

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
АЭРОКОСМИЧЕСКОГО ПРИБОРОСТРОЕНИЯ

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ ЧАСТОТНОЙ СЕЛЕКЦИИ

Учебное пособие

Санкт-Петербург

2019

Авторы: О.О. Жаринов, И.О. Жаринов

Документ представлен в авторской редакции. Официальное издание:

Цифровые фильтры частотной селекции: учебное пособие. / О.О. Жаринов, И.О. Жаринов. – СПб: ГУАП, 2019. – 77 с.

Официальное издание имеет другой дизайн, параметры верстки (в частности, отличается количество страниц и соответствие содержания и нумерации), также в него внесены редакторские правки стилистического характера.

Учебное пособие соответствует содержанию рабочей программы дисциплины “Цифровая обработка сигналов” по направлению подготовки 11.03.04 – “Электроника и нанoeлектроника”, и содержит сведения о методах, применяемых при расчете цифровых фильтров частотной селекции. Рассматриваются типовые приемы, применяемые при расчетах фильтров различных типов по заданным характеристикам в частотной области. Для изучения материала учебного пособия необходимо предварительное ознакомление с основными положениями теории линейных динамических систем.

Предназначается для студентов и преподавателей технических специальностей и направлений подготовки.

Подготовлено к публикации кафедрой проблемно-ориентированных вычислительных комплексов ГУАП.

© ГУАП,

© Жаринов О.О., Жаринов И.О.

СОДЕРЖАНИЕ

	стр.
Введение	4
1. Общие сведения о цифровых фильтрах	5
1.1. Основные понятия и определения	5
1.2. Общие вопросы методологии расчета цифровых фильтров . . .	10
2. Рекурсивные цифровые фильтры	25
2.1. Расчет рекурсивных фильтров по аналоговому прототипу.	25
2.2. Каскадная реализация рекурсивных фильтров	30
3. Нерекурсивные цифровые фильтры	38
3.1. Расчет нерекурсивных фильтров методом разложения передаточной функции рекурсивного фильтра в ряд Лорана . .	39
3.2. Аналитический метод расчета нерекурсивных фильтров	40
3.3. Расчет нерекурсивных фильтров методом дискретизации частотной характеристики	54
4. Расчет цифровых фильтров методом частотной выборки	58
5. Фильтрация записей цифровых сигналов	69
6. Быстрые алгоритмы вычисления цифровой свертки	76
Заключение	82
Литература	83
Приложение. Значения коэффициентов в переходной полосе при расчете цифровых фильтров методом частотной выборки	84

ВВЕДЕНИЕ

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) – динамично развивающаяся предметная область, в рамках которой разрабатываются методы преобразования сигналов средствами вычислительной техники. Очень широкий класс методов и устройств в составе ЦОС объединяют под термином “цифровые фильтры” (ЦФ). Цифровой фильтр, так же, как и аналоговый, разрабатывается так, чтобы изменить соотношения между компонентами, составляющими исходный сигнал. Чаще всего требования к фильтру задаются в частотной области: одни гармонические составляющие входного сигнала фильтр должен пропускать на выход лучше, а другие – хуже. На практике цифровые фильтры могут быть реализованы либо в виде программного обеспечения для осуществления обработки сигналов на персональном компьютере, либо в виде автономного устройства на основе вычислительного модуля (процессора цифровой обработки сигналов), снабженного электронными средствами ввода-вывода сигналов. В любом случае, чтобы реализовать ЦФ, необходимо разработать вычислительный алгоритм преобразования входных данных в выходные.

Достоинства ЦФ по сравнению с аналоговыми фильтрами общеизвестны: возможность реализации очень сложных устройств преобразования сигналов, зачастую недостижимых средствами аналоговой фильтрации; стабильность характеристик фильтров; относительная легкость их перенастройки. Главный недостаток ЦФ связан с принципиальной ограниченностью частотного диапазона обрабатываемых сигналов, который определяется быстродействием вычислительного модуля и используемых устройств ввода-вывода.

Основной целью данного учебного пособия является изложение теоретических методов расчета цифровых фильтров различных типов. Для освоения материала учебного пособия читателю рекомендуется предварительно ознакомиться с методами исследования линейных динамических систем во временной и частотной областях.

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

1.1. Основные понятия и определения

Цифровой фильтр представляет собой специализированное устройство, объединяющие цифровое вычислительное ядро и средства ввода-вывода сигналов, как показано на рисунке 1. В рассматриваемой схеме входной аналоговый сигнал $x(t)$ поступает на аналого-цифровой преобразователь (АЦП), который осуществляет преобразование $x(t)$ в упорядоченную последовательность чисел $x[k]$, величина каждого из которых равна значению входного сигнала в дискретные моменты времени:

$$x[k]=x(k \cdot T_{\Delta}), \quad (1)$$

где k – натуральные числа, T_{Δ} – период дискретизации, который задается таймером в составе вычислительного устройства. Вычислительный алгоритм тем или иным способом формирует последовательность выходных цифровых кодов $y[k]$, которые преобразуются в непрерывный выходной сигнал фильтра $y(t)$ с помощью цифроаналогового преобразователя (ЦАП):

$$y(t)=y[k], t \in [kT_{\Delta}, (k+1)T_{\Delta}). \quad (2)$$

В процессе преобразований (1) и (2) неизбежны ошибки квантования сигналов по уровню. Максимальная величина погрешности преобразования входного и выходного сигналов составляет половину шага квантования по уровню в АЦП и ЦАП, соответственно. В дальнейшем изложении данные ошибки в расчет не принимаются, поскольку при современном уровне развития электронной техники их влияние на результат фильтрации в подавляющем большинстве случаев можно сделать незначительным.

Поскольку аппаратная часть ЦФ обычно реализуется по типовой структуре, под термином “цифровой фильтр” в литературе часто подразумевается только вычислительный алгоритм, описывающий преобразование последовательности

дискретных отсчетов входного сигнала $\{x[k]\}$ в выходную последовательность отсчетов $\{y[k]\}$. Кроме того, в ряде случаев применения ЦФ вообще не требуется формирование выходного непрерывного сигнала $y(t)$, и тогда надобность в ЦАП отпадает. Например, в микропроцессорных измерителях параметров сигналов (частоты, фазы, амплитуды, момента появления и т. д.) интерес представляет лишь числовое значение параметра анализируемого сигнала, а цифровой фильтр бывает необходим как один из этапов обработки входного сигнала, чтобы, в частности, подавить помехи, затрудняющие проведение измерений.

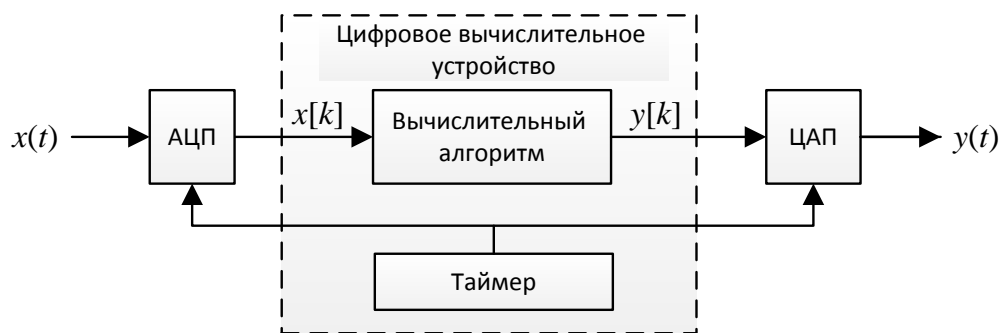


Рисунок 1. Упрощенная функциональная схема цифрового фильтра.

Классификация ЦФ базируется на функциональных признаках алгоритмов цифровой фильтрации. Выделяют [7] следующие группы ЦФ:

- фильтры частотной селекции;
- оптимальные (квазиоптимальные) фильтры;
- адаптивные фильтры;
- специализированные фильтры;
- эвристические фильтры.

Наиболее изученными являются ЦФ частотной селекции (иначе называемые линейными цифровыми фильтрами), исходные данные для расчета которых задаются так же, как для аналоговых фильтров. При описании любого фильтра частотной селекции выделяют 3 полосы фильтрации [14]:

- 1) *полоса пропускания* — диапазон частот, в котором входной гармонический сигнал проходит на выход практически без изменений;
- 2) *полоса задерживания* — диапазон частот, в котором входной

гармонический сигнал практически не проходит на выход фильтра, глубина подавления входного сигнала в полосе задерживания должна быть не менее некоторого заданного значения;

- 3) *переходная полоса* – диапазон частот между полосой пропускания и полосой задерживания, в котором входной гармонический сигнал проходит на выход с некоторым ослаблением, специальных требований к коэффициенту передачи фильтра в этом диапазоне не предъявляется.

Существует два основных вида линейных цифровых фильтров:

- 1) *нерекурсивные* фильтры, алгоритм работы которых во временной области задается уравнением

$$y[k] = \sum_{v=0}^{q-1} c_v x[k-v], \quad (3)$$

где q – порядок фильтра, $\{c_v\}$ – коэффициенты фильтра, представляющие собой вещественные числа;

- 2) *рекурсивные* фильтры, алгоритм работы которых во временной области задается уравнением

$$y[k] = \sum_{v=0}^{q-1} b_v x[k-v] + \sum_{r=1}^p a_r y[k-r], \quad (4)$$

где q – порядок нерекурсивной части фильтра, p – порядок его рекурсивной части, $\{b_v\}$ и $\{a_r\}$ – коэффициенты фильтра, представляющие собой вещественные числа.

Рекурсивные ЦФ часто называют [1 – 14] фильтрами с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтры), поскольку, если проанализировать реакцию фильтра на единичную импульсную функцию вида $\delta_1[k] = \begin{cases} 1, & \text{при } k = 0 \\ 0, & \text{при } k \neq 0 \end{cases}$, то вследствие рекурсивности выражения (4) выходной сигнал ЦФ при этом может продолжаться неограниченно долго. В противоположность этому, реакция ЦФ, описываемого уравнением (3), на входную функцию $\delta_1[k]$ гарантированно закончится за q периодов дискретизации, поэтому нерекурсивные фильтры называют фильтрами с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтрами).

Характеристики линейных ЦФ полностью определяются значениями

коэффициентов в уравнениях (3) и (4).

Среди фильтров частотной селекции, как известно [1 – 14], выделяется 4 основных функциональных типа фильтров:

1) фильтр нижних частот (ФНЧ): пропускает на выход сигналы с частотами от нуля (постоянная составляющая сигнала) до заданной граничной частоты f_B (“верхней” частоты, называемой частотой среза ФНЧ);

2) фильтр верхних частот (ФВЧ): пропускает на выход сигналы с частотами от заданной граничной частоты f_H (“нижней” частоты, называемой частотой среза ФВЧ) до (теоретически) бесконечности;

3) полосовой фильтр (ПФ): пропускает на выход все спектральные компоненты сигнала только в пределах заданного диапазона частот полосы пропускания от f_H до f_B (нижняя и верхняя частоты среза ПФ);

4) режекторный фильтр (РФ), который иногда называют заградительным фильтром (иногда можно встретить названия “заграждающий фильтр” и “фильтр-пробка”), подавляет все спектральные компоненты сигнала в пределах заданного диапазона частот полосы подавления от f_H до f_B .

Помимо перечисленных основных типов, существует бесчисленное множество других возможных реализаций фильтров частотной селекции, где требования к способности фильтра пропускать или подавлять частотные составляющие входного сигнала задаются более сложным образом. Таковы, например, корректоры частотных характеристик (эквалайзеры), применяемые в звуковоспроизводящей аппаратуре.

Оптимальные цифровые фильтры [7 – 10] рассчитываются, исходя из достижения заданного оптимума выбранного показателя качества фильтрации. Например, оптимальный цифровой фильтр Винера обеспечивает минимальную среднеквадратическую ошибку фильтрации сигнала с заданными частотными характеристиками на фоне стационарной гауссовской аддитивной помехи.

Адаптивные фильтры [7 – 10] являются нестационарными фильтрами, они способны подстраивать свои характеристики (путем изменения значений коэффициентов в (3) или (4)) под изменяющиеся характеристики сигнала и/или

помехи с целью достижения заданного качества функционирования. Теория адаптивных фильтров сравнительно сложна.

Специализированные цифровые фильтры представляют собой преобразователи последовательностей, предназначенные для решения частных задач, не подпадающих под вышеперечисленные определения. Например, согласованные фильтры [7], применяемые для решения задач обнаружения сигналов; фильтр, реализующий преобразование Гильберта [7, 10, 12], и т.п. В большинстве своем они также принадлежат к классу линейных фильтров.

Эвристические цифровые фильтры образуются как результат развития идей, возникших на основе здравого смысла и интуиции, и соответствующих им программно-алгоритмических решений. Обычно такие фильтры разрабатываются в условиях априорной неопределенности о свойствах сигналов и помех. Многие цифровые сглаживающие фильтры [7], ставшие к настоящему времени классическими, – α - β -фильтр, МНК-фильтр, фильтр экспоненциального сглаживания (линейные), медианный фильтр (нелинейный), – относятся к данной группе.

Дополнительно нужно заметить, что существуют задачи, для решения которых необходимы цифровые фильтры, алгоритмы работы которых должны функционировать в реальном масштабе времени, и задачи, где необходимо осуществлять обработку предварительно записанных цифровых последовательностей фиксированной длины в N отсчетов. Фильтры, работающие в реальном масштабе времени, должны формировать выходные отсчеты $y[k]$ в темпе поступления новых входных данных, например, в цифровых эквалайзерах систем звуковоспроизведения, подавителях эхо-сигналов в телефонии, фильтрах в системах радиолокационного обнаружения целей и т. п. При функционировании фильтров, обрабатывающих записи цифровых сигналов, предполагается, что все необходимые данные уже получены и зафиксированы, поэтому допускается сравнительно большое время формирования итогового результата фильтрации. Примером могут служить фильтры, применяемые при обработке звуковых файлов, зарегистрированных сигналов в системах медицинской диагностики, при

проведении ретроспективных исследований в любой области и т. п. Фильтры, предназначенные для обработки записей сигналов, могут быть реализованы как с применением всех без исключения методов фильтрации в реальном масштабе времени, так и любых нестандартных подходов к обработке, например, можно осуществить фильтрацию входного сигнала в инверсном времени, применяя уравнение (3) или (4) в направлении от конца записи к началу.

В данном учебном пособии рассматриваются только цифровые фильтры частотной селекции.

1.2. Общие вопросы методологии расчета цифровых фильтров

Теория цифровой фильтрации основана на математическом описании процессов преобразования дискретизированных сигналов. Последовательность числовых отсчетов $x[k]$, образующаяся при дискретизации непрерывного процесса $x(t)$ в равноотстоящие моменты времени, называется решетчатой функцией (см. рисунок 2). Математически решетчатые функции получаются из непрерывных функций времени подстановкой значений kT_{Δ} ($k=0, 1, 2, 3, \dots$) вместо аргумента t , как следует из формулы (1).

При дискретизации непрерывных функций в системах цифровой обработки сигналов может возникать опасный феномен, называемый эффектом подмены частот. Пример его проявления иллюстрирует рисунок 2. В данном случае двум разным непрерывным функциям соответствует одна и та же решетчатая функция. Нетрудно понять, что непрерывных сигналов с одной и той же решетчатой функцией может быть бесконечно много, и цифровой фильтр не сможет никак их различить.

Одним из краеугольных положений теории ЦОС является *теорема отсчетов* (известная также как теорема Котельникова), основной результат которой заключается в том, что непрерывный сигнал может быть безошибочно восстановлен по полученной из него решетчатой функции, если верхняя частота спектра сигнала меньше $1/2T_{\Delta}$ Гц (*частота Найквиста*). В данном примере, очевидно, для сигнала “б” на рисунке 2 это положение не выполняется.

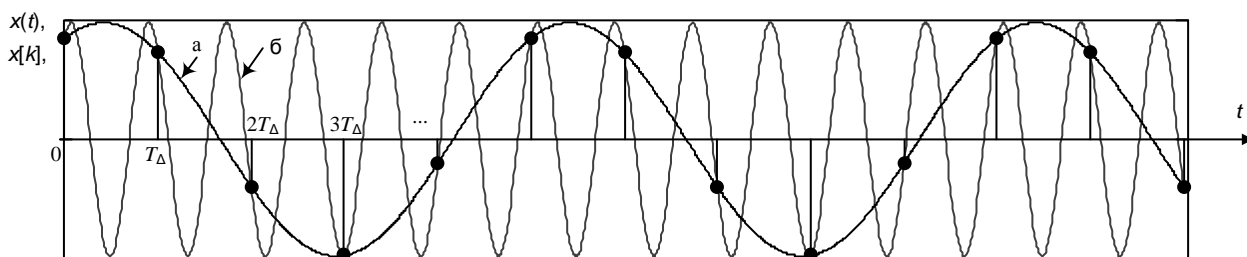


Рисунок 2 – Графики реализаций непрерывных функций (а – гармоническое колебание с частотой $0.2/T_{\Delta}$ Гц, б – гармоническое колебание с частотой $1.2/T_{\Delta}$ Гц) и соответствующей им решетчатой функции (пример).

Таким образом, чтобы избежать эффекта наложения частот, необходимо принять меры к недопущению попадания на вход АЦП сигналов с частотами, превышающими частоту Найквиста. Для этого на входе системы цифровой обработки сигналов ставят специальный аналоговый фильтр, который еще называют “антифантомным”¹. Кроме того, определенные проблемы в цифровых фильтрах может создавать ступенчатый характер выходного сигнала ЦАП, который формируется в соответствии с уравнением (2). Поэтому в хороших системах ЦОС на выходе ЦАП также принято ставить аналоговый фильтр, сглаживающий “углы” выходного процесса. Функциональная схема цифрового фильтра, оснащенного дополнительными фильтрами на входе и выходе, представлена на рисунке 3.



Рисунок 3 – Полная функциональная схема цифрового фильтра: АФ – антифантомный ФНЧ, СФ – сглаживающий ФНЧ.

¹ Антифантомным (англ.: antialiasing) фильтр называют по причине подмены реально существующего сигнала с большой частотой его несуществующим (“фантомным”) отображением на более низкой частоте.

Нужно заметить, что требования к частотной характеристике АФ могут быть довольно жесткими: в идеале уровень внеполосных составляющих на его выходе должен быть меньше половины шага квантования по уровню используемого АЦП, в то же время фильтр не должен вносить заметных частотных искажений в рабочем диапазоне частот входных сигналов ЦФ. При прочих равных условиях ослабить требования к АФ можно за счет дополнительного уменьшения величины T_{Δ} , однако это неизбежно приведет к ужесточению требований к быстродействию цифрового вычислителя. В силу изложенных обстоятельств в некоторых приложениях применение ЦФ может даже оказаться экономически нецелесообразным.

Расчет ЦФ требует специального математического аппарата для описания их характеристик.

Характеристики аналоговых фильтров определяются на основе преобразования Лапласа, которое для любой непрерывной функции $f(t)$ определено следующим выражением:

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt. \quad (5)$$

Сигналы в ЦФ представляются в виде решетчатых функций. Для решетчатой функции $f[k]$ аналогом преобразования Лапласа служит *Z-преобразование*, позволяющее для любой заданной $f[k]$ вычислить функцию $F(z)$ по формуле

$$F(z) = Z\{f[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} f[k] z^{-k}. \quad (6)$$

Если в (6) положить

$$z = e^{pT_{\Delta}}, \quad (7)$$

то из сравнения выражений (5) и (6) с учетом (1) видно большое сходство между Z-преобразованием и преобразованием Лапласа. По сути, отличие между Z-преобразованием и преобразованием Лапласа сводится к тому, что в выражении (6) операция интегрирования функции осуществлена с применением численного

метода прямоугольников и опущен постоянный множитель T_{Δ} .

Z-преобразование, как и преобразование Лапласа, обратимо: при достаточно общих условиях по заданной функции $F(z)$ можно вычислить соответствующую ей решетчатую функцию $f[k]$.

Основной характеристикой любого аналогового фильтра является его передаточная функция $W(p)$, которая определяется как отношение преобразования Лапласа выходного сигнала фильтра к преобразованию Лапласа входного сигнала

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$$

и обычно выражается отношением двух полиномов комплексной переменной p .

Для ЦФ передаточная функция определена по аналогии, как отношение Z-преобразований выходной и входной решетчатых функций:

$$D(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}, \quad (8)$$

которую также принято представлять в виде отношения двух полиномов переменной z .

Оперирование техникой Z-преобразования при расчете цифровых фильтров основано на использовании ряда его особых свойств:

- *свойство линейности*:

$$Z\{af_1[k] + bf_2[k]\} = aZ\{f_1[k]\} + bZ\{f_2[k]\},$$

где a и b – произвольные константы; другими словами, Z-преобразование взвешенной суммы функций равно взвешенной сумме Z-преобразований.

- *свойство (теорема) сдвига*: Z-преобразование сдвинутой на L периодов дискретизации решетчатой функции (например, запаздывающей $f[k-L]$ по отношению к исходной $f[k]$) вычисляется по формуле

$$Z\{f[k-L]\} = z^{-L} \left[F(z) + \sum_{r=1}^L f[-r] z^r \right],$$

где $F(z) = Z\{f[k]\}$.

Если решетчатая функция $f[k]$ равна нулю при отрицательных значениях аргумента k , как это обычно бывает в практике применения ЦФ, то

$$Z\{f[n-L]\} = z^{-L} F(z), \quad (9)$$

т.е. Z -преобразование запаздывающей на L тактов дискретизации решетчатой функции может быть вычислено путем умножения Z -преобразования исходной функции на множитель z^{-L} .

