

Академ Б.К., №. 4410.

Абрамаш

1. Достижение лекции и практики 1-5 кредитов. (2-3-4)

2. Завершение курса 1/р и 7/р (2)

3. Капитальный (2)

87/р и 54/р (без б.п. до 2-3-4)

Замечания:

ОС - основы теории сигналов

ЛП - линейное пространство

НЛП - нелинейное пространство

ПЛФ - предбр. Руслан (Л-прямое, О- обратное)

ПЛ - предбр. Напаса

АСД - автоном. контр. по дальности

АКФ - автокорр. ф-ия

Tuners
Сигнальные
(излучающие)



Лекция 1. ООС.

8.09.16

§1. Основные понятия и определения

Сигнал - об. явл. signum "знак"

Сигналы - механические, магнитные, звуковые, визуальные и др. явления ("знаки"), которые содержат некоторую информацию.

Сигнал - материальный носитель информации.

В природе - в виде физ. процессов, совершающихся реинтеграции, в качестве кот. могут выступать различные явления, а также органы чувств человека.

ОС рассматривает не сами сигналы, а их матем. модели. Так изучаемый объект описывается как физ. природы сигналов и характеризуют такие математические способы описания и действия.

Мод. изучаемых сигналов, как правило, являются временные зависимости типа $s(t)$,

кот. описывает поведение сигналов на
весь период наблюдения

$$\{s(t) \mid t \in [0, T], T - \text{период наблюдения}\}$$

К мат. модели сигнала предъявляются след.
требования:

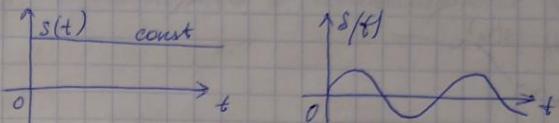
- представление однозначно (имеет
единственную физ. сущность, кот. она характеризует)

- функционал памяти (данные
имеют весомые характеристики реального
сигнала, или
часть характеристики сигнала должны
быть включены в числе существующих)
Для решения ряда задач требуется достоверно
известной мат. модели, при этом чистая
информация может быть утеряна, а иные
хар-ки определены спорренно.

§2. Классификация сигналов.

1. По физ. природе (электрические звуковые,
излучающие и т.д.);

2. По зависимости от времени (постоянное,
периодическое);



2.1. Переменные делятся на:

a) [•] периодические;

б) [•] непериодические:

в) [•] дегенерированные: $s(t) = \text{const}$
г) [•] случайные (стochastic): $s(t) - \text{случ. ф-ия/функция}$

Помимо детермин. ф-ий, сигналы встречаются в виде дегенерированных сигналов -
сигналы, форма кот. известна, но они име-
ют только параметров - сиг. величины

3. По характеру изменения сигнала во
времени (конформные, дискретные)

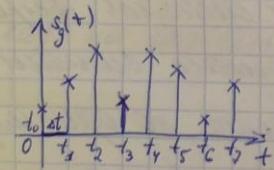
Дискретные сигналы имеют значение
сигнала в момент производимой измерения
времени. Так же назыв. дискретными,
и они еще модифицированы имен. квантованием.

Ф-ии.



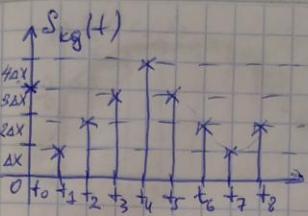
Дискретный может сигнал, у кот. ходят для один из параметров или дискретной величины.

Часто назыв. квантованиями.
 Δx - шаг квантования
(уровень $- \dots -$)



Дискретизир. по времени

Момент времени или момент измерения из этой допускаемых по сущ. только в определенное время.



Квант. по уровню и
дискрет. по времени/засечке
(цифровая)

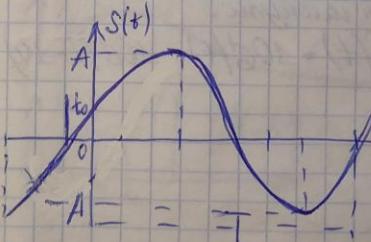
4. Оцифрование и многократное усиление

Лекция 2.

§ 2.1. Принципы сигналов

1. Гармонический сигнал:

периодич. сигнал $\int S(t+m \cdot T) = S(t)$, $m = 0, \pm 1, \dots$, члены, T - период



$$S(t) = A \sin(\omega_0 t + \phi_0)$$

A - амплитуда

ω_0 - кругов. частота

$$\omega_0 = 2\pi \cdot f_0, \text{ где } f_0 - \text{ частота}$$

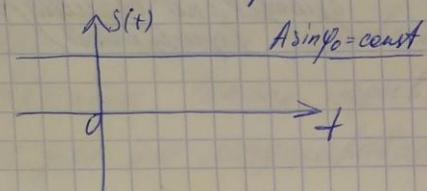
$$(T_0 = \frac{1}{f_0})$$

ϕ_0 - нач. фаза

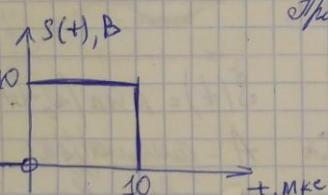
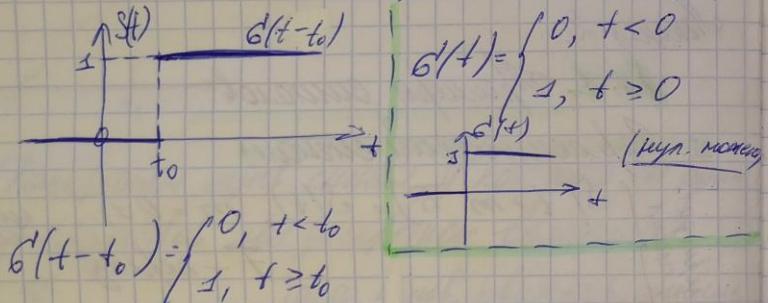
$$\phi_0 = \omega_0 \cdot t_0$$

14.09

$$\omega_0 = 0 \Rightarrow \dot{\theta} / \Delta \sin \varphi_0 = \text{const.}$$

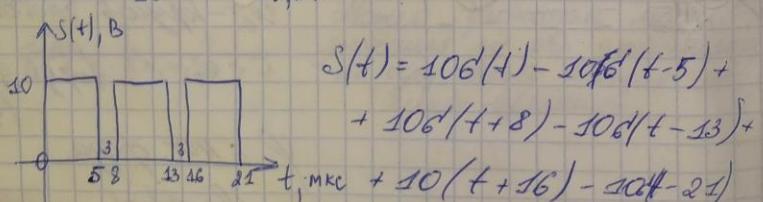


2. Единичный скачок (функция единичного единичного плавления)

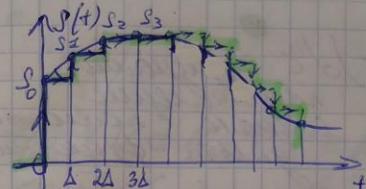


Примор. единиц:

$$S(t) = 10g(t) - 10g(t-10)$$



$$S(t) = 10g(t) - 10g(t-5) + \\ + 10g(t-8) - 10g(t-13) + \\ + 10g(t-16) - 10g(t-21)$$



Физ. смысл:

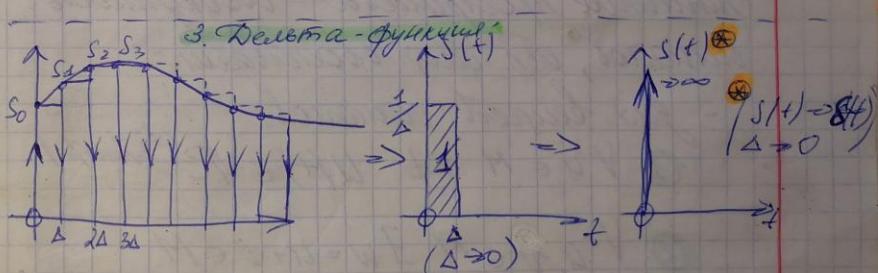
$$S(t) = S_0 g(t) + (S_1 - S_0) g(t-\Delta) + \\ + (S_2 - S_1) g(t-2\Delta) + \dots = \\ = S_0 g(t) + \sum_{k=1}^{\infty} (S_k - S_{k-1}) g(t-k\Delta)$$

