Практическая работа №2.
Исследование метода цифрового спектрального анализа на основе алгоритма быстрого преобразования Фурье

Цель работы. Изучить основы применения алгоритма быстрого преобразования Фурье для решения задачи цифрового спектрального анализа сигналов.

Краткие теоретические сведения

Спектральный анализ является одним из наиболее распространенных инструментов анализа свойств сигналов. Он позволяет надежно выявить наличие в обрабатываемом процессе гармонических составляющих даже в случаях, когда визуальный анализ сигнала не позволяет это даже предположить. На практике спектральный анализ находит применение в выявлении скрытых периодичностей в данных с определением их частот, обнаружении гармонических сигналов на фоне помех, и при решении многих других задач.

Существуют различные подходы к осуществлению спектрального анализа сигналов. При цифровой обработке сигналов наиболее просто метод спектрального анализа реализуется на основе дискретного преобразования Фурье [1-3], для ускорения вычисления которого используется алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ). Функции вычисления БПФ включаются в состав библиотек практических всех компьютерных программ, предназначенных для проведения математических расчетов. Алгоритм БПФ позволяет по выборке из N отсчетов дискретизированного сигнала $\{x_n\}$ получить N значений комплексного частотного спектра этого сигнала $\{X_n\}$. Для ускорения вычислений рекомендуется, по возможности, задавать N равным целой степени числа 2, если же этого сделать не удается, прибегают к дополнению анализируемой выборки нулями (zero padding).

Для качественного анализа полученного результата обработки осуществляется построение графиков амплитудного спектра (значений модуля комплексного спектра) и фазового спектра (значений аргумента комплексного спектра). При построении графиков спектров в качестве аргумента по оси абсцисс рекомендуется задавать величину $n/(N{\cdot}T_Д)$, где $T_Д$ – период дискретизации сигнала; в этом случае числа на оси будут соответствовать значениям циклических частот гармонических компонентов обрабатываемого сигнала. При интерпретации полученных результатов цифрового спектрального анализа следует помнить, что спектр вещественного сигнала будет обладать свойствами комплексно-сопряженной симметрии

$$X_n = X^*_{N-n}$$

где звездочка означает операцию комплексного сопряжения. Отсюда, в частности, следует, что график амплитудного спектра окажется зеркально-симметричным относительно воображаемой вертикальной линии для $n=N/2$. Проведя небольшой теоретический анализ, нетрудно убедиться, что аргумент $n=N/2$ соответствует частоте Найквиста, и, следовательно, все компоненты спектра при больших n обусловлены эффектом наложения спектров (“фантомные” частоты).

При спектральном анализе сигналов конечной длительности, как известно [1, 2, 4], возникает специфический эффект, провляющийся как при аналоговой, так и при цифровой обработке сигналов – эффект спектральной утечки, – который в ряде случаев приводит к ошибочной интерпретации результатов спектрального анализа [4]. Причиной проблемы является разрыв функции на краях обрабатываемой выборки, который может возникать как вследствие того, что частота входного гармонического сигнала не совпадает ни с одним значением из сетки частот $f_n = n/(N{\cdot}T_Д)$, так и вследствие наличия непериодических компонентов обрабатываемого сигнала. В любом случае, даже при обработке одиночного гармонического сигнала получится спектр, в котором окажутся существенно ненулевыми все значения массива $\{X_n\}$: помимо высокоамплитудных компонентов в окрестности частоты сигнала появляются побочные компоненты спектра, называемые боковыми лепестками. Боковые лепестки на графике амплитудного спектра проявляются как “волны”, расходящиеся по обе стороны от основного высокоамплитудного лепестка (очень хорошая анимированная иллюстрация рассматриваемого механизма искажений спектра имеется в [5]). В случае, если сигнал состоит из суммы нескольких гармонических сигналов с различными частотами и амплитудами, результирующий спектр будет искажен за счет боковых лепестков каждого из сигналов, а основные лепестки гармонических компонентов малой амплитуды могут “утонуть” в боковых лепестках высокоамплитудных составляющих.

Основным методом борьбы с эффектом спектральной утечки является применение весовых окон, обычно во временной области. Идея применения временного окна заключается в плавном приведении обрабатываемого сигнала к нулю на краях обрабатываемой выборки перед операцией вычисления БПФ:

$$y_n=x_n\cdot w_n\,, n=0,1...N-1 \quad (1)$$

где $\{w_n\}$ – массив дискретизированных значений оконной функции, задаваемой обычно как функция непрерывного времени $w(t)$. Спектр $\{Y_n\}$, вычисляемый по выборке $\{y_n\}$, будет в значительно меньшей степени искажен влиянием боковых лепестков, чем спектр $\{X_n\}$, вычисляемый по выборке $\{x_n\}$, за счет чего можно будет обнаруживать низкоамплитудные периодические компоненты в анализируемом сигнале.

