Definujte tento pojem: *oboustranná limita funkce*.

Definujte tento pojem: *spojitost funkce v bodě*.

Definujte tento pojem: *extrém reálné funkce na intervalu*.

Definujte tento pojem: *derivace reálné funkce v bodě*.

Definujte tento pojem: *exponenciála a logaritmus*.

Definujte tento pojem: *funkce sinus a cosinus*.

Definujte tento pojem: *obecná mocnina*.

Definujte tento pojem: *Taylorův polynom daného stupně reálné funkce v bodě*.

Definujte tento pojem: *Symbol malé o*.

Definujte tento pojem: *primitivní funkce na intervalu*.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

*Ať má reálná funkce f **konečnou** limitu v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Pak je f na jistém prstencovém okolí a omezená.*

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $a \in \mathbb{R}^*$ a f,g jsou reálné funkce. Platí-li

$$\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x),$$

pak $f(x) > g(x)$ pro každé x z jistého prstencového okolí a.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Existují reálné funkce f,g a čísla $a,A,B \in \mathbb{R}^*$, že

$$\lim_{x\to a} g(x) = A \quad a \quad \lim_{y\to A} f(y) = B,$$

ale přesto $\lim_{x\to a}(f\circ g)(x) \neq B$.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Reálná funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na něm omezená.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(a)$. Pak existuje

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

a je rovna $f'(a)$.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje konečná $f'(a)$. Pak je f v bodě a spojitá.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať má funkce f v bodě a extrém a ať $f'(a)$ existuje. Pak $f'(a) = 0$.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a funkce f má všude na I zápornou derivaci. Pak je f na I klesající.
***Hint**: Lagrangeova věta o střední hodnotě.*

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp' x = \exp x$.
***Hint**: Použijte rovnosti*

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y \quad a \quad \lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Pro všechna $x,y > 0$ platí

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

***Hint**: Vlastnosti exponenciály.*

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $n \in \mathbb{N}$ a $f: M \to \mathbb{R}$ má v $a \in M$ derivace všech řádů do n včetně. Pak

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

***Hint**: Indukcí podle n užitím rovnosti $(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$.*

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Jsou-li f_1, f_2, g_1, g_2 reálné funkce a $f_1 = o(g_1), f_2 = o(g_2)$, pak $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $f, g: (a,b) \to \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a F, G jsou primitivní k f, g na (a,b). Pak

$$\int fG = FG - \int Fg.$$

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $a < b, \alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ a $\varphi: (\alpha,\beta) \to (a,b)$ jsou reálné funkce, přičemž φ' existuje konečná na (a,b). Ať F je primitivní k f na (a,b). Pak

$$\int (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) \, \mathrm{d}t = (F \circ \varphi)(t)$$

pro $t \in (\alpha, \beta)$.

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}.$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1},$$

kde $m,n\in\mathbb{N}$.

Spočtěte derivaci následující funkce.

$$f(x)=\frac{\exp x-\exp(-x)}{\exp x+\exp(-x)}.$$

Spočtěte derivaci následující funkce.

$$f(x)=\log(\log x-3)+\arcsin\left(\frac{x-5}{2}\right).$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{x-\sin x}.$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 0^+}x^x.$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\exp(-x^2/2)}{x^4}.$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(\cos x)}{x^2}.$$

Spočtěte následující integrál.

$$\int\frac{\exp x}{2+\exp x}\,\mathrm{d}x$$

pro $x\in\mathbb{R}$.

Spočtěte následující integrál.

$$\int \arcsin x \, \mathrm{d}x$$

pro $x \in (-1, 1)$.

Spočtěte následující integrál.

$$\int \frac{\log^2 x}{x} \, \mathrm{d}x$$

pro $x > 0$.

Spočtěte následující integrál.

$$\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2} \, \mathrm{d}x$$

pro $x \in \mathbb{R}$.