Gymnázium Evolution Jižní Město

Jakýsi úvod do matematické analýzy

Áďula vod Klepáčů

6. prosince 2023

Předmluva

Matematická analýza je věda o reálných číslech; tuším ovšem, že kolegové analytici mě za ono nedůstojně zjednodušující tvrzení rádi mít příliš nebudou. Snad mohou nicméně souhlasit, že v jejím jádru je pojem *nekonečna*. Nikoli nutně ve smyslu čísla, jež převyšuje všechna ostatní, ale spíše myšlenky, jež zaštiťuje přirozené jevy jako *okamžitá změna*, *blížení* či *kontinuum*.

O zrod matematické analýzy, jež zvláště v zámoří sluje též *kalkulus*, se bez pochyb podělili (nezávisle na sobě) Sir Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz v 17. století po Kristu. Sir Isaac Newton se tou dobou zajímal o dráhy vesmírných těles a učinil dvě zásadní pozorování – zemská tíže působí na objekty zrychlením a zrychlení je *velikost okamžité změny* rychlosti. Potřeboval tedy metodu, jak onu velikost spočítat. Vynález takové metody po přirozeném zobecnění vede ihned na teorii tzv. *limit*, které právě tvoří srdce kalkulu. Pozoruhodné je, že Gottfried Leibniz, nejsa fyzik, dospěl ke stejným výsledkům zpytem geometrických vlastností křivek. V jistém přirozeném smyslu, který se zavazujeme rozkrýt, jsou totiž tečny *limitami* křivek. Ve sledu těchto rozdílů v přístupu obou vědců se v teoretické matematice dodnes, s mírnými úpravami, používá při studiu limit značení Leibnizovo, zatímco ve fyzice a diferenciální geometrii spíše Newtonovo.

Následující text je shrnutím – lingvistickým, vizuálním a didaktickým pozlacením – teorie limit. Hloubka i šíře této teorie ovšem přesáhla původní očekávání a kalkulus se stal součástí nespočtu matematických (samozřejmě i fyzikálních) odvětví bádání. První kapitola je věnována osvěžení nutných pojmů k pochopení textu. Pokračují pojednání o limitách posloupností a reálných číslech, limitách součtů, limitách funkcí a, konečně, derivacích. Tento sled není volen náhodně, nýbrž, kterak bude vidno, znalost předšedších kapitol je nutná k porozumění příchozích.

Jelikož se jedná o text průběžně doplňovaný a upravovaný, autor vyzývá čtenáře, by četli okem kritickým a myslí čistou, poskytovali připomínky a návrhy ke zlepšení.

Obsah

Část I

Reálná čísla a limity

Kapitola 1

Posloupnosti, limity a reálná čísla

Kritickým opěrným bodem při konstrukci reálných čísel i při jejich následném studiu je pojem *limity* (v češtině se tomuto slovu přiřazuje ženský rod). Limita je bod, k němuž se zvolená posloupnost čísel „blíží“, ale nikdy jeho „nedosáhne“, pokud takový existuje. Přidruženým pojmem je třeba *asymptota* reálné funkce, se kterou se čtenáři, očekáváme, setkali.

Samotná definice limity je zpočátku poněkud neintuitivní. Vlastně i samotná představa býti něčemu „nekonečně blízko“ je do jisté míry cizí. Pokusíme se vhodnými obrázky a vysvětlivkami cestu k pochopení dláždit, avšak, jakož tomu bývá, intuice přichází, až člověk s ideou takřkouce sroste.

1.1 Definice limity posloupnosti

Koncept posloupnosti je, na rozdíl od limity, velmi triviální. Je to vlastně „očíslovaná množina čísel“. Z každé množiny lze vyrobit posloupnost jejích prvků tím, že jim přiřkneme nějaké pořadí. Tento *přírok* se nejsnadněji definuje jako zobrazení z přirozených čísel – to totiž přesně na každý prvek kodomény zobrazí jeho pořadí.

Definice 1.1.1 (Posloupnost)

Ať X je množina. *Posloupností* prvků z X nazveme libovolné zobrazení

$$a : \mathbb{N} \to X.$$

Pro úsporu zápisu budeme psát a_n místo $a(n)$ pro $n \in \mathbb{N}$. Navíc, je-li kodoména X zřejmá z kontextu, říkáme stručně, že $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ je *posloupnost*.

Poznámka 1.1.2

Vnímaví čtenáři sobě jistě povšimli, že jsme na $\mathbb{N}$ nedefinovali žádné *uspořádání*. Ačkolivěk není tímto definice posloupnosti formálně nijak postižena, neodpovídá přirozenému vnímání, že prvek s číslem 1 stojí před prvkem s číslem 5 apod.

Naštěstí, naše konstruktivní definice přirozených čísel nabízí okamžité řešení. Využijeme toho, že každé přirozené číslo je podmnožinou svého následníka, a definujeme zkrátka uspořádání $\leq$ na $\mathbb{N}$ předpisem

$$a \leq b \overset{\text{def}}{\iff} a \subseteq b.$$

Fakt, že $\subseteq$ je uspořádání, okamžitě implikuje, že $\leq$ je rovněž uspořádání.

Rozmyslíme si nyní dva pojmy pevně spjaté s posloupnostmi – *konvergence* a *limita*. Brzo si též ukážeme, že tyto dva pojmy jsou záměnné, ale zatím je vnímáme odděleně. Navíc, budeme se odteď soustředit speciálně na posloupnosti racionálních čísel, tj. zobrazení $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, neboť jsou oním klíčem k sestrojení své reálné bratří.

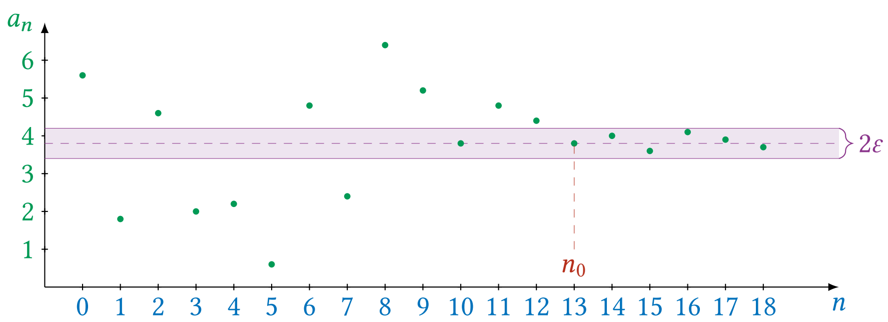
Ze všech posloupností $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ nás zajímá jeden konkrétní typ – posloupnosti, vzdálenosti mezi jejichž prvky se postupně zmenšují. Tyto posloupnosti, nazývané *konvergentní* (z lat. con-vergere, „ohýbat k sobě“), se totiž vždy blíží k nějakému konkrétnímu bodu – ke své *limitě*. Představa ze života může být například následující: říct, že se blížíme k nějakému místu, je totéž, co tvrdit, že se vzdálenost mezi námi a oním místem s každým dalším krokem zmenšuje. V moment, kdy své kroky směřujeme stále stejným směrem, posloupnost vzdáleností mezi námi a tím místem tvoří konvergentní posloupnost. Jestliže se pravidelně odkláníme, k místu nikdy nedorazíme a posloupnost vzdáleností je pak *divergentní* (tj. **ne**konvergentní).

Do jazyka matematiky se věta „vzdálenosti postupně zmenšují“ překládá obtížně. Jeden ne příliš elegantní, ale výpočetně užitečný a celkově oblíbený způsob je následující: řekneme, že prvky posloupnosti jsou k sobě stále blíž, když pro jakoukoli vzdálenost vždy dokážeme najít krok, od kterého dál jsou již k sobě dva libovolné prvky u sebe blíž než tato daná vzdálenost. Důrazně vyzýváme čtenáře, aby předchozí větu přečítali tak dlouho, dokud jim nedává dobrý smysl. Podobné formulace se totiž vinou matematickou analýzou a jsou základem uvažování o nekonečnu.

