O`ZBEKISTONRESPUBLIKASI
OLIYVAO`RTAMAXSUSTA’LIMVAZIRLIGI

FARG`ONA DAVLATUNIVERSITETI

Fizika-matematika fakulьteti
«Amaliymatematika va informatika»kafedrasi

5130200 – «Amaliymatematikavainformatika»
ta’limyo`nalishiuchun

«MATEMATIKMODELLASHTIRISH ASOSLARI»

fanidanyaratilgan

O`QUV-USLUBIYMAJMUA

O`quv – uslubiymajmuatarkibi

1. Ma’ruzalarmatni;
2. Mustaqilta’limuchunsavollar;
3. Glossariy;
4. Ishchio`quvdasturi;
5. Baholashmezonlarivaballartaksimoti;
6. Nazoratsavollari;
7. Testsavollari;
8. Slaydlar;
9. Ta’limtexnologiyasi;
10. Adabiyotlar.

MUNDARIJA

KIRISh

Dunyo paydo bo`libdiki, inson o`zining yashashi uchun qulay turmush tarzini yaratib, yaxshi yashashga harakat qilgan. Shuningdek, tabiat tomonidan sodir bo`ladigan har xil jarayonlarni sabablarini o`rganib, ular oqibatida sodir bo`ladigan turli salbiy ta’sirlarni oldini olishga va ularga moslashishga intilib kelgan.

Insoniyat tsivilizatsiyasining dastlabki bosqichlaridayoq tevarak atrofda sodir bo`ladigan jarayonlarni kuzatishda nisbatan murakkabroq bo`lgan real ob’yektlarni unga nisbatan soddaroq bo`lgan boshqa ob’yektlar bilan almashtirish yoki akslantirish orqali o`rganishdan boshlagan. Ibtidoiy jamoa davrida g`orlarning devorlarida, qoya toshlarda turli xil hayvonlarni suratlarini chizilganligi, shuningdek, ovchi o`zi tutgan har bir ovini ma’lum bir belgi yoki tosh orqali qabiladoshlariga ma’lum qilganligi tarixdan ma’lum. Ushbu misollardan ko`rinib turibdiki, biror predmet yoki ob’yektni boshqa bir real yoki mavhum predmet yoki ob’yektga akslantirish orqali o`rganishning qulayliklari insonlarga azaldan ma’lum bo`lgan.

Insoniyat tsivilizatsiyasining keyingi bosqichlarida turmush tarzining rivojlanishi, insonlar o`rtasidagi muoamala darajasining kengayishi jamiyat uchun umumiy bo`lgan urf-odatlarni, qonun qoidalarni shakllanishiga olib keldi. Bu kabi qonun qoidalarni tur xil belgi yoki tasvirlar orqali matnlarda bayon qilinishi qadimgi Misr yozuvini paydo bo`lishida katta turtki bo`ldi va jamiyat fikrining asbstraktlanish jarayonini rivojlanishiga katta sabab bo`ldi.

Keyinchalik insonlar o`rtasida oldi-sotdi  va tovar ayirboshlash amallarining paydo bo`lishi sanoq sistemasining, shuningdek, natural sonlarni paydo bo`lishiga va ular ustida turli arifmetik amallarni bajarishga sabab bo`ldi. Bu esa jamiyat fikrining asbstraktlanish jarayonini yana bir yuqori pog`onaga ko`tarilganligini va jamiyatni keyingi rivojlanishilariga katta poydevor yaratilganligini anglatardi.

Demak, jamiyat fikrining asbstraktlanish jarayoni bosqichma-bosqich yoki pog`onama-pog`ona sodir bo`lib, tsivilizatsiyaning avvalgi bosqichlaridagi asbstraktlanish jarayoni tsivilizatsiyaning keyingi rivojlanishlariga katta zamin yaratgan. Shuningdek,asbstraktlanish jarayoni real ob’yektni unga nisbatan qulayroq bo`lgan boshqa real (toshlar) yoki mavhum ob’yektlar (yozuv, rasm, chizma, belgi va h.k.) bilan akslantirish yoki almashtirish orqali real ob’yektni ifodalashdir.

Asbstraktlanish jarayoniyozuv, rasm, chizma, belgi, nuqta, qo`shish, ayirish kabi abstrakt tushunchalarning ham paydo bo`lishiga sabab bo`ldi. Bu tushunchalar insonlar o`rtasidagi muomala darajasini yanada o`sishiga, atrof muhitda sodir bo`layotgan voqealarni anglashga, tushunishga katta xizmat qilgan va xizmat qilib kelmoqda.

TSivilizatsiyaning so`ngi bosqichlarida asbstraktlanish jarayonining keskin rivojlanishi fanlar shohi bo`lmish matematika fanining paydo bo`lishi va uning shakllanishiga olib keldi. Bu fan abstrakt tushunchalar orqali atrof muhitda va tabiatda sodir bo`layotgan voqealarni o`rganish quroli sifatida katta ahamiyatga ega.

Ma’lumki, inson tabiatda sodir bo`ladigan hodisa va jarayonlarni sodir bo`lish sabablarini, qonun-qoidalarini bilsa, bu hodisa va jarayonlarning salbiy oqibatlaridan o`z vaqtida himoyalana oladi. Bu esa insonni umrini, yashash vaqtini uzaytirish imkonini yaratadi. Shu sababli inson paydo bo`lgan dastlabki vaqtlardan hozirgacha atrof muhitni va undasodir bo`ladigan hodisa (jarayon) larni o`rganib kelmoqda. Atrof muhit esa doim o`zgarib turadi. O`zgarish sabablari esa turlichadir.

Bizniqurshabturganolamdasodirbo`ladigano`zgarishlarniasosan 3 turgaajratishmumkin: 1) abiotiko`zgarishlar (tabiiy o`zgarishlar – zilzilalar, vulqonlarotilishi, suvtoshqinlarivashukabilar); 2) biotiko`zgarishlar (populyatsiyalarbiomassasiningyokisonningo`zgarishi, populyatsiyalarningqirilibketishi); 3) antropogeno`zgarishlar (insonfaoliyatinatijasidaatrofmuhitdasodirbo`ladigano`zgarishlar).

Hozirgi kunda atrof-muhitda sodir bo`ladigan o`zgarishlarni, jarayonlarni o`rganishda matematik modellashtirish fani keng qo`llanilmoqda. Matematik modellashtirish metodologiyasining mohiyati o`rganilayotgan real ob’yektni uning «abstrakt shakli», ya’ni keyinchalik kompьyuterda realizatsiya qilishda foydalaniladigan matematik modeli bilan almashtirishdan iborat.

Matematik modellashtirish fanining elementlari fizika va matematika fanlari paydo bo`lgan davrlardanoq qo`llanilib kelinmoqda. Ammo, uning yuksalish davri XX asrning 50-chi yillari va undan keyingi yillarga to`g`ri keladi. Bu holatni quyidagi sabablar – EHMlarni paydo bo`lishi, AQSh va sobiq SSSR davlatlarining yer yuzida o`z siyosiy va iqtisodiy hukmronliklarini ta’minlash maqsadida yadro qurolini yaratishlari hamda koinotni insoniyat tomonidan keng o`rganilishi kabilar bilan izohlash mumkin.

MA’RUZA №1-2. MATEMATIKMODELLASHTIRISHNING ASOSIYTUSHUNCHALARI.

Modelvauningturlari.

Model– burealob’yektnialmashtirishimumkinbo`lgan, tadqiqotvatajribao`tkazishuchunqulayvaarzonbo`lganboshqabir real yoki abstraktob’yektdir. Model real ob’yektning soddalashtirilgan ko`rinishi bo`lib, uning hamma xossalarini emas, balki asosiy xossalarinigina o`zida mujassam etadi.

Modellotincha “modulus” so`zidanolinganbo`lib, o`lchovvanamunama’nolarinibildiradi.

Hozirgi kunda fan olamida ma’lum bo`lgan ma’lumotlarni ko`rinishi va ma’nosiga qarab quyidagi 3 ta asosiy turga bo`lish mumkin:

- fizik;
- grafikli;
- matematik.

Yuqorida keltirilgan bo`linishlarga asosan modellar hammos holda 3 turga – fizik, grafikli va matematik modellarga ajratiladi.

*Fizikmodellar.*Tajriba o`tkazishga mo`ljallangan tajriba uchastkalari katta ekin maydonlarining, laboratoriya mashg`ulotlarini o`tkazishga mo`ljallangan asbob uskunalar fizik modellarga misol bo`ladi. Masalan, kimyoviy yoki biologik laboratoriyalarda foydalaniladigan asbob uskunalar hamda tokamak qurilmasi (yer sharoitida termoyadro reaktsiyasini amalga oshiradigan qurilma).

Grafiklimodellar. Sxemalar, chizmalar, rasmlar, ilmiy va tarixiy asarlar misol bo`la oladi. Masalan, globus yer sharining, insonning surati uning o`zining, M.Z.Boburning «Boburnoma» asari asarda keltirilgan davrning grafikli modelidir.

MatematikModel – realob’yektnitasavurimizdagiabstraktko`rinishibo`lib, umatematikbelgilarvaba’zibirqonun–qoidalarbilanifodalanganbo`ladi. Masalan, Nьyuton qonunlari, massaning saqlanish qonuni.

Matematik Model va matematik modellashtirish

XXasrningo`rtalaridanboshlabinsonfaoliyatiningturlisohalaridamatematikusullarvaEHMqo`llanilaboshlandi.Obektlarvahodisalarningmatematikmodellarinio`rganadigan “Matematikiqtisod”, “Matematikkimyo”, “Matematiklingvistikavahokazoyangifanlarvabumodellarnio`rganishusullaripaydobo`ldi.

Matematikmodel – atrofborliqdagihodisalaryokiobektlarningmatematiktilidagitaxminiyifodasidir. Modellashtirishningasosiymaqsadi – buobektlarnio`rganishvakelgusidagikuzatishlarnatijalarinioldindanaytish. Shu bilan birgalikda modellashtirish – atrofborliqniboshqarishimkoniniberadiganbilishusulidir.

Modellarniularningturlijihatlaribo`yichaturlargaajratishmumkin. Masalan, masalaningyechilishihususiyatlarigaqarabmodellar*funktsional*va*strukturalimodellarga* bo`linishi mumkin.Birinchiholdahodisayokiobektniharakterlovchibarcha kattaliklarmiqdoriyifodalaniladi. Bundaularning ayrimlari erkli o`zgaruvchilarsifatida, boshqalariesashumiqdorlarning funktsiyalarisifatidaqaraladi. Matematikmodelodatdaturliko`rinishdagi (differentsial, algebraikvahokazolar) tenglamalarningsistemalariko`rinishidayoziladi, bundatenglamarqaralayotgankattaliklarorasidagimiqdoriybog`lanishlarniifodalaydi. IkkinchiholdaModelmurakkabobektningstrukturasiniifodalaydi. Murakkabobektodatdaturliqismlardantuzilganbo`lib, buqismlarorasidama’lumbog`lanishlarmavjud. Bubog`lanishlarniodatdamiqdoriyifodalabbo`lmaydi. Bundaymodellarniqurishdagraflarnazariyasidanfoydalashqulaybo`ladi. Graftekislikyokifazodaginuqtalar (uchlar) ningbirorto`plamidaniboratmatematikob’yektbo`lib, ulardanba’zilarichiziqlar (qirralar) bilano`zarotutashtirilganbo`ladi.

Modeldagiberilganlarvabashoratlash natijalariningxarakterigako`ramodellar*deterministikvaehtimolli*-

*statistikmodellarga*bo`linadi. Birinchimodellardaaniq, birqiymatlibashoratqilinadi. Ikkinchiturdagimodellarstatistikma’lumotlargaasoslanganbo`lib, ularyordamidagibashoratlarehtimolliharakterdabo`ladi.

Matematik modellashtirish – kompьyuterda hisoblashlar o`tkazishgina emas. Bu birinchi navbatda voqea va jarayonlarni o`rganish, ularni matematik tilda ifodalashdir. Matematik modellashtirish qimmat baholi eksperimentlar o`tkazmasdan turib, voqea va jarayonlarning keyingi bosqichidagi hodisa va uning detallarini kompьyuter ekranida o`rganish, shuningdek,hattoki zamonaviy asbob-uskunalar ilg`amaydigan (payqamaydigan) jarayonlarni izohlashdan iboratdir.

MA’RUZA №3.
MATEMATIK MODELGA QO`YILADIGAN TALABLARVAMATEMATIKMODELNIQURISHBOSQICHLARI.

Matematik modelga qo`yiladigan talablar

Matematik modelga qo`yiladigan asosiy talablar quyidagilardan iborat:

1. Universallik, ya’ni konkret ob’yektni modeli boshqa o`xshash ob’yektlarga qo`llanishi uchun yetarli darajada universal bo`lishi kerak. Bu degani real ob’yektni matematik modeli boshqa o`xshash ob’yektlarga juda kam o`zgartirishlar orkali qo`llash uchun yetarli darajada umumiy bo`lishi kerak.

2. Kompaktlik. Model shunday qurilishi kerakki, uni deyarli o`zgartirishsiz o`zidan yuqori darajali modelga model osti sifatida kiritish mumkin bo`lsin. Masalan, daraxtni matematik modeli o`rmon ekosistemasi modelining bir bloki sifatida qo`llanilishi. Fotosintez jarayonining matematik modeli daraxt matematik modelini bir bloki sifatida ishlatilishi mumkin bo`lsin.

3. Soddalik. Ya’ni, matematik modelni qurishda ikkinchi, uchinchi darajali faktorlar hisobga olinmasligi lozim. Bu faktorlarni hisobga olish MMni murakkablashtiradi. Misol: epidemiyani tarqalishi jarayoni matematik modelida shamol tezligini hisobga olish modelni ancha murakkablashtiradi. Ammo atrof – muhitni ekologiyasini o`rganishda shamol tezligini va yo`nalishini hisobga

olmaslik mumkin emas. Suv quvuridagi suvni harakatini o`rganayotganda oyning tortishish kuchini hisobga olmasa ham bo`ladi. Ammo, dengiz va okeanlardagi suv toshqinlarini o`rganayotganda oyning tortishish kuchini albatta hisobga olish lozim. Butoshqinlaroyningtortishinatijasida hosil bo`ladi.

4. Sezgirlik darajasi past bo`lishi lozim. MMni qurishda hisobga olinishi zarur bo`lgan asosiy faktorlarga nisbatan modelni sezgirlik darajasi past bo`lishi lozim. Ya’ni, real ob’yektni o`rganayotgan paytda o`lgashlar ko`p hollarda xatolik bilan bajariladi. Ayrim hollarda modelda ishtirok etayotgan asosiy faktorni aniq o`lchashni imkoni bo`lmaydi. Masalan, ob – havoni bashorat qilish haligacha taxminiy, paxta maydonidagi hashoratlar sonini aniq o`lchash mumkin emas.

Agar MMlar hisobga olinayotgan faktorlarni qiymatini o`lchashda yo`l qo`yilgan xatoliklarga nisbatan sezgir bo`lsa, ushbu matematik model mukammal bo`lmaydi, ya’ni hech qachon bu Model orqali o`rganilayotgan ob’yekt to`g`risida qoniqarli natijalar olib bo`lmaydi. Shu sababli hisobga olinayotgan faktorlarga nisbatan matematik Model qo`pol bo`lishi, ya’ni faktorlarning qiymatiga sezgir bo`lmasligi kerak.

Ammo, bu talab faqatgina tabiiy jarayonlar uchungina o`rinli. Ishlab chiqarishda yoki texnologik jarayonlarda bu talab o`rinli emas. Masalan, mashinaishlabchiqarilishda, farmatsevtika sanoatida.

5. Moslashish darajasi yuqori bo`lishi lozim. Ya’ni, model blokli printsipda qurilishi lozim. Bunda o`zgaruvchilar iloji boricha alohida blokda, avtonom holda hisoblanishi maqsadga muvofiq.

Bu esa matematik modelni tez o`zgartirish, modifikatsiya qilish imkonini yaratadi. Umuman olganda bu talab unga katta bo`lmagan o`zgartirish orqali boshqa real ob’yektga moslashishni, ya’ni matematik modelni universalligini xarakterlaydi.

Matematikmodellarniuniversalligigadoirmisollar.

Matematik modellarga qo`yiladigan asosiy talablardan biri universallik talabidir. Ya’ni, matematik Model nafaqat alohida, konkret jarayon yoki ob’yektni ifodalashi lozim, balki, yetarlicha kengroq turli jarayon yoki ob’yektlarni ifodalashi lozim. Masalan, tabiati turlicha bo`lgan tebranish jarayonlarini misol sifatida keltirish mumkin.

1. *Kondensatorvainduktivlikkatushkasidaniborattebranuvchielektrkonturi*. Quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: $q(t)$ - kondensator zaryadi, $u(t)$ - kondensatordagi kuchlanish, C - kondensator sig`imi, $L$ - katushkalarning induktivligi, $E$ - o`zinduktsiyaning elektr yurituvchi kuchi, i - tok kuchi. Ma’lumki, fizika fanida quyida keltiriladigan qonun va formulalar mavjud:

$$Cu(t)=q(t),\quad E=-L\frac{di}{dt},\quad i=-\frac{dq}{dt},\quad u(t)=-E(t).$$

Ushbu keltirilgan formulalar asosida quyidagi differentsial tenglamani hosil qilish mumkin:

$$L\frac{d^2q}{dt^2}=-\frac{q}{C}\quad\rightarrow\quad\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q=0\ .$$

Bu esa mexanika fanidan ma’lum bo`lgan

$$\ddot{x}+\omega^2x=0$$

tebranish formulasining o`zginasidir.

2. *Ikkibiologikpopulyatsiyaningo`zarota’sirlashuvidahosilbo`ladigankichikte branishlar*. Bu yerda quyidagi belgilashlar kiritamiz: $N(t)$ - o`txo`rlar populyatsiyasi soni, $M(t)$ - go`shtxo`rlar populyatsiyasi soni. U holda o`zaro ta’sirlashuvchi ushbu populyatsiyalar sonining o`sish tezligi quyida keltiriladigan Lotki-Volter tenglamalar sistemasi bilan ifodalanadi:

$$\begin{cases}\dfrac{dN}{dt}=(\alpha-cM)N,\quad \alpha>0,\qquad c>0,\\[2ex]\dfrac{dM}{dt}=(-\beta+d\cdot N)M,\quad \beta>0,\quad d>0.\end{cases}$$

Bu oddiy differentsial tenglamalar sistemasi bo`lib, u chiziqsizdir. Agar $\dfrac{dN}{dt}=\dfrac{dM}{dt}=0$ shart bajarilsa, ya’ni

$$M_0 = \frac{\alpha}{c}, \quad N_0 = \frac{\beta}{d}.$$

qiymatlarda bu sistema muvozanatda bo`ladi.

$n = N - N_0$ va $m = M - M_0$ belgilashlardanfoydalanib, ushbu tenglamalar sistemasini quyidagichiziqlashtirilgan sistema ko`rinishiga keltirish mumkin:

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = -cN_0 m \\ \\ \dfrac{dm}{dt} = d \cdot M_0 n \end{cases}$$

Yoki bu sistemani bitta tenglama ko`rinishiga keltirish mumkin:

$$\frac{d^2 n}{dt^2} + \alpha\beta n = 0.$$

Bu yuqorida keltirilgan tebranish tenglamasining xuddi o`zidir.

3. *Maoshvaishbilanbandliko`zgarishiningoddiymodeli*. Bu masalani o`rganish uchun quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: $p(t)$ - maosh, $N(t)$ - ish bilan band bo`lgan ishlovchilar soni. Mehnat bozorining muvozanati $p_0 > 0$ maosh bilan ishlashga rozi bo`lgan $N_0 > 0$ sondagi ishlovchilar mavjudligidan iborat. Matematik modelni hosil qilishda quyidagi farazlardan foydalanamiz:

a) ish beruvchi ish bilan band bo`lgan ishlovchilar sonining muvozanat qiymati $N_0$ dan og`ishiga proportsional ravishda maoshlarni o`zgartiradi;

b) ishlovchilar soni maoshning muvozanat qiymati p_0 ga nisbatan o`zgarishiga proportsional tarzda o`zgaradi.

U holda quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkin:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -a_1(N - N_0), \ a_1 > 0, \\ \\ \dfrac{dN}{dt} = -a_2(p - p_0), \ a_2 > 0. \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasidan yuqorida hosil qilingan tebranish tenglamalarini hosil qilish mumkin:

$$\frac{d^2(p - p_0)}{dt^2} + a_1 a_2 (p - p_0) = 0 .$$

Xulosasifatida shuni aytish mumkinki, matematik modellarni universalligi bitta tenglamadan tabiati turlicha bo`lgan bir necha jarayonlarni yoki ob’yektlarni o`rganishda foydalanish imkoniyatini yaratar ekan.

Matematikmodelniqurishbosqichlari.

Matematikmodelniqurish quyidagi asosiy bosqichlardan iborat:

1. Obektni o`rganish. Bu bosqichda ob’yektga doir, uning dinamikasini, tabiatini xarakterlovchi ma’lumotlar yig`iladi.

2. Yig`ilgan ma’lumotlarni sistemalashtirish. Ishchi gipotezalar qabul qilish. Ob’yektni ob’yekt osti bloklarga ajratish, bloklarda o`zgaruvchilarni aniqlash, bloklar va ulardagi o`zgaruvchilar orasidagi bog`liqliklarni o`rnatish. Ob’yekt uchun ikkinchi, uchinchi darajali faktorlar aniqlanib, bu faktorlar tashlab yuboriladi.

3. Yig`ilgan ma’lumotlar asosida ob’yekt bo`ysunadigan qonun yoki qonuniyatlar tanlanadi (masalan, variatsion printsip yoki analogiya printsipi). Ushbu qonunlar asosida ob’yekt matematik tilda yoziladi. Matematik modelni nazariy tadqiqoti o`tkaziladi.

4. Ob’yektni taklif etilayotgan matematik modeli “jihozlanadi”. Ya’ni, bu bosqichda ob’yektni tabiatini ifodalovchi kattalikka nisbatan boshlang`ich shart (jism tezligi, boshlang`ich vaqtda populyatsiya soni va shunga o`xshash) va chegaraviy shartlar shakllantiriladi. Shu bilan matematik formallashtirish, ya’ni matematik modelni yozish jarayoni tugaydi.

5. Ob’yektni matematik modeli asosida diskret modeli quriladi va diskret model asosida dastur tuzilib, kompьyuterda qo`yilgan matematik masala yechiladi. Bu bosqichda HE utkaziladi. HE natijasida matematik Model real ob’yektga

muvofiqligi tekshiriladi. Modelni modelda ishtirok etayotgan faktorlarga nisbatan sezgirligi o`rganiladi. Modelda qatnashayotgan kattalik yoki parametrlarni o`zgarish chegaralari aniqlanadi. Boshqacha qilib aytganda, ushbu bosqichda MMni real ob'yektga moslashtirish ushbu bosqichda bajariladi.

MA'RUZA №4.

MATEMATIK MODEL VA UNING REAL OB'YEKTI ORASIDAGI MUVOFIQLIK.MATEMATIK MODELLARNING NAZARIY VA AMALIY TADQIQOTI, ULARNING ADEKVATLIGI.

Ma'lumki, model o`rganilayotgan ob'yektning sodda ko`rinishidir. Model hamma vaqt real ob'yektdan farq qiladi.

Matematik modellashtirish boshqa modellashtirishlarga nisbatan ustunliklarga ega bo`lsada, hech qachon ob'yektni to`la akslantira olmaydi.

Matematik model va uning real ob'yekti orasidagi muvofiqlik deyilganda ob'yekt va uning matematik modeli dinamikalarining sifat va miqdor jihatdan o`xshashligi va yaqinligi tushuniladi.

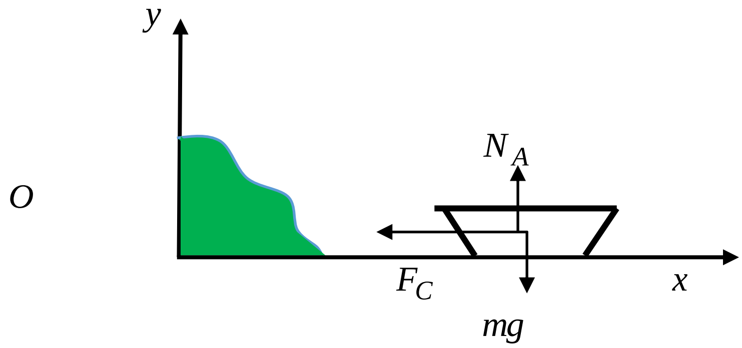
Agarob'yektvauningmatematikmodelinidinamikalariorasidao`xshashlik, ya'nimuvofiqlikbo`lmasa, bumuvofiqliknio`rnatishningbirnechausullarimavjud:

1. Matematik modelda ishtirok etayotgan o`zgarmas kattaliklarni qaytadan baholash.
2. Matematik modelni yozishda qabul qilingan ishchi gipotezalarni qaytadan ko`rib chiqish.
3. Real ob'yekt haqida qo`shimcha ma'lumotlar yig`ish.
4. Yangi yig`ilgan ma'lumotlar asosida modelni qaytadan ko`rib chiqish.

Matematikmodelvauningob'yekti dinamikalari sifat jihatdan o`xshashbo`lsa-yu, miqdorjihatdanfarqlibo`lsa, uholdamuvofiqlashtirishning 1–usulidanfoydalanishlozim. Aksholdamuvofiqlashtirishning 2,3,4 usullariningharbiridanalohida – alohidafoydalanishkerak. Qaysi biridan foydalanish Model va uning ob'yekti dinamikalarini farq qilish darajasiga bog`liq.

MMni real ob’yektga muvofiqlashtirishda ko`p hollarda real ob’yektga nisbatan o`tkazilgan tajriba, eksperiment natijalaridan foydalaniladi va bu natijalar bir necha marta solishtiriladi. Bu jarayon matematik Model real ob’yektga yetarli darajadagi aniqlikga yaqinlashgunicha davom ettiriladi.

Misol. Qayiqqirg`oqdanbirorboshlang`ichtezlikbilanturtibyuborildi. Ushbu qayiqningharakatini matematik modellashtirish vositasidao`rganishzurur (3.1-rasm).



3.1-rasm.

Masalaningkontseptualqo`yilishi.

Boshlang`ichgorizontaltezligi $v_0$ bo`lganqayiqning mg og`irlikkuchi, $N_A$ Arximeditaruvchikuchiva $F_C$ qarshilikkuchlarita’siridagiharakatinio`rganamiz. Qayiqsuzayotganligiuchun (vertikalharakatlanmaydi), N_A Arximeditaruvchikuchi mg og`irlikkuchinimuvozanatlashtiradi. Modelnituzishda quyidagifarazlardan foydalanamiz:

- Tatqiqotob’yektibo`lganqayiqgorizontaltekislikdailgarilanmaharakatqiladi ;
- Qayiqni m massalimoddiynuqtadebqaraymiz, uningjoylashgano`rnimassalarmarkazibilanustmausttushadi;
- Qayiqningharakatiungaqo`yilgankuchlarsistemasiningta’siriostidadinamik aningasosiyqonuni (Nyutonningikkinchiqonuni) gabo`ysunadi;
- Suvning F_C qarshilikkuchiqayiqtezligigato`g`riproportsionalvaqayiq harakatiga qarama-qarshiyo`nalgan bo`lib, uni $F_C = -\mu v$ tenglik bilan ifodalash

mumkin.Buyerda μ- proportsionallikkoeffitsiyenti (o`zgarmaskattalik), v - qayiq tezligi.

Qayiqtezliginivaqtningfunktsiyasisifatidatopamiz va bubog`lanishnigrafik ko`rinshda tasvirlaymiz.

Masalaningmatematikqo`yilishi.

Nyutonningikkinchiqonunigako`raqayiqning $x$ o`qiyo`nalishidagiharakatiningtenglamasi

$$m\frac{dv}{dt} = -F_C = -\mu v, \qquad v(0) = v_0$$

ko`rinishda bo`ladi.

$v(t)$ ni topish talab etiladi.

Analitikyechim. O`zgaruvchilarni ajratish usulini qo`llash uchun tenglamani quyidagi ko`rinishga keltiramiz:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{\mu}{m}dt.$$

Uniintegrallab, boshlang`ich shartni hisobga olib quyidagi yechimga ega bo`lish mumkin:

$$ln\left(\frac{v}{v_0}\right) = -\frac{\mu}{m}t.$$

Bundanyechim uchun quyidagi tenglikni hosil qilish mumkin:

$$v = v_0 e^{-\frac{\mu}{m}t}.$$

*Sonliyechim.*Tezlikdanolinganhosilaniuningtaqribiyayirmaliqiymatiyordami datasvirlaymiz:

$$\frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta e \to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta e \to 0}\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \approx \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}.$$

Tenglama endi

$$\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=-\frac{\mu}{m}v(t)$$

ko`rinishni oladi.Bu yerdan

$$v(t+\Delta t)=v(t)-\frac{\mu}{m}v(t)\Delta t.$$

Bumunosabatqo`yilganmasalanihalqiladi, chunkibutenglikixtiyoriyvaqtmometdidagitezlikniuningbundanoldingi qiymati yordamida topish imkonini beradi. Ya'ni, boshlang`ich qiymatdan boshlab Δt vaqtdankeyin, so`ngrayana $\Delta t$ vaqtdankeyinvahokazovaqtdankeyintezlikqanaqabo`lishinianiqlashmumkin.

Hisoblashnatijalari. $\mu = m,\ v_0 = 1$ deb olamiz. Bu holda tenglama quyidagi sodda ko`rinishga egabo`ladi:

- Analitik: $v = e^{-t}$.
- Sonli: $v(t+\Delta t)=v(t)(1-\Delta t),\ v_0 = 1.$

Vaqtning oxirgi momenti sifatida $t = 5$ ni tanlaymiz. Tezlikning bu vaqt momentidagi analitik (amalda aniq qiymati) qiymati quyidagiga teng:

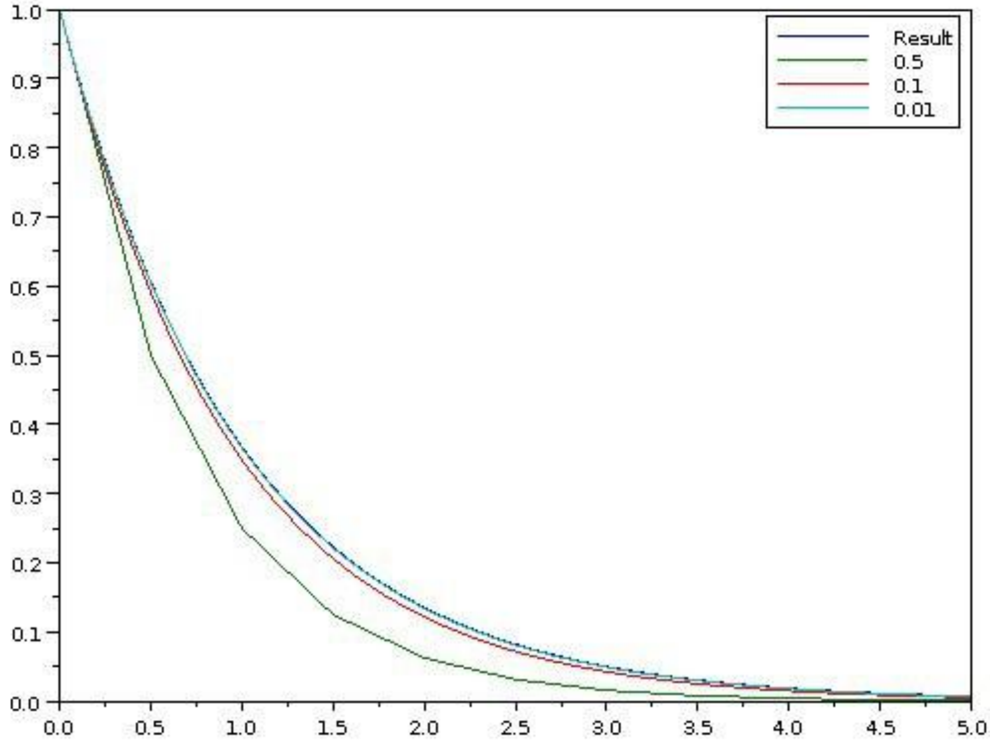
$$v(5)=exp(-5)=0.0067379.$$

Tezlikning shu qiymatini sonli usulda topamiz. Qadamning turli qiymatlaridan foydalanamiz.

