

Introdução ao Caos

O Atrator de Lorenz

Universidade Federal de Minas Gerais
Equações Diferenciais Numéricas
Francisco Fleury, Mírian Francielle

Dezembro, 2018

1 Introdução

Edward Lorenz, professor do MIT, publicou em 1963 um artigo sobre sua pesquisa sobre um modelo meteorológico. Usando equações diferenciais, Lorenz desenvolveu um sistema simplificado para modelar certos fenômenos relacionados ao clima. No entanto, para certos conjuntos de parâmetros, ao analisar as soluções plotadas num gráfico com tempo como a variável independente, notou-se que para quaisquer condições iniciais, um ponto movendo-se no espaço traça uma curva que sempre converge e se mantém na superfície de duas *asas*, sendo assim o sistema foi descrito como um *atrator*. Porém como veremos, quaisquer ligeiras mudanças nos parâmetros definidos pelo autor, provocam caos no sistema - oscilações irregulares e aperiódicas.

2 As Equações de Lorenz

As equações de Lorenz podem ser escritas como as seguintes equações diferenciais:

$$\frac{dx}{dt} = -\sigma x + \sigma y, \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = \rho x - y - xz, \quad (2)$$

$$\frac{dz}{dt} = -\beta z + xy, \quad (3)$$

onde σ , ρ e β são constantes. A constante σ é chamada de "número de Prandtl" e é uma descrição das características físicas do sistema, como a viscosidade e a condutividade térmica no caso da convecção. Já ρ representa um parâmetro de controle, que é a diferença entre as forças motrizes extremas no sistema. Por fim, β representa um valor que descreve a forma da região onde o atrator de Lorenz está contido.

O Teorema de Existência e Unicidade para sistemas de equações diferenciais garante uma solução única para cada conjunto de condições iniciais,

$$x(0) = x_0,$$

$$y(0) = y_0,$$

$$z(0) = z_0.$$

No entanto, Lorenz descobriu que as trajetórias das soluções eram incrivelmente complicadas e efetivamente imprevisíveis para certos parâmetros. Para determinados valores de σ , ρ e β , as trajetórias são extremamente sensíveis às condições iniciais. Como os dados reais sempre têm alguma incerteza inerente, os valores iniciais nunca são precisamente conhecidos, e podemos ter pouco sucesso modelando fenômenos do mundo real.

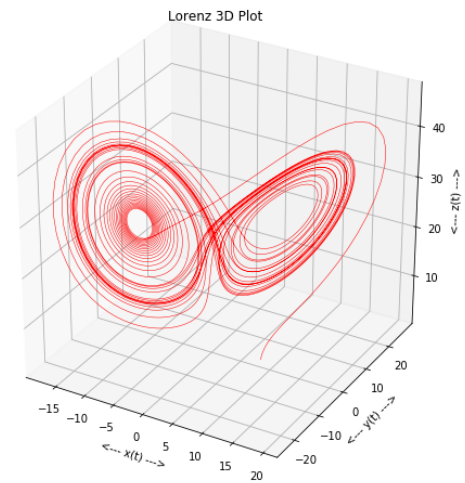
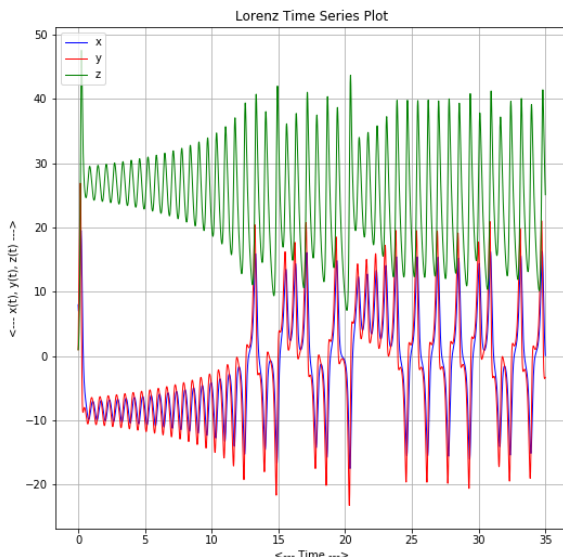
3 Aproximações Numéricas

Começamos as aproximações numéricas com o método de Runge-Kutta de quarta ordem, que é um método muito preciso, e também mais indicado na literatura, para a solução desse sistema de equações. Depois analisamos com o método Preditor-Corretor com uma correção, que também é muito preciso, porém com implementação um pouco mais extensa que o método Runge-Kutta. E concluímos com uma aproximação pelo método de Euler, que se mostrou pouco preciso e por isso apresentou resultados que divergem consideravelmente dos outros dois métodos.

Antes de iniciar as comparações, foi utilizado parâmetros iniciais fixos, considerados "padrões de equilíbrio" por Lorenz, que ao fazer variações em cada constante fosse possível perceber visualmente as diferenças provocadas no sistema.

