

Лабораторная работа №5. Расчет и моделирование цифрового нерекурсивного фильтра Винера

Цель работы. Изучить методику расчета цифрового нерекурсивного фильтра Винера и произвести моделирование его работы.

Краткие теоретические сведения

Цифровой фильтр Винера применяется для решения задачи фильтрации сигнала на фоне аддитивной помехи в случае, когда заданы статистические свойства сигнала и помехи (корреляционные функции или функции спектральной плотности мощности). Возможны различные способы реализации фильтра Винера. Изученный в прошлом семестре подход, предполагающий реализацию алгоритма фильтрации в частотной области, имеет недостаток: требуется предварительная запись полного информационного массива данных $\{x_n\}$, $n=0,1,\dots,N-1$, что затрудняет обработку сигнала в реальном масштабе времени. Нерекурсивный фильтр свободен от этого недостатка, обеспечивая обработку сигналов неограниченной длительности.

Нерекурсивный фильтр, имеющий разностное уравнение вида

$$y_n = \sum_{m=0}^{Q-1} b_m x_{n-m}, \quad (1)$$

будет представлять собой фильтр Винера, если коэффициенты $\{b_m\}$, $m=0,1,\dots,Q-1$ рассчитаны как решение матричного уравнения Винера-Хопфа

$$\vec{b} = R_x^{-1} \vec{r}_s, \quad (2)$$

где R_x – теплоцева матрица размера $Q \times Q$, элементы которой являются отсчетами дискретной автокорреляционной функции смеси полезного сигнала с помехой, при взаимной их независимости справедливо равенство $R_x = R_s + R_v$, в котором R_s – матрица автокорреляций полезного сигнала, R_v – матрица автокорреляций помехи; \vec{r}_s – вектор-столбец отсчетов корреляционной функции сигнала.

Уравнение (1) позволяет организовать обработку на скользящем окне длиной Q отсчетов, обеспечивая возможность работы фильтра по мере поступления новых отсчетов входного сигнала.

Варианты заданий*

Задание на выполнение работы включает получение обучающимся у преподавателя некоторой функциональной зависимости, представляющей собой полезный детерминированный сигнал $\{s_k\}$ длиной $Q=2^7$ отсчетов (см. таблицу вариантов заданий). Параметры сигнала обучающийся задает самостоятельно из рекомендуемого диапазона значений. Требуется смоделировать выборку $\{x_n\}$, представляющую собой аддитивную смесь полезного сигнала и помехи, длина выборки N отсчетов, $N \gg Q$, сам сигнал следует расположить произвольно в пределах выборки (в MathCAD для сдвига сигнала $\{s_k\}$ по времени на τ дискретных отсчетов рекомендуется использовать конструкцию $\text{if}(\tau-1 < n < \tau+Q, s_{n-\tau}, 0)$), можно даже расположить в пределах выборки несколько неперекрывающихся по времени копий сигнала. Помеху следует задавать как гауссовский шум с заданной корреляционной функцией (в работе для вариантов с 1-го по 8-й нужно исследовать 2 варианта помехи: случай гауссовского белого шума и гауссовского шума с экспоненциальной корреляционной функцией, при задании интервала корреляции порядка $Q/2$ дискретных отсчетов, для вариантов с 9-го по 19-й следует задавать только помеху типа белый шум). Следует осуществить моделирование работы нерекурсивного фильтра Винера, представив временные диаграммы входного и выходного сигналов как на всем протяжении обрабатываемого процесса, так и детальные, на протяжении интервалов наличия входного и выходного сигналов.