Hisoblashnatijalari quyidagijadvaldakeltirilgan:

Δt	0.5	0.25	0.1	0.01	0.001	0.0001
v	0.0009766	0.0031712	0.0051538	0.0065705	0.0067211	0.0067363

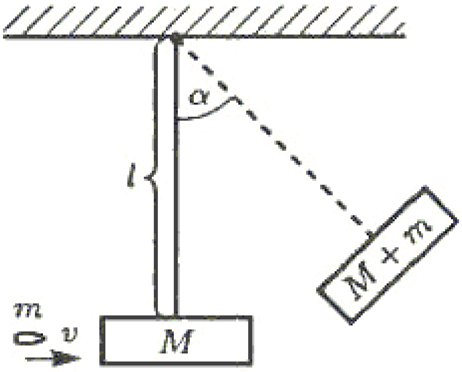
Sonli yechishda $\Delta t = 0.0001$ qadamuchunolingan sonli natija ($v = 0.0067363$) aniq yechimga yaqinligi ko`rinib turibdi. Bu esa qadam kichrayganda sonli yechim aniq yechimga intilishini bildiradi. Buni quyidagigrafikdan ham ko`rish mumkin.



MA’RUZA №5.ENERGIYANING SAQLANISH QONUNIVA MASSA (MATERIYA)NING SAQLANISH QONUNIDANFOYDALANIB,ODDIYMATEMATIKMODELLARQURISh.

Energiyaningsaqlanishqonuni.

Buqonunqariyb ikki asrlardanbuyonma’lumbo`lib, tabiatningbuyukqonunlariorasidaalohidao`rinniegallaydi. Bu qonungatayanib, mayatnik



4.1-rasm. Matematikmayatnik.

turidaginisbatanosonqurilma -mustahkamvaerkinaylanuvchiyengilsterjengaosilganyuk (4.1-rasm) dan foydalanib, to`pponchao`qiningtezligini aniqlash mumkin.

Faraz qilaylik, m massalio`q $M$ massali yukka $v$ tezlik bilan otilsin. O`qning otilishi natijasida yukdatiqilibqolgano`q «o`q-yuk»sistemasiga o`zining kinetik energiyasini beradi. O`z navbatida bu kinetikenergiyasterjenningvertikaldanengyuqorichetlashishimomentida«o`q-yuk»sistemasiningpotentsialenergiyasigaaylanadi.

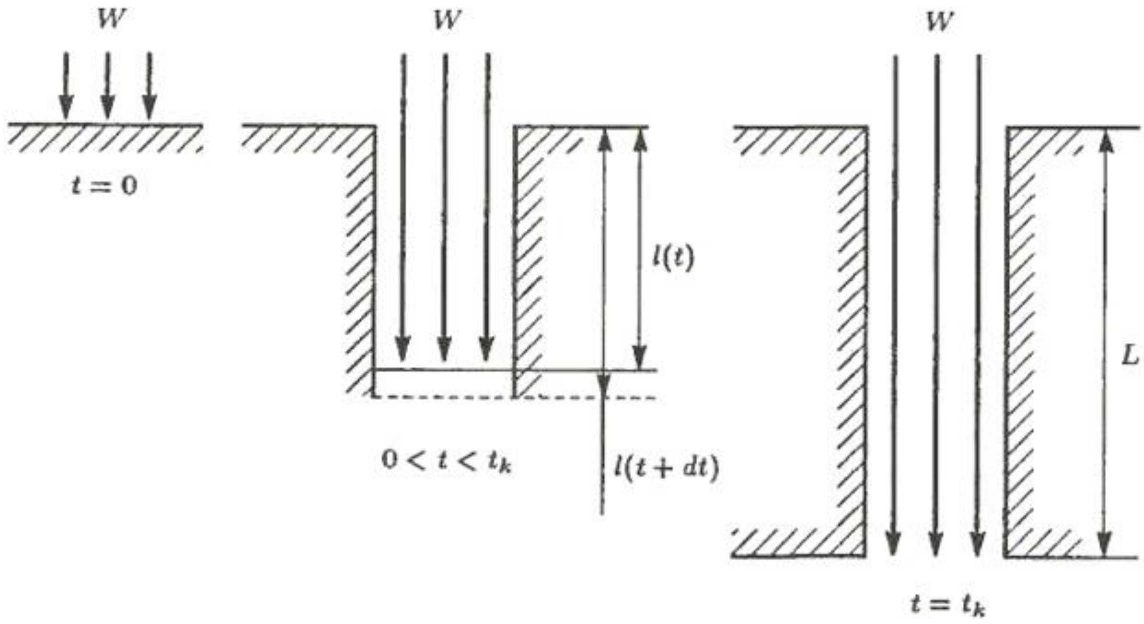
Energiyaning bir turdan ikkinchi turga aylanishi quyidagi tengliklar orqalitasvirlanadi:

$$\frac{mv^2}{2} = (M+m)\frac{V^2}{2} = (M+m)gl(1-\cos\alpha).$$

Buyerda $mv^2/2 - v$ tezlikkaegabo`lgan $m$ massalio`qningkinetikenergiyasi, M –yukning massasi, V –«o`q-yuk»sistemasiningto`qnashuvdankeyingitezligi, g –erkintushishtezlanishi, l –sterjenninguzunligi, α –vertikaldanengengyuqorichetlashishburchagi. Ushbu formuladan izlanayotgantezlikuchun quyidagitenglikni aniqlash mumkin:

$$v = \sqrt{\frac{2(M+m)gl(1-\cos\alpha)}{m}}.$$

Tezlikning buqiymatio`qyukniisitishi, havoningqarshiliginiyengish, sterjennitezlashtirishvavahakozalargasarfbo`lganenergiyalarunchalikkattabo`lmaganidaaniqko`rinishgaegabo`ladi. Birqarashdao`rinlibo`lgan mazkurmulohazaaslidato`g`riemas. O`qvamayatnikning«yopishish»ipaytidasodirbo`ladiganjarayonlarbu holatda sofmexanikjarayonlaremas. Shu sababli $V$ kattaliknihisoblashdaqo`llanilganmexanikenergiyaningsaqlanishqonunio`rinliemas: sistemaningmexanikenergiyasiemas, to`liqenergiyasisaqlanadi. Uo`qningtezliginibaholashuchunquyichegaraniberadi,xolos (busoddamasalanito`g`riyechishuchunImpulsningsaqlanishqonunidanhamfoydalanishkerak bo`ladi).



4.2-rasm. Metallnilazerbilano`yishningboshlang`ich, oraliqvayakuniybosqichlari.

Yuqorida keltirilgan mulohazalarni L qalinlikdagimetallqatlamininurlanishimaterialningsirtigaperpendikulyarbo`lgan$W$ quvvatlilazerbilano`yishvaqtit_k nibaholashdahamqo`llash mumkin.

Agardalazerningenergiyasi $LS\rho$ (S –nurlanuvchiyuza, LS –ustunchaninghajmi, ρ– moddaningzichligi) massalimetallustunchasiningbug`lanishigato`liqsarfbo`lsa, uholdaenergiyaningsaqlanishqonuniquyidagitenglikbilanifodalanadi:

$$E_0 = Wt_k = hLS\rho, \tag{1}$$

buyerda$h$ –birlikmassaningbug`lanishiuchunkerakbo`ladiganenergiya. h energiya bir necha energiyalarning yig`indisidan iborat: $h = \left(T_{эр} - T\right)h_1 + h_2 + h_3$. Chunkimaterialniketma-ketravishdaerishtemperaturasi$T_{эр}$ gachaisitish, so`ngraqizitib, bug`gaaylantirishkerak ($T$ –boshlang`ichtemperatura, h_1 –

solishtirmaissliqliksig`imi, $h_2$ va $h_3$ –mosravishdaerishvabug`hosilqilishningsolishtirmaissiqliklari).

O`yishchuqurligi $l(t)$ ningvaqto`tishibilano`zgarishi $t$ dan $t+dt$ gachabo`lganvaqtoralig`idagienergiyaningmuvozanatidananiqlanadi. Buvaqtichidabug`langan

$$[l(t+dt)-l(t)]S\rho = dlS\rho$$

massaga $dl\,hS\rho$ energiyasarfbo`lib, buenergiyalazertomonidanmoddagauzatiladigan $Wdt$ energiyagatengbo`ladi:

$$dl\,hS\rho = Wdt\,.$$

Buyerdanquyidagidifferentsialtenglamani hosil qilish mumkin:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{W}{hS\rho}\,.$$

Boshlang`icho`yishchuqurliginolgatengliginihisobgaolganholda tenglamaniintegrallashnatijasidao`yishchuqurligi uchun quyidagiga ega bo`lish mumkin:

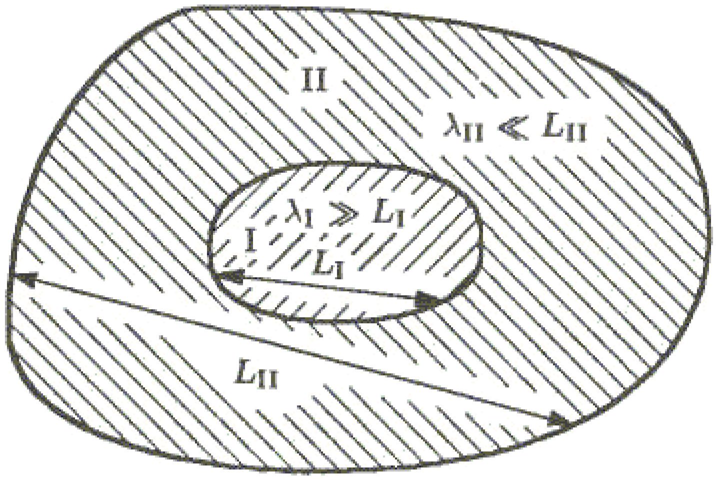
$$l(t) = \frac{W}{hS\rho}t = \frac{E(t)}{hS\rho}\,. \tag{2}$$

Buyerda $E(t)$–lazertomonidan t vaqtmomentigachaajralganhammaenergiyani ifodalaydi. Demak, o`yishchuqurligisarfbo`lganenergiyagaproportsionaldir.

Aslidao`yishjarayonio`rganibchiqilgansxemagaqaragandaanchamurakkabdir. Negaki, energiyamoddaniisitish, noto`g`rishakldabo`lishimumkinbo`lgano`ymadanbug`larniyo`qotishuchunsarfbo`ladi. Shuninguchun, taklifetilganmatematikmodelningto`g`riligigaishonchunchalikkattaemas.

Moddamassasiningsaqlanishqonuni.

Farazqilaylik, uncha ko`p bo`lmagan radioaktivmodda (uran) «oddiy»material (qo`rg`oshin) ningqalinqatlamibilano`ralganbo`lsin. Ushbu holatbo`linuvchimateriallarnisaqlashdayokiulardanenergetikadafoydalanishdauchrabturadigantabiiyholdir.



4.3-rasm.

«Uncha ko`p bo`lmagan»iborasiostidasoddalashtirilganhol, aniqrog`i, yemirilishdaqatnashganbarchamahsulotlarmoddaningatomlaribilanto`qnashmaganholda I sohanihechqandayqiyinchiliklarsiztarketishitushuniladi. Boshqaso`zbilanaytganda, birinchimoddadagiyemirilishmahsulotlariningerkinyuguribo`tishuzunligi λ_I materialningxarakterlio`lchami $L_I$ dananchaginakattadir, ya'ni $\lambda_I >> L_I$.Agar ikkinchimoddadagiyemirilishmahsulotlariningerkinyuguribo`tishuzunligimaterialningxarakterlio`lchamidananchaginakatta, ya'ni $\lambda_{II} << L_{II}$ bo`lsa ajraluvchimahsulotlar II sohadato`layutiladi (4.3-rasm).

Shundayqilib, I sohadanuchibchiqadiganbarchamoddalar II sohadayutiladivaikkalamoddaningumumiymassasivaqto`tishibilano`zgarmaydi. Aytibo`tilganmulohazalarberilganvaziyatganisbatantadbiqetilganmoddaningsaqlanishqonunidir. Agardaboshlang`ichvaqtmomenti $t = 0$ damoddalarningmassalari mos holda $M_I(0)$ va $M_{II}(0)$ tengbo`lganbo`lsa, uholdaixtiyoriyvaqtmomentida

$$M_I(0) + M_{II}(0) = M_I(t) + M_{II}(t) \tag{3}$$

muvozanato`rinlibo`ladi. Ikkita $M_I(t)$ va $M_{II}(t)$ massalarningjoriyqiymatlarinianiqlashuchun (3) tenglamaningo`ziyetarlibo`lmaydi. Matematikbayonnioxirigayetkazishuchunyemirilish jarayoniniqo`shimchamulohazalarnijalbetgan holda o`rganishkerak. Ushbu mulohaza quyidagicha: yemirilishtezligi (birlikvaqtichidayemiriluvchiatomlarsoni) radioaktivmoddadagiatomlarningumumiysonigaproportsional. t va $t+dt$ momentlarorasidagi dt vaqtoralig`idajami yemiriluvchi atomlar soni

$$N_I(t+dt)-N_I(t)=-\alpha N_I(t+\xi\,dt),\ \ \alpha>0,\quad 0<\xi<1$$

miqdorga teng bo`ladi. Buyerdamoddaningsaqlanishqonunibutun jarayonga emas, faqatgina $dt$ vaqtoralig`i uchunikkinchimarotabaqo`llanilgan. Atomlarningmuvozanatinita'riflovchimazkurtenglamaningo`ngtomonidamodda kamayishini anglatuvchi minusishorasituribdi, $N_I(t+\xi\,dt)$ kattalikesako`rilayotganvaqtichidaatomlarsoniningo`rtachaqiymatini ifodalaydi.Uni differentsial shaklda yozamiz:

$$\frac{dN_I(t)}{dt}=-\alpha N_I(t).$$

$M_I(t)=\mu_I N_I(t)$ (μ_I - Imoddaningatomog`irligi)ekanligihisobga olinsa, quyidagini hosil qilish mumkin:

$$\frac{dM_I(t)}{dt}=-\alpha M_I(t). \tag{4}$$

Ixtiyoriy radioaktivlikdaharqandayatomo`ziningatrofidagimoddaningholatigabog`liqbo`lmaganyemirilishehtimolligigaegabo`ladi. Shuninguchun, radioaktivmoddaqanchalikko`p (kam) bo`lsa, birlikvaqtichidashunchalikko`p (kam) mahsulotajralibchiqadi. Proportsionallikkoeffitsiyenti $\alpha>0$ (yemirilishdoimiysi) har bir konkret modda uchun turli qiymatlarga ega.

(3), (4) tenglamalar $\lambda_I >> L_I$, $\lambda_{II} << L_{II}$ shartlarhamda $M_I(0)$ va $M_{II}(0)$ kattaliklarbilanbirgalikdao`rganilayotganob'yektningmatematikmodelinitashkiletadi.

(4) niintegrallab, bo`linuvchi (ajraluvchi) moddaningmassasieksponentsialqonunbo`yichakamayishini ko`rish mumkin:

$$M_I(t) = M_I(0)e^{-\alpha t}.$$

Ushbu tenglikdan ko`rinib turibdiki, $t \to \infty$ da I sohadamoddalarbutunlay yutiladi, ya'ni I sohadagi moddalar butunlay II sohaga o`tib ketadi. Umumiymassa (3)tenglikgako`rao`zgarmasdanqolganligiuchun, II sohadagimoddamiqdoriortibboradi:

$$M_{II}(t) = M_{II}(0) + M_I(0) - M_I(0)e^{-\alpha t} = M_{II}(0) + M_I(0)\left(1 - e^{-\alpha t}\right),$$

bu tenglikdan ko`rinib turibdiki, vaqt o`tishi bilan, ya'ni $t \to \infty$ da I sohadagi moddalar butunlay yemirilib, II sohagao`tibketadi.

MA’RUZA №6.
IMPULSNINGSAQLANISHQONUNIDANFOYDALANIB, MATEMATIKMODELLARQURISH. MATEMATIKMODELLASHTIRISHDAANALOGIYAUSULI.

Impulsningsaqlanishqonuni

Ma’lumki, dengizsathidashamolbo`lmasa qo`zg`almasdanturganqayiqningbiruchidanikkinchiuchigaqarabbirnechaqadamqo`yilsa, qayiqharakatlanishniboshlaydi. Impulsningsaqlanishqonuniaynanshuyerdao`zininamoyonqiladi, buqonungako`ra: sistema tashqita’sirgauchramasasistemaningImpulsisaqlanadi. Eshkaklarharakatgakeltirilgandanso`ngqayiqbuharakatgaqarama-qarshitomongasiljish bilanharakatlanadi.

Ko`pgina ajoyibtexnikqurilmalarreaktivharakatprintsipiga asolangan. Masalan, sun’iyyo`ldoshniYeratrofidagiorbitagachiqaruvchiraketa tezligini birinchi kosmik tezlik – 8 km/s ga yetkazishi zarur.

Raketaharakatiningengsoddamatematikmodelihavoningqarshiligi, yerningtortishkuchinihisobgaolmaganholdaImpulsningsaqlanishqonunidankelibchiqadi.

Raketayoqilg`i bakidagiyonishmahsulotlaridan hosil bo`lgan gaz yoqilg`i bakidan*u*tezlik (zamonaviyyoqilg`ilarganisbatanbukattalik 3-5 km/s gateng) bilanchiqib ketsin. *t*va$t+\Delta t$momentlarorasidagikichikvaqtoralig`i$\Delta t$dayonilg`iningbirqismiyonadivaraketaningmassasiΔmkattalikkao`zgaradi. Shuningdek, raketaningImpulsihamo`zgaradi, ammo«raketaplyusyoqilg`imahsulotlari»sistemasiningImpulsi *t*vaqtdagikabio`zgarmasdan,saqlanibqoladi, ya’ni

$$m(t)v(t) = m(t+\Delta t)v(t+\Delta t) + [m(t) - m(t+\Delta t)][v(t+\Delta t) - u].$$

Buyerda*v*(t) – raketaning *t*vaqtdagitezligi, $v(t+\Delta t) - u$ Δt vaqtoralig`idayoqilg`i bakidanajralib chiqadigan gazlarningo`rtachatezligi (ikkalatezlikhamYerganisbatanolinadi).

Butenglikningo`ngqismidaturganbirinchihad –raketaning$t+\Delta t$vaqt momentidagiImpulsini, ikkinchisi– $\Delta t$vaqtichidayoqilg`i bakidanajralib chiqadigangazlarningImpulsini anglatadi.

$$m(t+\Delta t)=m(t)+\Delta t\frac{dm}{dt}+o\left((\Delta t)^2\right),$$
$$v(t+\Delta t)=v(t)+\Delta t\frac{dv}{dt}+o\left((\Delta t)^2\right)$$

tengliklarni hisobgaolganholda, Impulsningsaqlanishqonuniniquyidagidifferentsialtenglama ko`rinishida yozib olish mumkin:

$$m\frac{dv}{dt}=-\frac{dm}{dt}u\ .$$

buyerda $-\dfrac{dm}{dt}u$ hadraketadvigateliningtortishkuchibo`lib, uni

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{d(\ln m)}{dt}u$$

ko`rinishgakeltiribolgandanso`ng, osonginaintegrallashmumkin:

$$v(t)=v_0+u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$$

buyerdav_0, m_0 – mosravishdaraketaning$t$=0 vaqt momentdagi tezligi va massasi. Agardav_0=0bo`lsa,

uholdaraketayoqilg`isiningto`layonibbo`lganidaerishiladiganraketaning maksimaltezligi

$$v=u\ln\left(\frac{m_0}{m_p+m_s}\right)\tag{5}$$

gateng. Buyerda m_p – foydalimassa (sputnikmassasi), m_s – struktura massasi (raketaning massasi yoqilg`ibaklari, dvigatellar, boshqaruvtizimlarivah.k. larningmassalaridan tashkil topadi).

TSiolkovskiyning (5) soddaformulasikosmikuchishlaruchunraketaningstrukturasiqandaybo`lishikerakligi to`g`risidafundamentalxulosanichiqarishgaimkonberadi.

$$\lambda = \frac{m_s}{m_0 - m_p}$$

kattaliknikiritaylik. Bukattalik $m_p = 0$ daraketaningstrukturaviyvaboshlang`ichmassalarinisbatiniifodalaydi. Uholdahaqiqiy $\lambda = 0{,}1$ va $u = 3$ km/s qiymatlarganisbatan, $m_p = 0$ da

$$v = u\ln\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 7\,\text{km/s}$$

gaegabo`lamiz. Buyerdanhattokiengidealvaziyat (foydalimassanolgateng, yerning tortishkuchivahavoningqarshiligiyo`qbo`lgan) dahamo`rganilayotganturdagiraketabirinchikosmiktezlikkaerishaolmasligikelibchiqadi. Shutufayli, kosmonavtikaningasoschilarikelganxulosagako`ra, ko`ppog`onaliraketalardanfoydalanishlozimdir.

Keltirilganmisolshujumladanmurakkabob'yektlarnimatematikmodellashtirishningboshlang`ichdavridaqo`llaniladigan«engkattaqulaylik»printsipini namoyish qiladi: agardaengyaxshisharoitlargaqo`yilganob'yektkeraklixarakteristikalarga erishaolmasa, uholdaob'yektganisbatanyondashuvnio`zgartirishyokiungaqo`yilgantalablarniyumshatishlozim; agardatalablargaerishibbo`lsa, uholdakeyingiqadamlarob'yektganisbatanqo`shimchamurakkablashtiruvchiomillarningta'sirinio`rganishbilanbog`liqdir.

MA'RUZA №8.
IYERARXIYAPRINTSIPIDANFOYDALANIB, MATEMATIKMODELLARQURISH.

Oldingi paragrafda biz modellarni qurishda fizik qonunlarning tadbiqini o`rganib chiqqan edik, bu paragrafda esa Model qurilgan, ammo endilikda bu Model yanada umumiyroq holga nisbatan qo`llanilishi mumkinligi ma’lum bo`lib qolgan vaziyatni o`rganib chiqamiz. Faqatgina ayrim hollarda eng sodda modellarning matematik modellarini to`liq qo`rinishda, uning hatti-harakati uchun mos bo`lgan barcha omillarni qurish o`zini oqlaydi. Shuning uchun «soddadan-murakkablikka qarab» tamoyilini amaliyotga tadbiq etuvchi yondashuv o`rinli bo`lib, bu yondashuvga ko`ra keyingi qadamga murakkab bo`lmagan modelni sinchkovlik bilan o`rganib chiqqandan so`ng o`tiladi. Bunda har biri oldingi modellarni umumlashtiruvchi va ularni o`zining xususiy holi sifatida o`ziga biriktirib oluvchi nisbatan to`la modellar zanjiri (iyerarxiyasi) hosil bo`ladi.

Bunday zanjirni ko`p pog`onali raketaning modeli misolida o`rganmaiz. Oldingi ma’ruzaning oxirida qayd qilinganidek, haqiqiy bir pog`onali raketa birinchi kosmik tezlikka erisha olmaydi. Buning sababi - yonilg`ining kerakli bo`lmagan strukturaviy massani harakatlantirib yuborishga sarf bo`lishidir. Demak, raketa o`zining harakati davomida davriy ravishda ballastdan qutulib borishi lozim.

Amaliy konstruktsiyada esa bu raketa foydalanib bo`lingandan so`ng tashlab yuboriladigan bir nechta pog`onalardan tashkil topishini anglatadi.

Quyidakeltiriladiganbelgilashlardanfoydalanmiz:m_i–i-chi pog`onaning umumiy massasi, $\lambda m_i$–$i$-chi pog`onaga mos keluvchi struktura massasi (bunda yoqilg`ining massasi $(1-\lambda)m_i$ kattalikka teng), $m_p$- foydali yuk massasi. $\lambda$ kattalik va gazlarning tezligi $u$ barcha pog`onalarga nisbatan bir xildir. Aniqlik uchun pog`onalar sonini $n$=3 ga teng deb olamiz. Bunday raketaning boshlang`ich massasi

$$m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$$

ga teng. Birinchi pog`onaning yoqilg`isi sarf bo`lgan va raketa massasi

$$m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3$$

ga teng bo`lgan momentni o`rganib chiqamiz. U holda TSiolkovskiyning formulasiga ko`ra, raketaning tezligi

$$v_1 = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)$$

ga teng bo`ladi. $v_1$tezlikka erishilgandan so`ng, λm_1 strukturaviy massa tashlab yuboriladi va ikkinchi pog`ona ishga kiradi. Bu momentda raketaning massasi

$$m_p+m_2+m_3$$

ga teng bo`ladi.

Shu momentdan boshlab, to ikkinchi pog`onadagi yoqilg`i to`la yonib bitgunga qadar qurilgan modeldan foydalanishga hech narsa halaqit bermaydi. Impulsning saqlanishi to`g`risidagi barcha mulohazalar o`z kuchini saqlab qoladi (endilikda raketaning boshlang`ich tezligi $v_1$ ga teng ekanligini hisobga olish darkor). U holda, TSiolkovskiyning formulasiga ko`ra, ikkinchi pog`onadagi yoqilg`i yonib tugagandan so`ng, raketa

$$v_2 = v_{1`} + u\ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right)$$

tezlikka erishadi.

Huddi shu mulohazalarni raketaning uchinchi pog`onasiga nisbatan ham qo`llash mumkin. Raketaning dvigateli o`chirilgandan so`ng, raketaning tezligi

$$v_3 = v_{2`} + u\ln\left(\frac{m_p + m_3}{m_p + \lambda m_3}\right)$$

ga teng bo`ladi.

Bu zanjirni ixtiyoriy sondagi pog`onalarga nisbatan davom ettirib, mos formularni hosil qilish mumkin. n=3 holdaesaoxirgi tezlikka nisbatan

$$\frac{v_3}{u} == \ln\left(\frac{m_0}{m_p+\lambda m_1+m_2+m_3}\right)\cdot\left(\frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+\lambda m_2+m_3}\right)\cdot\left(\frac{m_p+m_3}{m_p+\lambda m_3}\right)$$

tenglikni hosil qilish mumkin. Bu tenglikdaquyidagicha belgilashlar

$$\alpha_1 = \frac{m_0}{m_p+\lambda m_1+m_2+m_3}, \quad \alpha_2 = \frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+\lambda m_2+m_3} \quad \alpha_3 = \frac{m_p+m_3}{m_p+\lambda m_3}$$

kiritib, uni nisbatan soddaroq ko`rinishga keltirish mukin:

$$\frac{v_3}{u} == \ln\left\{\left(\frac{\alpha_1}{1+\lambda(\alpha_1-1)}\right)\cdot\left(\frac{\alpha_2}{1+\lambda(\alpha_2-1)}\right)\cdot\left(\frac{\alpha_3}{1+\lambda(\alpha_3-1)}\right)\right\}.$$

Mazkur ifoda α_1, α_2, α_3 kattaliklarga nisbatan simmetrik bo`lib, u o`zining maksimumiga simmetrik holda, ya'ni $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha$ bo`lganda erishadi. Bunda, i =3 ga nisbatan

$$\alpha = \frac{1-\lambda}{P-\lambda}, \qquad P = \exp\left(\frac{v_3}{3u}\right)$$

munosabat o`rinlidir.

$\alpha^3 = \alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\alpha_3$ ko`paytma $m_0/m_p$ ga teng ekanligini osongina tekshirib ko`rish mumkin. Bundan quyidagiga ega bo`lish mumkin:

$$\alpha^3 = \frac{m_0}{m_p} = \frac{(1-\lambda)^3}{(P-\lambda)^3}.$$

Ko`p pog`onali raketaga nisbatan shunga o`xshash ravishda

$$\frac{m_0}{m_p} = \left(\frac{1-\lambda}{P-\lambda}\right)^n, \quad P = \exp\left(-\frac{v_n}{nu}\right)$$

munosabatlar o`rinli, bu yerda$n$ — pog`onalar soni.

Oxirgi hosil qilingan formulani tahlil qilaylik. v_n = 10,5 km/s, λ= 0,1 deb olamiz. U holda n = 2,3,4larga nisbatan mos ravishdam_0=149m_r, m_0=77m_p,

m_0=65$m_p$larni hosil qilish mumkin. Bu degani, ikki pog`onali raketa foydali massani orbitaga chiqarishga layoqatlidir (ammo bir tonallik foydaliyukda 149 tonnalik vaznli raketaga ega bo`lish darkor). Uchinchi pog`onaga o`tish raketaning massasini deyarli ikki martaga kamaytiradi (ammo uning tuzilmasini murakablashtiradi), to`rt pog`onali raketa esa uch pog`onaliga nisbatan sezilarli yutuqni bermaydi.

Iyerarxik zanjirni qurish bu kabi muhim xulosalarga nisbatan oson yo`l bilan kelish imkonini berdi. Matematik modellarning iyerarxiyasi teskari tartibda “murakkablikdan soddalikka” tamoyili bo`yicha ham quriladi. Bunday holatda “yuqoridan pastga” printsipi asosida ish ko`riladi – umumiy va murakkab modeldan soddalashtiruvchi farazlar asosida nisbatan sodda (ammo tadbiq etilish doirasi ancha tor bo`lgan) modellar ketma-ketligi hosil qilinadi.

MA’RUZA №10.

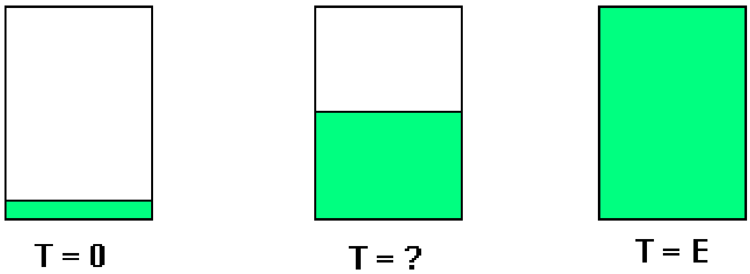
MALTUS VA FERXYULST-PERL MODELLARI.

MALTUS modeli.

MALTUS modellari universaldir – u geometrik progressiya va regressiyalarga taalluqli barcha hodisalarni ifodalaydi. Uning tadbiq etilish doirasiga radioaktiv yemirilish qonuni ham, ozuqa bilan to`yingan muhitda mikroorganizmlarning soni ham kiradi.

Quyidagi masalani o`rganib chiqamiz:

Bizgaqandaydir ozuqaviymuhitbilanto`ldirilganbankaberilganbo`lsin. Yarim tunda – 00 soat, 00 minut, 00 soniyadabankagama’lummiqdordagibakteriyajoylashtirilgandanso`ngularbo`linish niboshlaydi. Bankakeyingikunning 00 soat, 00 minut, 00 soniyasida, ya’ni 24-soatdankeyinbakteriyalarbilanto`ldirilishima’lum. Shuningdek, harsoniyadabankadagibakteriyalarsoniikkibaravarko`payishihamma’lum. Bankaqachon (soat, minutvasoniyada) yarmigachato`lishinianiqlang (7.1-rasm).



7.1-rasm. Bakteriyalibankaningmodeli. T = 0 –tajribaningboshlanishvaqti,
T = E – tugashvaqti (E alohidaolinganbirliksistemasidagi 24 soatgato`g`rikeladi),
T = ? – izlanayotganvaqtmomenti.

Bu masalani yechishning an’anaviy usuli – bir sekundda bakteriyalar soni ikki baravar ortish faktidan foydalanishdir. Shunday qilib, Ye vaqtgacha bir sekund qolganda (7.1-rasmga qarang) bakteriyalar soni Ye momentdagiga qaraganda ikki baravar kam bo`ladi (to`la banka), ya’ni 23:59:59 da banka yarmigacha to`lgan bo`ladi. Qanday qilib bu ajoyib qonuniyatni yanada ko`proq masalalarga nisbatan kengaytirish mumkin? MALTUS modeli aynan shunday yechimni taklif etadi.

MALTUS modeli quyidagi differentsial tenglama bilan ifodalanadi:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N.$$

Bu tenglama quyidagi umumiy yechimga ega:

$$N = N_0 e^{(\alpha-\beta)t}.$$

Keltirilgan differentsial tenglama tezligi (tenglamaning chap qismi) joriy vaqt momentdagi miqdorga proportsional bo`lgan jarayonni ifodalaydi. Bizning masalamizga nisbatan u $k=\alpha$-$\beta$ koeffitsiyentni kiritish bilan qayta bayon etilishi mumkin. Jumladan, masalaning shartiga ko`ra, k =2 ekanligi kelib chiqadi, chunki bir sekund ichida bakteriyalar soni ikki marta ko`payadi. Va biz masalaning xususiy holiga ega bo`lamiz:

$$\frac{dN}{dt} = 2N$$

va uning yechimi:

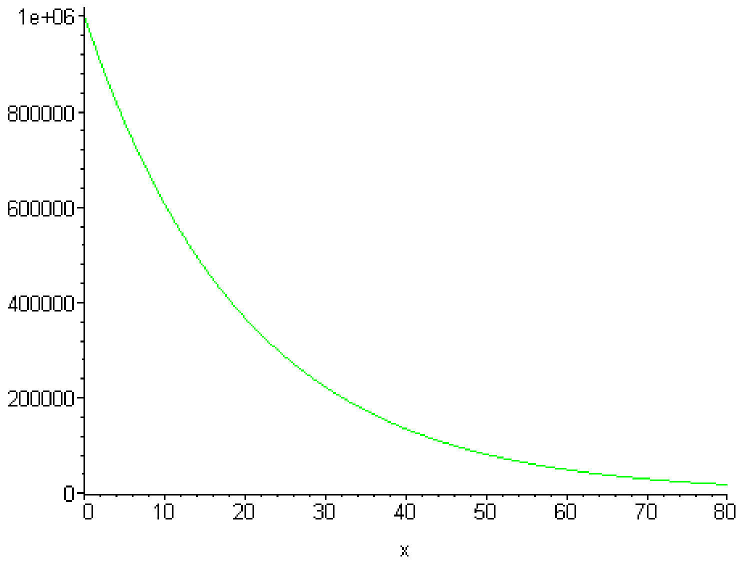
$$N = N_0 e^{2t}$$

bo`ladi.

