

# BST vs AVL vs RBT

Matteo Orlandi

March 1, 2026

## 1 Introduzione

### 1.1 Caso di studio

In questa relazione verranno analizzate e confrontate le prestazioni di tre diverse strutture dati utilizzate per la gestione di insiemi dinamici. Le strutture che verranno analizzate sono: gli **Alberi Binari di Ricerca (BST)**, gli alberi **AVL** e gli **Alberi Rosso-Neri (RBT)**. Un obiettivo fondamentale di ogni struttura dati è la gestione efficiente dei dati che ospiterà. Sebbene i BST offrano una struttura semplice e intuitiva per l'inserimento e la ricerca, le prestazioni ottenute dipendono fortemente dall'ordine dei dati in ingresso.

L'esperimento mira a verificare sperimentalmente le complessità temporali delle operazioni di **inserimento** e di **ricerca**, mettendo a confronto le tre strutture dati negli scenari del caso peggiore e del caso medio.

### 1.2 Specifiche hardware

Per svolgere i test è stato utilizzato come ambiente di sviluppo **PyCharm 2025.3.2.1**, per realizzare la relazione è stato utilizzato l'editor online di **Overleaf**. Le caratteristiche hardware della macchina utilizzata per svolgere i test sono:

- CPU: AMD Ryzen 7 3700U with Radeon Vega Mobile Gfx (2.30 GHz)
- RAM: 8GB DDR4 2400 MHz
- SSD: SSD NVMe 512GB
- SO: Windows 11 Home

## 2 Teoria

Un albero è una struttura dati composta da un insieme di **nodi** e **archi**. Ogni nodo rappresenta un elemento dell'albero ed è composto da una chiave, che lo identifica univocamente, e da più puntatori, che rappresentano gli archi e offrono un collegamento verso altri nodi. Un nodo è **figlio** se collegato direttamente a un altro di un livello superiore, detto **padre**.

Il nodo principale, da cui ha origine l'intera struttura, prende il nome di **radice**. Ogni nodo che non ha figli viene detto **foglia**. Si dice **cammino** l'insieme di nodi e archi che, partendo da un nodo, devono essere attraversati per raggiungerne un altro. La lunghezza del cammino più lungo rappresenta l'**altezza** dell'albero e viene misurata contando il numero di nodi che si incontrano lungo quel cammino (parte dalla radice e giunge a una foglia).

### 2.1 Binary Search Tree (BST)

Un Albero Binario di Ricerca è un tipo particolare di albero specializzato per la ricerca di valori. Ogni nodo avrà un puntatore sinistro che permette il collegamento a un **sottoalbero** contenente solo valori minori e uno destro che permette il collegamento a un sottoalbero contenente solo valori maggiori.

Le operazioni di base richiedono un tempo proporzionale all'altezza  $h$  dell'albero, ovvero  $O(h)$ .

- **Caso Medio:** Se le chiavi vengono inserite in ordine casuale, l'altezza attesa dell'albero è  $O(\log n)$ , in quanto la struttura tende a bilanciarsi autonomamente.
- **Caso Peggioro:** Se le chiavi vengono inserite in ordine crescente o decrescente, l'albero degenera in una lista concatenata di altezza  $h = n - 1$ . In questo scenario, le operazioni raggiungono una complessità pari a  $O(n)$ , rendendo la struttura inefficiente.

## 2.2 Alberi AVL

Gli alberi AVL sono alberi binari di ricerca **strettamente bilanciati in altezza**. Un albero AVL è bilanciato se, per ogni nodo  $x$ , le altezze dei sottoalberi sinistro e destro differiscono al massimo di 1. Per fare ciò, viene introdotto il **Fattore di Bilanciamento**  $BF(x)$ , definito come:

$$BF(x) = h(x.left) - h(x.right) \quad (1)$$

con  $h$  che indica l'altezza di un nodo. Perché un albero sia AVL, deve valere che  $BF(x) \in \{-1, 0, 1\}$  per ogni nodo. Grazie a questo vincolo molto stringente, gli alberi AVL sfruttano al massimo l'ampiezza, riducendo al minimo i puntatori inutilizzati. Nonostante abbiano un costo di inserimento non molto ottimizzato a causa dei frequenti controlli e delle rotazioni, la perfetta organizzazione dei dati in memoria rende questa tipologia di albero ottimale per la ricerca.