Таблица – варианты заданий

№ вар.	Полезный сигнал $\{s_k\}$, $k=0,1...Q-1$ **
1	$\sin(2\pi \cdot \theta \cdot k T_{\Delta}) \exp(-2.5 \cdot k T_{\Delta})$, θ – целое число: $3 < \theta < 10$
2	$\sin(2\pi \cdot f \cdot k T_{\Delta})^3$, f – целое число: $3 < f < 10$
3	$(\sin(2\pi \cdot \theta \cdot k T_{\Delta})) (\sin(2\pi \cdot f \cdot k T_{\Delta}))$, θ и f – целые числа: $3 < \theta < 10$, $3 < f < 10$, $ f - \theta > 1$
4	$(\cos(2\pi \cdot \theta \cdot k T_{\Delta}))^3$, θ – целое число: $3 < \theta < 10$,
5	$\sin(2\pi \cdot \theta \cdot k T_{\Delta}) + k T_{\Delta} \cdot \cos(2\pi \cdot f \cdot k T_{\Delta})$, θ и f – целые числа: $3 < \theta < 10$, $3 < f < 10$, $ f - \theta > 1$
6	$\exp(-\theta \cdot k T_{\Delta}) - \exp(-\alpha \cdot k T_{\Delta})$, θ и α – вещественные числа: $2 < \theta < 2.5$, $2.5 < \alpha < 3$, $ \alpha - \theta > 0.5$
7	$\cos(\pi \cdot k T_{\Delta}/Q) - \cos(3\pi \cdot k T_{\Delta}/Q)$
8	$10 \cdot k T_{\Delta} \exp(-\alpha \cdot k T_{\Delta})$, α – вещественное число: $2 < \alpha < 3$
9	$\sin(2\pi \cdot \theta \cdot k T_{\Delta}) \exp(-\alpha \cdot (k T_{\Delta} - 0.5)^2)$, α – вещественное число: $8 < \alpha < 12$, θ – целое число: $3 < \theta < 10$
10	$(\sin(2\pi \cdot f \cdot k T_{\Delta}))^3 \exp(-\alpha \cdot (k T_{\Delta} - 0.5)^2)$, α – вещественное число: $8 < \alpha < 12$, f – целое число: $3 < f < 10$
11	$(\sin(2\pi \cdot \theta \cdot k T_{\Delta})) (\sin(2\pi \cdot f \cdot k T_{\Delta}))$, θ и f – целые числа: $1 < \theta < 5$, $3 < f < 10$, $ f - \theta > 1$
12	$\sin(\pi \cdot k T_{\Delta}/Q)$
13	$\sin(2\pi \cdot \theta \cdot k T_{\Delta}) + \cos(2\pi \cdot f \cdot k T_{\Delta})$, θ и f – целые числа: $1 < \theta < 5$, $3 < f < 10$, $ f - \theta > 1$
14	$\exp(-\theta \cdot k T_{\Delta}) - \exp(-\alpha \cdot k T_{\Delta})$, θ и α – вещественные числа: $2 < \theta < 2.5$, $2.5 < \alpha < 3$
15	$\exp(-\alpha \cdot (k T_{\Delta} - 0.5)^2)$, α – вещественное число: $8 < \alpha < 12$
16	$k T_{\Delta} \exp(-\alpha \cdot k T_{\Delta})$, α – вещественное число: $1 < \alpha < 2$
17	$\sin(\pi \cdot k T_{\Delta}/Q)^3$
18	$\exp(-\alpha \cdot (k T_{\Delta} - 0.5)^2)$, α – вещественное число: $8 < \alpha < 12$
19	$(\cos(2\pi \cdot \theta \cdot k T_{\Delta}))^3$, θ – целое число: $1 < \theta < 5$

** **Примечание:** во всех вариантах период дискретизации: $T_{\Delta} = 2^{-7}$ с.

***Примечание:**

После указанной предельной даты выполнения работы максимальное количество баллов за работу **снижается на 1 балл за каждые 2 дня**. При желании обучающегося сохранить максимальный балл, следует выполнить одно из дополнительных заданий (согласуется с преподавателем):

1) для вариантов с 1-го по 8-й вместо экспоненциально-коррелированной помехи следует задавать помеху с экспоненциально-косинусной корреляционной функцией. С методом моделирования такой помехи можно ознакомиться в литературе [5] или [6];