Bu yechimdan ixtiyoriy vaqt momentidagi bakteriyalar sonini hosil qilib olish mumkin.

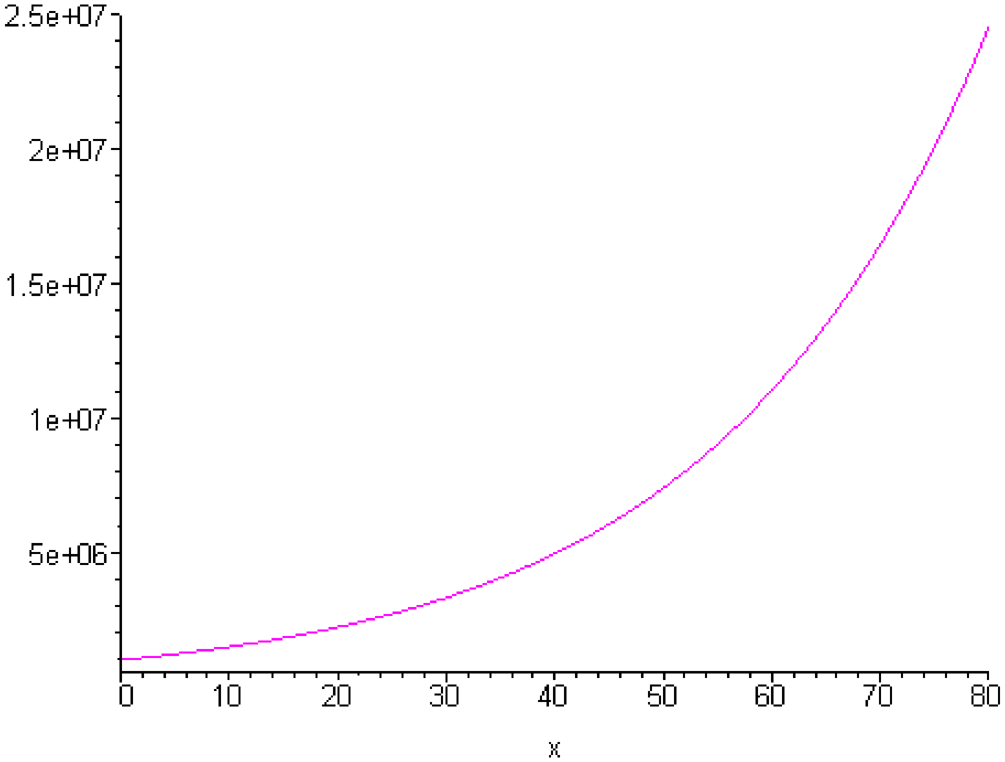
Bu modelning tadbiq etilish doirasining chegaralarini aniqlash uchun, uning αvaβ parametrlarning har xil qiymatlaridagi hatti-xarakatini o`rganib chiqamiz.

MALTUS modeli ideal holda aholi sonini modellashtirish uchun tadbiq etilishi mumkin, bunda αvaβparametrlar mos ravishda tug`ilish va o`lish koeffitsiyentlarini ifodalaydi. Mazkur Modelning har xil qiymatli koeffitsiyentlardagi tabiatini o`rganib chiqamiz (7.2-7.3-rasmlar).



7.2-rasm. MALTUSmodeli. α=0,43; β=0,48; N_0=1000000
(abstsissao`qibo`yichavaqt, ordinatao`qibo`yichaaholisonijoylashgan).

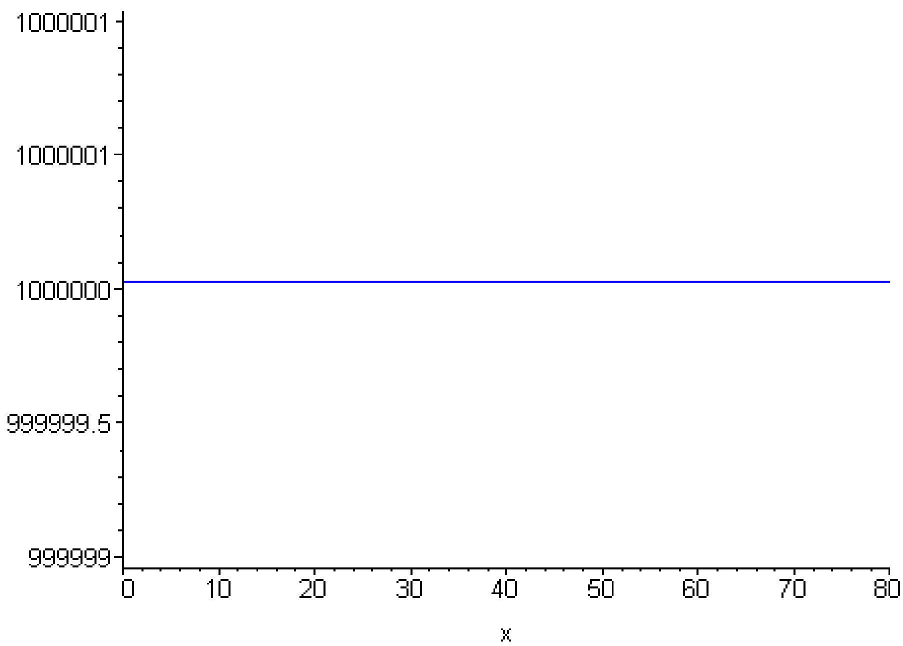
Ko`rinib turibdiki, agar o`limlar soni tug`ilishlarga qaraganda ko`proq bo`lsa, u holda MALTUS modeli aholi sonining eksponentsial ravishda kamayishiga ishora qiladi (7.2-rasm).



7.3-rasm. MALTUSmodeliα=0,05; β=0,01; N_0=1000000
(abstsissao`qibo`yichavaqt, ordinatao`qibo`yichaaholisonijoylashgan).

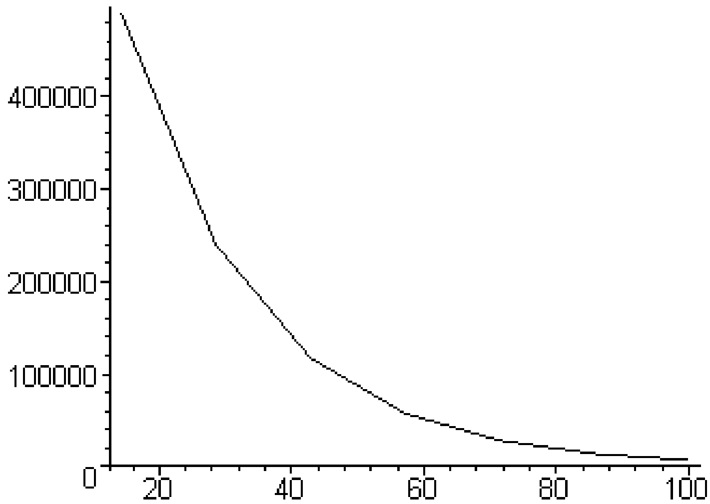
Endilikda, agar tug`ilishlar soni o`limlar soniga nisbatan ko`p bo`lsa, u holda MALTUS modeli aholi sonining eksponentsial ravishda o`sishiga ishora qiladi (7.3-rasm).

7.4-rasmda tug`ilishlar va o`limlar soni o`zaro teng bo`lib, MALTUS modelining ko`rsatishicha, sistema muvozanat holda bo`ladi: aholi soni butun vaqt oralig`ida o`zgarmasdan qoladi.



7.4-rasm. MALTUSmodeli. α=0,1; β=0,1; N_0=1000000
(abstsissao`qibo`yichavaqt, ordinatao`qibo`yichaaholisonijoylashgan).

MALTUS modeli vatarlar usuli bilan approksimatsiyalanishida o`zini qanday qilib tutishini o`rganib chiqamiz:



7.5-rasm. MALTUSmodeli. α=0,43; β=0,48; N_0=1000000.
Vatarlarusuliyordamidan=7 qadambilanapproksimatsiyalash
(abstsissao`qibo`yichavaqt, ordinatao`qibo`yichaaholisonijoylashgan).

Ko`rinib turganidek, hattoki kichik qadam bilan ham MALTUS modeli analitik modelga yetarlicha yaxshi yaqinlashadi (7.5-rasmga qarang).

O`rganib chiqilgan misol demografiya masalalariga nisbatan qo`llanilgan MALTUS modeli aholining cheksiz eksponentsial o`sishini bashorat qilishini ko`rsatib berdi, bunday o`sish esa tabiatda sodir bo`lmaydi. Mazkur Model kichik vaqt oraliklarida hamda αvaβkoeffitsiyentlar muhit parametrlari va N ning qiymatlariga bog`liq bo`lmagan vaziyatda qo`llanilishi mumkin.

FERXYULST-Perlmodeli.

Endilikda bu modelning takomillashtirilgan versiyasini – FERXYULST-Perl modelini (logistik Model) o`rganib chiqamiz.

Logistik Model FERXYULST-Perlning differentsial tenglamasi orqali tasvirlanadi:

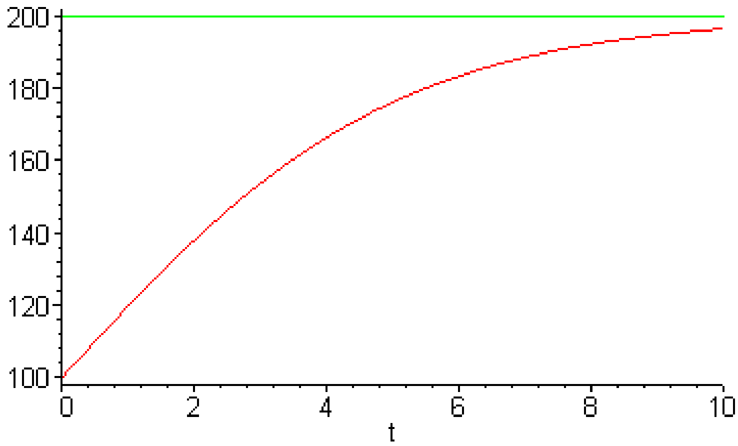
$$N = \alpha t - \beta t^2.$$

Bu tenglama quyidagi umumiy yechimga ega:

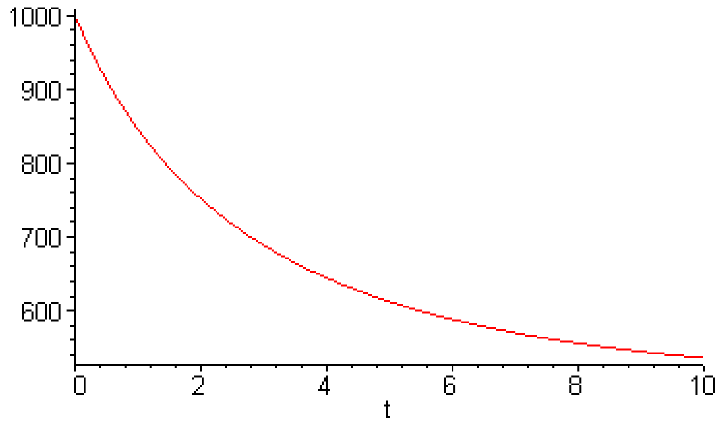
$$N = \frac{\alpha N_0 e^{\alpha t}}{\alpha - \beta N_0 \left(e^{\alpha t} - 1\right)}.$$

Logistik Model hayotni ta’minlovchi resurslar cheklangan holdagi (misol tariqasida aholi soni olinsa) MALTUS modelining umumlashgan ko`rinishidir. Shunday qilib, endilikda logistik Model MALTUS modeli singari cheksiz o`sishga yo`l qo`ymaydi. O`sish β/α kattalik bilan chegaralangan bo`ladi.

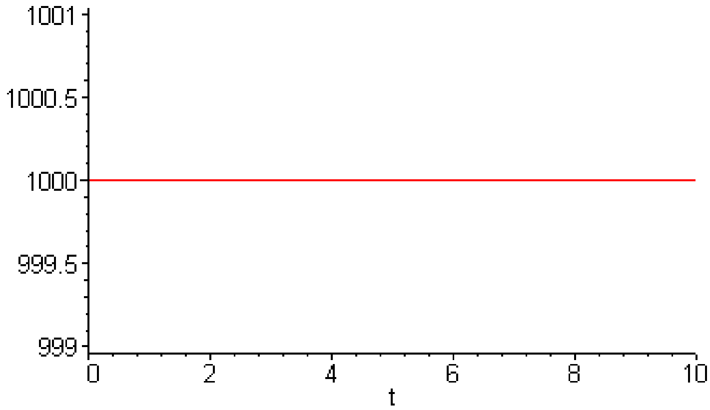
Modelningα>β, α<βiα=βdagihatti-harakatinio`rganibchiqamiz.



7.6-rasm. Logistik Model α=0,4; β=0,2; N_0=100
(yuqorito`g`richiziq - N=β/αasimptota).

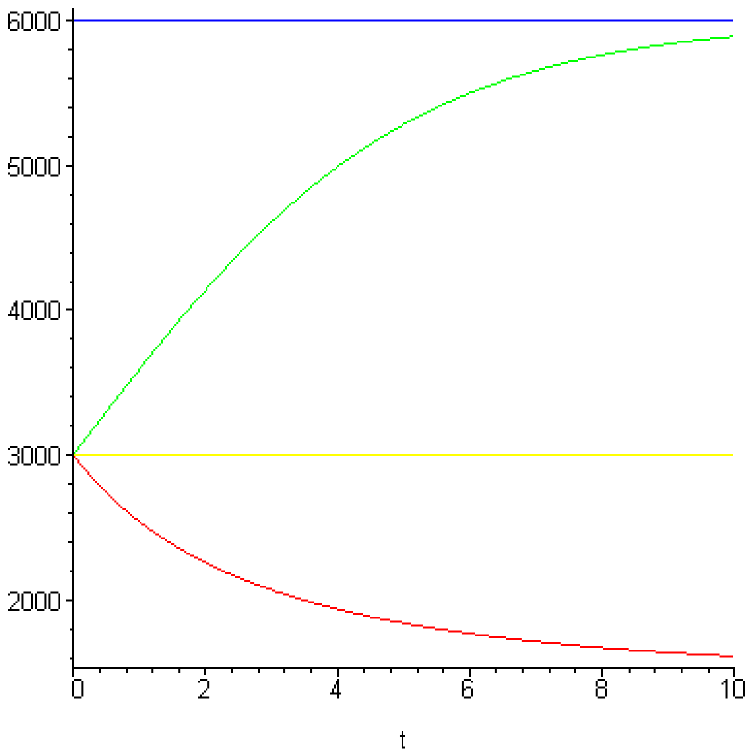


7.7-rasm. LogistikModelα=0,2; β=0,4; N_0=1000.



7.8-rasm. LogistikModelα=0,4; β=0,4; N_0=1000.

Ko`rinib turganidek, oxirgi ikkita holda logistik Model o`zini MALTUS modeli singari tutmoqda.



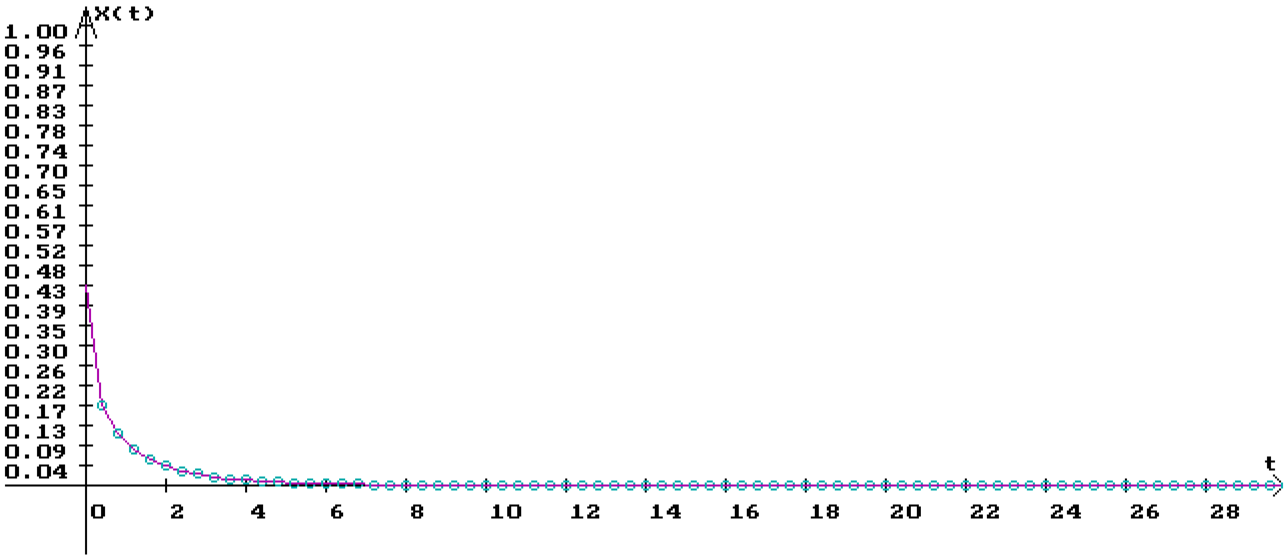
7.9-rasm. Aholining boshlang`ich soni bir xil$N_0$=3000bo`lganholdagilogistikmodellar. (*Yuqoridanpastgaqarab:*N=β/αasimptota, Modelningα=0,45, β=0,25; α=0,2, β=0,2; α=0,25, β=0,45koeffitsiyentlardagihatti-harakati) .

Agarda FERXYULST-Perl tenglamalarini diskret shakldа yozib olsak, u holda arifmetik almashtirishlardan so`ng quyidagi munosbatga ega bo`lamiz:

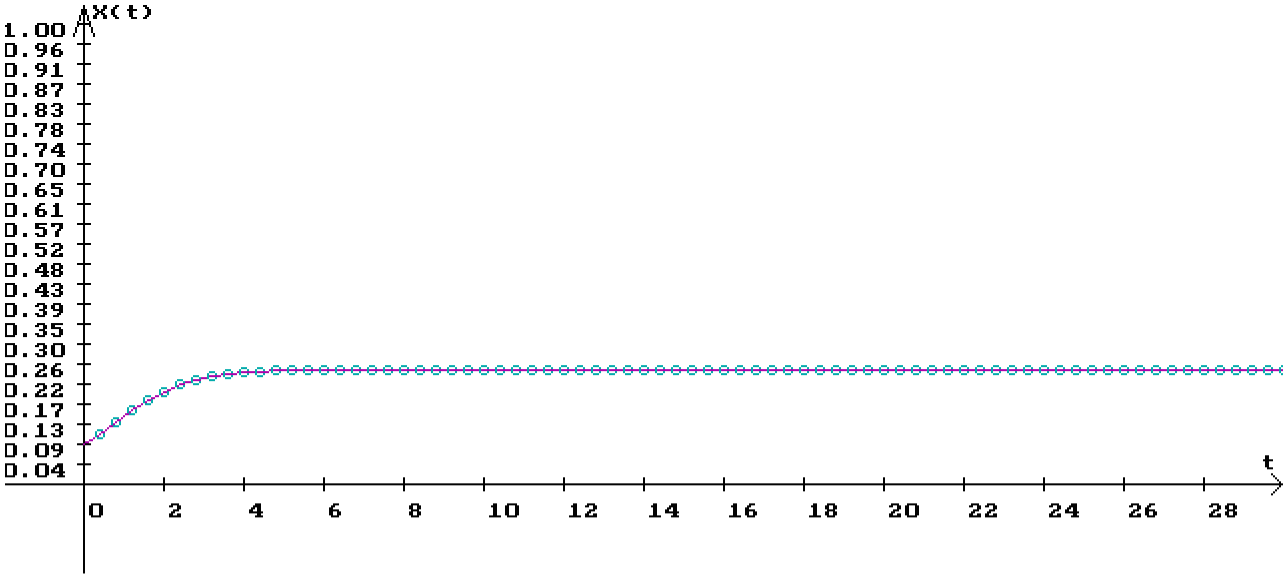
$$x_{n+1} = 4r(1 - x_n)\cdot x_n$$

Bu yerda x_n– yechimning joriy qadamdagi qiymati, x_{n+1} – yechimning keyingi qadamdagi qiymati, r –o`zgaruvchi parametr.

Yechimning kichik r lardagi hatti-harakatini o`rganib chiqamiz.



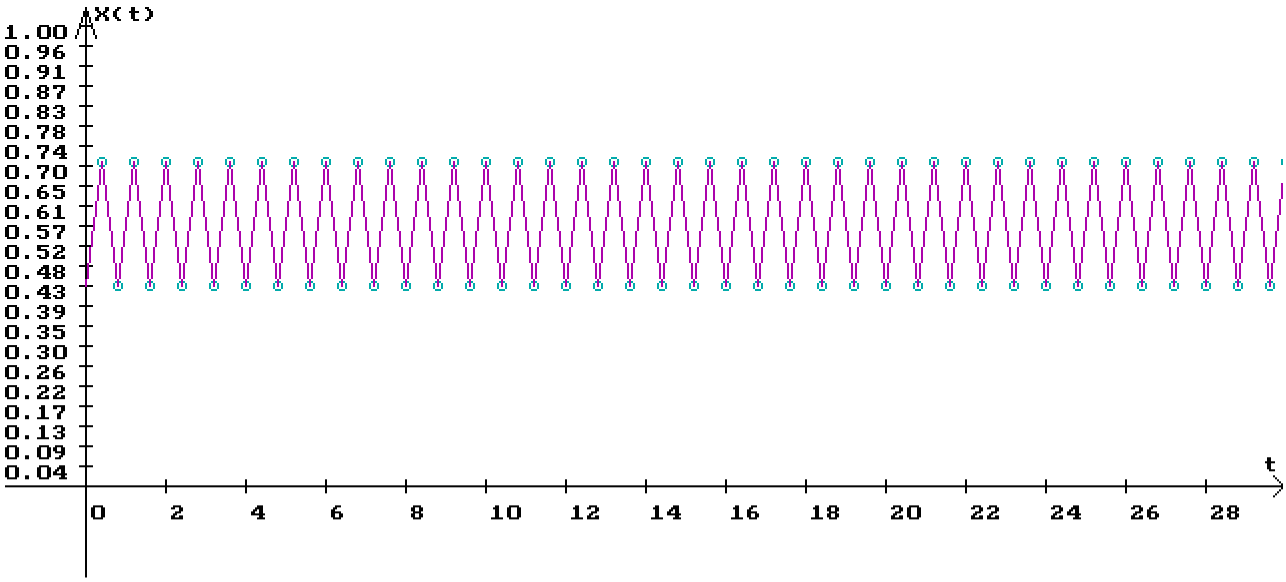
7.10-rasm. Frexyulьst-Perl diskret tenglama yechimining evolyutsiyasi x_0=0,5, r=0,2 (buyerdavakelgusida: t o`qibo`yichaqadamlar (2:5 masshtabda), X(t) o`qibo`yichaesa n-qadamdagiyechimajratilgan).



7.11-rasm. FERXYULST-Perl diskret tenglama yechimining evolyutsiyasi x_0=0,1, r=0,35.

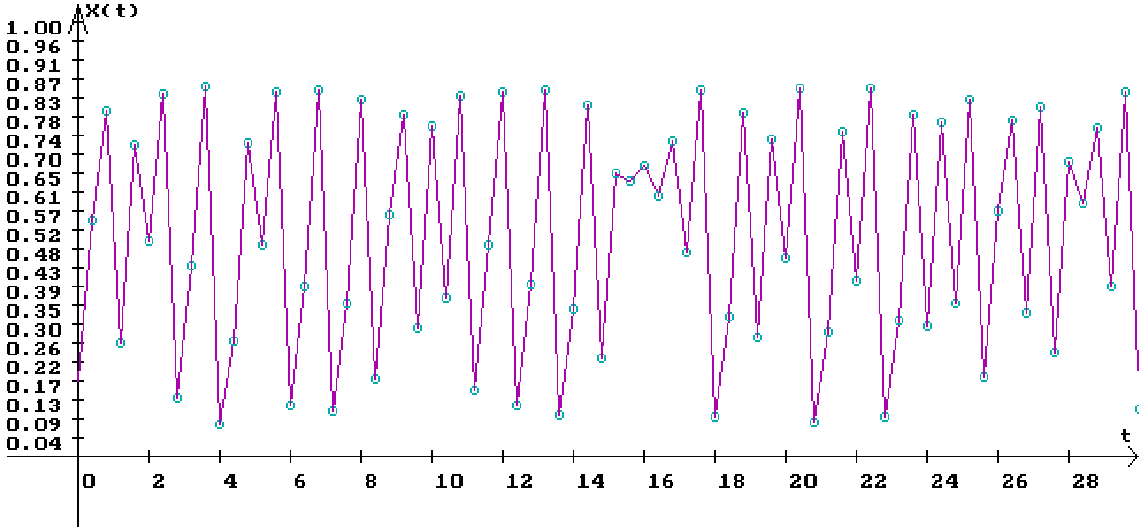
Qayd etish joizki, r qanchalik kichik bo`lsa, diskret Model o`zini shunchalik uzluksiz Model singari tutadi.

Ammo r ning ortib borishi bilanoq, Ferxyulst-Perl tenglamaning diskret yechimi o`zining uzluksiz analogidan tobora chetlashib boradi –r>0,75 da u ikkita qiymat orasida tebranishni boshlaydi, bifurkatsiya hodisasi boshlanadi (7.12-rasm)



7.12-rasm. FERXYULST-Perldiskrettenglamayechiminingevolyutsiyasix_0=0,5, r=0,81.

Rningqiymatitoboraortibborishibilanoq, yechimyanabirnechta bifurkatsiyadano`tadi (4,8,.... qiymatlar orasida tebranadi) va r>0,893 da tartibsiz bo`lib qoladi (7.13-rasm).

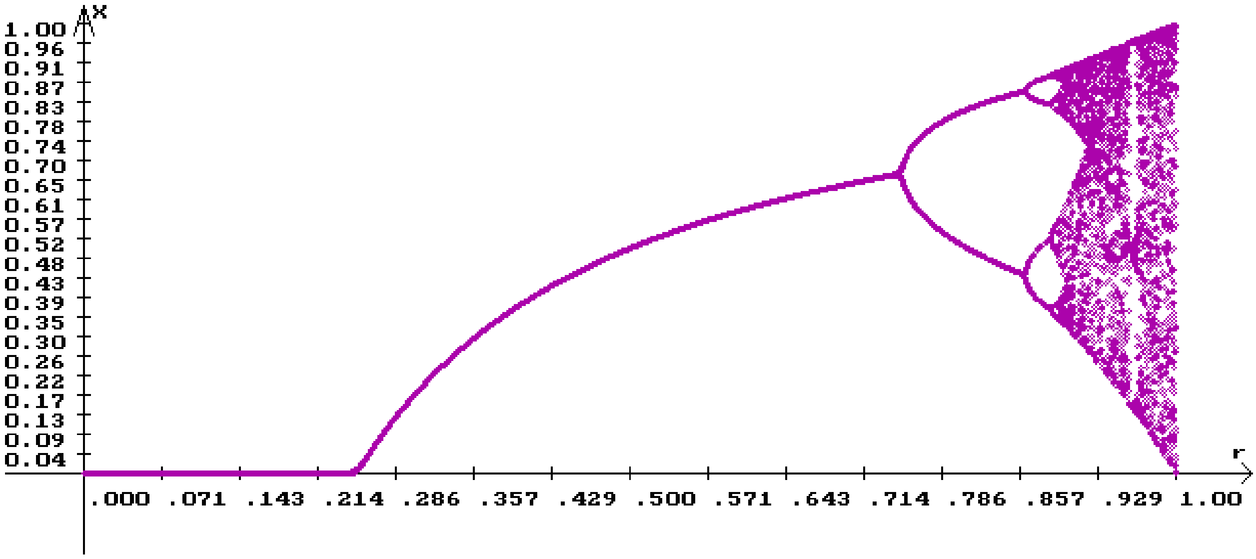


7.13-rasm. FERXYULST-Perldiskrettenglamayechimininingevolyutsiyasi.

x_0=0,2, r=0,978.

Agarda abstsissalar o`qi bo`yicha r parametrningqiymatlarini kichik qadam bilan, ordinata o`qi bo`yicha esa diskret tenglamaning yechimini katta qadamlar bilan (ideal ko`rinishda - cheksiz qadamlardan so`ng) ajratib, uni RX fazodagi nuqta bilan belgilasak, natijada biz diskret modelning attraktlar to`plamiga ega bo`lamiz.

7.14-rasmda birinchi va ikkinchi bifurkatsiya nuqtalarini ko`rish mumkin, shuningdek, bu yerda tartibsiz harakatlardagi attraktorning murakkab tuzilmasi yaqqol ko`zga tashlanmoqda.



7.14-rasm. rningharxilqiymatlari (abstsissalaro`qi) ganisbatankatta n lardaFERXYULST-Perldiskretmodeliyechimining (ordinatalaro`qi) hatti-harakati.

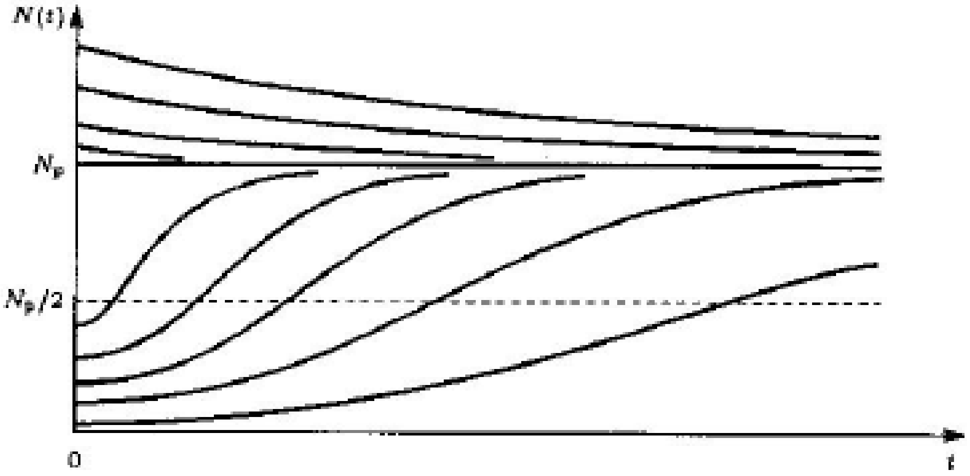
MA'RUZA №11.
POPULYATSIYACHIZIQSIZMODELININGUCHTURDAGIREJIMI.

Ko`pginarealjarayonlarvaulargamoskeluvchimatematikmodellarchiziqsizdir. Chiziqlimodellarrealjarayonlarningxususiyholibo`lib, ularrealvoqelikkabirinchiyaqinlashishsifatidaxizmatqiladi. Agaryashavchanlikresurslariningcheklanganligie'tiborgaolinadiganbo`lsa, populyatsiyamodellarihamchiziqsiztenglamagaaylanadi. Ularnihosilqilishuchunquyidagichafarazqilinadi:

1. atrofmuhittomonidanta'minlanadigan «muvozanatli» populyatsiyasoni N_P mavjud;
2. populyatsiyasoniningo`zgarishtezligimuvozanatqiymatidanog`ishmiqdorigako`paytirilganpopulyatsiyasonigaproportsional, ya'ni

$$\frac{dN}{dt} = \alpha \cdot \left(1 - \frac{N}{N_P}\right) \cdot N, \qquad \alpha > 0. \qquad (1)$$

Ushbutenglamada $(1 - N/N_P)$ hadpopulyatsiyasonining «to`yinganlik» mexanizminita'minlaydi, ya'ni $N < N_P$ $(N > N_P)$ dapopulyatsiyasoniningo`sishtezligimusbat (manfiy) vaagar $N \to N_P$ danolgaintiladi.



8.1-rasm. Harxilboshlang`ichpopulyatsiyasoni $N(0)$ gamoskeluvchi logistikegrichiziqlar.

