Strojíme matiku puntíky a šipkami

Adam Klepáč

28. června 2024

V tomto tématku se podíváme na to, co jsou *kategorie* a jak se dají použít k výtvoru mnoha základních stavebních kamenů matematiky, jako *logiky* nebo *množin*.

Úvod

Mám rád obrázky. Máš rád obrázky. Má rád obrázky. Máme rádi obrázky. Máte rádi obrázky. Mají rádi obrázky.

Teď vážně, kdo nemá rád obrázky. Věřili byste nám, drazí čtenáři, tvrdili-li bychom vám, že celou matematiku umíme překreslit do obrázků? Ovšem, ta sama o sobě není nikterak odvážná výpověď; vždyť písmena, čísla i vše ostatní na papíře jsou vlastně, obrázky. My zde nechováme na mysli ledajaké obrázky, nýbrž obrázky, které vzniknou kresbou pouze dvou věcí – puntíků ($\bullet$) a šipek ($\longrightarrow$) mezi puntíky. Co však míníme slovy „překreslit celou matematiku“, zůstane ještě nějakou chvíli oděno v rouchu tajemství.

1. Teorie kategorií

Teorie kategorií je matematická disciplína, jež postupně vznikala v průběhu 20. století. Za její debut v širém matematickém světe lze považovat knihu *Categories for the Working Mathematician* [1] od Saunderse Mac Lana vydanou roku 1971. Dnes se vskutku štědře využívá především v oblasti algebry.

Jsouc někdy přezdívána *metamatematikou*, teorie kategorií zkoumá vpravdě matematiku jako takovou. Je vlastně jakýmsi pohledem seshora na to rašeliniště struktur a konceptů, které vypadají, že mají mnoho společného, ale i mnoho rozdílného. Teorie kategorií zkoumá právě ty vlastnosti, které spolu všechny sdílejí.

V tomto tématku se s ní velmi pravděpodobně setkáte poprvé. Setkání bude to velmi neformální, intuitivní a obrázkové, protože na víc schází času i smyslu. Ba, před samotným seznámením se stroze rozhovoříme o jednom zásadním rozumovém kroku v pojetí matematiky (a částečně světa), jejž je radno pro zdárné pochopení učinit.

V teorii kategorií nebývá zvykem definovat věci určením toho, „co jsou“, nýbrž výčtem „vlastností, které splňují“ či „informací, které nesou“. Místo aby řekli: „Toto je hrnek,“ kategorici dějí spíše: „Toto je věc, která slouží k uskladnění tekutiny během pití.“ A . . . pak dalších mnoho stran dokazují, že všechny takové věci jsou sobě podobné. Tento velmi svobodný přístup má podíl na úspěchu, který teorie kategorií zaznamenala. Totiž, logika i teorie množin (nikoli explicitně, ale svým výkladem) v sobě již přirozeně skýtají jistou *intepretaci* – logická spojka $\wedge$ znamená „a zároveň“, množina je „souhrn prvků, jež spolu souvisejí“ a podobně. Interpretace objektu podvědomě zužuje náš obzor a v zásadě nás nutí s ním pracovat konkrétním způsobem. Proto vám teď neprozradíme, co kategorie *je* (protože to nevíme), ale jenom a pouze, *co ji tvoří*. Následující „definice“ je šita tak, aby v sobě shrnovala jen ty zcela nejvšednější vlastnosti všemožných matematických struktur

[1] V době vzniku této knihy byla teorie kategorií považována za abstraktní „hrátky“ matematiků, již měli dostatek majetku, aby nemuseli pracovat. Užitečnost této teorie i v principu praktičtějším odvětvím ukázal právě S. Mac Lane – odtud přívlastek *working* v názvu.

(možná jste slyšeli o *grupách, okruzích* či *vektorových prostorech*). To není bez jejich hlubší znalosti snadné prohlédnout, prosíme pročež shovívavé čtenáře o důvěru.

Nyní, **kategorie** $\mathcal{A}$ je dána následujícími daty:

- **puntíky** (formálně **objekty**), které budeme značit symbolem $\bullet$ či malými písmeny latinské abecedy ($a, b, c, \ldots$), bude-li třeba formálního zápisu;
- **šipky** (formálně **morfismy**), které vždy vedou z puntíku do puntíku. Ty budeme značit šipkou $\longrightarrow$, popřípadě malými písmeny řecké abecedy ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots$). Formální zápis faktu, že šipka α vede z puntíku a do puntíku b vypadá takto:

$$a \xrightarrow{\alpha} b \quad \text{nebo} \quad \alpha : a \to b.$$

Všechny šipky z a do b v kategorii $\mathcal{A}$ značíme $\mathcal{A}(a, b)$.

Před dokončením definice kategorie se stručně vyjádříme ke značení. Fakt, že objekt a patří do kategorie $\mathcal{A}$ se obvykle píše jako $a \in \mathcal{A}$. To je ovšem pouze drzé zneužití značení z teorie množin! *V žádném smyslu* neznamená, že a je *prvkem* kategorie $\mathcal{A}$, protože $\mathcal{A}$ rozhodně nemusí být množina. Ježto si silně nepřejeme, abyste nebozí čtenáři přemýšleli o kategoriích jako o *množinách* a o objektech jako o *prvcích*, tohoto tradičního značení se zdržíme a budeme psát například $a \blacktriangleleft \mathcal{A}$, abychom vyjádřili, že a je objekt kategorie $\mathcal{A}$. Ještě jednou a znovu – to neznamená, že *a patří do* či *leží v* $\mathcal{A}$. Onen vztah pouze vyjadřuje, že objekt a je součástí dat popisujících kategorii $\mathcal{A}$. Podobně, fakt, že α je šipka z a do b v kategorii $\mathcal{A}$ budeme někdy psát jako $\alpha \blacktriangleleft \mathcal{A}(a, b)$.

