Náhodné cesty
ve 2D a ve 3D

Traduje se, že japonský matematik Kakutani Shizuo řekl v 70. letech,

> *„Opilý muž se vždy vrátí domů, ale opilý pták může bloudit navždy.“*

Za tímhle rčením je schována pravděpodobnostní úloha. Řekněme, že opilý muž vyjde z domu a, bo je opilý, chodí náhodně. Slovo 'náhodně' tu chápeme v tom smyslu, že po každém kroku, který je pro jednoduchost vždy stejně dlouhý (i když to na výsledku úlohy nic nemění), pokračuje s pravděpodobností 1/4, nebo 25 %, v jednom ze 4 směrů. Opilý pták, bo létá, volí po každém kroku z 6 různých směrů.

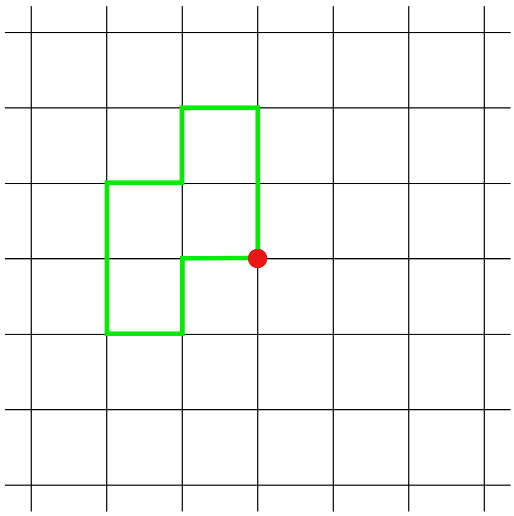
Tvrdíme, že opilý muž se po nějakém počtu učiněných kroků vždycky vrátí zpět do svého domu, ale ptákovi se může stát, že už cestu do hnízda zpátky nikdy nenajde.

Myslím si, že tohle je jedna z úloh, kdy naše přirozená lidská intuice selhává. Je to pravděpodobně proto, že nám lidem obecně schází intuice pro 'nekonečné' věci. Cílem tohoto (snad krátkého) textu je spočítat, že pronesené tvrzení je pravdivé.

Trocha formalismu. Budeme předpokládat, že opilá zvířata (ano, toto slovo zahrnuje i druh Člověka moudrého) se pohybují v reálném prostoru (buď 2D nebo 3D) a jedním *krokem* je vždy posun přesně o 1 ve směru souřadnicových os. *Cestou* délky k ve 2D budeme myslet **konečnou** posloupnost přesně k učiněných kroků. Cesta je pak *náhodná*, pokud má náhodnou délku a směr každého dalšího kroku je volen náhodně (ve smyslu prvního odstavce).

Teď můžeme úlohu přeformulovat tak, že pravděpodobnost toho, že se opilý muž vrátí, když chodí náhodně, je 1, nebo 100 %, a pravděpodobnost toho, že se opilý pták vrátí, když bude létat náhodně, je **ostře** menší než 100 %.

Pravděpodobnost toho, že se stane nějaká skutečnost/jev X, budu psát jako $\mathbf{P}(X)$. Symbolicky, pravděpodobnost návratu můžu psát třeba jako $\mathbf{P}(\text{návrat})$.



Obrázek 1: Náhodná cesta ve 2D se začátkem v počátku.

Pamatujte, že pravděpodobnost návratu **nezávisí** na volbě cesty! Naopak, pravděpodobnost návratu vyjadřuje, jakou šanci mám, že se vrátím, když zvolím nějakou náhodnou cestu.

Tuhle pravděpodobnost potřebujeme nějak hezky vyjádřit.

V tom nám brání následující pozorování. Hodnota $\mathbf{P}(\text{návrat})$ nerozlišuje mezi cestami, podle toho, kolikrát se vrátí. Cesta, která projde počátkem 50krát je v tomto smyslu stejná jako ta, která se vrátí jednou. Protože cesta, která se vrátí dvakrát, lze rozdělit do dvou cest, každáže z nich se vrátí jednou, budeme chtít úlohu převést na počítání s cestami, které se vrací přesně jednou.

Jako první krok k tomu si definujme náhodnou veličinu (to je pravděpodobnostní termín, stačí si to představovat jako něco, co má při každém 'experimentu' náhodnou hodnotu) V jako 'počet návratů'. Tedy například $\mathbf{P}(V = 4)$ představuje pravděpodobnost, že se vrátím do počátku přesně 4krát.

Jako druhý rok uvážíme tzv. 'střední hodnotu' V, což je velmi nevhodný český název pro údaj, kolikrát očekáváme, že se vrátíme. Pro intuitivní představu slouží následující příklad.