Definice 1.1.3 (Konvergentní posloupnost)

Řekneme, že posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je *konvergentní*, když platí výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon.$$



Obrázek 1.1: Konvergentní posloupnost. Zde pro $\varepsilon = 0.2$ lze volit například $n_0 = 13$. Vodorovná přímka procházející bodem a_{n_0} je vlastně „středem“ pruhu o šíři 2ε, ve kterém se nacházejí všechny členy posloupnosti s pořadím vyšším než 13.

Poznámka 1.1.4

Radíme, aby se čtenáři sžili s intuitivním (přesto velmi přesným) ponětím absolutní hodnoty $|x - y|$ jako *vzdálenosti* mezi čísly x a y. V tomto smyslu je pak $|x| = |x - 0|$ vzdálenost čísla x od čísla 0, což cele odpovídá definici tohoto symbolu.

Poznámka 1.1.5

Aplikujeme intuitivní vysvětlení *zmenšování vzdálenosti* z odstavce nad definicí 1.1.3 na jeho skutečnou definici.

Výrok

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < \varepsilon$$

říká, že pro jakoukoli vzdálenost (ε) dokáži najít krok (n_0) takový, že vzdálenost dvou prvků v libovolných dvou následujících krocích (m, n) už je menší než daná vzdálenost ($|a_n - a_m| < \varepsilon$).

Slovo „krok“ je třeba vnímat volně – myslíme pochopitelně *pořadí* či *indexy* prvků v posloupnosti. Pohled na racionální posloupnosti jako na „kroky“ činěné v racionálních číslech může být ovšem užitečný.

Cvičení 1.1.6

Dokažte, že posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je konvergentní právě tehdy, když

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall m, n \geq n_0 : |a_m - a_n| < C\varepsilon$$

pro libovolnou **kladnou** konstantu $C \in \mathbb{Q}$.

Pojem *limity*, představuje jakýsi bod, k němuž se posloupnost s každým dalším krokem přibližuje, je vyjádřen výrazem podobného charakteru. Zde však přichází na řadu ona *děravost* racionálních čísel. Může se totiž stát, a příklady zde uvedeme, že limita racionální posloupnosti není racionální číslo.

Učiňmež tedy dočasný obchvat a před samotnou definicí limity vyrobme reálná čísla jednou z přehoušlí možných cest.

Ať $C(\mathbb{Q})$ značí množinu všech **konvergentních** racionálních posloupností. Uvažme ekvivalenci $\simeq$ na $C(\mathbb{Q})$ danou

$$a \simeq b \overset{\text{def}}{\iff} \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - b_n| < \varepsilon.$$

Přeloženo do člověčtiny, $a \simeq b$, právě když se rozdíl mezi prvky těchto posloupností se stejným pořadím neustále zmenšuje – řekli bychom, že se *blíží k nule*. V rámci (zatím intuitivní) představy, že konvergentní posloupnosti se blíží k nějakému bodu, dává smysl ztotožňovat posloupnosti, které se blíží k bodu *stejnému* – stav, který vyjadřujeme tak, že se jejich rozdíl blíží k nule.

Ve výsledku budeme definovat reálná čísla jako limity všech možných konvergentních racionálních posloupností. Pozbývajíce leč aparátu, bychom koncepty limity a konvergence stmelili v jeden, jsme nuceni učinit mezikrok.

Definice 1.1.7 (Reálná čísla)

Množinu *reálných čísel* tvoří všechny třídy ekvivalence konvergentních racionálních posloupností podle $\simeq$. Symbolicky,

$$\mathbb{R} \coloneqq \{[a]_{\simeq} \mid a \in C(\mathbb{Q})\}.$$

Nyní definujeme pojem limity. Nemělo by snad být příliš překvapivé, že se od definice konvergence příliš neliší. Významný rozdíl odpočívá pouze v předpokladu existence *cílového bodu*.

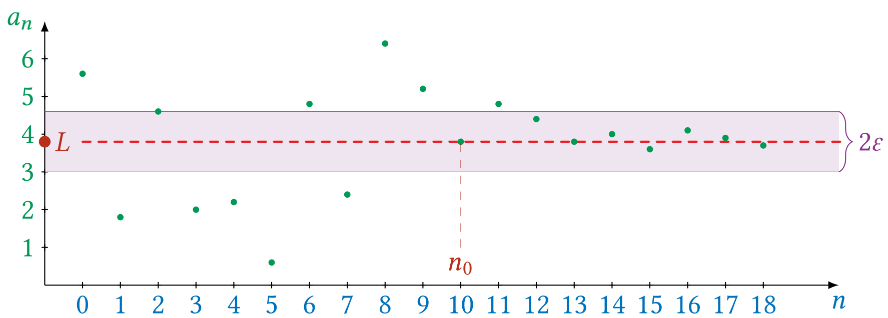
Definice 1.1.8 (Limita posloupnosti)

Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je posloupnost. Řekneme, že a *má limitu* $L \in \mathbb{R}$, když

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}, \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 : |a_n - L| < \varepsilon,$$

neboli, když jsou prvky a_n bodu L s každým krokem stále blíž.

Fakt, že $L \in \mathbb{R}$ je limitou a značíme jako $\lim a = L$.



Obrázek 1.2: Posloupnost s limitou L. Zde pro $\varepsilon = 0.4$ lze volit například $n_0 = 10$. Vodorovná přímka procházející bodem L je vlastně „středem“ pruhu o šíři 2ε, ve kterém se nacházejí všechny členy posloupnosti s pořadím vyšším než 10.

1.2 Limity konvergentních posloupností

V této sekci dokážeme, že konvergentní posloupnosti mají limitu. Opačná implikace, tj. že posloupnosti jmající limitu konvergují, je téměř triviální. K jejímu důkazu potřebujeme jen jednu vlastnost absolutní hodnoty.

Lemma 1.2.1 (Trojúhelníková nerovnost)

Ať $x, y \in \mathbb{Q}$. Pak

$$|x + y| \leq |x| + |y|.$$

Důkaz. Absolutní hodnota $|x + y|$ je rovna buď $x + y$ (když $x + y \geq 0$) nebo $-x - y$ (když $x + y < 0$). Zřejmě $x \leq |x|$ a $-x \leq |x|$, podobně $y \leq |y|$ a $-y \leq |y|$.

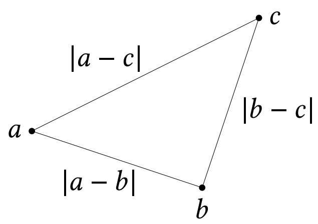
Pak je ale $x + y \leq |x| + |y|$ a též $-x + (-y) \leq |x| + |y|$. Tím je důkaz hotov. ∎

Poznámka 1.2.2

Název *trojúhelníková* obvykle přiřazovaný nerovnosti 1.2.1 vyplývá z její přirozené geometrické interpretace. Ať a, b, c jsou body v rovině. Dosazením $x = a - b$, $y = b - c$, dostává nerovnost 1.2.1 tvar

$$|a - c| \le |a - b| + |b - c|,$$

tj. vzdálenost a od c je nanejvýš rovna součtu vzdáleností a od b a b od c pro libovolný bod b. Vizte obrázek 1.3.



Obrázek 1.3: Trojúhelníková nerovnost

Trojúhelníková nerovnost poskytuje snadné důkazy mnoha užitečných dílčích tvrzení o posloupnostech. Příkladem je následující cvičení.

Cvičení 1.2.3 (Jednoznačnost limity)

Dokažte, že každá posloupnost $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ má nejvýše jednu limitu. Hint: použijte trojúhelníkovou nerovnost.

Ježto bychom však rádi dokazovali všechna tvrzení již pro reálná čísla, ukažme si nejprve, jak se dají sčítat a násobit. Dokážeme rovněž, že $\mathbb{R}$ – stejně jako $\mathbb{Q}$ – tvoří těleso. Začneme tím, že se naučíme sčítat a násobit konvergentní posloupnosti.