## 2.3 Red-Black Tree (RBT)

Gli alberi Rosso-Neri hanno un funzionamento simile a quello degli AVL, ma il bilanciamento viene effettuato secondo limiti meno restrittivi. Ogni nodo contiene un bit supplementare di informazione che indica il colore (rosso o nero). Un albero Rosso-Nero, oltre a soddisfare le caratteristiche di un BST, deve soddisfare le seguenti proprietà:

1. La radice è nera.
2. Ogni nodo è rosso o nero.
3. Ogni foglia (NIL) è nera.
4. Se un nodo è rosso, entrambi i suoi figli sono neri (non possono esserci due nodi rossi consecutivi).
5. Per ogni nodo, tutti i cammini semplici che scendono verso le foglie discendenti contengono lo stesso numero di nodi neri.

In questo modo abbiamo la garanzia che il cammino più lungo non sia mai maggiore del doppio del cammino più breve. L'altezza dell'albero è perciò limitata a  $2\lg(n + 1)$ , assicurando che il limite asintotico delle operazioni rimanga logaritmico anche nel caso peggiore. Il limite è pari a  $O(\log n)$ .

### 3 Documentazione del codice

#### 3.1 Schema delle classi

Le classi create sono per l'implementazione delle strutture dati e per svolgere i test. Il salvataggio dei dati e la generazione dei grafici sono stati effettuati tramite metodi *standalone*, in quanto non è necessario salvarne uno stato. La classe nodo è unica per tutte le tipologie di albero e include tutti gli attributi necessari al corretto funzionamento delle strutture. Si è preferito utilizzare una sola tipologia di nodo in modo da semplificare la progettazione. Per questioni di lettura, il colore dei nodi degli RBT è indicato da una stringa e non da una variabile booleana.