3.1 Método Runge-Kutta

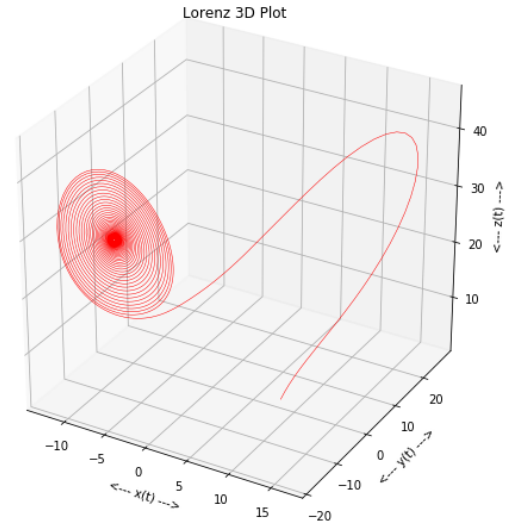
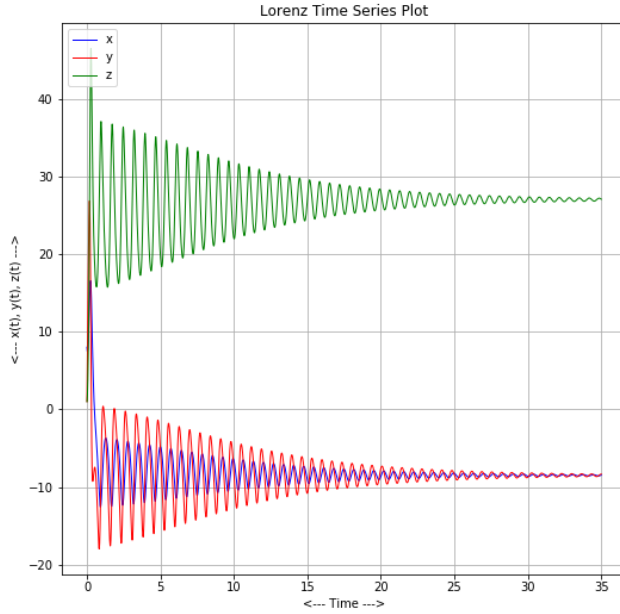
Segue-se as soluções plotadas graficamente do sistema de equações, utilizando as constantes fixadas em $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$. Essas constantes, foram definidas por Lorenz, durante seus estudos.



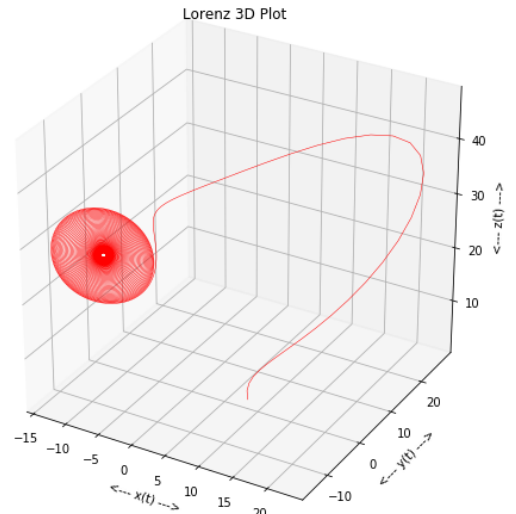
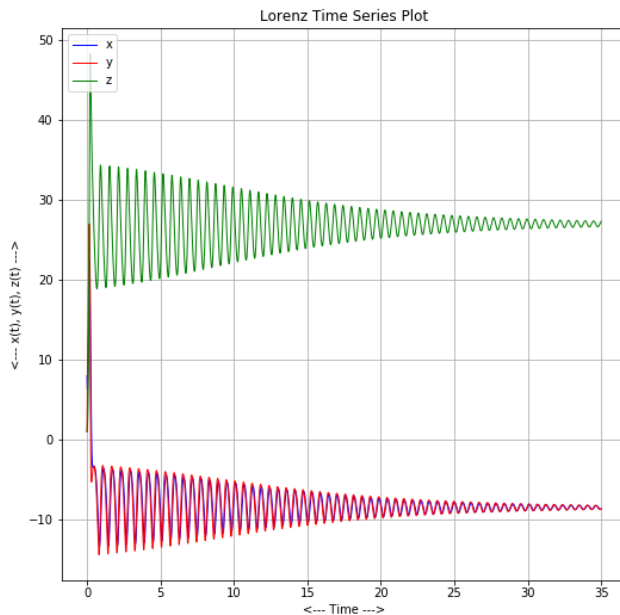
3.1.1 Dependência de Sigma

Ao variarmos os valores pré definidos de σ , diminuindo-o pela metade e dobrando seu valor, é possível notar as diferenças nos comportamentos, em função do tempo, e consequentemente no atrator gerado.