(1) tenglamaniquyidagichao`zgartiramiz:

$$\frac{dN}{N_P - N} + \frac{dN}{N} = \alpha \cdot dt\,.$$

Ushbutenglamaniintegrallab, quyidagigaegabo`lishmumkin:

$$-\ln(N_P - N) + \ln N = \alpha \cdot t + C\,.$$

$N(t=0) = N(0)$ shartdanintegrallashdoimiysiningqiymatinianiqlaymiz:

$$C = \ln(N_P - N(0))^{-1} \cdot N(0).$$

Natijadapopulyatsiyasoniuchunquyidagitenglikkaegabo`lishmumkin:

$$N = N_P \frac{N(0)}{N_P - N(0)} e^{\alpha \cdot t} - N \frac{N(0)}{N_P - N(0)} e^{\alpha \cdot t}$$

yoki

$$N(t) = \frac{N_P N(0) \cdot e^{\alpha \cdot t}}{N_P - N(0)\left(1 - e^{\alpha \cdot t}\right)}\,.$$

Ushbufunktsiyabilanifodalanadigan $N(t)$ funktsiyaningtabiatirasmdako`rsatilganlogistikegrichiziqbilanifodalanadi.

Ixtiyoriyboshlang`ichpopulyatsiyasoni $N(0)$ dapopulyatsiyasonimuvozanatqiymati N_P gaintiladi.
MALTUSmodelidanfarqlio`laroqushbuholdamuvozanatturg`unbo`ladi. Ya’ni, MALTUSmodeliganisbatanushbuModelpopulyatsiyadinamikasinirealroqifodalaydi.

MA’RUZA №12.

RAQOBATNING AYRIM MODELLARI.

«Yirtqich – o`lja» sistemasiningo`zaromunosabatmodeli.

Yirtqichvao`ljaningsistemasining o`zgarishibir – birigabog`liq, ya’niularo`zarota’sirbilanyashaydi. «Yirtqich–o`lja» sistemasiningoddiymatematikmodeliquyidagifarazlargaasoslangan:

1) O`ljapopulyatsiyasiningsoni*N*vayirtqichpopulyatsiyasiningsoni*M*faqatvaqtningfunktsiyalaridir: $N(t)$, $M(t)$;

2) O`zarota’sirbo`lmasa, populyatsiyasonlariMALTUSmodeliasosidao`zgaradivabundayirtqichlarsonikamayadi, o`ljalarsoniesao`sadi, ya’ni:

$$\frac{dN}{dT} = \alpha N,\ \frac{dM}{dt} = -\beta M,\ \alpha > 0,\ \beta > 0;$$

3) Populyatsiyasonlariningtabiiyo`zgarishlari, ya’ni o`ljalarning tabiiy o`lishi va yirtqichlarning tabiiy ko`payishiahamiyatgaegaemas;

4) Ikkala populyatsiya sonlarining to`yinganlik effekti htisobga olinmaydi;

5) O`ljalarsoniningo`sishtezligiyirtqichlarsoniga, ya’ni $cM\ (c > 0)$ miqdorga nisbatan proportsional ravishda kamayadi, yirtqichlarsoniningo`sishiesao`ljalarsoni, ya’ni $dN\ (d > 0)$miqdorga nisbatan proportsionalko`payadi.

Yuqorida keltirilgan farazlarnibirlashtirib, Lotka-Voltertenglamalarsistemasinihosilqilishmumkin:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = (\alpha - cM) \cdot N \\ \dfrac{dM}{dt} = (-\beta + dN) \cdot M \end{cases} \qquad (1)$$

Ushbutenglamalarsistemasidan $N(0) = N(t=0)$, $M(0) = M(t=0)$boshlang`ich shartlar asosida ixtiyoriy vaqt $t > 0$ momentiuchunpopulyatsiyalarsoninianiqlashmumkin.

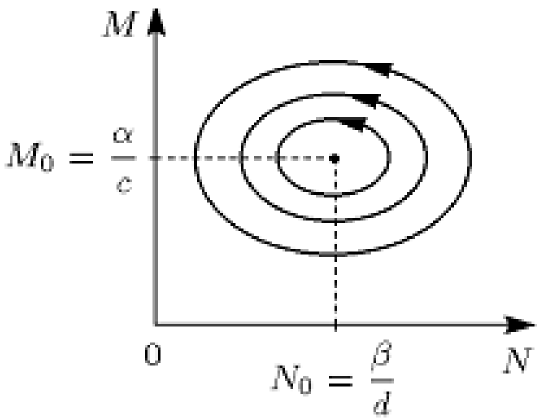
(1) tenglamalar sistemasi muvozanat holatiga, ya’ni vaqtga bog`liq bo`lmagan yechimga ega:

$$M_0 = \frac{\alpha}{c}, \qquad N_0 = \frac{\beta}{d}. \qquad (2)$$

Sistemaning muvozanat holati (2) ni turg`unligini o`rganamiz. Buning uchun quyidagi savollarga javob berish lozim bo`ladi: agar populyatsiyalarning boshlang`ich sonlari (2) bilan bir xil bo`lsa, vaqt o`tishi bilan ularning soni qanday o`zgaradi; qandaydir sababga ko`ra populyatsiyalar sonlari M_0, N_0 miqdorlardan og`sa, ular muvozanat holatiga qaytadimi; agar populyatsiyalarning boshlang`ich sonlari $N(0)$, $M(0)$ sistemaning muvozanat holati M_0, N_0 lardan sezilarli farq qilsa, sistema vaqt o`tishi bilan $M_0$, $N_0$ miqdorlarga nisbatan qanday o`zgaradi.

Yuqorida keltirilgan savollarga javob topish uchun quyida keltiriladigan mulohazalardan foydalanamiz. Chiziqsiz tenglamalar sistemasi (1) ni N, M o`zgaruvchilar tekisligida o`rganish qulayroqdir. Shu maqsadda sistemaningbirinchitenglamasiniikkinchitenglamasigabo`lamiz:

$$\frac{dN}{dM} = \frac{(\alpha - cM) \cdot N}{(-\beta + dN) \cdot M}. \qquad (3)$$



(2) tenglamani qo`yidagichaalmashtiramiz:

$$(-\beta + d \cdot N) \cdot MdN = (\alpha - cM) \cdot NdM. \qquad (*)$$

(*) ni harikkalatomoniniNMgabo`lib, uni quyidagi ko`rinishga keltiramiz:

$$\beta\frac{dN}{N} - d\cdot dN + \alpha\frac{dM}{M} - c\cdot dM = 0. \qquad (4)$$

(4) niintegrallaymiz:

$$\beta\ln N - d\cdot N + \alpha\ln M - cM = const.$$

Integrallash doimiysi *sonst*boshlang`ichshartlar $N(0)$va$M(0)$bilananiqlanadi.

Shundayqilib, (1) sistemaqo`yidagiyechimgaega:

$$\ln N^{\beta} + \ln e^{-d\cdot N} + \ln M^{\alpha} + \ln e^{-cM} = \ln C$$

yoki

$$N^{\beta}e^{-d\cdot N} = C\cdot M^{-\alpha}e^{cM}, \quad C > 0. \qquad (5)$$

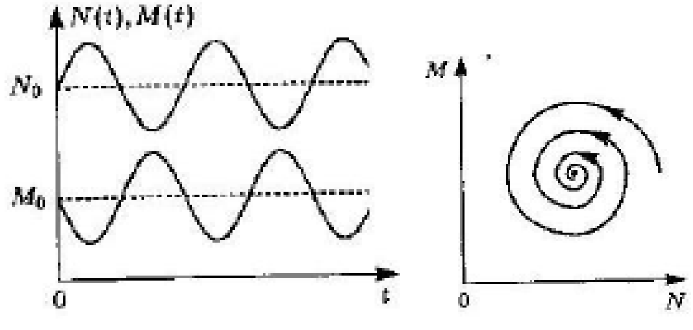
(5)dan qo`yidagicha hulosa qilish mumkin:

a)agar $N(0) = N_0,\ M(0) = M_0$ bo`lsa, hammavaqtmobaynidapopulyatsiyalarsonio`zgarmasdanqoladi.

b) yirtqichvaxuddishuningdek,o`ljaningpopulyatsiyasonlarimuvozanatholatidanozgina o`zgarishi, bupopulyatsiyasonlariningvaqto`tishibilanmuvozanatholatigaqaytmasligigaolibkeladi.

v) agarboshlang`ichmuvozanatholatidanog`ishkattabo`lsa, $N(t),\ M(t)$ funktsiyalarningtabiati xuddi b) dagidek, ya'ni sistemavaqto`tishibilanmuvozanatholatigaqaytmaydi.

Ushbu xulosalar shuni anglatadiki, yirtqich va o`ljalar populyatsiya sonlari muvozanat holati atrofida davriy tebranib turadi. Tebranish amplitudasi va uning davri populyatsiyalarning boshlang`ich sonlari $N(0),\ M(0)$ orqali aniqlanib, $N(t)$ ning maksimal qiymatiga $M(t)$ning minimal qiymati mos keladi va aksincha.



Ikkitur o`rtasidagi o`zaro munosabatni matematik jihatdan to`laroq xarakterlash uchun populyatsiya sonlarining egallab turgan hududlarida notekis taqsimlanganligini hisobga olish lozim bo`ladi (ushbu holga xususiy hosilali tenglamalar sistemasi mos keladi).

Volter-Lotka modeli

“Yirtqich-o`lja” sistemasiningo`zaro ta’sirlashuv modelini 1925-1927 yillarda Lotka va Volterralar bir-biridan mustaqil ravishda taklif etdilar. Ikkita differentsial tenglama vositasida o`lja$x_1$ va $x_2$ yirtqichning – ikkita biologik populyatsiyaning vaqt bo`yicha o`sish dinamikasini modellashtiradi. O`ljalar o`zgarmas *a* tezlik bilan ko`payadi, ularning soni esa yirtqichlar tomonidan yeb qo`yilishi tufayli kamayadi deb faraz qilinadi. Yirtqichlar ozuqaning miqdoriga proportsional tezlik bilan (*d* ga teng bo`lishi shart bo`lmagan *b*koeffitsiyentbilan) ko`payadi va tabiiy ravishda o`ladi (o`limi *s* konstanta bilan aniqlanadi):

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = (a - b\cdot x_2)\cdot x_1 - \alpha\cdot(x_1)^2 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = (-c + d\cdot x_1)\cdot x_2 - \alpha\cdot(x_2)^2 \end{cases},$$

bu yerdaα – tur ichidagi o`zaro ta’sirlashuv koeffitsiyenti (muhit uchun kurash), tahlilni soddalashtirish maqsadida biz uni yirtqich va o`lja uchun bir xil deb deb faraz qilamiz.

Muvozanat nuqtasi yaqinida modelni tahlil qilamiz, buning uchun sistemaning muvozanat holatini topamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = 0 \\ \dfrac{dx_2}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a - b\cdot x_2)\cdot x_1 - \alpha\cdot(x_1)^2 = 0 \\ (-c + d\cdot x_1)\cdot x_2 - \alpha\cdot(x_2)^2 = 0 \end{cases}$$

Bunday sistema to`rtta statsionar nuqtaga ega:

$$(0, 0)$$

$$\left(0,\ -\frac{c}{\alpha}\right)$$

$$\left(\frac{a}{\alpha},\ 0\right)$$

$$\left(\frac{b\cdot c+\alpha\cdot a}{b\cdot d+\alpha^2},\ \frac{a\cdot d-\alpha\cdot c}{b\cdot d+\alpha^2}\right)$$

Birinchi nuqta hech qanday qiziqish uyg`otmaydi; ikinchi va uchunchi nuqtalar bilan ta’riflanuvchi vaziyat modelning shartiga (urg`ochilar soni nolьga teng), ayrim sharoitlarda esa fizik haqiqatga ham (urg`ochilarning soni manfiy) to`g`ri kelmaydi. Shuning uchun, to`rtinchi statsionarnuqtaga to`xtalamiz.

Masalan, sistemani ikkinchi nuqtadan foydalanib, kanonik ko`rinishga keltiramiz ($x=x_1$, $y=x_2$ bo`lsin):

$$\begin{cases} \xi = x + \dfrac{b\cdot c+\alpha\cdot a}{b\cdot d+\alpha^2} \\ \eta = y + \dfrac{a\cdot d-\alpha\cdot c}{b\cdot d+\alpha^2} \end{cases}$$

U holda

$$\begin{cases} \dfrac{d\cdot\xi}{dt} = -\dfrac{(\xi\cdot b\cdot d+\xi\cdot\alpha^2-b\cdot c-\alpha\cdot a)\cdot(\eta\cdot b-2\cdot a+\alpha\cdot\xi)}{b\cdot d+\alpha^2} \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{(\eta\cdot b\cdot d+\eta\cdot\alpha^2-a\cdot d+\alpha\cdot c)\cdot(\xi\cdot d-2\cdot c-\alpha\cdot\eta)}{b\cdot d+\alpha^2} \end{cases},$$

ga ega bo`lamiz. $\alpha=0$ bo`lgandagi xususiy holni o`rganib chiqamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{(\xi bd-bc)\cdot(\eta b-2a)}{bd} \\ \dfrac{d\eta}{dt} = \dfrac{(\eta bd-ad)\cdot(\xi d-2c)}{bd} \end{cases}$$

U holda:

$$\begin{vmatrix} 2a-\lambda & \frac{ac}{d} \\ \frac{ad}{b} & 2c+\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 2\lambda(c-a) - 3ac = 0$$

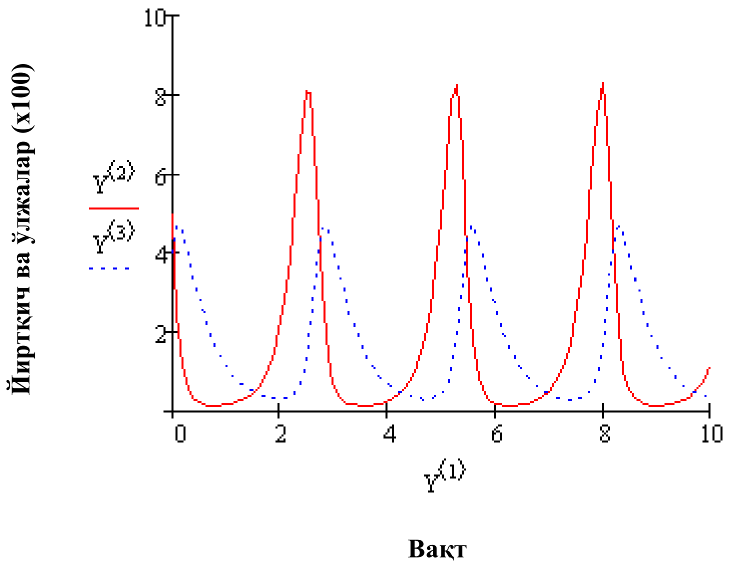
Xarakteristik tenglamaning ildizlari quyidagi ko`rinishga ega bo`ladi:

$$\lambda_{1,2} = a - c \pm \sqrt{c^2 + a^2 + ac}$$

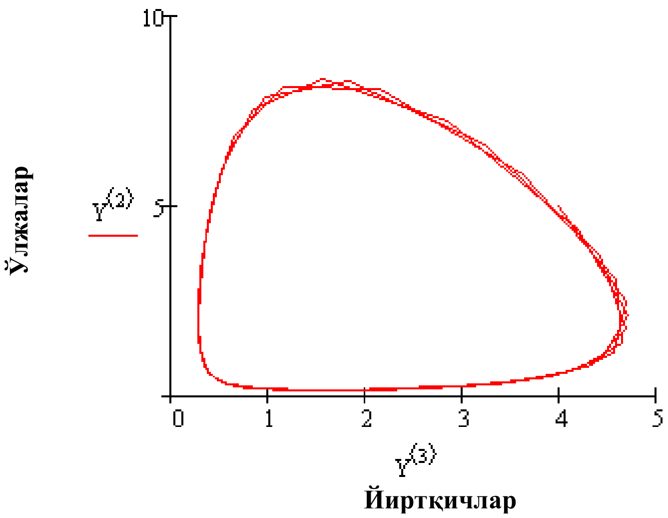
Shunday qilib, agar$c^2+a^2+ac>0$ bo`lsa, u holda ikkala xususiy qiymat–haqiqiy son va o`ziga xos nuqta-tugun bo`ladi. $c^2+a^2+ac>0$ da esa fokusga va xos sonlar mavhum bo`lgan xususiy holda markazga ega bo`lamiz.

Agarda$\alpha>0$ yoki$\alpha<0$ bo`lsa, u holda modelning mos ravishda turg`unligi va turg`unsizligini kuzatish mumkin.

Agarda tur ichidagi raqobat yo`q deb qaralsa ($\alpha=0$), u holda sistemaning yechimi tsiklik ravishda evolyutsiyaga uchraydi va natijada biz fazali tekislikda markazga ega bo`lamiz:

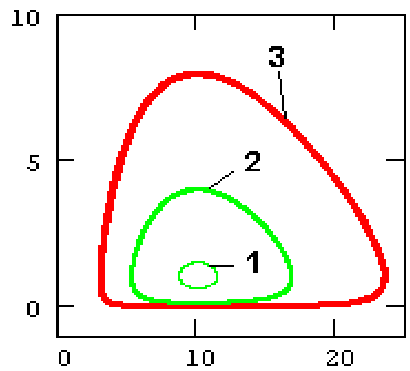


9.2-rasm. Turichidaraqobatbo`lmaganholdaVolter-Lotkamodelining evolyutsiyasi, yirtqichlarningboshlang`ichsonix^0_1=500 va o`ljalarningsoniesa x^0_2=400, a=4, b=2,5, c=2, d=1.

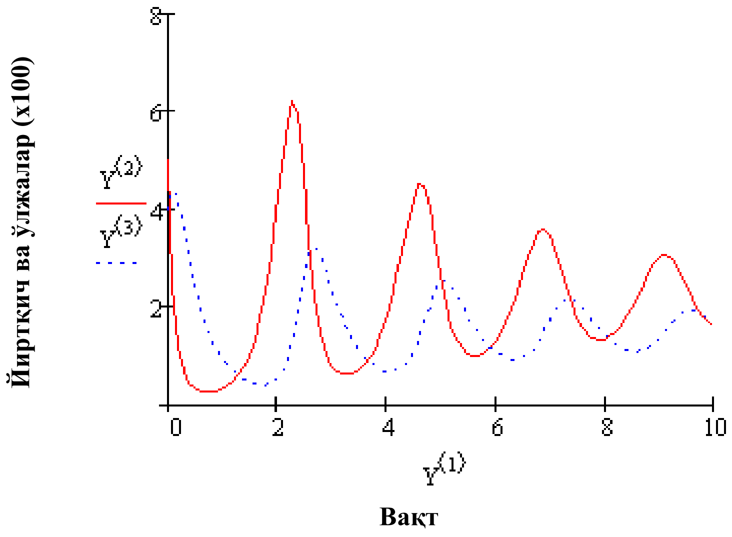


9.3.-rasm. 9.2-rasmningfazalitasviri.

Agarda tur ichidagi raqobat muhitning birlashuvi (tutashish) ga olib kelsa (α=0.1), u holda yirtqich va o`ljalarning soni vaqt o`tishi bilan kamayadi va biz so`nuvchi tebranishlarga ega bo`lamiz.

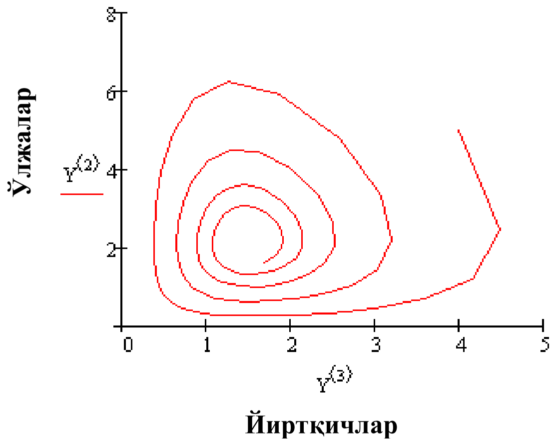


9.4-rasm. x^0_1=1000, x^0_2=150(1); x^0_1=1000, x^0_2=400(2); x^0_1=1000, x^0_2=800(3)dagifazalitasvirlar.



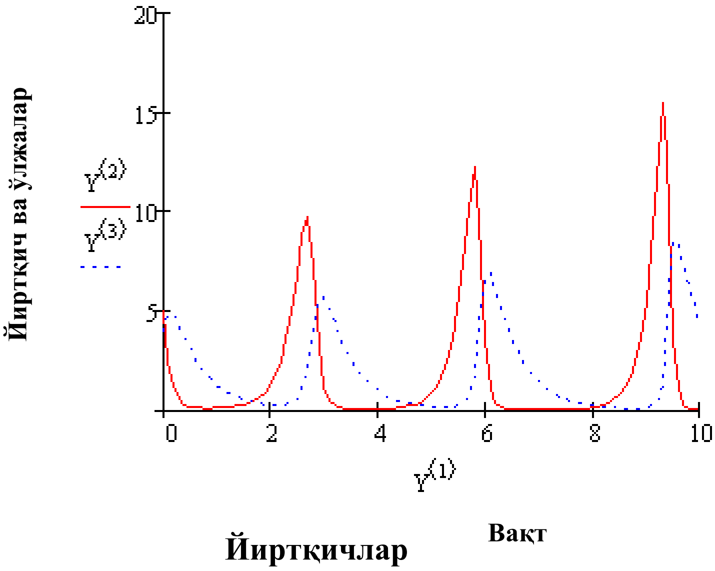
9.5-rasm. Volter-Lotkamodeliningmusbatkoeffitsiyentli (α=0.1) raqobatbilanevolyutsiyasi, yirtqichlarningboshlang`ichsoni$x^0{}_1$=500, o`ljalarnikiesa$x^0{}_2$=400, a=4, b=2,5, c=2, d=1.

Fazali tasvir bo`lib esa turg`un fokus xizmat qiladi.



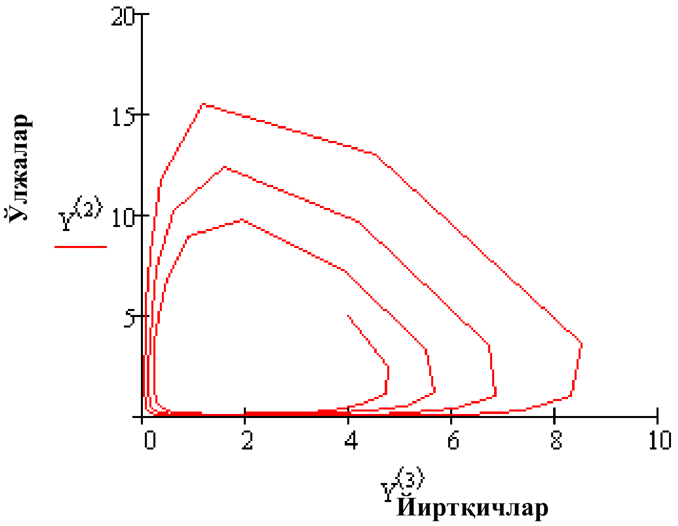
9.6-rasm. 9.5-rasmningfazalitasviri.

Agarda raqobat muhitning boyishiga olib kelsa, ya’ni eng kuchlilargina tirik qolsa (α<0, α=-0.04), u holda yirtqich va o`ljalarning soni tsiklik tebranishlarni amalga oshirgan ravishda vaqt o`tishi bilan ko`payadi (6-rasm).



9.7-rasm. Manfiykoeffitsiyentli (α=-0.04) raqobatasosidaVolter-Lotka modeliningevolyutsiyasi, yirtqichlarningboshlang`ichsoni$x^0_1$=500, o`ljalarningsoniesax^0_2=400,a=4, b=2,5, c=2, d=1.

Bu holda fazoviy tasvir turg`un bo`lmagan fokus ko`rinishida bo`ladi:



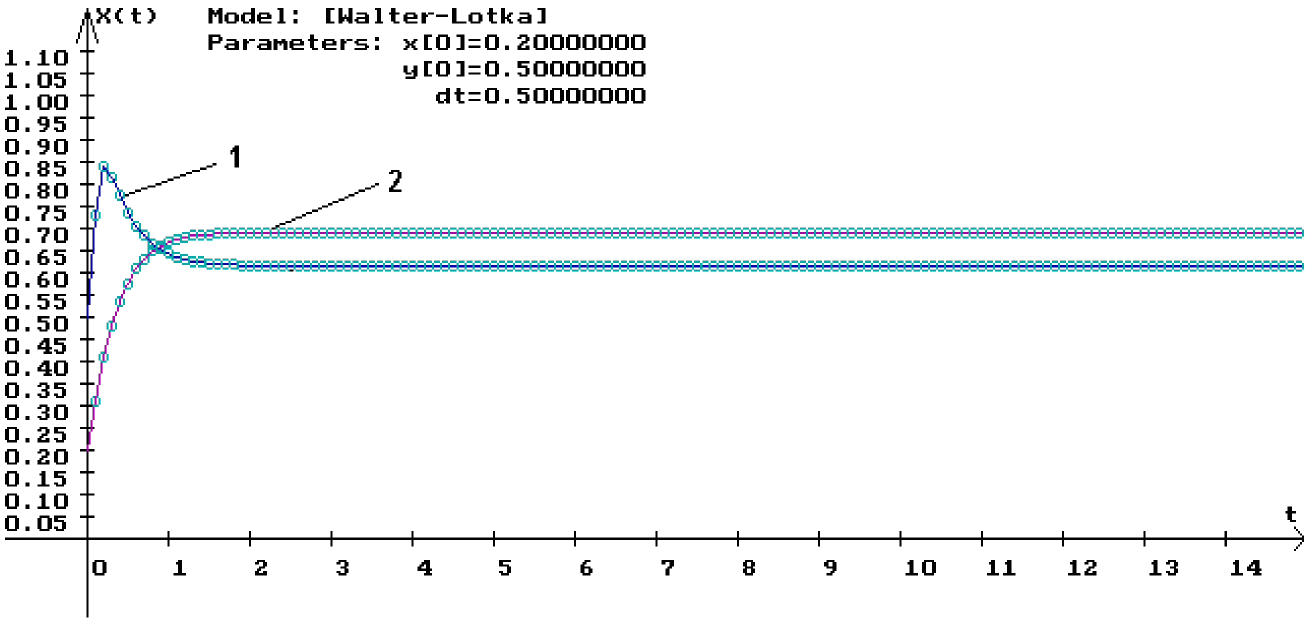
9.8-rasm. 9.7-rasmningfazalitasviri.

Sonli tajribalardan quyidagi xulosaga kelish mumkin: yechim tsiklik ravishda taraqqiy etadi, jumladan, α=0 da tsikl to`laligicha tutashadi (markaz fazali tekislikda), $\alpha$>0 da tsiklning har bir qadamida yechim tobora kamayib boradi (turg`un fokus), α<0 da esa – ortadi (turg`un bo`lmagan fokus). Tabiiyki, modelning hech bir o`rnida muhitning sig`imi hisobga olinmaydi, shuning uchun, bu yerda MALTUS modelidagi kabi, biz haqiqatda biroz farq qiluvchi tasvirga ega bo`lamiz: na yirtqichlar soni, na o`ljalar soni cheksiz ravishda o`sib borishi mumkin emas.

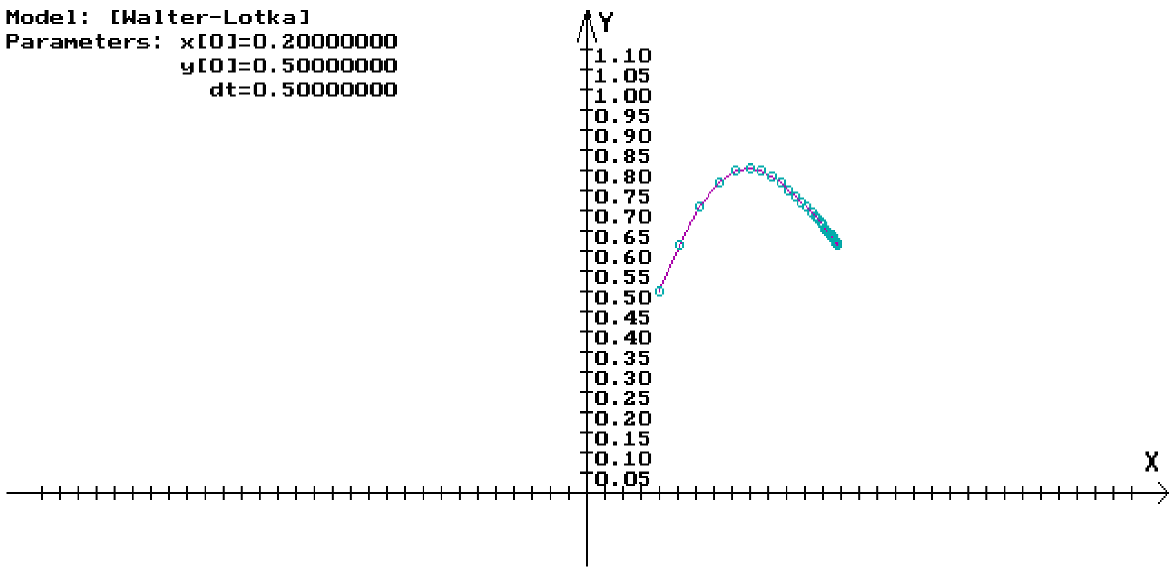
Volter-Lotka modelini o`rganib chiqish davomida uning diskret analogi to`g`risida ham aytib o`tish lozim:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + r_x \cdot \Delta t \cdot (1 - x_n - \mu_x \cdot y_n) \cdot x_n \\ y_{n+1} = y_n + r_y \cdot \Delta t \cdot \left(y^* - y_n - \mu_y \cdot x_n\right) \cdot y_n \end{cases}$$

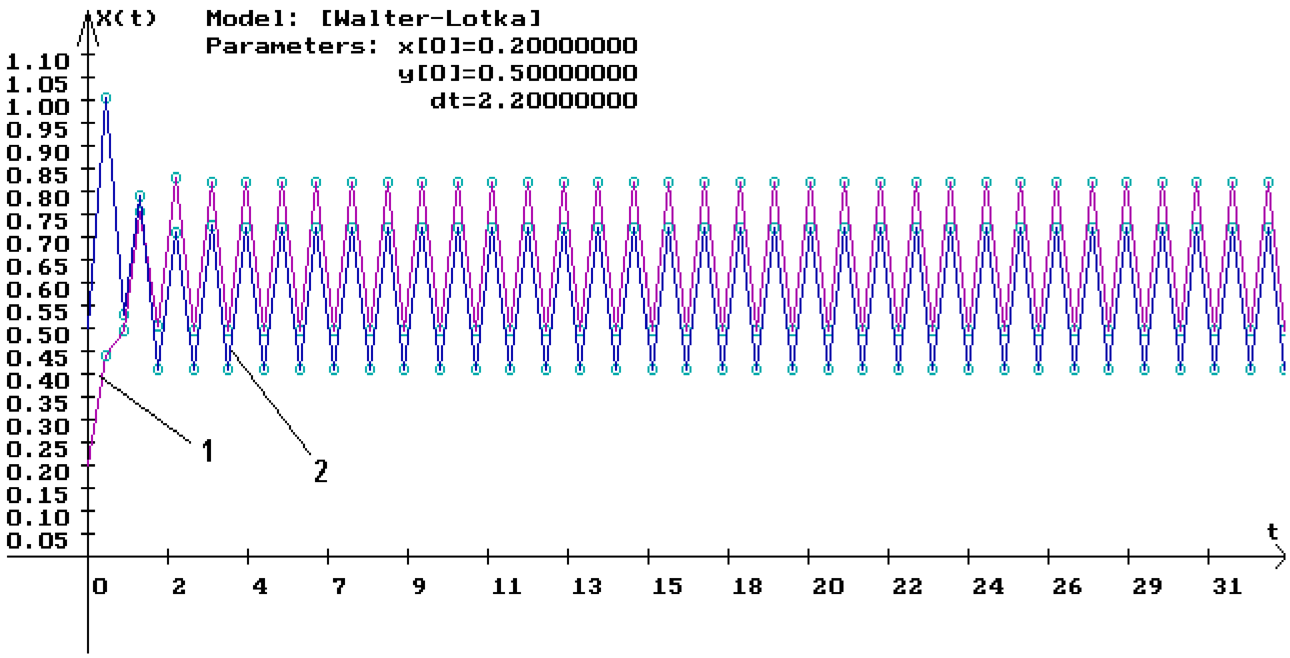
FERXYULST-Perl modelidagi kabi, diskret Model kichik Δtlarda o`zining uzluksiz analogidan farq qilmaydi. Masalan, Δt=0,5 da biz tugunga ega bo`lamiz (8-rasm). Ammo vaqt bo`yicha qadam ortib borishi bilanoq, diskret Model uzluksizmodelga nisbatan tobora uzoqlashib boradi va Δt>2 da bifurkatsiya hodisasi kuzatiladi. Δt>2.4 da sistemaning hatti-harakati tartibsiz bo`lib qoladi (9.12-9.13 rasmlar).



