Pár hintů k úlohám z mat. olympiády (72. ročník, kategorie A).

1. Zamyslete se, jestli se ta rovnice nedá nějak zjednodušit. Dále, $\lfloor a \rfloor$ je vždycky celé číslo pro každé $a \in \mathbb{R}$. Co se tím mohu dozvědět o té další proměnné?

2. Trojúhelník $AB'C'$ je dvakrát větší než ABC. V trojúhelnících se všechny vzdálenosti zvětšují lineárně, to znamená, že $AB'C'$ má vzdálenosti mezi všemi body (ne jen vrcholy) dvakrát větší.

3. Nejdřív si položte jednodušší otázku. Hledáme **nejmenší** možný počet tahů. Je dobré začít tím, že si vytvořím nějakou (sice nereálnou ale aspoň přibližnou) spodní hranici toho, kolik budu potřebovat tahů. Co kdybych mohl žetony posouvat i skrz ostatní žetony (zkrátka na libovolné sousední políčko). Kolik potřebuji v takovém případě minimálně tahů, abych každý žeton dostal tam, kde má na konci být? Nedá se tahle situace náhodou rozšířit na tu původní?

4. Jaký má medián posloupnost $1, 2, 3, \ldots, k$ a posloupnost $1, 2, 3, \ldots, n$? Jaké číslo vás jako první napadne, že by měl být medián **podílu** těchhle posloupností? Ten tip je správně, ale je třeba to dokázat. Já jsem postupoval tak, že jsem ukázal, že to číslo má stejný počet zlomků nalevo jako napravo. Ale určitě to jde i chytřejc.

5. Tuhle úlohu jsem řešil hloupě, takže spíš budu radši, když to zkusíte jinak. Nenapadlo mě jiné řešení než to prostě upočítat. Položte si ten trojúhelník do reálné roviny a rozmyslete si, že si můžete počítání hodně zjednodušit. Například si mohu nějak pěkně volit souřadnice jednoho z vrcholů. Taky, protože se všechno v trojúhelníku zvětšuje lineárně, mohu si i zvolit libovolně délku jedné strany. Najděte si vzorečky pro osu úhlu a ortocentrum (průnik výšek) a pak si zahrajte na kalkulačku. **Ale zkuste to prosím nejdřív jinak**.

6. (těžká úloha, hlavně část (b)).

   (a) Každé číslo v té posloupnosti musí být dělitelné **nějakým** prvočíslem. Stačí vám proto ukázat, že když nějaké prvočíslo dělí nějaký člen, pak nemůže dělit žádný vyšší. Protože je nekonečně mnoho členů a každé různé prvočíslo dělí nejvýše jeden, musí těch prvočísel dělících jeden člen být nekonečně mnoho.

   (b) Tuhle úlohu jsem řešil s trochou znalosti teorie čísel, takže neznám zatím žádné čistě „středoškolské“ řešení. Ale aspoň startovní bod, který by měl fungovat, vám prozradím. Řeště to sporem. Představte si, že by jen konečně mnoho prvočísel nedělilo žádný člen té posloupnosti. Protože jich je jen konečně mnoho, existuje mezi nimi nějaké nejvyšší (třeba p). Co pak můžeme říct o všech prvočíslech větších než p?