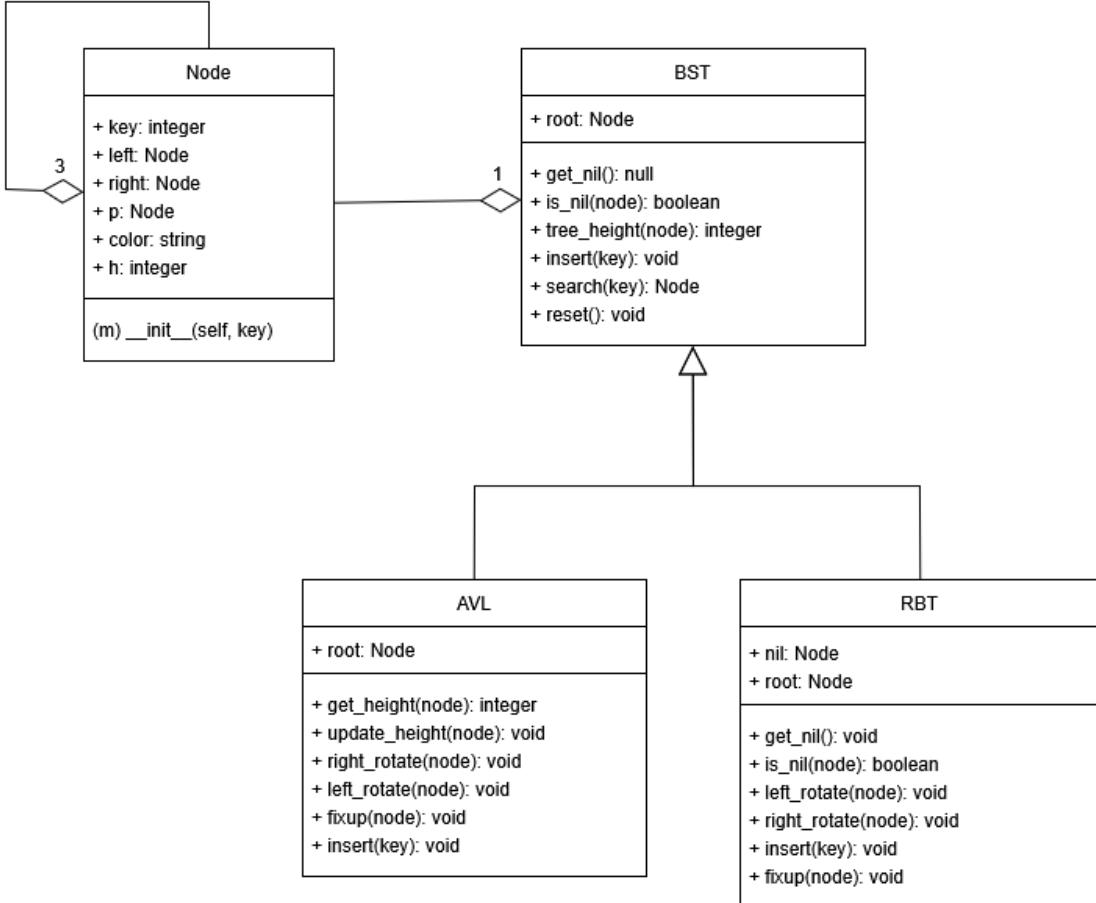


Figure 1: UML delle classi che implementano le strutture dati

Il cuore del programma è rappresentato dalle classi presenti nell'immagine. Permettono l'utilizzo delle strutture dati e implementano metodi mirati alla raccolta dei dati per i test.

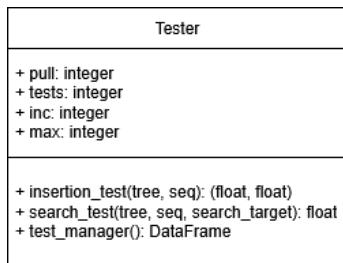


Figure 2: UML della classe che gestisce i test

Questa classe è stata implementata in modo da gestire nel miglior modo possibile i test da effettuare. Questa classe si occupa di cronometrare il tempo che impiega ciascun albero per portare a termine le operazioni di inserimento e ricerca. Ogni volta che viene lanciato un test, questo viene

ripetuto più volte, così da ottenere un risultato che sia il più possibile pulito ed indipendente dalle caratteristiche della macchina.

### 3.2 Metodi implementativi

- **Node:** è la classe che definisce tutte le informazioni che ogni nodo generico può contenere.
- **BST:** Binary Search Tree. È la struttura dati più semplice e intuitiva, realizzata in modo più generale possibile così da poterla estendere per le altre due strutture dati.
  - `get_nil()`: metodo ausiliario che, in base al tipo di albero che lo chiama, restituisce il valore nullo appropriato (`None` o **nodo sentinella**);
  - `is_nil(node)`: metodo ausiliario booleano che indica se il puntatore al nodo che viene passato è nullo oppure no, secondo il valore appropriato;
  - `tree_height(node)`: restituisce l'altezza di `node` calcolandola ex-novo a partire dalle foglie. In questo modo, anche se un albero non aggiorna il campo dedicato durante il suo utilizzo, permette comunque di ottenere un valore;
  - `insert(key)`: istanzia un nuovo nodo e lo inserisce nell'albero;
  - `search(key)`: cerca e ritorna il nodo la cui chiave ha valore uguale a `key`. Se il nodo non viene trovato, viene restituito il valore nullo;
  - `reset()`: svuota un albero annullando la radice. Sfruttando il metodo ausiliario `get_nil()`, è possibile renderlo indipendente dal tipo di albero che viene utilizzato;
- **AVL:** estende il BST, ridefinendo i metodi che gestiscono l'inserimento e le rotazioni, così da soddisfare le sue proprietà.
  - `get_height(node)`: restituisce l'altezza di un nodo;
  - `update_height(node)`: aggiorna l'altezza di un nodo calcolandola sfruttando quella dei suoi figli;
  - `left_rotate(node)`: gestisce la rotazione in senso antiorario. Il nodo passato rappresenta il perno su cui verrà eseguita la rotazione;
  - `right_rotate(node)`: gestisce la rotazione in senso orario;
  - `fixup(node)`: è chiamato dal metodo `insert()` e si occupa di aggiornare le altezze dei nodi dopo che ne è stato aggiunto uno nuovo.
  - `insert(key)`: metodo pubblico che istanzia un nuovo nodo e gestisce l'inserimento;
- **RBTree:** estende il BST, ridefinendo i metodi che gestiscono l'inserimento e le rotazioni, così da soddisfare le sue proprietà.
  - `get_nil()`: ridefinisce il metodo per sfruttare il nodo sentinella;
  - `is_nil(node)`: ridefinisce il metodo per sfruttare il nodo sentinella;
  - `left_rotate(node)`: gestisce la rotazione in senso antiorario;
  - `right_rotate(node)`: gestisce la rotazione in senso orario;
  - `insert(key)`: istanzia un nuovo nodo e lo inserisce nella struttura sfruttando la modalità iterativa;
  - `fixup(node)`: si occupa di riorganizzare l'albero effettuando le rotazioni e ridefinendo il colore dei nodi.
- **Tester:** classe che testa le strutture dati.
  - `insertion_test(tree, seq)`: dati un albero e una sequenza numerica, inserisce uno ad uno tutti gli elementi cronometrando il tempo impiegato;
  - `search_test(tree, seq, search_target)`: inserisce gli elementi di `seq` nella struttura dati, dopodiché cronometra quanto tempo viene impiegato a cercare tutti i valori contenuti in `search_target`;
  - `test_manager()`: gestisce tutti i test, incrementando le dimensioni dei vettori in ingresso e inserendo tutti i risultati ricavati in un DataFrame.

