# Skripta k matematickému semináři


Adam Klepáč

Gymnázium Evolution Jižní Město

adam.klepac@gevo.cz


4. února 2026


Tato skripta jsou určena studentům nepovinného předmaturitního semináře z matematiky. Ve **stručné** podobě pokrývají probrané učivo a mají sloužit jako zdroj příkladů, obrázků a (většinou formální) shrnutí základních ideí.

# Obsah

# 1 Lineární systémy

Lineární systémy modelují skutečnosti (ve fyzice, ekonomie, informatice, …), kdy veličiny na sobě závisejí *přímo úměrně*. Běžným příkladem z fyziky je závislost dráhy na čase při konstantní rychlosti: jedeme-li rychlostí 50 km/h, pak ujetá vzdálenost (v km) je vždy přesně 50x větší, než uplynuvší čas (v hodinách).

Jednoduše řečeno jsou lineární systémy množiny *lineárních rovnic* (tedy rovnic vyjadřujících ony vztahy přímé úměrnosti mezi veličinami). *Řešením* lineárního systému pak myslíme množinu všech čísel, která lze (v daném pořadí) dosadit za proměnné, aby byly všechny rovnice splněny.

## 1.1 Pár aplikací lineárních systémů

V této úvodní sekci si ukážeme různé aplikace lineárních systémů a nadneseme několik otázek o povaze jejich množin řešení, jež budeme chtít umět zodpovědět.

### 1.1.1 Vstupy a výstupy průmyslů

Ekonomie je složitý systém vzájemně provázaných průmyslů. Vstupy (řekněme „materiál nutný na výrobu“) jednotlivých průmyslů jsou většinou svázány lineárně (přímo úměrně) s výstupy (řekněme „výrobky“) jiných průmyslů. Je tomu tak pro to, že daný výrobek má konstantní výrobní náklady – k výrobě tužky je potřeba tolik a tolik tuhy, tolik a tolik dřeva atd. Neboli, výroba $t$ tužek vyžaduje (řekněme) $5t$ gramů tuhy. Dokud by výroba plynula pouze jedním směrem (tedy od tuhy a dřeva k tužkám), nebyla by teorie lineárních systémů v ekonomii mnoho užitečná. Situace je však málokdy tak jednoduchá. Ona *vzájemná provázanost* vzniká v moment, kdy například dřevní průmysl potřebuje vést různé záznamy o nákupu a prodeji a tyto bude psát tužkou na papír. Nyní je výstup dřevního průmyslu vstupem tužkového a tužky jsou zase vstupem dřevního průmyslu. Spočítat, jak přirozené fluktuace v nabídce a poptávce ovlivní takový systém není triviální. Podívejme se blíže na jiný (leč zjednodušený) příklad z praxe.

Omezíme se na dva konkrétní hráče na volném trhu – automobilový průmysl a průmysl ocelový. Pochopitelně, automobilový průmysl vyžaduje ocel k výrobě vozidel, a naopak, ocelový průmysl vyžaduje nákladní auta k převozu oceli z továren ke kupcům. Zároveň, automobilový průmysl používá svá vlastní nákladní auta například k převozu osobních automobilů a ocelový průmysl též svou vlastní ocel k výstavbě továren. Konečně, výše výstupu obou průmyslů musí uspokojit poptávku všech ostatních průmyslů i fyzických osob na trhu.

Situaci shrňme následující tabulkou, kde jsou u obou průmyslů uvedeny hodnoty výstupů (v milionech dolarů za rok 1958 v USA) využívaných automobilovým průmyslem, ocelovým průmyslem a pak všemi ostatními.

| | **užívá ocel** | **užívá auto** | **užívá zbytek** | **celkem** |
|---|---|---|---|---|
| **hodnota oceli** | 5395 | 2664 | 17389 | 25448 |
| **hodnota auta** | 48 | 9030 | 21268 | 30346 |

Celkem přirozeně, hodnoty v prvních dvou sloupcích zůstanou konstantní, dokud se nezmění hodnoty ve sloupci třetím. Ani jeden z průmyslů nemá důvod upravovat nabídku, nezmění-li se poptávka. Ovšem, hodnota v třetím sloupci kolísá s poptávkou *fyzických osob*, jež je notoricky obtížně předpovídatelná. Chtěli bychom umět určit hodnotu obou průmyslů v příštím roce na základě dané fluktuace hodnoty ve třetím sloupci tabulky.

Tomu poslouží lineární systém o těchto dvou rovnicích:

$$\begin{aligned}\text{hodnota oceli v příštím roce} &= \text{užitá ocel ocelí v příštím roce}\\ &+ \text{užitá ocel autem v příštím roce}\\ &+ \text{užitá ocel ostatními v příštím roce}\\ \text{hodnota auta v příštím roce} &= \text{užité auto ocelí v příštím roce}\\ &+ \text{užité auto autem v příštím roce}\\ &+ \text{užité auto ostatními v příštím roce}\end{aligned} \tag{1.1}$$

Pro jednoduchost vyjádření označíme písmenem $o$ hodnotu oceli v příštím roce a písmenem $a$ hodnotu auta v příštím roce.

Předpokládejme, že hodnota užité oceli ostatními v příštím roce vzroste na 17589 milionu dolarů a hodnota užitého auta ostatními v příštím roce klesne na 21243. Budeme též předpokládat, že podíl celkové hodnoty ocelového i automobilového průmyslu využitý ocelovým průmyslem zůstane nezměněn a stejně tak i pro průmysl automobilový. Čili, ocelový průmysl použil v tomto roce přesně 5395/25448 hodnoty svého vlastního výstupu a 2664/30346 hodnoty výstupu automobilového průmyslu. Dále, automobilový průmysl použil 9030/30346 své vlastní hodnoty a 48/25448 hodnoty oceli.

Dosazením všech hodnot do systému (1.1) dostaneme

$$\begin{aligned} o &= \frac{5395}{25448}o + \frac{2664}{30346}a + 17589\\ a &= \frac{48}{25448}o + \frac{9030}{30346}a + 21243\end{aligned} \tag{1.2}$$

Řešením tohoto systému jsou očekávané hodnoty výstupů obou průmyslů při dané fluktuaci vnější poptávky.

### 1.1.2 Elektrické sítě

Inženýři často potřebují zodpovědět otázky o elektrických sítích (v mobilu, v autě …) typu: „Jak silný proud prochází každým obvodem?“, „Jak vysoké napětí nepřetíží připojená zařízení“ apod.

Lineární systémy mohou sloužit jako dobrý způsob studia elektrických sítí. Než se podíváme na konkrétní příklady, shrneme víceméně intuitivním způsobem základní vlastnosti elektrických sítí.

Jednoduchá elektrická síť sestává ze dvou typů zařízení: *baterií* a *resistorů*. Jejich vztah si lze představovat tak, že baterie pumpuje napětí, dokud existuje v síti aspoň jeden uzavřený obvod a průchod elektrického proudu resistorem napětí ve zbytku obvodu sníží. Proud jako takový lze považovat za jakousi „rychlost“ pohybu napětí po síti. Když se síť rozdělí do dvou obvodů, proud se rozdělí též, neboť napětí zůstane v obou obvodech stejné („vést“ stejné napětí dvěma cestami je „těžší“ než jednou).

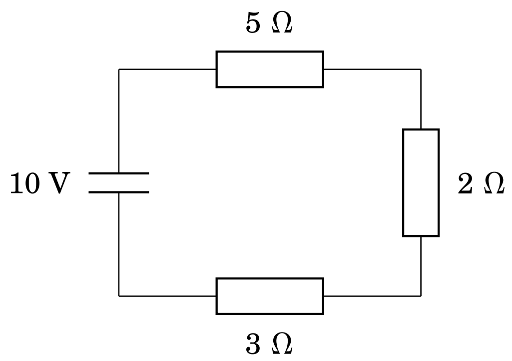
Proud, napětí a odpor jsou svázány tzv. Ohmovým zákonem, který říká, že v každém bodě obvodu platí

$$\text{napětí} = \text{proud} \cdot \text{odpor}.$$

Další ingrediencí ke studiu elektrických obvodů se nám stanou dva Kirchhoffovy zákony: zákon *napětí* a zákon *proudění*. Zákon napětí říká, že celkový pokles napětí v každém obvodu je roven celkovému vzrůstu. Jinak řečeno, po průchodu všemi resistory v obvodu musí být napětí nulové, neboť jeho vzrůst zařizuje baterie. Kirchhoffův zákon proudění říká, že v každém bodě, kde se síť dělí na více obvodů, je součet velikostí proudů konstantní. Rozdělí-li se tedy jeden obvod v jistém bodě na tři obvody, pak velikost proudu v tomto jednom obvodu musí být rovna součtu velikostí tří proudů v obvodech následujících.

Nyní předložíme několik příkladů elektrických sítí, od jednoduchých po poněkud komplikovanější.

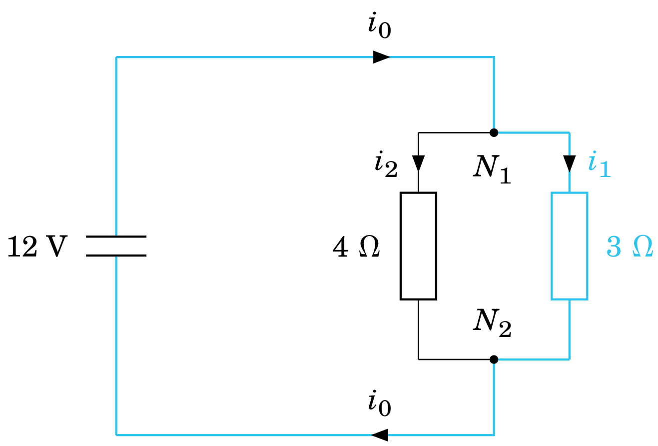
Jistě nejjednodušším příkladem elektrické sítě je ta o pouze jednom obvodu.




Obrázek 1: Jednoduchá elektrická síť o jednom obvodu.

Baterie v této síti dodává napětí o velikosti 10 V. Zapojeny jsou za sebou tři resistory o odporech 5, 2 a 3 Ω. K výpočtu proudu procházejícího celým obvodem nebudeme potřebovat Kirchhoffův zákon proudění (protože se síť nedělí na více obvodů) ani lineární systém. Bude stačit jediná rovnice. Totiž, podle Kirchhoffova zákona napětí musí celkový nárůst napětí (zde 10 V) být roven jeho celkovému poklesu. Dohromady musejí tedy ony tři zapojené resistory „spolknout“ 10 V napětí. Protože je celkový odpor obvodu roven $5 + 2 + 3 = 10$ Ω a víme, že platí napětí = proud · odpor, můžeme spočítat, že proud procházející obvodem je roven 1 A.

Nyní již uvážíme síť o třech obvodech: jednom vnějším (označeném modře), jednom vnitřním (z baterie přes resistor o 4 Ω a zase do baterie) a jednom bez baterie (obdélník obsahující oba resistory).




Obrázek 2: Elektrická síť o třech obvodech.

Proud $i_0$ procházející sítí se v uzlu označeném $N_1$ dělí na dva: $i_1$ a $i_2$. Podle Kirchhoffova zákona o proudění musí platit rovnost $i_0 = i_1 + i_2$. Podobně, v uzlu $N_2$ se proudy $i_1$ a $i_2$ pojí v jeden: $i_0$. Podle stejného zákona platí rovněž $i_1 + i_2 = i_0$.

