

Лабораторная работа №6. Изучение методики вейвлет-анализа сигналов

Цель работы. Изучить методику вейвлет-анализа сигналов с использованием построения масштабно-временного вейвлет-спектра коэффициентов.

Краткие теоретические сведения

Вейвлет-анализ сигналов является альтернативой традиционному гармоническому анализу сигналов на основе преобразования Фурье (ПФ). Гармонический анализ, как известно, позволяет получить информацию о распределении амплитуд и фаз гармонических колебаний, по предположению составляющих в сумме исходный анализируемый процесс. Однако, несмотря на математическую безупречность теоретических положений Фурье-анализа, у него имеется два недостатка: во-первых, наличие даже сравнительно небольших по уровню помех искажает фазовый спектр процесса настолько, что становится невозможно проводить анализ временных соотношений между гармоническими компонентами, во-вторых, базис Фурье плохо приспособлен для обработки нестационарных сигналов, что проявляется, например, при реализации метода фильтрации сигналов на основе аппроксимации. Использование частотно-временного преобразования Фурье частично снимает эти проблемы, однако, по-прежнему, из анализа “выпадают” кратковременно существующие феномены в обрабатываемом процессе.

Вейвлет анализ сигналов основан на использовании специфической системы базисных функций – вейвлетов, – которые представляют собой множество функций $\varphi(t, a, b)$, образующихся при масштабировании (коэффициент a) и временном сдвиге (b) функции материнского вейвлета $\Phi(t)$:

$$\varphi(t, a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \Phi\left(\frac{t-b}{a}\right), \quad (1)$$

Непрерывное вейвлет-преобразованием входного сигнала $x(t)$ длительности T имеет вид:

$$W(a, b) = \int_0^T x(t) \varphi(t, a, b) dt, \quad (2)$$

получающаяся функция двух аргументов $W(a, b)$ называется масштабно-временным вейвлет-спектром коэффициентов и содержит информацию о свойствах обрабатываемого сигнала, как и спектр преобразования Фурье, хотя и в менее очевидной для наглядной интерпретации форме.

Вейвлет-преобразование выборки дискретизированного процесса $x_n, n=0, 1 \dots N-1$ может быть представлено следующим образом:

$$W_{i,k} = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \frac{1}{\sqrt{a_i}} \Phi\left(\frac{\frac{n}{N-1} - b_k}{a_i}\right), \quad (3)$$

где параметр времени нормирован по длительности выборки: $t=n/(N-1)$, а параметры масштаба и сдвига задаются последовательностями $\{a_i\}$ и $\{b_k\}$. Результатом преобразования (3) будет двумерный массив W , размерности которого (I и K) могут быть заданы исследователем, исходя из требуемой детальности изображения картины вейвлет-спектра. Для параметра сдвига, который в формуле (3) также нормирован можно всегда задавать формулу для последовательных значений в виде $b_k=k/(K-1)$; диапазон изменения масштаба задается исходя из свойств функции материнского вейвлета: вейвлет-функции должны быть нетривиальными для a_{\min} и a_{\max} при $n=0, 1 \dots N-1$. Для нахождения величин a_{\min} и a_{\max} следует построить функции $\frac{1}{\sqrt{a_{\min}}} \Phi\left(\frac{\frac{n}{N-1}-0}{a_{\min}}\right)$ и $\frac{1}{\sqrt{a_{\max}}} \Phi\left(\frac{\frac{n}{N-1}-\frac{1}{2}}{a_{\max}}\right)$, соответствующие самой короткой и самой протяженной по длительности вейвлет-функциям и убедиться по графикам, что они соответствуют невырожденным случаям. После определения a_{\min} и a_{\max} , последовательность $\{a_i\}$ задается выражением $a_i = a_{\min} + \frac{i}{I-1}(a_{\max} - a_{\min})$.

Следует также подчеркнуть, что с целью сохранения энергетических соотношений в вейвлет-спектре для материнского вейвлета предварительно следует осуществить нормировку, так чтобы выполнялось равенство $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(t)dt = 1$.

Полученный спектр коэффициентов принято представлять в виде черно-белого или цветного изображения, каждый элемент (пиксель) которого имеет характеристику (яркость либо цвет), однозначно связанную с величиной соответствующего элемента массива $W_{i,k}$. При построении черно-белого изображения следует осуществить нормировку массива W : минимальному по значению элементу (с учетом знака, т. е. самому большому по модулю, с отрицательным знаком) ставится в соответствие значение 0, максимальному – десятичное число 255.

Навыки качественного и количественного анализа получаемой картины коэффициентов вейвлетного спектра формируются после обработки некоторого множества тестовых сигналов с известными исследователю особенностями. Полезно изучить результаты, представленные в публикациях по тематике вейвлет-анализа (в частности, по [5]). Общий принцип интерпретации заключается в том, что любой коэффициент вейвлет-спектра представляет собой скалярное произведение вейвлет-функции с соответствующими индексами (i и k) и обрабатываемого процесса $\{x_n\}$, другими словами, более яркие области изображения вейвлетного спектра будут наблюдаться при близости форм фрагмента обработанного процесса и соответствующей вейвлетной функции.

