

GYMNÁZIUM EVOLUTION JIŽNÍ MĚSTO



Jakýsi úvod do matematické analýzy

Ádula vod Klepáčů

5. června 2024

Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předšedších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.

Obsah

1	Elementární funkce	7
1.1	Exponenciála a logaritmus	7
1.1.1	Logaritmus	11
1.1.2	Obecná mocnina	12

Kapitola 1

Elementární funkce

Tato kapitola se nachází v pracovní verzi. Neočekávejte obrázky, naopak očekávejte chyby a podivné formulace.

Jisté speciální funkce v matematické analýze si vysloužily přívěsko *elementární*. Původ jejich speciality je ryze fyzikální. Jsou to funkce, jejich prostřednictvím fyzikové modelují mnoho přírodních jevů a pojmů – růst, vlnění, proud, gravitaci, úhel ...

Ježto fyzikální model světa radno ponechati do textů menší náročnosti, soustředit se budeme pouze na prezentaci těchto funkcí a důkazy jejich základních vlastností.

Všechny elementární funkce definujeme jako součty nekonečných řad. V tomto textu jsme se nezabývali pramnoho konvergencí řad s libovolnými členy. Všechna tvrzení, která tímto směrem budeme vyžadovat, zformulujeme, ač nedokážeme.

1.1 Exponenciála a logaritmus

První na seznamu je *exponenciála* – funkce spojitého růstu. Toto pojmenování ještě níže odůvodníme. Nyní přikročíme k definici. Pro stručnost zápisu, budeme v následujícím textu používat konvenci, že $0^0 = 1$.

Definice 1.1.1 (Exponenciála)

Pro $x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\exp x := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Jak jsme čtenáře vystříhali, musíme nyní na krátkou chvíli odbočit k číselným řadám, abychom uměli v obec dokázat, že právě definovaná *exponenciála* je skutečně reálnou funkcí.

Definice 1.1.2 (Absolutní konvergence řady)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je číselná řada, kde $a_n \in \mathbb{R}$. Řekneme, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *absolutně konverguje*, když konverguje řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$.

Lemma 1.1.3

Každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

DŮKAZ. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Předpokládejme, že $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ konverguje. Nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro $m \geq n \geq n_0$ platí

$$\left| \sum_{k=n}^m |a_k| \right| = \sum_{k=n}^m |a_k| < \varepsilon.$$

Potom ale z trojúhelníkové nerovnosti platí

$$\left| \sum_{k=n}^m a_k \right| \leq \sum_{k=n}^m |a_k| < \varepsilon,$$

čili $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konverguje. ■

Definice 1.1.4 (Cauchyho součin řad)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou číselné řady. Jejich *Cauchyho součinem* myslíme číselnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k.$$

Věta 1.1.5 (Mertensova)

Ať $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ jsou konvergentní číselné řady, přičemž $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ je navíc absolutně konvergentní. Potom $\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k$ konverguje a platí

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n a_{n-k} b_k.$$

Věta 1.1.6 (Vlastnosti exponenciály)

Funkce exp je dobře definována a platí

$$(E1) \quad \exp(x + y) = \exp x \cdot \exp y;$$

$$(E2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

DŮKAZ. Dobrá definovanost zde znamená, že řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ konverguje pro každé $x \in \mathbb{R}$. Ukážeme, že konverguje absolutně. Je-li $x = 0$, pak řada konverguje zřejmě. Volme tedy $x \in$

$\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Potom

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|}{\left| \frac{x^n}{n!} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n+1} = 0,$$

čili podle věty ?? řada $\sum_{n=0}^{\infty} |x^n|/n!$ konverguje, což znamená, že konverguje i $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$.

Dokážeme vlastnost (E1). Počítáme

$$\begin{aligned} \exp(x+y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{n-k} y^k}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{x^{n-k} y^k}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!}. \end{aligned}$$

Všimněme si, že poslední řada je **Cauchyho součinem** řad $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ a $\sum_{n=0}^{\infty} y^n/n!$. Protože jsou obě tyto řady (podle výše dokázaného) absolutně konvergentní, platí z **Mertensovy věty**

$$\exp(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{y^k}{k!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} \right) = \exp x \cdot \exp y.$$