Для опережающей решетчатой функции по аналогии получается

$$Z\{f[k+L]\} = z^L \left[F(z) - \sum_{r=0}^{L-1} f[r] z^{-r} \right],$$

и, если решетчатая функция $f[k]$ равна нулю при $k=0, 1, \dots, L-1$, то

$$Z\{f[k+L]\} = z^L F(z), \quad (10)$$

Свойство линейности и теорема смещения при расчете ЦФ играют важную связующую роль между передаточной функцией фильтра и разностным уравнением, определяющим алгоритм работы цифрового фильтра. Пусть, например, передаточная функция ЦФ выражена как

$$D(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}.$$

Тогда, с учетом (8), можно записать

$$Y(z) = D(z)X(z) = \frac{b_0 z^2 + b_1 z + b_2}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2} X(z),$$

откуда следует

$$a_0 z^2 Y(z) + a_1 z Y(z) + a_2 Y(z) = b_0 z^2 X(z) + b_1 z X(z) + b_2 X(z).$$

Умножив обе части полученного уравнения на z^{-2} , нетрудно получить

$$a_0 Y(z) + a_1 Y(z) z^{-1} + a_2 Y(z) z^{-2} = b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1} + b_2 X(z) z^{-2}, \quad (11)$$

откуда, применяя к обеим частям уравнения (11) операцию вычисления обратного Z-преобразования, с учетом свойства линейности и теоремы сдвига, можно осуществить переход к т. н. *разностному уравнению* для решетчатых функций на входе и выходе ЦФ. В результате получим

$$a_0 y[k] + a_1 y[k-1] + a_2 y[k-2] = b_0 x[k] + b_1 x[k-1] + b_2 x[k-2],$$

откуда следует вычислительный алгоритм работы рассматриваемого ЦФ

$$y[k] = \frac{b_0}{a_0} x[k] + \frac{b_1}{a_0} x[k-1] + \frac{b_2}{a_0} x[k-2] - \frac{a_1}{a_0} y[k-1] - \frac{a_2}{a_0} y[k-2].$$

Частотные характеристики ЦФ могут быть определены на основе передаточных функций по аналогии с тем, как это выполняется для аналоговых фильтров. Для аналоговых фильтров в передаточной функции осуществляется замена переменной $p=j\omega$ (здесь и везде далее j – мнимая единица). Применительно к ЦФ переход к частотной характеристике ЦФ с передаточной функцией $D(z)$ производится заменой переменной

$$z = e^{j\omega T_\Delta}. \quad (12)$$

Как нетрудно видеть, формула (12) образована из формулы (7) подстановкой $p=j\omega$.

Получающаяся из $D(z)$ функция $W_D(j\omega) = |D(e^{j\omega T_\Delta})|$ будет представлять собой комплексную частотную передаточную функцию ЦФ. Частотные характеристики аналоговых и цифровых фильтров вычисляются по стандартным формулам:

- амплитудно-частотная характеристика (АЧХ):

$$A(\omega)=|W(j\omega)|, \quad (13)$$

- логарифмическая АЧХ

$$L(\omega)=20\lg(|W(j\omega)|), \quad (14)$$

- фазочастотная характеристика (ФЧХ)

$$\Psi(\omega)=\arg(W(j\omega))=\arctg(\operatorname{Im}\{W(j\omega)\}/\operatorname{Re}\{W(j\omega)\}). \quad (15)$$

Необходимо заметить, что функция $W_D(j\omega)$ окажется периодической. Связано это с тем, что экспонента комплексного аргумента в (10) по формуле Эйлера представляется в виде

$$e^{j\omega T_\Delta} = \cos(\omega T_\Delta) + j \sin(\omega T_\Delta),$$

и, следовательно,

$$W_D(j\omega)=W_D(j(\omega+2\pi k/T_\Delta)),$$

где k – целые числа.

Периодичность частотных характеристик ЦФ в полной мере отражает фактическую реакцию цифрового фильтра на сигналы с частотами, превышающими частоту Найквиста. Если на входе системы ЦОС установлен антифантомный фильтр, то нет необходимости учитывать периодический характер частотной характеристики, и графики АЧХ и ФЧХ принято строить в диапазоне частот от 0 до частоты Найквиста.

При расчете цифрового фильтра частотной селекции в первую очередь предъявляются требования к его АЧХ, которые состоят в минимальной неравномерности коэффициента передачи в полосе пропускания и обеспечении необходимого затухания в полосе задерживания. Если, помимо фильтрации внеполосных составляющих сигнала, к фильтру предъявляются требования

минимального искажения формы сигнала, то необходимо выбрать такую характеристику фильтра, чтобы переходная характеристика получающегося ЦФ имела минимальную колебательность. Требования к характеристикам ЦФ удобнее формализовывать, основываясь на передаточных функциях типовых аналоговых фильтров-прототипов.

Большинство практически важных задач фильтрации удастся решить посредством использования типовых семейств фильтров – Баттерворта, Чебышева, Бесселя. С целью унификации процесса расчета цифровых фильтров разработана методика [3 – 12] получения характеристик фильтра любого типа (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) из характеристики так называемого нормированного ФНЧ-прототипа.

Передаточная функция нормированного ФНЧ-прототипа $W_0(p)$ для фильтра любого семейства представляется в виде отношения двух полиномов комплексной переменной p : $W_0(p)=b(p)/d(p)$ и удовлетворяет двум условиям:

- $|W_0(0)|=1$,
- $|W_0(j1)|=1/\sqrt{2}$.

Из второго равенства следует, что круговая частота среза ω_B нормированного ФНЧ равна единице.

Характеристики фильтра определяются видом функций $b(p)$ и $d(p)$, старшая степень полинома $d(p)$ называется порядком аналогового фильтра-прототипа n .

Фильтр Баттерворта получил наибольшее распространение в практических приложениях благодаря простоте реализации при приемлемом соотношении характеристик в частотной и временной области. Передаточная функция нормированного ФНЧ-прототипа этого фильтра задана в виде [1]

$$W_{Bt}(p) = \begin{cases} \frac{1}{\prod_{k=1}^{\frac{n}{2}} \left(p^2 - 2p \cos\left(\frac{2k+n-1}{2n}\pi\right) + 1 \right)}, & \text{для четных } n \\ \frac{1}{\left(\prod_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} \left(p^2 - 2p \cos\left(\frac{2k+n-1}{2n}\pi\right) + 1 \right) \right) (p+1)}, & \text{для нечетных } n. \end{cases} \quad (16)$$

Фильтр Чебышева применяется в случае, когда необходимо достижение максимальной частотной избирательности фильтра. Данный фильтр допускает неравномерность АЧХ в полосе пропускания, абсолютное значение этой неравномерности составит $\Delta A = \sqrt{1 + \varepsilon^2}$, где ε – один из задаваемых параметров фильтра. Часто значение неравномерности АЧХ при расчете фильтра задается в децибелах; $\Delta A_{\text{дБ}}$ и ΔA связаны формулой $\Delta A_{\text{дБ}} = 20 \lg(\Delta A)$, соответственно можно выразить ε через заданную величину $\Delta A_{\text{дБ}}$:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{\Delta A_{\text{дБ}}}{10}} - 1}.$$

Передаточная функция нормированного ФНЧ-прототипа этого фильтра определяется выражением [1]

$$W_{\text{Ch}}(p) = \begin{cases} \frac{1}{2^{n-1} \varepsilon \prod_{\kappa=1}^{\frac{n}{2}} (p^2 + 2p\chi(\kappa, n) + \mu(\kappa, n))}, & \text{для четных } n \\ \frac{1}{2^{n-1} \varepsilon \left(\prod_{\kappa=1}^{\frac{n-1}{2}} (p^2 + 2p\chi(\kappa, n) + \mu(\kappa, n)) \right) (\sinh(\varphi(n)) + p)}, & \text{для нечетных } n, \end{cases} \quad (17)$$

где $\varphi(n) = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{1 + \frac{1}{\varepsilon^2}} \right)$, $\mu(\kappa, n) = \sin^2 \left(\frac{2\kappa-1}{2n} \pi \right) \sinh^2(\varphi(n)) + \cos^2 \left(\frac{2\kappa-1}{2n} \pi \right) \cosh^2(\varphi(n))$,

$\chi(\kappa, n) = \sin \left(\frac{2\kappa-1}{2n} \pi \right) \sinh(\varphi(n))$, $\sinh(\dots)$ и $\cosh(\dots)$ – функции гиперболического синуса и косинуса соответственно.

Свойства фильтра Чебышева таковы, что при большей допускаемой неравномерности АЧХ избирательность фильтра возрастает. Однако наличие пульсаций в полосе пропускания является недостатком фильтра.

Фильтр Бесселя (Томсона) применяется в случае, когда важно сохранить фазовые соотношения между гармоническими компонентами сигнала, что обеспечит минимальные искажения его формы в процессе фильтрации. Однако,

при прочих равных условиях, он обеспечивает худшую частотную избирательность.

Передаточная функция фильтра Бесселя задается в следующей форме [3, 11]

$$W_{Bs}(p) = \frac{1}{\sum_{\kappa=0}^n \frac{(2n-\kappa)! 2^{\kappa} n!}{(2n)!(n-\kappa)! \kappa!} \cdot (pB_n)^{\kappa}} \quad (18)$$

где B_n — поправочный множитель, значение которого зависит от n , его значения численно равны значению ω_B из таблицы 1 для соответствующих n (для других n значения B_n подбирают с использованием численных методов так, чтобы обеспечивалось условие $|W_{Bs}(j1)| = 1/\sqrt{2}$). К сожалению, формат формулы (18) не слишком удобен для проведения расчетов ЦФ, поэтому для фильтров Бесселя невысоких порядков лучше обратиться к данным таблицы 1.

Необходимый порядок фильтра любого семейства определяется на основании требований к крутизне АЧХ в переходной полосе или (что обычно эквивалентно) глубины вносимого фильтром затухания на заданной частоте в полосе задерживания. Для этого нужно построить график АЧХ по формуле (13) или логарифмической АЧХ по формуле (14) с подстановкой формул (16) – (18) и произвести их анализ.

Основные достоинства и недостатки фильтров различных семейств сведены в таблицу 2, основные количественные характеристики приведены в таблице 3. Из данных таблиц следует, что два основных критерия качества фильтрации — наилучшие избирательные свойства и наименьшие искажения сигнала — предъявляют к фильтру противоречивые требования.

Получение формул для передаточных функций аналоговых фильтров-прототипов разных типов (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) из передаточной функции нормированного ФНЧ-прототипа $W_0(p)$ осуществляется посредством замены переменной p в формулах (16) – (18). Формулы замены переменной сведены в таблицу 4.

Таблица 1 – Передаточные функции нормированных аналоговых
ФНЧ-прототипов семейств фильтров [11]

Тип фильтра	n	ω_v , рад/с	полиномы передаточной функции $W_0(p)=b(p)/d(p)$	
			$b(p)$	$d(p)$
Фильтр Бесселя	2	1.362	3	p^2+3p+3
	3	1.756	15	$(p+2.322)(p^2+3.678p+6.459)$
	4	2.115	105	$(p^2+5.792p+9.14)(p^2+4.208p+11.49)$
	5	2.427	945	$(p+3.647)(p^2+6.704p+14.27)(p^2+4.649p+18.16)$
	6	2.703	10395	$(p^2+5.032p+26.51)(p^2+7.471p+20.85)(p^2+8.497p+18.80)$
	7	2.952	135135	$(p+4.972)(p^2+5.371p+36.60)(p^2+8.140p+28.94) \times$ $\times (p^2+9.517p+25.67)$
	8	3.179	2027025	$(p^2+5.678p+48.43)(p^2+8.737p+38.57) \times$ $\times (p^2+10.41p+33.93)(p^2+11.18p+31.98)$
Фильтр Баттерворта	2	1.000	1	$p^2+1.41421p+1$
	3	1.000	1	$(p+1)(p^2+p+1)$
	4	1.000	1	$(p^2+1.84776p+1)(p^2+0.76537p+1)$
	5	1.000	1	$(p+1)(p^2+1.61803p+1)(p^2+0.61803p+1)$
	6	1.000	1	$(p^2+1.93185p+1)(p^2+1.41421p+1)(p^2+0.51764p+1)$
	7	1.000	1	$(p+1)(p^2+1.80194p+1)(p^2+1.24698p+1) \times$ $\times (p^2+0.44504p+1)$
	8	1.000	1	$(p^2+1.96157p+1)(p^2+1.66294p+1) \times$ $\times (p^2+1.11114p+1)(p^2+0.39018p+1)$
Фильтр Чебышева, пульсации 0.5 дБ	2	1.000	1.431	$p^2+1.426p+1.516$
	3	1.000	0.716	$(p+0.626)(p^2+0.626p+1.142)$
	4	1.000	0.358	$(p^2+0.351p+1.064)(p^2+0.847p+0.356)$
	5	1.000	0.1789	$(p+0.362)(p^2+0.224p+1.036)(p^2+0.586p+0.477)$
	6	1.000	0.0895	$(p^2+0.155p+1.023)(p^2+0.424p+0.590)(p^2+0.580p+0.157)$
	7	1.000	0.0447	$(p+0.256)(p^2+0.114p+1.016)(p^2+0.319p+0.677) \times$ $\times (p^2+0.462p+0.254)$
	8	1.000	0.0224	$(p^2+0.0872p+1.012)(p^2+0.248p+0.741) \times$ $\times (p^2+0.372p+0.359)(p^2+0.439p+0.088)$

Таблица 2 – Сравнительный анализ семейств фильтров [11]

Семейство	Достоинства	Недостатки
Бесселя	- фазовая характеристика строго линейна (только для ФНЧ), искажения формы сигнала минимальны	- крутизна АЧХ за пределами полосы пропускания менее 20 <i>n</i> дБ/дек
Баттерворта	- АЧХ в полосе пропускания наиболее плоская; - крутизна АЧХ за пределами полосы пропускания достигает 20 <i>n</i> дБ/дек.	- фазовая характеристика имеет нелинейность; - недостаточно крутой переход от полосы пропускания к полосе задерживания.
Чебышева	- крутой переход от полосы пропускания к полосе задерживания; - крутизна АЧХ за пределами полосы пропускания превышает 20 <i>n</i> дБ/дек.	- допускается неравномерность АЧХ в пределах полосы пропускания; - велика нелинейность фазовой характеристики, искажения формы сигнала максимальны.

Таблица 3 – Сравнительные характеристики ФНЧ-прототипов семейств фильтров [11]

Тип фильтра	f_B , Гц (по уровню минус 3 дБ)	n	Переходная характеристика		Подавление в полосе задерживания, дБ	
			$t_{0.9}$, сек	выброс $\sigma\%$, %	$2f_B$	$10f_B$
Фильтр Бесселя	1.00	2	0.4	0.4	10	36
	1.00	4	0.5	0.8	13	66
	1.00	6	0.6	0.6	14	92
Фильтр Баттерворта	1.00	2	0.4	4	12	40
	1.00	4	0.6	11	24	80
	1.00	6	0.9	14	36	120
Фильтр Чебышева, пульсации 0.5 дБ	1.39	2	0.4	11	8	37
	1.09	4	0.7	18	31	89
	1.04	6	1.1	21	54	141

Таблица 4 – Формулы замены переменной p , применяемые при преобразовании передаточной функции нормированного аналогового ФНЧ-прототипа в передаточную функцию аналогового фильтра заданного типа

Тип	Параметры результирующего фильтра	Формула для замены переменной
ФНЧ	Частота среза $\omega_{\text{ср}}$	$p \rightarrow \frac{p}{\omega_{\text{ср}}}$
ФВЧ	Частота среза $\omega_{\text{ср}}$	$p \rightarrow \frac{\omega_{\text{ср}}}{p}$
ПФ	Граничные частоты полосы пропускания $\omega_{\text{н}}$ и $\omega_{\text{в}}$	$p \rightarrow \frac{p^2 + \omega_{\text{н}} \omega_{\text{в}}}{p(\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}})}$
РФ	Граничные частоты полосы задерживания $\omega_{\text{н}}$ и $\omega_{\text{в}}$	$p \rightarrow \frac{p(\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}})}{p^2 + \omega_{\text{н}} \omega_{\text{в}}}$

Использование приведенных в таблице 4 формул будет приводить к тому, что АЧХ результирующих фильтров в полосе пропускания, переходных полосах и полосах задерживания будут обладать теми же свойствами, что и АЧХ заданного ФНЧ-прототипа.

Приведем пример использования рассмотренного подхода к формированию передаточной функции аналогового прототипа. Пусть необходимо определить передаточную функцию аналогового полосового фильтра с граничными частотами полосы пропускания $f_{\text{н}}=100$ Гц и $f_{\text{в}}=200$ Гц, взяв за основу фильтр-прототип Баттерворта 2-го порядка. Из формулы (16) для $n=2$ находим

$$W_0(p) = \frac{1}{p^2 - 2p \cos\left(\frac{2+2-1}{2 \cdot 2} \pi\right) + 1} = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}.$$

Осуществляя подстановку $p \rightarrow \frac{p^2 + \omega_{\text{н}} \omega_{\text{в}}}{p(\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}})}$, получим

$$W_{\text{ПФ}}(p) = \frac{1}{\left(\frac{p^2 + \omega_{\text{н}} \omega_{\text{в}}}{p(\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}})}\right)^2 + \sqrt{2} \frac{p^2 + \omega_{\text{н}} \omega_{\text{в}}}{p(\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}})} + 1}. \quad (21)$$

Подставляя в формулу (21) заданные числовые значения $\omega_{\text{н}}=2\pi \cdot 100$ рад/с и

$\omega_B = 2\pi \cdot 200$ рад/с и используя для расчетов по формуле (13) средства вычислительной техники, нетрудно получить график логарифмической АЧХ искомого полосового фильтра, который приведен на рисунке 4. Для построения графика логарифмической АЧХ как функции циклической частоты f была использована подстановка $p = j \cdot 2\pi f$.

Анализ рисунка 4 показывает, что крутизна скатов АЧХ в переходных полосах (вблизи полосы пропускания) несколько превышает величину 40 дБ/дек, а в отдаленных областях высоких и низких частот (полосах задерживания) равна 40 дБ/дек, что, согласно данным таблицы 2, характерно для фильтра Баттерворта 2-го порядка. Видно также, что в полосе пропускания фильтра не наблюдается пульсаций АЧХ.

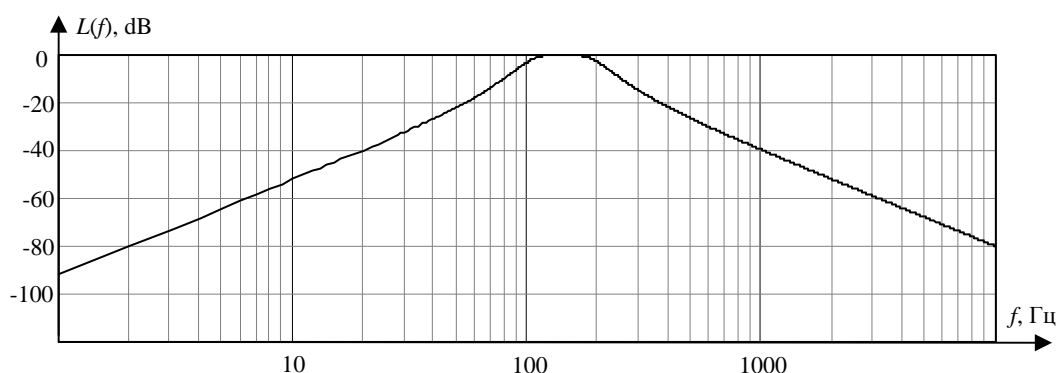


Рисунок 4 – АЧХ аналогового полосового фильтра, полученного на основе нормированного ФНЧ-прототипа Баттерворта 2-го порядка.

Заметим, что для узкополосных фильтров, предназначенных для пропускания (для ПФ) или полного подавления (для РФ) сигнала на одной фиксированной частоте ω_0 , есть более простые формулы:

- для полосового фильтра

$$W_{\text{ПФ}}(p) = \frac{p}{\frac{Q}{\omega_0} p^2 + p + \omega_0 Q}, \quad (19)$$

- для режекторного фильтра

$$W_{\text{рФ}}(p) = \frac{p^2 + \omega_0^2}{p^2 + \frac{\omega_0}{Q} p + \omega_0^2}, \quad (20)$$

где Q – добротность фильтра

$$Q = \frac{\omega_0}{\omega_B - \omega_H}.$$

Однако, нужно понимать, что в этом случае при заданных значениях ω_0 и Q уже не останется возможностей для изменения крутизны АЧХ в переходной полосе.

Методы расчета цифровых фильтров по заданной передаточной функции аналогового фильтра-прототипа $W(p)$ специфичны для рекурсивных и нерекурсивных ЦФ и рассматриваются в следующих двух разделах.

2. РЕКУРСИВНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

2.1. Расчет рекурсивных фильтров по аналоговому прототипу

Общая идея всех методов расчета рекурсивных фильтров состоит в том, чтобы, используя передаточную функцию аналогового фильтра-прототипа $W(p)$, получить дискретную передаточную функцию ЦФ $D(z)$. При этом заранее нужно выбрать значение периода дискретизации T_Δ , исходя из требований теоремы Котельникова, и, кроме того, желательно, чтобы верхняя граничная частота полосы пропускания фильтра была бы как минимум в несколько раз (лучше – на порядок) меньше частоты Найквиста.

Переход от $W(p)$ к $D(z)$ рекурсивного ЦФ можно осуществить с использованием любого из трех основных методов [1, 2, 5, 6, 8 – 10]:

- 1) метод инвариантности переходной характеристики;
- 2) метод на основе формул дискретного интегрирования;
- 3) метод согласованного Z-преобразования.

Наибольшее распространение на практике получил метод на основе формул дискретного интегрирования, который использует связь между переменными p и z . Помимо уравнения (12), которое использовать для замены переменной p нецелесообразно вследствие невозможности выражения получающейся передаточной функции $D(z)$ в дробно-рациональной форме, имеется ряд формул, которые получены на основе различных методов дискретного интегрирования. Например, метод трапеций [13] предполагает приближенное вычисление интеграла от непрерывной функции $x(t)$ по ее отсчетам в дискретном времени с использованием разностного уравнения

$$y[k] = y[k-1] + \frac{T_\Delta}{2} (x[k] + x[k-1]), \quad (21)$$

где к каждому моменту времени $t_k = kT_\Delta$ величина $y[k]$ представляет собой значение интеграла $y(t_k) = \int_0^{t_k} x(\tau) d\tau$. Переходя от разностного уравнения (21) к передаточной

функции соответствующего цифрового интегратора, нетрудно получить

$$D_{\text{инт}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{T_{\Delta}}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}},$$

и, учитывая известный из теории линейных динамических систем факт, что передаточная функция идеального аналогового интегрирующего устройства имеет вид

$$W_{\text{инт}}(p) = \frac{1}{p},$$

можно написать уравнение

$$p = \frac{2}{T_{\Delta}} \frac{z-1}{z+1}, \quad (22)$$

которое называется преобразованием Тастина (англ.: Tustin's method) и широко применяется для осуществления замены переменной в формуле для передаточной функции аналогового фильтра-прототипа $W(p)$ с целью получения дискретной передаточной функции цифрового фильтра $D(z)$:

$$D(z) = W(p) \Big|_{p = \frac{2}{T_{\Delta}} \frac{z-1}{z+1}}. \quad (23)$$

Данный метод расчета ЦФ еще называют *методом билинейного преобразования*. При выполнении вычислений по (23) получающаяся передаточная функция $D(z)$ всегда приводит к рекурсивной форме разностного уравнения ЦФ.