Primeira alteração de sigma: **sigma = 5, beta = 8/3, rho = 28**

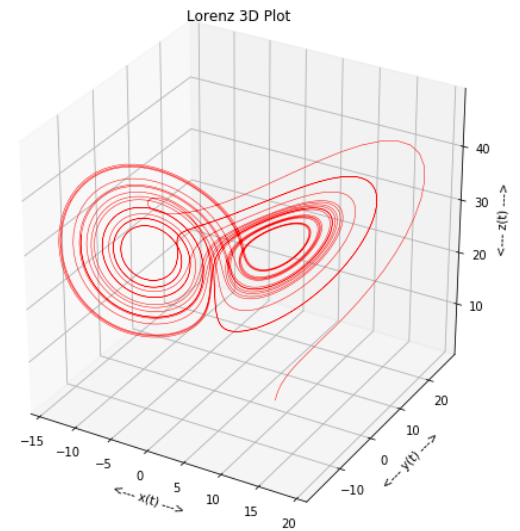
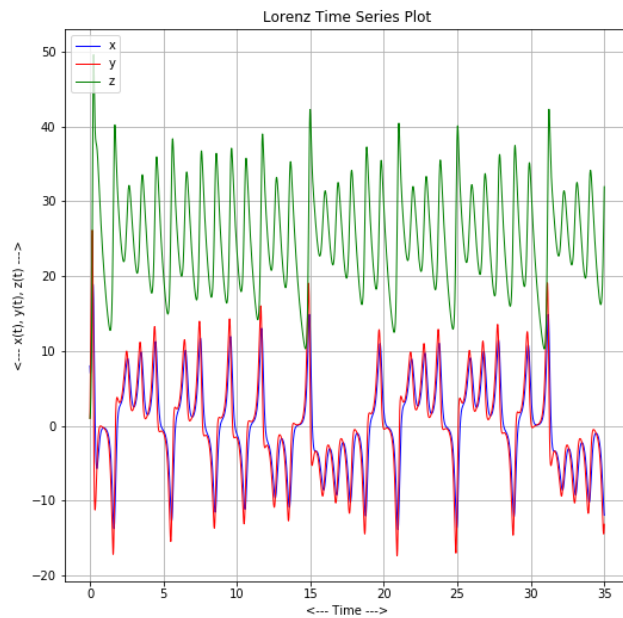


Segunda alteração de sigma: **sigma = 20, beta = 8/3, rho = 28**

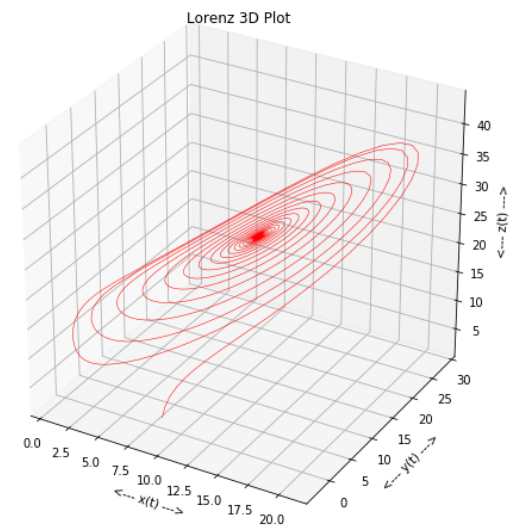
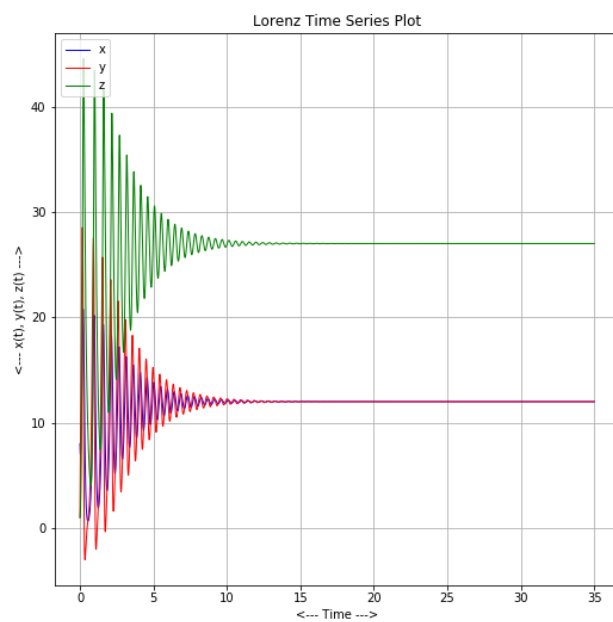


