) = a$  a  $g$  je prostá na okolí  $a$ . Opět z věty o limitě složené funkce dostaneme rovnost

$$L = \lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} (F \circ g)(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a),$$

což zakončuje důkaz. ■

### Úloha 1.0.5 (Derivace konstantní funkce)

Ať  $f(x) = c \in \mathbb{R}$  pro každé  $x \in M$ . Dokažte, že pak platí  $f'(a) = 0$  pro každé  $a \in M$ .

ŘEŠENÍ. Platí

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{c - c}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{0}{x - a} = 0,$$

jak jsme chtěli. ♦

### Úloha 1.0.6 (Derivace polynomu)

Ať  $f(x) = x^n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ . Dokažte, že  $f'(a) = na^{n-1}$ .

ŘEŠENÍ. Počítáme

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a}.$$

Snadno ověříme, že platí


$$x^n - a^n = (x - a) \left( \sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i} \right).$$

Z čehož ihned

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = \sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i},$$

a tedy

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \sum_{i=0}^{n-1} x^i a^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} a^i a^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1} = na^{n-1},$$

což bylo dokázati. 

### Cvičení 1.0.7

Dokažte, že derivace funkce  $f(x) = |x|$  v bodě 0 neexistuje.

### Cvičení 1.0.8

Připomeňme, že funkce *signum* je definována následovně.

$$\operatorname{sgn}(x) := \begin{cases} 1, & \text{když } x > 0, \\ 0, & \text{když } x = 0, \\ -1, & \text{když } x < 0. \end{cases}$$

Dokažte, že  $\operatorname{sgn}'(0) = \infty$ .

### Lemma 1.0.9 (Vztah derivace a spojitosti)

Ať  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  je reálná funkce,  $a \in M$  a existuje **konečná**  $f'(a)$ . Pak je  $f$  v bodě  $a$  spojitá.

DŮKAZ. Jelikož  $f'(a)$  existuje konečná, z věty o aritmetice limit plyne, že


$$\lim_{x \rightarrow a} f'(a) \cdot (x - a) = 0.$$

To ovšem znamená, že

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = 0,$$

z čehož ihned

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a),$$

čili  $f$  je spojitá v  $a$ . 

### Varování 1.0.10

Předpoklad nejen existence, ale i **konečnosti** derivace ve znění [lemmatu 1.0.9](#) nelze vynechat. Z [cvičení 1.0.8](#) plyne, že  $\operatorname{sgn}'(0)$  existuje, ale funkce  $\operatorname{sgn}$  zcela jistě není v bodě 0 spojitá.

## 1.1 Základní poznatky o derivaci

Tato sekce shrnuje základní tvrzení, která činí z výpočtu derivací překvapivě silně algoritmický proces, přirozeně za předpokladu znalosti derivací jistých „běžných“ funkcí.

Začneme tím, jak se derivace chová vzhledem ke součtu, součinu a podílu funkcí.

**Věta 1.1.1 (Aritmetika derivací)**

Ať  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  jsou reálné funkce a  $a \in M$ . Pak platí

- (1)  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$ , dává-li pravá strana smysl;
- (2)  $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$ , dává-li pravá strana smysl,  $g$  je spojitá v  $a$  platí  $g(a) \neq 0$ ;
- (3)  $(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$ , dává-li pravá strana smysl a  $f/g$  je spojitá v  $a$ .

**DŮKAZ.** Podobně jako tomu bylo i v případě věty o aritmetice limit, je důkaz tohoto tvrzení zdoluhavý a výpočetní. Důkaz bodu (1) je triviální a bodu (2) snadný; jsou pročež přenechány čtenáři. Dokážeme bod (3).

Protože  $f/g$  je z předpokladu spojitá v  $a$ , nalezneme  $\delta > 0$  takové, že  $g$  je nenulová na  $B(a, \delta)$ . Pro  $x \in B(a, \delta)$  počítáme

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\ &= \frac{f(x)g(a) - f(a)g(a) + f(a)g(a) - f(a)g(x)}{g(x)g(a)} \\ &= \frac{1}{g(x)g(a)} ((f(x) - f(a))g(a) - f(a)(g(x) - g(a))). \end{aligned}$$

Pak

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x - a} \left( \frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(a) - f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)g(a)} \left( \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} g(a) - \lim_{x \rightarrow a} f(a) \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \right) \\ &= \frac{1}{g^2(a)} (f'(a)g(a) - f(a)g'(a)), \end{aligned}$$

čímž je důkaz hotov. ■

**Cvičení 1.1.2**

Dokažte body (1) a (2) ve [větě 1.1.1](#).