Для узкополосных РФ и ПФ рекомендуется применять модифицированное преобразование Тастина

$$p = \frac{\omega_0}{\operatorname{tg}\left(\frac{\omega_0 T_{\Delta}}{2}\right)} \frac{z-1}{z+1}, \quad (24)$$

где ω_0 – значение круговой частоты, на которой должно выполняться строгое равенство частотной передаточной функции аналогового фильтра и его цифровой реализации. Иногда и для ФНЧ и ФНЧ вместо (23) применяют преобразование (24), в котором ω_0 заменяют на $\omega_{\text{ср}}$, тогда гарантируется точное совпадение частот среза аналогового прототипа и цифрового фильтра.

Достоинство метода Тастина по сравнению с другими формулами замены переменной p в том, что он не изменяет области устойчивости: если исходный фильтр-прототип был устойчив, то и полученный цифровой фильтр будет гарантированно устойчив.

С целью уменьшения погрешности реализации ЦФ по сравнению с аналоговым фильтром можно применить формулы на основе более точных методов численного интегрирования [6]:

$$\text{- Симпсона } p = \frac{3}{T_{\Delta}} \frac{z^2 - 1}{z^2 + 4z + 1},$$

$$\text{- Уэддл } p = \frac{10}{T_{\Delta}} \frac{z^4 + z^3 - z - 1}{z^4 + 6z^3 + 6z^2 + 6z + 1}.$$

Использование преобразования Тастина для расчета цифрового рекурсивного фильтра проиллюстрируем примером для аналогового фильтра с передаточной функцией (21). Производя алгебраические преобразования (23) для (21) и выполняя вычисления при $T_{\Delta}=10^{-4}$ с, можно получить выражение

$$D(z) = \frac{b_0 z^4 + b_1 z^3 + b_2 z^2 + b_3 z + b_4}{z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4},$$

где $b_0=9.404503 \cdot 10^{-4}$, $b_1=-2.958228 \cdot 10^{-31}$, $b_2=-1.880901 \cdot 10^{-3}$, $b_3=3.944305 \cdot 10^{-31}$, $b_4=9.404503 \cdot 10^{-4}$, $a_1=-3.8959896$, $a_2=5.7076898$, $a_3=-3.7269834$, $a_4=0.9151626$.

Замечая, что два коэффициента в числителе полученного выражения на много порядков меньше остальных коэффициентов, можно дополнительно упростить выражение, исключив эти малые по величине коэффициенты:

$$D(z) = \frac{9.4045026 \cdot 10^{-4} z^4 - 1.880901 \cdot 10^{-3} z^2 + 9.404503 \cdot 10^{-4}}{z^4 - 3.8959896 z^3 + 5.7078698 z^2 - 3.7269834 z + 0.9151626}. \quad (25)$$

Из (25) легко получить разностное уравнение ЦФ:

$$y[k] = 3.8959896 y[k-1] - 5.7078698 y[k-2] + 3.7269834 y[k-3] - 0.9151626 y[k-4] + 9.404503 \cdot 10^{-4} x[k] - 1.880901 \cdot 10^{-3} x[k-2] + 9.404503 \cdot 10^{-4} x[k-4]. \quad (26)$$

График логарифмической АЧХ, построенный по формуле

$$L(f) = 20 \lg \left(\left| D(e^{j2\pi f T_\Delta}) \right| \right),$$

приведен на рисунке 5. Очевидно, что форма АЧХ соответствует характеристике ПФ с заданными параметрами граничных частот полосы пропускания. Однако, сравнивая рисунки 4 и 5, легко заметить, что в области высоких частот, начиная примерно с частоты 2000 Гц, частотные характеристики цифрового и аналогового фильтров заметно расходятся. Видно, что на частоте Найквиста (в данном примере $1/2T_\Delta = 5000$ Гц) наблюдается глубокий “провал” АЧХ, после данной частоты АЧХ вновь возрастает в полном соответствии с эффектом периодичности частотных характеристик цифровых фильтров.

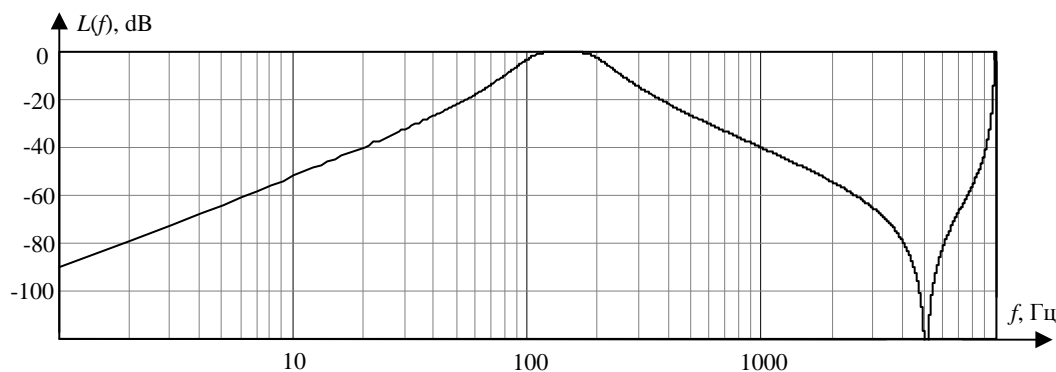


Рисунок 5 – АЧХ рекурсивного цифрового полосового фильтра, полученного на основе аналогового прототипа с передаточной функцией (21) методом билинейного преобразования.

Из рассмотренного примера видно, что заметные искажения частотной характеристики рекурсивного ЦФ начинают появляться, начиная с частоты, в несколько раз меньшей частоты Найквиста. Данную особенность, наряду с требованиями теоремы Котельникова, необходимо учитывать при выборе значения периода дискретизации при разработке системы цифровой фильтрации.

Помимо изложенного подхода к расчету рекурсивных ЦФ, при котором характеристика цифрового фильтра получается такой же, как характеристика аналогового фильтра-прототипа, существует и альтернативный подход, который основан на преобразовании частотной характеристики нормированного аналогового ФНЧ-прототипа в характеристику цифрового фильтра любого типа (ФНЧ, ФВЧ, ПФ, РФ) с заданными параметрами. Метод использует замену переменной p некоторыми функциями переменной z и называется методом *обобщенного билинейного преобразования*. Формулы замены переменной [3, 5, 6] сведены в таблицу 5.

Выполнение вычислений по методу обобщенного билинейного преобразования для $W_0(p) = \frac{1}{p^2 + \sqrt{2}p + 1}$ с подстановкой $p \rightarrow \gamma \frac{z^2 - 2\zeta z + 1}{z^2 - 1}$ приводит к выражению, идентичному (25) с коэффициентами, отличающимися от указанных, начиная с 4-го знака после запятой. График АЧХ при этом совпадает с графиком, приведенным на рисунке 5, с точностью до толщины линии.

Заметим, что при практической реализации рекурсивных фильтров крайне не рекомендуется округлять полученные коэффициенты в разностном уравнении (следует оставлять как минимум 7-8 знаков после запятой в десятичном представлении), в противном случае фильтр может стать неустойчивым.

В заключение следует отметить, что рекурсивные фильтры весьма привлекательны с точки зрения минимума количества вычислительных операций в разностном уравнении. Однако, в фильтрах такого типа могут наблюдаться предельные циклы автоколебаний, возникающие вследствие округления результатов из-за ограниченности разрядной сетки цифрового вычислителя, чего

никогда не наблюдается в нерекурсивных ЦФ. В то же время, ставшее общим местом утверждение [1 – 14], что рекурсивные фильтры могут быть неустойчивыми, на современном этапе развития технических средств реализации ЦФ, когда имеется возможность оперировать с числами в формате с плавающей запятой, по-видимому, можно считать утратившим актуальность, если, конечно, не рассматривать случаи грубых ошибок, допущенных в расчетах.

Таблица 5 – Формулы замены переменной p , применяемые при преобразовании передаточной функции нормированного аналогового ФНЧ-прототипа в передаточную функцию цифрового фильтра заданного типа методом обобщенного билинейного преобразования [4, 5]

Тип	Параметры результирующего ЦФ	Формула для замены переменной*
ФНЧ	Частота среза $\omega_{\text{ср}}$	$p \rightarrow \frac{2}{\omega_{\text{ср}} T_{\Delta}} \frac{z-1}{z+1}$
ФВЧ	Частота среза $\omega_{\text{ср}}$	$p \rightarrow \frac{\omega_{\text{ср}} T_{\Delta}}{2} \frac{z+1}{z-1}$
ПФ	Граничные частоты полосы пропускания $\omega_{\text{н}}$ и $\omega_{\text{в}}$	$p \rightarrow \gamma \frac{z^2 - 2\zeta z + 1}{z^2 - 1}$
РФ	Граничные частоты полосы задерживания $\omega_{\text{н}}$ и $\omega_{\text{в}}$	$p \rightarrow \frac{z^2 - 1}{\gamma(z^2 - 2\zeta z + 1)}$

* Примечание: $\gamma = \operatorname{ctg}\left(\frac{T_{\Delta}}{2}(\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}})\right)$, $\zeta = \frac{\cos\left(\frac{T_{\Delta}}{2}(\omega_{\text{в}} + \omega_{\text{н}})\right)}{\cos\left(\frac{T_{\Delta}}{2}(\omega_{\text{в}} - \omega_{\text{н}})\right)}$.

2.2. Каскадная реализация рекурсивных фильтров

Расчет рекурсивных фильтров заданным по передаточным функциям аналоговых фильтров-прототипов высоких порядков методом билинейного преобразования производить затруднительно, даже с использованием средств вычислительной техники, поскольку получающиеся формулы оказываются слишком громоздкими. Задача значительно облегчается, если передаточная

функция фильтра-прототипа представлена в виде сомножителей $W_{\kappa}(p)$, каждый из которых представлен виде отношения двух полиномов переменной p относительно невысоких порядков

$$W(p) = \prod_{\kappa} W_{\kappa}(p), \quad (27)$$

как, например, в выражениях (16) и (17). Тогда, применяя метод обобщенного билинейного преобразования к каждому сомножителю $W_{\kappa}(p)$, можно получить выражение для передаточной функции цифрового фильтра также в форме произведения сомножителей $D_{\kappa}(z)$, представленных отношением полиномов переменной z сравнительно невысоких порядков

$$D(z) = \prod_{\kappa} D_{\kappa}(z), \quad (28)$$

С точки зрения практической реализации такое представление передаточных функций аналоговых и цифровых фильтров соответствует последовательному соединению соответствующих элементарных фильтров. Применительно к ЦФ это означает, что при программной реализации фильтра будет необходимо выполнять расчеты по нескольким (по числу сомножителей в (28)) разностным уравнениям, так, что выходной сигнал, сформированный первым разностным уравнением, следует использовать в качестве входного сигнала для второго разностного уравнения и т. д.

Нетрудно показать, что применение метода обобщенного билинейного преобразования к сомножителям вида

$$W_{\kappa}(p) = \frac{1}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}, \quad (29)$$

где a_0, a_1, a_2 – некоторые константы, которые составляют формулы (16), (17) и

выражения, приведенные в таблице 1, будет приводить к сомножителям цифровой передаточной функции $D_k(z)$ в форме отношения полиномов переменной z второго порядка для получающихся цифровых ФНЧ и ФВЧ и полиномов четвертого порядка для цифровых ПФ и РФ. Расчетные формулы для коэффициентов элементарных сомножителей приведены в таблице 6. Заметим, что сомножитель с передаточной функцией вида $W_k(p) = \frac{1}{a_1 p + a_2}$ является частным случаем (29) при $a_0=0$.

Таблица 6 – Формулы сомножителей $D_k(z)$, получающиеся при применении формул обобщенного билинейного преобразования к выражению (29)

Тип ЦФ	Формула для $D_k(z)$	Формулы* для коэффициентов $D_k(z)$
ФНЧ с частотой среза ω_{cp}	$\frac{\beta_0 z^2 + \beta_1 z + \beta_2}{\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2}$	$\begin{aligned} \beta_0 &= (\omega_{cp} T_{\Delta})^2, \beta_1 = 2\beta_0, \beta_2 = \beta_0, \\ \alpha_0 &= a_2 (\omega_{cp} T_{\Delta})^2 + 2a_1 \omega_{cp} T_{\Delta} + 4a_0, \\ \alpha_1 &= 2a_2 (\omega_{cp} T_{\Delta})^2 - 8a_0, \\ \alpha_2 &= a_2 (\omega_{cp} T_{\Delta})^2 - 2a_1 \omega_{cp} T_{\Delta} + 4a_0 \end{aligned}$
ФВЧ с частотой среза ω_{cp}	$\frac{\beta_0 z^2 + \beta_1 z + \beta_2}{\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2}$	$\begin{aligned} \beta_0 &= 4, \beta_1 = -8, \beta_2 = 4, \\ \alpha_0 &= a_0 (\omega_{cp} T_{\Delta})^2 + 2a_1 \omega_{cp} T_{\Delta} + 4a_2, \\ \alpha_1 &= 2a_0 (\omega_{cp} T_{\Delta})^2 - 8a_2, \\ \alpha_2 &= a_0 (\omega_{cp} T_{\Delta})^2 - 2a_1 \omega_{cp} T_{\Delta} + 4a_2 \end{aligned}$
ПФ с частотами среза ω_H и ω_B	$\frac{\beta_0 z^4 + \beta_1 z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_3 z + \beta_4}{\alpha_0 z^4 + \alpha_1 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z + \alpha_4}$	$\begin{aligned} \beta_0 &= 1, \beta_1 = 0, \beta_2 = -2, \beta_3 = 0, \beta_4 = 1, \\ \alpha_0 &= \gamma^2 a_0 + \gamma a_1 + a_2, \alpha_1 = -4\gamma^2 \zeta a_0 - 2\gamma \zeta a_1, \\ \alpha_2 &= 4\gamma^2 \zeta^2 a_0 + 2\gamma^2 a_0 - 2a_2, \alpha_3 = -4\gamma^2 \zeta a_0 + 2\gamma \zeta a_1, \\ \alpha_4 &= \gamma^2 a_0 - \gamma a_1 + a_2 \end{aligned}$
РФ с частотами среза ω_H и ω_B	$\frac{\beta_0 z^4 + \beta_1 z^3 + \beta_2 z^2 + \beta_3 z + \beta_4}{\alpha_0 z^4 + \alpha_1 z^3 + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z + \alpha_4}$	$\begin{aligned} \beta_0 &= \gamma^2, \beta_1 = -4\gamma^2 \zeta, \beta_2 = 4\gamma^2 \zeta^2 + 2\gamma^2, \beta_3 = \beta_1, \beta_4 = \beta_0, \\ \alpha_0 &= \gamma^2 a_2 + \gamma a_1 + a_0, \alpha_1 = -4\gamma^2 \zeta a_2 - 2\gamma \zeta a_1, \\ \alpha_2 &= 4\gamma^2 \zeta^2 a_2 + 2\gamma^2 a_2 - 2a_0, \alpha_3 = -4\gamma^2 \zeta a_2 + 2\gamma \zeta a_1, \\ \alpha_4 &= \gamma^2 a_2 - \gamma a_1 + a_0 \end{aligned}$

* Примечание: $\gamma = \operatorname{ctg}\left(\frac{T_{\Delta}}{2}(\omega_B - \omega_H)\right)$, $\zeta = \frac{\cos\left(\frac{T_{\Delta}}{2}(\omega_B + \omega_H)\right)}{\cos\left(\frac{T_{\Delta}}{2}(\omega_B - \omega_H)\right)}$.

К сожалению, непосредственное применение рассмотренного подхода для

расчета каскадов цифрового фильтра при проведении расчетов по передаточной функции аналогового фильтра-прототипа семейства Бесселя для $n > 8$ (при меньших n можно обратиться к данным таблицы 1) невозможно, поскольку формула (18) не соответствует требуемому формату (27). В этом и во всех подобных случаях придется предварительно находить корни полинома в знаменателе выражения для $W(p)$ численными методами, и далее, используя формулу разложения многочлена на сомножители “по корням”, переходить к представлению передаточной функции в формате (27). Для нормированного ФНЧ-прототипа Бесселя (18), например, этот подход приведет к

$$W_{Bs}(p) = \frac{1}{(B_n)^n \frac{2^n n!}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} (p - p_k)}, \quad (30)$$

где $p_k, k=0,1,\dots,n-1$ – корни полинома в знаменателе (18), которые, как известно, называют полюсами передаточной функции фильтра.

Корни полинома могут быть вещественными и комплексными числами. В последнем случае всегда имеется пара комплексно-сопряженных корней. Выделяя среди p_k комплексно-сопряженные пары $p_k = \text{Re}(p_k) + j\text{Im}(p_k)$ и $p_{k+1} = \text{Re}(p_k) - j\text{Im}(p_k)$, выражение (30) можно преобразовать к виду:

$$W_{Bs}(p) = \frac{1}{(B_n)^n \frac{2^n n!}{(2n)!} \prod_{\substack{k \\ \text{Im}(p_k) \neq 0}} (p^2 - 2p \text{Re}(p_k) + (\text{Re}^2(p_k) + \text{Im}^2(p_k))) \prod_{\substack{k \\ \text{Im}(p_k) = 0}} (p - p_k)}, \quad (31)$$

после чего, его структура будет соответствовать (27), что открывает перспективы каскадирования фильтров с использованием формул, приведенных в таблице 6.

Следует иметь в виду, что при больших порядках ФНЧ-прототипа Бесселя (при $n > 14$) некоторые коэффициенты при p^k в (18) становятся равными машинному нулю, что будет приводить к грубым ошибкам в определении корней. В этом случае необходимо осуществить предварительную нормировку

коэффициентов полинома в знаменателе, вынося за знак суммы общий множитель, не зависящий от k .

Заметим, что изложенный подход к расчету рекурсивных фильтров методом каскадирования можно осуществлять не только при использовании формул типовых аналоговых нормированных ФНЧ-прототипов, но и в любых случаях, когда формула для передаточной функции аналогового фильтра-прототипа со сложной частотной характеристикой $W(p)$ может быть представлена произведением и/или взвешенной суммой более простых функций $W_k(p)$. Проиллюстрируем подход на примере расчета режекторного фильтра. Пусть в системе цифровой фильтрации, описываемой передаточной функцией (25), возникла необходимость дополнительно осуществить подавление помехи напряжения промышленной частоты на частоте 50 Гц ($\omega_0=2\pi\cdot 50$ рад/с). Тогда общая передаточная функция цифрового фильтра может быть представлена произведением

$$D(z)=D_{\text{ПФ}}(z)D_{\text{РФ}}(z), \quad (32)$$

где $D_{\text{ПФ}}(z)$ определяется формулой (25), а $D_{\text{РФ}}(z)$ можно рассчитать по аналоговому прототипу с передаточной функцией (20). Выполняя замену переменной (24) в формуле (20) и произведя аналитические выкладки, получим

$$D_{\text{РФ}}(z)=\frac{\beta_0 z^2 + \beta_1 z + \beta_2}{\alpha_0 z^2 + \alpha_1 z + \alpha_2}, \quad (33)$$

где

$$\begin{aligned} \beta_0 &= Q \left(\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\omega_0 T_{\Delta}}{2} \right) + 1 \right), \quad \beta_1 = 2Q \left(\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\omega_0 T_{\Delta}}{2} \right) - 1 \right), \quad \beta_2 = \beta_0, \quad \alpha_0 = Q \left(\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\omega_0 T_{\Delta}}{2} \right) + 1 \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_0 T_{\Delta}}{2} \right), \\ \alpha_1 &= \beta_1, \quad \alpha_2 = Q \left(\operatorname{tg}^2 \left(\frac{\omega_0 T_{\Delta}}{2} \right) + 1 \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{\omega_0 T_{\Delta}}{2} \right). \end{aligned}$$

Зададим ширину полосы подавления (здесь по уровню минус 3 dB) $\Delta f=4$ Гц, откуда найдем $Q=\omega_0/(2\pi\cdot\Delta f)=12.5$, и, далее, используя формулу (33) с подстановкой числовых значений для ω_0 , Q и $T_{\Delta}=10^{-4}$ с., после проведения

вычислений, получим

$$D_{\text{пф}}(z) = \frac{12.5030847z^2 - 24.9938304z + 12.5030847}{12.5187941z^2 - 24.9938304z + 12.4873759} \quad (34)$$

Передаточной функции (34) соответствует разностное уравнение

$$y[k] = 1.996504652y[k-1] - 0.997490293y[k-2] + \\ + 0.998745146x[k] - 1.996504652x[k-1] + 0.998745146x[k-2]. \quad (35)$$

При каскадной реализации в алгоритме полосового фильтра, заданном уравнением (26), производятся замены переменных таким образом, чтобы выходной сигнал фильтра, работающего по уравнению (35), играл роль входного сигнала, т. е.

$$u[k] = 3.8959896u[k-1] - 5.7078698u[k-2] + 3.7269834u[k-3] - 0.9151626u[k-4] + \\ + 9.4045026 \cdot 10^{-4}y[k] - 1.880901 \cdot 10^{-3}y[k-2] + 9.404503 \cdot 10^{-4}y[k-4]. \quad (36)$$

Выходным сигналом фильтра с передаточной функцией (32) в данном примере выступает решетчатая функция $u[k]$, рассчитанная по (36).

График АЧХ полученного фильтра представлен на рисунке 6.