Однако применение оконной функции искажает форму сигнала, сокращая его эффективную длительность, что проявляется в расширении основного лепестка спектра каждого гармонического компонента сигнала. В результате, оконный спектральный анализ, с одной стороны, позволяя выявить низкоамплитудные гармонические составляющие, с другой стороны может приводить к слиянию двух близкорасположенных пиков спектра, принадлежащих двум сигналам с близкими частотами, в один, что тоже приведет к ошибочной интерпретации свойств обрабатываемого сигнала. Таким образом, целесообразность применения оконной функции при реальной обработке сигналов определяется основной задачей, решаемой при помощи спектрального анализа. Стремление найти компромиссный вариант между необходимым подавлением нежелательных боковых лепестков спектра и неизбежно возникающим уширением основного лепестка привело к появлению нескольких десятков оконных функций [4 - 6], конкурирующих между собой. Для каждой оконной функции приводится [5, 6] формула для $w(t)$ (или непосредственно для w_n), уровня подавления боковых лепестков (в децибелах) и степени относительного уширения основного лепестка спектра. Кроме того, преобразование (1) в общем случае изменяет величину энергии обрабатываемого процесса, поэтому все отсчеты спектра $\{Y_n\}$ приходится умножать на поправочный масштабный коэффициент, если есть необходимость точной количественной оценки величин амплитуд гармонических составляющих процесса. На практике чаще всего применяются оконные функции Блэкмана, Хэмминга, Блэкмана-Харриса, Блэкмана-Натолла, Гаусса.

Варианты заданий

Задание на выполнение работы включает задание обучающимся функции $s_{in}(t)$, содержащей три гармонических колебания с различными амплитудами, частотами и фазами, с последующим формированием выборки сигнала $\{s_n\}$, дискретизированного по времени (с соблюдением требований теоремы Котельникова, и проведении спектрального анализа с использованием алгоритма БПФ. Требуется вычислить спектр сигнала без использования функции окна и с использованием двух разных оконных функции, заданных по вариантам (каждому обучающемуся выдается два разных варианта – для оконной функции низкого и высокого разрешения, см. таблицу) (если в формуле для оконной функции имеются некоторые числовые параметры, следует задавать их некоторые средние значения из рекомендованного диапазона), построить графики амплитудного и фазового спектров с целью проведения качественного анализа получаемых результатов и выявления эффектов, описанных в теоретических сведениях. Кроме того, нужно будет добавить к сигналу флуктуационную помеху типа белый гауссовский шум, и осуществить спектральный анализ полученного, зашумленного сигнала.

Варианты дополнительных заданий:

1) Дополнительно применить окно Дольфа-Чебышёва (Dolph-Chebyshev) [6],

2) Дополнительно применить ультрасферическое (Ultraspherical) окно [6],

3) Дополнительно применить заданные окна в частотной области, используя преобразование свертки, продемонстрировать идентичность получаемых результатов,

4) Дополнительно написать собственную программу-функцию для вычисления по алгоритму БПФ, эквивалентную библиотечной функции по функциональности (прямая реализация формулы для ДПФ не допускается) и продемонстрировать идентичность получаемых результатов.

5) Написать программу, моделирующую процесс аналого-цифрового преобразования непрерывного сигнала и проанализировать влияние разрядности АЦП на амплитудный спектр.

Таблица – Варианты заданий

Вар.	Оконная функция низкого разрешения [5, 6]	Вар.	Оконная функция высокого разрешения [5, 6]
1	Окно Парзена	1	Бартлетта-Ханна
2	Ханна-Пуассона (Hann-Poisson)	2	Гаусса с параметром 1
3	Кайзера (Kaiser)	3	Ланцоша
4	Блэкмана-Харриса	4	Бартлетта
5	Натолла	5	Ханна
6	Блэкмана-Натолла	6	Синус-окно
7	Гаусса с параметром 0.3	7	Хемминга
8	Окно с плоской вершиной [4]	8	Блэкмана
9	Гаусса с параметром 0.5	9	Уэлча (Welch)
10	Блэкмана-Харриса	10	Тьюки (Tukey)

Для выполнения практической работы рекомендуется использовать компьютерный пакет MathCAD или MatLAB. Обучающийся должен быть готов к защите своей работы и к ответу на любой вопрос из списка контрольных вопросов.

Порядок выполнения работы.