**Věta 1.1.3 (Derivace inverzní funkce)**

Ať  $I \subseteq \mathbb{R}$  je interval a  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá a rostoucí či klesající na  $I$ . Pak pro bod  $a$  ve vnitřku  $I$  platí:

- (1) Je-li  $f'(a) \neq 0$ , potom  $(f^{-1})'(f(a)) = 1/f'(a)$ ;
- (2) je-li  $f'(a) = 0$ , potom  $(f^{-1})'(f(a)) = \infty$ , když  $f$  je rostoucí, a  $f^{-1}(f'(a)) = -\infty$ , když  $f$  je klesající.

**DŮKAZ.** Předpokládejme, že  $f$  je rostoucí. Pro klesající funkci lze důkaz vést obdobně.

Protože  $f$  je spojitá, je z Bolzanovy věty  $J := f(I)$  interval. Dále, ježto  $a$  leží ve vnitřku  $I$ , leží rovněž  $f(a)$  ve vnitřku  $J$ . Existuje pročež  $\varepsilon > 0$  takové, že  $B(f(a), \varepsilon) \subseteq J$ . Dále,  $f$  je rostoucí, tedy speciálně prostá, takže existuje  $f^{-1} : J \rightarrow I$ , která je (ze spojitosti  $f$ ) rovněž spojitá.

Volme nyní  $\delta > 0$  tak, aby  $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$  a pro  $x \in B(a, \delta)$  definujme

$$\varphi(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Pak přirozeně  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = f'(a)$ . Díky prostotě  $f^{-1}$  na  $B(f(a), \varepsilon)$  lze díky větě o limitě složené funkce počítat

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = \lim_{y \rightarrow f(a)} (\varphi \circ f^{-1})(y) \\ &= \lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{f(f^{-1}(y)) - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - a}. \end{aligned} \quad (\heartsuit)$$

Předpokládejme nejprve, že  $f'(a) \neq 0$ . Pak z věty o aritmetice limit platí

$$\frac{1}{f'(a)} = \lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{f^{-1}(y) - a}{y - f(a)} = \lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = (f^{-1})'(f(a)).$$

Nyní ať  $f'(a) = 0$ . Pak díky  $(\heartsuit)$  máme

$$\lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - a} = \lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))} = 0.$$

Funkce

$$\psi(y) := \frac{y - f(a)}{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}$$

je na okolí  $R(f(a), \varepsilon)$  kladná, neboť  $f^{-1}$  je rostoucí – a tedy  $y - f(a) > 0 \Leftrightarrow f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a)) > 0$ . Podle tvrzení ?? platí

$$(f^{-1})'(f(a)) = \lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(a))}{y - f(a)} = \lim_{y \rightarrow f(a)} \frac{1}{\psi(y)} = \infty,$$

což zakončuje důkaz. ■

#### Úloha 1.1.4

Dokažte, že derivací funkce  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  na intervalu  $(0, \infty)$  je  $x \mapsto \sqrt[n]{x}/nx$ , kde  $\mathbb{N} \ni n \geq 1$ .

**ŘEŠENÍ.** Funkce  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  je jistě spojitá a rostoucí na  $(0, \infty)$ . Její inverzní funkcí je rovněž rostoucí a spojitá  $f^{-1}(y) = y^n$ , jejíž derivací je  $(f^{-1})'(y) = ny^{n-1}$ . Podle [věty o derivaci inverzní funkce](#) platí pro  $x \in (0, \infty)$

$$f'(x) = \frac{1}{(f^{-1})'(f(x))} = \frac{1}{nf^{n-1}(x)} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx},$$

jak jsme chtěli. ♦

Sekci zakončíme vztahem derivaci k extrémům původní funkce, který hraje stěžejní roli mimo jiné v optimalizačních problémech, bo často vedou na hledání minima/maxima jisté funkce.

### **Tvrzení 1.1.5 (Vztah derivace a extrému)**

Ať  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  má v  $a \in M$  lokální extrém. Pak  $f'(a)$  buď neexistuje, nebo je nulová.