Ať $a, b \in C(\mathbb{Q})$ jsou dvě konvergentní racionální posloupností. Operace $+$ a $\cdot$ na $C(\mathbb{Q})$ definujeme velmi přirozeně. Zkrátka, $(a + b)(n) \coloneqq a(n) + b(n)$ a $(a \cdot b)(n) \coloneqq a(n) \cdot b(n)$, tj. prvek na místě n posloupnosti $a + b$ je součet prvků na místech n posloupností a a b. Abychom ovšem získali skutečně operace na $C(\mathbb{Q})$, musíme ověřit, že $a + b$ i $a \cdot b$ jsou konvergentní.

Nechť dáno jest $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že umíme najít $n_0 \in \mathbb{N}$, aby

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| < \varepsilon,$$

kdykoli $m, n \ge n_0$. Protože jak a tak b konverguje, již umíme pro libovolná $\varepsilon_a, \varepsilon_b > 0$ najít n_a a n_b taková, že $|a_n - a_m| < \varepsilon_a$, kdykoli $m, n \ge n_a$, a podobně $|b_n - b_m| < \varepsilon_b$, kdykoli $m, n \ge n_b$. Položme tedy $\varepsilon_a = \varepsilon_b \coloneqq \varepsilon/2$ a $n_0 \coloneqq \max(n_a, n_b)$. Potom můžeme užitím trojúhelníkové nerovnosti pro $m, n \ge n_0$ odhadnout

$$|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| = |(a_n - a_m) + (b_n - b_m)| \le |a_n - a_m| + |b_n - b_m| < \varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon,$$

čili $a + b$ konverguje.

Předchozí odstavec se může snadno zdát šílenou směsicí symbolů. Ve skutečnosti však formálně vykládá triviální úvahu. Máme najít pořadí, od kterého jsou prvky součtu $a + b$ u sebe blíž než nějaká daná vzdálenost. Poněvadž a i b konvergují, stačí přeci vzít větší z pořadí, od kterých je jak rozdíl prvků a, tak rozdíl prvků b, menší než polovina dané vzdálenosti.

Velmi obdobnou manipulaci lze provést k důkazu konvergence $a \cdot b$. Ponecháváme jej čtenářům jako (ne zcela snadné) cvičení.

Cvičení 1.2.4

Dokažte, že jsou-li a, b konvergentní posloupnosti racionálních čísel, pak je posloupnost $a \cdot b$ rovněž konvergentní. Kromě trojúhelníkové nerovnosti je zde třeba použít i zatím nedokázané lemma 1.2.10.

Racionální čísla jsou přirozeně součástí reálných prostřednictvím zobrazení

$$\begin{aligned} \xi : \mathbb{Q} &\hookrightarrow \mathbb{R}, \\ q &\mapsto [(q)], \end{aligned} \tag{1.1}$$

kde (q) značí posloupnost $a : n \mapsto q$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$ a $[(q)]$ její třídu ekvivalence podle $\simeq$.

Varování 1.2.5

Tvrdíme pouze, že $\mathbb{Q}$ jsou *součástí* $\mathbb{R}$, kde slovu *součást* záměrně není dán rigorózní smysl. Racionální čísla totiž (aspoň po dobu naší dočasné definice reálných čísel) nejsou v žádném smyslu podmnožinou čísel reálných.

Matematici ale často ztotožňujeme doménu prostého zobrazení s jeho obrazem (neboť mezi těmito množinami vždy existuje bijekce). V tomto smyslu mohou být $\mathbb{Q}$ vnímána jako podmnožina $\mathbb{R}$, ztotožníme-li racionální čísla s obrazem zobrazení ξ z (1.1). Toto ztotožnění znamená vnímat racionální číslo $q \in \mathbb{Q}$ jako konvergentní posloupnost samých čísel q.

Cvičení 1.2.6

Dokažte, že zobrazení ξ z (1.1) je

- dobře definované – tzn. že když $p = q$, pak $[(p)] = [(q)]$ – a
- prosté.

Jelikož $\mathbb{Q}$ je těleso, speciálně tedy obsahuje 0 a 1, $\mathbb{R}$ je (prostřednictvím ξ z (1.1)) obsahuje rovněž. Pro stručnost budeme číslem $0 \in \mathbb{R}$ značit třídu ekvivalence posloupnosti samých nul a číslem $1 \in \mathbb{R}$ třídu ekvivalence posloupnosti samých jednotek. Ověříme, že se skutečně jedná o neutrální prvky ke sčítání a násobení.

Je třeba si rozmyslet, že pro každou posloupnost $a \in C(\mathbb{Q})$ platí $a + 0 = a$ a $a \cdot 1 = a$, kde, opět, čísla 0 a 1 ve skutečnosti znamenají nekonečné posloupnosti těchto čísel. Obě rovnosti jsou však zřejmé z definice, neboť $(a + 0)(n) = a_n + 0 = a_n = a(n)$ a $(a \cdot 1)(n) = a_n \cdot 1 = a_n = a(n)$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Konečně, rozšíříme rovněž – a $^{-1}$ na $\mathbb{R}$. Pro libovolnou posloupnost $x \in C(\mathbb{Q})$ definujeme zkrátka $(-a)(n) \coloneqq -a(n)$. S $^{-1}$ je situace lehce komplikovanější. Totiž, pouze **nenulová** racionální čísla mají svůj inverz k násobení. Zde je třeba zpozorovat, že **konvergentní** posloupnost, která by však měla nekonečně mnoho prvků nulových, už musí mít od nějakého kroku **všechny** prvky nulové, jinak by totiž nemohla konvergovat. Vskutku, představme si, že a je posloupnost taková, že $a_n = 0$ pro nekonečně mnoho přirozených čísel $n \in \mathbb{N}$. Pak ale ať zvolím $n_0 \in \mathbb{N}$ jakkoliv, vždy existuje $m \geq n_0$ takové, že $a_m = 0$. Vezměme $n \geq n_0$ libovolné. Pokud $a_n \neq 0$, pak můžeme vzít třeba

$\varepsilon \coloneqq |a_n|/2$ a bude platit, že $|a_n - a_m| > \varepsilon$, což je dokonalý zápor definice konvergence. Z toho plyne, že a_n musí být 0 pro $n \geq n_0$ a odtud dále, že $a \simeq 0$. Čili, pouze posloupnosti ekvivalentní nulové posloupnosti nemají v $\mathbb{R}$ inverz vzhledem k $\cdot$.

Právě provedená úvaha nám umožňuje definovat $^{-1}$ pro posloupnosti $a \in C(\mathbb{Q})$ takové, že $a \not\simeq 0$, následovně:

$$(a^{-1})(n) \coloneqq \begin{cases} a(n)^{-1}, & \text{když } a(n) \neq 0, \\ 0, & \text{když } a(n) = 0. \end{cases}$$

Je snadné uvidět, že $-a$ je inverzem k a vzhledem k $+$ a a^{-1} je inverzem k $a \not\simeq 0$ vzhledem k $\cdot$. Vskutku, máme

$$(a + (-a))(n) = a_n + (-a_n) = 0,$$

tedy v tomto případě je $(a + (-a))$ přímo **rovna** nulové posloupnosti. V případě $^{-1}$ dostáváme pro $a \not\simeq 0$

$$(a \cdot a^{-1})(n) = \begin{cases} a_n \cdot a_n^{-1} = 1, & \text{když } a_n \neq 0, \\ a_n \cdot 0 = 0, & \text{když } a_n = 0. \end{cases}$$

Ergo, $a \cdot a^{-1}$ je rovna posloupnosti samých jedniček, až na konečně mnoho nul, protože, jak jsme si již rozmysleli, a nemůže mít nekonečně 0 a zároveň nebýt v relaci $\simeq$ s nulovou posloupností, jinak by nebyla konvergentní. To však přesně znamená, že $a \cdot a^{-1} \simeq 1$, čili $[a] \cdot [a^{-1}] = [1]$.

Shrneme-li řád předchozích úvah, získáme oprávnění tvrdit, že

$$(\mathbb{R}, +, -, [(0)], \cdot, ^{-1}, [(1)])$$

je těleso. Tento fakt je do budoucna pochopitelně zásadní; teď se však můžeme těšit znalostí, že jsme přechodem od $\mathbb{Q}$ k $\mathbb{R}$ neztratili symetrické rysy původní množiny.