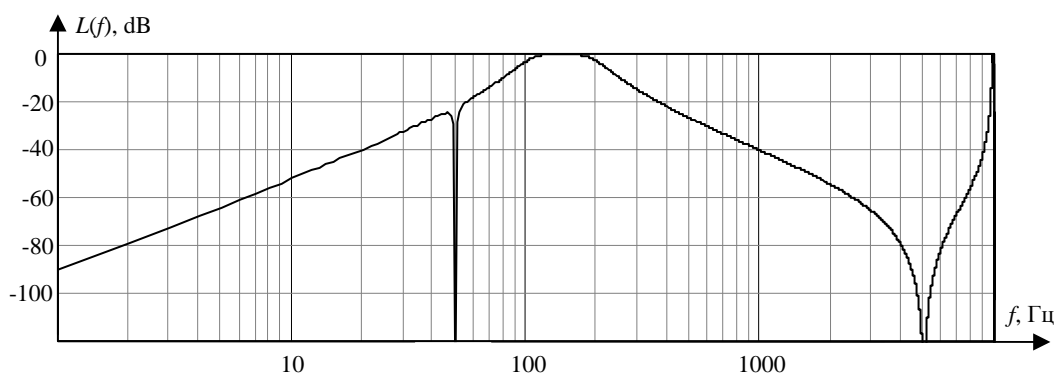


Рисунок 6 – АЧХ рекурсивного полосового фильтра с функцией режекции помехи промышленной частоты 50 Гц, полученного методом каскадной реализации.

Нужно заметить, что на практике данный фильтр является не лучшим решением, поскольку значительное подавление достигается только на одной фиксированной частоте, а частота промышленной помехи может отличаться от установленной величины. Для усовершенствования фильтра подавления помех промышленной частоты можно порекомендовать каскадное соединение нескольких режекторных фильтров, настроенных на близкие значения частот подавления, в совокупности они сформируют полосу подавления со значительным затуханием в заданной полосе частот.

Кроме рассмотренного варианта последовательного каскадирования цифровых фильтров, возможны другие варианты объединения передаточных функций с целью получения сложной характеристики ЦФ как комбинации более простых. Часто для этого можно использовать параллельное соединение, когда отдельные передаточные функции не перемножаются, а складываются (при необходимости с разными весами C_k):

$$D(z) = \sum_k C_k D_k(z).$$

Например, для реализации цифрового эквалайзера звуковоспроизводящей аппаратуры необходим многополосный цифровой полосовой фильтр, который должен быть перестраиваемым с целью внесения в сигнал желаемых изменений. Такой фильтр можно построить, если использовать несколько (по числу полос эквалайзера, K) разностных уравнений, каждое из которых можно получить на основе передаточной функции аналогового прототипа, заданного, например, уравнением (19), и объединить их выходные сигналы. Нетрудно убедиться, что при использовании метода билинейного преобразования для расчета цифрового полосового фильтра на основе (19) получится разностное уравнение второго порядка

$$y_k[k] = a_{1,k}y_k[k-1] + a_{2,k}y_k[k-2] + b_{0,k}x[k] + b_{1,k}x[k-1] + b_{2,k}x[k-2], \quad k=1, 2, \dots, K.$$

Входной сигнал $x[k]$ поступает на все фильтры. После выполнения вычислений по всем K разностным уравнениям общий выходной сигнал фильтра-эквалайзера рассчитывается по уравнению

$$y[k] = \sum_{k=1}^K C_k y_k[k].$$

Достоинством метода параллельного соединения цифровых фильтров по сравнению с методом их последовательного соединения является возможность организации параллельных вычислений при практической реализации алгоритма работы цифрового фильтра.

3. НЕРЕКУРСИВНЫЕ ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ

Нерекурсивные цифровые фильтры, как следует из формулы (3), для расчета отсчетов выходного сигнала используют только отсчеты входного сигнала. Отсутствие рекурсивных членов в разностном уравнении ЦФ гарантирует устойчивость фильтра при любом наборе коэффициентов $\{c_v\}$, а также отсутствие предельных циклов автоколебаний. Еще одним достоинством нерекурсивных ЦФ по сравнению с рекурсивными является возможность при проведении расчетов задавать функции для АЧХ и ФЧХ независимо друг от друга. Это, в частности, позволяет получать ЦФ со строго линейной ФЧХ, что минимизирует искажения сигнала в процессе фильтрации [4, 12].

Недостатком нерекурсивных фильтров является только необходимость выполнения большого объема вычислений, поскольку опыт показывает, что при прочих равных условиях обеспечения необходимой частотной избирательности порядок нерекурсивного фильтра q оказывается во много раз больше, чем суммарный порядок $(q+p)$ рекурсивного фильтра. Последнее положение можно проиллюстрировать примером однородного нерекурсивного фильтра (фильтра скользящего среднего, представляющего собой простейший ФНЧ), разностное уравнение которого имеет вид:

$$y[k] = \frac{1}{q} \sum_{v=0}^{q-1} x[k-v]$$

Легко убедиться, что расчеты по данному уравнению могут быть организованы по рекурсивной схеме:

$$y[k] = y[k-1] + \frac{1}{q}(x[k] - x[k-q]).$$

Для расчета одного отсчета выходного сигнала рассматриваемого ЦФ в нерекурсивном разностном уравнении требуется q вычислительных операций, а в рекурсивном – всего 3 при любом значении q .

Для расчета рекурсивных фильтров существует несколько методов:

- 1) метод разложения передаточной функции рекурсивного ЦФ в ряд Лорана [9];
- 2) аналитический метод расчета [1 – 5, 8 – 10, 12], основанный на соотношениях между частотной передаточной функцией фильтра и его импульсной характеристикой;
- 3) методы, основанные на дискретизации частотной характеристики фильтра [4, 5, 8 – 10, 12] (метод частотной выборки, оконный метод).

3.1. Расчет нерекурсивных фильтров методом разложения передаточной функции рекурсивного фильтра в ряд Лорана

Передаточная функция нерекурсивного фильтра может быть найдена на основе разностного уравнения (3), если применить к обеим его частям Z -преобразование и выполнить алгебраические преобразования с учетом теоремы запаздывания:

$$D(z) = \sum_{v=0}^{q-1} c_v z^{-v}. \quad (37)$$

Разложение в ряд Лорана предполагает нахождение значений коэффициентов $\{c_v\}$ посредством деления полиномов передаточной функции рассчитанного ранее рекурсивного ЦФ:

$$\frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \dots + b_m}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_n} = c_0 + c_1 z^{-1} + c_2 z^{-2} + c_3 z^{-3} + \dots \quad (38)$$

Сравнивая правую часть равенства, представляющую собой в общем случае бесконечный ряд по отрицательным степеням переменной z (это и есть ряд Лорана), с формулой для передаточной функции (37), нетрудно убедиться, что коэффициенты ряда Лорана представляют собой искомые значения коэффициентов нерекурсивного фильтра.

Для автоматизации расчета коэффициентов ряда Лорана используется

рекуррентная формула [2, 9]:

$$c_v = b_v - \sum_{i=1}^v a_i c_{v-i}, v = 0, 1, 2, \dots, \quad (39)$$

где полагают $a_i=0$ при $i>n$ и $b_v=0$ при $v>m$.

Однако, в общем случае ряд Лорана получается бесконечным, поэтому всегда остается открытым вопрос о количестве членов ряда, достаточном для представления частотных характеристик исходно заданного рекурсивного фильтра с приемлемой точностью. Рекомендуется [2] останавливать итерационный процесс (39), когда очередной полученный коэффициент станет соизмерим с величиной машинного нуля.

Данный метод имеет смысл использовать только в случаях, когда по каким-то причинам необходимо осуществить замену имеющегося рекурсивного ЦФ его как можно более точно реализованным нерекурсивным эквивалентом.

3.2. Аналитический метод расчета нерекурсивных фильтров

Аналитический метод расчета нерекурсивных ЦФ основан на соотношениях, связывающих между собой частотную передаточную функцию и импульсную характеристику фильтра. Для дискретных линейных систем, как известно [5], эта связь дается парой преобразований Фурье.

$$\begin{cases} W_D(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k] z^{-k} \Big|_{z=e^{j\omega T_\Delta}}, \\ g[k] = \frac{T_\Delta}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{T_\Delta}}^{\frac{\pi}{T_\Delta}} W_D(j\omega) e^{j\omega k T_\Delta} d\omega. \end{cases} \quad (40)$$

В свою очередь, дискретная импульсная характеристика $g[k]$ нерекурсивного ЦФ совпадает с его коэффициентами [2 – 5, 7 – 10, 12], т. е.

$$c_v = g[v], \quad (41)$$

в чем нетрудно убедиться, последовательно рассчитывая значения выходного сигнала нерекурсивного фильтра при подаче на его вход единичной импульсной функции:

$$g[k] = \sum_{v=0}^{q-1} c_v \delta_1[k-v],$$

для $k=0, 1, \dots, q-1$.

Таким образом, аналитический метод расчета нерекурсивного фильтра с заданной частотной передаточной функцией $W_D(j\omega)$ сводится к вычислению обратного преобразования Фурье по второму уравнению в (40).

Рассмотрим пример расчета нерекурсивного ФНЧ с “идеальной” прямоугольной АЧХ

$$A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_{гр} \\ 0, & \text{при } \omega > \omega_{гр} \end{cases}$$

и линейной ФЧХ

$$\Psi(\omega) = -\lambda T_{\Delta} \omega,$$

где λ – некоторая положительная константа; рекомендуется [4] задавать $\lambda = \frac{q-1}{2}$.

Для проведения расчетов удобно представить непрерывную частотную передаточную функцию фильтра в экспоненциальной форме

$$W_D(j\omega) = A(\omega) e^{j\Psi(\omega)}.$$

При задании формулы для частотной передаточной функции необходимо выполнять условие комплексно-сопряженной симметрии

$$W_D(j\omega) = W_D^*(-j\omega),$$

т. е. нужно соответствующим образом, сформировать часть передаточной

функции для отрицательных частот. Поэтому условие на АЧХ в данном случае преобразуется к

$$A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{при } -\omega_{\text{гр}} \leq \omega \leq \omega_{\text{гр}} \\ 0, & \text{при } |\omega| > \omega_{\text{гр}}, \end{cases}$$

а функция $\Psi(\omega)$ используется как для отрицательных, так и для положительных частот без изменений.

Теперь, применяя вторую формулу из (40), получим

$$\begin{aligned} g[k] &= \frac{T_{\Delta}}{2\pi} \int_{-\omega_{\text{гр}}}^{\omega_{\text{гр}}} e^{j\omega k T_{\Delta}} e^{-j\lambda T_{\Delta} \omega} d\omega = \frac{T_{\Delta} e^{j\omega T_{\Delta} (k-\lambda)}}{2\pi T_{\Delta} j(k-\lambda)} \Big|_{-\omega_{\text{гр}}}^{\omega_{\text{гр}}} = \frac{(e^{j\omega_{\text{гр}} T_{\Delta} (k-\lambda)} - e^{-j\omega_{\text{гр}} T_{\Delta} (k-\lambda)})}{2\pi j(k-\lambda)} = \frac{2j \sin(\omega_{\text{гр}} T_{\Delta} (k-\lambda))}{2\pi j(k-\lambda)} = \\ &= \frac{\sin(\omega_{\text{гр}} T_{\Delta} (k-\lambda))}{\pi(k-\lambda)}. \end{aligned} \quad (42)$$

Из (40) следует, что в формуле (42) нужно использовать как положительные, так и отрицательные индексы $k=v$. Идеальный фильтр нереализуем, поскольку последовательность $g[k]$ определена на бесконечном интервале $k \in (-\infty, \infty)$ и потребуются $q \rightarrow \infty$. При любом конечном q , с учетом $\lambda = \frac{q-1}{2}$, получим окончательный результат расчета нерекурсивного ЦФ – коэффициенты его разностного уравнения:

$$c_v = \frac{\sin\left(\omega_{\text{гр}} T_{\Delta} \left(v - \frac{q-1}{2}\right)\right)}{\pi\left(v - \frac{q-1}{2}\right)}, \quad v = 0, 1, \dots, q-1. \quad (43)$$

Заметим, что последовательность (43) симметрична относительно $v = \frac{q-1}{2}$, что является [4] одним из необходимых условий линейности ФЧХ для ФНЧ.

Рассчитанному нерекурсивному фильтру нижних частот с коэффициентами (43) соответствует разностное уравнение

$$y[k] = \sum_{v=0}^{q-1} c_v x[k-v]$$

и частотная передаточная функция

$$W_D(j\omega) = \sum_{v=0}^{q-1} c_v e^{-j\omega v T_\Delta}. \quad (44)$$

График логарифмической АЧХ полученного фильтра $L(f) = 20 \lg(|W_D(j2\pi f)|)$, рассчитанный с использованием формул (43) и (44) при $\omega_{гр} = 2\pi \cdot 100$ рад/с, $T_\Delta = 10^{-4}$ с и $q = 128$, приведен на рисунке 7. График ФЧХ, построенный в линейном масштабе (это необходимо, чтобы оценить линейность характеристики), – на рисунке 8.

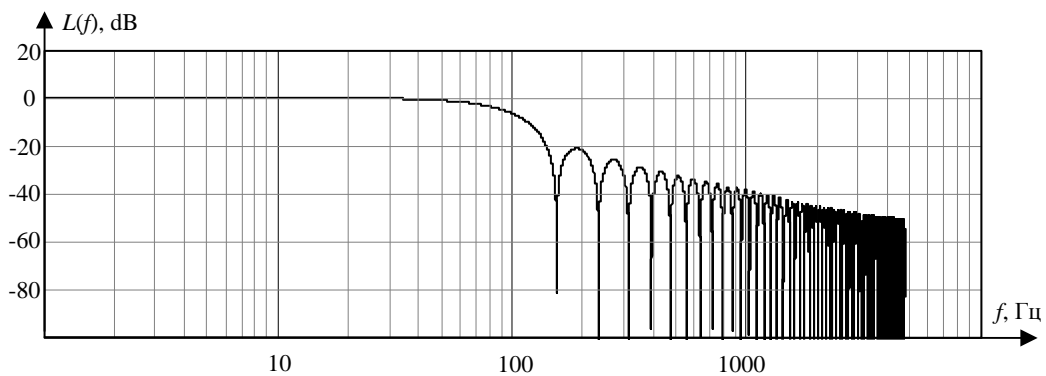


Рисунок 7 – АЧХ рассчитанного нерекурсивного ФНЧ.

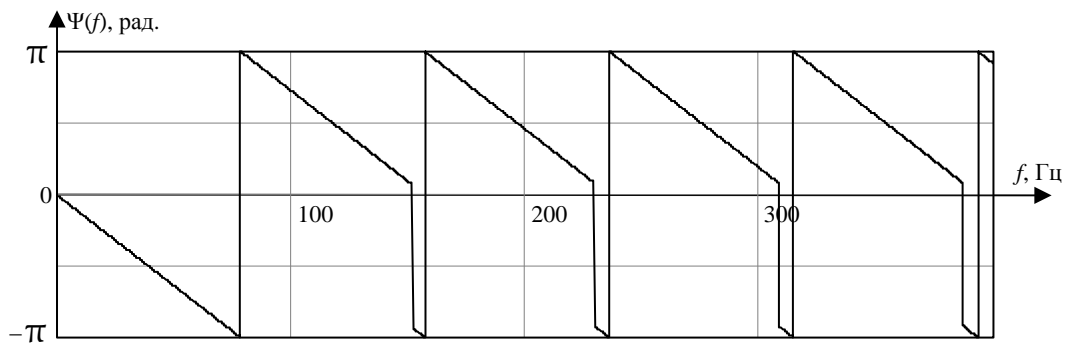


Рисунок 8 – ФЧХ рассчитанного нерекурсивного ФНЧ.

Анализ полученного графика АЧХ показывает, что ФНЧ оказался далек от идеализированной модели, положенной в основу расчетов. Видно, что за пределами частоты среза коэффициент передачи фильтра спадает немонотонно. Форма АЧХ с т.н. “пульсациями”, когда точки глубокого подавления чередуются с волнообразными подъемами графика, является характерной для любых нерекурсивных фильтров. Наблюдаемые искажения частотных характеристик известны под термином “эффект Гиббса” [7 – 10, 12] и обусловлены разрывным характером функции, от которой вычисляется обратное преобразование Фурье в (42). Разрывность возникла как результат замены пределов интегрирования с предельных величин $\pm\pi/T_{\Delta}$ в (40) на требуемые для “идеальной” АЧХ пределы $\pm\omega_{гр}$. Уровень пульсаций (их еще называют “боковыми лепестками”), как известно [2 – 5, 7 – 10, 12], не зависит от порядка фильтра, при увеличении q пульсации графика только становятся более “частыми”.

Уровень пульсаций АЧХ нерекурсивных фильтров принято оценивать по максимальной величине боковых лепестков. В данном случае первый лепесток достигает уровня минус 20 дБ, т.е. на частоте примерно $2\omega_{гр}$ внеполосные составляющие входного сигнала будут ослаблены лишь в 10 раз. Если мысленно соединить максимумы всех лепестков некоторой линией, то по полученной *оггибающей боковых лепестков* будет видно, что данный фильтр имеет крутизну спада АЧХ за пределами полосы пропускания на уровне минус 40 дБ на декаду, такую же, как у аналогового ФНЧ Баттерворта 2-го порядка. Безусловно, полученное решение проигрывает рекурсивному ЦФ, поскольку расчет каждого отсчета выходного сигнала в полученном нерекурсивном фильтре потребует $2q-1=255$ вычислительных операций (q умножений и $q-1$ сложение), а для соответствующего рекурсивного ЦФ, рассчитанного методом билинейного преобразования, для этого понадобится, как нетрудно установить, всего лишь 9 операций (5 умножений и 4 сложения).

Другим недостатком рассмотренного метода является то, что частота среза $\omega_{ср}$ полученного фильтра, определяемая по уровню минус 3 дБ, не совпадает с $\omega_{гр}$, хотя и достаточно близка к ней: используя средства вычислительной техники, для

рассмотренного примера нетрудно найти $\omega_{\text{ср}} \approx 2\pi \cdot 81.37$ рад/с, в то время как $A(\omega_{\text{гр}}) \approx 0.5$, что соответствует уровню минус 6 дБ.

График ФЧХ демонстрирует очень хорошую линейность характеристики в полосе пропускания фильтра, линейность ФЧХ оказывается намного лучше, чем даже у аналогового ФНЧ Бесселя. Разрыв характеристики, наблюдаемый на частоте, когда функция скачкообразно изменяет свое значение от уровня минус π к уровню $+\pi$, объясняется особенностями операции вычисления аргумента сложной комплексной функции, и не должен вводить в заблуждение. На самом деле монотонность ФЧХ в подобных точках разрыва не нарушается, и, при необходимости получения точного графика ФЧХ, каждый раз после точки разрыва необходимо добавлять ко всем последующим значениям ФЧХ корректирующую добавку в 2π рад. с необходимым знаком (эта процедура называется “разворачивание фазы” [8], англ.: “phase unwrapping”), в данном случае функция убывает, поэтому добавка составит минус 2π рад.

В теории ЦОС для борьбы с проявлениями эффекта Гиббса разработан метод оконных функций [3 – 5, 7 – 10, 12]. Правильное применение любой оконной функции $w(v)$ к массиву коэффициентов фильтра $\{c_v\}$ обеспечит уменьшение уровня боковых лепестков во много раз. Применение оконной функции $w(v)$, определенной в диапазоне аргумента $v \in [0, q-1]$, к массиву коэффициентов $\{c_v\}$ реализуется простым поэлементным умножением

$$\tilde{c}_v = c_v \cdot w(v), v = 0, 1, \dots, q-1, \quad (45)$$

в результате чего получается массив коэффициентов $\{\tilde{c}_v\}$, абсолютные величины элементов которого уменьшаются при приближении к краям массива, а крайние элементы которого (\tilde{c}_0 и \tilde{c}_{q-1}) становятся строго равными нулю или близкими к нему при любых исходных значениях c_0 и c_{q-1} .

Недостаток описанного подхода, впрочем, очень легко устранимый, заключается в том, что в результате применения оконной функции для почти всех элементов массива коэффициентов $\{\tilde{c}_v\}$ будет справедливо

$$\tilde{c}_v < c_v,$$

что приводит к уменьшению коэффициента передачи фильтра не только в полосе задерживания, но и в полосе пропускания, хотя и в значительно меньшей степени. Для устранения этого эффекта достаточно произвести дополнительную нормировку всех коэффициентов, полученных в результате вычислений по формуле (45), взяв в качестве опорного значения уровень АЧХ на какой-либо частоте в пределах полосы пропускания, который нужно сохранить. Например, для ФНЧ должно выполняться равенство $A(0)=1$. Вычисляя $A(0)=|W(j0)|$ по формуле (44), легко получить формулу, накладывающую требование на массив коэффициентов нерекурсивного фильтра в случае ФНЧ:

$$\left| \sum_{v=0}^{q-1} c_v \right| = 1, \quad (46)$$

откуда с очевидностью следует процедура нормировки коэффициентов $\{\tilde{c}_v\}$:

$$c_v = \frac{\tilde{c}_v}{\left| \sum_{r=0}^{q-1} \tilde{c}_r \right|}, v = 0, 1, \dots, q-1, \quad (47)$$

после которой будет выполнено $\left| \sum_{v=0}^{q-1} c_v \right| = 1$ при любом значении суммы $\sum_{v=0}^{q-1} \tilde{c}_v$.

Полученный массив коэффициентов $\{c_v\}$ следует использовать в разностном уравнении нерекурсивного фильтра (3) и в формуле для расчета частотной передаточной функции (44).

Чтобы проиллюстрировать результативность изложенного метода оконных функций, применим к рассчитанным ранее коэффициентам (43) оконную функцию Блэкмана-Натолла [8] (англ.: Blackmann-Nuttall)

$$w(v) = 0.3635819 - 0.4891775 \cos\left(\frac{2\pi v}{q-1}\right) + 0.1365995 \cos\left(\frac{4\pi v}{q-1}\right) - 0.010641 \cos\left(\cos\left(\frac{6\pi v}{q-1}\right)\right), \quad (48)$$

которая является самой эффективной по степени подавления боковых лепестков, а к вычисленным по формуле (45) коэффициентам применим нормировку (47), после чего построим графики АЧХ и ФЧХ, используя формулу для частотной передаточной функции

$$W_D(j\omega) = \sum_{v=0}^{q-1} \underline{c}_v e^{-j\omega v T_\Delta}.$$

Соответствующие графики приведены на рисунках 9 и 10.