**DŮKAZ.** Dokážeme kontrapozitivní formu tvrzení. Budeme předpokládat, že  $f'(a)$  existuje a je různá od nuly. Z toho odvodíme, že  $f$  nemá v  $a$  lokální extrém.

Ať nejprve  $f'(a) > 0$ . Pak existuje okolí  $R(a, \delta)$ , na němž platí

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

Odtud plyne, že  $f(x) < f(a)$  pro  $x \in (a - \delta, a)$  a  $f(x) > f(a)$  pro  $x \in (a, a + \delta)$ , čili  $f$  nemá v  $a$  lokální extrém. Příklad  $f'(a) < 0$  se ošetří obdobně. ■

## 1.2 Věty o střední hodnotě

Spojité funkce, jež ve dvou různých bodech nabývá stejných hodnot, musí mít na nějakém místě mezi těmito body konstantní růst – přestat růst a začít klesat či přestat klesat a začít růst. Spojitá funkce musí někde mezi libovolnými dvěma body mít tečnu rovnoběžnou k úsečce spojující odpovídající body v grafu této funkce. Stejný závěr platí i pro spojitou křivku v prostoru.

Tato tvrzení souhrnně slují *věty o střední hodnotě*. Přestože je jejich geometrický význam lákavý, samy o sobě mnoha účelům neslouží. Jejich důležitost dle spíše v rozvoji další teorie derivací. Formulujeme a dokážeme si je.

### **Věta 1.2.1 (Rolleova věta o střední hodnotě)**

Ať  $a < b$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá funkce,  $f(a) = f(b)$  a  $f$  má derivaci v každém bodě  $(a, b)$ . Pak existuje  $c \in (a, b)$  takové, že  $f'(c) = 0$ .

**DŮKAZ.** Podle věty ?? nabývá  $f$  na  $[a, b]$  svého minima  $m$  a maxima  $M$ . Pak zřejmě

$$m \leq f(a) \leq f(b) \leq M. \quad (*)$$

Pokud  $m = M$ , pak je  $f$  konstantní na  $[a, b]$ , a tudíž  $f'(c) = 0$  dokonce pro všechna  $c \in (a, b)$ .

Předpokládejme, že  $m < M$ . Pak musí být aspoň jedna z nerovností v  $(*)$  ostrá. Bez újmy na obecnosti, ať  $f(b) < M$ . Ať  $c \in (a, b)$  je takové, že  $f(c) = M$ . Dle předpokladu nabývá  $f$  v bodě  $c$  maxima na  $[a, b]$ , a tedy podle **tvrzení 1.1.5** platí  $f'(c) = 0$ . V případě, kdy  $m < f(a)$  postupujeme obdobně. ■

### **Věta 1.2.2 (Lagrangeova o střední hodnotě)**

Ať  $a < b$  a  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá na  $[a, b]$  majíc derivaci v každém bodě  $(a, b)$ . Potom existuje

$c$  takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

DŮKAZ. Převvedeme problém na použití **Rolleovy věty**. Definujme funkci

$$g(x) := f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Potom je  $g$  spojitá na  $[a, b]$ , má derivaci v každém bodě  $(a, b)$  a platí  $g(a) = g(b)$ . Z **Rolleovy věty** plyne, že existuje  $c \in (a, b)$  takové, že  $g'(c) = 0$ . Tato rovnost rozepsána znamená, že

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

čili

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

jak jsme chtěli. ■

### Poznámka 1.2.3

**Lagrangeova věta** říká, že v jistém bodě  $c \in (a, b)$  musí být derivace  $f$  v bodě  $c$  rovna směrnici přímký spojující body  $(a, f(a))$  a  $(b, f(b))$ .

### Důsledek 1.2.4 (Vztah derivace a monotonie)

Ať  $I \subseteq \mathbb{R}$  je interval a  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je spojitá funkce majíc v každém bodě  $(a, b)$  kladnou, resp. zápornou, derivaci. Pak je  $f$  rostoucí, resp. klesající, na  $I$ .

