

Практическая работа №5. Расчет и моделирование рекурсивного цифрового фильтра

Цель работы. Изучить метод фильтрации сигналов во временной области с использованием рекурсивной фильтрации. Осуществить моделирование работы фильтра для сигналов различных видов.

Краткие теоретические сведения

Фильтрация является одним из широко применяемых методов обработки сигналов [1-3]. К методам фильтрации прибегают, когда об обрабатываемом процессе $\{x_n\}$ заранее известно, что он состоит из аддитивной смеси полезного сигнала $\{s_n\}$ и некоторой помехи $\{v_n\}$

$$x_n = s_n + v_n.$$

Основная цель фильтрации – ослабление компонентов помехи, и формирование выходного сигнала $\{y_n\}$, который будет наиболее близким по форме к полезному сигналу.

Фильтрацию можно производить без вычисления спектра обрабатываемой выборки, непосредственно во временной области. Уравнение работы рекурсивного цифрового фильтра

$$y_n = \sum_{k=0}^{q-1} b_k x_{n-k} + \sum_{m=1}^r a_m y_{n-m} \quad (1)$$

предполагает выполнение операции взвешенного суммирования части отсчетов входного процесса и части отсчетов выходного сигнала фильтра на предыдущих тактах. Массивы из q и r коэффициентов фильтра ($\{b_k\}$ и $\{a_m\}$, соответственно) полностью определяют характеристики фильтра.

Основная задача расчета рекурсивного фильтра заключается в вычислении коэффициентов $\{b_k\}$ и $\{a_m\}$ по заданным частотным характеристикам. Для расчета фильтра существуют разные методы, наиболее простым из которых является метод расчета по аналоговому фильтра-прототипу с использованием отображения переменной преобразования Лапласа p на плоскость переменной z . Для такого отображения чаще всего используется билинейное преобразование. Значения r и q при таком методе расчета фильтра определяются только формулой для передаточной функции аналогового фильтра-прототипа $W(p)$ и, в отличие от нерекурсивного фильтра, не могут быть произвольно изменены разработчиком фильтра.

Таким образом, расчет рекурсивного фильтра сводится к преобразованию формулы для передаточной функции аналогового фильтра-прототипа $W(p)$ к формуле для дискретной передаточной функции цифрового фильтра $D(z)$. Билинейное преобразование, известное также как преобразование Тастина, осуществляется по формуле замены переменной

$$p = \frac{2}{T_{\Delta}} \cdot \frac{z - 1}{z + 1}. \quad (2)$$

Нужно заметить, что, помимо (2), существуют и другие, более сложные и, с точки зрения теории, более точные формулы для замены переменной p : метод Цыпкина-Гольденберга, метод Рагазини-Бергена, метод Уэддла, и ряд других, но они приводят с значительно более сложным в практической реализации результатам при крайне малом выигрыше в точности реализации цифрового рекурсивного фильтра.

После подстановки (2) в $W(p)$ и проведения необходимых алгебраических преобразований, итоговую передаточную функцию цифрового фильтра требуется представить в дробно-рациональной форме:

$$D(z) = \frac{\beta_0 z^q + \beta_1 z^{q-1} + \beta_2 z^{q-2} + \dots + \beta_{q-1} z + \beta_q}{z^r + \alpha_1 z^{r-1} + \alpha_2 z^{r-2} + \dots + \alpha_{r-1} z + \alpha_r}, \quad (3)$$

где α_i и β_i – вещественные числа (константы), после чего, выполняя преобразования с использованием теоремы сдвига для z -преобразования, нетрудно получить уравнение работы (1) с коэффициентами $\{a_m\}$ и $\{b_k\}$.

В качестве входных данных для расчета рекурсивного фильтра выступает формула для аналогового фильтра-прототипа $W(p)$, формирование которой производится либо по известным методикам расчета типовых фильтров [2], либо по справочным данным.

Для анализа АЧХ полученного цифрового фильтра с передаточной функцией (3), следует построить ее график по формуле

$$A(f) = |D(z)| \Big|_{z=e^{j2\pi fT_\Delta}} \quad (4)$$

Достоинство рекурсивного фильтра заключается в значительно меньшем количестве вычислительных операций по сравнению с нерекурсивным фильтром при той же точности реализации частотных характеристик фильтра. Недостатком является потенциальная неустойчивость, возникающая как вследствие грубых ошибок, допущенных при расчете коэффициентов $\{a_m\}$ и $\{b_k\}$. Кроме того, при прочих равных условиях переходной процесс при работе рекурсивного фильтра имеет обычно значительно меньшую длительность, чем при использовании нерекурсивного фильтра.

Варианты заданий

Задание на выполнение работы (тип и параметры фильтра) совпадает с заданием на практическую работу №4. Рекомендуется использовать то же самое значение периода дискретизации сигнала. Формулу для аналогового фильтра-прототипа обучающийся выбирает самостоятельно по методике, изложенной в [2], рекомендуется использовать передаточные функции аналоговых фильтров-прототипов 2-го порядка любого семейства (Баттерворта, Чебышева, Бесселя).

Возможные варианты дополнительных заданий:

- 1) Использовать в расчетах передаточную функцию аналогового фильтра-прототипа 3-го порядка.
- 2) Для замены переменной p использовать метод Уэддля.
- 3) Осуществить расчет рекурсивного фильтра методом инвариантности импульсной характеристики.
- 4) Осуществить расчет рекурсивного фильтра методом инвариантности переходной характеристики.
- 5) Выполнить исследование влияния частоты гармонической помехи на среднеквадратическую ошибку фильтрации, построить график полученной зависимости.
- 6) Выполнить исследование влияния вида передаточной функции аналогового фильтра-прототипа на АЧХ цифрового фильтра (например, сравнить результаты для семейства Чебышева и Баттерворта, Баттерворта и Бесселя, и т.д.).
- 7) Изобразить структурную схему рассчитанного цифрового фильтра в одной из канонических форм.