Příklad. Řekněme, že házím kostkou a výsledek hodu sleduje náhodná veličina H. Pak samozřejmě $\mathbf{P}(H = k) = 1/6$ pro každé číslo k od 1 do 6. Je rozumné očekávat, že hodím 1 s pravděpodobností 1/6, 2 s pravděpodobností 1/6 atd. Takže moje střední hodnota bodu bude

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[H] &= 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} \\ &= 1 \cdot \mathbf{P}(H = 1) + 2 \cdot \mathbf{P}(H = 2) + 3 \cdot \mathbf{P}(H = 3) \\ &+ 4 \cdot \mathbf{P}(H = 4) + 5 \cdot \mathbf{P}(H = 5) + 6 \cdot \mathbf{P}(H = 6).\end{aligned}$$

Když to spočtete, vyjde vám $\mathbf{E}[H] = 3.5$. Všimněte si, že to je přesně aritmetický průměr čísel 1 až 6. To není náhoda. Když je pravděpodobnost každé možnosti stejná, je střední hodnota vždycky aritmetický průměr.

Intuitivně, střední hodnota je číslo, ke kterému se náhodná veličina 'nejvíce kloní'.

Znetvořme herní kostku tak, aby pravděpodobnost toho, že hodím 2 byla 0.4, že hodím 3 taky 0.4, a u všech ostatních čísel 0.05. Tvrdím, že teď bude střední hodnota hodu někde mezi 2 a 3, ale blíž 3, protože 2 a 3 jsou nejpravděpodobnější, ale 3 má napravo od sebe ještě tři další hodnoty, zatímco 2 má nalevo od sebe jen jednu. Schválně, máme

$$\begin{aligned}\mathbf{E}[H] &= 1 \cdot \mathbf{P}(H = 1) + 2 \cdot \mathbf{P}(H = 2) + 3 \cdot \mathbf{P}(H = 3) \\ &\quad + 4 \cdot \mathbf{P}(H = 4) + 5 \cdot \mathbf{P}(H = 5) + 6 \cdot \mathbf{P}(H = 6) \\ &= 1 \cdot 0.05 + 2 \cdot 0.4 + 3 \cdot 0.4 + 4 \cdot 0.05 + 5 \cdot 0.05 + 6 \cdot 0.05 = 2.8.\end{aligned}$$

Další možný způsob, jak si představit střední hodnotu, je jako **vážený průměr**, tj. průměr, kterým se například počítá výsledná známka na vysvědčení – každou známku násobíte její vahou. V případě hodu kostkou je střední hodnota vážený průměr, kde „známky" jsou výsledky hodu a „váhy" jsou jejich pravděpodobnosti.

Zpět k náhodným cestám. Z příkladu s kostkou je doufám aspoň částečně jasné, že očekávám, že se vrátím přesně k-krát s pravděpodobností toho, že počet návratů je k pro každé přirozené číslo $k \in \mathbb{N}$. To znamená, že

$$\mathbf{E}[V] = 1 \cdot \mathbf{P}(V = 1) + 2 \cdot \mathbf{P}(V = 2) + 3 \cdot \mathbf{P}(V = 3) + \dots,$$

kdy sčítám nekonečně mnoho členů, protože jsem nedal žádné omezení na délku cesty ani počet návratů. Pomocí symbolu Σ to můžu taky napsat jako

$$\mathbf{E}[V] = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \mathbf{P}(V = k),$$

což přesně znamená, že spolu sčítám všechny výrazy $k \cdot \mathbf{P}(V = k)$, kde k (což je počet návratů) postupně probíhá všechna přirozená čísla.

Jak z tohohle součtu vykutat pravděpodobnost návratu $\mathbf{P}(\text{návrat})$, která nás reálně zajímá. Ten součet nahoře si můžeme napsat trochu jinak. Konkrétně, protože sčítanec $\mathbf{P}(V = k)$ se objevuje přesně k-krát, rozdělím si součet na

$$\begin{array}{ccccccccc}\mathbf{P}(V=1) & + & & & & & & & \\ \mathbf{P}(V=2) & + & \mathbf{P}(V=2) & + & & & & & \\ \mathbf{P}(V=3) & + & \mathbf{P}(V=3) & + & \mathbf{P}(V=3) & + & & & \\ \mathbf{P}(V=4) & + & \mathbf{P}(V=4) & + & \mathbf{P}(V=4) & + & \mathbf{P}(V=4) & + & \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots\end{array}$$

Všimněte si, že v prvním sloupci mám součet

$$\mathbf{P}(V = 1) + \mathbf{P}(V = 2) + \mathbf{P}(V = 3) + \dots,$$

neboli pravděpodobnost, že se vrátím jednou nebo se vrátím dvakrát nebo se vrátím třikrát atd. To je ale přesně pravděpodobnost toho, že se vrátím **aspoň jednou**. Neboli, ten součet v prvním sloupci je **přesně** $\mathbf{P}(\text{návrat})$, protože to, že se vrátím, znamená, že se vrátím aspoň jednou.

Hodnotu $\mathbf{P}(\text{návrat})$ si označím pro strohost zápisu jako r.

Jak souvisí součet v druhém sloupci s r? No, úplně stejnou úvahou dojdeme k tomu, že součet v druhém sloupci mi dává pravděpodobnost, že se vrátím **aspoň dvakrát**. Protože aspoň jeden návrat se stane s pravděpodobností r, aspoň dva návraty se stanou s pravděpodobností r^2. Podobně, pro aspoň k návratů mám pravděpodobnost r^k, což je zároveň k-tý sloupec v tom součtu nahoře.