V teorii kategorií je velmi zásadní pojem *komutativity diagramu*. Také slovní spojení jistě budí děs a hrůzu: „Neslíbili jste neformální úvod?" Ovšem, **diagram** je zcela libovolný obrázek z puntíků a šipek mezi puntíky, o kterém lze prohlásit, že má nějaký počáteční puntík a koncový puntík (po směru šipek, pochopitelně). Takový diagram **komutuje**, když jsou všechny cesty z počátečního puntíku do koncového puntíku v kategorii $\mathcal{A}$ stejné.

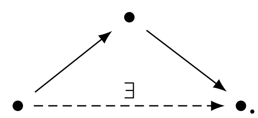
PŘÍKLAD 1. *Následující tři diagramy*

Navíc,

- šipky lze **skládat**. To znamená, že kdykoli v kategorii $\mathcal{A}$ nastává situace

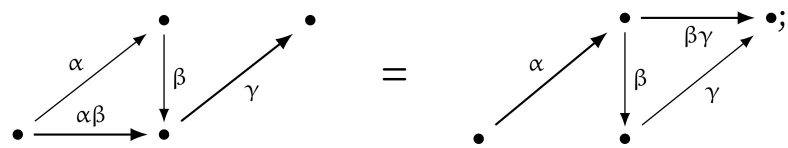
$$\begin{tikzcd} & \bullet \arrow[dr] & \\ \bullet \arrow[ur] & & \bullet, \end{tikzcd}$$

pak existuje šipka, která tento trojúhelník doplňuje. Schematicky (a toto značení budeme používat i nadále)

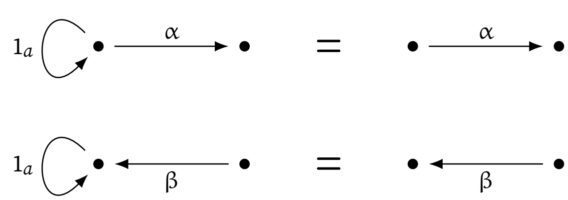


Formálně píšeme, že pro libovolné puntíky a, b, c a šipky $a \xrightarrow{\alpha} b$, $b \xrightarrow{\beta} c$, existuje šipka $a \xrightarrow{\alpha\beta} c$, které se říká jejich **složení**;

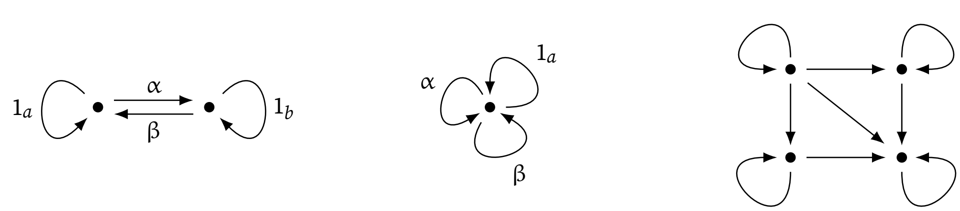
- toto skládání je **asociativní**. Nezáleží na tom, jestli nejdříve složíme α s β a po $\alpha\beta$ pokračujeme šipkou γ, nebo nejdřív vyrobíme $\beta\gamma$ a před touto jdeme šipkou α. To je, soudíme, velmi přirozená podmínka. Formálně $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$, a obrázkově



- každý puntík má kolem sebe jednu speciální **smyčku** – šipku, jež v něm začíná i končí. Speciální v tom smyslu, že její složení s libovolnou jinou šipkou nic nedělá. Je to vlastně taková „zůstaň na místě" šipka. Formálně, ke každému puntíku a existuje šipka $a \xrightarrow{1_a} a$ taková, že kdykoli vezmeme šipku α, která začíná v a, pak $1_a\alpha = \alpha$, a kdykoli vezmeme šipku β, která končí v a, pak $\beta 1_a = \beta$. Obrázkově



PŘÍKLAD 2. *Všechny tyto tři obrázky představují kategorie.*



Slovo „představují" zde tajně obsahuje podmínku, že jsou splněny rovnosti, které musejí platit, aby ony obrázky opravdu byly kategoriemi. Například v prvním obrázku musí platit $\alpha\beta = 1_a$ *a* $\beta\alpha = 1_b$, *protože kolem každého puntíku je jen jediná smyčka. Poslední obrázek je* *mimo jiné zase kategorií jedině v případě, když složení šipek po obvodu dolního trojúhelníku je stejné jako složení šipek po obvodu horního trojúhelníku. Tedy jedině, když se přerušované šipky na následujících obrázcích rovnají.*

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, dashed, "\alpha\beta"] & \\
\bullet \arrow[r, "\beta"'] & \bullet
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, dashed, "\gamma\delta"'] & \bullet \arrow[d, "\delta"] \\
& \bullet
\end{tikzcd}
$$

Jinak bychom museli nakreslit z levého horního puntíku do pravého dolního puntíku šipky dvě – jednu za $\alpha\beta$ a druhou za $\gamma\delta$.

ÚLOHA 1 (0,5 b). *Rozhodněte, které z následujících obrázků **mohou** být kategoriemi. Čili, u kterých lze najít nějaké rovnosti mezi šipkami (jako na obrázcích v příkladě 2) a splnit tak všechny podmínky definice kategorie.*