Nyní vlastnost (E2). Pro $x \in (-1, 1)$ odhadujeme

$$\begin{aligned} \left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| &= \left| \frac{\exp x - 1 - x}{x} \right| = \frac{1}{|x|} \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - x - 1 \right| = \frac{1}{|x|} \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \right| \\ &= |x| \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-2}}{n!} \right| \leq |x| \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \right| = c \cdot |x|, \end{aligned}$$

kde $c > 0$ je hodnota součtu řady $\sum_{n=0}^{\infty} 1/n!$, která zjevně konverguje (například díky nerovnosti $1/n! \leq 1/n^2$). Jelikož $\lim_{x \rightarrow 0} c \cdot |x| = 0$, plyne odtud ihned, že

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| \frac{\exp x - 1}{x} - 1 \right| = 0,$$

z čehož zase

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Tím je důkaz završen. ■

Ihned si odvodíme další vlastnosti exponenciály plynoucí z (E1) a (E2). Postupně dokážeme, že pro každé $x \in \mathbb{R}$ platí následující.

(E3) $\exp 0 = 1$;

(E4) $\exp' x = \exp x$;

(E5) $\exp(-x) = 1/\exp(x)$;

(E6) $\exp x > 0$;

(E7) \exp je spojitá na \mathbb{R} ;

(E8) \exp je rostoucí na \mathbb{R} ;

(E9) $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp x = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$;

(E10) $\text{im } \exp = (0, \infty)$.

Z (E1) platí $\exp(0 + x) = \exp 0 \cdot \exp x$. Protože zřejmě existuje $x \in \mathbb{R}$, pro něž $\exp x \neq 0$, plyne odtud $\exp 0 = 1$, tj. vlastnost (E3).

Pro důkaz (E4) počítáme

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp(x+h) - \exp h}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp h \cdot \exp x - \exp h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(\exp h - 1) \exp x}{h} \\ &= \exp x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\exp h - 1}{h} = \exp x \cdot 1 = \exp x, \end{aligned}$$

kde jsme v červené rovnosti použili vlastnost (E1) a v modré zas vlastnost (E2).

Pokračujeme vlastností (E5). Z (E1) máme

$$\exp(x + (-x)) = \exp x \cdot \exp(-x).$$

Protože z (E3) je $\exp(x + (-x)) = \exp 0 = 1$, dostáváme

$$1 = \exp x \cdot \exp(-x),$$

čili

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp x}.$$

Ježto má řada $\sum_{n=0}^{\infty} x^n/n!$ zjevně kladný součet pro $x > 0$, plyne (E6) přímo z právě dokázané (E5).

Vlastnost (E7) je okamžitým důsledkem vlastnosti (E4), díky níž má \exp konečnou derivaci na \mathbb{R} , a tudíž je podle lemmatu ?? tamže spojitá.

Vlastnost (E8) je důsledkem vlastností (E4) a (E6), neboť funkce majíc na intervalu (v tomto případě celém \mathbb{R}) kladnou derivaci, je na tomto intervalu – podle důsledku ?? – rostoucí.

Platí $\exp 1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} > 1$, čili z vlastnosti (E1) plyne, že \exp není shora omezená, neboť $\exp(x+1) = \exp x \cdot \exp 1 > \exp x$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. To spolu s vlastnostmi (E7) a (E8) dává $\lim_{x \rightarrow \infty} \exp x = \infty$. Dále, použitím (E5),

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(-x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\exp x} = 0,$$

což dokazuje (E9).

Konečně, vlastnost (E10) plyne z (E9) a Bolzanovy věty.

Příklad 1.1.7

V úvodu do této sekce jsme nazvali exponenciálu „funkcí spojitého růstu“. Tuto intuici nyní částečně formalizujeme. Dalšího pohledu nabudeme po definici obecné mocniny.

Uvažme následující přímočarý populační model. V čase $t \in (0, \infty)$ je počet jedinců dán funkcí $P(t)$. Množství nově narozených jedinců závisí pouze na počtu právě žijících a na konstantě $r \in [0, \infty)$ – zvané *reproduction rate* – která značí, kolik nových jedinců se narodí za jednoho právě živého. Vnímáme-li derivaci $P'(t)$ jako *rychlost růstu* populace v čase t , pak dostáváme diferenciální rovnici

$$P'(t) = r \cdot P(t),$$

jelikož v čase t se podle našeho modelu narodí r jedinců za každého živého. Díky vlastnosti (E4) vidíme, že například funkce $P(t) = \exp(rt)$ řeší rovnici výše. Teorii diferenciálních rovnic v tomto textu probírat nebudeme, bez důkazu však zmíníme, že řešení takto triviálních rovnic až na konstantu určena jednoznačně. V tomto jednoduchém populačním modelu je tudíž počet živých jedinců v čase t dán funkcí $t \mapsto \exp(rt)$.