(динамическое непрерывное описание с помощью ф-ии единичного плавления)

$$\Delta \rightarrow 0:$$

$$S(t) = S_0 g(t) + \int_0^t \frac{S}{\Delta^2} g(t-z) dz$$

(в интегральном виде)



$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t=0 \\ 0, & t \neq 0 \end{cases}$$

$$\delta(t-t_0) = \begin{cases} \infty, & t=t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases}$$

$$S(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) \delta(\tau) d\tau$$

⊗ запись.
представление
сигнала с помощью
длитель-функции.
⊗ имеет форму записи.

$$\otimes M = \{s_1(t), \dots, s_n(t), \dots\} \text{ - множество}$$

⑤ $\forall u \in M \ \forall \alpha \in \mathbb{R} \quad u \cdot \alpha = \alpha \cdot u \in M$

⑥ $\exists \emptyset - пустой элемент, \emptyset \in M$.

OTC

$$\forall u \in M \quad u + \emptyset = u.$$

- для комплексных сигналов справедливы те же свойства, что и для вещественных.

① $u(t) \in \mathbb{C}$ ⑤ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$

§ 3.1. Понятие базиса.

Базис - набор векторов в НТ.

$$\{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n, \dots\} \subset M$$

Линейно независимы, т.е.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \ell_i = 0 \quad \text{т.н.т. } \alpha_i = 0 \quad \forall i$$

$$S(t) = \sum_i c_i \ell_i, \quad c_i - коэф. \text{ разложения}$$

в базисе
(коэффициенты
разложения
сигнала S(t)
в базисе)

При линейном разложении сигнала, без ог.

8.

в природе, в базисе можно представить
изображение. Базисное кол-во базисных
векторов. На практике для описания
задачи размещения изображений конечно-
лишне методом решения задач, исключительно
из ограничивающее число базис-векторов

В1

Нормированием L называются коэффициенты
образов определять единичную единицу
(но аналогии с единицой в геометрии)
и соотносят единицы друг с другом.

НЛП — преобразование $L \in M$ такое, что для
 $\forall s(t) \xrightarrow{\text{норм.}} \|s\|$ — норма единица, где
кот. справедливо:

- ① $\|s\| \geq 0$, $\|s\| = 0 \Leftrightarrow s(t) = \emptyset$
- ② $\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \|\alpha \cdot s\| = |\alpha| \|s\|$
- ③ $s(t), y(t) \in L \Rightarrow \|s+y\| \leq \|s\| + \|y\|$
(аналог евклида
нормализации)

Для действительных единиц:

$$\forall s(t) \in \mathbb{R}: \|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt}$$

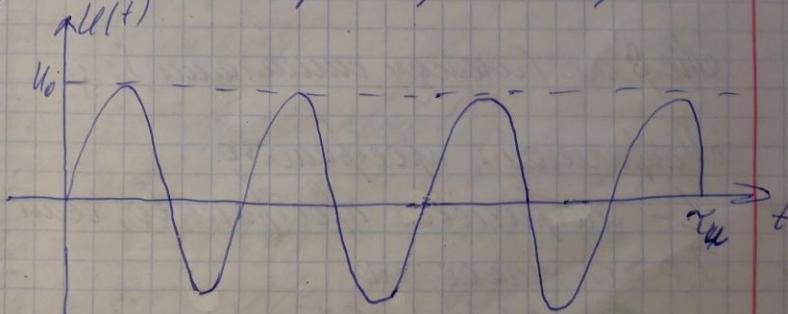
Для комплексных:

$$\forall s(t) \in \mathbb{C}: \|s\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |s(t)|^2 dt}$$

Энергия единица — квадрат нормы.

$$E_s = \|s\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} s^2(t) dt$$

Замечание: E_s дает нам представление
о ее величине, но не дает представления
о ее форме (особенно, если изменение
формы единицы кратковременное)



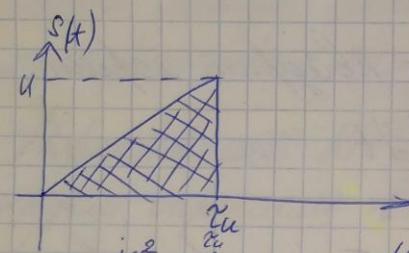
$$U(t) = U_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

$$E_s = U_0^2 \int_0^{2\pi/\omega_0} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_0) dt = \frac{U_0^2}{\omega_0} \int_0^{2\pi} \cos^2 x dx =$$

$$= \frac{U_0^2}{w_0} \int_0^{w_0 z_0 + y_0} \frac{\cos dx + 1}{2} dx = \frac{U_0^2}{4w_0} \left[2(w_0 z_0 + y_0) + \sin 2 \right]$$

$$E_s \approx \frac{U_0^2 z_0}{2}$$

(с учетом z) (здесь считается
что не является общим
формулой)



$$E_s = \frac{U^2}{Z_0^2} \int_0^{z_0} t^2 dt = \frac{U^2 z_0}{3}$$

$$\|s\| = \frac{U\sqrt{z_0}}{\sqrt{3}} = U\sqrt{\frac{z_0}{3}}$$

Метрика (между сигналами): ρ

Метрическое пространство.

L -метрическое пространство, если
 $\exists \rho \geq 0$ такое, что

$$\textcircled{1} \quad \rho(y, x) = \rho(x, y)$$

$$\textcircled{2} \quad \rho(x, x) = 0 \quad \forall x \in L$$

$$\textcircled{3} \quad \rho(s, y) \leq \rho(s, w) + \rho(w, y), \quad \forall w \in L$$

$$\rho(x, y) = \|x - y\|$$

$\|s\| = \rho(s, 0) \Rightarrow$ норма есть метрика
между исходной и нулевой
сигналами.

§ 3.2. Ортогональность (ортонормированность)

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t) dt; \quad u, v \in R$$

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v^*(t) dt; \quad u, v \in C$$

$$\cos \varphi = \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

Свойства скалярн. произв.

1. $(u, u) \geq 0$ ($= 0$ если $u = \emptyset$).
2. $(u, v) = (v, u)$
3. $(\alpha u, v) = \alpha(u, v) \quad \forall \alpha$
4. $(u+v, w) = (u, w) + (v, w)$

Скалярное произведение двух ортогональных векторов = 0.

$$(u, v) = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos \varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

$$\|u, v\| \leq \|u\| \cdot \|v\|$$

Базис ортонормированный, если все вектора базиса ортонормированы друг другу и единичны. след. утверждение:

$\{e_0, e_1, \dots, e_k\}$ базис

$$(e_i, e_j) = \begin{cases} 1, & e_i = e_j \\ 0, & e_i \neq e_j \end{cases}$$

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e_i(t) - \text{обобщенное предположение}$$

$$c_k = \int_{t_1}^{t_2} s(t) e_k(t) dt = (s, e_k) \quad t \in [t_1, t_2]$$

Примеры ортонормир. базисов:

1. Базис гармонич. ф-ий:

$$s(t + mT) = s(t), \quad t, m = 0, 1, \dots, \text{период}$$

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{T}}$$

$$e_1 = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi}{T};$$

$$e_2 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi}{T};$$

$$e_3 = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{4\pi}{T};$$

$$e_4 = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{4\pi}{T}$$

...