Přikročmež již však k důkazu existence limity každé konvergentní posloupnosti. Fakt, že existence limity implikuje konvergenci, plyne přímo z trojúhelníkové nerovnosti.

Lemma 1.2.7

Každá posloupnost majíc limitu je konvergentní.

Důkaz. Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je posloupnost s limitou L. Pak pro každé $\varepsilon_L > 0$ existuje $n_L \in \mathbb{N}$ takové, že $|a_n - L| < \varepsilon_L$ pro všechna $n \geq n_L$.

Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Chceme ukázat, že $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pro všechna m, n větší než vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$. Položme tedy $n_0 \coloneqq n_L$ a $\varepsilon_L \coloneqq \varepsilon/2$. Potom pro všechna $m, n \geq n_0 = n_L$ máme

$$|a_m - a_n| = |a_m - a_n - L + L| = |(a_n - L) + (L - a_m)| \leq |a_n - L| + |L - a_m| < \varepsilon_L + \varepsilon_L = \varepsilon,$$

čili a konverguje. ∎

1.2.1 Úplnost reálných čísel

K důkazu existence limity každé konvergentní posloupnosti potřebujeme prozpytovat vztah racionálních a reálných čísel podrobněji. Konkrétně potřebujeme ukázat, že $\mathbb{Q}$ jsou tzv. *hustá* v $\mathbb{R}$, tj.

že ke každému reálnému číslu existuje racionální číslo, které je mu nekonečně blízko. Zde jsme opět implicitně ztotožnili racionální čísla s třídami ekvivalence konstantních posloupností. Na základě toho budeme totiž moci tvrdit, že reálná čísla jsou tzv. *úplná*, což přesně znamená, že každá konvergentní posloupnost reálných čísel má reálnou limitu.

Nejprve si ovšem musíme rozmyslet, co vlastně míníme posloupností *reálných* čísel. Pochopitelně, zobrazení $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ poskytuje validní definici, ale uvědomme sobě, že teď vlastně uvažujeme posloupnosti, jejichž prvky jsou třídy ekvivalence konvergentních racionálních posloupností.

Abychom směli hovořit o konvergentních *reálných* posloupnostech, rozšíříme absolutní hodnotu $|\cdot|$ z $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{R}$ zkrátka předpisem $|[(x_n)]| \coloneqq [(|x_n|)]$ pro $(x_n) \in C(\mathbb{Q})$. Napíšeme-li tedy $|x| \leq K$ pro reálná čísla $x, K \in \mathbb{R}$, pak tím doslova myslíme $[(|x_n|)] \leq [(K_n)]$, což ale **neznamená** $|x_n| \leq K_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$, kde x_n, K_n jsou nyní již čísla ryze rozumná čili racionální, anobrž $|x_n| > K_n$ jen pro **konečně mnoho** $n \in \mathbb{N}$.

Varování 1.2.8

Důležitá myšlenka, jíž je dlužno snovat v srdci při práci s třídami ekvivalence konvergentních posloupností, je ta, že při porovnávání dvou tříd nás nezajímá libovolný **konečný počet** jejich prvních prvků.

Například, vztah $x = y$ pro $x, y \in \mathbb{R}$ znamená, že $x_n = y_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$ až na libovolný konečný počet prvních přirozených čísel. To se lépe vyjadřuje pomocí negace. Je snazší říct, že $x = y$, když $x_n \neq y_n$ pro jenom konečně mnoho $n \in \mathbb{N}$.

Rozepíšeme-li si tedy podrobně, co znamená, že je posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konvergentní, dostaneme pro dané $\varepsilon > 0$, vhodné $n_0 \in \mathbb{N}$ a $m, n \geq n_0$ nerovnost $|x_n - x_m| < \varepsilon$. Ovšem, x_n i x_m jsou samy o sobě třídy ekvivalence konvergentních **posloupností** racionálních čísel, tedy poslední nerovnost plně rozepsána dí

$$|[((x_n)_k - (x_m)_k)_{k=0}^{\infty}]| < \varepsilon,$$

což lze rovněž vyjádřit tak, že

$$|(x_n)_k - (x_m)_k| \geq \varepsilon$$

jen pro konečně mnoho $k \in \mathbb{N}$.

Nepřináší však žádný hmotný užitek nad konvergencí reálných posloupností uvažovat takto složitě. Čtenáři dobře učiní, uvědomí-li si plný význam předchozího odstavce, ovšem zůstanou-li věrni intuitivnímu vnímání výrazu $|x - y|$ jako „vzdálenosti" čísel x a y.

Definice 1.2.9 (Omezená posloupnost)

Řekneme, že posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je *omezená*, když existuje $K \in \mathbb{R}$ takové, že $|x_n| \leq K$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Píšeme $|x| \leq K$.

Lemma 1.2.10

Každá konvergentní posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je omezená.

Důkaz. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Z definice konvergence nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $m, n \geq n_0$ je $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Speciálně tedy pro každé $n \geq n_0$ platí

$$|x_n| = |x_n - x_{n_0} + x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0}| < \varepsilon + |x_{n_0}|,$$

tudíž všechny členy posloupnosti s pořadím větším než n_0 jsou omezeny číslem $\varepsilon + |x_{n_0}|$. Ovšem, členů posloupnosti s pořadím menším než n_0 je konečně mnoho, a tedy z nich můžeme vzít ten největší – nazvěme ho s. Položíme-li $K \coloneqq \max(s, \varepsilon + |x_{n_0}|)$, pak $|x_n| \leq K$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, čili x je omezená číslem K. ■

Tvrzení 1.2.11 (Hustota $\mathbb{Q}$ v $\mathbb{R}$)

Množina racionálních čísel $\mathbb{Q}$ je hustá v $\mathbb{R}$, tj. ke každému $x \in \mathbb{R}$ a každému $\varepsilon > 0$ existuje $r \in \mathbb{Q}$ takové, že $|x - r| < \varepsilon$.

Důkaz. Ať $\varepsilon > 0$ je dáno a označme $x \coloneqq [(x_n)]$, $(x_n) \in C(\mathbb{Q})$. Najdeme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m, n \geq n_0$ je $|x_m - x_n| < \varepsilon$. Zvolme $r \coloneqq x_{n_0} \in \mathbb{Q}$. Pak ovšem máme

$$|x_n - r| = |x_n - x_{n_0}| < \varepsilon$$

pro všechna $n \geq n_0$. To přesně znamená, že $|x - r| < \varepsilon$. ■

Lemma 1.2.12

Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je konvergentní posloupnost racionálních čísel. Pak $\lim a = [(a)]$.

Důkaz. Položme $x \coloneqq [(a)]$. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Protože a je konvergentní, nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$, že $|a_m - a_n| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq n_0$. Potom ale $|a_n - x| < \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$, což z definice znamená, že $\lim a = x$. ■

Důsledek 1.2.13 ($\mathbb{R}$ jsou úplná)

Každá konvergentní reálná posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ má limitu v $\mathbb{R}$.

Důkaz. Ať $a : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ je racionální posloupnost taková, že $|x_n - a_n| < 1/n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Tu nalezneme opakovaným použitím tvrzení 1.2.11 pro $\varepsilon \coloneqq 1/n$ a $x \coloneqq x_n$. Ukážeme nejprve, že a je konvergentní. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Zvolme n_1 takové, že $\forall m, n \geq n_1$ platí $1/m + 1/n < \varepsilon$. Dále, x je konvergentní z předpokladu. Čili, pro každé $\varepsilon_x > 0$ nalezneme $n_2 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall m, n \geq n_2$ máme $|x_n - x_m| < \varepsilon_x$. Volme tedy speciálně

$$\varepsilon_x \coloneqq \varepsilon - \frac{1}{m} - \frac{1}{n}.$$

a $n_0 \coloneqq \max(n_1, n_2)$. Potom pro všechna $m, n \geq n_0$ platí nerovnosti

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| = |a_n - a_m - x_n + x_n| \leq |a_n - x_n| + |x_n - a_m| = |a_n - x_n| + |x_n - a_m - x_m + x_m| \\ \leq |a_n - x_n| + |x_n - x_m| + |x_m - a_m| < \frac{1}{n} + \varepsilon_x + \frac{1}{m} = \varepsilon, \end{aligned}$$

tedy a konverguje.

