Ústní zkouška

z Úvodu do diskrétní matematiky

Verze: ez clap

Přednášející: His Divine Benevolence Sir Adam Clypatch

1. června 2023

NENÍ-LI ŘEČENO JINAK, VŠECHNY POJMY A DŮKAZY FORMULUJTE PEČLIVĚ S DŮRAZEM NA FORMÁLNÍ SPRÁVNOST.

Část	Hodnocení
Základní definice	0 / 0
Lehké úlohy a důkazy	/ 6
Těžké ulohy a důkazy	/ 15

Základní definice (0 bodů)

Neznalost základních definic znamená bezpodmínečné nesložení zkoušky.

(1) Logický výrok.

(2) Sjednocení, průnik a rozdíl dvou libovolných množin A, B užitím logických spojek a kvantifikátorů.

(3) Sjednocení $n \in \mathbb{N}$ libovolných množin A_i, kde $i \in \{1, \ldots, n\}$, užitím logických spojek a kvantifikátorů.

(4) Konečná množina a velikost konečné množiny.

(5) Ekvivalence a třída ekvivalence (relaci není třeba definovat).

(6) Zobrazení (opět, relaci není třeba definovat).

(7) Kodoména a doména zobrazení. Vzor a obraz prvku při zobrazení.

(8) Složení zobrazení.

(9) Permutace, řád permutace. **Neformálně** cyklický zápis permutace.

(10) Kombinační číslo.

(11) Graf (libovolná z definic).

(12) Sled, tah a cesta v grafu (opět, libovolné z definic).

(13) Souvislý graf, ohodnocený graf, strom.

(14) Vzdálenost vrcholů v grafu, EFLP a SFLP.

Lehké úlohy a důkazy (6 bodů)

Pojmy užité v úlohách nemusíte definovat. Používáte-li k řešení úlohy nebo k důkazu předchozí tvrzení, zformulujte je.

(1) O zobrazení $f : A \to B$ řekneme, že je *na*, když platí následující výrok:

$$\forall b \in B \, \exists a \in A : f(a) = b.$$

Dokažte, že f je **na** právě tehdy, když $\operatorname{im} f = \operatorname{codom} f$.

(2) Ať A, B, C jsou libovolné množiny. Je inkluze

$$(A \setminus B) \setminus C \subseteq A \setminus (B \cap C)$$

vždy platná? Pokud ano, dokažte. Pokud ne, najděte protipříklad.

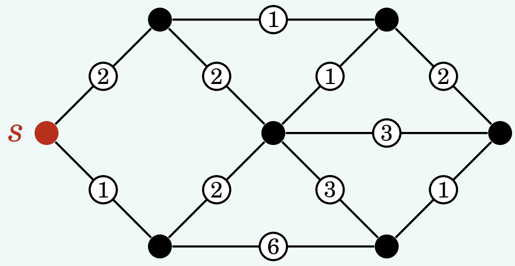
(3) Zformulujte důkaz, že pro každé dvě **konečné** množiny A, B platí

$$\#(A \times B) = \#A \cdot \#B.$$

(4) Ve třídě 4.A je 27 studentů. Rozhodli se poškádlit svého třídního a náhodným losováním změnit svůj obvyklý zasedací pořádek. Spočtěte pravděpodobnost, že si přesně 7 žáků vylosovalo své obvyklé místo.

(5) Ať $G = (V, E)$ je graf. Dokažte, že v G existuje **cesta** mezi u a v právě tehdy, když v G existuje **sled** mezi u a v pro libovolné dva vrcholy $u, v \in V$.

(6) Užitím Dijkstrova algoritmu, nalezněte vzdálenosti všech vrcholů od počátečního vrcholu s v ohodnoceném grafu určeném následujícím obrázkem.



Těžké úlohy a důkazy (15 bodů)

Nemusíte dokonale zformulovat svá řešení. Obecná idea rozvinutá důležitými detaily postačuje.

(1) *Krychlí* dimenze $n \in \mathbb{N}$ myslíme graf na 2^n vrcholech číslovaných binárními čísly od 0 do $2^n - 1$. Budeme předpokládat, že každé binární číslo je doplněno nulami na n cifer, tedy například nultý vrchol krychle dimenze 5 je binární číslo 00000, první je 00001 atd.

Vzdáleností, značenou písmenem d, mezi binárními čísly nazveme počet míst, kde se jejich cifry liší. Tedy například $d(00100, 11100) = 2$ a $d(01100, 10010) = 4$. Hrana vede mezi dvěma vrcholy v a w právě tehdy, když $d(v, w) = 1$.

Dokažte indukcí, že počet hran krychle dimenze n je přesně $n \cdot 2^{n-1}$.

Jen pro zajímavost (tedy, stačí se zamyslet, ne dokazovat), odpovídá vzdálenost binárních čísel vzdálenosti mezi příslušnými vrcholy?