Navíc, pro každý ze tří obvodů platí Kirchhoffův zákon napětí. V případě vnitřního obvodu (kterým prochází proud o velikosti $i_2$) musí resistor snížit napětí o celých 12 V. Z pravidla napětí = proud · odpor dostáváme rovnici $12 = i_2 \cdot 4$. Podobně, modrý vnější obvod splňuje rovnici $12 =$

$i_1 \cdot 3$. Nakonec zde máme obvod bez baterie. Ten má celkové napětí 0 V. Resistorem nalevo prochází napětí $4 \cdot i_2$ a resistorem napravo napětí $3 \cdot i_1$. Protože však elektřina proudí resistorem napravo *opačným směrem* oproti resistoru napravo, musíme tento fakt vykompensovat změnou znaménka. Celkový pokles napětí v tomto obvodu je pročež $4 \cdot i_2 - 3 \cdot i_1$. Ten musí být nulový (neb nedošlo k žádnému nárůstu napětí), čili $4 \cdot i_2 - 3 \cdot i_1 = 0$.

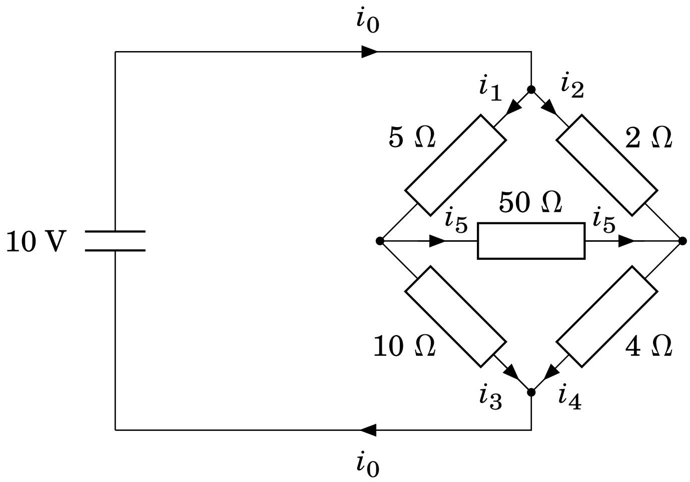
Po využití obou Kirchhoffových zákonů docházíme k závěru, že proud procházející sítí je popsán soustavou rovnic

$$\begin{aligned} i_0 &= i_1 + i_2 \\ i_1 + i_2 &= i_0 \\ 4i_2 &= 12 \\ 3i_1 &= 12 \\ 4i_2 - 3i_1 &= 0. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Jak si můžete všimnout, jisté rovnice jsou tu zbytečné, třeba druhá a pátá. Na tom by nám nemuselo záležet, dostaneme-li správný výsledek tak či tak, ale z výpočetního hlediska je tato situace neoptimální. Totiž, v praxi počítáme obvykle systémy o tisících ba statisících lineárních rovnicích a zcela jistě není vhodné nechat počítač řešit například pět tisíc rovnic, mohl-li řešit tisíc pouze jeden. Které rovnice jsou však zbytečné a které ne, není triviální bez bližšího studia určit. Například aspoň jednu z prvních dvou rovnic ponechat musíme, neboť bez nich nespočítáme proud $i_0$. Dále, z posledních tří rovnic si rovněž musíme libovolné dvě ponechat a tu třetí můžeme zanedbat. Jak problém „Které rovnice v soustavě jsou zbytečné?“ řešit zodpovíme brzy.

Řešením systému je $i_0 = 7, i_1 = 4, i_2 = 3$.

Posledním obvodem, který si ukážeme a jejž by bylo opravdu obtížné řešit bez teorie soustav lineárních rovnic, je tzv. *Wheatstonův most* na obrázku 3.




Obrázek 3: Wheatstonův most.

Tato síť obsahuje čtyři uzly a bezpočet obvodů. Protože neznámých velikostí proudu je šest, potřebujeme najít minimálně šest různých rovnic, ve kterých se každá z proměnných vyskytuje celkem aspoň jednou. Aplikace Kirchhoffova zákona na horní a spodní uzel dá rovnice

$$\begin{aligned} i_0 &= i_1 + i_2 \\ i_3 + i_4 &= i_0. \end{aligned}$$

Z levého a pravého uzlu pak získáme rovnice (nesmíme zapomenout změnit znaménko, když počítáme s velikostí proudu v „opačném“ směru oproti nakreslenému)

$$\begin{aligned} i_1 - i_5 &= i_3 \\ i_2 + i_5 &= i_4. \end{aligned}$$

Dále, Kirchhoffův zákon napětí použitý na vnitřní obvod s baterií dává rovnici

$$10 = 5i_1 + 10i_3.$$

Naopak, z vnějšího obvodu s baterií usoudíme, že

$$10 = 2i_2 + 4i_4.$$

Konečně musíme najít obvod, který nám umožní spočítat hodnotu proměnné $i_5$. Tím je například onen „horní trojúhelník“. Z něj dostaneme rovnici

$$5i_1 + 50i_5 - 2i_2 = 0.$$

Celkem tedy řešíme soustavu o sedmi rovnicích a šesti neznámých:

$$\begin{aligned} i_0 &= i_1 + i_2 \\ i_3 + i_4 &= i_0 \\ i_1 - i_5 &= i_3 \\ i_2 + i_5 &= i_4 \\ 10 &= 5i_1 + 10i_3 \\ 10 &= 2i_2 + 4i_4 \\ 0 &= 5i_1 + 50i_5 - 2i_2, \end{aligned}$$

jejímž řešením je $i_0 = 7/3, i_1 = 2/3, i_2 = 5/3, i_3 = 2/3, i_4 = 5/3$ a $i_5 = 0$.

Wheatstonův most se často používá k měření odporu různých zařízení ve smyslu, který si dostanete šanci rozmyslet prostřednictvím cvičení na konci kapitoly.

### 1.1.3 Chemické rovnice

Lineární systémy se objevují též v chemii, konkrétně při vyčíslování reakcí. Uvažme reakci, kdy se toluen $\mathtt{C_7H_8}$ slučuje s kyselinou dusičnou $\mathtt{HNO_3}$ a produkuje trinitrotoluen (zkráceně TNT) $\mathtt{C_7H_5O_6N_3}$ s vodou $\mathtt{H_2O}$. Počet molekul na obou stranách reakce označíme postupně písmeny $x, y, z, w$. Pak můžeme reakci zapsat jako

$$x\ \mathtt{C_7H_8} + y\ \mathtt{HNO_3} \to z\ \mathtt{C_7H_5O_6N_3} + w\mathtt{H_2O}.$$

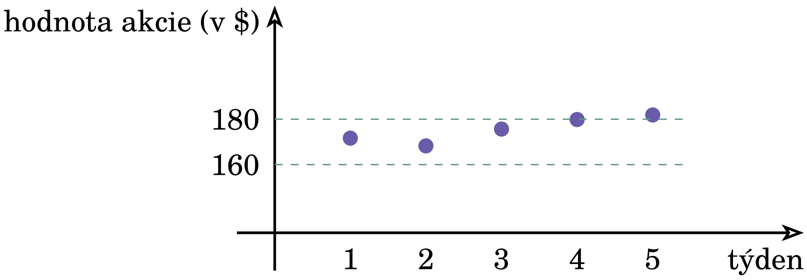
Aby taková reakce mohla nastat, musí díky zákonu zachování hmoty být počet atomů na levé straně roven počtu atomů na straně pravé. Jelikož v reakci vystupují čtyři různé atomy, dostáváme systém o čtyřech rovnicích:

$$\begin{aligned} \mathtt{C}: \quad 7x &= 7z \\ \mathtt{H}: 8x + y &= 5z + 2w \\ \mathtt{N}: \quad y &= 3z \\ \mathtt{O}: \quad 3y &= 6z + w \end{aligned}$$

Všimněte si, že takový systém rovnic má **nekonečně mnoho** řešení, protože obě strany chemické reakce závisejí na úvodním množství (aspoň jedné ze) sloučenin. Aby měl systém se čtyřmi proměnnými přesně jedno řešení, musí obsahovat minimálně čtyři lineární rovnice, ale – jak vidno – nemusí to vždy stačit.

### 1.1.4 Interpolace

Důležitou úlohou statistiky je schopnost aproximovat diskrétní data souvislou křivkou dané „výpočetní složitosti“. Diskrétními daty se myslí zkrátka množina měření jisté veličiny nebo veličin v čase. Uvažme příklad hodnoty akcií firmy NVIDIA za poslední měsíc. Měření této hodnoty každý týden v pondělní poledne dá graf na obrázku 4.




Obrázek 4: Graf hodnot akcií firmy NVIDIA za měsíc září 2026.

Jakožto finančních analytiků je naší úlohou na základě dosavadních dat zkusit odhadnout vývoj hodnoty akcií firmy NVIDIA v budoucích týdnech. Tomuto „doplnění“ daných dat o chybějící údaje (ať už mezi jednotlivými týdny nebo v týdnech budoucích) se říká *interpolace*. Nejjednodušší (ale zato nejrychlejší) způsob interpolace je proložení přímkou (tzv. *line of best-fit*). Taková úloha vede přirozeně na řešení soustavy lineárních rovnic.

Totiž, přímka v rovině je dána lineární rovnicí $y = ax + b$. My máme k dispozici pět dvojic čísel $(x, y)$ – $x$ je číslo týdne, $y$ je hodnota akcie – a chceme z nich určit koeficienty $a, b$. Zapsány do tabulky, jsou hodnoty akcií v jednotlivých týdnech následující:

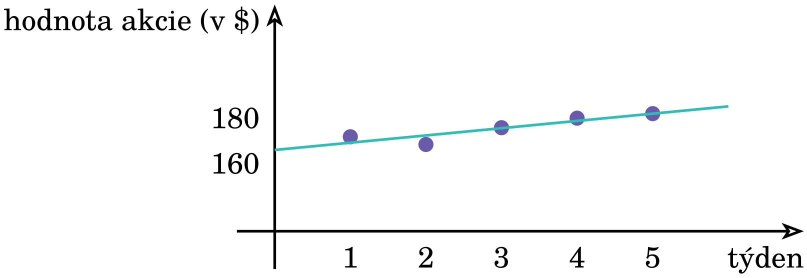
| **týden** | **hodnota akcie** |
|---|---|
| 1 | $171.65 |
| 2 | $168.245 |
| 3 | $175.65 |
| 4 | $179.845 |
| 5 | $181.85 |

Tabulka 1: Hodnoty akcií firmy NVIDIA za měsíc září 2026.

Rovnici přímky pak najdeme vyřešením soustavy rovnic

$$\begin{aligned} 171.65 &= a \cdot 1 + b \\ 168.245 &= a \cdot 2 + b \\ 175.65 &= a \cdot 3 + b \\ 179.845 &= a \cdot 4 + b \\ 181.85 &= a \cdot 5 + b. \end{aligned}$$

Všimněte si na této soustavě jedné zásadní věci – ona řešení ale vůbec nemá! Totiž, z prvních dvou rovnic můžeme zjistit, že $a = -3.41$ a $b = 175$ (přibližně), avšak tato dvojice neřeší například rovnici třetí. Co s tím? Jestliže všech pět bodů na přímce neleží, uměli bychom najít nějakou přímku, která je jim všem „co nejblíže“, ve smyslu, že součet vzdáleností všech bodů od této přímky je nejmenší možný? Jak snad správně čekáte, odpověď na tuto otázku je „ano“. Jak přesně se takové řešení soustavy dá najít se však dozvíme až později. Výsledkem příslušného výpočtu by byla přímka $y = 3.2x + 166$ na obrázku 5.




Obrázek 5: Aproximace hodnot akcií firmy NVIDIA přímkou.