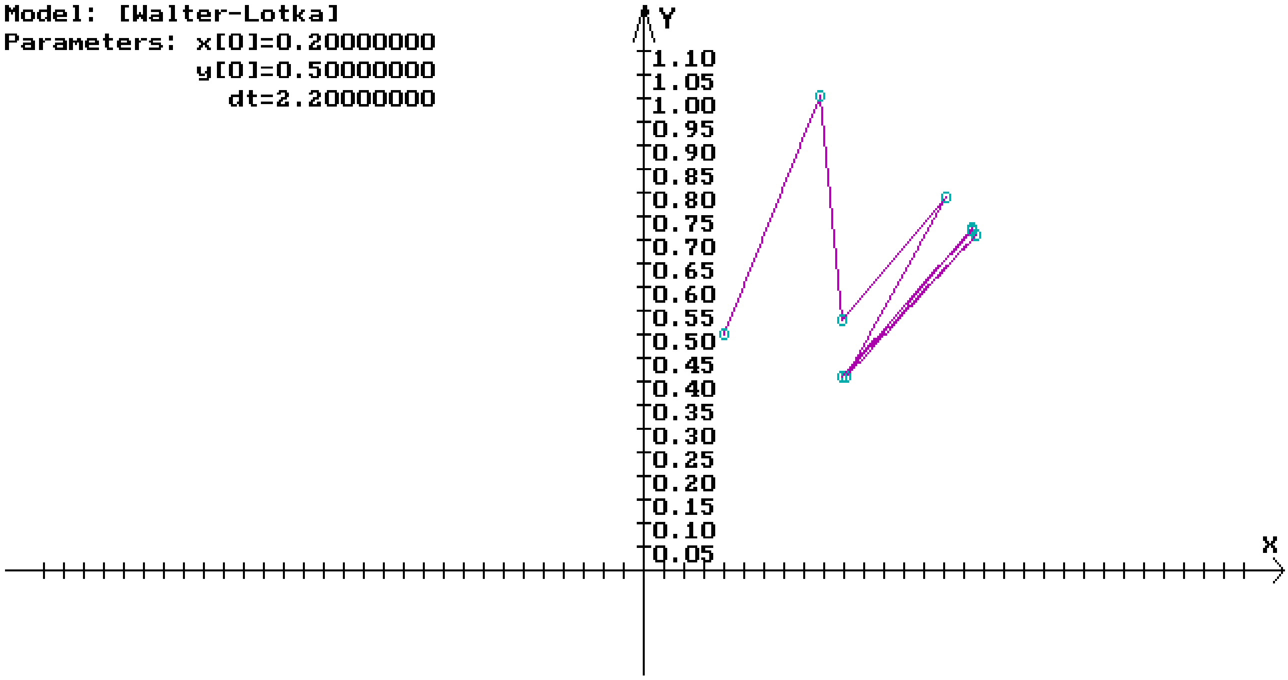
9.9-rasm. Volter-Lotkadiskretmodeliningx$_0$=0,2, y$_0$=0,5, Δt=0,5dagi hatti-harakati (1 – y(t); 2 – x(t) egrichiziqlar. Buyerdavakelgusidar_x= r_y=1, y^*=1,1, □$_x$=0,5, □$_y$=0,7 debolinadi).



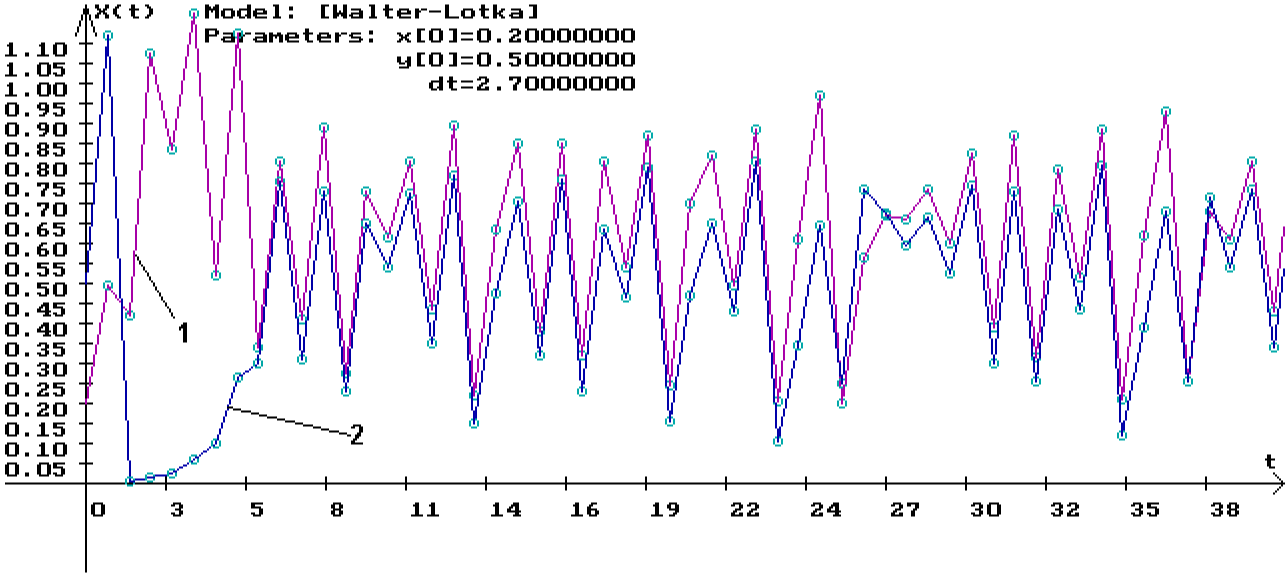
9.10-rasm. 9.9-rasmningfazalitasviri.



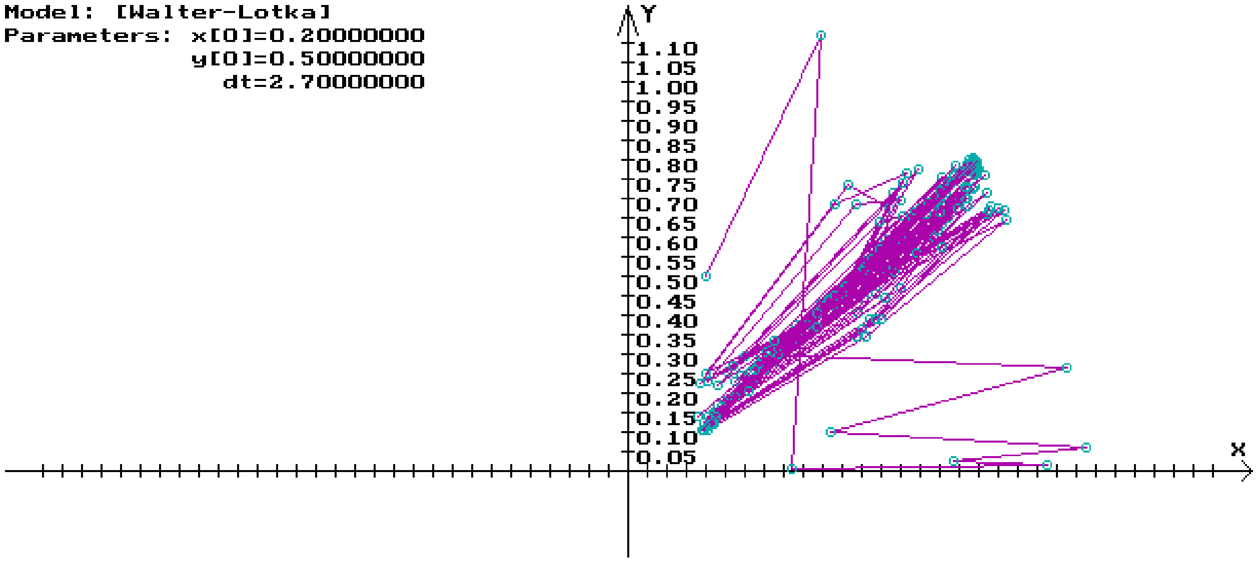
9.11-rasm. Volter-Lotkadiskretmodeliningx$_0$=0,2, y$_0$=0,5, Δt=2,2dagi hatti-harakati (1 – x(t); 2 – y(t) egrichiziqlar).



9.12-rasm. 9.11-rasmning fazali tasviri.



9.13-rasm. Volter-Lotkamodeliningx$_0$=0,2, y$_0$=0,5, Δt=2,7dagi
hatti-harakati (1 – x(t); 2 – y(t) egrichiziqlar).



9.14-rasm. 9.13-rasmningfazalitasviri.

MA’RUZA №13.
IKKIDAVLATORASIDAGIQUROLLANISHPOYGASIMODELI.

Ushbu modelni hosil qilishda vaqto`tishibilanharbirdavlatdagiqurollarmiqdoriuchtafaktorgabog`liqholdao`zgaradidebfarazqilindi:

1) raqibdavlatdagiqurollarmiqdori;
2) mavjudqurollarningeskirishi;
3) raqiblar o`rtasidagi o`zaro ishonchsizlik darajasi.

Qurollanishning o`sishi va kamayishi ko`rsatilgan faktorlarga proportsional bo`ladi, ya’ni

$$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} = \alpha_1(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dM_2}{dt} = \alpha_2(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_2(t) \end{cases} \tag{1}$$

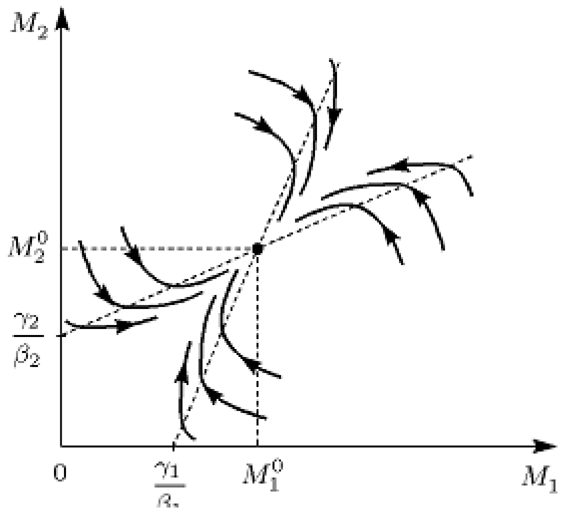
(5)da quyidagi belgilashlar qo`llanilgan: $M_1$, $M_2>0$ qurollar miqdorlari,$\alpha_1(t)>0$, $\alpha_2(t)>0$ – qurollarni eskirish tezligini xarakterlovchi koeffitsiyentlar, $\gamma_1\geq 0$, $\gamma_2\geq 0$ funktsiyalar qurol miqdoriga bog`liq emas deb hisoblaniladi va boshqa sabablar bilan aniqlanib, raqiblar o`rtasidagi ishonchsizlik darajasini ifodalaydi.

Bu Model qurollanish poygasi dinamikasiga ta’sir etuvchi ko`pgina muhim faktlarni hisobga olmasada, lekin bir qator kerakli ma’lumotlarni tahlil qilish imkonini beradi.

Agar α_i, β_i(i = 1,2) funktsiyalar vaqtga bog`liq bo`lmasa, (1) model quyidagi ko`rinishga keladi.

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dt} &= \alpha_1 M_2 - \beta_1 M_1 + \gamma_1 \\ \frac{dM_2}{dt} &= \alpha_2 M_1 - \beta_2 M_2 + \gamma_2 \end{aligned} \tag{2}$$

(1) tenglama $\dfrac{dM_1}{dt} = 0, \dfrac{dM_2}{dt} = 0$ muvozanat holatlariga ega. M_1^0, M_2^0 – muvozanat qiymatlari quyidagi shartdan aniqlanadi:



$$\begin{cases} \alpha_1 M_2 - \beta_1 M_1 + \gamma_1 = 0 \\ \alpha_2 M_1 - \beta_2 M_2 + \gamma_2 = 0 \end{cases}$$

$$M_1^0 = \frac{\alpha_1\gamma_2 + \beta_2\gamma_1}{\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2}, M_2^0 = \frac{\alpha_2\gamma_1 + \beta_1\gamma_2}{\beta_1\beta_2 - \alpha_1\alpha_2} \quad (3)$$

(3) dan ko`rinib turibdiki, $M_1^0>0$, $M_2^0>0$ larda muvozanat holat mavjud bo`lishi uchun $\beta_1\beta_2>\alpha_1\alpha_2$(4) shart

10.1-rasm.bajarilishi kerak.

Agar α_1, β_1, $\beta_2$lar o`zgarmas bo`lsa,α_2 esa o`ssa, bu shuni bildiradiki, birinchi davdat qurollanish sohasiga qarashlarini, strategiyasini o`zgartirmaydi, ikkinchi davlat esa qurollar eskirishi bilan qurollanishga zo`r beradi. U xolda$\alpha_2$ yetarlicha katta qiymatga erishsa, muvozanat xolati buziladi va (4) tengsizlik bajarilmaydi. Agar$\gamma_1$va $\gamma_2$ nolga teng bo`lsa, muvozanat holati ikkala davlatda ham qurollar yo`qligiga mos keladi. $M_1(t)$ va $M_2(t)$ funktsiyalar t usishi bilan (4) shart bajarilgan vaqtlarda muvozanat qiymatlariga intiladi.

Shundayqilib, muvozanatturg`un, ya’nimuvozanatholatidagiog`ishlarvaqto`tishibilankichikmiqdorlargaaylanibboradi.

MA’RUZA №15. BIOLOGIKMODELLAR.

Ushbu mavzuda biologik sistemalar va jarayonlarni modellashtirishni keltirib o`tamiz.

Ma’lumki, har bir organizmlar jo`ftligi yetuklik davrigacha tirik qoladiganlariga qaraganda ancha ko`proq nasl qoldirishiga o`z vaqtida Ch.Darvin e’tibor bergan edi. Ya’ni, har bir biologik tur geometrik progressiya bilan ko`payishga moyil ekan.

Oddiy holatda ko`payish progressiyasini o`rganish uchun populyatsiya soni N vaqt t bo`yicha o`zgaradi deb faraz qilamiz. Bunda populyatsiyaning genetik strukturasi e’tiborga olinmaydi.

Populyatsiyaning tabiiy o`sish tezligi $r$ ma’lum bir turga tegishli populyatsiyani harakterlovchi asosiy ko`rsatkichdir. U bitta urg`ochidan birlik vaqt ichida paydo bo`ladigan avlodlarning o`rtacha sonini anglatadi:

$$r = b - d\ ,$$

bu yerda$b$ – bitta urg`ochiga birlik vaqt ichida to`g`ri keladigan o`rtacha tug`ilishlar soni; $d$ – bitta urg`ochiga nisbatan birlik vaqt ichiga to`g`ri keladigan o`rtacha o`limlar soni.

*Misol.*800 ta urg`ochidan iborat populyatsiya mavjud. Ushbu populyatsiyada bir yilda o`rtacha 150 ta urg`ochi tug`ilib, 50 ta urg`ochi vafot etsa, populyatsiyaning tabiiy ko`payish tezligi $r$ni aniqlash talab etilsin.

Javob: r = 150/800 – 50/800 = 0,125 /yil.

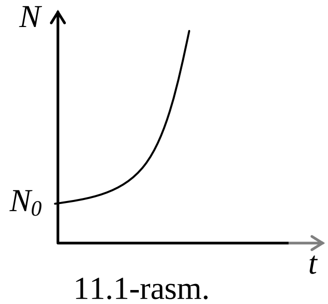
Populyatsiya sonining vaqt bo`yicha o`sish tezligini $v = dN/dt$ sifatida ifodalash mumkin. Populyatsiya soni kabi uning o`sish tezligi ham vaqtning funktsiyasidir. Shu sababli populyatsiyaning ayni paytdagi soni qancha katta bo`lsa, populyatsiyaning o`sish tezligi ham shunchalik katta bo`ladi.Populyatsiya soni Ngahechqandaycheklanishlar bo`lmaganda, populyatsiya ko`payishini quyida keltiriladigan tenglama bilan ifodalash mumkin:

$$v = \frac{dN}{dt} = (b - d)N = rN\ .$$

Agarpopulyatsiyaning boshlang`ich soni $N(t=0)=N_0$ bo`lsa, ushbu tenglamaning yechimi

$$N = N_0 e^{rt}$$

ko`rinishda bo`ladi. Uning grafigi 11.1-rasmda keltirilgan.



11.1-rasm.

Masala.Birinchi populyatsiyaning tabiiy o`sish tezligi $r_1 = 0{,}1$/yil vaikkinchi populyatsiyaniki $r_2 = 0{,}05$/yilga teng ekanligi ma'lum. Ikkinchi populyatsiyaning boshlang`ich soni birinchi populyatsiyaning boshlang`ich soniga nisbatan 2,72 marta ko`p bo`lsa, qancha vaqtdan keyin ikkala populyatsiyalar sonlari tenglashib qoladi?

Yechish.Masala shartiga ko`ra $r_1 = 0{,}1$/yil, $r_2 =$ 0,05/yil va $N_{20} = 2{,}72 N_{10}$.

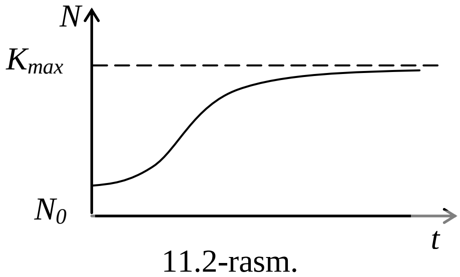
$$\frac{N_2(t)}{N_1(t)} = 1 \ \rightarrow \frac{N_{20} e^{r_2 t}}{N_{10} e^{r_1 t}} = 1$$

Oxirgi tenglikdan t = 20 ekanligini osongina aniqlash mumkin.

Javob: t = 20 yil.

Populyatsiya sonining o`sishiyashash uchun populyatsiyalar ichida raqobatni va turlar o`rtasida kurashni keltirib chiqaradi. Tabiiy abiotik va biotik omillar natijasida populyatsiya sonining o`sish tezligiga nisbatan cheklanishlar paydo bo`lishi mumkin (masalan, yashash maydoni chegaralanganligi sababli). Ushbu holatda modellashtirish metodologiyasidan foydalanib, populyatsiyaning mumkin bo`lgan maksimal o`sishi K_{max}ga populyatsiya soni N ni yaqinlashtirish (muvozanatlashtirish) katta ahamiyatga ega. Ushbu yaqinlashtirishni ko`payish tezligini ifodalovchi differentsial tenglamaning o`ng tomoniga $\left(1 - N/K_{max}\right)$ ko`paytuvchini qo`shish orqali amalga oshirish mumkin:

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K_{\max}}\right).$$



11.2-rasm.

Populyatsiya soni$N$ ning unchalik katta bo`lmagan qiymatlarida qo`shimcha ko`paytuvchining qiymati birga yaqinlashib, populyatsiya soniningvaqtga bog`liqligiga deyarli ta'sir ko`rsatmaydi. Populyatsiya sonining o`sib borishi va uning
K_{max}gatoborayaqinlashibborishibilantenglamaningo`ngqisminolgayaqinlashadi. Ushbu holatda populyatsiyaning o`sish tezligi ham nolga yaqinlashadi vapopulyatsiya o`sishining egri chizig`i $N= K_{max}$ to`g`ri chiziqqa yaqinlashadi (11.2-rasm).

O`zarota'sirlashuvchipopulyatsiyalarsoninimodellashtirish.

Ma'lumki, ekologiya uchun qiziqarli va muhim vaziyatlar har xil turdagi populyatsiyalarning o`zaro ta'sirlashuvi yoki tashqi sharoitlarning o`zgarishi bilan bog`liq bo`ladi. Ushbu vaziyatlarda hayot to`lqinlari deb nomlanuvchi populyatsiyani vaqt bo`yicha o`zgarishini xarakterlovchi populyatsiya to`lqinlari hosil bo`ladi.

Populyatsiya to`lqinlari quyida keltirilgan xususiyatlarga ega bo`lishi mumkin:

1. Populyatsiya soni davriy tebranishlargaega bo`lishi mumkin (masalan, mavsumiy);

2. Yirtqichvao`ljapopulyatsiyalariningo`zarota’sirlashuvihisobigapopulyatsi yasoniningdavriybo`lmaganyokidavriytebranishlari sodir bo`lishi mumkin;

3. Populyatsiyasoniortibketishi (populyatsiyaqulaysharoitlargatushibqolganida) mumkin;

4. Populyatsiyasonijadalsur’atlarbilanqisqarishi (epifitotiyalar, talofatlar ta’sirida) mumkin.

Turli xildagi ikkita populyatsiya bir-biri bilan bir necha xil ko`rinishdagi o`zaro munosabatda bo`lishi mumkin:

(-, -) – o`zaro raqobat, bunda ikkala populyatsiyaning yashash sharoitlari salbiy tomonga o`zgaradi;

(+,+) – simbioz;

(+,-) – yirtqich-o`lja va h.k.

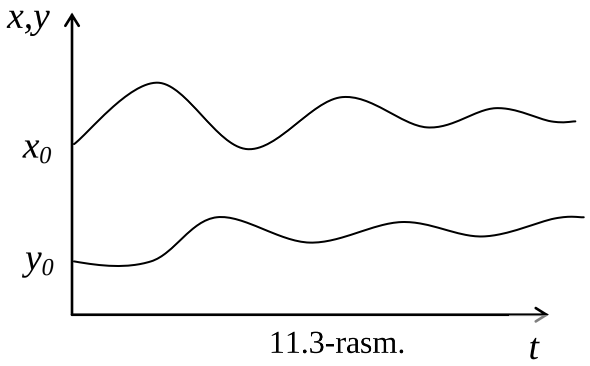
«Yirtqich-o`lja» populyatsiyalarining o`zaro munosabatini o`rganamiz. O`lja uchun yetarli darajadagi ozuqa solingan chekli hajmdagi muhitga yirtqich va o`lja joylashtirilsa, ularning soni qanday qilib o`zgarishini kuzatamiz. Bu holda modellashtirishda Lotka-Volter tenglamalaridan foydalanish mumkin:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx(1 - \dfrac{x}{K_{max}}) - cxy \\ \dfrac{dy}{dt} = gxy - fy \end{cases}.$$

Bu yerda x – o`ljalarsonini, $y$ – yirtqichlarsonini, $xy$ – o`lja va yirtqichning chekli arealda uchrashish chastotasini, r – o`lja populyatsiyasining tabiiy o`sish tezligi (yirtqichlarning ta’sirini hisobga olmagan holda), K_{max}– chekli arealda o`ljalar sonining maksimal ko`payish miqdori (odatda, yirtqichlar soni o`ljalarning soniga nisbatan ancha kam bo`ladi); c – yirtqichlar tomonidan ovni muvaffaqiyatli tarzda tugallanish koeffitsiyenti; g – yirtqichlarga nisbatan tug`ilish koeffitsiyenti (ularning ko`payish tezligi nafaqat x ga, balki y ga ham bog`liq, aniqroq qilib aytganda u $xy$ ga proportsional bo`ladi), f – yirtqichlarning tabiiy o`lish koeffitsiyenti xarakterlaydi.

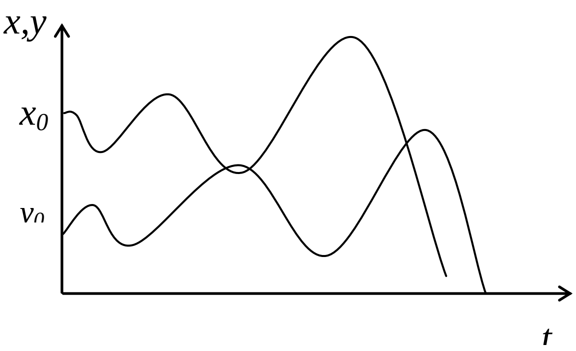
Yuqorida keltirilgan tenglamalarning yechimlari yirtqich va o`ljalar sonining to`lqinli tebranishlarini ifodalaydi. Ushbu to`lqinlarning shakli va davriyligi $x_0, y_0$ boshlang`ich shartlarga hamda tenglamada ishtirok etuvchi koeffitsiyentlarning qiymatlariga bog`liq bo`ladi. Bu yerda bir necha holatlar bo`lishi mumkin:

1. Muvozanatli bosqich (11.3-rasm). Bunday vaziyat yirtqichlar soni $y = const$ bo`lishi uchun o`zgarmas miqdordagi o`ljalardan ko`proq miqdordagi o`ljalar tug`ilishini anglatadi.



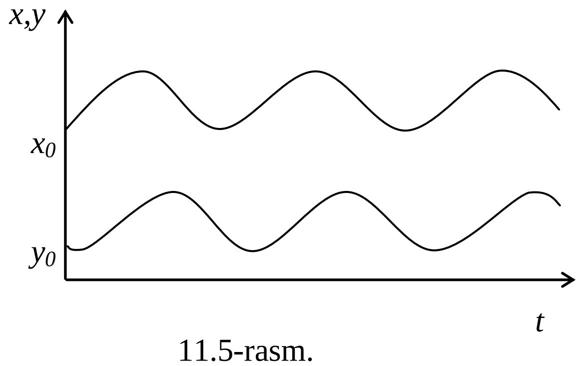
11.3-rasm.

2. O`ljalarning jadal sur’atlar bilan yeyilishi sababli yirtqichlarning ochlikdan o`lishi kuzatiladi. O`ljalarsoni $x$ nolga tenglashishigacha populyatsiya to`lqinlari amplitudalar bo`yicha yoyilib boradi (11.4-rasm).



11.4-rasm.

3. O`zgarmas amplitudali muvozanatli to`lqinlar (11.5-rasm). Bu holatda gohida o`ljalar ko`payib (kamayib), yirtqichlar kamayib (ko`payib) ketishi kuzatiladi.

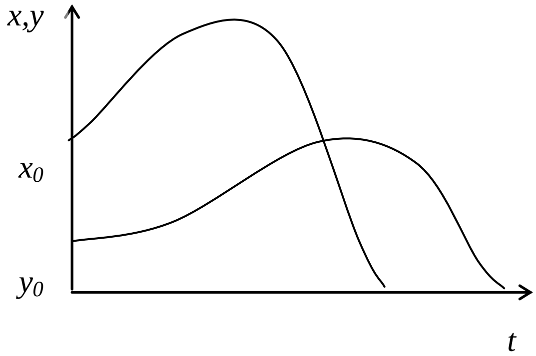


11.5-rasm.

Ilmiy manbalardan ma’lum bo`lishicha, matematik modelni tekshirish maqsadida tajriba sifatida o`ljalar uchun yetarli darajadagi ozuqa solingan chekli hajmdagi suyuqlikka (kolbaga) kipriksimonlarning ikkita turi (biri yirtqich, ikkinchisi o`lja sifatida) joylashtirildi. Tajriba natijasida quyidagilar kuzatilgan:

1. Agardakolbadayirtqichlarbo`lmasa, uholdao`ljalarsoniningo`sishisuyuqlikhajmibilanbelgilanadiganK_{max}gachayaqinlashadi.

2. Kolbagayirtqichpopulyatsiyasiqo`shilganda, ularo`ljalarnitezda yeb,yirtqichlar o`zlariningsoniniko`paytiraredilar. O`ljalarsonining kamayishio`ljalar butunlayyo`qolibketgunicha davom etib, o`ljalar qirilib ketishi natijasida, axiri yirtqichpopulyatsiyasiochlikdano`lib ketadi (11.6-rasm).



11.6-rasm.

3. Tajribadasuyuqlikkatsellyulozaqo`shildi. Tsellyulozaeritmaningqovushqoqliginioshirishuchunqo`shilganedi. Natijadayirtqichlartomonidanovnimuvaffaqiyatlitarzdatugallanishkoeffitsiyenti c

vayirtqichganisbatantug`ilishlarkoeffitsiyenti $g$ nipasaytirishgaerishildi. Buholatdabarchao`ljalaryebbo`linguniga $(x = o)$ qadaryirtqichlarpopulyatsiyasiuchuno`sibboruvchiamplitudalito`lqinlarpaydobo`lib, oxir-oqibatyirtqichlarqirilib, nobudbo`lishniboshlaredi (11.4-rasm).

4. O`lja populyatsiyasining tabiiy o`sish tezligi r niqisqartirish maqsadida o`lja ozuqasi 2 baravarga kamaytirildi. Bu holatda o`lja populyatsiyasi amplitudasining o`sishi ancha kamaydi. Buning natijasida yirtqich populyatsiyasi sonining tez sur’atlar bilan o`sishi va oqibatda o`lja populyatsiyasi sonining tezda kamayib ketishi kuzatilmadi. $x$ va $y$ lar bo`yicha barqaror to`lqinlar paydo bo`ldi (11.5-rasm).

MA’RUZA №16.Modda va energiya muvozanatining modeli. Epidemiya modeli.

Modda va energiya muvozanatining modeli.

Eng qulay sharoitlarda ham daraxtning o`sishi ma’lum bir chegaradan oshmasligi barchaga ma’lum. Shu sababli nima uchun aksariyat hamma daraxtlar qanaqa bo`lishidan qat’iy nazar, avvaliga tez o`sib, ma’lum bir vaqtdan keyin daraxtning o`sishi sekinlashadi va nihoyat umuman o`sishdan to`xtab qoladi? Bu savolga javob berish uchun modda va energiya muvozanatini ifodalaydigan matematik modelni tahlil qilamiz.

Ma’lumki, daraxt o`sishi bilan fotosintez sababli energiya ko`payadi, bu energiyaning anchagina qismi ozuqaviy moddalarni daraxtning butun hajmi bo`yicha uzatishga sarflanadi. Ma’lum bir vaqtdan keyin daraxt o`sishi bilan paydo bo`ladigan yangi energiya ozuqaviy moddalarni daraxtning butun hajmi bo`yicha uzatishuchun yetarli bo`lmay qoladi va oqibatda daraxt o`sishdan to`xtaydi.

Modda va energiya muvozanatini ifodalaydigan matematik Model quyidagi farazlarga asoslangan:

1. Yetuklik yoshidagi daraxt o`sish jarayonida geometrik o`xshashlikni saqlab qoladi. Ya’ni, yetuklik yoshidagi daraxtning o`sishi davomida uning

geometrik o`lchamlarining nisbati, masalan, balandlikning diametrga nisbatio`zgarmasdan $(h/d = const)$qoladi.

2. Daraxt erkin energiyani (daraxt uchun zarur bo`lgan moddani) faqatgina fotosintez jarayoni sababli oladi.

3. Erkin energiya fotosintezga, tirik tanani shakllantirish (o`sish) va eritmani tuproqdan ko`tarish uchun sarf bo`ladi.

4. Daraxt katta vaqt oraliqlarida tanasining birlik yuzasiga to`g`ri keluvchi o`zgarmas miqdordagi yorug`likni oladi (kunlik va mavsumiy tebranishlarni hisobga olmagan holda) va tuproqdagi chegaralanmagan zahiradan kerakli moddalarni yutadi.

x bilan daraxtning balandligi belgilansa, 1-farazga ko`ra, barglar sathining yuzasi $x^2$ga, o`simlik hajmi esa x^3 kattalikka proportsional bo`ladi. Ma’lumki, daraxtning balandligi $x$ vaqt o`tishi bilan o`zgaradi, ya’ni $x = x(t)$. Muvozanat tenglamasini hosil qilish uchun barcha kattaliklarni $x$ orqali ifodalash lozim. Birinchi navbatda fotosintez jarayoni sababli hosil bo`ladigan E erkin energiyaga mos keluvchi ifodani aniqlash kerak. Bu energiya fotosintez tufayli hosil bo`ladi. Daraxtning yashil qismi qanchalik ko`p bo`lsa, energiya shunchalik katta bo`ladi. Shu bois, E erkin energiyani x^2 ga proportsional deb hisoblash mumkin:

$$E = \alpha x^2 .$$

Bu yerdaα - proportsionallik koeffitsiyenti (u barglarning o`lchami va shakliga bog`liq bo`lib, konkret daraxt uchun uni o`zgarmas deb hisoblash mumkin).

2-farazga ko`ra boshqa energiya manbalari yo`q. Shu sababli fotosintez jarayoni sababli hosil bo`ladigan energiyaning bir qismi avvalambor, fotosintez jarayonini o`zini amalga oshirish uchun sarf bo`ladi. Energiyaning bu sarfi $x^2$ ga bog`liq bo`lib, uni $\beta x^2$ bilan ifodalash mumkin ($\beta$koeffitsiyent$\alpha$dan kichik bo`lgan proportsionallik koeffitsiyenti). Shuningdek, energiya ozuqaviy eritmani daraxtning barcha qismlariga yetkazib berish uchun sarf bo`ladi. Energiya yetkazib beriluvchi yo`llar, ya’ni, daraxtning hajmi qanchalik katta bo`lsa, energiya sarfi ham shunchalik katta bo`ladi. Bundan tashqari, ozuqaviy moddalarni daraxt tanasi bo`yicha yetkazish uchun ozuqaviy moddalarni daraxt balandligi bo`yicha yuqori balandlikka ko`tarish kerak bo`ladi. Daraxt bo`yi yoki balandligi qanchalik katta bo`lsa,ozuqaviy moddalarni yuqori balandlikka ko`tarish uchun sarf bo`ladigan energiya sarfi ham shunchalik katta bo`ladi. Bu energiya sarfi $x^3$ hajmga va $x$ balandlikka bog`liq bo`lganligi sababli bu energiya sarfini hajm va balandliklarning ko`paytmasi, ya'ni $\gamma x^3 x$ ga proportsional deb hisoblash mumkin.