Na závěr si dokážeme jeden možná překvapivý fakt, že vlastnosti (E1) a (E2) již určují funkci \exp jednoznačně.

Věta 1.1.8 (Jednoznačnost exponenciály)

Existuje právě jedna funkce definovaná na celém \mathbb{R} splňující (E1) a (E2).

DŮKAZ. Existenci jsme dokázali konstruktivně. Dokážeme jednoznačnost. Ať $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ splňuje (E1) a (E2). Ukážeme, že $f = \exp$.

Z úvah výše plyne, že f splňuje rovněž vlastnosti (E3) – (E10), protože k jejich důkazu byly použity pouze (E1) a (E2). Platí tedy $f(0) = 1$ a $f'(x) = f(x)$. Jelikož $\exp x \neq 0$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$, máme z věty o aritmetice derivací

$$\left(\frac{f}{\exp} \right)'(x) = \frac{f'(x) \exp x - f(x) \exp' x}{\exp^2 x} = \frac{f(x) \exp x - f(x) \exp x}{\exp^2 x} = 0.$$

Podle cvičení ?? je f/\exp konstatní funkce, čili existuje $c \in \mathbb{R}$ takové, že $f(x)/\exp x = c$ pro každé $x \in \mathbb{R}$. Dosazením $x = 0$ zjistíme, že $c = f(0)/\exp 0 = 1$, čili $c = 1$ a $f = \exp$. ■

1.1.1 Logaritmus

Jelikož je funkce \exp spojitá a rostoucí na \mathbb{R} , má na celém \mathbb{R} inverzní funkci, které přezdíváme *logaritmus* a značíme ji \log . Z vlastností \exp ihned plyne, že \log je reálná funkce $(0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Na rozdíl od \exp však \log není dána číselnou řadou – aspoň ne pro všechna $x \in (0, \infty)$, více v kapitole o Taylorově polynomu.

Vlastnosti exponenciály nám rovnou umožňují do značné míry prozkoumat k ní inverzní funkci.

Tvrzení 1.1.9 (Vlastnosti logaritmu)

Pro každá $x, y \in (0, \infty)$ platí

(L1) \log je spojitá a rostoucí na $(0, \infty)$;

(L2) $\log(xy) = \log x + \log y$;

$$(L3) \log' x = 1/x;$$

$$(L4) \lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty \text{ a } \lim_{x \rightarrow \infty} \log x = \infty.$$

DŮKAZ.

(L1) Plyne ihned z faktu, že \exp je spojitá a rostoucí.

(L2) Užitím vlastností exponenciály spočteme

$$xy = \exp(\log x) \cdot \exp(\log y) = \exp(\log x + \log y),$$

z čehož po aplikaci \log na obě strany rovnosti plyne

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

(L3) Podle věty o derivaci inverzní funkce platí

$$\log' x = \frac{1}{\exp'(\log x)} = \frac{1}{\exp(\log x)} = \frac{1}{x}.$$

(L4) Protože $\log = \mathbb{R}$, není \log zdola ani shora omezená. Z (L1) plyne kýžený závěr. ■

1.1.2 Obecná mocnina

Užitím funkcí \log a \exp definujeme pro $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ výraz a^b předpisem

$$a^b := \exp(b \cdot \log a).$$

Stojí za to věnovat krátkou chvíli ověření, že tato funkce odpovídá naší představě *mocniny* v případě, kdy $b = n \in \mathbb{N}$. Máme

$$a^n = \exp(n \cdot \log a) = \exp\left(\sum_{k=1}^n \log a\right) = \prod_{k=1}^n \exp(\log(a)) = \prod_{k=1}^n a,$$

tedy a^n je vskutku a n -krát vynásobené samo sebou.

Varování 1.1.10

Uvědomme si, že a^b je definováno pouze pro $a \in (0, \infty)$. Pro $a \leq 0$ není tato funkce nad reálnými čísly rozumně definovatelná. Důvod je mimo jiné následující: pro n sudé a $a < 0$ je $a^n > 0$, ale $a^{n+1} < 0$. Tedy, měla-li by a^b být spojitá funkce, pak by pro každé $n \in \mathbb{N}$ a $a < 0$ existovalo $\xi \in (n, n+1)$ takové, že $a^\xi = 0$. Mocninná funkce, jež je nulová pro nekonečně mnoho čísel je i pro matematiky zřejmě příliš divoká představa.