### 1.1.5 Úlohy na závěr

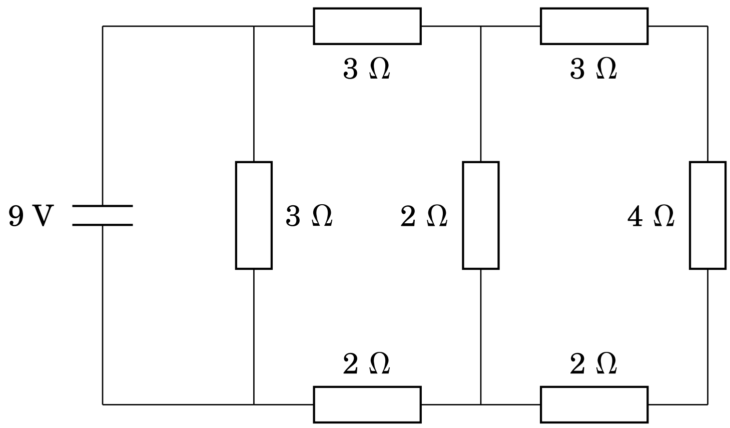
(1) Předpovězte hodnoty tří průmyslů v příštím roce, jejichž vzájemný vztah je dán tabulkou 2.

| | **užívá zemědělství** | **užívá železnice** | **užívá logistika** | **užívají ostatní** | **celkem** |
|---|---|---|---|---|---|
| **hodnota zemědělství** | 25 | 50 | 100 | 625 | 800 |
| **hodnota železnice** | 25 | 50 | 50 | 175 | 300 |
| **hodnota logistiky** | 15 | 10 | 0 | 475 | 500 |

Tabulka 2: Vzájemný vztah tří průmyslů.

Předpokládejte, že externí poptávka po zemědělských produktech vzroste na 650, poptávka po železničních službách na 180 a poptávka po logistických službách klesne na 450.

(2) Spočtěte proud procházející každým resistorem v obvodu na obrázku 6.

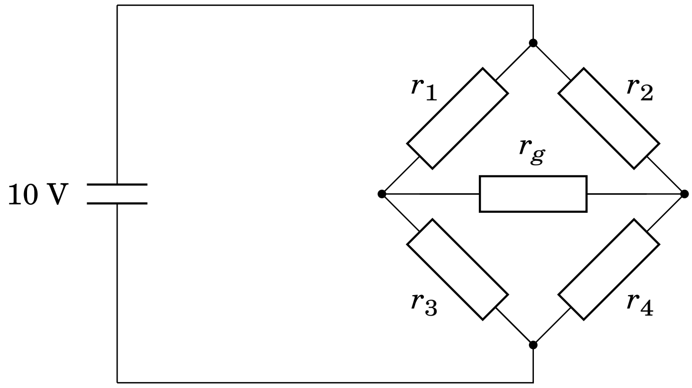



Obrázek 6: Elektrická síť k úloze 2.

(3) Dokažte, že jsou-li dány odpory zařízení ve Wheatstonově mostě jako na obrázku 7 a proud procházející resistorem $r_g$ (tím prostředním) je nulový, pak platí rovnost

$$r_4 = \frac{r_2 \cdot r_3}{r_1}.$$

Měření odporu resistoru $r_4$ probíhá tak, že upravujeme odpory zařízení $r_1, r_2$ a $r_3$, dokud není odpor $r_g$ nulový. V ten moment známe odpor $r_4$ díky rovnosti výše.




Obrázek 7: Wheatstonův most s neznámými odpory.

## 1.2 Řešení lineárních systémů

V této sekci formulujeme Gaußův-Jordanův algoritmus na řešení lineárních systémů. S mírnými modifikacemi je tento algoritmus využíván počítači stále a je zatím řádově nejrychlejším algoritmem na řešení lineárních systémů, jejž známe.

Nejprve však zavedeme pár základních definic a značení.

**Definice 1.2.1** (Lineární kombinace): Ať $n$ je přirozené číslo, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou proměnné a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou čísla. Výraz typu

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$$

nazveme *lineární kombinací* proměnných $x_1, \ldots, x_n$.

**Definice 1.2.2** (Lineární rovnice): Jsou-li $x_1, \ldots, x_n$ proměnné a $a_1, \ldots, a_n, b$ čísla, pak rovnost

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b, \tag{1.4}$$

kde levá strana je lineární kombinace proměnných $x_1, \ldots, x_n$, nazveme *lineární rovnicí* (v proměnných $x_1, \ldots, x_n$). *Řešením* lineární rovnice je jakákoli $n$-tice čísel $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, pro kterou platí rovnost (1.4) po dosazení za proměnné $x_1, \ldots, x_n$.

**Definice 1.2.3** (Lineární systém): Množinu lineárních rovnic

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + \ldots + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + \ldots + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + \ldots + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.5}$$

nazveme *lineárním systémem*. *Řešením* lineárního systému (1.5) je jakákoli $n$-tice $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ řešící každou jeho rovnici.

Při práci s lineárními rovnicemi budeme vždy předpokládat, že jsou zapsány jako v (1.4). Když lineární rovnice není v tomto tvaru, např. $3x_1 - 2x_2 - 5 = 3x_3$ můžeme ji totiž na tento tvar snadno upravit tak, že všechny proměnné dáme nalevo a čísla napravo, tedy takto: $3x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 5$.

### 1.2.1 Gaußův-Jordanův algoritmus

Ideu nalezení řešení lineárního systému přes Gaußův-Jordanův algoritmus nejprve ilustrujeme na příkladě.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - \phantom{2}x_3 &= 7 \\ 2x_1 + 2x_2 \phantom{{}+2x_3} &= 0 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 7 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Budeme postupovat tak, že nejprve z prvního sloupce a všech řádků *kromě* prvního „vyeliminujeme“ proměnnou $x_1$. Konkrétně, odečteme dvojnásobek první rovnice od druhé a pak přičteme první rovnici ke třetí. Zatím nám věřte, že takovéto úpravy nechávají řešení systému nedotčeno. Brzy si to rozmyslíme pořádně.

Výsledkem bude systém

$$\begin{aligned} x_1 + \phantom{-}2x_2 - \phantom{2}x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 2x_3 &= -14 \\ 6x_2 + \phantom{2}x_3 &= 14 \end{aligned}$$

Konečně, z druhého sloupce a všech řádků pod druhým (tedy již pouze z třetího) vyeliminujeme proměnnou $x_2$. Díky tomu, že již v žádném řádku kromě prvního není přítomna proměnná $x_1$, zbavíme se takto z třetího řádku proměnné $x_2$, aniž do něj „vrátíme“ proměnnou $x_1$. Přičítáme proto trojnásobek druhé rovnice ke třetí a dostáváme

$$\begin{aligned} x_1 + \phantom{-}2x_2 - \phantom{2}x_3 &= 7 \\ -2x_2 + 2x_3 &= -14 \\ 7x_3 &= -28 \end{aligned}$$

Teď je systém ve stavu, kdy můžeme zpětnou substitucí (nejprve spočítáme $x_3$, s jeho pomocí $x_2$ atd.) systém dopočítat. Z poslední rovnice víme, že $x_3 = -4$. Dosazením do druhé rovnice dostaneme

$$-2x_2 + 2 \cdot (-4) = -14$$

a tím pádem $x_2 = 3$. Konečně, z první rovnice

$$x_1 + 2 \cdot 3 - (-4) = 7,$$

takže $x_1 = -3$. Našli jsme řešení (1.6) v podobě $(-3, 3, -4)$.

V právě spočteném příkladě jsme upravovali lineární systém tak, že jsme přičítali (či odečítali) násobky rovnic od rovnic jiných. Že je tato úprava **ekvivalentní** ve smyslu, že nemění množinu řešení systému, si záhy rozmyslíme. Navíc k této úpravě můžeme též prohazovat rovnice a násobit rovnice nenulovými čísly. Tyto tři úpravy lineárních systémů se souhrnně nazývají „elementární řádkové úpravy“ z důvodů, jež ještě objasníme.

**Definice 1.2.4** (Elementární řádkové úpravy): Následující tři úpravy lineárních systémů:

(1) prohození dvou rovnic,

(2) vynásobení rovnice nenulovým číslem,

(3) přičtení násobku jedné rovnice k jiné,

nazveme *elementárními řádkovými úpravami*.

**Tvrzení 1.2.1**: Elementární řádkové úpravy nemění množinu řešení lineárního systému.

*Důkaz*: Že úpravy (1) a (2) nemění množinu řešení lineárního systému, je zřejmé, protože jsou ihned zvratné prohozením týchž rovnic či zpětným vydělením vynásobené rovnice.

Spočítáme si pořádně, že úprava (3) nemění množinu řešení lineárního systému

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m. \end{array} \tag{1.7}$$

Řekněme, že jsme provedli přičtení $c$-násobku $i$-té rovnice k $j$-té. Pak místo $j$-té rovnice v systému vznikne rovnice

$$a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \dots + a_{j,n}x_n + c \cdot (a_{i,1}x_1 + a_{i,2}x_2 + \dots + a_{i,n}x_n) = b_j + c \cdot b_i. \tag{1.8}$$

Abychom ověřili, že množina řešení systému zůstala i po této změně stejná, vezměme nějaké řešení $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ systému (1.7). Protože $j$-tá rovnice je ta jediná změněná, dosadíme do ní řešení $(s_1, \dots, s_n)$ a ověříme, že je jejím řešením stále. Dostaneme

$$a_{j,1}s_1 + a_{j,2}s_2 + \dots + a_{j,n}s_n + c \cdot (a_{i,1}s_1 + a_{i,2}s_2 + \dots + a_{i,n}s_n) = b_j + c \cdot b_i.$$

Jelikož ale $(s_1, \dots, s_n)$ řeší jak $i$-tou, tak $j$-tou rovnici, platí

$$\begin{aligned} a_{i,1}s_1 + a_{i,2}s_2 + \dots + a_{i,n}s_n &= b_i, \\ a_{j,1}s_1 + a_{j,2}s_2 + \dots + a_{j,n}s_n &= b_j \end{aligned}$$

Dosazením do (1.8) vznikne

$$b_j + c \cdot (b_i) = b_j + c \cdot b_i,$$

kterážto rovnice zřejmě platí. Tím máme hotovo, protože jsme ověřili, že jakékoli řešení původního systému je stále řešením modifikovaného systému. ∎

Na elementárních řádkových úpravách je postaven právě Gaußův-Jordanův algoritmus, jak jste měli možnost vidět už na příkladu výše. Formulujeme jej nyní formálně, ale doporučujeme při jeho čtení mít stále na mysli příklad ze začátku podsekce. Jediný případ, který tento příklad nepokrývá a může nastat, je, že například v druhém sloupci a druhém řádku proměnná $x_2$ není (její koeficient je 0). V tomto případě prohodíme druhý řádek s nějakým nižším, ve kterém proměnná $x_2$ je a pokračujeme s eliminací. Pokud v žádném řádku pod druhým proměnná $x_2$ není, nebudeme ji eliminovat (není odkud) a pokračujeme s proměnnou $x_3$.

Gaußův-Jordanův algoritmus

**INPUT**: lineární systém (1.5)

**OUTPUT**: tentýž lineární systém ve tvaru připraveném na zpětnou substituci (tzv. *odstupňovaný* tvar)

V $i$-tém sloupci dělej následující.

(1) Najdi $k \geq i$ takové, že $a_{k,i} \neq 0$ (tj. v $k$-té rovnici „je“ proměnná $x_i$).
- Pokud takové $k$ neexistuje, nic nedělej a pokračuj dalším sloupcem.