Варианты заданий*

Задание на выполнение работы включает получение обучающимся у преподавателя варианта, в котором задана функция материнского вейвлета. Далее требуется смоделировать выборки $\{x_n\}$ различных тестовых сигналов, таких как: 1) гармонический сигнал, 2) сумма гармонических сигналов, 3) гармонический сигнал со скачкообразным изменением частоты и/или амплитуды и фазы, 4) функция, соответствующая материнскому вейвлету, либо одной из вейвлетных функций, либо некоторой их сумме, либо (3) с нецелыми коэффициентами, 5) аддитивная смесь любого из перечисленных ранее сигналов помехой, и т. д. Обязательным является исследование перечисленных тестовых сигналов №1 – 5, как без помехи (чтобы получить вейвлетные спектры чистых сигналов), так и с помехой типа белый шум (чтобы оценить степень искажения вейвлетного спектра помехой). Дополнительно к основному заданию студент при желании может осуществлять моделирование любых процессов, представляющих ему интересными. Например, для сигнала можно задать последовательность прямоугольных или треугольных импульсов, в качестве помехи имеет смысл задать гауссовский шум с экспоненциальной корреляционной функцией, и т. п.

Для каждого тестового сигнала следует осуществить построение картин коэффициентов вейвлет-спектра для каждого сигнала и интерпретировать их на качественном уровне, в частности, на предмет возможности использования картин вейвлет-коэффициентов для классификации сигналов по свойствам.

Варианты заданий приведены в таблице.

Таблица – Функции материнских вейвлетов

№ вар.	Функция $\Phi(t)$	Название вейвлета
1	$(1-t^2) \cdot \exp(-t^2/2)$	Мексиканская шляпа
2	$t \cdot \exp(-t^2/2)$	WAVE-вейвлет
3	$\exp(-t^2/2) - 0.5 \cdot \exp(-t^2/8)$	DOG-вейвлет
4	$(\sin(\pi t/2)/(\pi t/2)) \cdot \cos(3\pi t/2)$	вейвлет Шэннона (Shannon)
5	$(1-t^2)/(\pi(1+t^2)^2)$	вейвлет Пуассона (Poisson)

*Примечание:

При нарушении предельного срока сдачи работы максимальное количество баллов за работу **снижается на 1 ед. в день** относительно указанного в описании задания. При желании сохранить

максимальный балл, обучающийся должен выполнить дополнительное задание: реализовать метод вейвлет-фильтрации на основе аппроксимации с использованием вейвлетного базиса, аналогично методу, изученному в лабораторной работе №3. В отличие от лабораторной работы №3, здесь будет нужно во взвешенной сумме для формирования выходного сигнала оставить M слагаемых не с минимальными индексами, а с индексами, для которых коэффициенты вейвлет-разложения максимальны максимальными по модулю (принцип трешолдинга).

Для расчетов рекомендуется использовать компьютерный пакет MathCAD.

Порядок выполнения работы

1. Согласовать с преподавателем вариант задания во время занятия по расписанию, удостовериться в правильном понимании задания и критериев его оценки.
2. Построить нормированную материнскую вейвлет-функцию.
3. Построить несколько вейвлет-функций при разных индексах, определить границы диапазона варьирования параметра масштаба (a_{min} и a_{max}).
4. Осуществить моделирование тестовых сигналов.
5. Вычислить коэффициенты вейвлет-спектра по формуле (3), заполнить массив W для каждого тестового сигнала.
6. Осуществить нормировку каждого массива так, чтобы любой его элемент находился в диапазоне от 0 до 255.
7. Построить картины вейвлет-коэффициентов по нормированным массивам W , используя инструмент построения изображений в среде MathCAD (Меню “Вставка” – “Рисунок”).
8. По желанию или при необходимости (см. примечание к вариантам заданий), выполнить дополнительное исследование, привести графики выходных сигналов вейвлет-фильтра при различных M .
9. Сформулировать выводы.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Теоретические сведения методологии вейвлет-анализа сигналов.
3. Программа, в которой представлены результаты обработки сигналов, с необходимыми комментариями.
4. Полученные графики картин вейвлетных спектров.
5. Выводы, в которых отражены особенности изученного метода и свойства полученных результатов.
6. Список используемых источников.

Рекомендуемая литература

1. Цифровая обработка сигналов: учебник для ВПО / С.Н. Воробьев. - М.: Академия, 2013. - 320 с. [библиотечный шифр 621.391 В75]
2. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / В.А. Сериков, В.Р. Луцив; С.-Петерб. гос. ун-т аэрокосм. приборостроения. - СПб: Изд-во ГУАП, 2014. – 110 с. [библиотечный шифр 621.391 С32]
3. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: учебное пособие / С.В. Умняшкин. - М.: ФОРУМ : ИНФРА-М, 2014. - 304 с. [библиотечный шифр 519.6/8 У54]
4. Астафьева Н М "Вейвлет-анализ: основы теории и примеры применения" УФН 166 1145–1170 (1996). // URL: <https://ufn.ru/ru/articles/1996/11/a/>
5. Лекция 8. Вейвлет-анализ.
// URL: http://matematika.phys.msu.ru/files/stud_spec/270/MM_lec8.pdf
6. Новиков Л.В. Основы вейвлет-анализа сигналов. Учебное пособие. 1999 г. 152 с.
// URL: <http://elibrary.bsu.az/azad/645.pdf>