3.1.2 Dependência de Beta

Primeira alteração de Beta: $\sigma = 10$, $\beta = 4/3$, $\rho = 28$

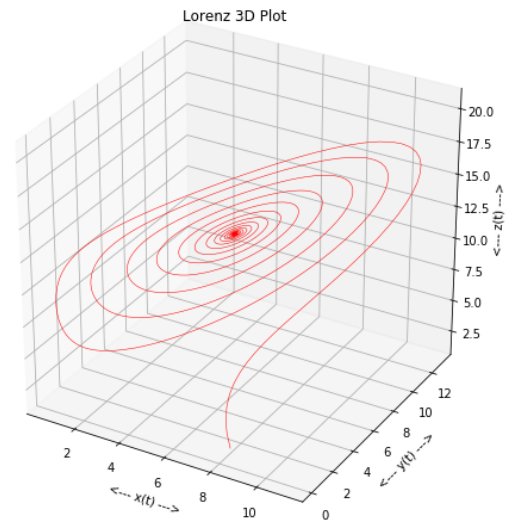
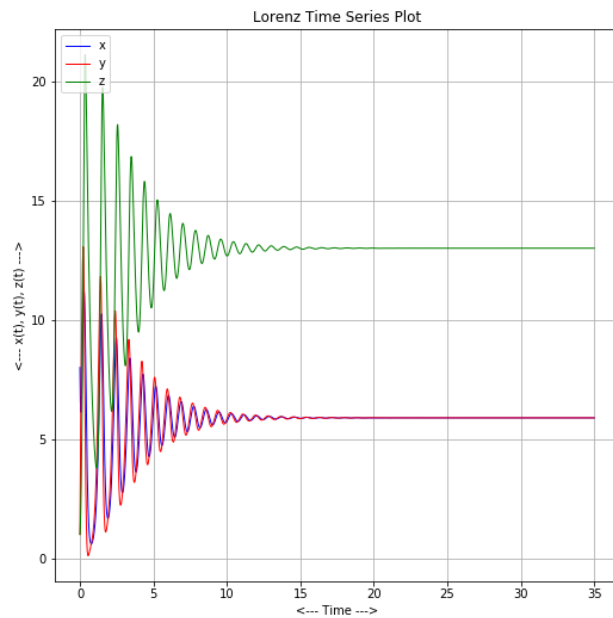


Segunda alteração de Beta: $\sigma = 10$, $\beta = 16/3$, $\rho = 28$

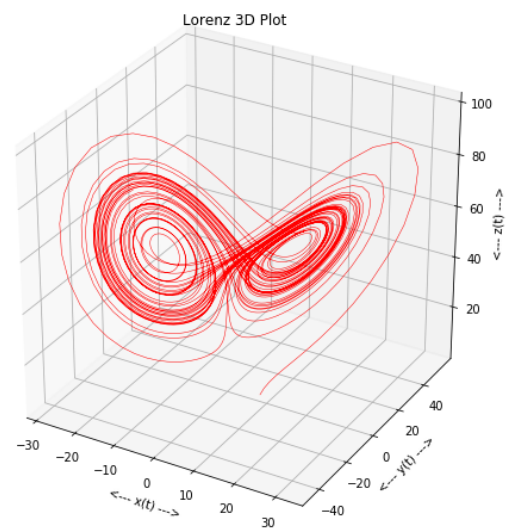
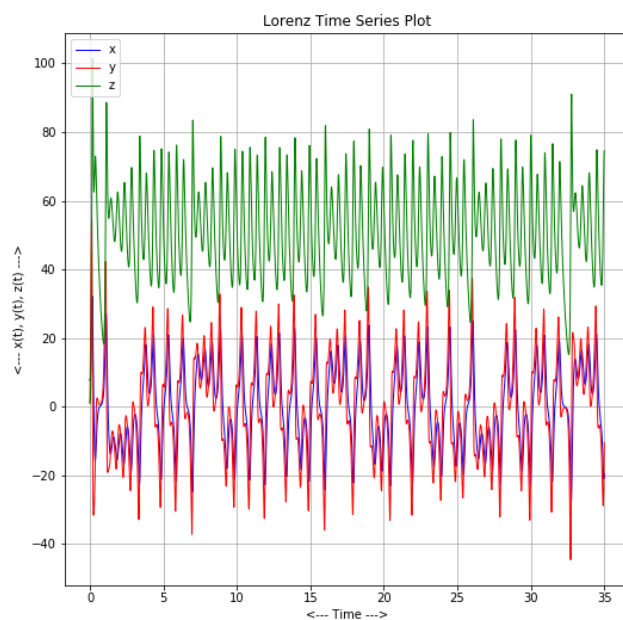


3.1.3 Dependência de Rho

Primeira alteração de rho: $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 14$

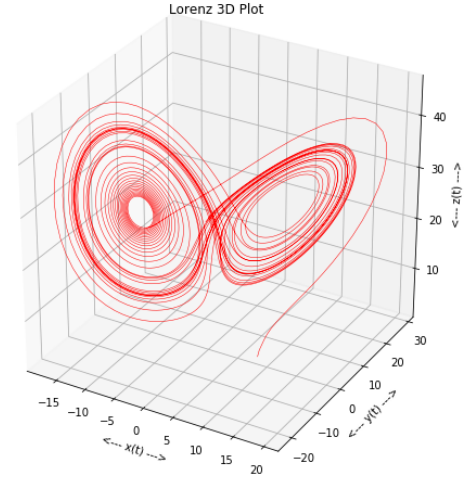
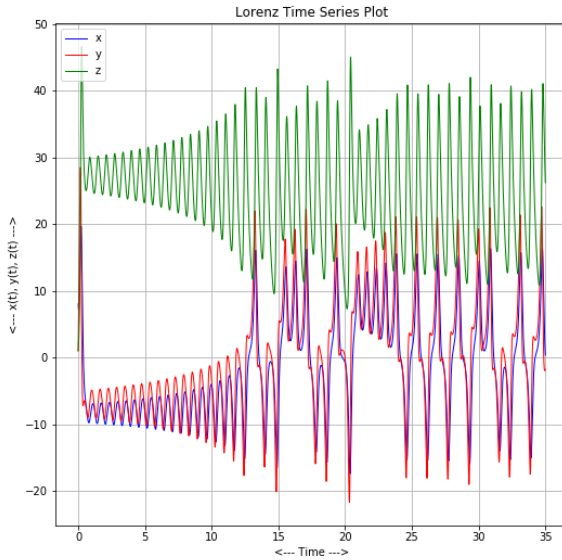