Dohromady dostanu, že

$$\mathbf{E}[V] = r + r^2 + r^3 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} r^k.$$

To je ovšem součet geometrické posloupnosti, tj. posloupnosti, kde každý další člen dostanu jako něco $\cdot$ předchozí. V tomto případě to „něco“ je r a první člen je taky r. Takováhle posloupnost má součet

$$\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1-r},$$

právě tehdy, když $0 \leq r < 1$. Tím jsme převedli svůj původní problém na zjišťování, kdy je $\mathbf{E}[V] = \infty$. Pokud totiž $r = 1$, tedy pravděpodobnost návratu je 100 %, pak $\mathbf{E}[V]$ je součet samých jedniček, takže nekonečný. Naopak, pokud $r < 1$, tedy existuje možnost, že se nevrátím, pak $\mathbf{E}[V] = r/(1-r) < \infty$.

Zbytek textu se věnuje důkazu, že $\mathbf{E}[V] = \infty$ ve 2D. Pořád totiž řešíme problém, že $r = \mathbf{P}(\text{návrat})$ neumíme spočítat.

Na řadě je další revoluční nápad, který jste určitě už dávno dostali. Místo toho ptát se rovnou po pravděpodobnosti návratu, zeptám se sérií otázek.

	Ano	Ne
Vrátím se přesně po 1 kroku?	+1	+0
Vrátím se přesně po 2 krocích?	+1	+0
Vrátím se přesně po 3 krocích?	+1	+0
Vrátím se přesně po 4 krocích?	+1	+0
⋮	⋮	⋮

Počet návratů V dostanu tak, že přičtu jedna, kdykoli na nějakou z těchto otázek odpovím „ano“. Fakt, že $V = k$, můžeme proto vnímat tak, že jsem „ano“ odpověděl u libovolných k z těchto otázek. Pravděpodobnost, že se vrátím po přesně n krocích si pomocně označíme $P^{(n)}$.

Jak nám tohle pomůže? No, střední hodnota $P^{(n)}$ je

$$\mathbf{E}[P^{(n)}] = 1 \cdot \mathbf{P}(\text{„ano“ u } n\text{-té otázky}) + 0 \cdot \mathbf{P}(\text{„ne“ u } n\text{-té otázky}),$$

protože očekávám, že přičtu 1, když odpovím „ano“, a 0, když odpovím „ne“. To ale znamená, že $\mathbf{E}[P^{(n)}]$ je zkrátka $\mathbf{P}(\text{„ano“ u } n\text{-té otázky}) = P^{(n)}$.

Jelikož počet návratů je právě počet kladných odpovědí na otázky výše, očekávám, že se vrátím přesně tolikrát, kolikrát očekávám, že odpovím „ano“. Symbolicky,

$$\mathbf{E}[V] = \mathbf{E}[P^{(1)}] + \mathbf{E}[P^{(2)}] + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{E}[P^{(n)}] = \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)}.$$

Naštěstí, $P^{(n)}$ spočítat umíme.

Co může asi být pravděpodobnost, že se vrátím po přesně n-krocích?

1. Zajímají nás jen cesty, které mají přesně n kroků.
2. Zajímají nás jen cesty, které končí v počátku (tam, kde začaly).
3. Zajímá nás pravděpodobnost, s jakou si vybereme jednu konkrétní cestu o n krocích.

Bod 3 se počítá snadno. U každého dalšího kroku vybírám ze čtyř různých směrů, každý vyberu s pravděpodobností 1/4. Takže jednu konkrétní cestu si vyberu s pravděpodobností $(1/4)^n$, jelikož se n-krát po sobě musím „správně“ rozhodnout.

Úloha. *Spočítejte počet cest splňujících body 1 a 2.*

Hint. Cesty, které končí tam, kde začaly, musejí nutně mít stejný počet kroků nahoru jako kroků dolu a kroků doleva jako kroků doprava (jinak by nemohly skončit na stejném místě). To mimo jiné znamená, že jenom cesty se **sudým** počtem kroků mohou splňovat bod 2. Na cestu se mohu dívat jako na posloupnost šipek. Třeba

$$\uparrow \;\leftarrow\; \leftarrow\; \downarrow\; \rightarrow\; \rightarrow$$

je cesta o 6 krocích, která se vrátí do počátku, protože jdu nahoru, doleva, doleva, dolu, doprava, doprava. Počet různých seřazení n šipek je $n!$. Ale ne každé seřazení dá různé cesty. Když třeba ty šipky nahoře seřadím takto:

$$\leftarrow\; \uparrow\; \leftarrow\; \downarrow\; \rightarrow\; \rightarrow,$$

neboli prohodím první dvě šipky, dostanu opravdu jinou cestu. Když ale prohodím třeba druhou a třetí šipku z té původní cesty (které obě vedou doleva), nezměním nic. To je potřeba brát při počítání cest podle bodu 1 v úvahu.