## 4 Esperimento e risultati attesi

Tramite questo esperimento si vogliono verificare le complessità asintotiche esposte nella sezione teorica, misurando il tempo di esecuzione  $T(n)$  al variare del numero di nodi  $n$ . L'esperimento è strutturato come segue.

Inserimento e ricerca sono indipendenti. Vengono effettuati quindi in tempi diversi e con ingressi diversi (tranne per il caso peggiore, poiché questo è comune a entrambi). Ciascun test viene effettuato aumentando, ad ogni iterazione, il numero di elementi da inserire o analizzare. Il numero totale delle iterazioni, insieme al "passo incrementale", indicano il numero di punti che comporrà ciascun grafico. Questo viene stabilito a priori impostando il valore dei parametri dedicati.

Ogni iterazione restituirà il tempo di un singolo esperimento. Per renderlo il più indipendente possibile dalle circostanze che influenzano la macchina, ogni iterazione viene ripetuta più volte, senza mai cambiare i dati in ingresso e replicando le condizioni iniziali. Ogni gruppo di tempi ottenuti grazie allo stesso input viene rielaborato, sfruttando l'operatore della mediana, e ottenendo quindi un unico valore che sia il più possibile pulito.

Una volta finite le iterazioni di entrambe le tipologie, i risultati vengono salvati in un apposito foglio di calcolo, così da poter essere utilizzati per realizzare i grafici.

### 4.1 Scenari di Test e Complessità Attesa

Vengono definiti due scenari per confrontare le caratteristiche delle diverse strutture dati:

#### Scenario A: Sequenza Ordinata (Caso Peggio)

Vengono inseriti elementi in ordine strettamente crescente  $(0, 1, \dots, n)$ .

- **BST:** Data l'assenza di controlli, l'albero dovrebbe degenerare, raggiungendo un'altezza pari al numero di nodi inseriti  $h = n$ . Il risultato asintotico, sia per la costruzione che per la ricerca, sarà  $O(n)$ , mentre l'altezza sarà  $\theta(n)$
- **RBT e AVL:** Le strutture dovrebbero bilanciarsi grazie alle rotazioni, mantenendo un'altezza logaritmica e quindi prestazioni asintotiche pari a  $O(\log n)$ . Questo permetterà di mantenere un tempo logaritmico sia per l'inserimento che per la ricerca. I tempi per le due operazioni saranno estremamente inferiori rispetto a un comune BST.

#### Scenario B: Sequenza Casuale (Caso Medio)

Vengono inseriti elementi casuali. Il BST dovrebbe quindi auto bilanciarsi nel lungo periodo. Il risultato atteso è che tutte le strutture (BST, AVL e RBT) mantengano un'altezza logaritmica, con prestazioni comparabili  $O(\log n)$ . Per quanto riguarda l'inserimento, i tempi per BST potrebbero essere anche più bassi, in quanto l'assenza di controlli e rotazioni dovrebbe compensare il fatto che la struttura non sia perfettamente bilanciata. Nel caso della ricerca, i tempi saranno a favore dell'albero che è bilanciato meglio. Da AVL mi aspetto quindi i tempi più bassi, seguito da RBT e, più distaccato, BST.