Segunda alteração de rho: $\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 56$



3.2 Método Preditor-Corretor

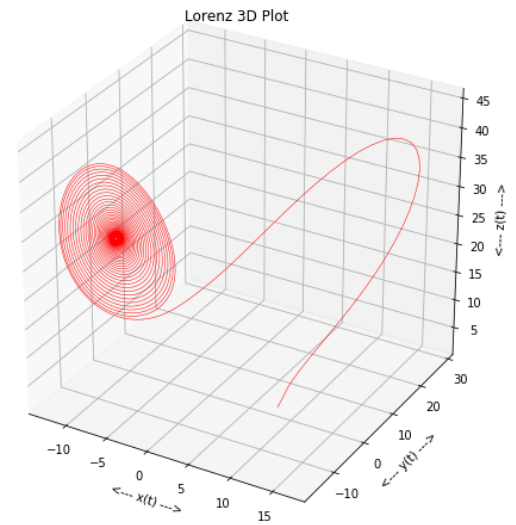
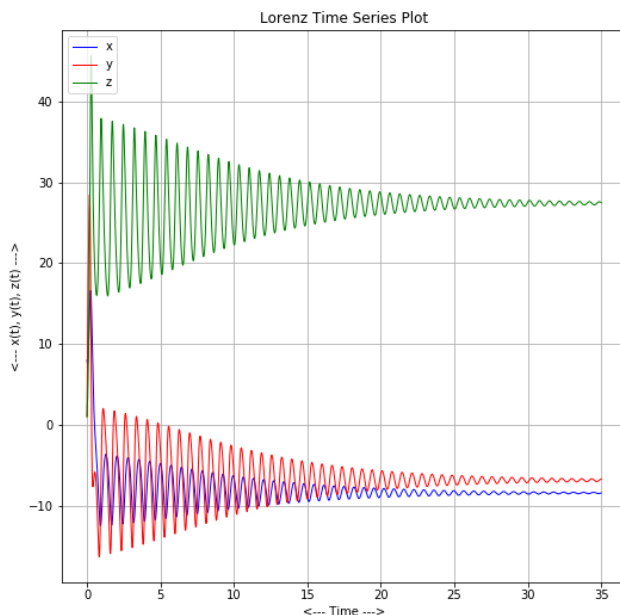
Segue-se as soluções plotadas graficamente do sistema de equações, utilizando as constantes fixadas em $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$. Essas constantes, foram definidas por Lorenz, durante seus estudos.



Dado os valores para σ , β e ρ usando o método preditor corretor, é possível ver que ele se assemelha com a solução de Runge Kutta, para os mesmo valores avaliados anteriormente:

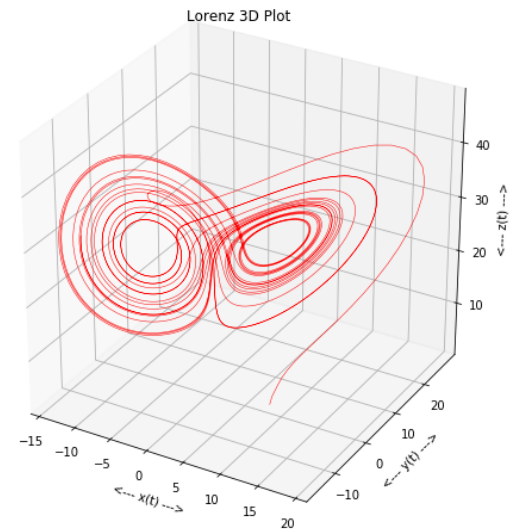
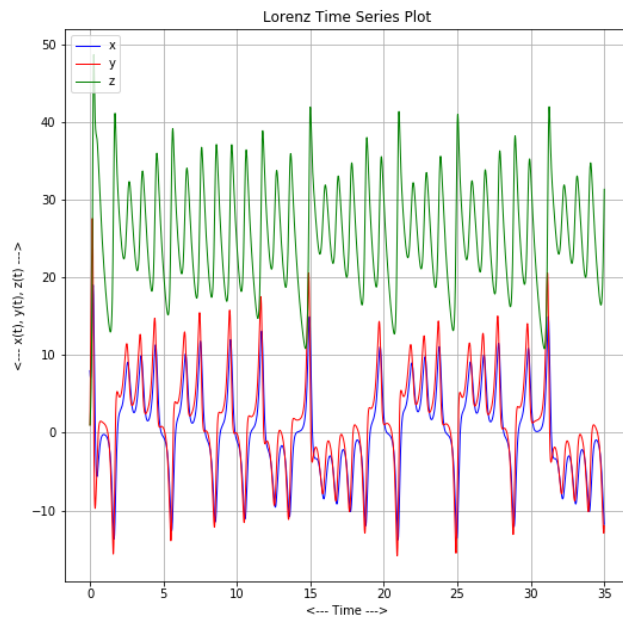
3.2.1 Dependência de Sigma

