

Ústní zkouška

z Úvodu do matematické analýzy, části první

Verze: oMegareKt

Přednášející: His Divine Wisdom Sir Adam Clypatch

16. února 2024

**NENÍ-LI ŘEČENO JINAK, VŠECHNY POJMY A DŮKAZY FORMULUJTE
PEČLIVĚ S DŮRAZEM NA FORMÁLNÍ SPRÁVNOST.**

Část	Hodnocení
Základní definice	0 / 0
Lehké úlohy a důkazy	/ 6
Těžké úlohy a důkazy	/ 12

Základní definice (0 bodů)

Neznalost základních definic znamená bezpodmínečné nesložení zkoušky.

- (1) Monoid.
- (2) Limita posloupnosti.
- (3) Monotónní posloupnost.
- (4) Minimum a maximum.
- (5) Interval a typy intervalů.

Lehké úlohy a důkazy (6 bodů)

Pojmy užívané v úlohách nemusíte definovat. Používáte-li k řešení úlohy nebo k důkazu předchozí tvrzení, zformulujte je.

- (1) Uvažme množinu \mathbb{R} jako množinu tříd ekvivalence \simeq všech konvergentních racionálních posloupností. Dokažte, že zobrazení

$$\begin{aligned}\xi : \mathbb{Q} &\hookrightarrow \mathbb{R}, \\ q &\mapsto [(q)]_{\simeq}\end{aligned}$$

které racionálnímu číslu přiřadí třídu ekvivalence posloupnosti samých čísel q , je prosté.

- (2) Dokažte, že jsou-li posloupnosti $a, b : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergentní, pak je konvergentní i posloupnost $a + b$.
- (3) Spočtěte

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 - 7n^2 + 5}{6 - 4n^4}.$$

Těžké úlohy a důkazy (12 bodů)

Nemusíte dokonale zformulovat svá řešení. Obecná idea rozvinutá důležitými detaily postačuje.

- (1) Uvažte posloupnost danou rekurzivním předpisem

$$a_1 = 2,$$
$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{2a_n}.$$

Spočtěte $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Návod:

- (a) Dokažte, že a_n je klesající a zdola omezená.
- (b) Podle věty o limitě monotónní posloupnosti má a_n limitu, označme ji L . Využijte vzorce pro a_{n+1} (v závislosti na a_n) a faktu, že $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ pro nalezení rovnice k výpočtu L .