DŮKAZ. Volme  $[a, b] \subseteq I$  libovolně a předpokládejme, že  $f'$  je kladná na  $I$ . Podle **Lagrangeovy věty** existuje  $c \in (a, b)$  takové, že

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Ježto  $f'(c) > 0$ , plyne odtud, že  $f(b) > f(a)$ . Čili  $f$  je rostoucí na  $[a, b]$ . Jelikož  $a < b \in I$  byla volena libovolně, je  $f$  rostoucí na  $I$ . Případ  $f' < 0$  na  $I$  se ošetří analogicky. ■

### Cvičení 1.2.5

Použijte **důsledek 1.2.4** k důkazu, že spojitá funkce  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  mající nulovou derivaci na  $I$ , je konstantní.

### Věta 1.2.6 (Cauchyho o střední hodnotě)

Ať  $f, g$  jsou spojitě funkce na  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ,  $f$  má v každém bodě  $(a, b)$  derivaci a  $g$  má v každém bodě  $(a, b)$  **konečnou nenulovou** derivaci. Potom  $g(a) \neq g(b)$  a existuje  $c \in (a, b)$  takové, že

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

DŮKAZ. Z **Lagrangeovy věty** plyne existence  $d \in (a, b)$  takového, že

$$g'(d) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Jelikož z předpokladu  $g'(d) \neq 0$ , rovněž  $g(b) \neq g(a)$ .

Opět převedeme problém na **Rolleovu větu**. Definujme funkci

$$\varphi(x) := (f(x) - f(a))(g(b) - g(a)) - (g(x) - g(a))(f(b) - f(a)).$$

Pak je  $\varphi$  spojitá na  $[a, b]$  (neboť  $f$  a  $g$  jsou tamže spojitě) a má v každém bodě  $(a, b)$  derivaci – to plyne z **věty o aritmetice derivací** a faktu, že  $f$  i  $g$  mají na  $(a, b)$  derivaci.

Navíc,  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . Z **Rolleovy věty** existuje  $c \in (a, b)$  splňující  $\varphi'(c) = 0$ . Platí

$$0 = \varphi'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a)).$$

Odtud úpravou

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)},$$

což zakončuje důkaz. ■

#### Poznámka 1.2.7

**Cauchyho věta** říká, že křivka v rovině  $t \mapsto (f(t), g(t))$  má v jistém bodě  $c \in (a, b)$  derivaci rovnou směrnici přímky spojující body  $(f(a), g(a))$  a  $(f(b), g(b))$ .

#### Poznámka 1.2.8

Uvědomme si, že **Lagrangeova věta** je speciálním případem **Cauchyho věty** pro  $g(x) = x$  a **Rolleova věta** je zase speciálním případem **Lagrangeovy věty**, když  $f(a) = f(b)$ . Ovšem, k důkazu jak **Lagrangeovy věty**, tak **Cauchyho věty**, jsme použili téměř výhradně **Rolleovu větu**. Jedná se pročež o vzájemně ekvivalentní tvrzení, ač to tak na první pohled nevypadá.

## 1.3 l'Hospitalovo pravidlo

Výpočet limit podílu funkcí patří k nejčastějším úlohám matematické analýzy. Limita podílu funkcí totiž v principu porovnává, o kolik je jedna funkce na okolí tohoto bodu větší než druhá. Je pročež základem aproximace funkcí na okolí bodu mnohem hezčími (například polynomiálními) funkcemi, jak bude vidno v kapitole o Taylorově polynomu. Následující věta – všeobecně známa pod jménem *l'Hospitalovo pravidlo* – že limita podílu funkcí je (za jistých volných podmínek) rovna limitě podílu rychlosti jejich růstu.

#### Věta 1.3.1 (l'Hospitalovo pravidlo)

Ať  $a \in \mathbb{R}^*$ ,  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  jsou reálné funkce a existuje  $\lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$ . Jestliže platí buď

(a)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ , nebo

$$(b) \lim_{x \rightarrow a} |g(x)| = \infty,$$

pak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

DŮKAZ. Položme  $L := \lim_{x \rightarrow a} f'(x)/g'(x)$ . Budeme postupovat vcelku přirozeně – sevráme podíl  $f(x)/g(x)$  pro vhodná  $x$  v nekonečně malém intervalu  $(\alpha, \beta)$  okolo  $L$ . Ačkoli idea je tato přímočará, její realizace je mírně technická. Pro přehlednost do důkazu vložíme pomocné lemma.

**Lemma** (pomocné)