$$\text{sigma} = 5, \text{beta} = 8/3, \text{rho} = 28$$



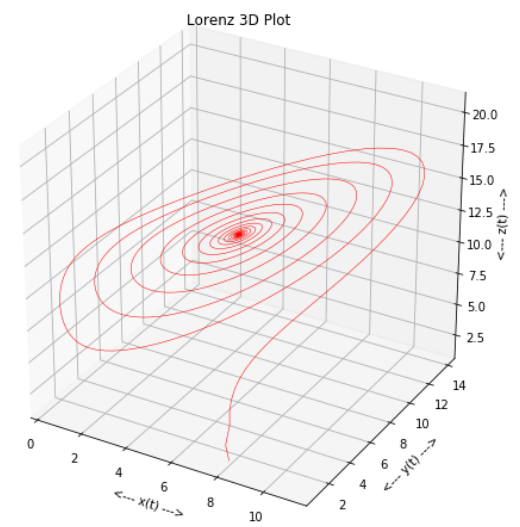
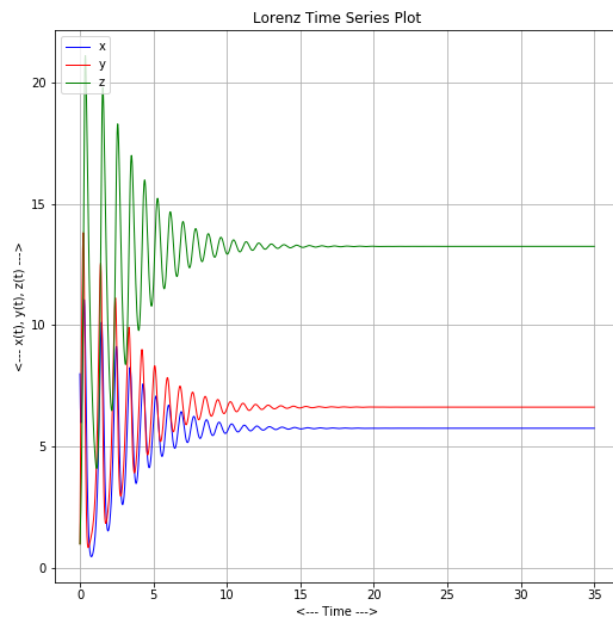
3.2.2 Dependência de Beta

$\sigma = 10$, $\beta = 4/3$, $\rho = 28$



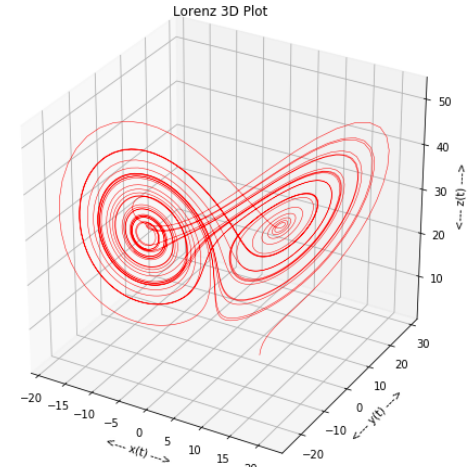
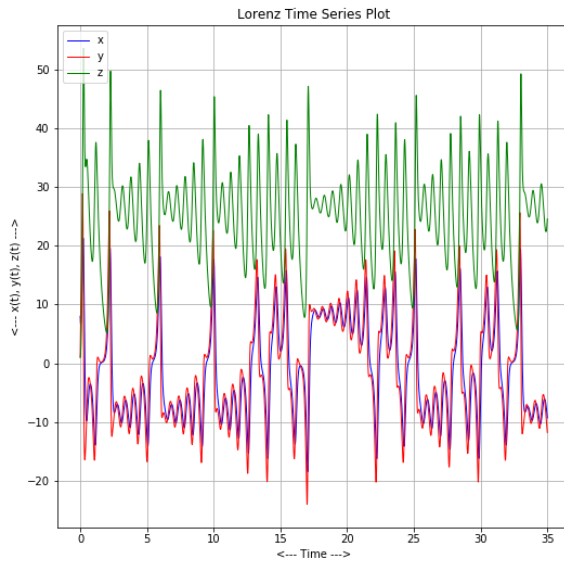
3.2.3 Dependência de Rho