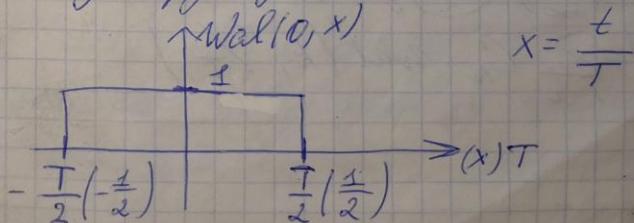
$$e_{2k-1} = \sqrt{\frac{2}{T}} \sin \frac{2\pi k}{T}$$

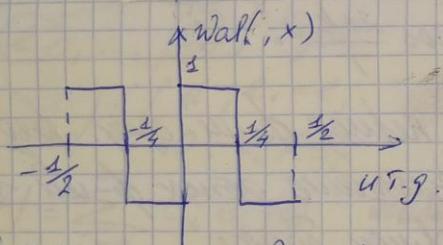
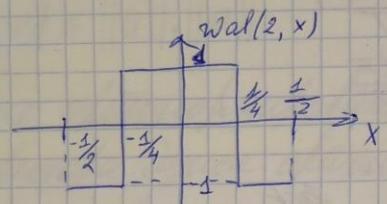
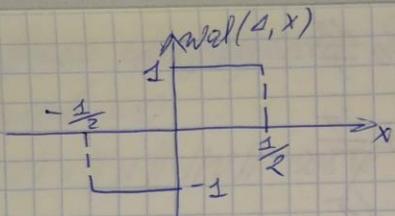
$$e_{2k} = \sqrt{\frac{2}{T}} \cos \frac{2\pi k}{T}$$

Для модных период. ф-ий сум. предположение, предполаг. разложение этих ф-ий в ортонормир. гармон. базисе.

$$\forall s(t): \exists s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i e_i(t).$$

2. Базис функций Чебышева:





Любой импульсный периодический сигнал можно представить в виде разложения Руле в базисе функций Чебышева, т.к.

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \cdot \text{wal}(k, t/T)$$

При разложении сигнал в ортогональные базисные элементы сигнал можно было определять как сумму квадратов коэффициентов базисного разложения.

$$E_S = \sum_{i=0}^{\infty} C_i^2$$

6

28.03.

§4.2. Прямое и обратное преобразование Руле

$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt$ — фурье-спектр.
— преобразование Руле:
задает единичную взаимосвязь между
спектр. частотой (част. хар-ког. сигнала) $s(t)$
и временным ф-лом $s(t)$, где част. исправлено
сигналом.

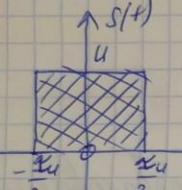
$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Поскольку существует связь времени
и частотной хар-ког. спектральной
плотности, то есть описание сигнала

8

можна выбрать одну из двух мат.
моделей (част./временн.) (для пакета
описания сигнала.)

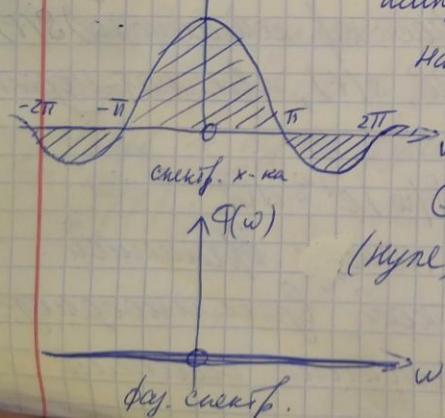
Финит. • временн. импульс:



$$S(w) = u \int_{-\infty}^{+\infty} e^{j\omega t} dt = u \int_{-\frac{T_u}{2}}^{\frac{T_u}{2}} (\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = u \int_0^{\frac{T_u}{2}} 2 \cos \omega t dt = \frac{2u}{\omega} \sin \frac{\omega T_u}{2}$$

$$S(\eta) = u T_u \frac{\sin \frac{\eta}{2}}{\frac{\eta}{2}}$$

$|S(\omega)|$



• временн. импульса $S(w)$ зависит
от ω , поэтому $|S(w)| = S(w)$

② Радиальный спектр
импульса

③ Част.спектр
 $(\text{Числ.}) = u T_u = \text{энергия}$
импульса

④ Для того, чтобы существ. спектральная
мощность, чтобы неограничить сум.спектр.
мощности - скользящий интеграл.

OTC

Построение признака существования
спектр. мощности - скользящий интеграл:

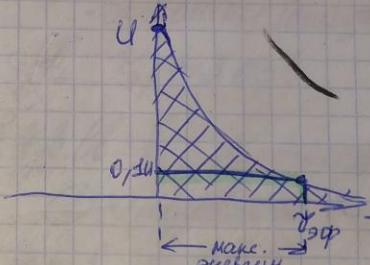
$$\int |S(t)| dt < \infty$$

• экспоненциальное сгладжене импульса

$$S(t) = u e^{-\alpha t}$$

$$\zeta \approx \frac{2,3}{\alpha}, \text{ где } \alpha -$$

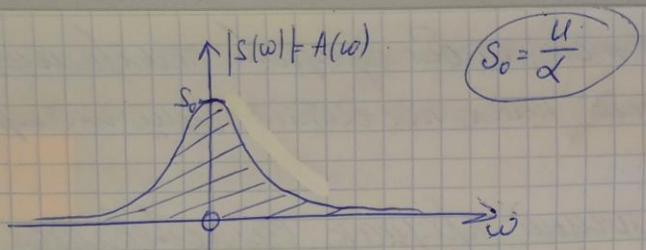
коффициент
затухания



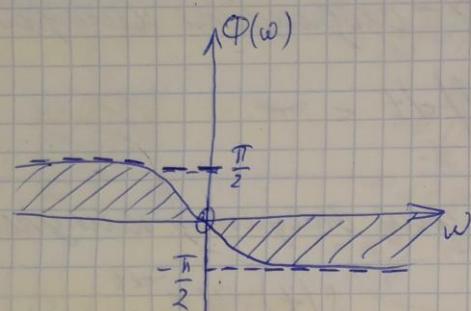
$$S(w) = \int_0^\infty u e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = \frac{-u}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^\infty$$

$$|S(w)| = \frac{u}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} / |A(w)| = |S(w)| = \frac{u}{\sqrt{\alpha^2 + \omega^2}}$$

$$\varPhi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}$$



$$S_0 = \frac{u}{\alpha}$$

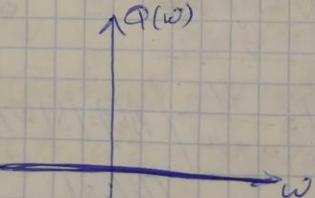
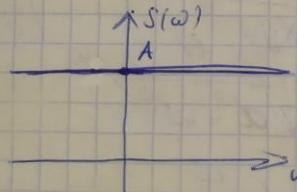


• Генета-функции:

$$s(t) = A \cdot \delta(t)$$

$$S(\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \delta(t) dt$$

$$S(\omega) = A.$$

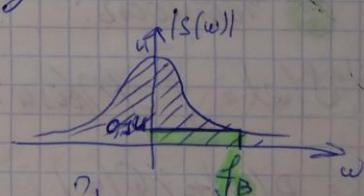


Между действительной и мнимой его энергией (эффективной длительностью импульса) есть обратно-пропорциональная зависимость. Чем выше сигнал, тем шире спектр.

Пример - предел. импульс:

$$\int_{f_B}^{\infty} \sum_{\omega} \approx 1.$$

верхн. частота



экспоненц. (негаражущий)

$$f_B \cdot \sum_{\omega} \approx 3,65$$

§ 4.3. Сп-ва преобразований Раде.

OTC

① Множество:

$$S_1(t), S_2(t), \dots, S_n(t)$$

$$S_1(\omega), S_2(\omega), \dots, S_n(\omega)$$

$$\sum_{i=1}^n a_i S_i(t) \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i S_i(\omega), \text{ где:}$$

$$S_i(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S_i(t) e^{-j\omega t} dt.$$

Ch. - то минимальное значение фазенгриф-
бала бицего момента сигналов более
простое и результаты считаются предсказуемыми
в виде лин. комбинации сигналов
этих более простых сигналов.