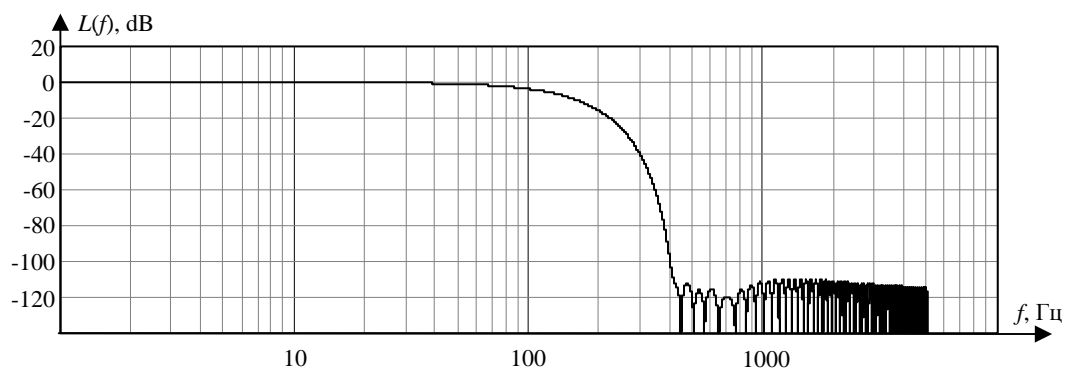


Рисунок 9 – АЧХ рассчитанного нерекурсивного ФНЧ с коэффициентами $\{\underline{c}_v\}$.

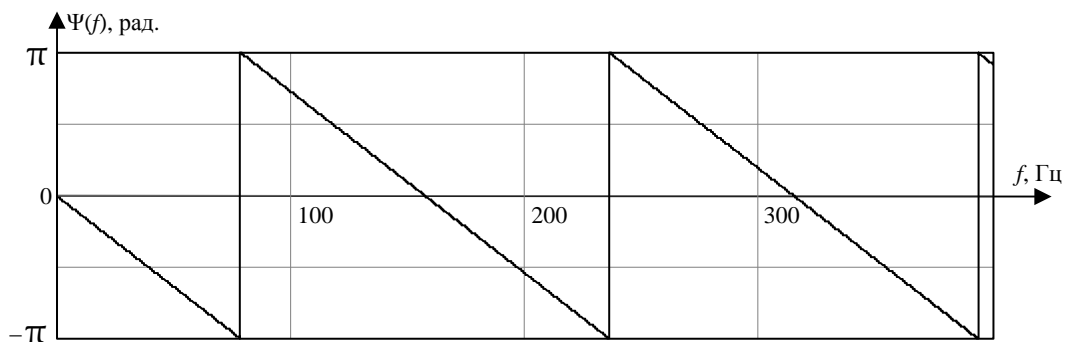


Рисунок 10 – ФЧХ рассчитанного нерекурсивного ФНЧ с коэффициентами $\{\underline{c}_v\}$.

Анализ графиков показывает, что АЧХ и ФЧХ фильтра с коэффициентами $\{\underline{c}_v\}$ намного больше соответствуют идеальному варианту реализации ФНЧ с

линейной ФЧХ, чем ранее рассчитанный фильтр с коэффициентами (43). Уровень боковых лепестков не превышает уровня минус 110 дБ, частота среза стала намного ближе к задаваемому в расчетах значению $\omega_{гр}$ (это побочный эффект от применения функции окна: всегда происходит расширение основного “лепестка” частотной характеристики): $\omega_{ср} \approx 2\pi \cdot 89.65$ рад/с.

Если производить сравнение полученного фильтра с ФНЧ Бесселя (у которого ФЧХ близка к линейной), то, используя вычислительную технику для осуществления расчетов по (18) и для построения графика АЧХ, нетрудно подобрать порядок n и найти B_n , такие, что АЧХ аналогового прототипа Бесселя будет наиболее близка к АЧХ полученного нерекурсивного ЦФ. При желании можно убедиться, что при $\omega_{ср} \approx 2\pi \cdot 89.65$ рад/с, $n=16$ и $B_n=5.139$, графики уже достаточно близки (хотя даже при таких параметрах фильтр Бесселя после частоты 300 Гц еще заметно проигрывает в крутизне переходной полосы АЧХ).

Если теперь осуществить сравнение вычислительной сложности реализации полученного нерекурсивного фильтра с рекурсивным ЦФ, который можно было бы рассчитать методом билинейного преобразования по аналоговому фильтру-прототипу Бесселя 16-го порядка, то разница окажется намного меньше, чем в предыдущем примере: нерекурсивный фильтр по-прежнему требует $2q-1=255$ операций (т. к. преобразования (45) и (47) производятся заранее, на этапе расчета, поэтому не усложняют вычислительный алгоритм работы фильтра) на каждый выходной отсчет $y[k]$, а соответствующий рекурсивный ЦФ, реализованный каскадным соединением восьми фильтров 2-го порядка потребует суммарно $8 \cdot 9 = 72$ вычислительных операций. Если же учесть, что объем вычислений по разностному уравнению нерекурсивного фильтра может быть уменьшен за счет использования алгоритмов быстрого вычисления цифровой свертки [8 – 10], то выигрыш рекурсивного фильтра может оказаться еще менее значимым.

Отдельного внимания заслуживает анализ влияния порядка фильтра q , импульсная характеристика которого рассчитывается аналитически, на его частотные характеристики. Вообще решетчатая функция $g[k]$, вычисляемая по формуле (40) для любых типовых характеристик фильтров (ФНЧ, ФВЧ, ПФ и

РФ), формально будет иметь бесконечную длину, что не только ставит под сомнение физическую реализуемость соответствующего фильтра, но и прямо противоречит концепции КИХ-фильтра. Любое выбираемое разработчиком конечное значение q всегда будет вызывать некоторые дополнительные погрешности реализации частотных характеристик фильтра, помимо неизбежного эффекта Гиббса, за счет искусственного усечения импульсной характеристики фильтра. Общий принцип, который желательно соблюдать при выборе q , состоит в том, чтобы крайние коэффициенты (c_0 и c_{q-1}) были бы по модулю на несколько порядков меньше максимального (по модулю) коэффициента в массиве $\{c_v\}$ еще до применения к ним оконной функции, в идеале – соизмеримы с величиной машинного нуля. Из (43) следует, что для этого нужно задавать q как можно большим, однако это затруднит или даже может сделать невозможной практическую реализацию фильтра из-за возрастающих требований к вычислительному модулю в составе ЦФ.

Чрезмерное уменьшение q приводит к тому, что уровень АЧХ в полосе пропускания начинает отличаться от требуемого (обычно уровень АЧХ фильтра при уменьшении q понижается относительно расчетного значения, хотя зависимость уровня от q не монотонна), смещаются граничные частоты полосы пропускания фильтра и увеличивается ширина переходной полосы. Тем не менее, часто приходится рассчитывать нерекурсивный фильтр, исходя из заданного порядка q , выбранного по условию практической реализации ЦФ. В этом случае частично исправить возникающие искажения АЧХ можно, прибегая к дополнительной нормировке рассчитанных коэффициентов фильтра (здесь идея та же, что была использована при выводе (47)), а для сохранения требуемой частоты среза приходится пересчитывать коэффициенты, подбирая значения граничных частот, задаваемые в исходных данных для расчета. Таким образом, процесс расчета фильтра становится итерационным.

Приведем также формулы для расчета коэффициентов нерекурсивных фильтров остальных типов:

- для “идеального” ФВЧ задается

$$A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{при } \omega_{\text{гр}} \leq |\omega| \leq \frac{\pi}{T_{\Delta}}, \\ 0, & \text{при } |\omega| < \omega_{\text{гр}} \end{cases}$$

и требование линейности ФЧХ

$$\Psi(\omega) = -\lambda T_{\Delta} \omega,$$

где $\lambda = \frac{q-1}{2}$.

По второму уравнению системы (40), в этом случае расчет дает

$$\begin{aligned} g[k] &= \frac{T_{\Delta}}{2\pi} \left(\int_{\omega_{\text{гр}}}^{\frac{\pi}{T_{\Delta}}} e^{j\omega k T_{\Delta}} e^{-j\lambda T_{\Delta} \omega} d\omega + \int_{-\frac{\pi}{T_{\Delta}}}^{-\omega_{\text{гр}}} e^{j\omega k T_{\Delta}} e^{-j\lambda T_{\Delta} \omega} d\omega \right) = \frac{T_{\Delta}}{2\pi} \left(\frac{e^{j\omega T_{\Delta}(k-\lambda)}}{T_{\Delta} j(k-\lambda)} \Big|_{\omega_{\text{гр}}}^{\frac{\pi}{T_{\Delta}}} + \frac{e^{j\omega T_{\Delta}(k-\lambda)}}{T_{\Delta} j(k-\lambda)} \Big|_{-\frac{\pi}{T_{\Delta}}}^{-\omega_{\text{гр}}} \right) = \\ &= \frac{1}{\pi(k-\lambda)} (\sin(\pi(k-\lambda)) - \sin(\omega_{\text{гр}} T_{\Delta}(k-\lambda))). \end{aligned}$$

После подстановки в полученную формулу $\lambda = \frac{q-1}{2}$ и $k=v$, получим окончательный результат

$$c_v = \frac{\sin\left(\pi\left(v - \frac{q-1}{2}\right)\right) - \sin\left(\omega_{\text{гр}} T_{\Delta}\left(v - \frac{q-1}{2}\right)\right)}{\pi\left(v - \frac{q-1}{2}\right)}, \quad v = 0, 1, \dots, q-1. \quad (49)$$

- для “идеального” ПФ задается

$$A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{при } \omega_{\text{н}} \leq |\omega| \leq \omega_{\text{в}} \\ 0, & \text{при } |\omega| \notin [\omega_{\text{н}}, \omega_{\text{в}}] \end{cases}$$

где $\omega_{\text{н}}$ и $\omega_{\text{в}}$ – значения нижней и верхней граничных частот полосы пропускания фильтра, и после преобразований, выполняемых аналогично проделанным выше, можно получить

$$c_v = \frac{\sin\left(\omega_b T_\Delta \left(v - \frac{q-1}{2}\right)\right) - \sin\left(\omega_h T_\Delta \left(v - \frac{q-1}{2}\right)\right)}{\pi \left(v - \frac{q-1}{2}\right)}, v = 0, 1, \dots, q-1. \quad (50)$$

- для “идеального” РФ задается

$$A(\omega) = \begin{cases} 0, & \text{при } \omega_h \leq |\omega| \leq \omega_b \\ 1, & \text{при } |\omega| \notin [\omega_h, \omega_b] \end{cases},$$

откуда выводится

$$c_v = \frac{\sin\left(\omega_h T_\Delta \left(v - \frac{q-1}{2}\right)\right) + \sin\left(\pi \left(v - \frac{q-1}{2}\right)\right) - \sin\left(\omega_b T_\Delta \left(v - \frac{q-1}{2}\right)\right)}{\pi \left(v - \frac{q-1}{2}\right)}, v = 0, 1, \dots, q-1. \quad (51)$$

Необходимо заметить, что при расчете ФВЧ при прочих равных условиях приходится задавать значительно больший порядок фильтра, чем для нерекурсивного ФНЧ, и еще требовательнее к порядку оказываются относительно узкополосные ПФ и РФ. Наглядное представление об этом дает рисунок 11, на котором представлен график зависимости коэффициента передачи в полосе подавления режекторного фильтра от порядка фильтра, полученный при расчете РФ с параметрами $\omega_h = 2\pi \cdot 50$ рад/с, $\omega_b = 2\pi \cdot 100$ рад/с, $T_\Delta = 10^{-4}$ с, коэффициенты рассчитывались по формуле (51) с последующим применением функции окна (48). Видно, что для порядков $q < 1000$ данный фильтр будет обладать неудовлетворительными характеристиками.

На рисунке 12 в качестве примера приведен график логарифмической АЧХ рассматриваемого фильтра при $q = 2048$. Очевидно, что при таком значении порядка фильтр обладает очень хорошими характеристиками, однако и здесь нужно сделать оговорку: на заданных граничных частотах полосы подавления ω_h и ω_b коэффициент передачи фильтра имеет значение минус 6 дБ, и если, например, нужно будет обеспечить подавление на частотах $2\pi \cdot 50$ рад/с и

$2\pi \cdot 100$ рад/с на стандартном для определения частот среза уровне минус 3 дБ, то потребуется корректировка исходных данных (придется подбирать необходимые числовые значения $\omega_H > 2\pi \cdot 50$ рад/с и $\omega_B < 2\pi \cdot 100$ рад/с) и перерасчет фильтра с новыми данными.

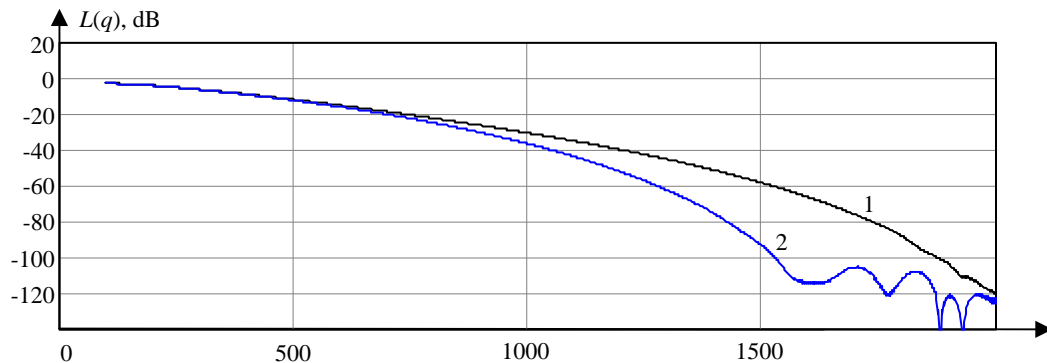


Рисунок 11 – Зависимости коэффициента передачи рассчитанного режекторного фильтра от его порядка: 1 – максимальный уровень боковых лепестков в полосе задерживания от 70 до 80 Гц; 2 – коэффициент передачи на средней частоте полосы задерживания 75 Гц.

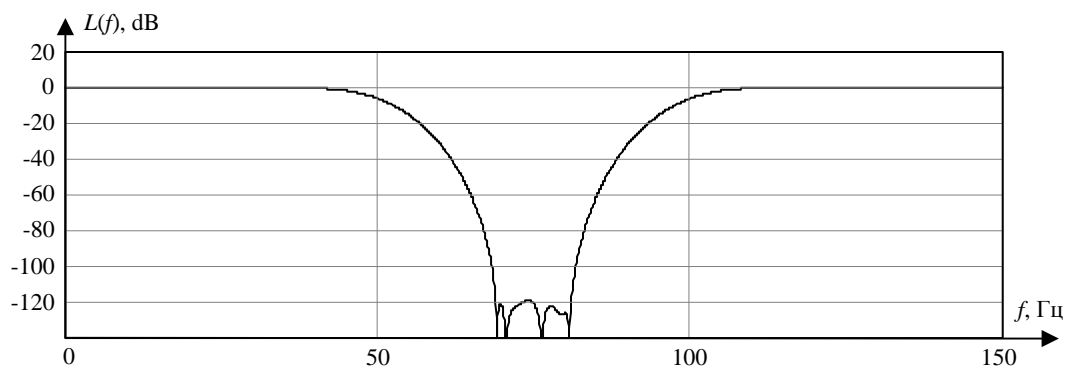


Рисунок 12 – АЧХ рассчитанного нерекурсивного РФ при $q=2048$.

Нужно отметить, что при применении ПФ и ФВЧ иногда весьма критично требование полного подавления постоянной составляющей сигнала, т. е. $A(0)=0$, что не гарантируется при использовании формул (49) и (50) при конечных значениях q . В этом случае также (по аналогии с нормировкой коэффициентов ФНЧ) приходится прибегать к дополнительной корректировке рассчитанных

коэффициентов. Для ПФ и ФВЧ, очевидно, должно быть соблюдено требование

$$\left| \sum_{v=0}^{q-1} c_v \right| = 0.$$

Здесь процедура коррекции коэффициентов $\{\tilde{c}_v\}$, полученных после применения к (49) или (50) функции окна, описывается следующей формулой

$$\underline{c}_v = \tilde{c}_v - \frac{1}{q} \sum_{r=0}^{q-1} \tilde{c}_r, v = 0, 1, \dots, q-1, \quad (52)$$

после которой будет выполнено $\left| \sum_{v=0}^{q-1} \underline{c}_v \right| = 0$ при любом значении суммы $\sum_{v=0}^{q-1} \tilde{c}_v$.

Реализацию данного подхода проиллюстрируем на примере ФВЧ с параметрами $\omega_{\text{гр}} = 2\pi \cdot 100$ рад/с, $T_{\Delta} = 10^{-4}$ с и $q = 256$, коэффициенты которого рассчитаны по (49), с последующим применением оконной функции (48). На рисунке 13 приведены графики логарифмической АЧХ фильтра до и после коррекции коэффициентов по формуле (52).

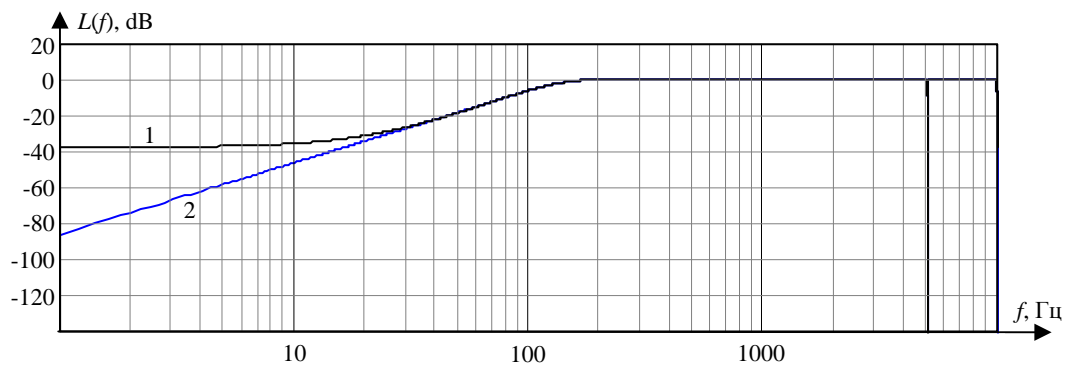


Рисунок 13 – АЧХ рассчитанного нерекурсивного ФВЧ: 1 – с коэффициентами $\{\tilde{c}_v\}$, 2 – с коэффициентами $\{\underline{c}_v\}$, полученными после коррекции $\{\tilde{c}_v\}$.

Видно, что рассматриваемый ФВЧ с коэффициентами $\{\tilde{c}_v\}$ в области низких частот подавляет сигналы не более чем на 40 дБ, т. е. всего в 100 раз, что может быть недостаточно, если во входных данных доминирует постоянная

составляющая. Фильтр с коэффициентами $\{\varepsilon_v\}$ имеет асимптотический наклон АЧХ в области низких частот примерно 40 дБ на декаду, причем легко убедиться, что при этом точно соблюдается равенство $A(0)=0$.

В заключение необходимо отметить, что если ставится задача расчета нерекурсивного фильтра по аналоговому прототипу с заданной передаточной функцией $W(p)$, то следует формировать частотную передаточную функцию для подстановки во второе уравнение (40) следующим образом:

$$W_D(j\omega) = \begin{cases} |W(j\omega)|e^{j\arg(W(j\omega))}, & \text{при } 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T_\Delta} \\ |W(j\omega)|e^{-j\arg(W(j\omega))}, & \text{при } -\frac{\pi}{T_\Delta} \leq \omega \leq 0, \end{cases} \quad (53)$$

чтобы выполнить условие комплексно-сопряженной симметрии.

3.3. Расчет нерекурсивных фильтров методом дискретизации частотной характеристики

Расчет нерекурсивных фильтров аналитическим методом можно производить, если удастся получить выражения для $g[k]$ по второму уравнению в (40) в замкнутой форме. Для типовых фильтров решения приведены в п. 3.2, однако для более сложных частотных передаточных функций решение аналитически не выразить. В этих случаях применяют методы, основанные на дискретизации частотной характеристики фильтра [2 – 4, 8 – 10, 12] (англ.: frequency sampling method).

Первый метод – *метод на основе дискретного преобразования Фурье* – основан на тех же идеологических предпосылках, что и метод аналитического расчета, только вместо дискретно-непрерывного преобразования Фурье (40) используется дискретное преобразование Фурье (ДПФ); иногда этот метод называют [4] оконным методом. Второй метод – *метод частотной выборки*² –

² Начальный этап расчета, на котором производится формирование массива дискретных отсчетов частотной характеристики $\{W_v\}$ (т. е., по сути, массива частотной выборки), является общим для обоих методов, вследствие чего возникает терминологическая путаница, в результате которой метод частотной выборки в отечественной (и не только, если судить по замечанию в [12, стр. 287]) литературе иногда ошибочно отождествляют с методом расчета фильтра по дискретизированной частотной передаточной функции на основе дискретного преобразования Фурье.

предполагает построение специальной структурной схемы в виде соединения гребенчатого фильтра и набора фильтров-резонаторов [3, 12].

Фильтр, рассчитанный по второму методу, может быть реализован как по нерекурсивной структуре, так и с использованием рекурсивных структур, причем последнее оказывается более предпочтительным, поэтому метод частотной выборки излагается в отдельном разделе.

Дискретизация частотной передаточной функции фильтра предполагает получение массива комплексных чисел $\{W_v\}$, $v=0,1,\dots,q-1$, образованных значениями заданной функции $W_D(j\omega)$ на отдельных частотах $\omega_v = \frac{2\pi v}{qT_\Delta}$. Сначала определяется первая половина массива:

$$W_v = \begin{cases} W_D\left(j \frac{2\pi v}{qT_\Delta}\right), v = 0,1,\dots, \frac{q}{2}-1 \\ \left| W_D\left(j \frac{2\pi v}{qT_\Delta}\right) \right|, v = \frac{q}{2}; \\ W_D\left(j \frac{2\pi v}{qT_\Delta}\right), v = 0,1,\dots, \frac{q-1}{2}, \text{ при нечетном } q; \end{cases}, \text{ при четном } q, \quad (54)$$

затем — вторая половина, на основе сформированной первой, так, чтобы выполнялось условие комплексно-сопряженной симметрии

$$W_v = \begin{cases} W_{q-v}^*, v = \frac{q}{2}+1, \frac{q}{2}+2,\dots, q-1, \text{ при четном } q, \\ W_{q-v}^*, v = \frac{q+1}{2}, \frac{q+1}{2}+1,\dots, q-1, \text{ при нечетном } q, \end{cases}$$

поскольку только в этом случае гарантируется получение вещественных значений решетчатой функции $g[k]$, которые затем используются при задании коэффициентов фильтра.