$\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 14$



3.3 Método de Euler Simples

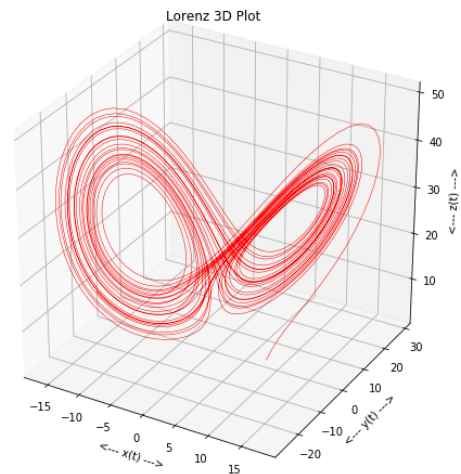
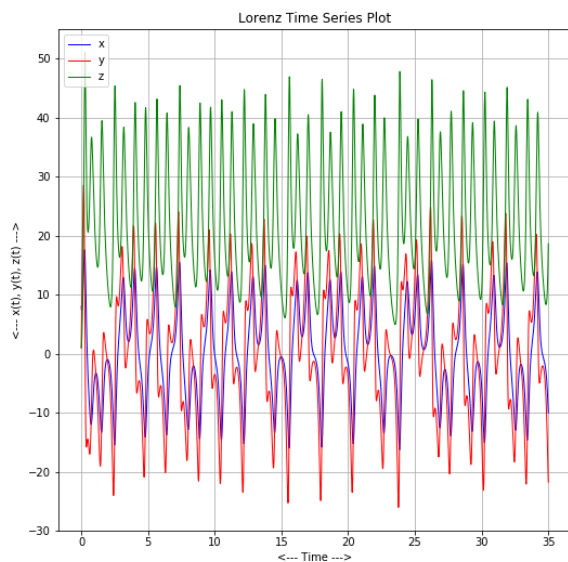
Segue-se as soluções plotadas graficamente do sistema de equações, utilizando as constantes fixadas em $\sigma = 10$, $\rho = 28$ e $\beta = 8/3$. Essas constantes, foram definidas por Lorenz, durante seus estudos.



Dado os valores para σ , β e ρ usando o método de Euler, é possível ver que ele diverge bastante das soluções encontradas anteriormente, Runge Kutta e preditor-corretor.

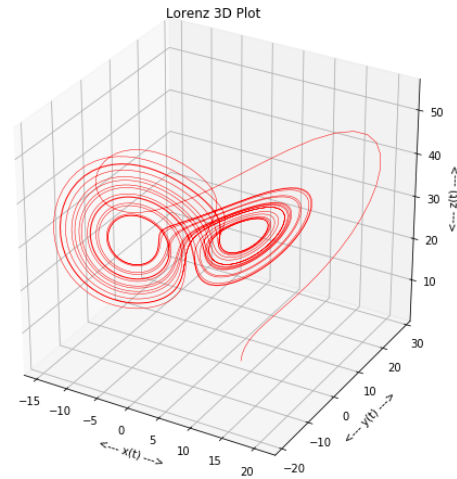
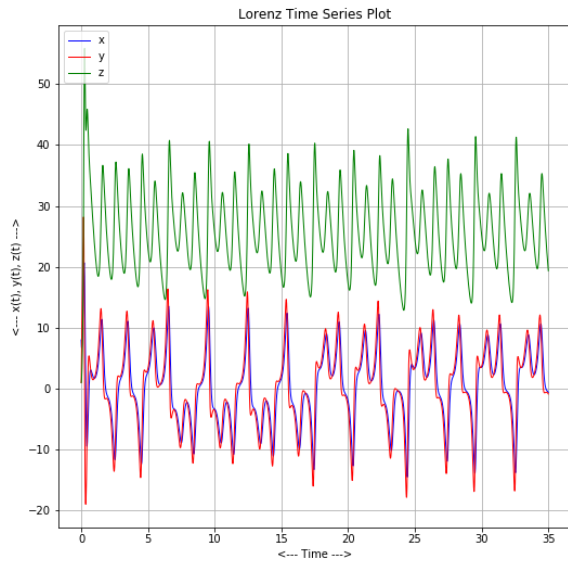
3.3.1 Dependência de Sigma