2 Чётность:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t)(\cos \omega t - j \sin \omega t) dt = \\ = P(\omega) - j Q(\omega)$$

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (P - j Q) \cdot [\cos \omega t + j \sin \omega t] d\omega$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} P \sin \omega t d\omega &= 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} Q \cos \omega t d\omega &= 0. \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} P(\omega) = P(-\omega) \\ Q(\omega) = -Q(-\omega) \end{cases}$$

Для того, чтобы ОПФ воспроизводило
затемненный сигнал, необходимо
и достаточно, чтобы затемнение.

также энергия должна оставаться неизменной,
а минималь - неравенством.

3 Сдвигание во времени:

$$s(t) \leftrightarrow S(\omega) \quad (t_0 - сдвигание во времени)$$

$$s(t-t_0) \leftrightarrow ?$$

$$s(t-t_0) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(t-t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\omega t} dt = \\ = e^{-j\omega t_0} S(\omega)$$

$$s(t-t_0) \leftrightarrow e^{-j\omega t_0} S(\omega)$$

4 Масштабирование:

$$s(t) \leftrightarrow S(\omega) \quad (k > 0; \quad 0 < k < 1 - фазенгриф, \quad k > 1 - сдвиг)$$

$$s(kt) \leftrightarrow ?$$

$$s(kt) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} s(kt) e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{k} \int_{-\infty}^{\infty} s(x) e^{-j\omega x/k} dx = \\ = \frac{1}{k} S\left(\frac{\omega}{k}\right)$$

$$s(kt) \leftrightarrow S\left(\frac{\omega}{k}\right) \cdot \frac{1}{k}$$

Пример: импульс.

$$s(t) \text{ на } [0, \infty] \leftrightarrow S(\omega)$$

$$s_{\text{imp}}(t) = s(\tau_u - t) \leftrightarrow ?$$

$$\int_0^{\tau_u} s(\tau_u - t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega \tau_u} s(\omega)$$

$$\int_0^{\tau_u} s(x) e^{-j\omega x} dx = e^{-j\omega \tau_u} s^*(\omega)$$

⑤ Св-ва производной и неодр. интеграл.

$$s(t) \leftrightarrow S(\omega)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} \leftrightarrow ?$$

$$f(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(t-\tau)}{\tau}$$

$$F(\omega) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-j\omega \tau}}{\tau} S(\omega)$$

$$e^{-j\omega \tau} = \underbrace{1 - j\omega \tau}_{\text{т.к. } \tau \rightarrow 0} - \frac{\omega \tau^2}{2} \dots \text{ и т.д.}$$
$$F(\omega) = j\omega S(\omega)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = j\omega S(\omega) = F(\omega)$$

При дифференцировании скорость изменения сигнала возрастает \Rightarrow спектральная плотность под сигнала / имеет большее значение в области ВЧ.

$j\omega$ - оператор дифференцирования в част. области.

Аналогично, для неодр. интегралов:

$$F(\omega) = \frac{1}{j\omega} S(\omega)$$

$\frac{1}{j\omega}$ - оператор неодр. интегралов.

⑥ Сочет. свойство производного 2 сигналов.

$$u(t) \leftrightarrow U(\omega)$$

$$v(t) \leftrightarrow V(\omega) \quad S(t) = u(t)v(t) \quad S(\omega) = ?$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t) e^{j\omega t} dt = \frac{1}{j\omega} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \left[e^{j\omega t} \right] dt =$$

$$e^{j\omega t} d\omega \left[e^{-j\omega t} \right] dt = \langle \omega = x \rangle =$$

средн. по
мгнов.

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) \left[\int_{-\infty}^x u(t) e^{-i(\omega-x)t} dt \right] dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) U(\omega-x) dx$$

спектр $U(\omega-x)$

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) U(\omega-x) dx$ - спектр свёртки

Объяснение: $V(x) * U(\omega-x)$ или $V(+)*U(0)$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) U(\omega-x) dx.$$

Многократные свёртки обладают свойством коммутативности:

$$V(+)*U(+)=U(+)*V(+)$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(+-\xi) V(\xi) d\xi$$

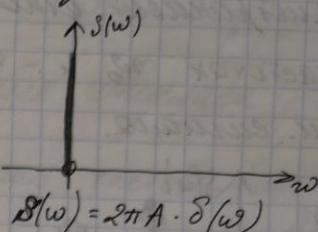
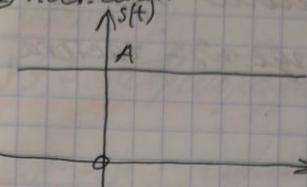
$$S(\omega) \leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} U(+-\xi) V(\xi) d\xi.$$

Произведение двух сигналов, заданных в временной области, есть

ϕ -но свёртки их спектров в частотной области, и обратно, произведение спектров есть ϕ -но свёртки во временной области.

§4.4. Спектры ϕ -сигналов не изображаются в

① Пост. сигн.

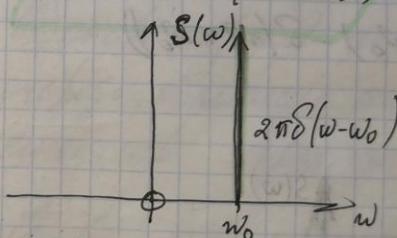


Независимый во времени сигнал имеет только одну спектральную составляющую на нулевой частоте.

② Комплексно-экспоненциальная:

$$s(t) = e^{j\omega_0 t}$$

$$S(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$$



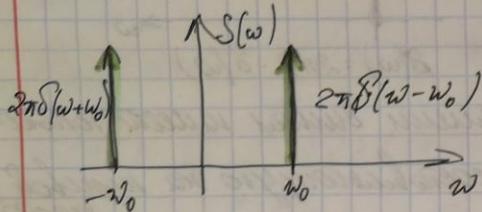
③ Гармоническое:

$$s(t) = \cos \omega_0 t$$

$$S(\omega) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$S(\omega) = \pi / [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$$

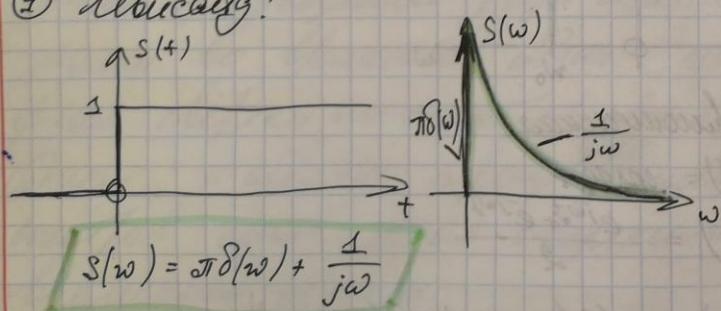
Гармонический сигнал имеет спектр, симметричный относительно нуля волны, на частотах ω_0 и $-\omega_0$, где ω_0 - частота гарм. сигнала.



$$s(t) = \sin \omega_0 t + \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$S(\omega) = \pi (\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$$

④ Хвостик:



$$S(\omega) = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

$$\textcircled{5} \quad s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\omega_0 n t}, \quad \text{где } m=0, \pm \dots \pm \infty$$

Лекция 4.

$$S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - m\omega_0)$$

§4.5. Преобразование Лапласа (ТАЧ) §2.10.

$j\omega = p$ - комплексная частота (оператор Лапласа)

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt. (*)$$

Преобразование Лапласа, или ϕ -变换 (*), позволяет получать изображение сигналов в операторной форме; это, в свою очередь, облегчает анализ производных сигналов через динамические звенья C .

Об. бз.: аналогичные об. бз. преобразования Рубе.