Shuningdek, energiyaning bir qismi daraxt massasini ortishiga, ya'ni daraxtni o`sishiga sarf bo`ladi. Energiyaning bu sarfi o`sish tezligiga, ya'ni massaning vaqt bo`yicha olingan hosilasiga proportsional ($m = \rho x^3$, bu yerda ρ - daraxtning o`rtacha zichligi, x^3 – daraxt hajmi). Demak, ushbu energiya sarfini quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\delta \frac{d}{dt}\left(\rho x^3\right),$$

bu yerda δ – proportsionallik koeffitsiyenti.

Energiyaning saqlanish qonuniga ko`ra ixtiyoriy vaqtdagi sarf bo`lgan energiyalar yig`indisi energiyaning boshlang`ich miqdoriga (daraxt misolida energiyaning sarf bo`lishi energiyaning kelib tushishiga) teng bo`lishi kerak:

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \frac{d}{dt}\left(\rho x^3\right)$$

yoki

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + 3\delta\rho x^2 \frac{dx}{dt}. \tag{1}$$

Bu matematik Model $x(t)$ ga nisbatan differentsial tenglamani ifodalaydi va uI.A.Poletayev tomonidan taklif etilgan. Ushbu tenglamani har ikki tomonini $3\delta\rho x^2 \neq 0$ ifodaga bo`lib,

$$a = \frac{\alpha - \beta}{3\delta\rho} > 0, \quad b = \frac{\gamma}{3\delta\rho} > 0$$

belgilashlar kiritilgandan so`ng uni quyidagi ko`rinishga keltirish mumkin:

$$\frac{dx}{dt} = a - bx^2, \quad x(0) \approx 0 \tag{2}$$

munosabatlarga ega bo`lish mumkin.

Daraxt o`sib borayotganligi sababli $dx/dt > 0$, ya'ni $a - bx^2 > 0$ .Demak, $x^2 < a/b$.

(2) differentsial tenglamani integrallab, quyidagiga ega bo`lish mumkin:

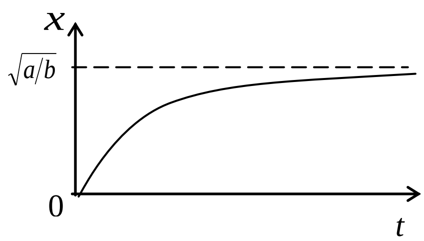
$$ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} = 2\sqrt{ab}(t - t_0)$$

Bu munosabatdan daraxt balandligini aniqlash mumkin:

$$x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{1 - e^{-2\sqrt{ab}(t - t_0)}}{1 + e^{-2\sqrt{ab}(t - t_0)}}. \tag{3}$$

Agarda a va b koeffitsiyentlar ma'lum bo`lsa (ular daraxtning turiga bog`liq bo`ladi), u holda ushbu formula bo`yicha berilgan turdagi daraxtning yoshiga qarab o`rtacha o`sishini aniqlash mumkin. Model real tajribalarda sinovdan o`tkazilgan. Tajriba natijalari modelning adekvatligini, modelni hosil qilishda yuqorida keltirilgan farazlar haqiqatga zid emasligini ko`rsatdi.

(3) formula bo`yicha daraxtning vaqt bo`yicha o`sishi 11.7-rasmda keltirilgan.



11.7-rasm.

Masala. O`rmondagi daraxtlarning maksimal balandligi 50 m. 40-yoshli daraxtlarni kesib, tsellyuloza tayyorlashda xom-ashyo sifatida ishlatadilar. Bu daraxtlarning o`rtacha balandligi 15 m. a va b koeffitsiyentlarni aniqlang va modelni quring.

Yechish. Daraxtni yoshi t ortibborishibilanuning balandligi $x(t)$ $\sqrt{a/b}$ miqdorgayaqinlashibborishi (3) formuladan va 11.7-rasmdan ko`rinib turibdi. Ushbu faktga va masalaning shartiga ko`ra quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilish mumkin:

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{a}{b}} = 50 \\ \sqrt{\dfrac{a}{b}} \dfrac{1-e^{-2\sqrt{ab}40}}{1+e^{-2\sqrt{ab}40}} = 15 \end{cases}.$$

Bu sistemani yechib, a va b koeffitsiyentlarning qiymatlarini aniqlash mumkin, buni esa jiddiy qiyinchiliklarsiz amalga oshirishni o`quvchiga ishonib topshirish mumkin.

Epidemiyamodeli.

Ma'lumki, ko`p asrlar davomida insonlarning ko`pchiligi turli xil epidemiyalar tufayli vafot etganlar. Epidemiyalarga qarshi kurashish uchun turli tibbiy tadbirlar (karantin, emlashlar va h.k) ni o`z vaqtida amalga oshirish kerak bo`ladi. Bunday tibbiy tadbirlarni samaradorligi epidemiyaning turini aniq bilish, epidemiyaga chalingan bemorlar sonining vaqt bo`yicha o`zgarishini bashorat qilish bilan bog`liq.

Farazqilaylik, bir hududda N ta sog`lom odam mavjud bo`lib, $t = O$ vaqtmomentidabuguruhgabittakasalodam (infektsiya manbai)kelibqo`shilsin. Guruhdan bemorlar chiqarib tashlanmaydi (tuzalish ham, o`lish ham, izolyatsiya ham yo`q). Shuningdek, odam kassalikni o`ziga yuqtirishi bilanoq, infektsiya manbaiga aylanadi deb faraz qilinadi.

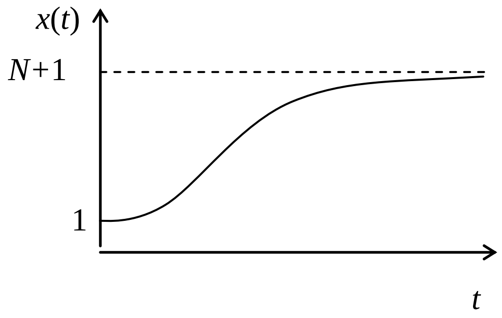
t vaqt momentidagikasallarsonini $x(t)$ bilan, sog`lom bo`lganlar sonini esa $y(t)$ bilan belgilaymiz. Demak, ixtiyoriy vaqt momentida

$$x(t) + y(t) = N + 1 \tag{1}$$

tenglik o`rinli ekanligi va $t = O$ da $x(O) = 1$ shart bajarilishi ko`rinib turibdi. $t + dt$ (dt – kichik vaqt oralig`i) vaqt oralig`ida nechta yangi kasal paydo bo`lishini aniqlash mumkin. Ularning soni $dt$ vaqt oralig`iga, sog`lom va bemor kishilarning o`zaro uchrashuvlar soniga, ya'ni x va y kattaliklarning ko`paytmasi $x \cdot y$ ga proportsional bo`ladi deb faraz qilish mumkin:

$$dx = \alpha xydt \,, \tag{2}$$

bu yerda α – proportsionallik koeffitsiyenti (infektsiyani boshqa odamga yuqtirish koeffitsiyenti).



11.8-rasm.

(1) va (2) formulalar asosida quyidagi differentsial tenglamani hosil qilish mumkin:

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x(N + 1 - x)$$

Bu tenglamaning yechimi quyidagicha:

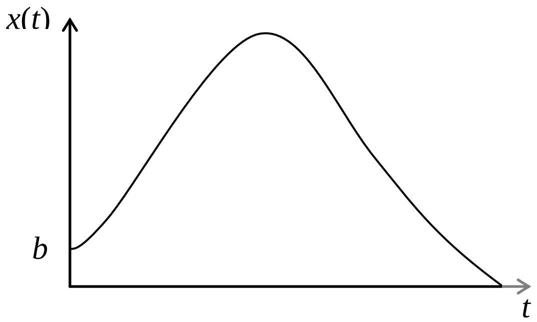
$$x(t) = \frac{N + 1}{Ne^{-\alpha(N+1)t} + 1} \,.$$

Ushbu formula asosida guruhdagi bemorlar sonining vaqt bo`yicha o`zgarishi 11.8-rasmda keltirilgan.

Masala. Agar α = 0,001, N+1=1101 kishi bo`lsa, u holda 6 sutkadan keyingi bemorlar soni qancha bo`lishini va 6 kun ichida qancha odam kasal bo`lishini aniqlang.

Masalaga javob topish uchun tenglamaning yechimidan foydalanishni o`quvchilarga tavsiya qilamiz.

Epidemiya modelini tuzishda bakteriya katakchalarining faoliyatini boshqaruvchi qonunlarni, alohida olingan kishilarning infektsiyalarga nisbatan sezuvchanlik darajasini, infektsiya tashuvchilarning sog`lom kishilar bilan uchrashib qolish ehtimoli va boshqa omillarni hisobga olish mumkin edi. Lekin, masalani soddalashtirish uchun ushbu omillar e’tiborga olinmadi.



11.9-rasm.

Modelni yanada murakkablashtirish maqsadida t vaqt momentida 1 ta emas, bir nechta, ya’ni *b*sondagiodam kasallangan deb faraz qilinadi. Shuningdek, kichik vaqt oralig`idan so`ng bemor tuzalib, immunitetga ega bo`ladi deb hisoblash mumkin. $z(t)$bilan $t$ vaqt momentigacha kasal bo`lib, so`ngra tuzalgan bemorlar soni belgilansa, yuqoridagilarga asoslanib, quyidagiga ega bo`lish mumkin:

$$x + y + z = N + b,$$

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha xy - \gamma x \\ \dfrac{dy}{dt} = -\alpha xy \end{cases}.$$

Bu yerdaγx – tuzalganlar soni. U holda bemorlar sonini bashorat qilish 11.9-rasmda keltirilgan shaklga ega bo`ladi.Egri chiziqning aniq ko`rinishi N, b, α, γlarning qiymatlariga bog`liq bo`ladi.

MA’RUZA №17. REKLAMAKOMPANIYASINITASHKILLASHTIRISH. KORXONALAR O`ZARO QARZLARINIBARTARAF ETISHI.

Farazqilaylik, firmayangitovariyokixizmatinireklamaqilishnirejalashtirmoqda. Ishboshlanishidayangilikdaniste’molchilarningozgina qismi xabordorligi sabablireklamaga sarf etiladigan xarajatlar reklama kompaniyasi oladigan foydaga nisbatan ko`proq bo`lishi mumkin. Keyinchalik, vaqt o`tishi bilan iste’molchilar sonini oshishi tufayli sezilarli foydaga umid qilish mumkin. Shunday vaqt momenti keladiki, bu vaqtda firma yangi tovari yoki xizmati turi bilan iste’molchilar bozori to`yingan bo`ladi va endi tovarni yoki xizmatni reklama qilish ma’noga ega bo`lmay qoladi. Bundan keyin mavzuni bayon qilishda tovar yoki xizmat turi iboralari o`rniga qulaylik uchun faqat tovar so`zidan foydalanamiz.

Reklama kompaniyasining matematik modelini tuzishda quyidagi belgilashlardan foydalaniladi: t- reklama kompaniyasi boshlanganidan kuzatuvgacha bo`lgan vaqt; $N(t)$ - firma tovaridan xabordor mijoz yoki iste’molchilarning $t$ vaqtdagi soni; $N_0$ - firma tovariga pul to`lashi mumkin bo`lgan xaridorlarning umumiy soni. Matematik modelni qurish quyidagi asosiy farazlarga asoslanadi. Tovar haqida xabordor bo`lgan va ularni sotib olishga qurbi yetgan iste’molchilar sonining vaqt bo`yicha o`zgarish tezligi dN/dt tovar haqida xabari bo`lmagan xaridorlar soni $\alpha_1(t)(N_0 - N(t))$ ga proportsional. Bu yerda $\alpha_1(t) > 0$ - reklama kompaniyasi ishini jadalligi (ushbu vaqt momentida reklamaga sarf etilgan xarajatlar) ni anglatadi. Shuningdek, tovar haqida xabardor bo`lgan xaridorlar tovar haqida xabardor bo`lmagan xaridorlarga u yoki bu tarzda tovar haqida axborot tarqatib, firmani qo`shimcha reklama agenti sifatida ishtirok etadi deb faraz qilinadi. Ularning ulushi $\alpha_2(t)N(t)(N_0 - N(t))$ miqdorga teng bo`lib, agentlar soni oshishi bilan bu miqdor ham oshib boradi. $\alpha_2(t) > 0$ miqdor xaridorlar o`rtasidagi o`zaro muomala (axborot almashish) darajasini xarakterlaydi (bu miqdorni qiymati, masalan, so`rovnoma o`tkazish yo`li bilan ham aniqlanishi mumkin).

Yuqoridagi farazlarga asosan reklama kompaniyasining matematik modeli quyidagi ko`rinishda bo`ladi:

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)](N_0 - N). \tag{1}$$

Agar $\alpha_1(t) >> \alpha_2(t)N(t)$ bo`lsa, (1) modeldan MALTUS tipidagi modelga ega bo`lish mumkin, aksincha tengsizlikda populyatsiyaning quyidagi modelini hosil qilish mumkin:

$$\frac{dN}{d\tau} = N(N_0 - N), \qquad d\tau = \alpha_2(t)dt .$$

Ushbu modelni va populyatsiya modelini tuzishda qandaydir miqdorning vaqt bo`yicha o`sish tezligi ushbu miqdorning joriy vaqtdagi $N(t)$qiymatini muvozanat holati (populyatsiyada) dagidan yoki xaridorlarning maksimal qiymatidan joriy vaqtdagi $N(t)$ qiymatini ayirmasi - $N_0 - N(t)$ ko`paytmasiga proportsional degan farazga tayanilgan edi. Shu sababli ularni anologiyasidan foydalanish mumkin. Agar $\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)$ miqdor vaqtning kandaydir momentida nolga tenglashsa yoki manfiy qiymatga ega bo`lsa (buning uchun $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ koeffitsiyentlarning birortasi yoki ikkalasi xam manfiy ishoraga ega bo`lishi lozim) ushbu jarayonlar o`rtasidagi analogiya tugaydi. Shunga o`xshash negativ holatlar turli reklama kompaniyalarida tez-tez uchrab turadi. Bunday hollarda reklamani xarakterini o`zgartirish yoki bo`lmasa reklamadan butunlay voz kechish lozim bo`ladi. Tovarni ommaviyligini oshirish tadbiri $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $N(t)$ miqdorlarni qiymatlariga bog`liq holda to`g`ridan-to`g`ri ($\alpha_1(t)$ parametr) yoki ikqilamchi tarzda ($\alpha_2(t)$ parametr) reklama natijasini yaxshilashga yo`naltirilishi mumkin.

(1) matematik Model chekli vaqt momentlarida nolga aylanadigan yechimlarga ega emas. Populyatsiya sonini vaqt bo`yicha o`zgarishidan ma’lumki, $t \to -\infty$ da $N(t) \to 0$. Reklama kompaniyasiga nisbatan bu narsa shuni anglatadiki, reklama boshlanishidan oldinrok xaridorlarning bir qismi yangi tovardan xabardor bo`lishgan.

Agar $N << N_0$, $\alpha_2(t)N << \alpha_1(t)$ deb hisoblab, (1) matematik modelni $N(t=0)=N(0)=0$ ($t=0$ - reklamani boshlanish vaqti) nuqta atrofida qaraydigan bo`lsak, (1) tenglama quyidagi ko`rinishga keladi:

$$\frac{dN}{dt}=\alpha_1(t)N_0$$

va u $t=0$ dagi boshlang`ich shartni qanoatlantiruvchi

$$N(t)=N_0\int_0^t \alpha_1(t)dt \tag{2}$$

yechimga ega.

Endi, bitta tovardan tushadigan foydani p orkali belgilaymiz. Soddalik uchun har bir xaridor faqatgina bitta tovar sotib olsin deb hisoblaymiz. Ma’lumki, $\alpha_1(t)$ koeffitsiyent ma’nosi bo`yicha reklama uchun vaqt birligi ichida qilinadigan harakatlar soniga teng (masalan, bir turdagi afishalarni yelimlash). $s$ orkali elementar reklama harakatining narxini belgilaymiz. U holda jami foyda quyidagiga teng bo`ladi:

$$P=pN(t)=pN_0\int_0^t \alpha_1(t)dt\,, \tag{3}$$

sarf qilingan xarajatlar esa

$$S=s\int_0^t \alpha_1(t)dt\,.$$

Ko`rinib turibdiki, $pN_0 > s$ bo`lgandagina foyda xarajatlarga nisbatan yuqori bo`ladi. Juda samarali bo`lmagan yoki qimmat reklamadan firma birinchi qadamidayoq kamomadga uchraydi. Ammo, bu holat reklamani to`xtatish uchun asos bo`la olmaydi. Haqiqatdan ham (3) ifoda va $pN_0 > s$ shart faqatgina $N(t)$ ning kichik qiymatlarida hamda P va S vaqt bo`yicha bir xil qonuniyat asosida o`sib borsagina o`rinli bo`ladi. $N(t)$ ning o`sishi bilan (1) formulada tashlab yuborilgan hadlar sezilarli qiymatlarga ega bo`ladi, xususan ikqilamchi reklamaning ta’siri kuchayadi. Shuning uchun $N(t)$ funktsiya (3) formuladagiga nisbatan vaqt bo`yicha tez o`suvchi funktsiya bo`lib qolishi mumkin. $N(t)$ miqdorning o`zgarishidagi bu chiziqsiz effekt xarajatlarning o`zgarmas tempda o`sishida reklama kompaniyasining boshlang`ich bosqichidagi moliyaviy muvaffaqiyatsizligini kompensatsiya qilish imkonini beradi.

Ushbu tasdiqni (1) tenglamaning xususiy holi, ya’ni $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ koeffitsiyentlar o`zgarmas bo`lganda izohlaymiz. Quyidagi

$$\overline{N} = \alpha_1 / \alpha_2 + N$$

belgilash orkali (1) tenglama

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \alpha_2 \overline{N}\left(\overline{N}_0 - \overline{N}\right), \qquad \overline{N}_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + N_0 \tag{4}$$

ko`rinishga keladi. Ushbu tenglamani yechimi quyidagidan iborat:

$$\overline{N}(t) = \left[1 + \left(\overline{N}_0\, \alpha_2 / \alpha_1 - 1\right) \cdot \exp\left(-\alpha_2 t \overline{N}_0\right)\right]^{-1}. \tag{5}$$

Bunda $\overline{N}_0 = \alpha_1 / \alpha_2$ .Shunday qilib, $N(0) = 0$, ya’ni boshlang`ich shart bajarilmoqda. (4) dan ko`rinib turibdiki, $\overline{N}(t)$ funktsiyaning hosilasi, xusuan $N(t)$ funktsiya $t > 0$ bo`lganda boshlang`ich qiymatlaridan katta bo`lishi mumkin ($\overline{N}_0 > 2\alpha_1 / \alpha_2$ yoki $N_0 > \alpha_1 / \alpha_2$ shartlarda). $\overline{N} = \overline{N}_0 / 2$, $N = \left(\alpha_1 / \alpha_2 + N_0\right) / 2$ qiymatlarda $\overline{N}(t)$ funktsiyaning hosilasi maksimumga erishadi:

$$\left(\frac{d\overline{N}}{dt}\right)_m = \left(\frac{dN}{dt}\right)_m = \alpha_2 \frac{\overline{N}_0^{\,2}}{4} = \alpha_2 \frac{\left(\alpha_1 / \alpha_2 + N_0\right)^2}{4}.$$

Bu vaqtga kelib vaqt birligi ichida olinadigan joriy foyda quyidagiga teng:

$$P_m = p \frac{dN}{dt} = p\alpha_2 \frac{\left(\alpha_1 / \alpha_2 + N_0\right)^2}{4}.$$

P_m joriy foydadan boshlang`ich joriy foyda $P_0 = p\left(dN / dt\right)_{t=0} = \alpha_1 N_0$ ni ayirib, quyidagiga ega bo`lish mumkin:

$$P_m - P_0 = p\,\frac{\left(\alpha_1/\sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2}N_0\right)^2}{4}.$$

Bundan ko`rinib turibdiki, boshlang`ich joriy foyda va maksimal joriy foydaning farqi yetarli darajada sezilarli bo`lishi mumkin.

(4) tenglamadan yana shuni ta'kidlash mumkinki, kandaydir vaqtdan boshlab reklamani davom ettirish foydasiz bo`lib koladi. Hakikatdan ham, $\overline{N}(t)$ ning N_0 ga yaqin qiymatlarida (4) tenglamani

$$\frac{d\overline{N}}{dt} = \alpha_2 N_0\left(\overline{N}_0 - \overline{N}\right) \tag{6}$$

ko`rinishda yozish mumkin. Bu tenglamaning yechimi $t \to \infty$da sekin eksponentsial qonun bo`yicha $\overline{N}_0$ chekli qiymatga ($N(t)$ funktsiya esa N_0 ga) intiladi. Vaqt birligi ichida uncha ko`p bo`lmagan sondagi yangi xaridorlar paydo bo`ladi va tovarni sotishdan tushayotgan foyda ixtiyoriy shartlarda ham davom etayotgan xarajatlarni qoplamay qoladi.

KORXONALAR O`ZARO QARZLARINIBARTARAF ETISHI.

Ixtiyoriy iqtisodiy tizim bir-biri bilan tovar va xizmatlar almashinuvchi o`n minglab korxona (firma, korporatsiya va boshqalar) larni o`z ichiga oladi. Hattoki, nisbatan uncha ko`p bo`lmagan bevosita hamkorlarga ega bo`lgan kichiq bir korxona ikqilamchi tarzda (ikqilamchi hamkorlari aloqalari orqali) katta miqdordagi korxonalar bilan bog`langan. Ushbu korxonaning iqtisodiy o`sishi hamkorlarning iqtisodiy holatiga to`g`ridan-to`g`ri bog`liq. Aynan bu tasdiq yuzlab va minglab hamkorlar bilan aloqa qiluvchi katta korporatsiya va korxonalar uchun juda o`rinli.

Iqtisodiy sistemani barcha zvenalarining bir-biriga o`zaro bog`liqligi sotilgan tovarlar yoki ko`rsatilgan xizmatlar uchun to`lovlarni amalga oshirishda korxonalar o`rtasida bo`ladigan hisob-kitobda yaqqol ko`rinadi. Haqiqatdan ham, korxona sotilgan tovari uchun mijozlardan olinadigan to`lovni korxonani faoliyatini samarali yuritish maqsadida boshqa firmalardan yangi mahsulotlar va mashinalar sotib olishga, oylik maoshi to`lashga (ya'ni, ishchi kuchi sotib olishga), reklamaga va boshqa harakatlarga sarflaydi. Shu sababli ushbu korxona hamkorlarining kattagina qismi qo`shimcha tarzda iqtisodiy aylanma (oborot)ga jalb etiladi. O`z navbatida korxonadan tovar sotib olgan mijoz ushbu tovardan qayta sotish yoki o`zini mahsulotini ishlab chiqarish va boshqa maqsadlar uchun foydalanib, iqtisodiy faoliyatda ishtirok etuvchi agentlar sonini oshiradi.

Agar tovarlar o`z vaqtida mijozlarga yetkazib berilsa va o`z navbatida mijozlar ushbu tovarlarga to`lovlarni vaqtida amalga oshirsalar moliyaviy tomondan iqtisodiy sistemaga hech narsa xavf solmaydi. Shu sababli korxonalar o`z faoliyatlarini davom ettirish uchun bank hisob raqamlaridagi moliyaviy resurslarini kattagina qismini foydalanishlariga, boz ustiga asosiy fondlarini (yer, ko`chmas mulk, qurilma, texnologiya) sotishlariga hech narsa to`sqinlik qila olmaydi. Amalda tovarni yetkazib berish va uni to`lovi (yoki barcha tovarlar uchun yoxud bundan keyin yetkazib beriladigan tovarlar uchun oldindan to`lovlar) o`rtasida doimo vaqt bo`yicha kechikish mavjud. Bu kechikishning minimal qiymati sof texnik sabablar bilan aniqlanadi, chunki tovarni transportirovka va rasfasovka qilish, bankdan pul ko`chirish uchun doimo vaqt talab qilinadi.

Ammo, shunday holatlar ham mavjudki, qandaydir iqtisodiy, moliyaviy, ichki va tashqi siyosat, ijtimoiy va boshqa sabablarga ko`ra to`lovlarni (tovarlarni yetkazib berishni) kechikish vaqtini moliyaviy oborot vaqti bilan taqqoslash mumkin bo`lib qoladi. Amalga oshirilmagan to`lovlar yoki yetkazib berilmagan tovarlarning hajmi esa korxonaning erkin oborotdagi vositalari bilan taqqoslash mumkin bo`lgan darajadagi mikdorga ega bo`ladi. Bu holda butun iqtisodiy sistemani jiddiy krizisga olib keluvchi *to`lay olmaslik (krizis neplatejey) krizisi* kelib chiqadi.

Hakikatdan ham, yetkazib berilgan tovarga pul olmagan (yoki tovarga pul to`lagan, ammo uni olmagan) korxona tovarni sotganlar (birinchi sotuvchilar) ga tovar uchun to`lashi lozim bo`lgan to`lovni amalga oshira olmaydi (chunki korxonaning qarzlari hajmi erkin oborotdagi vositalari bilan taqqoslash mumkin bo`lgan darajada, ulardan foydalanish situatsiyani yaxshi tomonga o`zgartira olmaydi). O`z navbatida tovarni yetkazib beruvchilar o`z mijozlari bilan, bu mijozlar esa o`zlarini mijozlari bilan va x.k. hisob-kitob qila olmaydilar. Natijada butun iqtisodiy sistemada *(neplatejey) to`lay olmaslikning uzun zanjiri paydo bo`ladi. Bu zanjir* $N$ ta zvenodan iborat bo`lib, ularning umumiy soni $N!$ (N - korxonalarning umumiy soni) ga yetishi mumkin. Zanjirdagi qarzlar mikdorlarining absolyut qiymatlari yig`indisi korxonaning nafaqat erkin oborotdagi vositalaridan oshib ketadi, balki ularning asosiy fondlari narxlari bilan solishtirish mumkin bo`lgan darajaga yetadi (ixtiyoriy korxona bir vaqtning o`zida o`z hamkorlarining qarzdori va kreditori bo`lishi mumkin, shu sababli bu yerda gap aynan qarzlar mikdorlarining absolyut qiymatlari yig`indisi haqida ketmoqda). Bu holatda sistema boshi berk ko`chaga kirib qoladi – korxona ishlab chiqarishni to`xtatishi kerak yoki jami qarzlar mikdorini oshirib, bir-biridan qarz olib, faoliyatini davom etirishi mumkin.

Umuman olganda, situatsiyadan chiqish uchun quyidagicha yondoshish mumkin: qandaydir vakolatli muassasa (masalan, markaziy bank) barcha korxonalarga qarzlari mikdorida bir vaqtning o`zida kredit berish. U holda bu korxonalar bir-biri bilan hisob-kitob qilib, kreditlarni qaytarishadi. Ammo, bunday kredit siyosati salbiy oqibatlarga olib keluvchi, kuchli infilyatsiyani paydo bo`lishiga turtki bo`lishi mumkin (tovarlarni ishlab chiqarish ko`paytirilmadi, oborotdagi pul esa birdaniga ko`payib ketdi).

Ixtiyoriy to`layolmaslik krizisida hisob-kitoblar protsedurasini o`zini nomukamalligi bilan bog`liq bo`lgan sof «texnik» komponentalar doimo hal qiluvchi rolni bajaradi. Keyinchalik iqtisodiy, siyosiy va boshqa sabablar bilan paydo bo`lmagan krizislarni, ya’ni aynan hisob-kitoblar protsedurasini nomukamalligi bilan bog`liq bo`lgan krizislarni o`rganamiz.

Masalaning mohiyatini avval uchta korxonadan tashkil topgan sistema uchun sonli misolda tushuntiramiz. Ushbu korxonalardan har biri shartli bitta moliyaviy birlikka teng bo`lgan erkin oborot vositasiga va 10 birlikka teng asosiy fondlarga ega. Birinchi korxona ikkinchisiga 100 birlik, ikkinchisi uchinchisiga

100 birlik va uchinchisi birinchisiga 100 birlik qarz bo`lsin. Korxonalarning qarzlari absolyut yig`indilari 600 birlikka teng bo`lib, ularning asosiy fondlari (30 birlik) ga nisbatan ancha katta, erkin oborot vositalari (3 birlik) ga nisbatan solishtirmasa ham bo`ladi. Shu bilan bir vaqtda ushbu sistemaning moliyaviy ahvoli juda yaxshi, chunki korxonalar har birining alohida jami qarzlari (ya’ni, korxona berishi lozim bo`lgan va olishi lozim bo`lgan vositalar) yig`indisi nolga teng. Bu holatda o`zaro hisob-kitob qilish protsedurasi bir vaqtning o`zida barcha qarzlarni bekor qilishdan iborat: hech kim hech kimdan qarz emas va qarz g`avg`osidan holis holda hamkorlar o`z ishini davom ettirishi e’lon qilinadi. Bu holda markazlashgan kreditga hojat qolmaydi.

Katta moliyaviy majburiyatlar zimmasida bo`lgan ko`p sondagi korxonalar uchun bu yondoshishni amalga oshirib bo`lmaydi. Buning uchun masalani formallashtirish va chuqur tahlil qilish lozim bo`ladi.

Iqtisodiy tizim o`zaro bir-biriga qarz berishi va bir-biridan qarz olishi mumkin bo`lgan N ta moliyaviy baquvvat korxonalardan iborat bo`lsin. $x_{nm}\,M$ orqali $n$-chi korxonaning $m$-chi korxonadagi qarzini (agar $x_{nm} < 0$ bo`lsa birinchi korxona ikkinchisidan qarzdor bo`ladi va $x_{nm} > 0$ bo`lsa aksincha bo`ladi) belgilaymiz. Bu belgilashga asosan

$$x_{nm} = -x_{mn}, \qquad x_{nn} = 0$$

ekanligi kurinib turibdi. Demak, jami qarzlar to`plamini diagonali nollardan iborat (chunki, $x_{nn} = 0$, ya’ni korxona o`zidan qarzdor bo`la olmaydi) bo`lgan $N \times N$ razmerli kososemmetrik matritsa ko`rinishida ifodalash mumkin.

Barcha o`zaro qarzlar yig`indisini individual qarzlar orqali quyidagi formula yordamida hisoblash mumkin:

$$X = \sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\left|x_{nm}\right|. \qquad (1)$$

Agar (1) formulabilananiqlanadiganmikdornikorxonalarningbarchaerkinvositalariyig`indisi

X_0 bilantaqqoslashmumkinbo`lsa, uholdabumikdortizimmoliyaviyholatiningmikdoriyharakteristikasisifatidaxizmatqilishimumkin, ya'ni

$$X > X_0 = \sum_{n=1}^{N} x_n \,. \tag{2}$$

(2) tengsizlikbilanifodalanadiganholat*to`layolmaslikkrizisinianglatadi*, buyerda $x_n \geq 0$ bilan n -chikorxonaningindividualerkinvositasibelgilangan.

Harbirkorxonaningkreditvaqarzlari (salьdo) balansikorxonalarningyanabittamuhimbo`lganharakteristikasidir, uquyidagichaaniqlanadi:

$$S_n = \sum_{m=1}^{N} x_{nm} \,. \tag{3}$$

(3) tenglikkaasosanquyidagihollardanbiribo`lishimumkin: $S_n > 0$, $S_n < 0$ va $S_n = 0$. $S_n > 0$ dakorxona $S_n < 0$ balansgaegabo`lganqarzdorkorxonalaruchunqarzberuvchi – kreditorvazifasinio`taydi. $S_n = 0$ korxonanikreditorhamdebitorhamemasligini, ya'nikorxonahechkimdanhechqanaqaqarziyo`qliginianglatadi. $|S_n| < x_n$ bo`lganholkorxonaningindividualmoliyaviyholatinormalholatdaekanligini, korxonaniqarzlari (yokiuningboshqakorxonalargaberganlkreditlari)ningrealyig`indisiuningerkinvositalaridankichiqekanligidandalolatberadi.

Xuddishungao`xshash, iqtisodiytizimningabsolyutsalьdolariyig`indisi

$$S = \sum_{n=1}^{N} |S_n| \tag{4}$$

bu sistemaning moliyaviy ahvolini anglatuvchi makroko`rsatkich sifatida xizmat qiladi. Agar $S < X_0$ bo`lsa, ushbu iqtisodiy tizimda erkin vositalar qarzlar hajmidan katta bo`lib, bu sistema normal faoliyat yuritishi mumkin (yukorida keltirilgan misoldagi uchta korxonadan iborat sistema kabi).