(2) Prohoď $i$-tý a $k$-tý řádek.

(3) Pro každé $j > i$ (tedy pro každý řádek pod $i$-tým):
  (a) Spočti $c = -a_{j,i}/a_{i,i}$ (tedy čím musím vynásobit řádek $i$, aby měl u $x_i$ -koeficient u $x_i$ v řádku $j$).
  (b) Přičti $c$-násobek $i$-tého řádku k $j$-tému (tím se zbavím $x_i$ v $j$-tém řádku).

(4) Pokračuj dalším sloupcem.

Po skončení Gaußova-Jordanova algoritmu je lineární systém v tzv. *odstupňovaném tvaru*, což znamená, že každý řádek má méně proměnných než řádek přímo nad ním. Systém v tomto tvaru je připraven na zpětnou substituci, kdy spočteme řešení systému tak, že hodnoty proměnných spočtené v nižších řádcích dosazujeme do řádků vyšších.

Princip Gaußova-Jordanova algoritmu ilustrujeme na ještě jednom příkladě. Spočteme řešení systému

$$\begin{aligned} -x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad &= 0 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 8 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Na začátku algoritmu je $i = 1$, začínáme tedy prvním sloupcem. Najdeme $k \geq 1$ takové, že $a_{k,1} \neq 0$. Jedna možnost je například $k = 4$, tj. čtvrtý řádek má v prvním sloupci něco jiného než 0. Prohodíme první a čtvrtý řádek.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ 2x_1 \quad\quad + x_3 \quad\quad &= 0 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 8 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Nyní budeme pro každé $j > 1$ odčítat $\left(a_{j,1}/a_{1,1}\right)$-násobek prvního řádku od $j$-tého. Pro $j = 2$ je $a_{2,1}/a_{1,1} = 2$, takže odečteme dvojnásobek prvního řádku od druhého. Pro $j = 3$ a $j = 4$ vychází $a_{j,1}/a_{1,1} = 0$, takže nemusíme dělat nic.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 2 \\ -2x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= -4 \\ x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 8 \\ -x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Pokračujeme druhým sloupcem, tedy $i = 2$. Tentokrát je v druhém řádku a druhém sloupci nenulové číslo, takže nemusíme prohazovat nic. Spočteme, že $a_{3,2}/a_{2,2} = -1/2$ a $a_{4,2}/a_{2,2} = 1/2$, takže přičítáme polovinu druhého řádku ke třetímu a odečítáme polovinu druhého řádku od čtvrtého.

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + 2x_3 + \ x_4 &= 2 \\ -2x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= -4 \\ \tfrac{3}{2}x_3 - 3x_4 &= 6 \\ \tfrac{5}{2}x_3 + 2x_4 &= 3 \end{aligned}$$

Konečně, pokračujeme třetím sloupcem. Máme $a_{3,3} \neq 0$, takže nemusíme prohazovat. Spočteme $a_{4,3}/a_{3,3} = 5/3$. Odečteme proto (5/3)-násobek třetího řádku od čtvrtého.

$$\begin{aligned} x_1 + \quad x_2 + 2x_3 + \ x_4 &= 2 \\ -2x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= -4 \\ \tfrac{3}{2}x_3 - 3x_4 &= 6 \\ 7x_4 &= -7 \end{aligned}$$

Nyní je systém v odstupňovaném tvaru a provedeme zpětnou substituci. Z posledního řádku plyne, že $x_4 = -1$. Tuto hodnotu dosadíme za $x_4$ do řádku 3 a spočteme rovnici

$$\frac{3}{2}x_3 - 3 \cdot (-1) = 6,$$

jejímž řešením je $x_3 = 2$. Spočtené hodnoty pro $x_3$ a $x_4$ dosadíme do řádku druhého a vyřešíme rovnici

$$-2x_2 - 3 \cdot 2 - 2 \cdot (-1) = -4.$$

Dostaneme $x_2 = 0$. Konečně, dosazením $x_2$, $x_3$ a $x_4$ do prvního řádku dopočítáme

$$x_1 + 0 + 2 \cdot 2 + (-1) = 2,$$

čili $x_1 = -1$. Řešením systému je čtveřice $(-1, 0, 2, -1)$.

### 1.2.2 Tvar řešení lineárních systémů

V této sekci se nebudeme zabývat tím, jak lineární systémy řešit, ale spíše, jak množiny jejich řešení mohou vypadat. Konkrétně, rádi bychom uměli zobecnit situaci, kterou ilustruje následující systém.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - \ x_4 &= 2 \\ -x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Tento systém **je** v odstupňovaném tvaru, protože druhý řádek „začíná víc napravo“ než první. Ovšem, určitě se nedobereme jednoho konkrétního řešení, neboť z druhého řádku můžeme nanejvýš hodnotu proměnné $x_3$ vyjádřit pomocí proměnné $x_4$ nebo naopak. My budeme takovéto systémy vždy řešit tak, že tu proměnnou, **která je nejvíc nalevo** v daném řádku, nazveme pivotem a zbytek proměnných v řádku (které **nejsou pivoty z nižších řádků**) nazveme volnými proměnnými nebo parametry.

Rozdělení na pivoty a volné proměnné v systému (1.10) vypadá takto:

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - \ x_4 &= 2 \\ -x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Řešení takových systémů budeme vždy zapisovat tím způsobem, že hodnoty všech pivotů vyjádříme pomocí volných proměnných. Volné proměnné budeme obvykle přeznačovat písmeny $t_1$, $t_2$ atd., abychom je odlišili od pivotů.

Z druhé rovnice systému (1.10) můžeme vyjádřit $x_3$ pomocí $x_4$ jako $x_3 = 3x_4 - 5$. Jak jsme zmiňovali, pro přehlednost označíme volnou proměnnou $x_4$ jako $t_1$. Máme tedy rovnost $x_3 = 3t_1 - 5$. Proměnná $x_2$ je též volná, označíme ji jako $t_2$. Dosazením za $x_3$ a $x_4$ do první rovnice dostaneme

$$2x_1 - t_2 + 3 \cdot (3t_1 - 5) - t_1 = 2.$$

Odtud spočteme, že

$$x_1 = -4t_1 + \frac{1}{2}t_2 + \frac{17}{2}.$$

Řešením systému jsou pročež všechny čtveřice $(-4t_1 + (1/2)t_2 + 17/2, t_2, 3t_1 - 5, t_1)$, kde $t_1$ a $t_2$ jsou libovolná čísla.

Abychom řešení takových systémů uměli zapsat přehledněji, zavedeme si pojmy *vektoru* a *matice*. V příští kapitole se rozhovoříme o jejich geometrickém významu. Zatím pro nás budou pouze představovat pohodlný způsob zápisu.

**Definice 1.2.5** (Matice): *Maticí* $A$ velikosti $m \times n$ nazveme tabulku čísel s $m$ řádky a $n$ sloupci, čili tabulku

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}.$$

Často budeme tabulku výše zapisovat zkráceným způsobem $A = \left(a_{i,j}\right)_{i,j=1}^{m,n}$. Číslům $a_{i,j}$ budeme říkat různě, většinou *vstupy*, *složky* či *souřadnice* matice $A$.

**Definice 1.2.6** (Vektor): Matici s **pouze jedním sloupcem** nazveme *sloupcovým vektorem*. Matici s **pouze jedním řádkem** zase *řádkovým vektorem*. Sloupcové i řádkové vektory budeme značit malými písmeny s šipkou. Například

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

je sloupcový vektor s $n$ složkami.

**Definice 1.2.7** (Operace s vektory): Sloupcové i řádkové vektory můžeme spolu sčítat (mají-li stejně složek) a násobit čísly. Ať

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \text{ a } \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

jsou dva vektory a $r$ je číslo. Pak definujeme

$$\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{pmatrix}$$

a také

$$r \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \begin{pmatrix} rv_1 \\ rv_2 \\ \vdots \\ rv_n \end{pmatrix}.$$

**Poznámka**: Násobení vektorů číslem budeme vždy značit symbolem $\cdot$ jako v případě $r \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$, zatímco běžné násobení čísel vyjádříme absencí symbolu, jako v případě $rv_1$. Časem bude toto rozlišení důležité.

Přeformulujeme pár pojmů z teorie lineárních systémů do maticové podoby. Pro lineární systém

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \dots & + & a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \tag{1.11}$$

označíme

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{b}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \text{ a } \vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Řekneme, že (1.11) je lineární systém s maticí $A$ a vektorem pravé strany $\vec{\boldsymbol{b}}$. Často jej budeme zkráceně zapisovat jako

$$A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}.$$

Smysluplnost tohoto značení vysvětlíme později.

Dále, řekneme, že vektor

$$\vec{\boldsymbol{s}} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

je řešením systému (1.11), když je n-tice $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ jeho řešením ve smyslu Definice 1.2.3.

Zapíšeme řešení příkladného systému (1.10) ve „vektorové podobě“. Sepíšeme-li jednotlivé proměnné do řádků, dostaneme

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{17}{2} - 4t_1 + \frac{1}{2}t_2 \\ x_2 &= t_2 \\ x_3 &= -5 + 3t_1 \\ x_4 &= t_1. \end{aligned}$$

Navíc zápis upravíme tak, aby každá volná proměnná byla ve svém vlastním sloupci.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{17}{2} - 4t_1 + \frac{1}{2}t_2 \\ x_2 &= \qquad\qquad\quad t_2 \\ x_3 &= -5 + 3t_1 \\ x_4 &= \qquad\ \ t_1 \end{aligned}$$

Abychom viděli, kde se v takovém zápisu schovávají ony vektory, doplníme prázdná místa nulami a zvýrazníme koeficienty.

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{17}{2} + -4t_1 + \frac{1}{2}t_2 \\ x_2 &= \ \ 0 + \ \ 0t_1 + 1t_2 \\ x_3 &= -5 + \ \ 3t_1 + 0t_2 \\ x_4 &= \ \ 0 + \ \ 1t_1 + 0t_2 \end{aligned}$$

Položíme

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{\boldsymbol{v_1}} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ a } \vec{\boldsymbol{v_2}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teď můžeme napsat řešení systému (1.10) jako

$$\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{p}} + t_1 \cdot \vec{\boldsymbol{v_1}} + t_2 \cdot \vec{\boldsymbol{v_2}}.$$

Všimněme si, že vektor $\vec{\boldsymbol{p}}$ je jedním konkrétním řešením systému (1.10), které dostaneme, když za volné proměnné dosadíme 0. Tvrdíme, že množinu řešení **každého** lineárního systému lze vyjádřit tímto způsobem.

**Věta 1.2.1** (Tvar řešení lineárního systému): Množina řešení systému (1.5) má tvar

$$\{\vec{\boldsymbol{p}} + t_1 \cdot \vec{\boldsymbol{v_1}} + t_2 \cdot \vec{\boldsymbol{v_2}} + \ldots + t_k \cdot \vec{\boldsymbol{v_k}}\},$$

kde $\vec{\boldsymbol{p}}$ je jedno konkrétní řešení a $t_1, t_2, \ldots, t_k$ jsou volné proměnné.

K důkazu věty 1.2.1 si pomůžeme malým obchvatem. Totiž, budeme se nejprve soustředit na lineární systémy, které mají na pravé straně samé nuly. Tvar množiny řešení takových systémů je jednodušší popsat z toho důvodu, že n-tice $(0, 0, \ldots, 0)$ je **vždy** jedním konkrétním řešením. Tyto systémy nazveme *homogenní*.