В литературе есть ошибки прообр. Лапласа для наиболее распространенных ϕ -ий сигналов.

$$1. e^{-\alpha t} \delta'(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p+\alpha} - \text{экспоненч. всплеск,}$$

импульс

$$2. e^{j\omega_0 t} \delta'(t) \Leftrightarrow \frac{1}{p-j\omega_0} - \text{экспоненч. колебл.}$$

импульс

$$3. \int_0^{\infty} \delta(t-t_0) e^{-pt} dt = e^{-pt_0}$$

$$\delta(t) \quad 1$$

$$4. \frac{df}{dt} \Leftrightarrow p F(p) - f(0), \text{ т.е. } \frac{d}{dt} \Leftrightarrow p$$

$$5. \int dt \Leftrightarrow \frac{1}{p}$$

Удобство ПН заключается в том, что
искусные процедуры дифференциро-
вания и интегрирования со-
единяются обл. сводятся к опера-
ции умножения и деления на
 p в операторной обл.

§5. Гиерархические характеристики сигналов

§5.1. Взаимное спектральное ядро 2 сигналов.

$$(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) v(t) dt$$

$$(u, u) = \int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt = E_u$$

$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V^*(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U^*(\omega) V(\omega) d\omega.$$

↑
спектральное
представление

$$W_{uv} = U(\omega) V^*(\omega) - \text{взаимный гиерархический
спектр.}$$

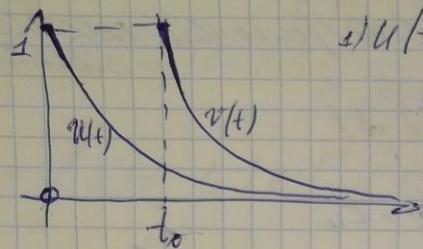
$$W_{uv} = W_{vu}^*$$

$$W_{uv}(\omega) = \underbrace{\text{Re } W_{uv}(\omega)}_{\text{реальная}} + j \underbrace{\text{Im } W_{uv}(\omega)}_{\text{имагинарная}}$$

$$(u, v) = \int_0^{\infty} \text{Re } W_{uv}(\omega) d\omega.$$

Складное произведение 2 сигналов
оказывается зависящим только от
действительной части взаимного
гиерарх. спектра.

Пример: 2 экспоненц. импульса:



$$1) U(t) = e^{-\alpha t} G(t) \Leftrightarrow$$

$$U(\omega) = \frac{1}{\alpha + j\omega}$$

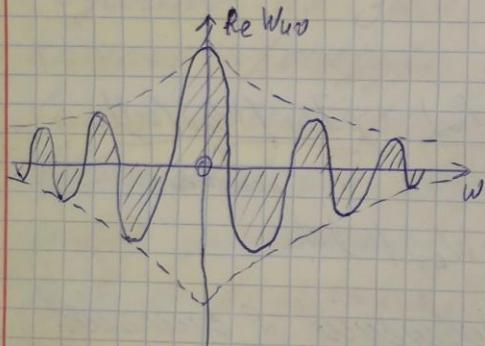
$$2) V(t) = e^{-\alpha(t-t_0)} G(t-t_0) \Leftrightarrow$$

$$V(\omega) = \frac{e^{-j\omega t_0}}{\alpha + j\omega}$$

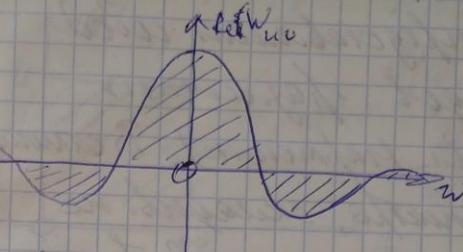
$$U(\omega)V^*(\omega) = \frac{e^{j\omega t_0}}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\text{Re } W_{uv} = \frac{\cos \omega t_0}{\alpha^2 + \omega^2}$$

① to мало: $\alpha t_0 \ll 1$



② to много: $\alpha t_0 \gg 1$



таки задокументировано, но форма в данном
случае неизвестна. Спектр является результатом
взаимного действия ядерных то. Когда это
много, т. е. спектр перекрывается,
очн. задача эмиссии соединяется
в один НЧ и различие таких
спектров зародилось.

§ 5.2. Переходящий спектр излучения.

$$(U, U) = E_u$$

$$W_u(\omega) = U(\omega)U^*(\omega) = |U(\omega)|^2 - \text{некр. энерг.}$$

$$E_u = \int_{-\infty}^{\infty} U^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_u(\omega) d\omega$$

↑ на Резер

ширина спектра, в соответствии с ф-ией Рэлея, представлена собой сумму квадратов различных частот составл. гармоник). В отличие от обычного спектра, складыв. не квадратичные, а только действительные значения \Rightarrow упрощ. анализ.

Однако при этом теряется часть информации, содержащая в фурье спектре, т.к. ширину спектр представляет собой квадрат амплитудного спектра; поэтому шир. спектр не может полностью описать поверхность сигнала, но при решении некоторых задач такого спектрального представления бывает достаточно, например, при оценке ширины спектра определением соотношения сигнал/шум и Т.Г.

Пример: прямой видосимметрич.

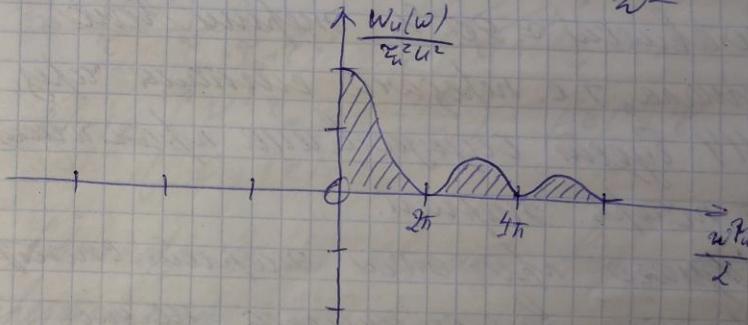
$$s(t) = \frac{U}{\omega} \sin \frac{\omega t_0}{2} =$$

$$= \frac{U^2 t_0}{\omega^2 t_0^2 / 2} \sin \frac{\omega t_0}{2}$$

$$W_u(\omega) = \frac{\sin^2 \frac{\omega t_0}{2}}{(\frac{\omega t_0}{2})^2} \cdot U^2 t_0^2$$

$$x = \frac{\omega t_0}{2}$$

Используя только \oplus составляющие, с Т.Г. убывает интенсивностью $\frac{1}{\omega^2}$.



$$t_0 = U^2 / \omega$$

Для многих практических задач важно вычислить, какие доли общ. энергии содержатся в первых несколько-

ких, нестационарных спектрах, что соотв. 3 периодам. Максимумы показат.,
но не дают первых "нескаков",
~~но~~ приходится $\approx 90\%$ всей энергии.

k	1	2	3
E_k/E_u	0,9	0,95	0,97

Если прямоугольный импульс подан на излучатель ФНЧ, то на выходе будет получен сигнал, энергия которого составляет $\approx 90\%$ всей энергии сигнала, т.е. передача сигнала через ФНЧ будет осуществляться практически без потерь энергии.

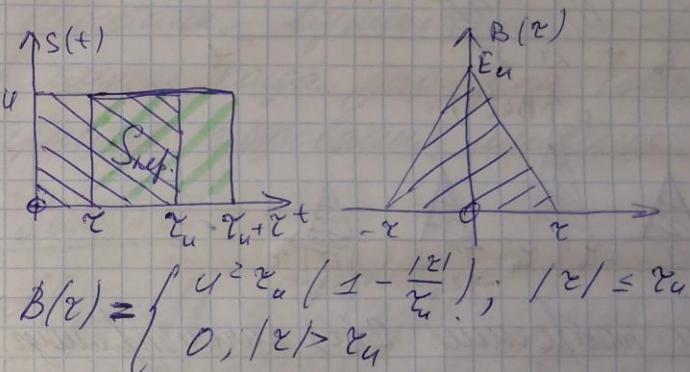
Однако при этом энергетический спектр прямоугл. сигнала не дает информации о том, насколько сильно сигнал будет изменять форму импульса при прохождении через ФНЧ.