Poznamenejme však, že nad komplexními čísly je funkce \log definována i pro záporná reálná čísla, tedy a^b dává – se stejnou definicí – smysl pro všechna $a, b \in \mathbb{C}$.

Z vlastností log a exp plynou ihned vlastnosti obecné mocniny. Jelikož její definice dává vzniknout **dvěma** reálným funkcím, konkrétně

$$f(x) = a^x \text{ pro } x \in \mathbb{R} \quad \text{a} \quad g(x) = x^b \text{ pro } x \in (0, \infty),$$

musíme tyto při zkoumání vlastností obecné mocniny pochopitelně rozlišovat. Aby nedošlo ke zmatení, budeme tyto funkce značit zkrátka jako $x \mapsto a^x$ a $x \mapsto x^b$, kde $a \in (0, \infty)$ a $b \in \mathbb{R}$ jsou fixní.

Tvrzení 1.1.11 (Vlastnosti obecné mocniny)

Pro všechna $a \in (0, \infty)$, $b \in \mathbb{R}$ platí

(O1) Funkce $x \mapsto a^x$ i $x \mapsto x^b$ jsou spojité na svých doménách.

(O2) Funkce $x \mapsto a^x$ je na celém \mathbb{R}

- rostoucí pro $a > 1$,
- konstantní pro $a = 1$,
- klesající pro $a < 1$.

(O3) Funkce $x \mapsto x^b$ je na $(0, \infty)$

- rostoucí pro $b > 0$,
- konstantní pro $b = 0$,
- klesající pro $b < 0$.

(O4) $(x \mapsto a^x)' = (x \mapsto a^x \log a)$.

(O5) $(x \mapsto x^b)' = (x \mapsto bx^{b-1})$.

(O6) Je-li

- $a > 1$, pak $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$;
- $a < 1$, pak $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ a $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$;

(O7) Je-li

- $b > 0$, pak $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b = 0$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} x^b = \infty$.
- $b < 0$, pak $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^b = \infty$ a $\lim_{x \rightarrow \infty} x^b = 0$.

(O8) $\log(a^b) = b \cdot \log a$.

DŮKAZ. Vlastnosti (O2), (O3), (O6) a (O7) dokážeme pouze v případě, že $a > 1$ a $b > 0$. Důkaz tvrzení v případech $a < 1$ a $b < 0$ plyne ihned z rovnosti $\exp(-x) = 1/\exp x$ pro $x \in \mathbb{R}$.

(O1) Jelikož $a^b = \exp(b \log a)$ plyne spojitost obou funkcí ze spojitosti exp a log.

(O2) Platí $a^x = \exp(x \log a)$. Protože $a > 1$, je $\log a > 0$. Funkce exp je rostoucí, a tedy je rostoucí rovněž $a \mapsto a^x$.

(O3) Máme $x^b = \exp(b \log x)$. Jelikož je b z předpokladu kladné a log je rostoucí, je $x \mapsto x^b$ též rostoucí.

(O4) Počítáme

$$(a^x)' = (\exp(x \log a))' = \exp'(x \log a) \cdot (x \log a)' = \exp(x \log a) \cdot \log a = a^x \log a.$$

(O5) Opět počítáme

$$(x^b)' = (\exp(b \log x))' = \exp'(b \log x) \cdot (b \log x)' = \exp(b \log x) \cdot \frac{b}{x} = \frac{bx^b}{x} = bx^{b-1}.$$

(O6) Podobně jako v důkazu (O2) plyne z $a > 1$, že $\log a > 0$. Potom jsou ale limity v $\pm\infty$ funkce $a^x = \exp(x \log a)$ stejné jako tytéž limity funkce $\exp x$. Odtud tvrzení.

(O7) Jelikož je $b > 0$, máme z věty o limitě složené funkce

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^b &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(b \cdot \log x) = \lim_{y \rightarrow -\infty} \exp(b \cdot y) = 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x^b &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp(b \cdot \log x) = \lim_{y \rightarrow \infty} \exp(b \cdot y) = \infty. \end{aligned}$$

(O8) Jest

$$\log(a^b) = \log(\exp(b \cdot \log a)) = b \cdot \log a. \quad \blacksquare$$

1.2 Goniometrické funkce