Массив из q отсчетов импульсной характеристики цифрового фильтра $\{g[k]\}$ и массив выборки частотной передаточной функции $\{W_v\}$ связаны

соотношениями, известными как дискретное преобразование Фурье³ [4, 5, 8 – 10, 12]:

$$\begin{cases} W_v = F\{g[k]\} = \sum_{k=0}^{q-1} g[k] e^{-j\frac{2\pi vk}{q}}, v = 0, 1, \dots, q-1 \\ g[k] = F^{-1}\{W_v\} = \frac{1}{q} \sum_{v=0}^{q-1} W_v e^{j\frac{2\pi vk}{q}}, k = 0, 1, \dots, q-1. \end{cases} \quad (55)$$

Существенным отличием формул (55) от формул (40) является то, что индексы суммирования являются неотрицательными целыми числами. Свойства ДПФ таковы, что первые половины (при $k=0, 1, \dots, q/2$ и $v=0, 1, \dots, q/2$) массивов $\{g[k]\}$ и $\{W_v\}$ содержат значения функций $g[k]$ и $W_D(j\omega)$ для положительных аргументов соответствующих физических величин (дискретного времени k для $g[k]$ и частоты ω для $W_D(j\omega)$), а вторые половины – значения данных функций для отрицательных аргументов. Поэтому, при использовании результатов вычисления по второму уравнению (55) для расчета коэффициентов нерекурсивного фильтра приходится менять местами первую и вторую половины массива $g[k]$, чтобы отсчеты импульсной характеристики располагались в правильном порядке по времени. Соответственно, коэффициенты $\{c_v\}$ в разностном уравнении нерекурсивного фильтра рассчитываются через $g[k]$ по следующей формуле:

$$c_v = \begin{cases} \begin{cases} g\left[v + \frac{q}{2}\right], v = 0, 1, \dots, \frac{q}{2} - 1 \\ g\left[v - \frac{q}{2}\right], v = \frac{q}{2}, \frac{q}{2} + 1, \dots, q - 1 \end{cases}, \text{ при четном } q; \\ \begin{cases} g\left[v + \frac{q-1}{2} + 1\right], v = 0, 1, \dots, \frac{q-1}{2} - 1 \\ g\left[v - \frac{q-1}{2}\right], v = \frac{q-1}{2}, \frac{q-1}{2} + 1, \dots, q - 1 \end{cases}, \text{ при нечетном } q. \end{cases} \quad (56)$$

³ В последнее время наметилась тенденция к более широкому использованию т. н. симметричного ДПФ, когда в обеих формулах (55) перед знаком суммы ставится множитель $\frac{1}{\sqrt{q}}$. Например, в алгоритмах расчета прямого и

обратного комплексного быстрого преобразования Фурье cfft и icfft в среде компьютерной математики MathCAD реализован именно такой вариант, что приходится учитывать, вводя соответствующий дополнительный нормирующий множитель в расчетные формулы для коэффициентов фильтра.

В части остальных этапов расчета: применение к коэффициентам оконной функции, нормировка или коррекция коэффициентов и т. п. данный метод не имеет специфических отличий от рассмотренных в п. 3.2 подходов.

4. РАСЧЕТ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ МЕТОДОМ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ

Метод частотной выборки основан на соотношениях (55) и тесной связи, имеющейся между ДПФ и Z-преобразованием. Основой для расчета по этому методу являются математические соотношения, описывающие характеристики нерекурсивных фильтров. Передаточная функция нерекурсивного фильтра выражается как Z-преобразование его импульсной характеристики

$$D(z) = \sum_{k=0}^{q-1} g[k]z^{-k}. \quad (57)$$

В выражение (57) можно подставить второе уравнение системы (55), в результате получится

$$D(z) = \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{1}{q} \sum_{v=0}^{q-1} W_v e^{j \frac{2\pi v k}{q}} \right) z^{-k}.$$

Меняя в полученном выражении порядок суммирования, можно произвести следующие выкладки

$$D(z) = \sum_{v=0}^{q-1} \frac{W_v}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \left(e^{j \frac{2\pi v k}{q}} z^{-k} \right) = \sum_{v=0}^{q-1} \frac{W_v}{q} \sum_{k=0}^{q-1} \left(e^{j \frac{2\pi v}{q}} z^{-1} \right)^k = \sum_{v=0}^{q-1} \frac{W_v}{q} \frac{1 - e^{j 2\pi v} z^{-q}}{1 - e^{j \frac{2\pi v}{q}} z^{-1}}.$$

На последнем этапе преобразований использована формула для вычисления суммы конечной геометрической прогрессии. Если учесть равенство $e^{j 2\pi v} = 1$, то получится следующее выражение для передаточной функции фильтра.

$$D(z) = \frac{1 - z^{-q}}{q} \sum_{v=0}^{q-1} \frac{W_v}{1 - e^{j \frac{2\pi v}{q}} z^{-1}}. \quad (58)$$

Полученная формула дает основу для практической реализации цифрового фильтра, заданного массивом частотной выборки, с использованием каскадирования элементарных ячеек фильтров, как показано на рисунке 14.

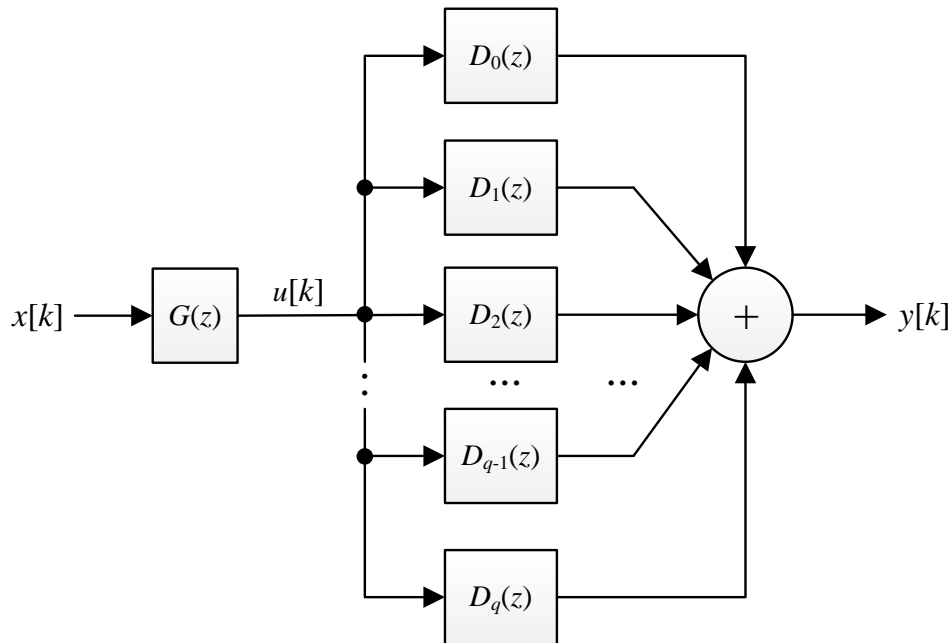


Рисунок 14 – Структурная схема каскадной реализации фильтра, рассчитываемого по методу частотной выборки.

Схема образована соединением т. н. “гребенчатого” фильтра с передаточной функцией

$$G(z) = \frac{1 - z^{-q}}{q}$$

со структурой, которая образована параллельным соединением набора из q фильтров-резонаторов [3, 12] с передаточными функциями

$$D_v(z) = \frac{W_v}{1 - e^{j\frac{2\pi v}{q}} z^{-1}}, v = 0, 1, \dots, q-1,$$

каждый из которых оказывается рекурсивным фильтром первого порядка с

разностным уравнением

$$y_v[k] = a_v y_v[k-1] + W_v u[k], \quad v=0,1,\dots, q-1, \quad (59)$$

где $a_v = e^{j\frac{2\pi v}{q}}$, поэтому рассматриваемый цифровой фильтр уже нельзя классифицировать как нерекурсивный.

Важно заметить, что при практической реализации модулей фильтров (59) рекомендуется осуществлять округление вещественной и мнимой частей константы $a_v = e^{j\frac{2\pi v}{q}} = \cos\left(\frac{2\pi v}{q}\right) + j\sin\left(\frac{2\pi v}{q}\right)$ таким образом, чтобы гарантировать $|a_v| < 1$, в противном случае фильтр с передаточной функцией $D_v(z)$ окажется неустойчивым.

Структурная схема, приведенная на рисунке 14, может иметь преимущество при аппаратной реализации фильтра по сравнению с разностным уравнением вида (3), поскольку в ней используется модульный принцип построения, а при программной реализации возможно использовать параллельные вычисления, что очень удобно при реализации фильтра на основе программируемых логических интегральных схем. Однако, нельзя не отметить, что в общем случае вычислительная сложность при каскадной реализации нерекурсивного фильтра формально окажется в несколько раз выше, чем при реализации уравнения (3), поскольку в уравнениях (59) выполняются операции с комплексными числами a_v и W_v .

Заметим, что при необходимости любой нерекурсивный фильтр, коэффициенты которого заданы массивом $\{c_v\}$, можно привести к структурной схеме, изображенной на рисунке 14. Для этого достаточно предварительно вычислить массив $\{W_v\}$, применяя алгоритм быстрого преобразования Фурье к массиву коэффициентов $\{c_v\}$.

Формула для частотной характеристики рассматриваемого фильтра получается подстановкой $z = e^{j\omega T_\Delta}$:

$$W_D(j\omega) = D(z) \Big|_{z=e^{j\omega T_\Delta}} = \frac{1-z^{-q}}{q} \sum_{v=0}^{q-1} \frac{W_v}{1-e^{\frac{j2\pi v}{q}} z^{-1}} \Big|_{z=e^{j\omega T_\Delta}}. \quad (60)$$

Выражение в правой части (60) представляет собой интерполяционную формулу, позволяющую по набору q дискретных отсчетов частотной характеристики (частотной выборке $\{W_v\}$) построить непрерывную частотную передаточную функцию цифрового фильтра $W_D(j\omega)$, которая будет соответствовать рассчитанному цифровому фильтру.

В случае, когда метод частотной выборки применяется для расчета типовых фильтров, выражение (59) удастся упростить, причем в некоторых случаях (для узкополосных фильтров [12]) итоговая вычислительная сложность фильтра окажется меньше, чем при реализации по уравнению (3). В частности, если необходимо рассчитать фильтр с линейной ФЧХ, то следует задавать элементы массива частотной выборки, используя формулу

$$W_v = A_v e^{j\Psi_v}, \quad (61)$$

где $A_v = |W_v|$ – массив выборки АЧХ фильтра, с массивом отсчетов ФЧХ

$$\Psi_v = \begin{cases} -\frac{\pi v(q-1)}{q}, \text{ при } v = 0, 1, \dots, \frac{q}{2} - 1, \\ 0, \text{ при } v = \frac{q}{2}, \\ \frac{\pi(q-v)(q-1)}{q}, \text{ при } v = \frac{q}{2} + 1, \frac{q}{2} + 2, \dots, q-1, \text{ для четных } q; \\ -\frac{\pi v(q-1)}{q}, \text{ при } v = 0, 1, \dots, \frac{q-1}{2}, \\ \frac{\pi(q-v)(q-1)}{q}, \text{ при } v = \frac{q+1}{2}, \frac{q+1}{2} + 1, \dots, q-1, \text{ для нечетных } q. \end{cases} \quad (62)$$

После подстановки (61), (62) в (59) и выполнения преобразований можно получить следующее выражение [3, 12]:

$$D(z) = \frac{1 - z^{-q}}{q} \sum_{v=0}^{\frac{q}{2}} \frac{(-1)^v A_v}{1 - e^{j \frac{2\pi v}{q}} z^{-1}}, \quad (63)$$

в котором количество фильтров-резонаторов уменьшено вдвое по сравнению с исходным вариантом (60). Дополнительные соображения (обеспечение гарантированной устойчивости и переход к операциям с вещественными числами с одновременным сокращением количества вычислительных операций) привели к следующему модифицированному варианту передаточной функции фильтра [12] (только для четных q):

$$D(z) = \frac{1 - r^q z^{-q}}{q} \left(\frac{A_0}{2} \frac{1 + rz^{-1}}{1 - rz^{-1}} + \sum_{v=1}^{\frac{q}{2}-1} \frac{(-1)^v A_v (1 - r^2 z^{-2})}{1 - 2r \cos\left(\frac{2\pi v}{q}\right) z^{-1} + r^2 z^{-2}} + (-1)^{\frac{q}{2}} \frac{A_{\frac{q}{2}}}{2} \frac{1 - rz^{-1}}{1 + rz^{-1}} \right), \quad (64)$$

где $0 < r \leq 1$ – некоторая константа, которую задают близко к единице (типичные рекомендуемые [12] значения от 0.9999 до 0.99999, хотя теоретически возможно задание $r=1$, и, если при этом полученный фильтр не окажется неустойчивым, это позволит дополнительно уменьшить объем вычислений).

Передаточная функция (64) при прочих равных условиях обеспечивает минимальное количество вычислительных операций, необходимых для реализации цифрового фильтра. В случае сравнительно узкополосных фильтров, когда количество ненулевых значений в массиве модулей отсчетов частотной передаточной функции составляет менее $1/5$ от q (или, что эквивалентно, когда ширина полосы пропускания фильтра меньше $1/5$ от значения частоты Найквиста), данный вариант, как нетрудно убедиться, имеет преимущество перед реализацией по уравнению (3). При указанных условиях это преимущество часто сохраняется, даже если при расчете коэффициентов $\{c_v\}$ использовался алгоритм Ремеза [3, 5], при котором получается минимальный порядок фильтра в (3) при заданных требованиях к АЧХ фильтра. Из изложенного также следует, что метод

частотной выборки прекрасно подходит для реализации узкополосных ФНЧ и ПФ, а для построения ФВЧ и РФ его применение нецелесообразно.

Однако, несмотря на отмеченные преимущества метода, расчет фильтра (по сути, расчет сводится к определению значений элементов массива $\{A_v\}$ в (64)) оказывается сложнее, чем расчет нерекурсивного фильтра с использованием дискретизированной частотной характеристики и оконного метода. Причем, задание большинства коэффициентов A_v производится просто:

$$A_v = \begin{cases} 1, & \text{для } v, \text{ соответствующих частотам в полосе пропускания,} \\ 0, & \text{для } v, \text{ соответствующих частотам в полосе задерживания,} \end{cases} \quad (65)$$

но для обеспечения глубокого подавления боковых лепестков амплитудно-частотной характеристики фильтра в полосе задерживания необходимо задавать еще несколько (от одного до трех) коэффициентов A_v в каждой переходной полосе АЧХ фильтра (у ФНЧ и ФНЧ имеется одна переходная полоса, у ПФ и РФ – по две). Для вычисления этих коэффициентов нет никаких расчетных формул, и их значения приходится отыскивать, используя численные методы оптимизации. При этом использование одного коэффициента в переходной полосе позволяет обеспечить подавление сигналов в полосе задерживания от 44 до 54 дБ, двух коэффициентов – от 65 до 75 дБ, трех – от 85 до 95 дБ [3], а при удачном сочетании параметров даже более 100 дБ.

Для ФНЧ при некоторых q значения коэффициентов в переходной полосе фильтра табулированы [12, стр. 625-639], для отсутствующих вариантов рекомендуется получать недостающие данные, используя интерполирование, имеются также графики-номограммы [3, стр.139]. Часть табличных данных из [12] для задания трех коэффициентов переходной полосы АЧХ фильтра при некоторых q приведена в Приложении. Если приведенных данных по каким-то причинам окажется недостаточно для расчета фильтра, то придется написать собственную вычислительную процедуру численного поиска оптимальных значений коэффициентов A_v в переходной полосе.

Обычно процесс расчета фильтра методом частотной выборки протекает итерационно: сначала задается некоторое опорное значение q , при котором производится задание массива A_v , затем строится график АЧХ фильтра, по результатам анализа которого принимается решение об изменении q , после чего процесс расчета повторяется сначала, и так продолжается до тех пор, пока частотная характеристика фильтра не станет удовлетворять предъявляемым к ней требованиям.

В качестве примера рассмотрим расчет ФНЧ с параметрами $\omega_{гр}=2\pi \cdot 100$ рад/с, $T_{\Delta}=10^{-4}$ с. с заданием трех коэффициентов в переходной полосе. Зададим начальное значение $q=128$ (для этого значения имеются точные табличные данные для коэффициентов A_v в переходной полосе). Анализируя соотношение

$$\omega_v = \frac{2\pi v}{qT_{\Delta}},$$

легко установить, что при $q=128$ частотам в полосе пропускания фильтра (от 0 до $\omega_{гр}$) соответствуют только $v=0$ и $v=1$, отсюда $A_0=1$, $A_1=1$. Далее, используя табулированные данные (см. Приложение) для параметра $BW=2$ (количество индексов v , попавших в полосу пропускания), находим три рекомендованных значения модулей отсчетов частотной характеристики фильтра в переходной полосе (в данном примере для индексов $v=2$, $v=3$ и $v=4$): $A_2=0.70077254$, $A_3=0.22112728$, $A_4=0.01942992$. Для оставшихся индексов $v>4$, которые соответствуют полосе задерживания фильтра, задаются значения $A_v=0$. В итоге, подставляя полученные данные в формулу (64), и положив $r=0.99999$, можно получить формулу для передаточной функции фильтра.

График логарифмической АЧХ полученного фильтра, построенный в результате вычислений по формуле

$$L(f) = 20 \lg |W_D(j2\pi f)| = 20 \lg |D(z)|_{z=e^{j2\pi f T_{\Delta}}}, \quad (66)$$

приведен на рисунке 15. Видно, что его характеристика соответствует фильтру нижних частот, уровень боковых лепестков АЧХ в полосе подавления соответствует заявленному значению (см. Приложение) минус 94 дБ, однако частота среза, определяемая по уровню минус 3 дБ, отличается от желаемого значения $\omega_{гр}$.

С целью соблюдения равенства $\omega_{гр}=\omega_{ср}$ был произведен подбор значения q с одновременным переназначением величин элементов массива A_v . В итоге выбор остановлен на $q=94$, при этом в полосу пропускания попадает лишь 1 отсчет АЧХ $A_0=1$. Требуемые значения трех отсчетов АЧХ в переходной полосе при $BW=1$ нужно оценить методом интерполяции табличных данных (при $q=64$ в таблице указано $A_1=0.67620503$, $A_2=0.19208214$, $A_3=0.01551621$; при $q=96$: $A_1=0.6720933$, $A_2=0.18712559$, $A_3=0.01449609$; при $q=128$: $A_1=0.67221636$, $A_2=0.18725564$, $A_3=0.01451885$). Видно, что в окрестности $q=96$ зависимость коэффициентов от величины q незначительна, с учетом наблюдаемых тенденций для $q=94$ можно принять чуть меньшие, чем при $q=96$, значения, задавая $A_1=0.67208$, $A_2=0.1871$, $A_3=0.01449$. График АЧХ, построенный по данным расчета по (66) с подстановкой (64) с полученными данными $\{A_v\}$, приведен на рисунке 16.

Из графика, приведенного на рисунке 16, видно, что значение частоты среза $f_{ср}=100$ Гц соответствует заданному (т. е. $\omega_{ср}=\omega_{гр}=2\pi \cdot 100$ рад/с), максимальный уровень боковых лепестков в полосе задерживания составляет минус 98 дБ.

График ФЧХ рассматриваемого фильтра, приведенный на рисунке 17, демонстрирует превосходную линейность характеристики до начала полосы задерживания.

Определим количество вычислительных операций, требуемое для реализации рассчитанного фильтра при $q=94$.

Во-первых, имеется один гребенчатый фильтр с передаточной функцией

$$G(z) = \frac{1 - 0.99906043z^{-94}}{94},$$

которому соответствует разностное уравнение работы во временной области

$$u[k]=0.010638298x[k]-0.010628303x[k-94], \quad (67)$$

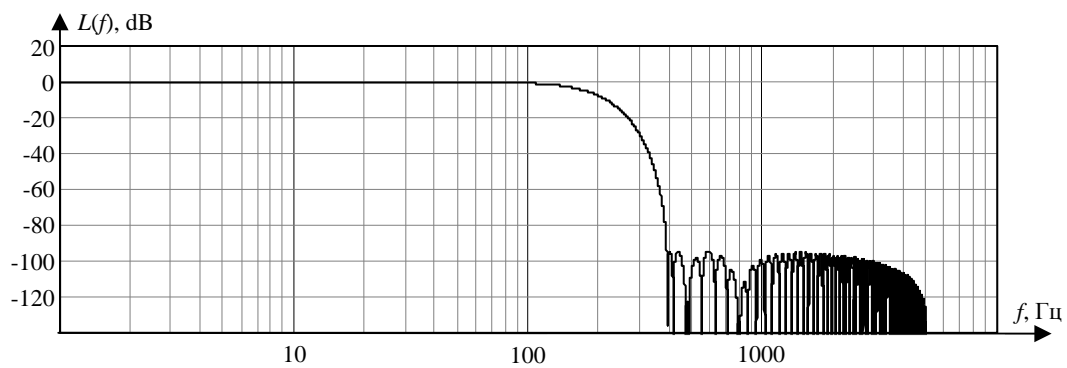


Рисунок 15 – График АЧХ ФНЧ, рассчитанного методом частотной выборки при $q=128$.

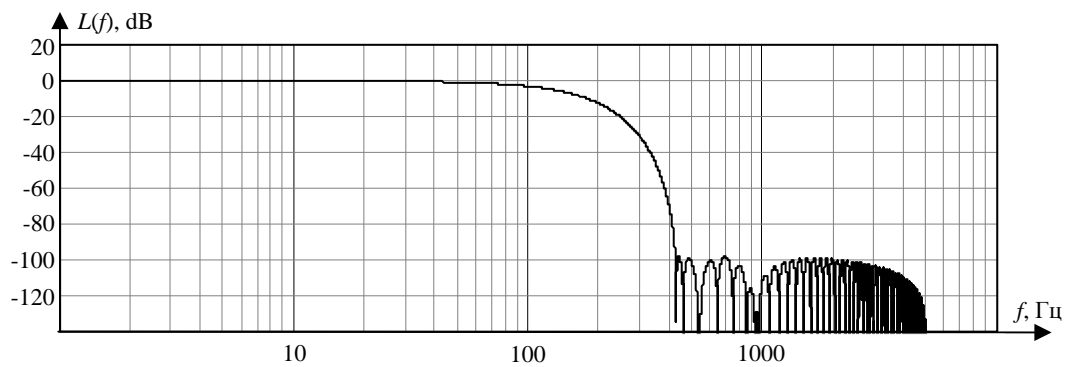


Рисунок 16 – График АЧХ ФНЧ, рассчитанного методом частотной выборки при $q=94$.