## 4.2 Tabella riassuntiva

La Tabella che segue riassume i risultati asintotici che dovranno essere verificati tramite i grafici generati sulla base dei test.

Struttura	Operazione	Caso Peggiore (Ordinato)	Caso Medio (Casuale)
BST	Inserimento	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
	Ricerca	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
	Altezza	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
AVL	Inserimento	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
	Ricerca	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
	Altezza	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
RBT	Inserimento	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
	Ricerca	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$
	Altezza	$\mathcal{O}(\log n)$	$\mathcal{O}(\log n)$

In generale, gli AVL hanno una struttura rigida da realizzare, ma ottimizzano lo spazio. Gli RBT, invece, sono più flessibili per quanto riguarda i controlli, ma l'organizzazione dei dati in memoria sarà peggiore. Nonostante i tempi effettivi siano molto simili, mi aspetto che gli AVL siano migliori per la ricerca, mentre gli RBT per l'inserimento.

## 5 Risultati esperimento

### 5.1 Inserimento

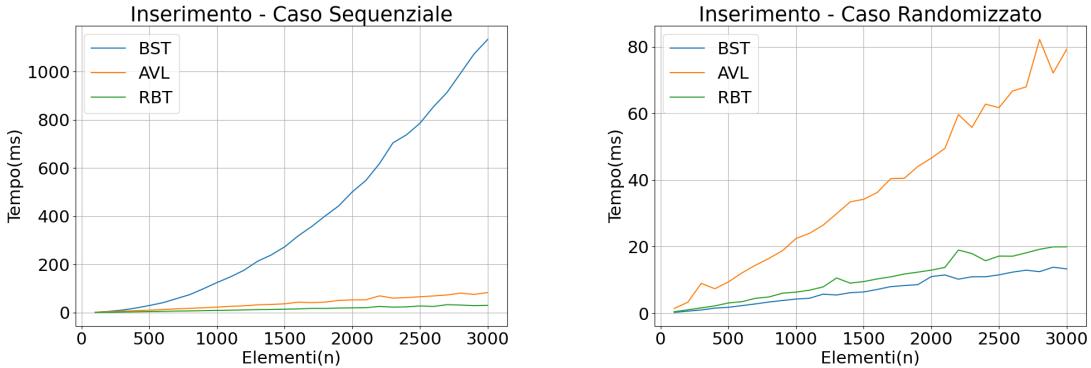


Figure 3: Tempi di inserimento di N elementi. Nel caso a gli elementi sono ordinati, nel caso b gli elementi sono casuali.

Come ipotizzato in partenza, il caso peggiore ha fatto degenerare il BST, portando a tempi sempre peggiori con l'aumentare degli elementi ospitati nella struttura. Nel caso generale, invece, l'assenza di controlli ha giocato a suo favore, portando a tempi di inserimento più bassi rispetto alle altre due tipologie.

### 5.2 Altezza

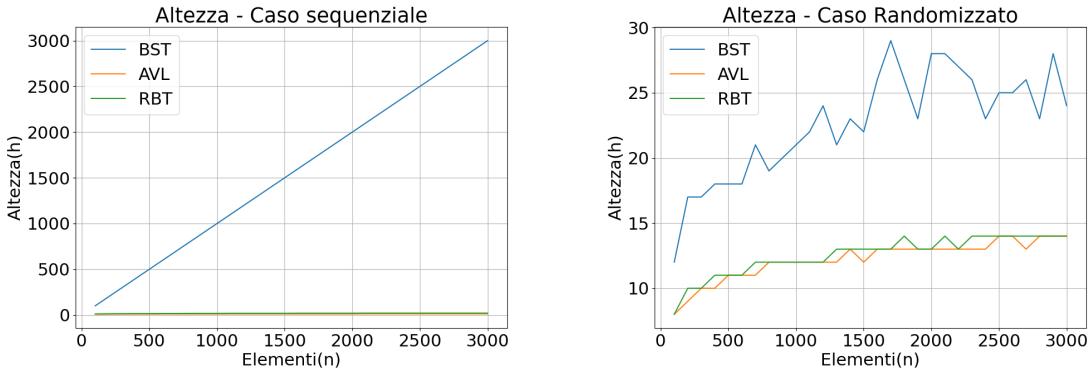


Figure 4: Confronto altezze per gli inserimenti. Nel caso a gli elementi sono ordinati, nel caso b gli elementi sono casuali.