Jistě platí $\lim x - a = 0$, neboť pro každé $\varepsilon > 0$ lze najít $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \varepsilon$. Odtud plyne, že x má limitu právě tehdy, když a má limitu. Ovšem, podle lemmatu 1.2.12 má a limitu $[(a)] \in \mathbb{R}$. Tím je důkaz hotov. ■

Důsledek 1.2.14

Platí

$$\mathbb{R} \cong \{\lim a \mid a \in C(\mathbb{Q})\},$$

čili reálná čísla jsou přesně limity všech konvergentních racionálních posloupností.

Důkaz. Zkonstruujeme bijekci $f : \mathbb{R} \to \{\lim a \mid a \in C(\mathbb{Q})\}$. Vezměme $x \in \mathbb{R}$. Pak z definice existuje konvergentní racionální posloupnost $a \in C(\mathbb{Q})$ taková, že $x = [a]$. Podle lemmatu 1.2.12 má a limitu v $\mathbb{R}$. Definujme tedy $f(x) \coloneqq \lim a$.

Ověříme, že je f dobře definované, prosté a na.

Nejprve musíme ukázat, že $f(x)$ nezávisí na volbě konkrétní posloupnosti a z třídy ekvivalence $[a]$. Ať tedy $b \simeq a$ a označme $L_a \coloneqq \lim a$, $L_b \coloneqq \lim b$. Pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ platí tři nerovnosti:

$$|a_n - b_n| < \varepsilon, \quad |a_n - L_a| < \varepsilon, \quad |b_n - L_b| < \varepsilon.$$

Velmi obdobnou úpravou jako v důkaze důsledku 1.2.13 dostaneme, že

$$|L_a - L_b| \leq |L_a - a_n| + |a_n - b_n| + |b_n - L_b| < 3\varepsilon,$$

odkud $L_a = L_b$, neboť L_a, L_b jsou třídy ekvivalence konvergentních posloupností. Společně s faktem, že každá konvergentní posloupnost má přesně jednu limitu (cvičení 1.2.3), plyne z předchozí úvahy, že f je dobře definováno.

Dokážeme, že f je prosté. To je snadné, neboť pokud $[a] = [b]$, neboli $a \simeq b$, potom $\lim a = \lim b$, což jsme již vlastně dokázali v odstavci výše.

Nakonec zbývá ověřit, že f je na. Ať tedy $L \coloneqq \lim a$ pro nějakou $a \in C(\mathbb{Q})$. Potom ovšem $[(a)] \in \mathbb{R}$ a podle lemmatu 1.2.12 platí $\lim a = [(a)]$. To ovšem přesně znamená, že $f([(a)]) = L$.

Tím je důkaz hotov. ■

1.3 Poznatky o limitách posloupností

Účelem této sekce je shrnout základní poznatky o limitách posloupností, jež umožní čtenářům limity konkrétních posloupností efektivně počítat a navíc široké jejich použití v následujících kapitolách.

Začneme technickým, ale nezbytným, konceptem *rozšířené reálné osy* a pokračovati budeme jedním z nejdůležitějších a dle našeho názoru též nejkrásnějších výsledků – tzv. Bolzanovou-Weierstraßovou větou. Ta tvrdí v podstatě toto: mám-li omezenou posloupnost, pak z ní již umím vybrat nekonečně mnoho prvků, které tvoří posloupnost *konvergentní*.

Ona krása takového tvrzení spočívá v principu, kterým se podrobně zabývá kombinatorická disciplína zvaná Ramseyho teorie; v principu, že v téměř libovolně chaotické struktuře lze nalézt řád, jakmile jest tato dostatečně velká. Nejedná se jistě o čistě matematický princip, nýbrž dost možná o princip vzniku vesmíru a života, popsaný již starým Aristotelem ve výmluvném výroku, „Celek je více než součet svých částí.“ V mnoha zpytech se tomuto jevu přezdívá Emergent Behavior a představuje stav, kdy chování systému nelze plně popsat pouze studiem jeho jednotlivých prvků.

Pro důkaz Bolzanovy-Weierstraßovy věty potřebujeme jedné pomocné konstrukce, tzv. *systému vnořených intervalů*. Nejprve si však pořádně definujeme samotný pojem *intervalu*. K tomu se nám bude hodit rozšířit množinu reálných čísel o prvky $-\infty$ a ∞.

1.3.1 Rozšířená reálná osa

Definice 1.3.1 (Rozšířená reálná osa)

Definujme množinu $\mathbb{R}^* \coloneqq \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, kde ∞, resp. $-\infty$, je z definice prvek takový, že $\infty \geq x$, resp. $-\infty \leq x$, pro každé $x \in \mathbb{R}$. Množině $\mathbb{R}^*$ budeme někdy říkat *rozšířená reálná osa*. Rozšíříme rovněž operace $+$ a $\cdot$ na prvky ∞ a $-\infty$ následovně.

$$
\begin{aligned}
\infty + a = a + \infty &= \infty, && \text{pro } a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\},\\
-\infty + a = a + (-\infty) &= -\infty, && \text{pro } a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\},\\
\infty \cdot a = a \cdot \infty &= \infty, && \text{pro } a > 0 \text{ nebo } a = \infty,\\
\infty \cdot a = a \cdot \infty &= -\infty, && \text{pro } a < 0 \text{ nebo } a = -\infty,\\
-\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) &= -\infty, && \text{pro } a > 0 \text{ nebo } a = \infty,\\
-\infty \cdot a = a \cdot (-\infty) &= \infty, && \text{pro } a < 0 \text{ nebo } a = -\infty,\\
a \cdot \infty^{-1} = a \cdot (-\infty)^{-1} &= 0, && \text{pro } a \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Varování 1.3.2

Definice 1.3.1 stručně řečeno říká, že se s prvky ∞ a $-\infty$ zachází podobně jako s ostatními reálnými čísly. Ovšem, následující operace zůstávají nedefinovány.

$$\infty + (-\infty), -\infty + \infty, \pm\infty \cdot 0, 0 \cdot (\pm\infty), (\pm\infty) \cdot (\pm\infty)^{-1}.$$

Čtenáři možná zpozorovali, že jsme při své definici limity nerozlišili mezi posloupnostmi, které nemají limitu, protože jejich prvky „skáčou sem a tam“, a posloupnostmi, které ji nemají naopak pro to, že „stále klesají či stoupají“. Pro další studium záhodno se tohoto nedostatku zlišit.

Definice 1.3.3 (Limita v nekonečnu)

Ať $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je reálná posloupnost. Řekneme, že x má limitu ∞, resp. $-\infty$, když pro každé $K > 0, K \in \mathbb{R}$, existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $x_n > K$, resp. $x_n < -K$. Píšeme $\lim x = \infty$, resp. $\lim x = -\infty$.

Na reálných číslech existuje uspořádání $\leq$, které zdědila z čísel přirozených, prostřednictvím čísel celých a konečně čísel racionálních. Protože, vděkem naší konstrukci, jsou celá čísla třídy ekvivalence dvojic čísel přirozených, čísla racionální třídy ekvivalence dvojic čísel celých a čísla reálná limity konvergentních racionálních posloupností, bylo by vskutku obtížné a neproduktivní vypsat konkrétní množinovou definici tohoto uspořádání na reálných číslech. Přidržíme se pročež intuitivního pohledu na věc a důkaz, že $\leq$ je skutečně uspořádání na reálných číslech, necháváme laskavému čtenáři k promyšlení.

Existence uspořádání umožňuje dívat se na podmnožiny $\mathbb{R}$ z jistého „souvislého" pohledu. Nemusejí již být vňaty (jako tomu je u ostatních představených číselných okruhů) jako výčty jednotlivých prvků, ale oprávněně jako „provázky" či „úsečky". Úplnost reálných čísel zaručuje, že z každého reálného čísla mohu plynule dorazit do každého jiného reálného čísla aniž reálná čísla opustím.