Для выполнения практической работы рекомендуется использовать компьютерный пакет MathCAD или MatLAB. Обучающийся должен быть готов к защите своей работы и к ответу на любой вопрос из списка контрольных вопросов.

Порядок выполнения работы.

1. Согласовать с преподавателем вариант задания во время занятия по расписанию, удостовериться в правильном понимании задания и критериев его оценки.
2. Задать формулу для функции, описывающей исходный непрерывный сигнал $s(t)$, желательно в виде гармонического колебания с частотой, попадающей в полосу пропускания фильтра; рекомендуется использовать те же параметры процессов, которые задавались при выполнении практической работы №4.
3. Сформировать выборку дискретизированного по времени сигнала, без дискретизации по уровню. Построить график сигнала.
4. Задать помехи двух видов: гармоническую $\{v1_n\}$, частота которой находится вне полосы частот пропускания фильтра, и помеху типа гауссовский белый шум $\{v2_n\}$.
5. Написать программу, в которой осуществляется расчет массива коэффициентов рекурсивного фильтра.
6. Построить на одном графике 2 АЧХ: теоретически заданного аналогового прототипа и цифрового рекурсивного фильтра. При существенных различиях следует либо искать ошибку в расчетах, либо обратиться к модифицированному методу билинейного преобразования.
7. Используя уравнение (1), осуществить моделирование процесса фильтрации для следующих сигналов (аналогично практической работе №4):
 - чистого полезного сигнала, без помехи, т. е., задавая $x_n=s_n$, с целью выявления искажений сигнала фильтром, построить графики входного процесса и полученного выходного сигнала фильтра $\{y0_n\}$,
 - аддитивной смеси сигнала и гармонической помехи, задавая $x_n=s_n+\lambda \cdot v1_n$, интенсивность помехи λ задать по своему усмотрению (желательно совпадающую с примерами из практической работы №4), построить графики входного процесса и полученного выходного сигнала фильтра $\{y1_n\}$,
 - аддитивной смеси сигнала и флуктуационной помехи, задавая $x_n=s_n+\lambda \cdot v1_n$, интенсивность помехи λ задать по своему усмотрению, чтобы убедительно проиллюстрировать эффективность работы фильтра, построить графики входного процесса и полученного выходного сигнала фильтра $\{y2_n\}$.
8. Для каждого из трех полученных выходных сигналов фильтра вычислить среднеквадратическую ошибку фильтрации $e = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y_n - s_n)^2}$.
9. При необходимости (см. примечание к вариантам заданий) или при желании выполнить дополнительное исследование.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Краткие теоретические сведения о задачах фильтрации сигналов и их практическом применении, а также о методах фильтрации во временной области, нерекурсивном и рекурсивном уравнениях цифровой фильтрации.
3. Программа, в которой представлены результаты моделирования, с необходимыми комментариями (назначение констант и переменных, функций, и т.п.).
4. Графики АЧХ.
5. Полученные графики выходного сигнала фильтра при различных исходных данных с соответствующими подрисовочными подписями.
6. Выводы, в которых отражены особенности изученных методов и свойства полученных результатов. Дополнительно, в выводах можно привести ответы на некоторые контрольные вопросы.
7. Список используемых источников, желательно не только из списка рекомендуемой литературы, приветствуется использование Интернет-ресурсов; на все источники в тексте отчета должны быть ссылки.

Рекомендуемая литература

1. Цифровая обработка сигналов: учебник для ВПО /С.Н. Воробьев. - М.: Академия, 2013. - 320 с. [библиотечный шифр 621.391 В75]
2. Расчет активных фильтров. Учебное пособие. / И.О. Жаринов, О.О. Жаринов, А.Н. Кулин. СПбГУИТМО, 2008.
3. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / В.А. Сериков, В.Р. Луцев; СПб: Изд-во ГУАП, 2014. – 110 с. [библиотечный шифр 621.391 С32]
4. Рекурсивные цифровые фильтры. Материал из Национальной библиотеки им. Н.Э. Баумана. / URL: https://ru.bmstu.wiki/Рекурсивные_цифровые_фильтры
5. Расчет передаточной характеристики БИХ фильтра на основе аналогового фильтра прототипа. Билинейное преобразование.
/ URL: <http://www.dsplib.ru/content/filters/bilinear/bilinear.html>

Контрольные вопросы

1. Каковы задачи фильтрации сигналов?
2. В чем отличия рекурсивного и нерекурсивного уравнений цифровых фильтров?
3. В чем идея метода фильтрации во временной области?
4. В чем состоят различия между линейными и нелинейными фильтрами?
5. Дайте сравнительный анализ фильтров, работающих в частотной и временной области.
6. В чем достоинства и недостатки метода фильтрации во временной области?
7. Какие еще, кроме изученного, существуют методы расчета рекурсивных цифровых фильтров?
8. Каковы требования к вычислительной производительности устройства, реализующего алгоритм рекурсивного цифрового фильтра.
9. Что такое явление неустойчивости рекурсивного цифрового фильтра?
10. Может ли рекурсивный фильтр оказаться неустойчивым, например, из-за ошибки в расчетах или по иным причинам? Поясните ответ.
11. Тождественны ли понятия рекурсивного фильтра и фильтра с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ)? Поясните ответ.
12. От чего зависит длительность переходного процесса в рекурсивном фильтре?
13. Каким условиям должны удовлетворять коэффициенты $\{a_m\}$ в уравнении (1), чтобы рекурсивный фильтр был устойчивым?