La differenza di organizzazione dei dati in memoria è molto evidente. Si notano le carenze di BST, specialmente nel caso peggiore, da cui si evince che la crescita dell'altezza è lineare rispetto al numero dei dati in ingresso.

Nonostante le diverse implementazioni di AVL e RBT, la loro efficienza nel gestire al meglio lo spazio richiesto è molto simile. Questo dipende probabilmente dalla mole non troppo elevata dei dati da inserire.

Il grafico generato nel caso peggiore permette di visualizzare meglio le qualità della proprietà di bilanciamento implementata in AVL.

### 5.3 Ricerca

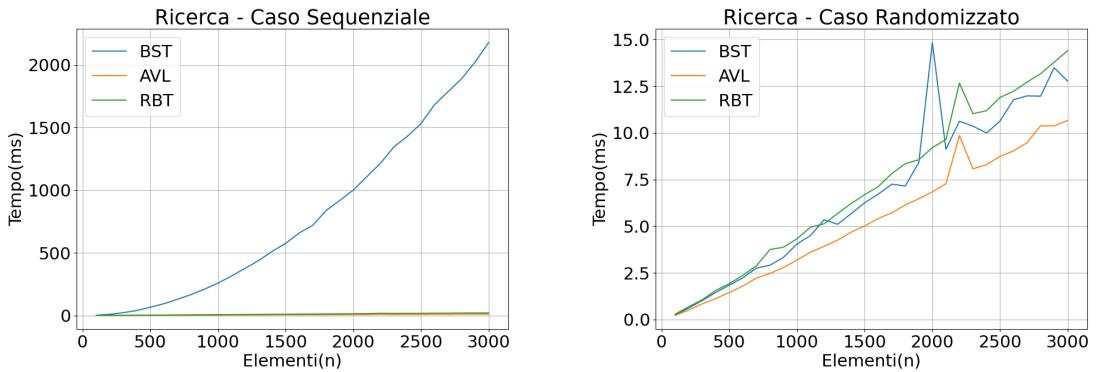


Figure 5: Tempi di ricerca di N elementi. Nel caso a gli elementi sono ordinati, nel caso b gli elementi sono casuali.

Per quanto riguarda la ricerca, la differenza nei tempi impiegati da ciascuna struttura dati per portare a termine i test è più evidente.

Nel caso peggiore, si evince in maniera abbastanza accurata la linearità del tempo impiegato da BST. Nel caso medio, invece, l'efficienza è assottigliata dai dati che costituiscono le strutture, anche se AVL rimane il migliore per questa operazione.

## 6 Conclusioni

Osservando i risultati dei test effettuati, possiamo notare che, per quanto riguarda il caso peggiore, le prestazioni sia per l'inserimento che per la ricerca calano drasticamente se implementate utilizzando un albero binario di ricerca. Lo stesso vale per l'altezza dell'albero, in quanto la particolarità dell'input azzera tutti i vantaggi che un BST offrirebbe, sfociando in una lista concatenata.

Analizzando invece il caso medio, l'albero binario di ricerca tende a replicare i vantaggi delle altre due tipologie di alberi, talvolta anche con miglioramenti, come nel caso dell'inserimento. Questo lo rende quindi una struttura dati molto valida ed efficiente, specialmente se si punta alla semplicità, purché l'input che gli si fornisce sia il più possibile casuale.

Se il motivo per cui si deve utilizzare un albero come struttura dati è la ricerca, un AVL sarà la scelta migliore. Anche perché, per notare gli svantaggi nell'inserimento, è richiesta una mole di dati notevole.

Nel complesso, RBT rimane comunque la scelta migliore tra le 3, riuscendo a mitigare le caratteristiche di velocità di un BST, noncurante del bilanciamento della struttura complessiva, con quelle di organizzazione in memoria di un AVL, con controlli e rotazioni mirate a ottimizzare il più possibile la ricerca.