§6. Когерентный анализ сигналов.

Автомод. ф-ций сигнала $u(t)$ будем называть зависимостью $B(z)$, опред. как:

$$B(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) u(t-z) dt$$

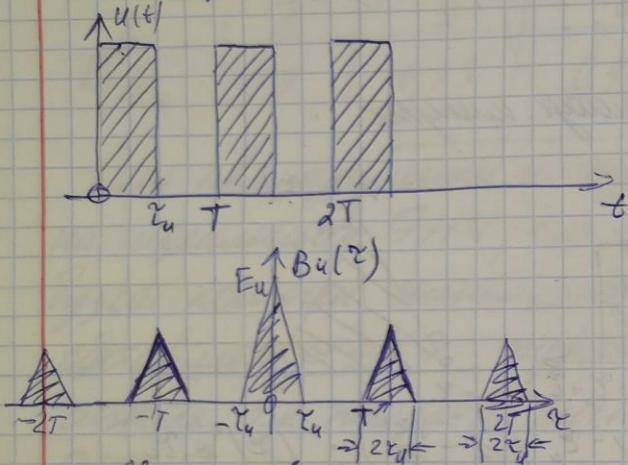
Пример: приемник импульсов.



Автомод. ф-ия приемн. видеосигнала представляется собой треуг. функцию с вершинами $\pm z_u$. Графически ее можно представить как 3 периода зондирующего импульса и импульса, следующего одновременно после него на z .

Если $|\varepsilon| > \gamma_u$, перекрытия нет, $B(\varepsilon) = 0$.
Максимальное значение ($= E_u$)
 $B(\varepsilon)$ достигается при $\varepsilon = 0$.

Линия:



При построении $B(t)$ начиная с нуля, получается 5 треугр.

~~нужно~~ ф-ии, разделенных друг от друга на время T .
Максимум - при $\varepsilon = 0$.

Исследовательский прием штупусов может применяться в системах АСД.
Будет искусственный генератор пакетов радиоимпульсов и сравнивание их с эталонным обрат. сигналом в спут. корректоре, можно определить дальность до объекта локации.

Несколько - включение неизвестного в спутник, когда радиосигнал совпадает с периодом следования импульса.

Линия 5:

Авиакор. ф-ия ^(АКФ) представлена собой сканирующее изображение синуса на его конец во времени кончик.

АКФ авт. мерой сканера / разрешение С. и его самого, сдвинутого во время радиосигнала τ .

Св-ва:

① При $\tau = 0$ $B(\tau) = B(0) = E_u$

② Частота: $B(z) = B(-z)$

$$B(z) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \underbrace{u(t-z)}_{x} dt = \int_{-\infty}^{\infty} u(x+z) dx = B(-z)$$

③ $\forall z : |B(z)| \leq B(0) = E_u$

АКФ при модуле смещении z не превосходит по модулю энергии сигнала; АКФ представляется собой симметричную спектральную ленту с максимумом при нулевом смещении, = энергии сигнала.

С тремя в зависимости от типа сигнала АКФ может иметь как монотонно убывающий, так и колебательный характер.

$$(U, U_z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U_z^*(\omega) U(\omega) d\omega$$

$$\text{т.к. } U_z(\omega) = U(\omega) e^{j\omega z}$$

$$\text{т.о. } U_z^*(\omega) = U(\omega) e^{-j\omega z}$$

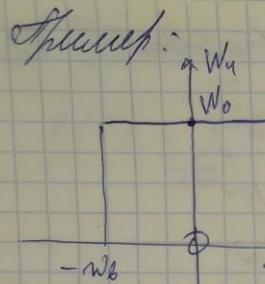
$$B(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{|U(\omega)|^2}_{W(\omega)} e^{j\omega z} d\omega$$

АКФ и энерг. спектр связаны друг с другом парой прямого и обратного преобразований Фурье.

$$W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B(z) e^{-j\omega z} dz$$

Связь между АКФ и энерг. спектром позволяет анализировать автокорр. спектра сигналов, исходя из энерг. спектра. Для шире полюса частот энерг. спектра, тем уже основной "ленточный" АКФ.

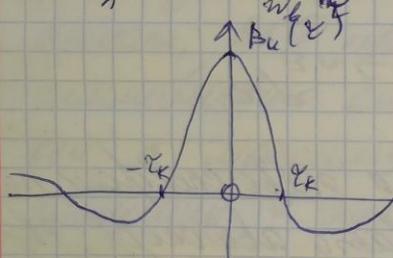
Можно решать звуковые задачи по чист. АКФ с помощью собственных спектров, которые используют энерг. спектр.



$$W_u(w) = \begin{cases} 0, & w < -w_b \\ 1, & -w_b \leq w \leq w_b \\ 0, & w > w_b \end{cases}$$

\Rightarrow вкл. w_b - граничная
частота зерн.

$$\begin{aligned} B_a(\omega) &= \frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\omega} e^{j\omega t} dt = \frac{W_0}{\pi} \int_0^{\omega} \cos \omega t dt \\ &= \frac{W_0 w_b}{\pi} \cdot \frac{\sin(w_b \omega)}{w_b \omega} \end{aligned}$$



χ_k - интервал корреляции:
именно основного
"лестника" АЧФ
образно прошу,
верхней граничной
частоте w_b .

$$\chi_k \sim \frac{1}{w_b}$$

Данно не всякая кривая, соответствует.
св-вам АЧФ, можно явиться таковой,
поскольку зерн. спектр белых
г. всегда \oplus . Это осталось до
последующего при анализе АЧФ.

Дискретное представление АЧФ - ДАКФ

$$\hat{B}(n) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} u_j u_{j-n}$$

$$\textcircled{1} B(0) = \sum_{-\infty}^{\infty} u_j^2 = E_u$$

$$\textcircled{2} \hat{B}(n) = \hat{B}(-n)$$

ДАКФ можно вычислить как
дискретная сумма произведения
отдаленных сигналов и сигналов,
сдвинутого относ. него на n постуки
(дискрет).

ДАКФ - дискр. анализ коррелиру. АЧФ -
также называется сводом св-вами
АЧФ.

$$\textcircled{3} |\hat{B}(n)| \leq B(0) = E$$

Задание корреляц. функции ($= ВКФ$) сигналов.
ВКФ представл. собой интегрирование
дискр. сигналов, один из которых
сдвигнут во времени на τ .

Таким образом, с помощью ВКФ можно описать как гармоничные в форме сигналов, так и их взаимное положение на временной оси.

$$B_{uv}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t)v(t-\tau) dt$$

Св-ва:

① св-во чётности не выполняется.

$$B_{uv}(\tau) \neq B_{uv}(-\tau)$$

$$\text{Но: } B_{uv}(\tau) = \underline{B_{vu}}(-\tau)$$

② Св-во обратимости

$$|B_{uv}(\tau)| \leq \|u\| \cdot \|v\|.$$

Если гармон. сигнал имеет конечную энергию, то их взаимопр. ф-лы обратимы.

Если сигналы сдвинуты во времени на τ , то максимум ВКФ неизбежно

располагается при $\tau = 0$.

Связь между ВКФ и взаимной спектральной плотностью:

$$B_{uv}(\tau) = (U, V_{\tau}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(\omega) V_{\tau}^*(\omega) d\omega$$

$W_{uv}(\omega) e^{j\omega\tau}$

$$B_{uv}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{U(\omega)}_{W_{uv}(\omega)} \underbrace{V(\omega)}_{W_{vu}(\omega)} e^{j\omega\tau} d\omega$$

ВКФ и взаим. энерг. спектр 2 сигналов также связана между собой ППФ и ОПР.