2) для вариантов с 9-го по 16-й требуется реализовать вариант фильтра Винера с адаптацией к априорно неизвестным характеристикам помехи. В этом случае предполагается, что в начале обрабатываемого процесса $\{x_n\}$ имеется интервал длиной K отсчетов, в котором заведомо отсутствует полезный сигнал. Тогда адаптация заключается в получении оценок корреляционной функции помехи на этом интервале и использовании этих оценок в расчетах и последующей фильтрации оставшейся части смоделированной выборки смеси сигнала с помехой. В результате исследования следует получить график зависимости отношения среднеквадратических ошибок фильтрации адаптивного фильтра Винера и фильтра Винера при полной априорной информации от величины K .

Для расчетов рекомендуется использовать компьютерный пакет MathCAD.

Порядок выполнения работы.

1. Согласовать с преподавателем вариант задания во время занятия по расписанию, удостовериться в правильном понимании задания и критериев его оценки.
2. Рассчитать коэффициенты фильтра (1) с использованием уравнения (2) для двух разных типов помех.
3. Осуществить моделирование выборки полезного сигнала $\{s_k\}$, $k=0,1...Q-1$. Построить график.
4. Осуществить моделирование выборок $\{x_n\}$, $n=0,1...N-1$, представляющих собой смесь полезного сигнала, сдвинутого по времени (можно несколько копий), с помехами заданных видов, для моделирования экспоненциально-коррелированной помехи (только для вариантов с 1-го по 8-й) следует использовать модель авторегрессии 1-го порядка. Дисперсии помех задавать одинаковыми!
5. Выполнить расчет коэффициентов КИХ-фильтра Винера $\{b_m\}$, $m=0,1...Q-1$.
6. Осуществить моделирование фильтра Винера, построить график входного процесса $\{x_n\}$, $n=0,1...N-1$ и график выходного сигнала фильтра $\{y_n\}$.
7. Построить графики разности между заданной функцией полезного сигнала и для фильтра Винера для заданных типов помех. Оценить визуально качество фильтрации. Вычислить среднеквадратическую ошибку фильтрации.
8. По желанию или при необходимости (см. примечание к вариантам заданий), выполнить дополнительное исследование.
9. Сформулировать выводы. для вариантов с 1-го по 8-й включая ответ на вопрос, помеха какого типа подавляется в большей степени: белый шум или экспоненциально-коррелированная.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Теоретические сведения методологии винеровской фильтрации и уравнении Винера-Хопфа в дискретной форме.
3. Программа, в которой представлены результаты обработки сигналов, с необходимыми комментариями.
4. Полученные графики.
5. Выводы, в которых отражены особенности изученных методов и свойства полученных результатов.
6. Список используемых источников.

Рекомендуемая литература

1. Цифровая обработка сигналов: учебник для ВПО / С.Н. Воробьев. - М.: Академия, 2013. - 320 с. [библиотечный шифр 621.391 В75]
2. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / В.А. Сериков, В.Р. Луцев; С.-Петерб. гос. ун-т аэрокосм. приборостроения. - СПб: Изд-во ГУАП, 2014. – 110 с. [библиотечный шифр 621.391 С32]
3. Теоретические основы цифровой обработки и представления сигналов: учебное пособие / С.В. Умняшкин. - М.: ФОРУМ : ИНФРА-М, 2014. - 304 с. [библиотечный шифр 519.6/8 У54]
4. Фильтр Винера-Хопфа. // URL: http://life-prog.ru/1_40046_filtr-vinera-hopfa.html
5. Методы и алгоритмы компьютерного моделирования случайных процессов: методические указания к выполнению лабораторных работ / С.-Петерб. гос. ун-т аэрокосм. приборостроения; // сост. В.С. Павлов. СПб: Изд-во ГУАП, 2010.
6. Моделирование случайных процессов.
//URL: <http://westbound.ru/моделирование-случайных-процессов/>