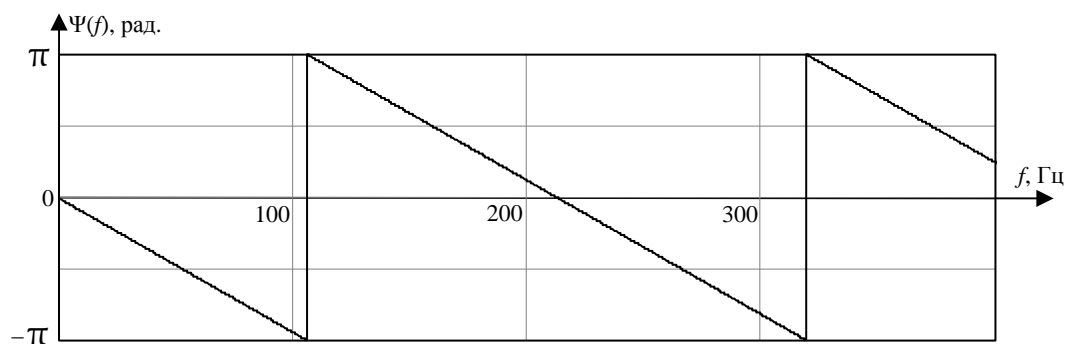


Рисунок 17 – График ФЧХ ФНЧ, рассчитанного методом частотной

выборки при $q=94$.

во-вторых, еще понадобится 4 фильтра-резонатора с передаточными функциями

$$D_0(z) = \frac{1 + rz^{-1}}{2(1 - rz^{-1})},$$

$$D_v(z) = \frac{(-1)^v A_v (1 - r^2 z^{-2})}{1 - 2r \cos\left(\frac{2\pi v}{q}\right) z^{-1} + r^2 z^{-2}} = \tilde{G}(z) \tilde{D}_v(z), v = 1, 2, 3,$$

где $\tilde{G}(z) = 1 - r^2 z^{-2}$, $\tilde{D}_v(z) = \frac{(-1)^v A_v}{1 - 2r \cos\left(\frac{2\pi v}{q}\right) z^{-1} + r^2 z^{-2}}, v = 1, 2, 3$.

Таким образом, перед фильтрами-резонаторами с передаточными функциями $\tilde{D}_1(z)$, $\tilde{D}_2(z)$, $\tilde{D}_3(z)$ будет расположен общий для них гребенчатый фильтр $\tilde{G}(z)$. Функции $\tilde{G}(z)$ соответствует разностное уравнение

$$\tilde{u}[k] = u[k] - 0.99998u[k-2] \quad (68)$$

Фильтры-резонаторы с передаточными функциями $D_0(z)$, $\tilde{D}_1(z)$, $\tilde{D}_2(z)$ и $\tilde{D}_3(z)$ во временной области описываются разностными уравнениями

$$\begin{cases} y_0[k] = ry_0[k-1] + 0.5u[k] + 0.5ru[k-1] \\ y_1[k] = 2r \cos\left(\frac{2\pi}{94}\right)y_1[k-1] - r^2 y_1[k-2] - 0.67208\tilde{u}[k] \\ y_2[k] = 2r \cos\left(\frac{4\pi}{94}\right)y_2[k-1] - r^2 y_2[k-2] + 0.187\tilde{u}[k] \\ y_3[k] = 2r \cos\left(\frac{6\pi}{94}\right)y_3[k-1] - r^2 y_3[k-2] - 0.01449\tilde{u}[k] \end{cases} \quad (69)$$

Окончательно выходной сигнал фильтра образуется как сумма выходных сигналов фильтров-резонаторов (69):

$$y[k]=y_0[k]+y_1[k]+y_2[k]+y_3[k]. \quad (70)$$

Анализируя уравнения (67) – (70), определяющие алгоритм работы разработанного фильтра, можно подсчитать количество вычислительных операций, которые необходимо выполнить для расчета одного отсчета выходного сигнала $y[k]$ (как и всегда, предполагается, что все коэффициенты в разностных уравнениях рассчитаны заранее и заданы как вещественные константы): требуется 15 умножений и 14 сложений, всего 29 операций, – величина, характерная скорее для рекурсивных фильтров, чем для нерекурсивных, при том, что ширина переходной полосы и глубина подавления внеполосных сигналов типичны для нерекурсивного фильтра высокого порядка.

5. ФИЛЬТРАЦИЯ ЗАПИСЕЙ ЦИФРОВЫХ СИГНАЛОВ

Рассмотренные в предыдущих разделах методы фильтрации в первую очередь ориентированы на обработку сигналов в реальном масштабе времени, однако в случае, когда для фильтрации доступна вся записанная реализация сигнала $\{x[k]\}$ длиной N отсчетов, можно применить методы фильтрации, разработанные специально для такого случая. Одним из популярных методов реализации фильтра частотной селекции является метод фильтрации в спектральном пространстве (известный также как метод Фурье-фильтрации [7]). Достоинством метода является простота использования и возможность настройки свойств фильтра, исходя из особенностей графиков вычисляемых спектров, что открывает возможности для реализации адаптивных фильтров намного более простыми средствами, чем во временной области.

Метод реализуется в 3 этапа:

1) вычисляется спектр входного сигнала $x[k]$ с использованием алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ)

$$X[k]=F\{x[k]\}, k=0,1,...,N-1,$$

2) производится модификация отсчетов массива $\{X[k]\}$ в соответствии с частотной передаточной функцией цифрового фильтра $\{W[k]\}$

$$Y[k]=W[k]X[k], k=0,1,...,N-1,$$

3) вычисляется выходной сигнал $\{y[k]\}$ фильтра при помощи алгоритма обратного быстрого преобразования Фурье от модифицированного спектра:

$$y[k]=F^{-1}\{Y[k]\}, k=0,1,...,N-1.$$

Заметим, что перед вычислением спектра $\{X[k]\}$ рекомендуется

предварительно удалить из $\{x[k]\}$ постоянную составляющую, чтобы уменьшить искажения, обусловленные явлением спектральной утечки [4, 8 – 10, 12]. Если постоянная составляющая информативна, то ее величину следует запомнить и добавить к выходному сигналу фильтра.

Для уменьшения количества вычислительных операций желательно, чтобы N было бы равно целой степени числа 2. Если это не так, то рекомендуется искусственно удлинить исходную последовательность, добавляя фиктивные неинформативные отсчеты данных. Если имеется формула для частотной передаточной функции аналогового прототипа фильтра $W(j\omega)$ который должен быть реализован, то задание элементов массива дискретной частотной передаточной функции производится по формуле, аналогичной формуле (54) (случай нечетного N по понятным причинам не рассматривается). Сначала задается первая половина массива:

$$W[k] = \begin{cases} W\left(j \frac{2\pi k}{NT_{\Delta}}\right), k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \\ \left| W\left(j \frac{2\pi k}{NT_{\Delta}}\right) \right|, k = \frac{N}{2}, \end{cases}$$

затем – вторая, комплексно-сопряженная к первой

$$W[k] = W^*[N - k], k = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N - 1.$$

При отсутствии формулы для $W(j\omega)$ возможно произвести задание массива $\{W[k]\}$ с использованием формул, аналогичных (61) и (62):

$$W[k] = A[k] e^{j\varphi[k]}, \quad (71)$$

где $A[k]$, $k=0, 1, \dots, N-1$ – массив дискретных отсчетов АЧХ фильтра (при его задании необходимо соблюдать условие $A[k]=A[N-k]$), с массивом дискретных

отсчетов ФЧХ, обеспечивающих линейность последней и одновременное выполнение условия комплексно-сопряженной симметрии для первой и второй половин массива $\{W[k]\}$:

$$\Psi[k] = \begin{cases} -\frac{\pi k(N-1)}{N}, & \text{при } k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1, \\ 0, & \text{при } k = \frac{N}{2}, \\ \frac{\pi(N-k)(N-1)}{N}, & \text{при } k = \frac{N}{2} + 1, \frac{N}{2} + 2, \dots, N-1. \end{cases} \quad (72)$$

Однако, при обработке записанных реализаций сигналов использование формулы (72) привносит нежелательный эффект: выходной сигнал фильтра будет *циклически* сдвинут по времени относительно входного на $N/2$ отсчетов, поэтому потребуется дополнительная коррекция этого сдвига, чтобы компоненты выходного сигнала остались на “своих” местах. Чтобы этого избежать, вместо (72) лучше задавать

$$\Psi[k]=0 \text{ для всех } k, \quad (73)$$

поскольку при обработке записей сигналов можно применять даже фильтры, не удовлетворяющие условию причинности⁴, когда расчет текущего отсчета осуществляется с использованием будущих значений входного сигнала, поскольку “будущее” обрабатываемого сигнала уже полностью известно.

⁴ Условие причинности, известное [4] также как условие “каузальности” (от англ. “cause” – причина), является одним из условий физической реализуемости алгоритма ЦОС вообще и цифрового фильтра в частности. Согласно этому условию, для расчета любого отсчета выходного сигнала фильтра можно использовать только текущий и прошлые отсчеты входного сигнала. В частности, разностное уравнение нерекурсивного фильтра (3) удовлетворяет

условию каузальности, а, например, уравнение $y[k] = \sum_{v=-(q-1)/2}^{(q-1)/2} c_v x[k-v]$ (к которому формально можно прийти,

если при расчете коэффициентов $\{c_v\}$ вместо (62) использовать $\Psi_v=0$ для всех v) – не удовлетворяет. Следует также заметить, что каузальные фильтры неизбежно вносят временную задержку (*линейный* сдвиг): выходной сигнал запаздывает по отношению ко входному, при использовании уравнения (3) задержка составляет $q/2$ дискретных отсчетов. Для приложений реального масштаба времени эта задержка неизбежна, но если нерекурсивный каузальный фильтр используется для обработки записанного сигнала, то всегда можно (и обычно нужно, чтобы файл выходных данных имел бы тот же объем, что и входной файл) сдвинуть рассчитанный выходной сигнал “обратно”, используя переиндексацию рассчитанных элементов массива $\{y[k]\}$.

Свойства полученного фильтра в любом случае будут определяться значениями элементов массива $\{A[k]\}$.

Проиллюстрируем расчет следующим модельным примером. Сформируем выборку $\{x[k]\}$, содержащую аддитивную смесь полезного сигнала $\{s[k]\}$ (трехсекундный фрагмент электрокардиограммы (ЭКГ), оцифрованной с частотой $F_{\Delta}=1$ кГц) и характерной для съема ЭКГ квазигармонической помехи $\{v[k]\}$, которая состоит из первой и нескольких нечетных гармоник частоты промышленной сети 50 Гц со случайными амплитудами и фазами, причем амплитуда помехи медленно флуктуирует (в данном случае эффект воспроизведен посредством модуляции амплитуды гармонического компонента низкочастотным экспоненциально-коррелированным случайным процессом). Для контроля качества работы фильтра использован принцип имитационного моделирования: помеха сформирована искусственно и смешана с имеющейся выборкой полезного сигнала ЭКГ, записанного при малом уровне помех. Значение частоты первой гармоники задано в окрестности частоты 50 Гц и ее точное значение разработчику фильтра неизвестно, как и параметры флуктуаций компонентов помехи. Задача заключается в подавлении компонентов помехи и получении полезного сигнала с минимальными искажениями.

График чистого полезного сигнала $\{s[k]\}$ длиной $N=3000$ дискретных отсчетов представлен на рисунке 18. Видно, что сигнал имеет значительную постоянную составляющую – довольно частое явление при съеме ЭКГ. График реализации зашумленного сигнала $\{x[k]\}$, обработку которого необходимо осуществить, приведен на рисунке 19. Видно, что уровень помехи довольно высок и не позволяет производить визуальный анализ особенностей ЭКГ.

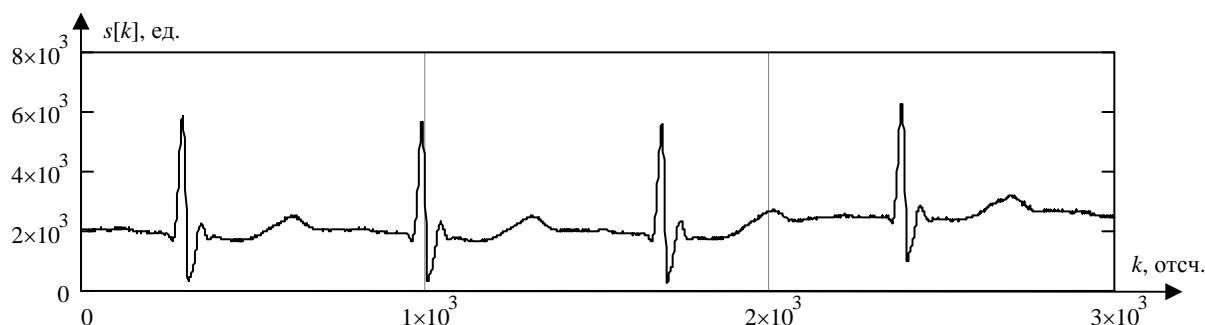


Рисунок 18 – Трехсекундный фрагмент записи ЭКГ.

В соответствии с методом фильтрации в спектральном пространстве, вычислен спектр сигнала $\{x[k]\}$, график амплитудного спектра (зависимость модулей отсчетов спектра $|X[k]|$ от частоты $f_k = \frac{k}{NT_\Delta}$) представлен на рисунке 20.

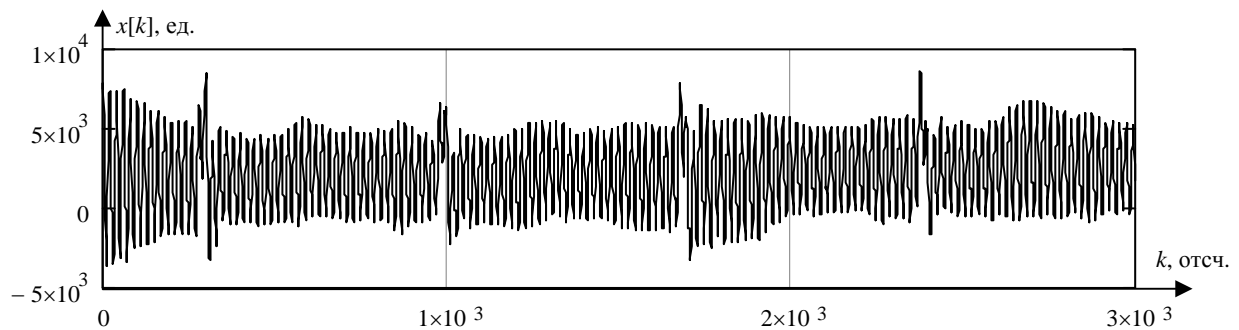


Рисунок 19 – Трехсекундный фрагмент зашумленной записи ЭКГ, здесь помехой выступает смесь гармоник с параметрами, характерными для съема электрокардиограммы.

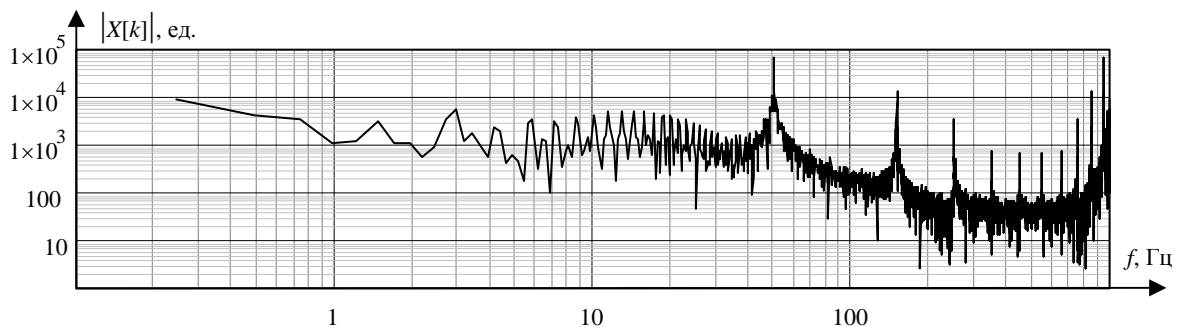


Рисунок 20 – График амплитудного спектра сигнала $\{x[k]\}$ (постоянная составляющая предварительно удалена).

На графике амплитудного спектра отчетливо просматриваются характерные “пики” на основной частоте помехи около 50 Гц и ее нечетных гармониках. Идентификация значения основной частоты может быть произведена при помощи алгоритма простого перебора элементов массива $\{|X[k]|\}$ для индексов, соответствующих частотам от 47 до 53 Гц: индекс элемента, имеющего максимальную величину, соответствует первой гармонике частоты помехи:

$$k_{f_1} = \arg \max_{47 < \frac{k}{NT_A} < 53} (|X[k]|). \quad (74)$$

Для удаления компонентов помехи в рассматриваемом случае можно выбрать одно из двух возможных решений для фильтра частотной селекции: 1) фильтр нижних частот с частотой среза порядка 20 Гц, полоса подавления которого начинается на частоте до 50 Гц; 2) совокупность режекторных фильтров, удаляющих из спектра сигнала частотные компоненты в окрестности основной частоты помехи и ее гармоник. Первое решение является более простым, но при применении узкополосного ФНЧ возникает заметное сглаживание зубцов ЭКГ, что в дальнейшем может затруднить клиническую интерпретацию сигнала, поэтому в данном случае целесообразнее применить второе решение.

В рассматриваемом случае массив дискретных отсчетов АЧХ фильтра $\{A[k]\}$ задается в соответствии с простым принципом (65): в окрестности частот $(2m-1)k_{f_1}$, где m – целое, должны быть обнулены значения спектральных компонентов из $\{X[k]\}$, для этих k задается $A[k]=0$, остальные компоненты останутся без изменений ($A[k]=1$). Ширина полосы подавления может быть подобрана экспериментально, исходя из свойств выходного сигнала фильтра; в данном примере для всех полос выбрано $\Delta f=20$ Гц.

График модифицированного амплитудного спектра $\{|Y[k]|\}$, полученного на втором этапе алгоритма фильтрации, приведен на рисунке 21.

И, наконец, на рисунке 22 представлен график рассчитанного выходного сигнала фильтра.

Видно, что остаточные неподавленные компоненты помехи имеют очень малую величину и имеют структуру, не характерную для компонентов ЭКГ. Если же для подавления компонентов помехи использовать узкополосный ФНЧ, то наблюдаемые на рисунке 22 “зазубрины” неподавленных помех дополнительно сглаживаются и местами становятся неотличимыми от низкоамплитудных зубцов электрокардиосигнала.

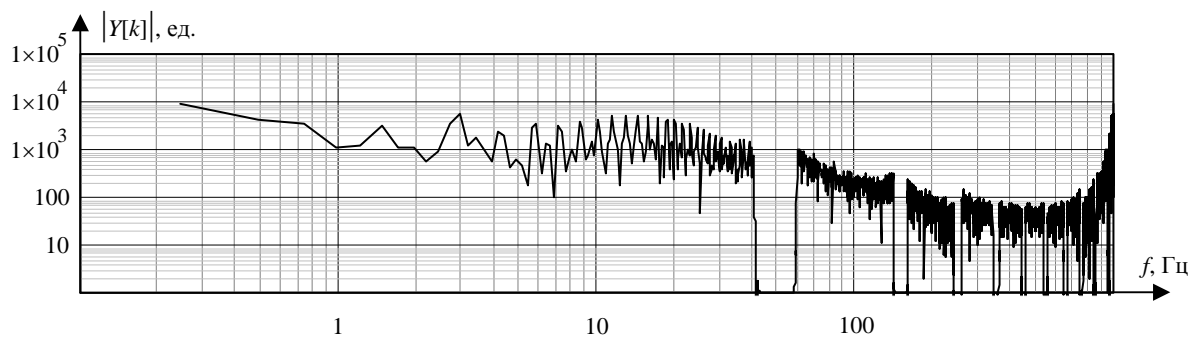


Рисунок 21 – График амплитудного спектра после модификации.

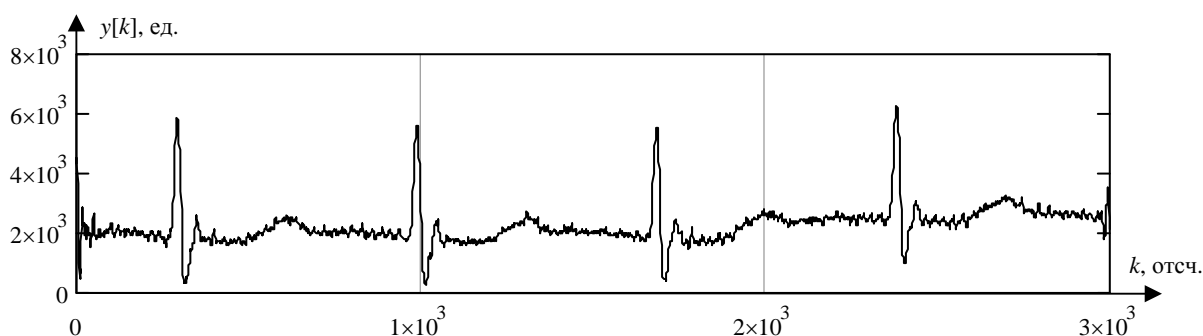


Рисунок 22 – Выходной сигнал фильтра $\{y[k]\}$ (после фильтрации добавлена постоянная составляющая исходного сигнала).

На краях выборки выходного сигнала фильтра $\{y[k]\}$ наблюдаются более существенные искажения – краевой эффект, – это известный недостаток метода Фурье-фильтрации. Эти искажения не удастся нивелировать за счет удлинения исходной выборки $\{x[k]\}$ фиктивными отсчетами данных, однако, к счастью, длина искажаемых фрагментов сигнала (здесь – порядка 100 дискретных отсчетов) определяется только свойствами примененного фильтра и не зависит от объема выборки N . При обработке очень длинных записей сигналов отмеченные искажения затрагивают лишь исчезающе малые части на краях записи и на решение практических задач влияния не оказывают.