**Definice 1.2.8** (Homogenní systém): Lineární systém $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{b}}$ nazveme *homogenním*, když

$$\vec{\boldsymbol{b}} = \vec{\boldsymbol{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

čili jeho pravou stranou je vektor samých nul.

**Tvrzení 1.2.2** (Tvar řešení homogenního systému): Každý homogenní systém $A\vec{\boldsymbol{x}} = \vec{\boldsymbol{0}}$ má množinu řešení ve tvaru

$$\{t_1 \cdot \vec{v_1} + t_2 \cdot \vec{v_2} + \dots + t_k \cdot \vec{v_k}\}, \tag{1.12}$$

kde $t_1, \dots, t_k$ jsou volné proměnné a $\vec{v_1}, \dots, \vec{v_k}$ jsou vhodné vektory koeficientů.

*Důkaz*: Tvrzení dokážeme podobným způsobem, jako bychom homogenní systém řešili. Totiž, nejprve použijeme Gaußův-Jordanův algoritmus, a dostaneme homogenní systém

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n &= 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n &= 0 \\ \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad &\vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \dots + a_{m,n}x_n &= 0 \end{aligned}$$

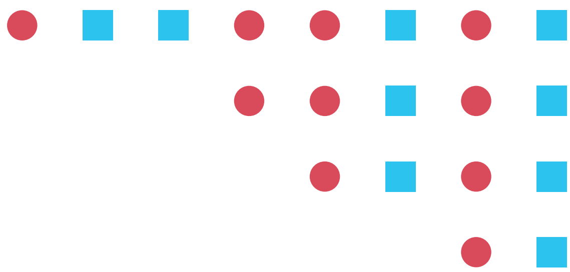
do odstupňovaného tvaru. Z odstupňovaného tvaru dokážeme totiž přesně vyčíst, které proměnné jsou volné a které jsou pivoty. Konkrétně, připomínáme, že pivoty jsou vždy proměnné s prvním nenulovým koeficientem v každém řádku anebo pivoty z řádků pod ním. Všechny ostatní proměnné jsou volné. Pro představu vizte obrázek 8.

V tomto tvaru provedeme zpětnou substituci. To znamená, že vyjádříme pivota z posledního řádku (tam je jen jeden) pomocí volných proměnných z posledního řádku. Dosadíme za téhož pivota do řádku výše. Tím získáme rovnici, v níž vystupují pouze volné proměnné a nejlevější pivot v tomto řádku. Opět jej vyjádříme pomocí volných proměnných. Takhle postupujeme dále, dokud nevyjádříme pivota v prvním řádku.

Že takový postup je formální, zajišťuje princip matematické indukce (vizte kapitolu A). Totiž, v prvním indukčním kroku zkrátka vyjádříme pivot v posledním řádku pomocí volných proměnných. To jistě lze, jak jsme si již rozmysleli, neb je v posledním řádku pivot pouze jeden.

V druhém indukčním kroku předpokládejme, že se nacházíme v $i$-tém řádku zespoda a všechny pivoty v nižších řádcích jsou již vyjádřeny pomocí volných proměnných. Dosazení za pivoty do tohoto řádku způsobí, že všechny kromě nejlevějšího „zmizí“, neboť jsou vyjádřeny pomocí volných proměnných. Tudíž, i tento jeden pivot můžeme vyjádřit pomocí volných proměnných a jsme hotovi.

Teď už stačí zapsat řešení systému stejným způsobem jako před větou 1.2.1. ■



Obrázek 8: Levá strana lineárního systému v odstupňovaném tvaru. Symboly ■ značí volné proměnné a symboly ● pivoty.

Rozšíříme důkaz tvrzení 1.2.2 na obecné lineární systémy.

*Důkaz věty 1.2.1*: Mějme lineární systém

$$\begin{aligned}
a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\
a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \qquad & \vdots \\
a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

Ať je vektor $\vec{\boldsymbol{p}}$ nějaké jeho řešení. Nejprve ukážeme, že každé řešení umíme zapsat ve tvaru $\vec{\boldsymbol{p}} + \vec{\boldsymbol{h}}$, kde $\vec{\boldsymbol{h}}$ je řešení příslušného homogenního systému (tedy systému se stejnou levou stranou a nulami na straně pravé). To stačí, protože z tvrzení 1.2.2 víme, že $\vec{\boldsymbol{h}}$ je tvaru (1.12).

Ať je tedy $\vec{\boldsymbol{s}}$ nějaké jiné řešení systému. Pak je vektor $\vec{\boldsymbol{s}} - \vec{\boldsymbol{p}}$ řešením homogenního systému. Vskutku, protože jak $\vec{\boldsymbol{s}}$, tak $\vec{\boldsymbol{p}}$, jsou řešeními, platí pro každé $i \leq m$, že

$$\begin{aligned}
a_{i,1}s_1 + a_{i,2}s_2 + \ldots + a_{i,n}s_n &= b_i \\
a_{i,1}p_1 + a_{i,2}p_2 + \ldots + a_{i,n}p_n &= b_i,
\end{aligned}$$

a proto

$$\begin{aligned}
0 = b_i - b_i &= a_{i,1}s_1 + a_{i,2}s_2 + \ldots + a_{i,n}s_n - \left(a_{i,1}p_1 + a_{i,2}p_2 + \ldots + a_{i,n}p_n\right) \\
&= \left(a_{i,1}s_1 - a_{i,1}p_1\right) + \left(a_{i,2}s_2 - a_{i,2}p_2\right) + \ldots + \left(a_{i,n}s_n - a_{i,n}p_n\right) \\
&= a_{i,1}(s_1 - p_1) + a_{i,2}(s_2 - p_2) + \ldots + a_{i,n}(s_n - p_n).
\end{aligned}$$

Stačí tedy zvolit $\vec{\boldsymbol{h}} = \vec{\boldsymbol{s}} - \vec{\boldsymbol{p}}$ a platí $\vec{\boldsymbol{s}} = \vec{\boldsymbol{p}} + \vec{\boldsymbol{h}}$.

Právě jsme dokázali, že každé řešení lineárního systému lze napsat jako $\vec{\boldsymbol{p}} + \vec{\boldsymbol{h}}$. Zbývá se ujistit, že když je naopak vektor $\vec{\boldsymbol{p}}$ řešením systému, pak je řešením i $\vec{\boldsymbol{p}} + \vec{\boldsymbol{h}}$ pro kterékoli řešení $\vec{\boldsymbol{h}}$ homogenního systému. Jelikož $\vec{\boldsymbol{p}}$ je řešením, platí pro každé $i \leq m$

$$a_{i,1}p_1 + a_{i,2}p_2 + \ldots + a_{i,n}p_n = b_i.$$

Taky, protože $\vec{\boldsymbol{h}}$ je řešením **homogenního** systému, spočítáme

$$a_{i,1}h_1 + a_{i,2}h_2 + \ldots + a_{i,n}h_n = 0.$$

Dohromady dostaneme

$$\begin{aligned}
b_i = b_i + 0 &= \left(a_{i,1}p_1 + a_{i,2}p_2 + \ldots + a_{i,n}p_n\right) + \left(a_{i,1}h_1 + a_{i,2}h_2 + \ldots + a_{i,n}h_n\right) \\
&= \left(a_{i,1}p_1 + a_{i,1}h_1\right) + \left(a_{i,2}p_2 + a_{i,2}h_2\right) + \ldots + \left(a_{i,n}p_n + a_{i,n}h_n\right) \\
&= a_{i,1}(p_1 + h_1) + a_{i,2}(p_2 + h_2) + \ldots + a_{i,n}(p_n + h_n),
\end{aligned}$$

takže vektor $\vec{\boldsymbol{p}} + \vec{\boldsymbol{h}}$ opravdu řeší zadaný systém. ■

### 1.2.3 Úlohy na závěr

1) Vyjádřete řešení následujících dvou lineárních systémů ve vektorové podobě (tj. v podobě z věty 1.2.1).

$$\begin{aligned}
3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 1 \\
x_1 - x_2 + x_3 &= 2 \\
5x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 4 \\
x_1 + x_2 + x_3 \phantom{{}+x_4} &= -1
\end{aligned}$$

2) Najděte příklad lineárního systému se **čtyřmi rovnicemi** a **čtyřmi neznámými**, který má
   a) přesně 0 volných proměnných;
   b) přesně 2 volné proměnné.

3) Podle věty 1.2.1 lze vyjádřit množinu řešení lineárního systému pomocí kteréhokoliv konkrétního řešení $\vec{\boldsymbol{p}}$ (tedy ne pouze toho, kde za volné proměnné dosadíme 0). Popište množinu řešení systému

$$\begin{aligned} x_1 - \phantom{3}x_2 \phantom{{}-x_3} + x_4 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \phantom{{}+x_4} &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 4, \end{aligned}$$

pokud zvolené konkrétní řešení je

a) $\vec{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$, b) $\vec{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -7 \\ 10 \end{pmatrix}$, c) $\vec{\boldsymbol{p}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

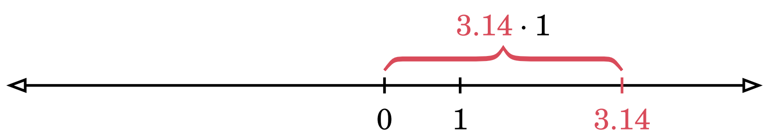
# 2 Lineární geometrie

V této relativně krátké kapitole prozkoumáme geometrické vlastnosti vektorů a lineárních systémů. Ukážeme si, jak se jednoduché lineární systémy dají vizualizovat a dáme geometrický význam pojmům jako pivoty, volné proměnné apod.

Celou dobu budeme pracovat nad množinou reálných čísel, kterou značíme $\mathbb{R}$. Důvod je jednoduchý: reálná čísla jsou tou nejjednodušší číselnou množinou, která umí modelovat souvislý prostor a tím pádem jsou nejvhodnější právě ke geometrické představě.

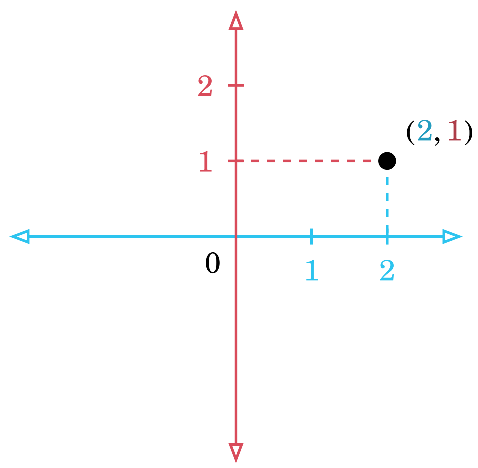
Začneme tím, co vlastně myslíme slovem *prostor*. V matematice si pod prostorem můžeme představovat množinu *bodů* s daným počet směrů pohybu, kterým říkáme *dimense* prostoru. Například, my obýváme třídimensionální prostor, protože v každém bodě se můžeme hýbat nezávisle nahoru/dolu, doleva/doprava a dopředu/dozadu.

Prostor s pouze jediným směrem pohybu je *přímka*. Tu matematicky modelujeme zkrátka jako množinu reálných čísel $\mathbb{R}$. Totiž, stačí si na přímce vybrat dva význačné body: bod 0 a bod 1. Jakoukoli jinou vzdálenost na přímce pak můžeme vyjádřit zkrátka jako násobek vzdálenosti mezi body 0 a 1. Hýbeme-li se od bodu 0 doleva, bude tato vzdálenost záporná, a hýbeme-li se doprava, bude kladná.




Obrázek 9: Přímka jako množina reálných čísel.