Předchozí odstavec vágně motivuje definici *intervalu* – „souvislé" omezené podmnožiny reálných čísel. V souhlasu s definicí intervalu vzniká i pojem *otevřenosti* a *uzavřenosti* množiny – pojem, který je klíčem k definici *topologie* na obecné množině a tím pádem vlastně i základem tak zhruba poloviny celé moderní matematiky.

Směrem k definici intervalu učiňmež koliksi mezikroků.

Definice 1.3.4 (Maximum a minimum)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina. Řekneme, že prvek $M \in X$, resp. $m \in X$, je *maximem*, resp. *minimem*, množiny X, když pro každé $x \in X$ platí $x \leq M$, resp. $x \geq m$. Píšeme $M = \max X$, resp. $m = \min X$.

Definice 1.3.5 (Horní a dolní závora)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina. Řekneme, že prvek $Z \in \mathbb{R}^*$ resp. $z \in \mathbb{R}^*$, je *horní*, resp. *dolní*, *závora* množiny X, když pro každé $x \in X$ platí $x \leq Z$, resp. $x \geq z$.

Má-li množina X horní, resp. dolní, závoru, **která leží v** $\mathbb{R}$ (tedy není rovna $\pm\infty$), říkáme, že je *shora*, resp. *zdola*, *omezená*. Je-li navíc X omezená shora i zdola, říkáme krátce, že je *omezená*.

Definice 1.3.6 (Supremum a infimum)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je množina. Řekneme, že prvek $S \in \mathbb{R}^*$, resp. $i \in \mathbb{R}^*$, je *supremum*, resp. *infimum*, množiny X, když je to její *nejmenší horní závora*, resp. *největší dolní závora*. Píšeme $S = \sup X$, resp. $i = \inf X$.

Vyjádřeno symbolicky, prvek $S \in \mathbb{R}$ je *supremem* množiny X, když $x \leq S$ pro všechna $x \in X$, a kdykoli $x \leq Z$ pro nějaký prvek $Z \in \mathbb{R}$ a všechna $x \in X$, pak $S \leq Z$. Prvek $i \in \mathbb{R}$ je *infimem* množiny X, když $x \geq i$ pro všechna $x \in X$, a kdykoli $x \geq z$ pro nějaký prvek $z \in \mathbb{R}$ a všechna $x \in X$, pak $i \geq z$.

Varování 1.3.7

Vřele radíme čtenářům, aby sobě bedlivě přečetli předchozí tři definice a uvědomili si – velmi zásadní, leč lehko přehlédnuté – jejich vzájemné rozdíly.

- Maximum a minimum množiny X je z definice **vždy prvkem této množiny**. Maximem množiny $\{1, 2, 3\}$ je prvek 3 a jeho minimem je prvek 1.
- Horní, resp. dolní, závora množiny X je **libovolné rozšířené reálné číslo** (tedy klidně

i $\pm\infty$), které je větší, resp. menší, než všechny prvky X. Horní závorou množiny $\{1, 2, 3\}$ je číslo 69, též ∞ a též číslo 3. Horní a dolní závora **může, ale nemusí**, být prvkem X.

- Supremum, resp. infimum, množiny X je **rozšířené reálné číslo**, které je větší, resp. menší, než všechny prvky X, ale **zároveň menší, resp. větší, než každá jeho horní, resp. dolní, závora**. Supremum a infimum **může, ale nemusí, ležet v množině** X. Touto vlastností se přesně rozlišují *uzavřené* a *otevřené* intervaly – interval je uzavřený, když jeho supremum v něm leží, kdežto otevřený, když nikoliževěk. Supremem množiny $\{1, 2, 3\}$ je číslo 3 a jeho infimem je číslo 1.

Daná podmnožina $X \subseteq \mathbb{R}$ **nemusí nutně mít maximum a minimum**, ale, a to si dokážeme, **má vždy supremum, resp. infimum**. Je-li navíc shora, resp. zdola, omezená, pak toto supremum, resp. infimum, leží v $\mathbb{R}$.

Cvičení 1.3.8

Určete z definice suprema a infima $\inf \emptyset$ a $\sup \emptyset$.

Cvičení 1.3.9

Dokažte, že $\sup X$ a $\inf X$ jsou určeny jednoznačně.

Axiomatická definice reálných čísel

Přestože jsme konstrukci reálných čísel úspěšně dokončili použitím konvergentních racionálních posloupností, stojí snad za zmínku i jejich axiomatická definice, která se obvykle uvádí v úvodních učebnicích matematické analýzy.

Překvapivě není v principu tak odlišná od jejich konstrukce, kromě jednoho konkrétního axiomu, jenž právě zaručuje úplnost; není z něj však vůbec na první, v zásadě ani na druhý, pohled vidno, že takovou vlastnost skutečně implikuje.

Definice 1.3.10 (Axiomatická definice reálných čísel)

Množina $\mathbb{R}$ se v zásadě definuje jako nekonečné uspořádané těleso s vlastností úplnosti. Tedy,

- existují prvky $0, 1 \in \mathbb{R}$ a operace $+, \cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ s inverzy $-, ^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takové, že

$$(\mathbb{R}, +, -, 0, \cdot, ^{-1}, 1)$$

  je nekonečné těleso;

- existuje uspořádání $\leq$ na $\mathbb{R}$, které je lineární (každé dva prvky lze spolu porovnat);
- (**axiom úplnosti**) každá shora omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má supremum.

Je to právě on poslední axiom v předchozí definici, jehož použití jsme se chtěli vyhnout, bo dohlédnout jeho hloubky je obtížné a neintuitivní.

Dokážeme si zde ovšem, že naše definice reálných čísel odpovídá jejich axiomatické. Otázky nekonečnosti, podmínek tělesa i uspořádání jsme již zodpověděli. Zbývá dokázat axiom úplnosti. Pro stručnost vyjádření se nám bude hodit následující definice.

Definice 1.3.11 (Monotónní posloupnost)

O posloupnosti $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ řekneme, že je

- *rostoucí*, když $x_{n+1} > x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *klesající*, když $x_{n+1} < x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *neklesající*, když $x_{n+1} \geq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$;
- *nerostoucí*, když $x_{n+1} \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$.

Ve všech těchto případech díme, že posloupnost x je *monotónní.*

Tvrzení 1.3.12 (Axiom úplnosti)

Ať $X \subseteq \mathbb{R}$ je shora omezená množina. Pak existuje $\sup X$.

Důkaz. Ježto naše pojetí úplnosti se překládá do znění, „Každá konvergentní posloupnost má limitu“, není snad nečekané, že se důkaz *axiomu úplnosti* o tuto vlastnost opírá.

Je-li X prázdná, pak má supremum podle cvičení 1.3.8. Ať je tedy X neprázdná a shora omezená a $Z \in \mathbb{R}$ je libovolná horní závora X. Protože X je neprázdná, existuje $q \in \mathbb{R}$ takové, že $q < x$ pro nějaké $x \in X$. Definujeme posloupnosti Z_n a q_n podle následujících pravidel.

- Položme $Z_0 \coloneqq Z$ a $q_0 \coloneqq q$.
- Uvažme číslo $p_n \coloneqq (Z_n + q_n)/2$.
- Je-li p_n horní závorou X, položme $Z_{n+1} \coloneqq p_n$ a $q_{n+1} \coloneqq q_n$.
- Není-li p_n horní závorou X, položme $Z_{n+1} \coloneqq Z_n$ a $q_{n+1} \coloneqq p_n$.

Pak jsou posloupnosti Z_n a q_n konvergentní (**proč?**) a indukcí lze snadno dokázat (**dokažte!**), že q_n **není** horní závorou X a Z_n **je** horní závorou X pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Navíc platí $\lim |Z_n - q_n| = 0$ (**proč?**), a tedy $\lim Z_n = \lim q_n$.

Označme $S \coloneqq \lim Z_n = \lim q_n$. Dokážeme, že $S = \sup X$. Je třeba ukázat, že

(1) S je horní závorou X;

(2) S je nejmenší horní závorou.