6. БЫСТРЫЕ АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЦИФРОВОЙ СВЕРТКИ

Одним из факторов, затрудняющих применение методов нерекурсивной фильтрации на практике, является большой объем вычислений при реализации фильтра во временной области. Разностное уравнение нерекурсивного фильтра

$$y[k] = \sum_{v=0}^{q-1} c_v x[k-v]$$

имеет формат, соответствующий т. н. линейной цифровой свертке последовательностей $\{c_v\}$ (в данном случае конечной, содержащей q элементов) и $\{x[k]\}$ (может быть конечной, содержащей N отсчетов, если осуществляется обработка записанных цифровых сигналов, или бесконечной, если продолжают поступать новые отсчеты входного сигнала $x[k]$). Для ускорения вычисления цифровой свертки имеется множество подходов [5, 9, 10], из которых наиболее удобным для построения вычислительных алгоритмов в общем случае является метод на основе БПФ.

Метод ускорения вычислений на основе БПФ основан на том, что свертке последовательностей во временной области соответствует произведение спектров этих последовательностей в частотной области. При фильтрации последовательности $\{x[k]\}$ фиксированной длины N отсчетов алгоритм расчета полного выходного сигнала фильтра $y[k]$, $k=0,1,\dots,N-1$ представляет собой последовательность из 5 этапов:

1) дополнение массива коэффициентов $\{c_v\}$ разностного уравнения нерекурсивного фильтра нулями до длины N :

$$w_v = \begin{cases} c_v, & v = 0, 1, \dots, q-1; \\ 0, & v = q, q+1, \dots, N-1; \end{cases}$$

2) вычисление БПФ от последовательности $\{w_v\}$:

$$W[k] = F\{w_v\}, \quad k=0, 1, \dots, N-1;$$

3) вычисление БПФ от записи входного сигнала $\{x[k]\}$:

$$X[k]=F\{x[k]\}, k=0,1,...,N-1;$$

4) поэлементное умножение последовательностей $\{W[k]\}$ и $\{X[k]\}$:

$$Y[k]=W[k]X[k], k=0,1,...,N-1;$$

5) вычисление обратного БПФ от последовательности, полученной на предыдущем шаге алгоритма:

$$y[k]=F^{-1}\{Y[k]\}, k=0,1,...,N-1.$$

Нетрудно видеть, что метод очень похож на метод Фурье-фильтрации, отличие заключается только в способе задания массива частотной передаточной функции $\{W[k]\}$. Уместно также заметить, что при таком методе вычисляется не линейная, а круговая свертка [4, 5, 9], поэтому при начальных и конечных индексах ($0 \leq k < q$ и $N-q < k < N$) результат $y[k]$ окажется искаженным, но при обычно выполняющемся условии $N \gg q$ этими краевыми эффектами можно пренебречь.

При $N=2^m$, где m — целое число (при необходимости обрабатываемую последовательность сигнала $\{x[k]\}$ в начале и в конце дополняют фиктивными отсчетами), алгоритмы прямого и обратного БПФ требуют по $M \log_2 N$ операций сложений комплексных чисел и по $\frac{N}{2} \log_2 N$ комплексных умножений каждый. Учитывая, что одно сложение комплексных чисел требует двух сложений вещественных чисел, а одно комплексное умножение — четырех умножений и двух сложений вещественных чисел, нетрудно убедиться, что для вычисления одного БПФ потребуется $5M \log_2 N$ вычислительных операций с вещественными числами. Таким образом, если не учитывать вычисления на этапе однократно выполняемой инициализации фильтра (шаги 1 и 2), то расчет цифровой свертки рассмотренным алгоритмом потребует $N(6+10 \log_2 N)$ вычислительных операций.

Сравнивая это количество с $2qN$ вычислительных операций, необходимых для вычисления всех N отсчетов выходного сигнала нерекурсивного фильтра по уравнению (3), нетрудно получить условие, при котором целесообразно использование приведенного алгоритма для реализации нерекурсивной фильтрации записанной выборки фиксированной длины N отсчетов:

$$6 + 10 \log_2 N < 2q. \quad (75)$$

Дополнительно сократить количество вычислительных операций при расчете цифровой свертки удастся при переходе к алгоритмам вычисления секционированных сверток [9]: перекрытия с суммированием или перекрытия с накоплением, которые в плане потенциальных возможностей по ускорению вычислительного процесса эквивалентны. Кроме того, эти алгоритмы могут применяться как при обработке записанных сигналов, так и сигналов бесконечной длины, вычисляя свертку по мере поступления новых отсчетов входного сигнала.

На рисунке 23 приведена блок-схема алгоритма вычисления линейной цифровой свертки, соответствующей уравнению нерекурсивной фильтрации, на основе метода перекрытия с накоплением. При использовании данного метода нет необходимости в дополнении нулями записи входного сигнала $\{x[k]\}$, а массив коэффициентов фильтра $\{c_v\}$ дополняется нулями с q элементов до $q_2 = 2^m$ (m – целое число) элементов:

$$w_v = \begin{cases} c_v, & v = 0, 1, \dots, q-1; \\ 0, & v = q, q+1, \dots, q_2-1, \end{cases}$$

затем от полученного массива $\{w_v\}$ необходимо вычислить БПФ и сохранить в памяти вычислительного устройства полученный массив спектральных отсчетов $\{W[v]\}$. Далее цифровая свертка вычисляется постепенно, посредством обработки последовательных фрагментов (секций) входного сигнала $x[k]$ длиной $N_\Delta = q_2 - q$ дискретных отсчетов с использованием алгоритмов прямого и обратного БПФ.

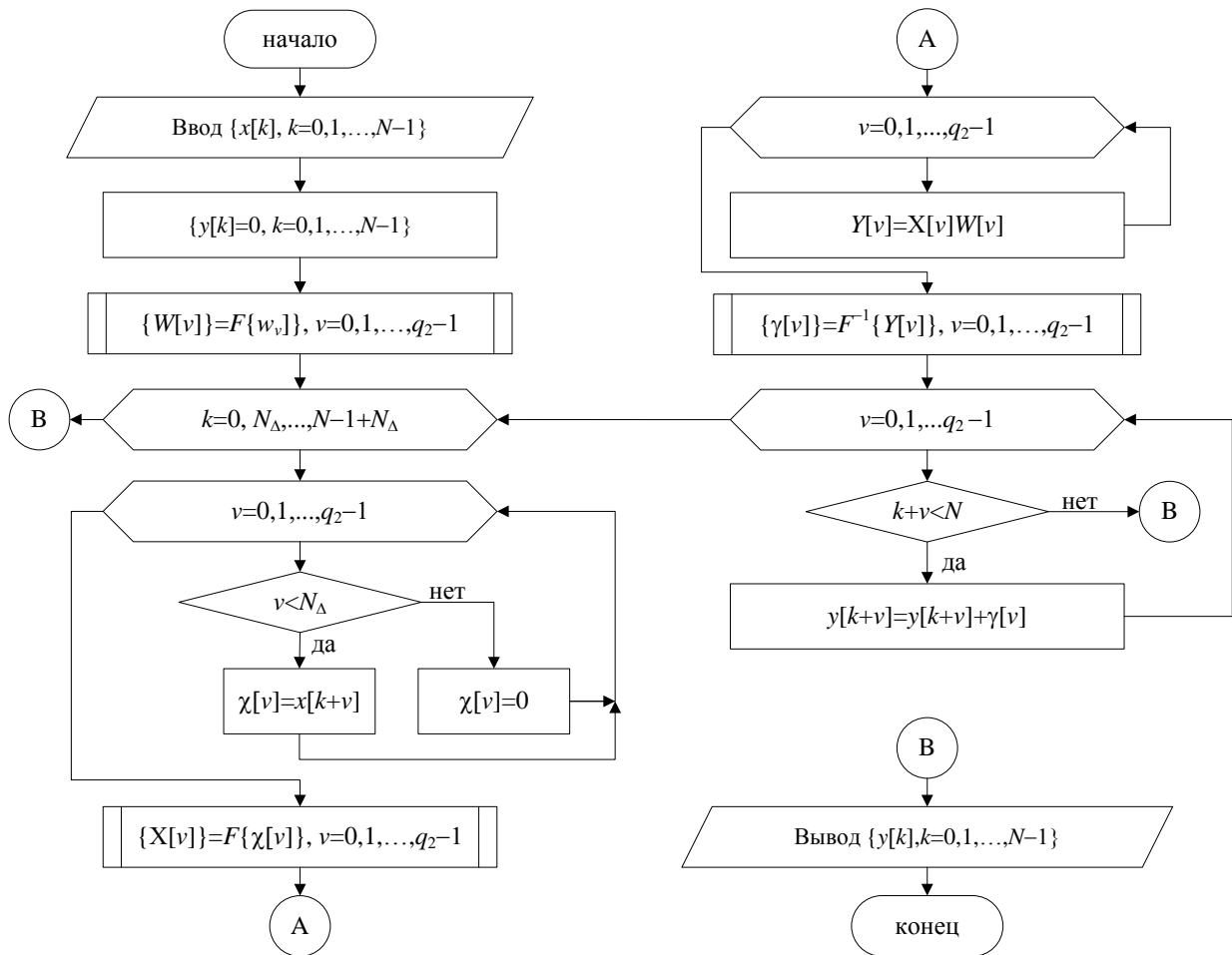


Рисунок 23 – Блок-схема алгоритма вычисления секционированной цифровой свертки по методу перекрытия с накоплением.

Анализ блок-схемы алгоритма позволяет оценить общее количество операций с вещественными числами, требуемых для вычисления полного выходного сигнала нерекурсивного фильтра, $y[k]$, $k=0,1,...,N-1$ (не считая начальной инициализации при вычислении массива $\{W[v]\}$) величиной:

$$K_y = \frac{N}{q_2 - q} \cdot (10q_2 \log_2 q_2 + 6q_2). \quad (76)$$

Выражение (76) сложно для аналитического исследования на экстремум, поэтому оценивание выигрыша в быстродействии расчета цифровой свертки при различных q_2 лучше производить с помощью численных расчетов при заданных исходных данных. Для примера на рисунке 24 показан график зависимости

величины K_y от значения q_2 при $N=3 \cdot 10^6$ и $q=10^3$. Из рисунка видно, что минимум количества вычислительных операций достигается при $q_2=2^{13}$, причем выбор q_2 в плане минимизации вычислительной сложности алгоритма вычисления цифровой свертки не слишком критичен. При оптимальном q_2 величина $K_y=4.65 \cdot 10^8$ оказывается в полтора раза меньше, чем $N(6+10\log_2 N) \approx 6.6 \cdot 10^8$ и на порядок меньше величины $2qN=6 \cdot 10^9$, необходимой для прямого расчета по уравнению цифровой свертки по временной области.

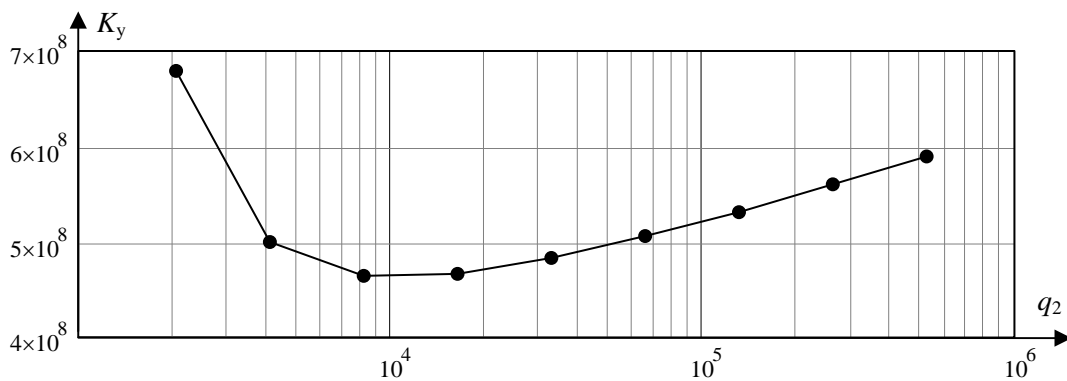


Рисунок 24 – Зависимость количества вычислительных операций для вычисления цифровой свертки от q_2 , построенная по формуле (82) при $q=10^3$, $N=3 \cdot 10^6$.

Алгоритм, блок-схема которого приведена на рисунке 23, может быть использован и для фильтрации бесконечных последовательностей в реальном масштабе времени. Начнем с того, что при расчетах по формуле (3) вычислительное устройство цифрового фильтра должно выполнить $2q$ операций за время, равное одному периоду дискретизации T_Δ . При выполнении вычислений по ускоренному алгоритму вычисления свертки, микропроцессор должен вычислить свертку для обрабатываемой секции (этому соответствует один проход цикла по переменной k) за время, пока накапливаются отсчеты для новой секции $\{\chi[v]\}, v=0,1,\dots,q_2-1$ – это $N_\Delta T_\Delta=(q_2-q)T_\Delta$ сек. За это время необходимо выполнить $6q_2+10q_2\log_2 q_2$ вычислительных операций. Критерием вычислительной сложности алгоритма можно принять эквивалентное количество вычислительных операций, которое необходимо будет выполнить за 1 период дискретизации, т. е.

$$K_1 = \frac{(10q_2 \log_2 q_2 + 6q_2)}{q_2 - q},$$

причем нетрудно заметить, что K_1 отличается от K_y лишь постоянным масштабным множителем, а, следовательно, оптимум для q_2 достигается в той же точке.

Целесообразность использования алгоритма ускоренных вычислений в программе для микропроцессорного устройства можно оценить, вычисляя отношение $2q/K_{1\min}$, – вариант реализации ускоренного алгоритма имеет смысл рассматривать только тогда, когда отношение будет существенно больше единицы. Используя численные методы расчета, можно показать, что $2q/K_{1\min}$ становится больше единицы при $q > 54$, однако, еще необходимо учесть, что вычисление БПФ требует дополнительной памяти для хранения массивов поворачивающих множителей БПФ, промежуточных данных расчетов и получаемых результатов, и при этом появляются дополнительные временные затраты на пересылку данных между ячейками памяти, которые, хотя и выполняются быстрее операций умножения и сложения, но вносят свой вклад в общую сложность вычислений по ускоренному алгоритму. Исходя из этих соображений, можно рекомендовать ускоренный метод вычисления цифровой свертки только для реализации нерекурсивных фильтров сравнительно высоких порядков (например, при $q=300$ имеем $2q/K_{1\min}=4.4$; при $q=10^3$ имеем $2q/K_{1\min}=12.9$), при которых выигрыш в быстродействии не вызывает сомнений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В учебном пособии рассмотрены основные методы расчета цифровых фильтров частотной селекции, которые применяются для решения разнообразных задач цифровой обработки сигналов. При изложении авторы постарались максимально упростить теоретическую часть, избавляя читателей от традиционного для монографий и учебников по рассматриваемой тематике нагромождения формул, которые часто затрудняют восприятие материала. Основной акцент в изложении материала был сделан на теоретические положения и практические рекомендации, выполнение которых позволит понять суть методов и избежать ошибок при расчете цифровых фильтров. Для каждого метода расчета цифрового фильтра приведен пример разработки вычислительного алгоритма, пригодного для практической реализации, с пояснениями, достаточными для реализации метода при других исходных данных.

В учебном пособии не рассматривались линейные алгоритмы цифровой фильтрации, предназначенные для решения задач выделения сигналов, искаженных флуктуационными помехами (фильтры сглаживания), поскольку применяемая для их расчета методология во многих случаях не предполагает задание требований к их частотным характеристикам.

ЛИТЕРАТУРА

1. Линейные цифровые фильтры и методы их реализации. / Верешкин А.Е., Катковник В.Я. М.: Сов. радио, 1973. 152 с.
2. Цифровые фильтры. / Гольденберг Л.М., Левчук Ю.П., Поляк М.Н. М.: Связь, 1974. 160 с.
3. Рабинер Л., Гоулд Б. Теория и применение цифровой обработки сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 1978. 848 с.
4. Цифровые фильтры и их применение: Пер. с англ. / В. Каппелини, А.Дж. Константиnidис, П. Эмилиани. М.: Энергоатомиздат, 1983. 360 с.
5. Цифровая обработка сигналов: Справочник. / Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.
6. Рекурсивные фильтры на микропроцессорах. / А.Г. Остапенко, А.Б. Сушков, В.В. Бутенко и др. / Под ред. А.Г. Остапенко. М.: Радио и связь, 1988. 128 с.
7. Глинченко А.С. Цифровая обработка сигналов. В 2-х ч. Ч. 1. Красноярск, Изд-во КГТУ, 2001. 199 с.
8. Шрюфер Э. Обработка сигналов: цифровая обработка дискретизированных сигналов: Учебник. / Под ред. проф. В.П. Бабака. К.: Либідь, 1995. 320 с.
9. Айфичер Э.С., Джервис Б.У. Цифровая обработка сигналов: Практический подход, 2-е изд. Пер. с англ. М.: Изд. дом “Вильямс”, 2004. 992 с.
10. Основы цифровой обработки сигналов: Курс лекций. / Солонина А.И. и др. Изд. 2-е, испр. и перераб. СПб: БХВ-Петербург, 2005. 768 с.
11. Жаринов О.О., Жаринов И.О., Кулин А.Н. Расчет активных фильтров: Учеб. пособие. СПб: ГУ ИТМО, 2008. 48 с.
12. Лайонс Р. Цифровая обработка сигналов. Пер. с англ. М.: ООО Бином-Пресс, 2015. 656 с.
13. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. Пер. с англ. / Под ред. А.М. Трахтмана, М.: Сов. радио, 1980. 224 с.
14. Коберниченко В. Г. Расчет и проектирование цифровых фильтров: учебно-методическое пособие. Екатеринбург, Изд-во Урал. ун-та, 2013. 64 с.

**Значения коэффициентов в переходной полосе при расчете цифровых
фильтров методом частотной выборки**

Таблица П1* [12] (начало)

BW	L_n , дБ	T_1	T_2	T_3
$q=16$				
1	-112.6	0.64272445	0.15442399	0.00880089
2	-95.9	0.70487291	0.22419597	0.01947599
3	-100.7	0.70063089	0.21872748	0.01757096
4	-115.9	0.68531929	0.19831357	0.01270197
$q=24$				
1	-103.8	0.65990020	0.17315143	0.01189889
2	-101.8	0.67718249	0.19461557	0.01429673
3	-95.5	0.69609682	0.21773826	0.01860944
4	-104.1	0.66830223	0.18959572	0.01339907
$q=32$				
1	-99.6	0.66421140	0.17798254	0.01278046
2	-98.5	0.68804961	0.20639825	0.01646338
4	-87.4	0.73378289	0.26142233	0.02762054
6	-100.5	0.67913658	0.20169658	0.01554611
8	-105.3	0.65936975	0.18380663	0.01270743
$q=48$				
1	-93.8	0.68361144	0.20102370	0.01735969
2	-96.0	0.69534463	0.21480253	0.01812435
4	-87.2	0.73314865	0.26098449	0.02762804
6	-86.4	0.73802064	0.26732823	0.02900775
8	-95.0	0.69703503	0.22114250	0.01909109
10	-90.0	0.71746809	0.24474881	0.02420421

Таблица П1 (продолжение)

BW	L_p , дБ*	T_1	T_2	T_3
$q=64$				
1	−96.6	0.67620503	0.19208214	0.01551621
2	−94.9	0.69693984	0.21653685	0.01842226
3	−89.7	0.72079468	0.24569738	0.02432222
4	−92.3	0.70681410	0.22927121	0.02042893
8	−91.4	0.70957119	0.23498487	0.02215407
12	−93.8	0.70260520	0.22772953	0.02059288
16	−85.3	0.74439511	0.27543213	0.03085705
$q=96$				
1	−98.5	0.67209330	0.18712559	0.01449609
2	−92.9	0.70471821	0.22591053	0.02048075
3	−93.0	0.70905096	0.23165702	0.02121954
4	−88.7	0.72625477	0.25269331	0.02574193
8	−90.8	0.71369108	0.23929089	0.02281527
12	−90.8	0.71110318	0.23715671	0.02248568
16	−85.2	0.74356072	0.27478153	0.03080406
20	−85.8	0.74022029	0.27104418	0.02999046
$q=128$				
1	−98.3	0.67221636	0.18725564	0.01451885
2	−94.4	0.70015724	0.22042278	0.01929075
3	−92.6	0.70981704	0.23257905	0.02143209
5	−90.6	0.71933148	0.24480839	0.02391897
8	−89.8	0.72190475	0.24869701	0.02481883
16	−88.5	0.72569265	0.25405918	0.02615712
24	−87.4	0.73019420	0.25964746	0.02748522

Таблица П1 (окончание)

BW	$L_{\text{п}}$, дБ*	T_1	T_2	T_3
$q=192$				
1	−98.1	0.67216994	0.18716030	0.01447431
2	−94.3	0.70064573	0.22097713	0.01939796
3	−92.6	0.71046628	0.23329177	0.02156244
5	−90.6	0.71933299	0.24477507	0.02389930
8	−89.8	0.72185688	0.24857861	0.02477626
16	−88.5	0.72617255	0.25450260	0.02622728
24	−87.7	0.72957884	0.25880678	0.02726692
32	−90.9	0.71321929	0.24041037	0.02328586
40	−91.2	0.71133926	0.23853571	0.02293979
48	−91.4	0.70862489	0.23572260	0.02240670
$q=224$				
1	−98.2	0.67256687	0.187671169	0.01459779
2	−94.2	0.70077254	0.22112728	0.01942992
3	−90.4	0.70264770	0.22304697	0.01885735
5	−91.1	0.71677647	0.24176238	0.02323770
8	−89.9	0.72168089	0.24837531	0.02473386
16	−90.3	0.71805244	0.24514888	0.02416230
32	−90.6	0.71429115	0.24150812	0.02348850
48	−91.1	0.71133746	0.23857357	0.02295657
$q=256$				
1	−95.7	0.67780153	0.19398356	0.01590119
2	−94.0	0.70138048	0.22187281	0.01959708
3	−90.3	0.70235664	0.22265441	0.01875372
5	−91.0	0.71654134	0.24139758	0.02311255
8	−89.9	0.72167623	0.24835995	0.02472548
16	−90.2	0.71841628	0.24555225	0.02424786
32	−90.5	0.71523646	0.24257287	0.02372755
48	−90.8	0.71282545	0.24023030	0.02331467

*Примечания: $L_{\text{п}}$ представляет собой максимальный уровень боковых лепестков АЧХ фильтра в полосе задерживания; T_1 – отсчет АЧХ фильтра, ближайший к полосе пропускания, T_3 – отсчет, ближайший к полосе задерживания.