1. Согласовать с преподавателем вариант задания во время занятия по расписанию, удостовериться в правильном понимании задания и критериев его оценки.
2. Задать формулу для функции, описывающей исходный непрерывный сигнал $s_{in}(t)$, для начала работы рекомендуется использовать данные из [7], чтобы убедиться в правильности получаемых результатов, впоследствии нужно изменить данные по собственному усмотрению.
3. Выбрать период дискретизации, исходя из требований теоремы Котельникова для заданного сигнала, задать объем выборки N (для начала – порядка 2^{10}, впоследствии можно изменять по своему усмотрению).
4. Сформировать выборку дискретизированного по времени сигнала, без дискретизации по уровню. Построить график сигнала.
5. Задать формулы для двух оконных функций, при необходимости осуществить дискретизацию непрерывной функции, сформировав соответствующие массивы оконных функций низкого и высокого разрешения $\{w\_low\_res_n\}$ и $\{w\_hi\_res_n\}$.
6. Используя встроенную функцию БПФ (функция cfft в MathCAD), вычислить 3 комплексных спектра – по сигналу без использования функции окна и с двумя заданными оконными функциями.
7. Построить графики амплитудных спектров и фазовых спектров. Для амплитудного спектра рекомендуется по оси ординат использовать логарифмический масштаб.
8. Перейти к п. 4 и, используя встроенную функцию генерации гауссовского белого шума (функция rnorm в MathCAD), сформировать зашумленный сигнал, построить его график.
9. Повторить п. 6 и п. 7 для выборки зашумленного сигнала. Убедиться в сохранении основной информации об амплитудном спектре и сильном искажении фазового спектра.
10. При желании изменить исходные данные (значения частот, амплитуд, фаз гармонических сигналов, уровня шума, объема выборки) и повторить последовательность действий, соответствующую изучаемой методике цифрового спектрального анализа.

Содержание отчета

1. Цель работы.
2. Краткие теоретические сведения о задачах спектрального анализа сигналов и алгоритме БПФ.
3. Программа, в которой представлена последовательности результаты моделирования, с необходимыми комментариями (назначение констант и переменных, функций, и т.п.).
4. Полученные графики спектров при различных исходных данных с соответствующими подрисуночными подписями.
5. Выводы, в которых отражены особенности изученных методов и свойства полученных результатов: как влияет на спектр применение функций окна, изменение исходных данных (частот, амплитуд, фаз). Дополнительно, в выводах можно привести ответы на некоторые контрольные вопросы.
6. Список используемых источников, желательно не только из списка рекомендуемой литературы, приветствуется использование Интернет-ресурсов; на все источники в тексте отчета должны быть ссылки.

Рекомендуемая литература

1. Цифровая обработка сигналов: учебник для ВПО /С.Н. Воробьев. - М.: Академия, 2013. - 320 с. [библиотечный шифр 621.391 В75]
2. Цифровая обработка сигналов: учебное пособие / В.А. Сериков, В.Р. Луцив; С.-Петерб. гос. ун-т аэрокосм. приборостроения. - СПб: Изд-во ГУАП, 2014. – 110 с. [библиотечный шифр 621.391 С32]
3. Дискретное преобразование Фурье. // URL: http://ru.dsplib.org/content/dft/dft.html
4. Спектральный анализ на ограниченном интервале времени. Оконные функции. // URL: http://www.dsplib.ru/content/win/win.html
5. Спектральный анализ ограниченных во времени сигналов. Эффект растекания спектра// URL: http://ru.dsplib.org/content/spectral_leakage/spectral_leakage.html
6. Window function - Wikipedia (Оконная функция - Википедия, на англ. языке). // URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Window_function
7. Использование оконных функций в задачах цифрового спектрального анализа. Примеры и рекомендации // URL: http://www.dsplib.ru/content/winex/winex.html

Контрольные вопросы

1. Каковы задачи спектрального анализа сигналов?
2. Зачем нужна оконная функция при спектральном анализе?
3. Каким свойствам должна удовлетворять любая оконная функция?
4. Чем концептуально отличаются оконные функции высокого и низкого разрешения?
5. В чем заключается принцип реализации оконной функции в частотной области?
6. Каковы основные принципы выбора оконной функции с учетом ожидаемых свойств анализируемого сигнала?
7. Что такое уровень боковых лепестков спектра, как его измеряют?
8. Можно ли уменьшить ширину основного лепестка спектра сигнала, удлиняя выборку за счет дополнения ее нулями (zero padding)? Обосновать ответ.
9. Почему для применения алгоритма БПФ предпочтительнее иметь выборку дискретизированного сигнала, объем которой равен целой степени двойки?
10. Будут ли отличаться, спектры одного и того же периодического сигнала, но с разной длиной выборки *N*? Если будут отличаться, то как, если нет, то почему?
11. Будут ли отличаться, спектры одного и того же периодического сигнала, но дискретизированного с разной частотой дискретизации (требования теоремы Котельникова выполняются в обоих случаях)? Если будут отличаться, то как, если нет, то почему?
12. В чем недостаток применения оконной функции при решении задачи спектрального анализа?