X va S mikdorlar o`rtasida doimo ma’lum munosabat mavjud. Ixtiyoriy qarzlar matritsasi uchun

$$X \geq S, \tag{5}$$

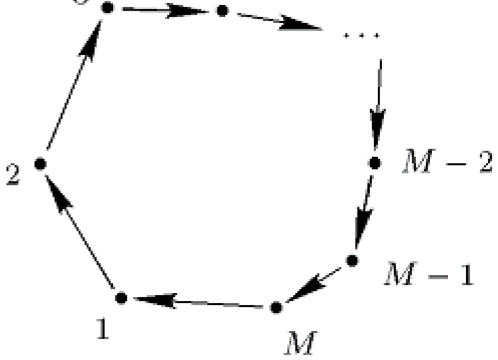
o`rinli, ya’ni qarzlar yig`indisi hech kachon salьdolari yig`indisidan kichiq bo`lishi mumkin emas.

O`zaro qarzlarni bartaraf qilish masalasi $x_{nm}$ lar matritsasini bilgan holda $X' < X$ shartni kanoatlantiruvchi «yangi» $x'_{nm}$ lardan tashkil togan qarzlar matritsasini topishdan iborat. (5) tengsizlikdan ko`rinib turibdiki, $X' = S$ bu masalaning ideal yechimidir. U holda normal moliyaviy holat ($S \leq X_0$) dagi sistema uchun $X' = S \leq X_0$ munosabat bajariladi va o`zaro qarzlar uzilgandan keyin bu sistema normal faoliyatini yuritishi mumkin.

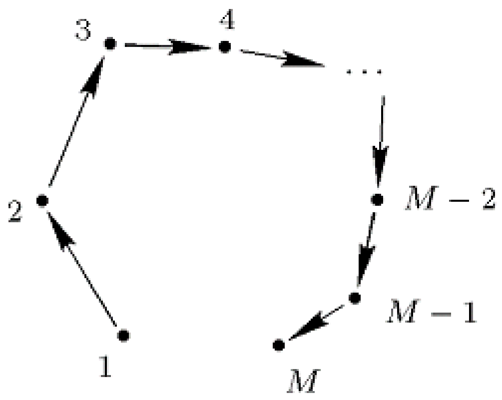
O`zaro qarzlarni uzish (bartaraf etish) protsedurasining matematik modelini qurishda quyidagi ketma-ket harakatlardan foydalaniladi. Birinchi navbatda ma’lum bir bosqichda individual qarzlar to`plamini va korxonalar o`rtasidagi aloqalarni chuqur tahlil qilishdan voz kechish lozim.

Yukorida keltirilgan misolda uchta korxonaga qo`llanilgan qarzlarni to`lay olmaslik zanjirini kuzatish protsedurasini N ta korxona uchun nafakat bajarish kiyin, balki bu protsedura kamchiliklardan holi emas. M ta korxonaning har biri ikkinchisiga, ikkinchisi uchinchisiga va hakazo M-chisi birinchisiga bir xil mikdordagi qarzdor bo`lgan zanjirni qaraymiz (13.1-rasm).

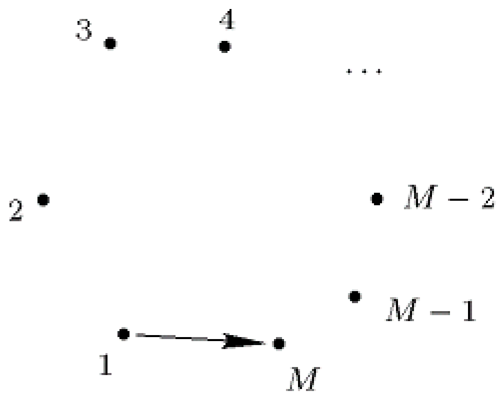
Ko`rinib turibdiki, bu yopik zanjir va har bir korxona qarzlaridan qutilishlari mumkin, ya’ni korxonalarni qarzlari bekor qilinadi.



Agar M-chi korxona birinchisiga qarzdor bo`lmasa, xosil bo`lgan zanjir ochiq bo`lib (5.2-rasm), endi yukoridagi usulni bu zanjirga qo`llab bo`lmaydi. Bu holda qarzdorlikdan qutilishni yo`li ikkinchi, 13.1 – rasm.uchinchivaxokazo$(M-1)$chikorxonalarniqarzlaribekorqilinib, birinchikorxonao`zqarzini $M$ -chikorxonagato`lashnibirinchikorxonazimmasigayuklashdaniborat (13.3-rasm).



13.2 – rasm .



13.3 – rasm .

Qarznibirkorxonadanikkinchikorxonagayunaltirishmohiyativamazmunibo`yi chaveksel ь bilanmuomalaqilishgamoskeladi. Buholdaqarzberganxo`jayino`zgarib, natijadaqarzdorkorxona (birinchi) dayangikreditor ( $M$ -chikorxona) paydobo`ladi.

Qarzdorlikningyopiqzanjiri (13.1-rasm) da $x_{nm} = -x_{mn}$ ekanliginihisobgaolsak, quyidaginixosilqilishmumkin:

$$\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} x_{nm} = 0 .$$

Butenglikdan $S_n = \sum_{m=1}^{N} x_{nm}$ ekanligininazardatutib, harbirkorxonaningkreditlarivaqarzlari (sal ь do) balansiuchunquyidagigaegabo`lishmumkin:

$$\sum_{n=1}^{N} S_n = 0 \qquad (6)$$

yoki

$$\sum_{S_n>0} S_n = -\sum_{S_n<0} S_n = \frac{S}{2} . \qquad (7)$$

(6) munosabatdanko`rinibturibdiki, korxonaningmusbatsalьdolariyig`indisiuningmanfiysalьdolariyig`indisigateng. Ko`ribchiqilgano`zaroqarzlardanqutilishtizimi «simmetrikkonservativlik» (7) xususiyatigaega, shuningdekbutizimuchun «saklanishkonunlari» (massaning, energiyaningvaboshqalarningsaklanishkonunlari) - (6) o`rinlibo`ladi.

(7) munosabatgaasoslanib, o`zaroqarzlardanidealqutilishningmatematikmodeliniqurishdaquyidagishartlardanf oydalanishmumkin:

1) barcha x_{nm} qarzlarma’lumvabuqarzlarnikorxonalartanolishadi;

2) o`zaroqarzlarniuzishdakorxonalarni $S_n$ salьdosio`zgarmasdanqoladi: $S'_n = S_n$, ya’nibuholdakorxonalarningindividualmoliyaviyholatio`zgarmaydi;

3) x_{nm} qarzlarnibirqismibekorqilinadi, birqismiboshqakorxonalargayo`naltirilishimumkin, ya’nikorxonayangidebitorlargavakreditorlargaegabo`lishihamdaeskiqarzlariningbir qismidanqutilishimumkin.

O`zaroqarzlardanqutilishprotsedurasiningmohiyati $x_{nm}$ qarzlarnio`rnigakorxonalarni S_n salьdosinio`rganishdaniborat. $S_n < 0$ bo`lgankorxonalarqarzdor, salьdosi $S_n > 0$ korxonalarkreditordebe’lonqilinadi. Keyinesasalьdosi $S_n < 0$ bo`lgankorxonalarningqarzlarikreditorlaro`rtasidaqanaqadiryo`llarbilantaqsimlanadi, ya’ni «yangi» $x'_{nm}$ qarzlartizimitopiladi. Bunda (6) saklanishkonuniva 2) sharthamda $X' = S$ tenglikbajariladi. Shusabablio`zaroqarzlardanqutilishmasalasiningbuyechimi*optimalyechimdebatala di*.

Yukorida keltirilgan optimal yechim juda ko`plab variantda bo`lishi mumkin. Chunki kreditorlar o`rtasida qarzlarni har xil yo`llar bilan taqsimlash mumkin. Bunga ikkita sodda misol keltiramiz. Birinchisida yangi qarzlar eskilari orqali quyidagi formula bo`yicha hisoblanadi:

$$x'_{nm} = \frac{S_n|S_m| - S_m|S_n|}{S}. \qquad (8)$$

(8) formulaga asosan qarzi S_n ($S_n < 0$) bo`lgan ixtiyoriy korxonaning qarzi kreditorkorxonalar o`rtasida ularning salьdolari ($S_m > 0$) ga proportsional ravishda taqsimlanadi. Musbat salьdosi katta bo`lgan korxonalar zimmasiga har bir qarzdor korxonalar qarzlarining kattagina qismi yuklanadi. Bu qarzlarning umumiy mikdori $S_m$ ga teng bo`ladi.

Agar $S_n < 0, \quad S_m < 0$ yoki $S_n > 0, \quad S_m > 0$ bo`lsa (8)

formulagaasosanyangiqarzlar $x'_{nm} = 0$ (ya’ni,

korxonalaro`zaroqarzlaridanqutilganlaridanso`ngqarzdorlarqarzdorlarga,

kreditorlarkreditorlargaqarzemas). Bushunianglatadiki,

korxonalaro`zaroqarzlaridanqutilganlaridanso`nghosilbo`lganmoliyaviyaloqalarson

iharbirkorxonaboshqakorxonauchundebitoryokiqarzdorbo`lgan,

ya’niqarzlarmatritsasinolь bo`lmagan (boshdiagonalelementlaridanboshqa)

elementlardaniboratholdagimoliyaviyalokalarsonidananchakam.

13.1-jadval.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Boshlangichqarzmatritsasi ($X = 3729$)									
2	-25								
3	-1	-20							
4	4	25	-2						
5	25	-450	25	30					
6	-15	150	-30	20	-928				
7	3	-40	3	3	5	25			
8	1	-22	-2	-2	4	-15	5		
9	10	322	-15	-25	498	-800	-10	20	
10	1	-25	-2	1	-20	15	-1	-3	30
Oxirgiqarzmatritsasi ($X' = S = 62$)									
2	2								

3	0	0							
4	0	0	0						
5	0	0	0	0					
6	0	0	0	0	-28				
7	1	0	0	0	0	0			
8	0	-7	0	0	0	0	0		
9	0	-18	0	0	-2	0	0	0	
10	0	0	0	0	0	4	0	0	0

Korxonalarniularsalьdolariningabsolyutqiymatlaribo`yichatartiblab, birxilmasshtabdagiqarzdorlarvakreditorlaro`rtasidaqarzlarnito`lashmaqsadidabevositaaloqalar o`rnatilsa, moliyaviy aloqalarsoninianchakamaytirishmumkin. 13.1-jadvalda $N=10$ takorxonalaro`rtasidagiqarzlardanyuqoridakeltirilganalgoritmasosidaamalgaoshirilgan. Ko`rinibturibdiki, boshlang`ichqarzmatritsasi $X$ 90 tanolь bo`lmaganelementlardaniborat, oxirgiqarzmatritsasi X' esabor 14 tanoldanfarklielementlardantashkiltopgan.

Shunita’kidlashjoizki, korxonalarnio`zaroqarzlaridanqutilishining yuqoridakeltirilganvaboshqaprotseduralarifaqatgina 1)-3) shartlarbajarilgandagina, ya’nikorxonalaro`rtasidagima’lumbirkelishuvlardaginama’nogaega. Bukelishuvgaamalqilmasliksababalariturlichabo`lishimumkin. Masalan, qarzlarniqandaydirxalkaroyokiboshqatashkilotlarsanktsiyasigacha (ya’ni, korxonahisobraqaminimuzlatibqo`yguncha) qarzlarnito`lamaslikqarzdorkorxonauchunmoliyaviytomondanahamiyatlibo`lishimumkin.

MA’RUZA №18.
BOZORIQTISODIYOTIMUVOZANATININGMAKROMODELI.

Bozoriqtisodiyotijarayonidaixtiyoriyishtiroketuvchio`ziningindividualmanfaatdorligigabo`yichaharakatqiladi (ya’nifoydaolish, mehnatsharoitiniyaxshilash, iqtisodiyxavfnikamaytirish, vositalarnitejashvaboshqalar).

Harbirsub’yektiqtisodiynochorahvolda, ya’niishlabchiqarishga, narxlarga, oylikmaoshigavaboshqamakroko`rsatkichlargabevositata’sirqilaolmaydigandarajad abo`lsa,bundaytizimningengsoddavarianti – rakobatdaniqtisodqilishdir. Shu bilan birgalikda iqtisodiy tizimda mavjud oldi-sotdi munosabatlari ish beruvchilar va yollanma ishchilar, moliyachilar hamda sarmoya kirituvchilar va boshqalarning muvofiqlashgan harakatiiqtisodiy agentlarning harakati natijasida bo`lishi mumkin. Agar bunday jamoaviy o`zaro xarakat natijasida tizimda tovar va xizmatlarni umumiy ishlab chiqarish ularga bo`lgan umumiy extiyojlarga muvofiqlashsa, u holda iqtisodiyotni bunday holati *muvozanatli*, bu holdagi turg`un narxlar *turg`un bozor narxlari deyiladi.*Talab va taklif o`rtasidagi balans aynan shu turg`un bozor narxlarida o`rinli bo`lib, xususan, talabni to`lash qodirligini (platejesposobnostь sprosa) anglatadi.

Iqtisodiy fanlarni muhim masalalaridan biri – iqtisodiyotni muvozanat shartlarini, shu jumladan, turg`un bozor narxlarinianiqlashdan iborat. Iqtisodiy muvozanatning eng sodda matematik modellari quyidagi farazlarga asoslanib quriladi:

1) yirik ishlab chiqaruvchi korporatsiya (ya’ni, monopoliya) larni shuningdek, butun sistema uchun o`zlarini shartlarini himoya (diktovka) qiladigan ishchilar birlashmasining mavjud emasligi anglatuvchi sovershennaya bozor rakobati

2) sistema ishlab chiqarish imkoniyatining o`zgarmasligi: asbob-uskunalar, ishlab chiqarish inshootlari va texnologiyalari vaqt o`tishi bilan o`zgarmaydi;

3) vaqt o`tishi bilan hamkorlar iqtisodiy manfaatdorligini o`zgarmasligi: tadbirkorlarni o`z foydalarini, ishchilar o`z oylik maoshlarini oshirishga intilmasliklari hamda investorlarni qimmatli kog`ozlardan va boshqalardan tushayotgan foizlarni qanoatlantirishi.

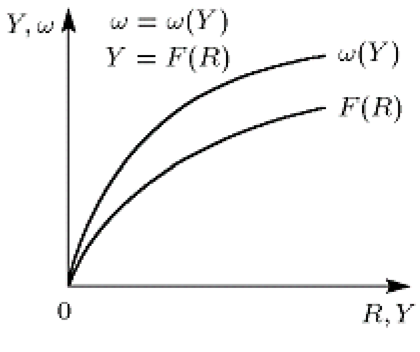
Yuqorida ko`rsatilgan farazlarga javob beruvchi modellar ideal bozor iqtisodiyotining vaqt bo`yicha «qotib qolgan» (sovub qolgan) hollarini ifodalaydi. Ammo, bu modellar bozor «xaos»idan shakllanuvchi iqtisodiy muvozanatni mavjudlik imkoniyati haqidagi savolga javob beradi va bundan tashqari iqtisodiy sistemaning asosiy makroko`rsatkichlarini o`zaro bog`laydi.

Ushbu modellardan bittasi – Keyns modelidir. Ushbu modelda ishga yollovchilar va yollanuvchilar, iste'molchilar va jamg`aruvchilar, ishlab chiqaruvchilar va ishchi kuchi bozorida harakat qiluvchi investorlar, mahsulotlar va pul, ya'ni bu tovar (mehnat, mahsulot, pul) larni o`zaro taqsimlovchilar va almashuvchilar agentlar sifatida qaraladi.

Milliy daromad Y sistemaning birinchi makroko`rsatkichi bo`lib, vaqt birligi ichida ishlab chiqariladigan yagona mahsulotdir. Ushbu mahsulot iqtisodiyotning ishlab chiqarish sektorida ishlab chiqariladi, uning miqdori F funktsiya orqali ifodalanadi. F funktsiya resurs (vosita) larni miqdori va sifatiga, asosiy fondlar tarkibiga va band bo`lgan ishchilar soni $R$ (ikkinchi makroko`rsatkich) bilan bog`lik. 2) farazga asosan iqtisodiy muvozanat holatida ishlab chiqarish funktsiyasi R va Y faqatgina bandlik orqali aniqlanadi, ya'ni

$$Y = F(R). \tag{3.1}$$

$F'(R) > 0,\ R > 0$ nisbatan quyidagilar urinli deb xisoblaniladi: $F(0) = 0$, $F'(R) > 0,\ R > 0$ va $F''(R) < 0,\ R > 0$ da (15.1 – rasm).



15.1 – rasm.

$F(R)$ funktsiyasi to`yinganlik xususiyatiga ega: $R$ oshishi bilan tovar ishlab chiqarish sekinlashadi. Bunday yondashish amalda o`zini oqlaydi: ishlab chiqarishda band bo`lganlar soni haddan tashqari oshib ketsa, ularga mos keluvchi ish frontini topish ancha mushkullashadi. Shuningdek, ishchilarsonime'yoriganisbatanko`pchiliknitashkiletsa, ularbir-biriga xalaqitberaboshlaydivaindividualfoydaliishkoeffitsiyentitushibketadi.

(3.1) munosabat mehnat bozori R va Y mahsulotlar o`rtasidagi o`zaro aloqani ifodalaydi. Qo`shimcha munosabatlar esa klassik siyosiy iqtisodning asosiy postulatlaridan bittasi orqali aniqlanadi:

4) ishchining s mehnat haqi ish o`rnini bitta birlikka kamaytirilganda yo`qotilgan mahsulotni narxiga teng.

Shuni ta’kidlash lozimki, 4) postulatda ish o`rnini bittaga kamaytirishdan hosil bo`ladigan zararlar (resurslarga, asbob-uskunalarga va boshqalarga sarflanadigan xarajatlar) hisobga olinmagan. Shunday qilib, 4) postulatdan quyidagiga ega bo`lish mumkin:

$$\Delta Y^{(1)} \cdot p = s,$$

bu yerda $\Delta Y^{(1)}$ – ish o`rnini bitta birlikka kamaytirilganda yo`qotilgan mahsulotlar sonini, p – yo`qotilgan mahsulot narxi. Agar ish bilan bandlik $\Delta R$ miqdorga o`zgarsa, oxirgi tenglikdan quyidagini hosil qilish mumkin:

$$\Delta Y \cdot p = s \cdot \Delta R,$$

bu yerda $\Delta Y = \Delta Y^{(1)} \cdot \Delta R$ ishchilar soni ΔR miqdorga o`zgarganda yo`qotiladigan yoki qo`shimcha paydo bo`ladigan narx. ΔR va ΔY miqdorlarni R va Y miqdorlarga taqqoslaganda kichik deb hisoblab, oxirgi tenglikni differentsial ko`rinishda yozish mumkin:

$$\frac{\partial Y}{\partial R} = \frac{s}{p}.$$

(3.1) tenglikni e’tiborga olsak, oxirgi tenglikdan quyidagini hosil qilish mumkin:

$$F'(R) = \frac{s}{p}. \tag{3.2}$$

$F(R)$ funktsiya berilgan (bunga asosan ($F'(R)$ ni ham aniqlash mumkin) ligini hisobga olsak, s va p makroko`rsatkichlarning ma’lum qiymatlarida (3.2) dan bandlik darajasi R ni va (3.1) dan mahsulotlar miqdori Y ni aniqlash mumkin.

Bu yerda aniqlangan bandlik darajasi iqtisodiy sistemada mavjud narxlar va boshqa xarakteristikalarga mos keluvchi ushbu kundagi oylik maoshlariga rozi bo`lib, ishlayotgan ishlovchilar sonini ifodalashini ta'kidlash joiz. Bandlik darajasi muvozanatini ta'minlovchi, mavjud sharoitlarda ishlashni xohlovchilarni hamma vaqtlarda ham topish mumkin, ya'ni kuyidagicha faraz qilinadi:

5) (3.1) va (3.2) tenglamalarda to`rtta miqdorlar qatnashmokda.

Ishchining s mexnat haqiga nisbatan kuyidagilar faraz kilinadi:

6) modelda ishchining s mexnat haqi berilgan deb xisoblanadi.

s miqdor ish beruvchilar va yollanuvchilar o`rtasidagi kompromiss natijasida aniqlanadi (real ish haqi narxlar darajasiga ham bog`lik).

Yopiq matematik model qurish uchun mahsulot bozorlari va moliyaviy bozorlarni ham o`rganish lozim bo`ladi. Ishlab chiqarilgan mahsulotni bir qismi extiyojni qondirishga va ma'lum bir qismi jamg`arilib boriladi:

$$Y = S + \omega,$$

bu yerda ω - mahsulotning iste'mol qilinadigan (iqtisodiyotga qaytmaydigan) qismi, S esa iqtisodiy sistemaga qaytuvchi, jamg`arib boriladigan (yoki fondni tashkil qiluvchi mahsulotlar) qismini ifodalaydi. $S$ va $\omega$ miqdorlar o`rtasidagi munosabat quyidagi mulohazalardan aniqlanadi. ω miqdorga nisbatan quyidagilar faraz qilinadi:

7) ishlab chiqarilgan mahsulotning iste'mol qilinadigan qismi ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori Y ning o`ziga bog`lik, ya'ni $\omega = \omega(Y)$. Bu yerda $\omega(Y)$ funktsiyasi $F(R)$ funktsiyasiga o`xshab to`yinganlik xususiyatiga ega: ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori kancha katta bo`lsa, iste'mol qilishga sarflanadigan qo`shimcha ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori ΔY ning ulushi shuncha kichik bo`ladi (15.1–rasm) va katta qismi jamg`arilib boriladi. $d\omega/dY = c(Y)$ miqdor *iste'mol qilishga moyillik deyiladi.* $0 < c < 1$, aks holda kichik miqdorda ishlab chiqarilgan mahsulotlarda ishlab chiqarilgan miqdoriga nisbatan ko`prok iste'mol talab kilinar edi. $d = 1 - c$ miqdor jamg`arish (yig`ish) gamoyillikniangla tadi.

$$S = Y - \omega(Y) \qquad (3.3)$$

fondni tashkil qiluvchi mahsulot kelgusida foyda olish maqsadidainvestitsiyasifatida investorlar tomonidan iqtisodiyotgakiritiladi. Matematikmodeldakiritilayotganinvestitsiyakelgusidaiste'mol uchun tashlab ko`yilgan mahsulotga ekvivalent deb hisoblaniladivashusabablisistemaning yana bitta moliyaviy makroko`rsatkichi – bankfoiziningnormasi r bilan aniqlanadi. Hakikatdanham A razmerdainvestiyakilib, biryildankeyin $D = A \cdot r$ daromadolib, ushbuvositalarnibankka r foizga qo`yishga solishtiriladigan bo`lsa, investor hech narsa yutqazmaydi (bumisoldayutmaydiham). Ikkala holdaham keyingi yilda katta miqdordagiiste'mollikimkoniyatisababli bugungi iste'mol keyinga qoldirilmokda. Investitsiyaga talab $A(r)$ funktsiya bilan beriladi. Agar $0 < r < r_1$ bo`lsa $A'(r) < 0$ va $r \geq r_1$ bo`lsa $A'(r) = 0$ bo`ladi – investitsiyaning katta foizli normasida investitsiyaga talab bo`lmaydi (15.3 – rasm).

Muvozanat sharoitida fondni tashkil qiluvchi mahsulotga bo`lgan talab $S(Y)$ investitsiyaga bo`lgan talab $A(r)$ bilan balanslashadi:

$$S(Y) = A(r).$$

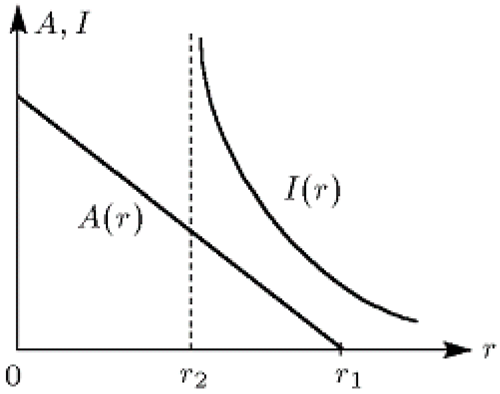
Agar (3.3) ni e'tiborga olsak,

$$Y - \omega(Y) = A(r). \qquad (3.4)$$

Modelni yopik ko`rinishda ifodalash uchun moliyaviy bozor o`rganiladi. Iqtisodiy agentlar uchun pul fondni tashkil qiluvchi mahsulotlar sotib olishga, iste'mol uchun, shuningdek, jamg`arishning bir vositasi sifatida kerak. Faraz qilinadiki, pulni davlat chiqaradi va ularning mikdori *(taklif)* Z iqtisodiy sistemaning *berilgan boshqariluvchi parametri deyiladi*.Pulgabulgantalabganisbatanquyidagichafarazkilinadi:

8) pulga bo`lgan talab operatsion va chayqovchilik talablari yig`indisidan iborat.

Operatsion talab Y tovarni sotib olish uchun (ham fondni tashkil qiluvchi sifatida hamda iste'mol uchun) qo`lda bo`lishi lozim bo`lgan pul miqdori bilan aniqlanadi. Agar mahsulot narxi p ga teng, muomala vaqti τ ga teng bulsa, u holda operatsion talab τpY miqdorga teng.



Chayqovchilik talabi foiz normasi miqdori r bilan bog`lik. Agar foiz normalari yuqori bo`lsa, katta pulga ega bo`lgan puldorlar yaxshi daromaddan umid qilib, pullarining anchagina qismini bankda saqlaydilar. Bunda ular bankga nisbatan banknotlarni yuqori darajada likvidatsiya 5.5 – rasm.qilish (bu pullarni mahsulotlarga almashtirish) imkoniyatini qurbon qiladilar. Kichkina foiz stavkasida chayqovchilik talabi oshadi: puldorlar o`z qo`llariga ko`prok miqdordagi pullarni ushlab turishni xohlaydilar. Shuning uchun chayqovchiliktalabi $I(r)$ funktsiyaorqaliberiladi (5.5–rasm). $r > r_2$ bo`lganda $I'(r) < 0$ bo`ladi, $r \to r_2$ da $I(r)$funktsiyajudatezo`sadi ($r \to r_2$da $\lim I(r) = \infty$; pulegalaribankmajburiyatlarigaegabo`laolmaydilar). $r_2 < r_1$debhisoblashtabiiy, aksholdayokiinvestitsiyanolgatengvaiktisodiy muvozanat haqida gapirishga hojat qolmaydiyoxud $I(r)$ funktsiya aniqlanmagan va uni o`rganishma’nokasbetmaydi.

Moliyaviybozormuvozanatholatida bo`lganida pullarni balansi («saqlanish qonuni») iqtisodiy tizimda quyidagitenglamabilanifodalanadi

$$Z = \tau pY + I(r). \tag{3.5}$$

(3.1)-(3.5) tenglamalarnibirlashtirib, 1)-8) farazlarasosidahosilqilinganbozormuvozanatiningmatematikmodeligaegabo`lishmumkin:

$$\begin{aligned} &Y = F(R), \\ &F'(R) = \frac{s}{p}, \\ &Y - \omega(Y) = A(r) \end{aligned} \tag{3.6}$$

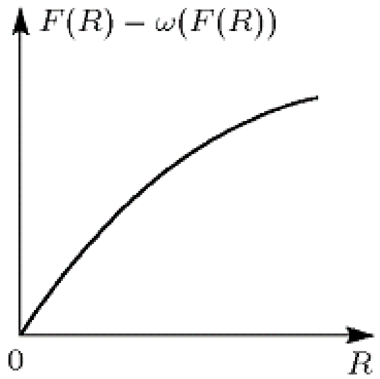
$$Z = \tau\, pY + I(r)$$

(3.6) matematik modelda sistemaning parametri s (oylik maosh stavkasi)va τ texnik parametrlar beriladi. F, F', ω, A, I funktsiyalar har birio`z argumentlarining ma’lum funktsiyalari bo`lib, ular yuqorida bayon etilgan xossalarga ega. Ushbu berilganlarga asosan modeldan to`rtta noma’lum miqdorlar: Y (ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori), R (bandlik), p (mahsulot narxi) va r (daromad normasi) aniqlanadi.

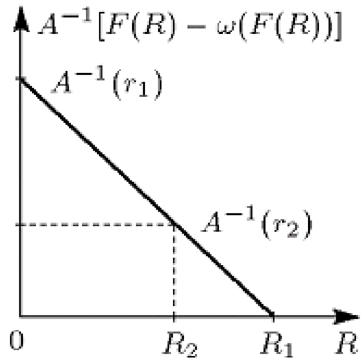
(3.6) dan p, r, Y mikdorlarni yo`qotib, (3.6) tenglamani $R$ ga nisbatan quyida keltirilgan bitta tenglama ko`rinishida ifodalash mumkin:

$$-\frac{\tau\, sF(R)}{F'(R)} + Z = I\left(A^{-1}\left[F(R) - \omega(F(R))\right]\right), \qquad (3.7)$$

bu yerda A^{-1} funktsiya A funktsiyaga teskari funktsiyadir. (3.7) dan R ni qiymatini aniqlab, (3.6) tenglamalardan boshka noma’lum miqdorlarni ham aniqlash mumkin.



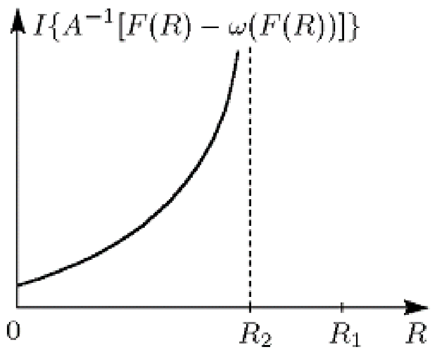
5.6 – rasm.



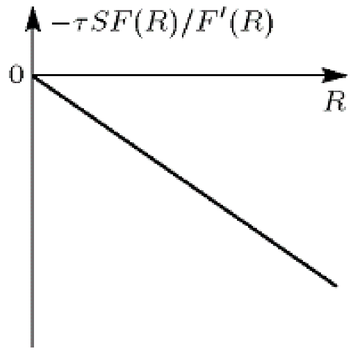
5.7 – rasm.

(3.7) tenglamani chap va o`ng tomonlariga kiruvchi funktsiyalarni grafiklari tahliliga asoslanib, bu tenglama yagona yechimga ega ekanligini ko`rsatamiz.

$F(R) - \omega(F(R))$ funktsiya $R = 0$ da nolga teng bo`lib, $R$ ning monoton o`suvchi funktsiyasidir (5.6–rasm). Uning monotonligi $d\omega(F(R))/d(F(R)) = c < 1$ shartdan, bu funktsiya R ni o`sishi bilan o`suvchi ekanligi $dF(R)/dR > 0$ shartdan esa kelib chiqadi. Shuningdek, bu funktsiya A^{-1} monoton funktsiyaning argumentidir. A funktsiyaning xossasidan (5.7–rasm) A^{-1} funktsiyaning R argumentga sifat jihatdan qaysi ko`rinishda bog`likligini ko`rish mumkin (5.7–rasm). Rasmdan ko`rinib turibdiki, $R > R_1$ ($R_1 - R$ ning qandaydir qiymati bo`lib, $0 < R_1 < \infty$) shart bajarilsa, $A^{-1} \equiv 0$. O`z navbatida A^{-1} funktsiya tenglamada I funktsiyaning argumenti sifatida ishtirok etayapti. I funktsiyaning xossasi 3–rasmda keltirilgan. 5.8–rasmda bu funktsiyaning grafigi keltirilgan bo`lib, u $R > R_2$ da aniqlanmagan.



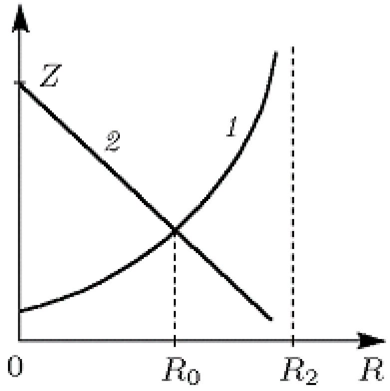
5.8–rasm .



5.9–rasm .

Endi (3.7) tenglamaning chap tomonini ko`rib chiqamiz. $-\tau sF(R)/F'(R)$ funktsiya $R = 0$ da nolga teng ($F'(R) \neq 0$ deb faraz qilinadi)(5.4–rasmga karalsin). uning $R$ bo`yicha birinchi tartibli hosilasi funktsiyaning $F'(R) > 0$, $F''(R) < 0$ xossalariga asosan manfiy, ya’ni bu funktsiya monoton kamayuvchidir (6 –rasm).

(3.7) tenglama uchun va chap kismlari grafigini (ularning grafigi mos holda 1 va 2 egri chiziklar) birlashtirib (5.10–rasm), shunga ishonch hosil qilish mumkinki, boshqaruvchi parametr Z ning yetarlicha katta qiymatlarida bu egri chiziqlar qandaydir R_0 $(0 < R_0 < \infty)$ nuqtada kesishadi. Grafiklarning monotonligiga asosan kesishish nuqtasi yagonadir. Xususan, (3.6) matematik model haqikatdan xam iqtisodiyotning muvozanat holatini ifodalovchi yagona yechimga ega.