S vyšším počtem dimensí zkrátka zvyšujeme počet přímek, na kterých měříme vzdálenosti. Dvoudimensionální prostor získáme jako dvojici přímek, které obvykle kreslíme vzájemně kolmé (ale není to nutné) – jedna přímka pro pohyb doleva a doprava, druhá pro pohyb nahoru a dolu. Každé místo, kam se těmito dvěma směry pohybu umím dostat vyjádřím dvojicí čísel, tzv. souřadnicemi, která udává vzdálenost ušlou po těchto dvou přímkách zvlášť. Když jednu přímku modelujeme jako $\mathbb{R}$, snad není překvapivé, že dvojici přímek budeme modelovat jako součin $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tedy jako množinu všech dvojic reálných čísel. Zápis $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ obvykle zkracujeme na $\mathbb{R}^2$.




Obrázek 10: Dvoudimensionální prostor (rovina) jako množina $\mathbb{R}^2$.

Obecně, prostor s $n$ různými směry (kde $n$ je jakékoliv přirozené číslo) budeme representovat jako množinu $\mathbb{R}^n$, čili jako $n$-tice reálných čísel.

Přestože intuitivně vnímáme vektory jako šipky mezi body, formálně není mezi vektorem z počátku do nějakého bodu a tímto bodem vlastně žádný rozdíl. Obojí jsou jen $n$-tice čísel. Tedy, jelikož my se budeme v dalším textu zabývat hlavně vektory, prostor $\mathbb{R}^n$ pro nás bude množinou všech vektorů **začínajících** v počátku. Formálně,

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix} \mid r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R} \right\}.$$

## 2.1 Geometrický pohled na řešení lineárních systémů

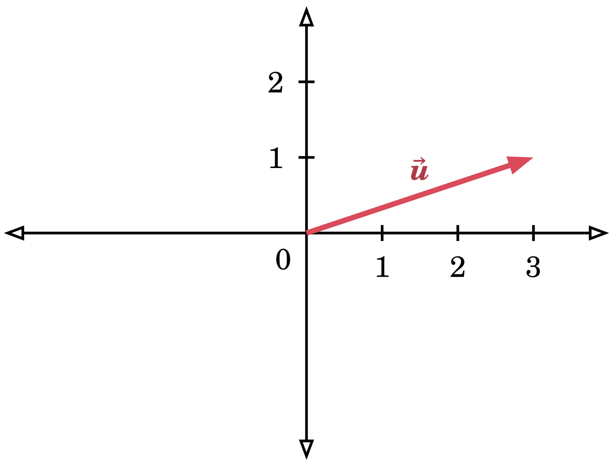
Nyní se podíváme na to, jak si lze v prostoru $\mathbb{R}^n$ visualisovat množiny řešení lineárních systémů a vlastně i systémy samotné. V celé sekci budeme prvky $\mathbb{R}^n$ vnímat buď jako body, nebo jako vektory, podle toho, který pohled se více hodí. Jak jsme uvedli v úvodu do kapitoly, formálně se jedná o tytéž objekty.

Podle věty 1.2.1 má lineární systém množinu řešení tvaru

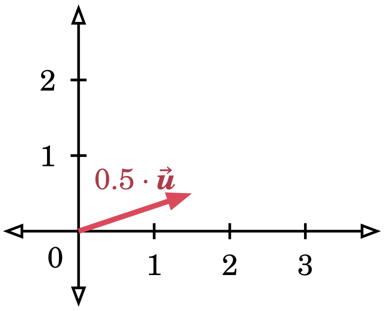
$$\{\vec{\boldsymbol{p}} + t_1 \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_1 + t_2 \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_2 + \dots + t_k \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_k\},$$

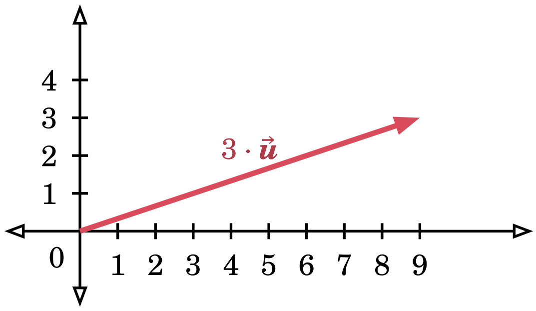
kde $t_1, \dots, t_k$ jsou volné proměnné. Abychom si mohli tuto množinu „nakreslit“, musíme nejprve pochopit, jak lze geometricky vyjádřit násobení vektorů čísly a sčítání vektorů.

Posuňme se proto do dvou dimensí (v jedné dimensi jsou vektory totéž, co čísla) a uvažme vektor $\vec{\boldsymbol{u}} = \binom{3}{1}$. To je vektor se začátkem v bodě $(0,0)$ a koncem v bodě $(3,1)$. Nakreslíme si jej jako šipku na obrázku níže.

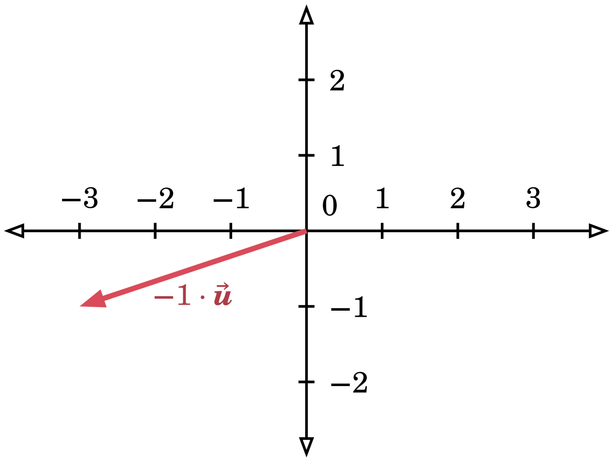



Násobení vektoru $\vec{\boldsymbol{u}}$ **kladným** číslem se projevuje jeho **prodloužením** nebo **zkrácením**. Velmi přirozeně, vektor $0.5 \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$ je přesně o polovinu kratší než $\vec{\boldsymbol{u}}$ a vektor $3 \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$ je přesně třikrát delší, jak vidno níže.

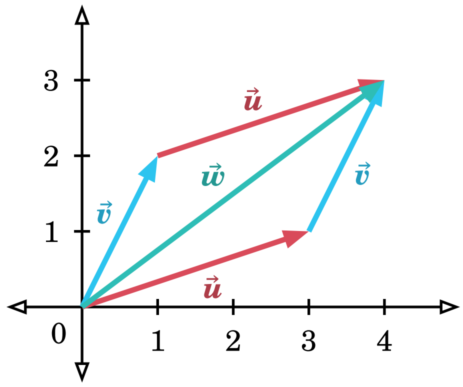


Násobení **záporným** číslem se navíc projevuje otočením směru.




Sčítání vektorů lze charakterisovat slovy „nejdřív jedním směrem, pak druhým“. Tedy, součet vektorů je vektor, který končí v bodě, kam se dostaneme, když nejprve sledujeme jeden z vektorů a pak druhý (na pořadí pochopitelně nezáleží, výsledek je stejný). Na obrázku můžete vidět vektor $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$, kde $\vec{u} = \binom{3}{1}$ a $\vec{v} = \binom{1}{2}$.




Nyní si již můžeme představit, jak vypadá množina řešení lineárního systému. Začněme příkladem ve 2D. Řešením systému o dvou rovnicích a dvou neznámých je většinou pouze bod, takže tento případ přeskočíme. Uvažme místo toho systém o rovnici *jedné*.

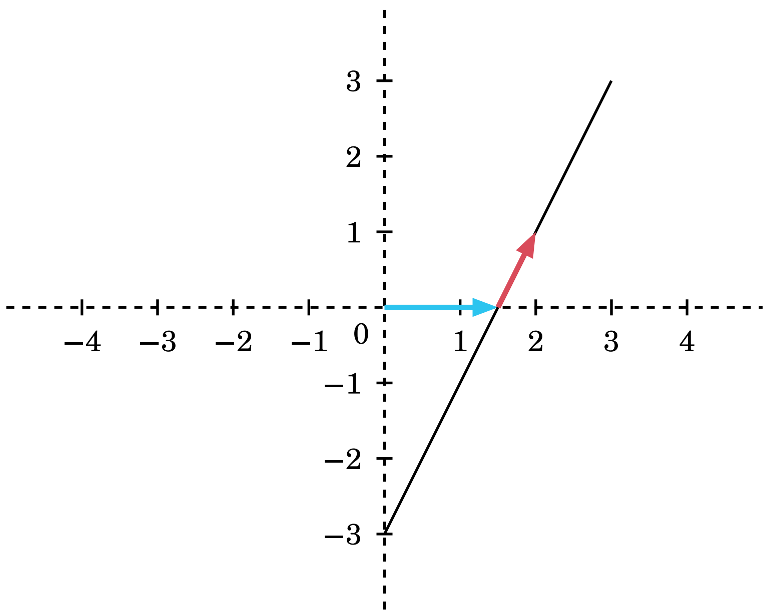
$$2x_1 - x_2 = 3$$

Jistě tušíte, že „grafem“ takové rovnice je přímka. Tento fakt si teď umíme odvodit přes vektory a znalost tvaru řešení takové rovnice.

Označíme $x_2$ jako volnou proměnnou $t_1$ a spočítáme $x_1 = (3 + t_1)/2$. Když toto řešení přepíšeme do tvaru z věty 1.2.1, dostaneme

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Odtud vidíme, že řešením rovnice budou všechny vektory, které umíme získat jako součet vektoru $\binom{3/2}{0}$ s libovolným násobkem vektoru $\binom{1/2}{1}$. Protože všechny násobky vektoru $\binom{1/2}{1}$ tvoří přímku s přesně tímto směrem, je množinou řešení rovnice vlastně přímka se směrem $\binom{1/2}{1}$ posunutá od počátku o vektor $\binom{3/2}{0}$ jako na obrázku níže.

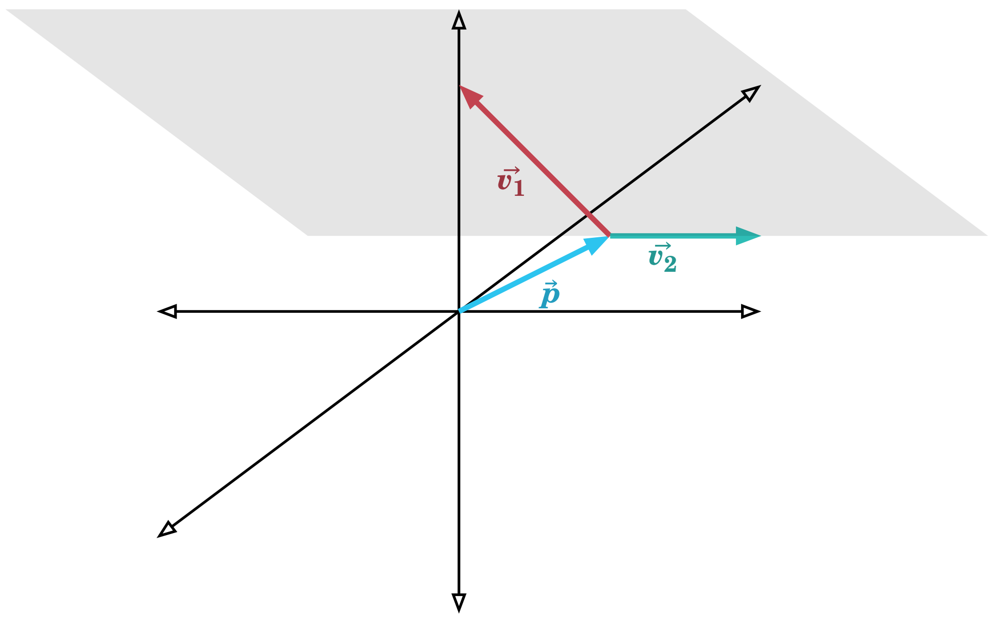



Do více dimensí se tento pohled na množiny řešení přenáší snadno. Totiž, mají-li vektory $\vec{\boldsymbol{p}}, \vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_k$ třeba $n$ reálných složek, pak je množina

$$\{\vec{\boldsymbol{p}} + t_1 \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_1 + \ldots + t_k \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_k\}$$

rovná $k$-dimensionální plocha – tedy vlastně prostor s $k$ „směry pohybu" určenými vektory $\vec{\boldsymbol{v}}_1, \ldots, \vec{\boldsymbol{v}}_k$ – posunutá o vektor $\vec{\boldsymbol{p}}$ od počátku.