Předpokládejme pro spor, že existuje $x \in X$ takové, že $x > S$. To znamená, že existuje konstanta $c > 0$ taková, že $x - S = c$. Volme $\varepsilon \coloneqq c/2$. Pro toto ε z definice limity existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna $n \geq n_0$ platí $|Z_n - \lim Z_n| = |Z_n - S| < \varepsilon$. Jelikož (Z_n) je nerostoucí a $S \leq Z_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, je absolutní hodnota v předchozím výrazu zbytečná a můžeme zkrátka psát $Z_n - S < \varepsilon$. Potom ale pro všechna $n \geq n_0$ máme

$$x - Z_n = x + S - S - Z_n = (x - S) + (S - Z_n) > c - \varepsilon = \frac{c}{2},$$

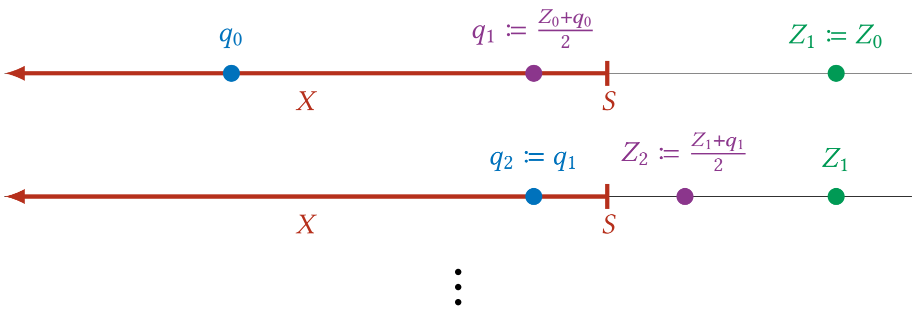
čili speciálně $x > Z_n$, což je ve sporu s tím, že Z_n je horní závora X. To dokazuje (1).

Tvrzení (2) lze dokázat obdobně, akorát využitím posloupnosti (q_n) spíše než (Z_n). Opět ať pro spor existuje $Z \in \mathbb{R}$, které je horní závorou X, a $Z < S$. Pak nalezneme konstantu $c > 0$ takovou, že $S - Z = c$. Opět z definice limity vezmeme $\varepsilon \coloneqq c/2$ a k němu $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\forall n \geq n_0$ platí $S - q_n < \varepsilon$, kde absolutní hodnotu jsme mohli vynechat, ježto jest posloupnost (q_n) neklesající a $S \geq q_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Nyní pro $n \geq n_0$ platí

$$q_n - Z = q_n - S + S - Z = (q_n - S) + (S - Z) > c - \varepsilon = \frac{c}{2},$$

čili speciálně $q_n > Z$, což je ve sporu s tím, že q_n není horní závora X pro žádné $n \in \mathbb{N}$, zatímco Z je.

Tím je důkaz dokončen. ∎



Obrázek 1.4: Důkaz axiomu úplnosti

Cvičení 1.3.13

Dokažte všechna (**proč?**) a (**dokažte!**) v důkazu předchozího tvrzení.

Jako každé poctivé tvrzení, jmá i axiom úplnosti svých důsledkův. Tyto bychom pochopitelně dokázati uměli i bez něj, neboť axiom úplnosti z naší konstrukce reálných čísel přímo plyne. Nicméně, zcela jistě jej lze použít jako nástroj ke zkrácení některých důkazů.

Nejprve duální tvrzení.

Tvrzení 1.3.14

Každá zdola omezená podmnožina $\mathbb{R}$ má infimum.

Důkaz. Cvičení. Doporučujeme čtenářům se zamyslet, jak tvrzení snadno plyne z axiomu úplnosti, aniž opakují konstrukci z jeho důkazu. ∎

Jedno, jak bude časem vidno, mimořádně užitečné tvrzení dí, že shora omezené rostoucí či neklesající posloupnosti a zdola omezené klesající či nerostoucí posloupnosti mají vždy limitu. To je opět intuitivně zřejmý fakt (jistě?), ale, kterak čtenáři doufáme již pozřeli, tvrzení o věcech nekonečných řídce radno nechati pouze intuici.

Lemma 1.3.15 (Limita monotónní posloupnosti)

(a) *Každá rostoucí nebo neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.*

(b) *Každá klesající nebo nerostoucí zdola omezená posloupnost je konvergentní.*

Důkaz. Dokážeme pouze část (a), část (b) je ponechána jako cvičení.

Ať $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ je neklesající posloupnost. Důkaz pro rostoucí posloupnost je téměř dokonale stejný, liše se akorát ostrými nerovnostmi v několika výrazech. Z předpokladu je x shora omezená, tudíž má množina jejích členů $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ horní závoru. Z axiomu úplnosti má tato množina též supremum; označíme je S.

Ukážeme, že $\lim x = S$. Ať je $\varepsilon > 0$ dáno. Z definice suprema není $S - \varepsilon$ horní závora množiny $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Tedy existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $x_{n_0} > S - \varepsilon$. Protože x je neklesající – tj. $x_n \geq x_{n_0}$, kdykoli $n \geq n_0$ – platí rovněž $x_n > S - \varepsilon$ pro všechna $n \geq n_0$. Jelikož S je horní závora množiny členů x, platí $S \geq x_n$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. To však znamená, že $|x_n - S| = S - x_n$, a tedy z nerovnosti $x_n > S - \varepsilon$ po úpravě plyne, že $\varepsilon > S - x_n = |x_n - S|$, čili $\lim x = S$. ■

Posledním důsledkem axiomu úplnosti, který si uvedeme, je tzv. *Archimédova vlastnost reálných čísel*. Obecně, těleso se nazývá *Archimédovo*, když vágně řečeno neobsahuje žádné nekonečně velké ani nekonečně malé prvky **vzhledem ke zvolené absolutní hodnotě**. Ukazuje se, že na reálných číslech lze definovat jen dva typy funkcí absolutní hodnoty – jednu „obvyklou“, též vyjádřitelnou vztahem $|x| = \sqrt{x^2}$, a pak tzv. p-adickou absolutní hodnotu pro p prvočíslo. Libovolná další konstrukce absolutní hodnoty (majíc přirozené vlastnosti) již je ekvivalentní absolutní hodnotě jednoho z těchto typů. Reálná čísla jsou Archimédova vzhledem k obvyklé absolutní hodnotě, ale nikoliv vzhledem k libovolné p-adické absolutní hodnotě.

Lemma 1.3.16 (Archimédova vlastnost reálných čísel)

Pro každé $\varepsilon \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, *existuje* $n \in \mathbb{N}$ *takové, že* $1/n < \varepsilon$.

Důkaz. Stačí dokázat, že

$$\inf \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\} = 0,$$

neboť potom z definice infima pro každé $\varepsilon > 0$ není $0 + \varepsilon = \varepsilon$ dolní závorou $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, čili existuje $n \in \mathbb{N}$ takové, že $1/n < \varepsilon$.

Číslo 0 je zřejmě dolní závorou množiny $\{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Podle tvrzení 1.3.14 má tato množina infimum, označme je i. Pro spor ať $i > 0$. Potom $1/i \in \mathbb{R}$ a z nerovnosti $1/n \geq i$ (i je dolní závora) plyne, že $n \leq 1/i$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$. Potom je ovšem číslo $1/i$ horní závorou množiny $\mathbb{N}$ a podle axiomu úplnosti má množina $\mathbb{N}$ supremum; označme je S. Pro každé $n \in \mathbb{N}$ tudíž platí $n \leq S$. Ovšem, z definice přirozených čísel platí $n + 1 \in \mathbb{N}$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Speciálně toto tedy znamená, že $n + 1 \leq S$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Pak je ovšem $S - 1$ horní závorou množiny $\mathbb{N}$, což je spor, neboť S bylo z předpokladu supremum $\mathbb{N}$.

Musí pročež platit $i = 0$, což bylo dokázati. ■

Poznámka 1.3.17

Lemma 1.3.16 v podstatě říká, že $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.

Bedliví čtenáři si mohou pamatovat, že jsme ono lemma již v předchozím textu bez uvedení použili (například v důkaze důsledku 1.2.13). Jedná se však z naší strany o drzost pouze malou. Totiž, jeho platnost je téměř okamžitým důsledkem tvrzení 1.2.11, jak si čtenáři rádi ověří v následujícím cvičení.