ВКФ дискретных сигналов:

Если пара дискр. сигналов u и v задана в виде отсчетов, следующих через время T , то ВКФ:

$$B_{uv} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} U_j V_{jn}, n - \text{целое число.}$$

1 лекция

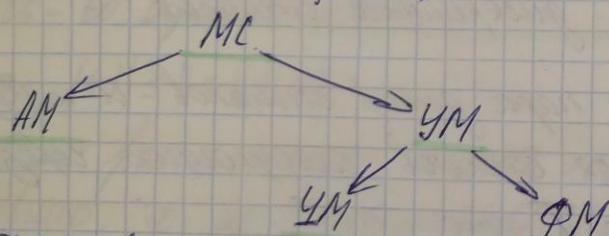
§ 7. Модулированные сигналы. (MC)

Амплитудно-модуляр. сигналы, передача с частотно- и фазомодулированными, посыпают передавать бЧ информации, сообщение на более высокой (несущей) частоте.

Обычно в качестве несущего колебания применяют гармон. сигнал ВЧ.

$$U_{\text{нес}}(t) = U_m \cdot (\cos(\omega_0 t + \varphi_0)).$$

AM
 $\frac{U}{T}$
 ЧМ
 $\frac{S(t)}{T}$
 ФМ
 $\frac{\dot{S}(t)}{T}$
 УМ
 (угловое)

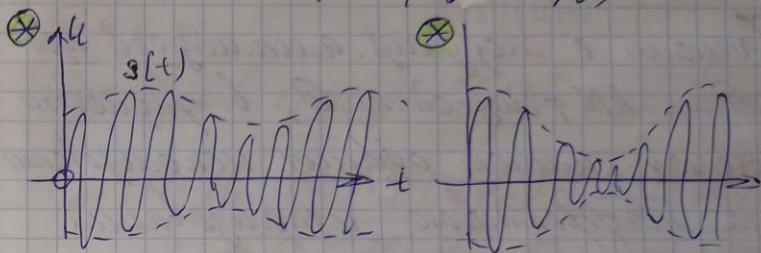


В зависимости от того, какой параметр несущ. колебания изменяется во времени и при этом изменение во времени проф. сигнала,

различают АМ и ЧМ сигналы (=ЧМ и ФМ)

§ 7.1. АМ-сигналы

AM - сигналы — сигналы, амплитуда которых изм. во времени по закону $S(t)$:

$$U(t) = S(t) \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$


Закон $S(t)$ — огибающая АМ-сигнала

В большинстве случаев огибающая изменяется во времени значительно медленнее, чем бЧ колебание с частотой ω_0 .

При АМ частота и нач. фаза сигнала являются неизменными пост. величинами ($\omega_0 = \text{const}$, $\varphi_0 = \text{const}$)

При АМ огибающая может быть представлена в виде:

$$S(t) = S_m [1 + Mx(t)],$$

где $x(t)$ - информационный сигнал,
 M - коэффициент АМ (=коэф. АМ)

При малой модуляции АМ огибающая стремится к прямой линии.

Сигнал с модуляр. амплитудой при модуляции АМ, близкой к 0, в радиотехн. системах имеют обратное использование из-за неэффективного использования мощности передачи;

- близкой к 1 (относ.) также редко используются, т.к. искажения вдвое выше ступени искажений.

При относ. модуляции $|M| > 1$ возникает явление перегородки и огибающая передачи сдвигается по фазе с модуляр. (инфом.) сг.

Наибольшее частотное подавление АМ осуществляется одноточечным АМ (см. рис.). Для этого сг сдвигается фаза:

$$U_{AM}(t) = U_m [1 + M \cos(\Omega t + \Phi_0)] \cdot$$

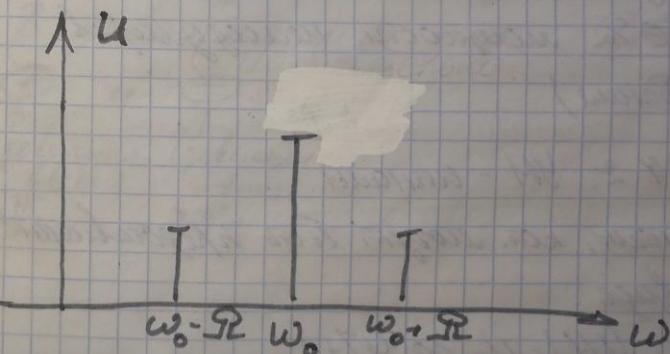
$$\Phi \ll \omega_0 \quad A(t) (A(t)) \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_0)$$

Разложим холмус по фазе, имеем:

$$U_{AM}(t) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 - \Omega)t +$$

$$+\varphi_0 + \Phi_0] + \frac{U_m M}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega)t + \varphi_0 - \Phi_0]$$

Следует также сг:



- ① $U_{\text{нес}}(t)$
 ② $U_{\text{верх. док. (ББ)}}(t)$
 ③ $U_{\text{НБ}}(t)$

$$P_{AM}(t) = U_{AM}^2$$

$$\langle P_{AM} \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T P_{AM}(t) dt$$

$$\langle P_{AM} \rangle = \frac{U_m^2}{2} + \frac{U_m^2 M^2}{4}$$

$$\frac{\langle P_{BE} \rangle + \langle P_{NB} \rangle}{\langle P_{нес} \rangle} = \frac{M^2}{2}$$

Также при 100% излучении наименее информативные несет 50% мощности, поэтому АМ не всегда ^{достигает} эффективна (излучение мощности в боковых пелестах $\leq 50\%$ мощности излучено в когерентном колебании)

§ 7.2. УМ - сигналы.

Сигналы, кот. могут быть представлена в виде:

$$U(t) = U_m \cos(\omega t + \psi),$$

это сигнал с УМ. ($\psi(t)$ - начальная фаза)

$$U_M = U_m \cos(\omega_0 t + k s(t)), \text{ где } k - \text{коэф. пропорциональности.}$$

$$s(t) = 0 \Rightarrow \text{ гарм. колебание}$$

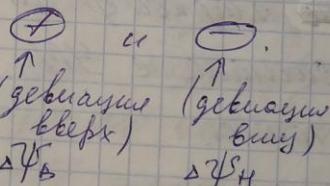
$s(t)$ расстояние между $\omega_0 t$ \Rightarrow можно выделить полный фазы.

Движение ~~затухающее~~ фазы.

В момент времени, когда находим $s(t)$ достигает экстрем. значений, фазовый сдвиг между УМ и излучением становиться максимальным и получит название "движущая фаза".

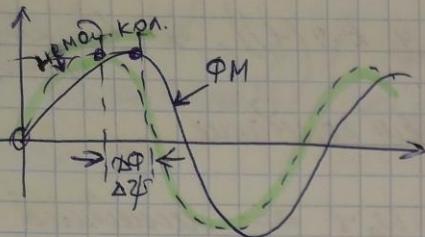
$\Delta\psi$ - движущая фаза. ($D\Phi$)

В зависимости от знака $D\Phi$ бывает



$$\Delta\psi_B$$

$$\Delta\psi_H$$



$$\omega/\phi = \frac{d\psi}{dt} - \text{мгновенная частота}$$

$$\omega(t) = \omega_0 + k s(t) - \text{сумма с УМ.}$$

$$U_{UM}(t) = U_m \cdot \cos \left[\omega_0 t + k \int_{-\infty}^t s(\tau) d\tau \right]$$

По аналогии с РМ С вводится
понятие "геническая частота" ($\Delta\omega, \alpha_f$)
 $\Delta\omega_0 = k S_{max}, \Delta\omega_0 = k S_{min}$.

При достаточно малой фазе $s(t)$ осцилляции сигналов с УМ и РМ внешне не отличаются.