Pochopitelně, pro dimensi větší dvěma se takový prostor nekreslí lehko. Nakreslíme si pročež ještě množinu $\{\vec{\boldsymbol{p}} + t_1 \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_1 + t_2 \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_2\}$ uvnitř $\mathbb{R}^3$, která popisuje řešení obecného systému o třech neznámých a jedné rovnici. Je jím právě dvoudimensionální rovina určená vektory $\vec{\boldsymbol{v}}_1$ a $\vec{\boldsymbol{v}}_2$ posunutá o vektor $\vec{\boldsymbol{p}}$.



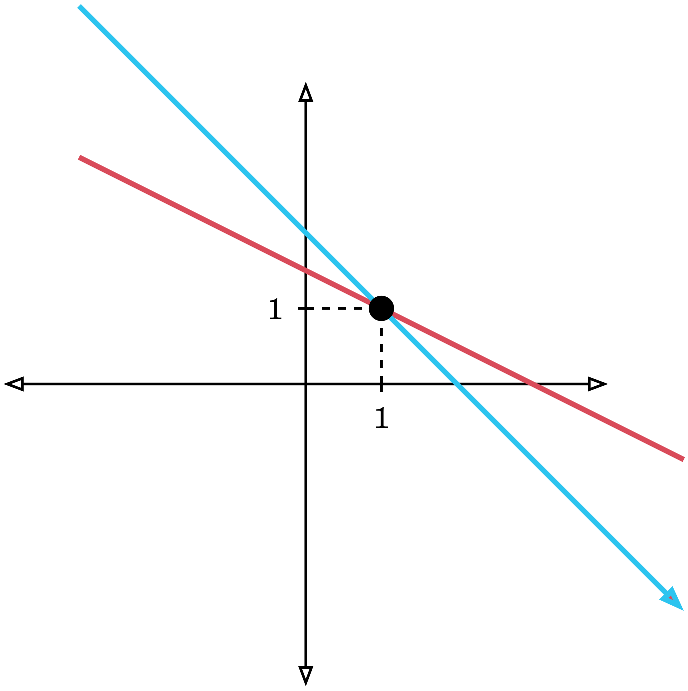

Předchozí odstavec nám pomůže nahlížet geometricky nejen na množiny řešení lineárních systémů, ale i na systémy samotné. Totiž, množina řešení **jedné** lineární rovnice o $n$ neznámých je – jak jsme právě viděli – $(n-1)$-dimensionální rovina v $\mathbb{R}^n$, protože má $n-1$ volných proměnných. Takže, počítáme-li systém o $m$ rovnicích v $n$ proměnných, hledáme vlastně průnik právě $m$ $(n-1)$-dimensionálních rovin. V obecném případě (roviny nejsou rovnoběžné ani stejné) je průnik dvou $(n-1)$-dimensionálních rovin rovina dimense $n-2$. Jako příklady uvažte bod (dimense 0) jako průnik dvou přímek (dimense 1) nebo přímku jako průnik dvou rovin (dimense 2).

Nejčastěji (když se žádné roviny neshodují a nejsou rovnoběžné) bude řešením lineárního systému o $n$ proměnných a $m$ rovnicích rovina dimense $n - m$. Z toho též plyne, že má-li takový systém více rovnic než proměnných, nebude mít řešení (jinak by totiž dimense výsledného objektu byla záporná).

Ukažme si právě diskutovaný pohled na příkladu lineárního systému

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 3 \\ -x_1 - \phantom{2}x_2 &= -2 \end{aligned}$$

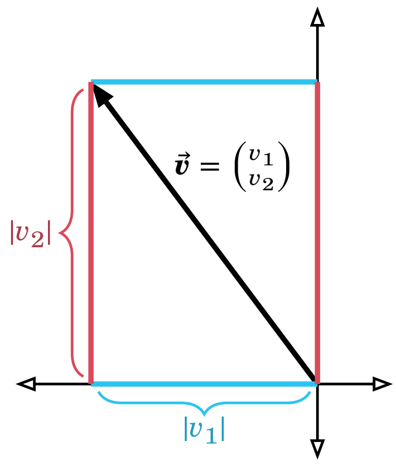
Z toho, co víme, je množinou řešení každé z rovnic přímka v rovině (2D prostoru). Pokud se nejedná o stejné ani rovnoběžné přímky, pak bude jejich průnikem rovina dimense 0, tj. **bod**. Ten představuje geometrickou paralelu jednoprvkové množiny řešení systému bez volných proměnných (v množině řešení je pouze onen vektor $\vec{\boldsymbol{p}}$ a žádné vektory volných proměnných). Tento systém je vyobrazen níže.




## 2.2 Norma vektoru

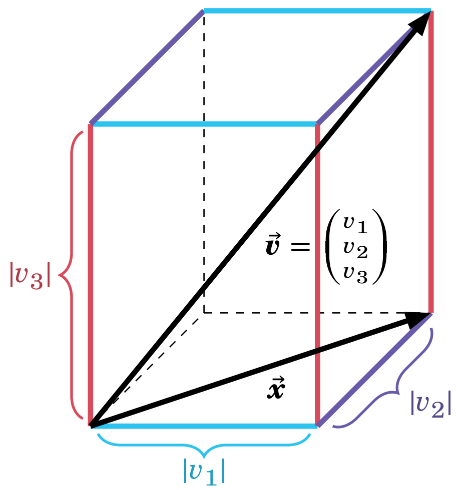
Pokračujeme s geometrickou interpretací vektorů jako šipek v prostoru. První možnost, jak určit vektor, je specifikovat jeho začátek (my zásadně používáme počátek soustavy souřadnic) a konec. Takto jsme ztotožnili body s vektory, tedy vlastně vektory s jejich konci. Ovšem, další přirozenou alternativou, jak definovat „šipku“, je udat její **velikost** a **směr**. Jelikož směr vektoru je ošemetná záležitost (lze definovat jen *relativně* vůči ostatním vektorům). Velikost (či formálně *norma*) vektoru je však popsatelný výrazně snadněji.

Začneme pozorováním: velikost šipky z bodu $(0,0)$ do bodu $(v_1, v_2)$ je přesně délka uhlopříčky obdélníku se stranami $|v_1|$ a $|v_2|$ (musíme psát absolutní hodnoty, bo souřadnice $v_1$ a $v_2$ mohou být záporné). Vizte obrázek.




Tu spočteme snadno přes Pythagorovu větu. Podle ní je délka odvěsny pravoúhlého trojúhelníku s odvěsnami $|v_1|$ a $|v_2|$ rovna $\sqrt{|v_1|^2 + |v_2|^2}$. Pochopitelně, při sudé mocnině vždy vychází kladné číslo, můžeme tedy absolutní hodnoty zanedbat a psát zkrátka $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Normu vektoru $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ označíme jako $\|\vec{v}\|$. Právě jsme ukázali, že ve 2D platí rovnost $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Ve více dimensích můžeme normu spočítat podobně. Totiž, obecně v $\mathbb{R}^n$ je velikost šipky s počátkem v bodě $(0, 0, \ldots, 0)$ a koncem v bodě $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ rovna délce tělesové uhlopříčky $n$-dimensionálního kvádru se stranami $|v_1|, |v_2|, \ldots, |v_n|$. To je samozřejmě obtížné si představit. Podívejme se ještě na případ tří dimensí. Spočítáme délku tělesové uhlopříčky kvádru se stranami délek $|v_1|, |v_2|$ a $|v_3|$.




Budeme muset použít Pythagorovu větu dvakrát: nejprve na obdélník s uhlopříčkou $\vec{x}$ a stranami $|v_1|$ a $|v_2|$ a potom na obdélník s uhlopříčkou $\vec{v}$ a stranami $\vec{x}$ a $|v_3|$.

První výpočet dá $\|\vec{x}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. Potom

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{x}\|^2 + v_3^2} = \sqrt{\left(\sqrt{v_1^2 + v_2^2}\right)^2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Snad trochu překvapivě vyšla norma vektoru $\|\vec{v}\|$ opět jako druhá odmocnina součtu druhých mocnin jeho souřadnic. Aniž budeme tento fakt dokazovat, můžeme stejný výpočet provést i s tělesovou uhlopříčkou $n$-dimensionálního kvádru (akorát musíme Pythagorovu větu použít $(n-1)$-krát). Právě provedenou úvahu shrneme v definici normy vektoru.

**Definice 2.2.1** (Norma vektoru): Ať $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Definujeme **normu** vektoru $\vec{v}$ jako číslo

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \ldots + v_n^2}.$$

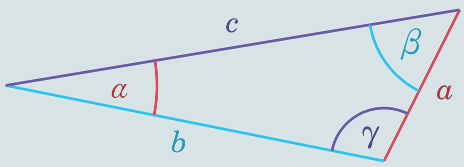
## 2.3 Směr vektoru

Na rozdíl od velikosti vektoru, nelze směr vektoru určit absolutně. Důvod je jednoduchý: když stojím před vámi a upažím pravou ruku, z vašeho pohledu ukazuji *doleva*, zatímco ze svého *doprava*. Kam nějaká šipka vede můžeme určit pouze relativně k jiným bodům či vektorům. Umíme vlastně říci jen, „jak moc vede druhá šipka jinam než první“.

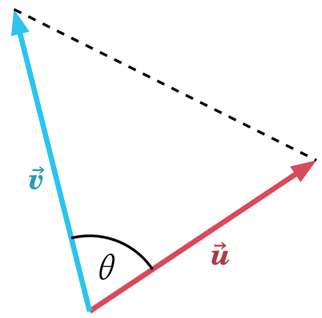
Toto zjištění vede přirozeně na pojem *úhlu mezi vektory*. Podobně jako velikost, i k definici úhlu mezi vektory nám pomůže visualisace. Začneme v dimensích dvou. Spočítat úhel mezi dvěma šipkami můžeme pomocí cosinové věty. Bez důkazu si ji připomeneme.

**Věta 2.3.1** (Cosinová věta): V trojúhelníku se stranami $a, b, c$ a úhly $\alpha, \beta, \gamma$ platí rovnost

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$




Uvažme nyní dva vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Spojíme-li konce těchto vektorů úsečkou, dostaneme trojúhelník jako na obrázku 11.




Obrázek 11: Úhel mezi vektory.