$$\text{sigma} = 5, \text{beta} = 8/3, \text{rho} = 28$$



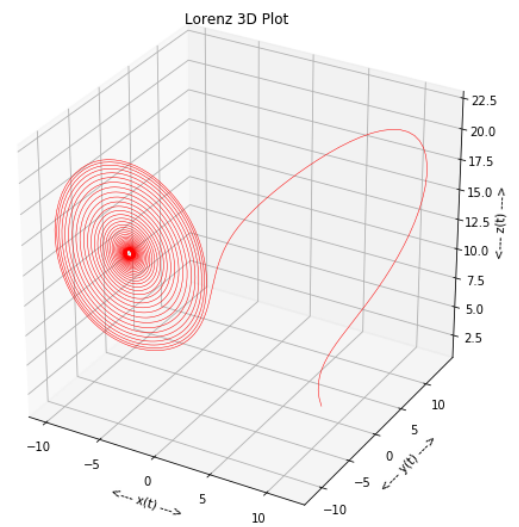
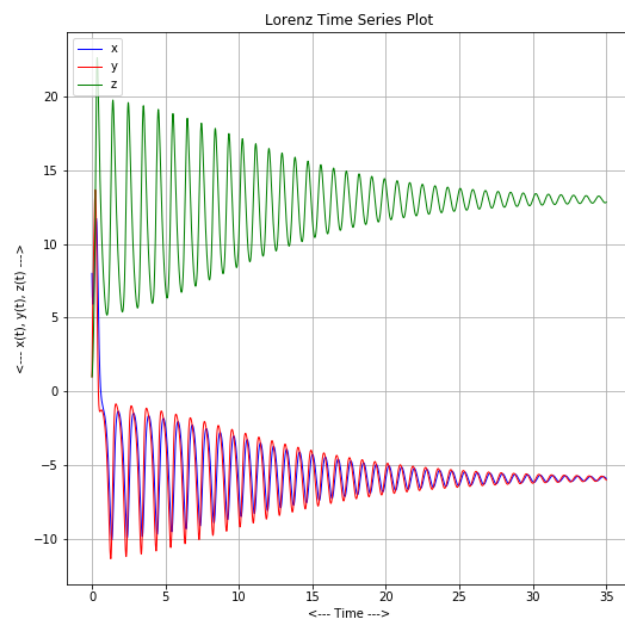
3.3.2 Dependência de Beta

$\sigma = 10$, $\beta = 4/3$, $\rho = 28$



3.3.3 Dependência de Rho

$\sigma = 10$, $\beta = 8/3$, $\rho = 14$



4 Estudo da instabilidade das Equações

As figuras iniciais de cada subseção das aproximações numéricas mostram o atrator de Lorenz padrão com os parâmetros $\sigma = 10, \beta = \frac{8}{3}, \rho = 28$. Estas figuras servem de controle, uma referência que usaremos para determinar as mudanças no formato do atrator conforme alteramos os parâmetros. A representação em 3D é típica das *asas de borboleta* encontradas na literatura. Portanto, assumimos que estas figuras estão corretas e são uma demonstração do comportamento caótico de sistemas atmosféricos. Para inferir sentido físico aos resultados exibidos, assumimos que as equações de Lorenz nesta situação caracterizam uma convecção de um fluido viscoso num tanque aquecido.

O primeiro parâmetro alterado foi σ , que como descrevemos na seção 2, representa as características físicas do fluxo. Dividir o parâmetro pela metade significa fisicamente que a viscosidade do fluido é maior, então o fluxo demora mais a convergir na superfície do atrator. Além disso, quando atinge a superfície o fluxo começa a espiralar para dentro numa única *asa*.

O segundo parâmetro alterado foi β , que caracteriza a razão largura-altura da camada de convecção. A intuição indica que uma largura menor na zona de convecção significa que o fluxo vai trocar frequentemente entre as *asas* do atrator. Já uma largura maior indica que o fluxo não irá trocar de *asa*, ou trocará poucas vezes. Pelas figuras vemos que estes comportamentos são verificados.

O último parâmetro alterado foi ρ , que detalha a diferença de temperatura entre o topo e o chão do tanque. É esperado que uma grande diferença entre as temperaturas do topo e do chão implicará numa taxa alta de fluxo com mudanças frequentes na órbita do atrator. Já uma diferença pequena entre as temperaturas, as forças motrizes térmicas seriam reduzidas e o sistema atingiria o equilíbrio mais rapidamente.

5 Conclusões

A partir da discussão feita, é aparente que pequenas mudanças no atrator de Lorenz dão origem a efeitos macroscópicos. O método de Runge-Kutta (e também o Preditor-Corretor) ilustrou bem estas mudanças e não sofre sinais de divergência como acontece no método de Euler.

Concluimos que as pequenas alterações feitas nos parâmetros ou levavam a uma situação mais caótica do sistema, ou de certo modo *domavam* a solução de tal forma que a taxa de fluxo do sistema tendesse a zero. Nos casos onde o fluxo tendeu a zero, os parâmetros deram origem a um sistema instável onde as dinâmicas não se mantiveram por um longo período de tempo. Por outro lado, nas situações onde o fluxo se tornou mais caótico, o sistema permaneceu estável e as órbitas da superfície do atrator ficaram mais pronunciadas.

6 Referências

1. The Ordinary Differential Equations Project, Theron J. Hitchman, Thomas W. Judson.
2. Sistemas de Comunicação Digital Baseados no Atrator Caótico de Lorenz. Carlos E. C. Souza, Daniel P. B. Chaves e Cecilio Pimentel
3. The Lorenz Attractor in 3D
4. Chaos on the Web. Physics 161: Introduction to Chaos: The Lorenz Model