Cvičení 1.3.18

Dokažte, že lemma 1.3.16 je důsledkem tvrzení 1.2.11.

1.3.2 Bolzanova-Weierstraßova věta

Konečně kráčíme cestou definice intervalu a důkazu slibované Bolzanovy-Weierstraßovy věty. Vybaveni pojmy maxima (minima) a suprema (infima), můžeme intuitivní představě intervalu dát formální ráz. Vágně řečeno je interval *souvislá* podmnožina $\mathbb{R}$. Formálně je no … vlastně totéž.

Definice 1.3.19 (Interval)

Podmnožinu $I \subseteq \mathbb{R}$ nazveme *intervalem*, pokud pro každé dva prvky $x < y \in I$ a $z \in \mathbb{R}$ platí

$$x < z < y \Rightarrow z \in I.$$

Intervaly mohou být otevřené, uzavřené a polouzavřené (či polootevřené?). Tyto vlastnosti intervalů jsou definovány pomocí existence maxim a minim.

Definice 1.3.20 (Typy intervalů)

Ať $I \subseteq \mathbb{R}$ je interval. Řekneme, že I je

- *otevřený*, když **nemá** maximum ani minimum;
- *uzavřený*, když **má** maximum i minimum;
- *shora uzavřený*, když má pouze maximum, ale nikoli minimum;
- *zdola uzavřený*, když má pouze minimum, ale nikoli maximum.

Otevřený interval I zapisujeme jako $I = (a, b)$, kde $a = \inf I$ a $b = \sup I$. Čísla a, b mohou být i $\pm\infty$, pokud I není shora či zdola omezený.

Uzavřený interval I zapisujeme jako $I = [a, b]$, kde $a = \min I$ a $b = \max I$. **Pozor!** Zde prvky a i b jsou striktně reálná čísla, tedy například $[0, \infty]$ **není** interval, neboť se nejedná o podmnožinu $\mathbb{R}$.

Definice 1.3.21 (Délka intervalu)

Délkou intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ s $a \coloneqq \inf I$ a $b \coloneqq \sup I$ myslíme číslo $\lambda(I) \coloneqq b - a$, je-li toto definováno.

Příklad 1.3.22 (Pár intervalů)

Množina

- $I = (4,6)$ je otevřený interval. Zřejmě platí $4 = \inf I$ a $6 = \sup I$. Ovšem, I nemá maximum ani minimum.
- $I = [-5,4]$ je uzavřený interval. Zřejmě platí $-5 = \min I = \inf I$ a $4 = \max I = \sup I$.
- $I = [-2,\infty)$ je zdola uzavřený interval. Platí $-2 = \min I = \inf I$ a $\infty = \sup I$.
- $\mathbb{R} = (-\infty,\infty)$ je otevřený interval. Platí $-\infty = \inf \mathbb{R}$ a $\infty = \sup \mathbb{R}$.
- $I = (4,4)$ je prázdná, neboť je to z definice množina čísel $x \in \mathbb{R}$ takových, že $4 < x < 4$.
- $I = [\exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4}))), \exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4})))]$ je rovna $\{\exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4})))\}$, neboť je to z definice množina čísel $x \in \mathbb{R}$ takových, že

$$\exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4}))) \leq x \leq \exp(\tan(\log^3(\sqrt[7]{\pi/4}))).$$

K pojmu intervalu se váže jedna speciální konstrukce zvaná *systém vnořených intervalů*. Definujeme si ji a ihned poté si povíme, čím je speciální.

Definice 1.3.23 (Systém vnořených intervalů)

Systém vnořených intervalů je posloupnost $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ podmnožin $\mathbb{R}$ (čili zobrazení $\mathbb{N} \to 2^{\mathbb{R}}$) splňující následující podmínky:

- I_n je **uzavřený** interval pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- $I_{n+1} \subseteq I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$;
- $\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$.

Následující tvrzení je dalším ekvivalentem axiomu úplnosti a důsledku 1.2.13. V některých definicích reálných čísel se jím axiom úplnosti nahrazuje.

Tvrzení 1.3.24 (O vnořených intervalech)

Ať $(I_n)_{n=0}^{\infty}$ je systém vnořených intervalů. Pak $\#(\bigcap_{n=0}^{\infty} I_n) = 1$, čili v průniku všech intervalů I_n leží přesně jeden prvek.

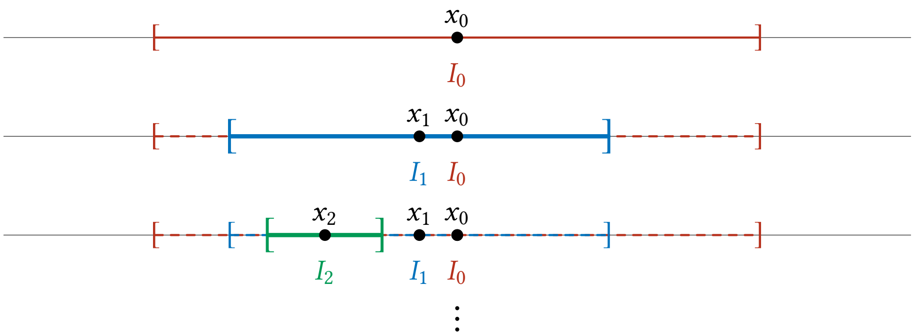
Důkaz. Je třeba dokázat, že takový prvek existuje a že je právě jeden. Začněme jednoznačností.

Předpokládejme, že existují prvky $x, y \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$ a $x \neq y$. Pak ale existuje konstanta $c > 0$ taková, že $|x-y| = c$. Protože však $x, y \in I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, speciálně platí $\lambda(I_n) \geq c$ pro každé $n \in N$. To je spor s tím, že $\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$.

Dokážeme existenci. Označme $I_n = [a_n, b_n]$. Definujme posloupnost $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x_n \coloneqq (a_n + b_n)/2$. Na volbě čísla $(a_n+b_n)/2$ není nic speciálního. Stačí volit jakékoliv $x_n \in I_n$. Ukážeme, že x konverguje. Ať je dáno $\varepsilon > 0$. Protože $\lim_{n\to\infty} \lambda(I_n) = 0$, nalezneme $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda(I_n) < \varepsilon$ pro $n \geq n_0$. Potom ale platí $|x_n - x_m| < \varepsilon$ pro všechna $m, n \geq n_0$, neboť $x_n, x_m \in I_{n_0}$, což je zaručeno podmínkou $I_n, I_m \subseteq I_{n_0}$.

Podle důsledku 1.2.13 má x limitu, označme ji L. Chceme ukázat, že $L \in \bigcap_{n=0}^{\infty} I_n$. K tomu je třeba ověřit, že $L \in I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. Ať pro spor existuje $n_L \in \mathbb{N}$ takové, že $L \notin I_{n_L}$. Protože intervaly jsou vnořené, znamená toto, že $L \notin I_n$ pro $n \geq n_L$. Volme $\varepsilon > 0$. K němu nalezneme $n_I \in \mathbb{N}$ takové, že $\lambda(I_n) < \varepsilon$ pro $n \geq n_I$. Ať $n_0 \coloneqq \max(n_L, n_I)$. Pak na jednu stranu pro $n \geq n_0$ platí $\lambda(I_n) < \varepsilon$ a na druhou stranu $L \notin I_n$. Sloučením obou vztahů dostaneme $|x_n - L| \geq \varepsilon$ pro $n \geq n_0$, neboť $x_n \in I_n$ pro každé $n \in \mathbb{N}$. To je spor s tím, že $\lim x = L$.

Důkaz je hotov. ■



Obrázek 1.5: Důkaz tvrzení 1.3.24.

Již máme všechny ingredience k formulaci a důkazu Bolzanovy-Weierstraßovy věty. Je stěžejním tvrzením pro matematickou analýzu a pro matematiku obecně. Jeho filosofický význam dlí v poznání, že v „příliš velkých" strukturách přirozeně vzniká řád.