Tečkovaná strana na obrázku 11 má stejný směr a velikost jako vektor $\vec{v} - \vec{u}$ (akorát posunutý na konec vektoru $\vec{u}$), protože $(\vec{v} - \vec{u}) + \vec{u} = \vec{v}$. Podle cosinové věty platí

$$\|\vec{v} - \vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\,\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta. \tag{2.13}$$

Tuto rovnost upravíme do příjemnější podoby. Označíme si souřadnice vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$ jako $u_1, u_2$ a $v_1, v_2$. Máme

$$\begin{aligned} \|\vec{v} - \vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 &= (v_1 - u_1)^2 + (v_2 - u_2)^2 - u_1^2 - u_2^2 - v_1^2 - v_2^2 \\ &= v_1^2 - 2u_1v_1 + u_1^2 + v_2^2 - 2u_2v_2 + u_2^2 - u_1^2 - u_2^2 - v_1^2 - v_2^2 \\ &= -2u_1v_1 - 2u_2v_2. \end{aligned}$$

Dosazením do rovnosti (2.13) pak vyjde

$$-2u_1v_1 - 2u_2v_2 = -2\,\|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\|\cos\theta$$
$$u_1v_1 + u_2v_2 = \|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\|\cos\theta.$$

Tím získáváme vyjádření úhlu mezi vektory ve 2D jako

$$\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2}{\|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\|} \tag{2.14}$$

Co ale úhel mezi vektory v libovolné dimensi? Snad překvapivě, dokonale stejný vzoreček funguje i tam. Totiž, jakékoli dva vektory leží na nějaké dvoudimensionální rovině, jak jsme si rozmysleli v úvodu do této kapitoly. Úhel mezi nimi pak definujeme právě na této rovině, kde si můžeme dokreslit i onen pomocný trojúhelník. Pak můžeme použít cosinovou větu a dostat úplně stejnou rovnost jako (2.13). Akorát, v tomto případě mají vektory $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$ přesně $n$ souřadnic, takže výsledný vzoreček vypadá takto:

$$\cos\theta = \frac{u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 + \ldots + u_nv_n}{\|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\|}. \tag{2.15}$$

Má to však malý háček. Jak je vám nejspíš známo, funkce cos nabývá hodnot pouze z intervalu $[-1, 1]$. Aby byl úhel mezi vektory správně definován, musíme si být naprosto jisti, že pravá strana ve vzorci (2.15) je vždy mezí $-1$ a $1$. K tomu si pomůžeme dvěma tvrzeními. První z nich formalisuje naši geometrickou intuici, že jakákoli dvojice vektorů vždy určuje trojúhelník v rovině. Totiž, mám-li tři úsečky délek $a$, $b$ a $c$, pak tyto mohou tvořit trojúhelník jedině v případě, že součet libovolných dvou je větší, než ta třetí, např. $a + b > c$. Ověříme, že toto platí, když oněmi úsečkami jsou právě vektory v prostoru.

Ještě předtím si však zavedeme jednu zajímavou operaci na vektorech, která pro nás zatím bude jen pohodlným značením. Povíme si pár jejích vlastností a časem se dostaneme i ke geometrické interpretaci.

**Definice 2.3.1** (Skalární součin): Pro libovolné dva vektory $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$ definujeme

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = u_1v_1 + u_2v_2 + \ldots + u_nv_n,$$

kde $u_i$, resp. $v_i$, jsou souřadnice vektoru $\vec{\boldsymbol{u}}$, resp. $\vec{\boldsymbol{v}}$.

Jistě vidíte souvislost s právě odvozeným vzorečkem (2.15). Pomocí skalárního součinu jej můžeme vyjádřit snadněji jako

$$\cos\theta = \frac{\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}}{\|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\|}.$$

Skalární součin má pár základních vlastností, které nyní shrneme a důkaz necháme jako úlohu na závěr.

**Lemma 2.3.1** (Vlastnosti skalárního součinu): Ať $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}, \vec{\boldsymbol{w}} \in \mathbb{R}^n$ jsou tři vektory.

(1) Skalární součin je *asociativní*, tj. $(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}) \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}})$.
(2) Skalární součin je *komutativní*, tj. $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$.
(3) Skalární součin je distributivní, tj. $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot (\vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{w}}) = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}}$.
(4) Normu vektoru lze zapsat pomocí skalárního součinu jako $\|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2 = \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$.

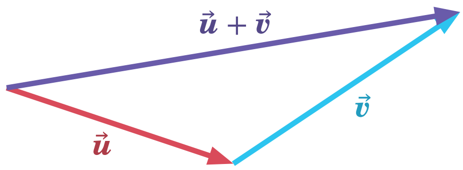
*Důkaz*: Ponechán jako úloha. ■

**Tvrzení 2.3.1** (Trojúhelníková nerovnost): Pro libovolné dva vektory $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$ platí nerovnost

$$\|\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}\| \leq \|\vec{\boldsymbol{u}}\| + \|\vec{\boldsymbol{v}}\|, \tag{2.16}$$

přičemž rovnost nastává jedině v případě, že $\vec{\boldsymbol{u}}$ je násobek $\vec{\boldsymbol{v}}$, čili $\vec{\boldsymbol{u}} = c \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$ pro nějaké $c \in \mathbb{R}$. To znamená, že leží $\vec{\boldsymbol{u}}$ i $\vec{\boldsymbol{v}}$ leží na jedné přímce.

Důvod přízviska „trojúhelníková“ vysvětluje obrázek 12.




Obrázek 12: Trojúhelníková nerovnost

*Důkaz tvrzení 2.3.1*: Protože jsou obě strany rovnosti kladná čísla, můžeme je umocnit na druhou a dokazovat, že

$$\|\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}\|^2 \leq (\|\vec{\boldsymbol{u}}\| + \|\vec{\boldsymbol{v}}\|)^2.$$

Díky vlastnostem skalárního součinu můžeme tuto nerovnost přepsat jako

$$\begin{gathered}(\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}) \cdot (\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}) \leq \|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2 + 2\,\|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\| + \|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2 \\ \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \leq \vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}} + 2\,\|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\| + \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}.\end{gathered}$$

Po zkrácení $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$ a $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$ a použití rovnosti $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{u}}$ nám zůstane

$$2(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}) \leq 2\,\|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\|. \tag{2.17}$$

Vynásobíme obě strany nerovnosti kladnými čísly $\|\vec{\boldsymbol{u}}\|$ a $\|\vec{\boldsymbol{v}}\|$ a mírně upravíme, abychom dostali

$$2(\|\vec{\boldsymbol{v}}\|\,\vec{\boldsymbol{u}}) \cdot (\|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\vec{\boldsymbol{v}}) \leq 2\,\|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2.$$

Přesuneme vše na jednu stranu a dále upravíme

$$\begin{aligned}0 &\leq \|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2 - 2(\|\vec{\boldsymbol{v}}\|\,\vec{\boldsymbol{u}}) \cdot (\|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\vec{\boldsymbol{v}}) + \|\vec{\boldsymbol{u}}\|^2\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\|^2 \\ 0 &\leq (\|\vec{\boldsymbol{v}}\|\,\vec{\boldsymbol{u}} - \|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\vec{\boldsymbol{v}}) \cdot (\|\vec{\boldsymbol{v}}\|\,\vec{\boldsymbol{u}} - \|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\vec{\boldsymbol{v}}) \\ 0 &\leq \|\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\|\,\vec{\boldsymbol{u}} - \|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\vec{\boldsymbol{v}}\,\|^2.\end{aligned}$$

Číslo napravo je druhá mocnina, tedy jistě kladné. Tím jsme dokázali, že nerovnost opravdu vždy platí. Důkaz faktu, že rovnost v (2.16) nastane, když $\vec{\boldsymbol{u}}$ je násobek $\vec{\boldsymbol{v}}$, necháme jako úlohu na závěr. ■

Pomocí trojúhelníkové nerovnosti dokážeme, že úhel mezi vektory je správně definován. Na to se musíme ujistit, že číslo $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} / \|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\|$ je vždy mezi $-1$ a $1$, neboli v absolutní hodnotě menší než $1$. To nastane právě tehdy, když $|\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}| \leq \|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\|$. Této nerovnosti se přezdívá *Cauchyho-Schwarzova* a je jednou z nejdůležitějších nerovností v matematice vůbec.

**Věta 2.3.2** (Cauchyho-Schwarzova nerovnost): Ať $\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$ jsou vektory. Pak

$$|\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}| \leq \|\vec{\boldsymbol{u}}\|\,\|\vec{\boldsymbol{v}}\|. \tag{2.18}$$

*Důkaz*: Je-li číslo $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}$ kladné, pak již víme, že nerovnost

$$\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \leq \|\vec{\boldsymbol{u}}\| \, \|\vec{\boldsymbol{v}}\|$$

platí, neboť to je přesně nerovnost, ke které jsme došli v rámci důkazu tvrzení 2.3.1, konkrétně nerovnost (2.17). Předpokládejme tedy, že $\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}} < 0$. Pak

$$|\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}| = -(\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}) = (-\vec{\boldsymbol{u}}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}},$$

kde druhá rovnost platí díky vlastnostem skalárního součinu. Vlastně tedy stačí nahradit vektor $\vec{\boldsymbol{u}}$ za $-\vec{\boldsymbol{u}}$. Protože $\|-\vec{\boldsymbol{u}}\| = \|\vec{\boldsymbol{u}}\|$ dostaneme, že

$$|\vec{\boldsymbol{u}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}| = (-\vec{\boldsymbol{u}}) \cdot \vec{\boldsymbol{v}} \leq \|-\vec{\boldsymbol{u}}\| \, \|\vec{\boldsymbol{v}}\| = \|\vec{\boldsymbol{u}}\| \, \|\vec{\boldsymbol{v}}\|,$$

takže nerovnost platí i v tomto případě. ■

# A Matematická indukce

Matematická indukce je důkazová technika použitelná na jakákoli tvrzení související s přirozenými čísly (zkrátka jakákoli tvrzení, kde máme nějaký „počet“ věcí). Řekněme, že dokazujeme nějaké tvrzení $T$. Jsou-li splněny následující dvě podmínky:

- $T$ platí pro nějaké „nejmenší“ přirozené číslo $n_0 \in \mathbb{N}$;
- platí-li $T$ pro $n > n_0$, pak platí též pro $n + 1$,

pak tvrzení $T$ platí pro všechna přirozená čísla.

Jeho princip je v zásadě přímočarý. Totiž, předpokládejme, že tyto dvě podmínky platí. Víme, že $T$ platí pro $n_0$. Ovšem, z druhé podmínky plyne, že když platí $T$ pro $n_0$, pak platí taky pro $n_0 + 1$. Ale, když $T$ platí pro $n_0 + 1$, pak platí taky pro $n_0 + 2$ (opět z druhé podmínky). Takto můžeme pokračovat libovolně dlouho, takže tvrzení $T$ opravdu platí pro každé přirozené číslo větší než $n_0$.

Jako příklad užití matematické indukce dokážeme jedno tvrzení.

**Tvrzení A.1**: Pro každé $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ platí rovnost

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

*Důkaz*: Nejprve ukážeme, že je tvrzení pravdivé pro $n = 1$. Pak je na levé straně zkrátka číslo 1 a na pravé $1 \cdot (1 + 1)/2 = 1$. Tedy rovnost platí.

Nyní předpokládejme, že platí rovnost

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

a dokazujme, že platí též rovnost

$$1 + 2 + \ldots + n + (n + 1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

(tj. tatáž rovnost pro číslo $n + 1$). Nuže, na levé straně máme výraz $1 + 2 + \ldots + n$, o kterém předpokládáme, že je roven $n(n + 1)/2$. Dosaďme tedy za něj, abychom dostali

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Stačí rozpočítat obě strany. Na levé straně máme

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2},$$

zatímco na pravé

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2},$$

takže se obě strany rovnají a máme dokázáno. ■