Примечательное различие:

При РМ С фаза пропорциональна квадратичному сигналу индукции. сигналу, а при УМ — интегралу от него.

Лекция 7.

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega \cos(\Omega t + \phi_0), \text{ где}$$

ω_0 — базовая частота;

$\Delta\omega$ — генерация;

ϕ_0 — нач. фаза

Реша:

$$\psi(t) = \omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin(\Omega t + \phi_0) + \psi_0, \text{ где } \psi_0 = \phi_0 - \phi_{\text{раз}}$$

—
индекс остатка
установки излучения

$$\Rightarrow \phi_0 = 0, \psi_0 = 0.$$

$$U_{UM}(t) = U_m \cos \left(\omega_0 t + \frac{\Delta\omega}{\Omega} \sin \left(\frac{\Omega t}{\Omega} \right) \right)$$

— определение
сигнала

При ЧМ генерации частоты пропорциональны
подавляемому С и не зависят
от его частоты. В случае РМ частота
РМ также зависит от подавляемого
излучения. т. е. генерируемые частоты
линейно удаляются с ростом
частоты подавляемого С.

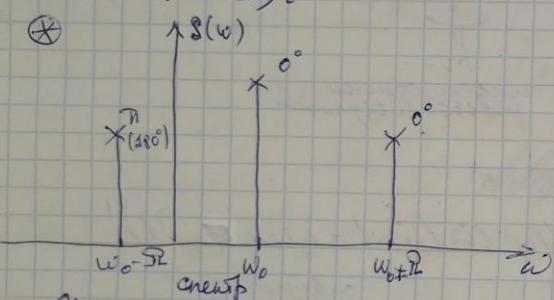
$$u(t) = U_m \cos(m \sin \Omega t) \cdot \cos \omega_0 t - U_m \sin(m \sin \Omega t) \sin \omega_0 t$$

$$(m \sin \Omega t)$$

Если малое значение частоты Ω , то можно

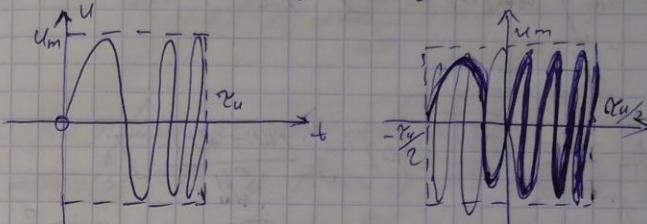
$$\cos(m \sin \Omega t) \approx 1, \quad \sin(m \sin \Omega t) \approx m \sin \Omega t.$$

$$u(t) = U_m \cos \omega_0 t + \frac{m U_m}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t - \frac{m U_m}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t$$



Эти малые значения могут быть отрицательными (см. \oplus), при этом максимумы основной составляющей (4б) находятся между собой на 180°

Видимо с биупрерывательской ЧМ.



Наиболее часто в радиотехнике применяется синхронная ЧМ, у которых частота модуляции является единой - называемой ЧМ С (НЧМ)

$$\omega(t) = \omega_0 + M t \quad [M] = c^{-2}$$

$$\gamma_u : \Delta \omega = M \gamma_u$$

$$\psi(t) = \omega_0 t + \frac{M t^2}{2}$$

$$U_{\text{НЧМ}}(t) = \begin{cases} 0, & t < -\frac{\gamma_u}{2} \\ U_m \cos(\omega_0 t + \frac{M t^2}{2}) - \frac{\gamma_u}{2} \leq t \leq \frac{\gamma_u}{2} \\ 0, & t > \frac{\gamma_u}{2} \end{cases}$$

НЧМ в конечном итоге осуществляется сначала получение импульсов по времени.

Следж:

$$S(\omega) = U_m \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\omega_0 t + \frac{\mu t^2}{2}) e^{-j\omega t} dt$$

$$S(\omega) = \frac{U_m}{2} \sqrt{\frac{\pi}{M}} \exp \left[-j \frac{(\omega - \omega_0)^2}{2M} \right] \times \left[C(x_1) + C(x_2) + j [S(x_1) + S(x_2)] \right],$$

зде:

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{x-\xi^2}{2} d\xi, \quad S(x) = \int_0^x \sin \frac{x-\xi^2}{2} d\xi$$

(известно Френел)

$$x_1 = \frac{\frac{M \gamma_4}{2} + j(\omega - \omega_0)}{\sqrt{M}}$$

$$x_2 = \frac{\frac{M \gamma_4}{2} - j(\omega - \omega_0)}{\sqrt{M}}$$

$$A(\omega) = \frac{U_m}{2} \sqrt{\frac{\pi}{M}} \sqrt{(C(x_1) + C(x_2))^2 + (S(x_1) + S(x_2))^2}$$

(ампл.)

$$\Phi(\omega) = -\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2M} + \arctg \frac{S(x_1) + S(x_2)}{C(x_1) + C(x_2)}$$

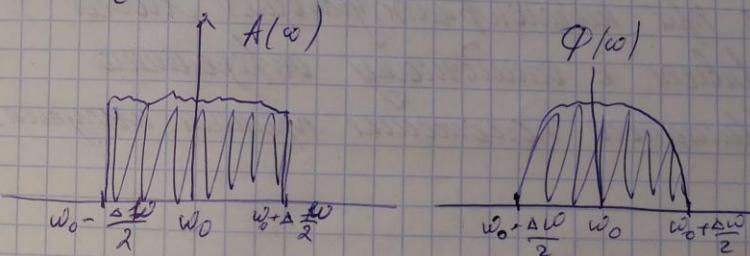
(фаз.)

Фаза ампл.: B

$$B = 4f \cdot \gamma_4 = \frac{M \gamma_4^2}{2\pi}$$

При практическом применении АЧМ с
использованием C и S в $B > 1$. В этом случае
 ϕ -нап. для $A(\omega)$ и $\Phi(\omega)$ упрощаются.

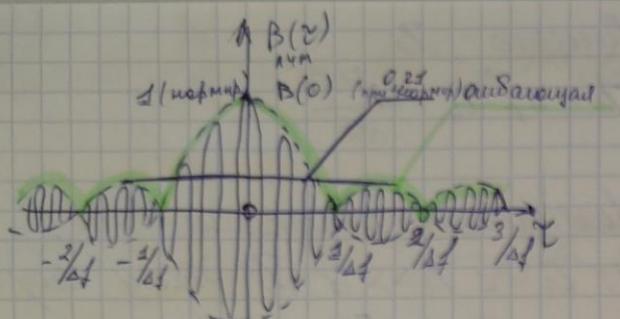
$$A(\omega) = \begin{cases} U_m \sqrt{\frac{\pi}{2M}}, & \frac{\omega_0}{2} + \Delta \omega \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta \omega}{2} \\ 0 \text{ иное} & \end{cases}$$



Если база АЧМ с состоянием линии то же
составляет ω_0 - то фаза неизменна, тогда $\Phi(\omega)$ не
имеет синг. точ.

$$B_{\text{АЧМ}}(\omega) = \frac{1}{2} \int_{\omega_0 - \frac{M \gamma_4}{2}}^{\omega_0 + \frac{M \gamma_4}{2}} W_4(\omega) e^{j\omega t} d\omega =$$

$$= \frac{U_m^2}{2\pi} \int_{\omega_0 - \frac{M \gamma_4}{2}}^{\omega_0 + \frac{M \gamma_4}{2}} \cos \omega \tau d\omega = \frac{U_m^2}{2} \gamma_4 \cdot \frac{\sin \frac{M \gamma_4}{2}}{\frac{M \gamma_4}{2}} \cos \frac{M \gamma_4}{2}$$



Ранее знакоу корреку. свойств ПУМа
обладает сим. квадратом. ^{относ.} величина
госных ленстров $\approx 0,23$ от максимума $2/\pi$,
что при исполнении условий может
привести к амплификации определению
брешущего поглощения присущ. излучения.