
Definujte tento pojem: *oboustranná limita funkce*.

Definujte tento pojem: *spojitost funkce v bodě*.

Definujte tento pojem: *extrém reálné funkce na intervalu*.

Definujte tento pojem: *derivace reálné funkce v bodě*.

Definujte tento pojem: *exponenciála a logaritmus*.

Definujte tento pojem: *funkce sinus a cosinus*.

Definujte tento pojem: *obecná mocnina*.

Definujte tento pojem: *Taylorův polynom daného stupně reálné funkce v bodě*.

Definujte tento pojem: *Symbol malé o*.

Definujte tento pojem: *primitivní funkce na intervalu*.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať má reálná funkce f **konečnou** limitu v bodě $a \in \mathbb{R}^*$. Pak je f na jistém prstencovém okolí a omezená.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $a \in \mathbb{R}^*$ a f, g jsou reálné funkce. Platí-li

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) > \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

pak $f(x) > g(x)$ pro každé x z jistého prstencového okolí a .

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Existují reálné funkce f, g a čísla $a, A, B \in \mathbb{R}^*$, že

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = A \quad \text{a} \quad \lim_{y \rightarrow A} f(y) = B,$$

ale přesto $\lim_{x \rightarrow a} (f \circ g)(x) \neq B$.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Reálná funkce spojitá na uzavřeném intervalu je na něm omezená.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje $f'(a)$. Pak existuje

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

a je rovna $f'(a)$.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať f je reálná funkce, $a \in \mathbb{R}$ a existuje konečná $f'(a)$. Pak je f v bodě a spojitá.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať má funkce f v bodě a extrém a ať $f'(a)$ existuje. Pak $f'(a) = 0$.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval a funkce f má všude na I zápornou derivaci. Pak je f na I klesající.

Hint: Lagrangeova věta o střední hodnotě.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí $\exp' x = \exp x$.

Hint: Použijte rovnosti

$$\exp(x+y) = \exp x \cdot \exp y \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1.$$

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Pro všechna $x, y > 0$ platí

$$\log(xy) = \log x + \log y.$$

Hint: Vlastnosti exponenciály.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $n \in \mathbb{N}$ a $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ má v $a \in M$ derivace všech řádů do n včetně. Pak

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - T_n^{f,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Hint: Indukcí podle n užitím rovnosti $(T_n^{f,a})' = T_{n-1}^{f',a}$.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Jsou-li f_1, f_2, g_1, g_2 reálné funkce a $f_1 = o(g_1), f_2 = o(g_2)$, pak $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$.

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ jsou reálné funkce a F, G jsou primitivní k f, g na (a, b) . Pak

$$\int fG = FG - \int Fg.$$

Dokažte následující (snadné) tvrzení.

Ať $a < b, \alpha < \beta \in \mathbb{R}$, $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ a $\varphi : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$ jsou reálné funkce, přičemž φ' existuje konečná na (α, β) . Ať F je primitivní k f na (a, b) . Pak

$$\int (f \circ \varphi)(t) \cdot \varphi'(t) dt = (F \circ \varphi)(t)$$

pro $t \in (\alpha, \beta)$.

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1},$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.

Spočtěte derivaci následující funkce.

$$f(x) = \frac{\exp x - \exp(-x)}{\exp x + \exp(-x)}.$$

Spočtěte derivaci následující funkce.

$$f(x) = \log(\log x - 3) + \arcsin\left(\frac{x-5}{2}\right).$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{x - \sin x}.$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x.$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \exp(-x^2/2)}{x^4}.$$

Spočtěte následující limitu.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(\cos x)}{x^2}.$$

Spočtěte následující integrál.

$$\int \frac{\exp x}{2 + \exp x} dx$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

Spočtěte následující integrál.

$$\int \arcsin x \, dx$$

pro $x \in (-1, 1)$.

Spočtěte následující integrál.

$$\int \frac{\log^2 x}{x} \, dx$$

pro $x > 0$.

Spočtěte následující integrál.

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 2x + 2)^2} \, dx$$

pro $x \in \mathbb{R}$.

Dokažte následující tvrzení.

Ať $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce. Potom je množina

$$M := \{x \in \mathbb{R} \mid f \text{ má v } x \text{ ostré lokální maximum}\}$$

spočetná.

Návod:

(1) Z definice extrému existuje pro každé $x \in M$ okolí $P(x, \delta_x)$, na němž platí $f(y) < f(x), y \in P(x, \delta_x)$. Volme

$$M_n := \left\{x \in M \mid \delta_x > \frac{1}{n}\right\}.$$

Pro každé $n \in \mathbb{N}$ najděte nalezněte číslo η_n takové, že

$$M_n = \bigcup_{x \in M_n} B(x, \eta_n).$$

(2) Dokažte, že M_n , jakožto disjunktní sjednocení otevřených intervalů, je spočetná.

(3) Dokažte, že M je spočetná.

Řekneme, že bod $a \in M$ je **inflexním bodem** funkce $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, jestliže existuje konečná $f'(a)$ a $\delta > 0$ takové, že buď

$$\forall x \in (a - \delta, a) : f(x) > T_1^{f,a}(x) \quad \text{a} \quad \forall x \in (a, a + \delta) : f(x) < T_1^{f,a}(x),$$

nebo

$$\forall x \in (a - \delta, a) : f(x) < T_1^{f,a}(x) \quad \text{a} \quad \forall x \in (a, a + \delta) : f(x) > T_1^{f,a}(x).$$

Slovy: bod a je inflexním bodem f , když hodnoty f v bodech vlevo od a leží pod, resp. nad, tečnou f v bodě a a hodnoty f v bodech vpravo od a leží nad, resp. pod, tečnou f v bodě a .

Dokažte, že když a je inflexním bodem f , pak $f''(a)$ buď neexistuje nebo je rovna 0.

Návod: Uvažujte pro spor, že třeba $f''(a) > 0$, pak použijte definici derivace a Lagrangeovu větu o střední hodnotě, abyste ukázali, že a není inflexním bodem.

Ať $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ je spojitá a $\varphi : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ má konečnou nenulovou derivaci všude na (a, b) . Potom je $\varphi((a, b))$ interval; označme jej (α, β) . Položme $g(t) := (f \circ \varphi^{-1})(t) \cdot (\varphi^{-1})'(t)$ a nechť G je primitivní ke g na (α, β) . Dokažte, že pak

$$\int f(x) dx = (G \circ \varphi)(x)$$

pro $x \in (a, b)$.

Návod:

(1) Použitím Darbouxovy vlastnosti (tj. vlastnosti zobrazování intervalu na interval) spojitých funkcí k důkazu, že

(a) $\varphi((a, b))$ je vsutku interval;

(b) platí buď $\varphi' > 0$ nebo $\varphi' < 0$ na celém (a, b) .

(2) Dokažte, že existuje $\varphi^{-1} : (\alpha, \beta) \rightarrow (a, b)$.

(3) Zaderivujte si.