(3.6) matematik model muvozanat holatiga yaqin bo`lgan turli holatlarni qiyosiy tahlili uchun ham ishlatilishi mumkin (qanday kilib sistema muvozanat holatiga keladi yoki muvozanat holatidan chiqadi degan savollarga javob bermasdan).

5.10 – rasm.

MA’RUZA №18.
IQTISODIYO`SISHININGMAKROMODELI.

O`suvchiiqtisoddavaqto`tishibilanishlovchilarsoniko`payibboradi. Engoddiyholdaishbilanta’minlanganlarningo`sishsur’atiishlayotganlarsonibilanproportsional.

$$\frac{dR}{dt} = \alpha R(t) \tag{1}$$

Shuninguchun $R(t) = R_0 e^{\alpha t}$ vaqtningma’lumbirfunktsiyasi, $R_0 = R(0)$ - boshlang`ichvaqtdagiishlovchilarsoni, $\alpha$–proportsionallik koeffitsiyenti bo`lib, uning qiymati har bir iqtisodiy hudud uchun ma’lum.

Ishchilar mehnati tufayli $y(t)$ milliy daromad keltirsin. Bu daromad qisman extiyojlarni qondirishga va jamg`arishga ketadi, ya’ni

$$y(t) = W + A \tag{2}$$

Buyerda W – extiyojlarniqondirishgasarfbuladigan, A–jamg`ariladigandaromadqismlaridir.

Jamg`arilidagan $A$ qismesao`znavbatidaqatordanchiqibqolgansanoatquvvatinitiklashvayangiquvvatlaryaratishuchunsarfetilib, yanaiqtisodgaqaytadi.

$M(t)$ quvvat deyilganda maxsulotni mumkin qadar maksimal ishlab chiqarish tushuniladi.

Mahsulotni real ishlab chiqarishishlovchilar soniga bog`liq bo`ladi.

$$y(t) = M(t)f(x(t)) \tag{3}$$

(3) da - $x(t) = R(t)/ M(t)$– bir birlik quvvatda ishlovchilar soni.

$f(x)$ funktsiya to`g`risida quyidagiga faraz qilinadi:

$f(0) = 0,\ f'(x) > 0$, ya'ni ishlovchilar soni oshishi bilan ishlab chiqarilayotgan mahsulot ham oshib boradi va $f''(x) < 0$ iqtisodni mahsulot bilan to`lganligini (ta'minlanganligini) bildiradi.

$f(x)$funktsiya $x \in [0; X_M]$da aniqlangan, $X_M = R_M / M$, $R_M(t)$ – $M(t)$ quvvatni ta'minlovchi xo`jalikdagi ishchilar soni. Agar hamma ish joylari ishchilar bilan ta'minlangan bo`lsa, u holda maxsulotni ishlab chiqarish miqdori $Y(t)$ ta'rifga ko`ra $Y(t) = M(t)$, ya'ni $f(X_M) = 1$bo`ladi.

Ishlab chiqarishdan topilgan daromadni extiyojni qondirishga va jamg`arishga ajratishning optimal usullarini aniqlash iqtisodiyot masalalarining asosiy masalalaridan biridir. Optimallikni kriteriyasi sifatida jon boshiga (bir ishchiga) sarf bo`ladigan extiyojni$C(t) = W(t)/ R(t)$ ni qabul qilish mumkin.

Vaqt birligi ichida jamg`arilgan $A(t)$ daromad yangi quvvatlarni yaratishga sarf bo`ladi:

$$A(t) = aI(t) (4)$$

Bu yerda $a > 0$yangi quvvat birligini yaratish uchun zarur bo`ladigan fondni tashkil etuvchi berilgan o`zgarmas miqdor. $I(t)$– yangiquvvatbirligisoni.

Mavjudquvvatniishdanchiqishtezligiquvvatningo`zigaproportsional, ya'ni $\beta M(t)$debhisoblanadi, uholdaquvvatquyidagichao`zgaradi:

$$\frac{dM}{dt} = I(t) - \beta M(t), \tag{5}$$

bu yerda $\beta > 0$ - ishdan chiqish koeffitsiyenti.

(2), (3) va (5) tenglamalarda 4 ta noma'lum $y(t), W(t), M(t), I(t)$lar qatnashayapti. Modelni to`ldirish uchun yangi quvvat miqdori mavjud quvvat miqdoriga proportsional $I(t)=\gamma M(t)$ deb faraz qilamiz,$\gamma$ - *be*rilgan o`zgarmas miqdor bo`lib, $\gamma > \beta$.

U holda (5) tenglama quyidagi yechimga ega bo`ladi:

$$M(t)=M_0 e^{(\gamma-\beta)t} \tag{6}$$

va shu orqali boshqa miqdorlar ham aniqlanadi.

Oddiy

$$\gamma-\beta=\alpha \tag{7}$$

holni qaraymiz. Bu esa quvvat $y(t)$funktsiya$\omega(t)$, $I(t)$funktsiyalar bilan bir xil sur'at bilan o`sar ekan, chunki

$$f(x(t))=f(x=R_0/M_0=const).$$

Ishlovchilarni jon boshiga sarf bo`ladigan extiyojni maksimal darajasini ta'minlash uchun ishlovchilar sonini va ehtiyojni jamg`arishga bo`lgan nisbatini aniqlaymiz. Ta'rifga asosan

$$C(t)=\frac{W(t)}{R(t)}=\frac{y(t)-A(t)}{R(t)}.$$

(3 – 4) va (6 – 7) larnihisobgaolsak

$$C(t)=c=\frac{f(x)-\alpha(\alpha+\beta)}{x}=const.$$

Ya'ni, jon boshiga to`g`ri keladigan ehtiyoj vaqt o`tishi bilan o`zgarmasdan qolar ekan. Uningmaksimumiquyidagishartdantopiladi:

$$\frac{dC}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)-\alpha(\alpha+\beta)}{x}\right)=0.$$

Bu tenglamadan izlanayotgan x_m uchun quyidagitenglamani hosil qilish mumkin:

$$x_m f'(x_m)-f(x_m)+\alpha(\alpha+\beta)=0. \tag{8}$$

Butenglamadan $0 < x_m \le x_M$ va $R_0 / M_0 = x_m$ boshlang`ich shartniqanoatlantiruvchiyagonayechimnianiqlashmumkin.

Jonboshigasarfbo`ladigan maksimum extiyoj $C_m$ni ta’minlaydigan jamg`arish normasi quyidagicha:

$$n_m = \frac{A_m}{y_m}.$$

Yoki $y_m = M_m f(x_m)$, $A_m = \alpha\gamma M_m$ va(7), (8) larga asosan jamg`arish normasi uchun quyidagiga ega bo`lish mumkin:

$$n_m = 1 - x_m \frac{f'(x_m)}{f(x_m)}. \qquad (9)$$

Bu norma iqtisod o`sishini oltin qoidasining normasi (Solou) deyiladi.

Agar (7) shart bajarilmasa, iqtisod o`sishi rejimi murakkab protsessdan iborat bo`ladi.

NAZORATSAVOLLARI

Yakuniybaholashvaoraliqbaholashlarbo`yichasavolnomalar

Bilet №1

1. Modelvamodellashtirishtushunchalari.
2. Modellashtirishningiyerarxiyaprintsipi.

Bilet №2

1. Matematikmodellashtirishningvariatsionprintsipi.
2. Matematikmodellashtirishdaanalogiyausuli.

Bilet №3

1. Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar. Matematikmodelniifodalashshakllari.
2. Yirtqich-o`lja modeli. Volterra modeli.

Bilet №4

1. Xisoblash eksperimenti va uning bosqichlari.
2. Yer shari aholisining o`sishi planetamizdagi erkaklar va ayollar sonlarining ko`paytmasiga proportsional deb hisoblab, yer shari aholisi o`sishining matematik modelini quring.

Bilet №5

1. Energiyaning saqlanish qonunidan foydalanib, MM qurish.
2. Matematik modellarga qo`yiladigan asosiy talablar.

Bilet №6

1. Massa (materiya)ning saqlanish qonuni foydalanib, MM qurish.
2. MALTUS va Fьyurxst-Perl modellari.

Bilet №7

1. Impulsning saqlanish qonunidan foydalanib, MM qurish.
2. Ikki davlat o`rtasidagi qurollanish poygasi modeli.

Bilet №8

1. Matematik modellarning universialligi, matematik modellashtirishning umumiy qonunlari va usullarini konkret misollarda kuzatish.
2. Matematik modellarga qo`yiladigan asosiy talablar.

Bilet №9

1. Yemiriluvchi moddaning yemirilish tezligi uning miqdoriga proportsional deb hisoblab, moddaning yemirilish jarayonining matematik modelini quring.
2. Murakkabjarayonlarnimatematikmodellashtirish.

Bilet №10

1. Modellashtirishvamodellarningturlari.
2. Iqtisodiyot o`sishining makromodeli.

Bilet №11

1. Modelvamodellashtirishtushunchalari.
2. Modellashtirishningiyerarxiyaprintsipi.

Bilet №12

1. Matematikmodellashtirishningvariatsionprintsipi.
2. Matematikmodellashtirishdaanalogiyausuli.

Bilet №13

1. Matematik model tushunchasi. Matematik modelga misollar. Matematikmodelniifodalashshakllari.
2. Yirtqich-o`lja modeli. Volterra modeli.

Bilet №14

1. Xisoblash eksperimenti va uning bosqichlari.
2. Ikki armiya jangovar xarakati modeli.

Bilet №15

1. Energiyaning saqlanish qonunidan foydalanib, MM qurish.
2. Matematik modellarga qo`yiladigan asosiy talablar.

Bilet №16

1. Massa (materiya)ning saqlanish qonuni foydalanib, MM qurish.
2. MALTUS va Fьyurxst-Perl modellari.

Bilet №17

1. Impulsning saqlanish qonunidan foydalanib, MM qurish.
2. Ikki davlat o`rtasidagi qurollanish poygasi modeli.

Bilet №18

1. Korxonalar o`zaro qarzlarini bartaraf etishi.
2. Matematik modellarga qo`yiladigan asosiy talablar.

Bilet №19

1. Murakkabjarayonlarnimatematikmodellashtirish.
2. Reklamakompaniyasinitashkillashtirish.

Bilet №20

1. Modellashtirishvamodellarningturlari.
2. Moddavaenergiyamuvozanatiningmodeli.

Bilet №21

1. Epidemiyamodeli.
2. Yemiriluvchimoddaningyemirilishtezligiuningmiqdorigaproportsionaldebhisoblab, moddaningyemirilishjarayoniningmatematikmodeliniquring.

Bilet №22

1. Matematik modellarning universialligi, matematik modellash-tirishning umumiy qonunlari va usullarini konkret misollarda kuzatish.
2. Bozoriqtisodiyotimuvozanatiningmakromodeli.

Bilet №23

1. Iyerarxiyaprintsipidanfoydalanib, matematikmodellarqurish.
2. Populyatsiyachiziqsizmodeliningucturdagirejimi.

Bilet №24

1. Analogiyausulidanfoydalanib, matematikmodellarqurish.
2. Matematikmodellashtirishdavariatsionprintsipdanfoydalanish.

Bilet №25

1. Jamiyatrivojlanishiningdemografikmodellari.
2. Biologik modellarga doir misollar.

Amaliymasalalarni matematikmodellashtirish fanidantestsavollari

Amaliy masalalarni matematik modellashtirish fanidan test savollari

1. Modellotincha “modulus” so`zidanolinganligima’lum, uqandayma’nonianglatadi?
a) barchajavoblarto`g`ri;
b) o`lchov;
v) namuna.

2. Modelnita’rifiniko`rsating.
a) barchajavoblarto`g`ri;
b) Model– burealob’yektnialmashtirishimumkinbo`lgan, tadqiqotvatajribao`tkazishuchunqulayvaarzonbo`lganboshqabirrealyokiabstraktob’yektdir;
v) Modelrealob’yektningsoddalashtirilganko`rinishibo`lib, uninghammaxossalariniemas, balkiasosiyxossalariniginao`zidamujassametganboshqabirrealyokiabstraktob’yektdir.

3. Hozirgikundafanolamidama’lumbo`lganma’lumotlarniko`rinishivama’nosigaqarabqandayturlargabo`lishmumkin?
a) fizik, grafikli, matematik;
b) grafikli, matematik;
v) matematik, fizik.
g) fizik, grafikli.

4. Tajribao`tkazishgamo`ljallangantajribauchastkalari, laboratoriyamashg`ulotlarinio`tkazishgamo`ljallanganasbobuskunalarqandaymodellargamisolbo`ladi?
a) fizik;
b) matematik;
v) grafikli.

5. Sxemalar, chizmalar, rasmlar, ilmiyvatarixiyasarlarqandaymodellargamisolbo`laoladi?
a) grafikli;
b) matematik;
v) fizik.

6. Nьyutonqonunlari, saqlanishqonunlariqandaymodellargamisolbo`laoladi?
a) matematik;
b) fizik;
v) grafikli.

7. ... Modelrealob’yektnitasavurimizdagiabstraktko`rinishibo`lib, umatematikbelgilarvaba’zibirqonun–qoidalarbilanifodalanganbo`ladi.
a) matematik;
b) fizik;
v) grafikli.

8. Masalaningyechilishihususiyatlarigaqarabmatematikmodellarqandayturlarga bo`linishimumkin?
a)funktsionalmodellar, strukturali modellar;
b) strukturali modellar;
v) funktsionalmodellar.

9. Funktsionalmodellarnimohiyatinimada?
a) barchajavoblarto`g`ri;
b) funktsionalmodellardahodisa yoki obektni harakterlovchi barchakattaliklar miqdoriy ifodalaniladi;
v) funktsionalmodellardakattaliklarningayrimlarierklio`zgaruvchilarsifatida, boshqalariesashumiqdorlarningfunktsiyalarisifatidaqaraladi.

10. Matematikmodellarquyidakeltirilganlarningqaysibiribilanifodalanishi mumkin?
a) differentsial, algebraiktenglamalaryokitengsizliklarsistemasiko`rinishida;
b) differentsialtenglamalaryokitenglamalarsistemasiko`rinishida;
v) algebraiktenglamalaryokitenglamalarsistemasiko`rinishida;
g) algebraiktengsizliklaryokitengsizliklarsistemasiko`rinishida.

11.Strukturalimodellarningmohiyatinimadaniborat?
a) keltirilganlarningbarchasito`g`ri;
b) strukturali modellardamatematikModel murakkab obektning strukturasini ifodalaydi;
v) strukturalimodellardamurakkabob’yektodatdaturliqismlardantuzilganbo`lib, buqismlarorasidagibog`lanishlarniodatdamiqdoriyifodalabbo`lmaydi;

12. Matematikmodeldagiberilganlarvabashoratlashnatijalariningxarakterig ako`ramodellarqandayturlargaajratilishimumkin?
a)deterministik, ehtimolli-statistikmodellar;
b) ehtimolli-statistik, algebraikmodellar;
v) deterministikmodellar;
g) differentsialmodellar.

13.Deterministikmodellarnimabilanxarakterlanadi?
a) deterministikmodellardaaniq, bir qiymatli bashorat qilinadi;
b) deterministikmodellarstatistikma’lumotlargaasoslanganbo`lib, ularyordamidagibashoratlarehtimolliharakterdabo`ladi;
v) keltirilganlarningbarchasito`g`ri.

14.Ehtimolli-statistikmodellarnimabilanxarakterlanadi?
a) ehtimolli-statistikmodellarstatistikma’lumotlargaasoslanganbo`lib, ularyordamidagibashoratlarehtimolliharakterdabo`ladi;
b) ehtimolli-statistikmodellardaaniq, birqiymatlibashoratqilinadi;
v) keltirilganlarningbarchasito`g`ri.

15.Matematikmodelgaqo`yiladiganasosiytalablarniko`rsating.
a) universallik, kompaktlik, soddalik, pastsezgirlik darajasigaegabo`lishi, moslashishdarajasiyuqoribo`lishi;
b) universallik, pastsezgirlikdarajasigaegabo`lishi, moslashishdarajasiyuqoribo`lishi;
v) kompaktlik, soddalik, pastsezgirlik darajasigaegabo`lishi, moslashishdarajasiyuqoribo`lishi;
g) universallik, kompaktlik, soddalik, moslashishdarajasiyuqoribo`lishi.

16.Matematikmodelniqurishningasosiybosqichlariniko`rsating.
a) ob’yektnio`rganish, yig`ilganma’lumotlarnisistemalashtirish, yig`ilganma’lumotlarasosidaob’yektbo`ysunadiganqonunyokiqonuniyatlartanlash; ob’yektnitaklifetilayotganmatematikmodelini “jihozlash”, matematikModelasosidadiskretModelqurishvadiskretModelasosidadasturtuzib, kompьyuterdaqo`yilganmatematikmasalaniyechish;
b) ob’yektnio`rganish, yig`ilganma’lumotlarasosidaob’yektbo`ysunadiganqonunyokiqonuniyatlartanlash; ob’yektnitaklifetilayotganmatematikmodelini “jihozlash”, matematikModelasosidadiskretModelqurishvadiskretModelasosidadasturtuzib, kompьyuterdaqo`yilganmatematikmasalaniyechish;
v) ob’yektnio`rganish, yig`ilganma’lumotlarasosidaob’yektbo`ysunadiganqonunyokiqonuniyatlartanlash; ob’yektnitaklifetilayotganmatematikmodelini “jihozlash”, dasturtuzib, kompьyuterdaqo`yilganmatematikmasalaniyechish.

17. MatematikModelvauningrealob’yektiorasidagimuvofiqlikdeyilgandani matushuniladi?
a) matematik Model va uning real ob’yekti orasidagi muvofiqlik deyilganda ob’yekt va uning matematik modeli dinamikalarining sifat vamiqdorjihatdan o`xshashligi va yaqinligi tushuniladi;
b) matematik Model va uning real ob’yekti orasidagi muvofiqlik deyilganda ob’yekt va uning matematik modeli dinamikalarining sifat jihatdan o`xshashligi va yaqinligi tushuniladi;
v) matematik model va uning real ob’yekti orasidagi muvofiqlik deyilganda ob’yekt va uning matematik modeli dinamikalarining miqdorjihatdan o`xshashligi va yaqinligi tushuniladi.

18. Ob’yektvauningmatematikmodelidinamikalariorasidamuvofiqliknio`rnatishningusullariniko`rsating.
a) keltirilganlarningbarchasito`g`ri
b) matematikmodeldaishtiroketayotgano`zgarmaskattaliklarniqaytadanbaholash;
v) matematikmodelniyozishdaqabulqilinganishchigipotezalarniqaytadanko`ribchiqish;
g) realob’yekthaqidaqo`shimchama’lumotlaryig`ishvayangiyig`ilganma’lumotlarasosidamodelniqaytadanko`ribchiqish.

19. Agar $M_I(0)$va$M_{II}(0)$moddalarningboshlang`ich, $M_I(t)$va$M_{II}(t)$ joriymassalaribo`lsa, $M_I(0)+M_{II}(0)=M_I(t)+M_{II}(t)$formulanimaniifodalaydi?
a) moddalarmassasiningsaqlanishqonunini;
b) energiyanisaqlanishqonuni;
v) Impulsnisaqlanishqonuni.

20. Radiaktivyemiriluvchimoddamassasiningvaqtbo`yichao`zgarishqonuniniko`rsating.
a) $M_I(t)=M_I(0)e^{-\alpha t}$;
b) $M_I(t)=M_I(0)e^{\alpha t}$;
v) $M_I(t)=M_I(0)\left(e^{-\alpha t}+e^{\alpha t}\right)$.

21. Radiaktivmoddaningyemirilishtezligiqandayformulabilanifodalanadi?
a) $\frac{dM_I(t)}{dt}=-\alpha M_I(t)$;
b) $\frac{dM_I(t)}{dt}=\alpha M_I(t)$;
v) $\frac{dM_I(t)}{dt}=-\alpha M_I(0)$.
22. RaketaharakatiuchunImpulsningsaqlanishqonuniqandayifodalanadi?
a) $m(t)v(t)=m(t+\Delta t)v(t+\Delta t)+[m(t)-m(t+\Delta t)][v(t+\Delta t)-u]$;
b) $m(t)v(t)=m(t+\Delta t)v(t+\Delta t)$;
v) $m(t)v(t)=[m(t)-m(t+\Delta t)][v(t+\Delta t)-u]$.

23. RaketaharakatiuchunImpulsningsaqlanishqonuniqandayifodalanadi?
a) $m\frac{dv}{dt}=-\frac{dm}{dt}u$;
b) $\frac{dv}{dt}=-\frac{dm}{dt}u$;
v) $m\frac{dv}{dt}=-u$.

24.Birpog`onaliraketaningtezligiqandayqonunasosidao`zgaradi?
a) $v(t) = v_0 + u\ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$;
b) $v(t) = v_0 + u\,ln(m(t))$;
v) $v(t) = v_0 + ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right)$.

25.Birpog`onaliraketalardannegafoydalanilmaydi?
a) raketalarningtezligikichikbo`lganligisababli, ya'niburaketalarhattokibirinchikosmiktezlikkahamerishaolmasligisababli;
b) bundayraketalarningmassalarinisbatankichikbo`lganligisababli;
v) raketalarningkonstruktsiyasisoddabo`lganligisababli.

26. Iyerarxiyaprintsipidanfoydalanib, matematikmodellarqurilgandahosilbo`lganmodellarqandayxususiyatlargaegabo`ladi?
a) keltirilganlarningbarchasito`g`ri;
b) harbirioldingimodellarniumumlashtiruvchivaularnio`ziningxususiyholisifatidao`zigabiriktiriboluvchinisbatanto`lamodellarzanjiri (iyerarxiyasi) hosilbo`ladi;
v) keyingilarioldingilarinio`zichigaolgan, ya'nioldingimodellarkeyingimodellarningxususiyholibo`lgannisbatanto`liqbo`lgan modellarzanjirihosilbo`ladi.

27. $m_0 = m_p + m_1 + m_2 + m_3$ifodanimanianglatadi?
a) uchpog`onaliraketaningboshlang`ichmassasini;
b) murakkabkonstruktsiyaliraketaningboshlang`ichmassasini;
v) raketaningstrukturamassasini.

28. Ko`ppog`onaliraketalarda λm_i – i-chipog`onagamoskeluvchistrukturamassasibo`lsa, $(1-\lambda)m_i$ ifodanimanianglatadi?
a) i-chipog`onagamoskeluvchiyoqilg`imassasi;
b) i-chipog`onagamoskeluvchifoydaliyukmassasi;

29. Uchpog`onaliraketalaruchun $m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3$ ifodanimanianglatadi?
a) raketabirinchipog`onasiningyoqilg`isisarfbo`lgan, raketaningtezligi $v_1 = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p + \lambda m_1 + m_2 + m_3}\right)$ gatengbo`lgandagimassasi;
b) ikkinchipog`onaningboshlang`ichmassasi.

30. Uchpog`onaliraketalaruchun $v_2 = v_{1`} + u\ln\left(\frac{m_p + m_2 + m_3}{m_p + \lambda m_2 + m_3}\right)$ ifodanimaniangladatadi?
a) barchajavoblarto`g`ri;
b) ikkinchipog`onadagiyoqilg`iyonibtugagandankeyingiraketaningtezligini;
v) raketaninguchinchipog`onasiishgatushgandagiboshlang`ichtezligini.

31. Uchpog`onaliraketalaruchunboshlang`ichmassanifoydaliyukmassasiga nisbatinimagateng?
a) $\frac{m_0}{m_p} = \frac{(1-\lambda)^3}{(P-\lambda)^3}$;
b) $\frac{m_0}{m_p} = \frac{(1-\lambda)}{(P-\lambda)}$;
v) $\frac{m_0}{m_p} = \frac{(1-\lambda)^2}{(P-\lambda)^2}$.

32. Negakosmanavtikadaikkivato`rtpog`onaliraketalardanfoydalanilmasdanuchpog`onaliraketadanfoydalaniladi?
a) keltirilganlarningbarchasito`g`ri;
b) ikkipog`onaliraketafoydalimassaniorbitagachiqarishgalayoqatlidir, ammobirtonnalikfoydaliyukuchunraketamassasi 149 tonnabo`lishitalabetiladi;
v) uchpog`onadanfoydalanishraketamassasinideyarliikkimartagakamaytiradi, ammouningstrukturasiniikkipog`onaliraketaganisbatanmurakablashtiradi;
g) to`rtpog`onaliraketaesauchpog`onaliganisbatansezilarliyutuqnibermasa-da, raketaningstrukturasiniuchpog`onaliraketaganisbatananchamurakablashtiradi.

33. Iyerarxiyaprintsipidanfoydalanibmatematikmodellarqurishqandaytamoyillargaasoslanadi?
a) keltirilganlarningbarchasito`g`ri;
b) «soddadan-murakkablikkaqarab» tamoyiliga;
v) «murakkablikdansoddalikkaqarab» tamoyiliga.

34.MALTUSmodeliquyidagilardanqaysibiribilanifodalanadi?
a) $\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N$;
b) $\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta N)N$;
v) $\frac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N^2$.

35. QuyidagiifodalardanqaysibiriMALTUSmodeliningyechiminiifodalaydi?

a) $N = N_0 e^{(\alpha-\beta)t}$;

b) $N = N_0 e^{(\alpha+\beta)t}$

v) $N = N_0 \sqrt{e^{(\alpha-\beta)t}}$.

36. MALTUSmodeliasosidapopulyatsiyasoniningvaqtbo`yichao`zgarishiqandaybo`ladi?

a) keltirilganlarningbarchasito`g`ri;

b) agaro`limlarsonitug`ilishlargaqaragandako`proqbo`lsa, uholdaMALTUSmodelipopulyatsiyasoniningeksponentsialravishdakamayishigaishoraqiladi;

v) tug`ilishlarvao`limlarsonio`zarotengbo`lsa, MALTUSmodeliningko`rsatishicha, populyatsiyasonibutunvaqtoralig`idao`zgarmasdanqoladi;

g) agartug`ilishlarsonio`limlarsoniganisbatanko`pbo`lsa, uholdaMALTUSmodelipopulyatsiyasoniningeksponentsialravishdao`sishigaishoraqiladi.

37.MALTUSmodeliniqaysihollardaqo`llashmumkin?

a) hayotnita’minlovchiresurslargacheklanishlarbo`lmaganhollarda;

b) populyatsiyasonimuhitsig`imigayaqinlashganda;

v) populyatsiyasonimuhitsig`imigayaqinlashmaganda.

38. FERXYULST-Perlmodeliquyidagilardanqaysibiribilanifodalanadi?

a) $\dfrac{dN}{dt} = (\alpha - \beta N)N$;

b) $\dfrac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N$;

v) $\dfrac{dN}{dt} = (\alpha - \beta)N^2$.

39.QuyidagiifodalardanqaysibiriFERXYULST-Perltenglamasiningyechiminiifodalaydi?

a) $N = \dfrac{\alpha N_0 e^{\alpha t}}{\alpha - \beta N_0 \left(e^{\alpha t} - 1\right)}$;

b) $N = N_0 e^{(\alpha-\beta)t}$;

v) $N = N_0 e^{(\alpha+\beta)t}$.

40. FERXYULST-Perlmodeliasosidapopulyatsiyasoniningvaqtbo`yichao`zgarishiqandaybo`ladi?

a) keltirilganlarningbarchasito`g`ri;

b) populyatsiyasoniningcheksizo`sishigayo`lqo`ymaydi. O`sish□/□ kattalikbilanchegaralanganbo`ladi;
v) agaro`limlarsonitug`ilishlargaqaragandako`proqbo`lsa, uholdaMALTUSmodelipopulyatsiyasoniningeksponentsialravishdakamayishigaishoraqiladi;
g) tug`ilishlarvao`limlarsonio`zarotengbo`lsa, MALTUSmodeliningko`rsatishicha, populyatsiyasonibutunvaqtoralig`idao`zgarmasdanqoladi.

41.FERXYULST-Perlmodeliniqaysihollardaqo`llashmumkin?
a) keltirilganlarningbarchasito`g`ri;
b) populyatsiyasonimuhitsig`imigayaqinlashganda;
v) hayotnita'minlovchiresurslarcheklanganholda.

42.Populyatsiyaningchiziqsizmodeli $\frac{dN}{dt}=\alpha\cdot\left(1-\frac{N}{N_P}\right)\cdot N,\ \alpha>0$ qandayfarazlargaasoslangan?

a) atrofmuhittomonidanta'minlanadigan «muvozanatli» populyatsiyasoni N_P mavjudvapopulyatsiyasoniningo`zgarishtezligimuvozanatqiymatidanog`ishmiqdorigako`paytirilganpopulyatsiyasonigaproportsional;
b) populyatsiyasoniningo`zgarishtezligimuvozanatqiymatidanog`ishmiqdorigako`paytirilganpopulyatsiyasonigaproportsional;
v) populyatsiyasoniningo`zgarishtezligimuvozanatqiymatidanog`ishmiqdorigako`paytirilganpopulyatsiyasonigaproportsional.

43.Populyatsiyaningchiziqsizmodeli $\frac{dN}{dt}=\alpha\cdot\left(1-\frac{N}{N_P}\right)\cdot N,\ \alpha>0$ ningyechimiqandaytenglikbilanifodalanadi?

a) $N(t)=\frac{N_P N(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}}{N_P-N(0)\left(1-e^{\alpha\cdot t}\right)}$;

b) $N(t)=\frac{N(0)\cdot e^{\alpha\cdot t}}{1-N(0)\left(1-e^{\alpha\cdot t}\right)}$;

v) $N(t)=\frac{N_P N(0)}{N_P-N(0)\left(1-e^{\alpha\cdot t}\right)}$.

44. Populyatsiyaningchiziqsizmodeli $\frac{dN}{dt}=\alpha\cdot\left(1-\frac{N}{N_P}\right)\cdot N,\ \alpha>0$ gaasosanpopulyatsiyasonivaqto`tishibilanqandayo`zgaradi?
a) keltirilganlarningbarchasito`g`ri;

b) boshlang`ichpopulyatsiyasoni $N(0)$ ningixtiyoriyqiymatidapopulyatsiyasonimuvozanatqiymati N_P gaintiladi;
v) MALTUSmodelidanfarqlio`laroqushbuholdamuvozanatturg`unbo`ladi; g) MALTUSmodeliganisbatanushbuModelpopulyatsiyadinamikasinirealroqifodalaydi.

45. $$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = (\alpha - cM)\cdot N \\ \dfrac{dM}{dt} = (-\beta + dN)\cdot M \end{cases}$$
differentsialtenglamalarsistemasiqandayjarayonniifodalaydi?
a) yirtqich-o`ljasistemasiningo`zaromunosabatimodelini;
b) ikkidavlato`rtasidagiqurollanishpoygasimodelini;
v) ikkiarmiyao`rtasidagijangovarharakatmodelini.

46. Lotka-Voltertenglamalarsistemasiningyechimiasosidaqandayxulosagakelishmumkin?
a) keltirilganlarningbarchasito`g`ri;
b) agar $N(0)=N_0,\ M(0)=M_0$ ($N_0,\ M_0$ - populyatsiyaningmuvozanatinita'minlovchiqiymatlar) bo`lsa, hammavaqtmobaynidapopulyatsiyalarsonio`zgarmasdanqoladi;
v) yirtqichvaxuddishuningdek, o`ljaningpopulyatsiyasonlarimuvozanatholatidanozginao`zgarishi, bupopulyatsiyasonlariningvaqto`tishibilanmuvozanatholatigaqaytmasligigaolibkeladi;
g) agarboshlang`ichmuvozanatholatidanog`ishkattabo`lsa, sistemavaqto`tishibilanmuvozanatholatigaqaytmaydi.

47. Yirtqich-o`ljasistemasiningo`zaromunosabatimodeliasosidaqandayxulosagakelishmumkin?
a) keltirilganlarningbarchasito`g`ri;

b) yirtqichvao`ljalarpopulyatsiyasonlarimuvozanatholatiatrofidadavriytebranibturadi;
v) tebranishamplitudasivauningdavripopulyatsiyalarningboshlang`ichsonlari $N(0),\ M(0)$ orqalianiqlanib, $N(t)$ ningmaksimalqiymatiga $M(t)$ ningminimalqiymatimoskeladivaaksincha.

48. Ikkidavlato`rtasidagiqurollanishpoygasimodeliquyidagifarazlarningqaysibirigaasoslangan?
a) harbirdavlatdagiqurollarmiqdoriningo`sishivakamayishiraqibdavlatdagiqurollarmiqdoriga,

o`zidagimavjudqurollarningeskirishidarajasigavaraqiblaro`rtasidagio`zaroishonchsizlikdarajasigaproportsionalbo`ladidebfarazqilinadi;
b)
harbirdavlatdagiqurollarmiqdoriningo`sishivakamayishiraqibdavlatdagiqurollarmiqdorigavaraqiblaro`rtasidagio`zaroishonchsizlikdarajasigaproportsionalbo`ladidebfarazqilinadi;
v)
harbirdavlatdagiqurollarmiqdoriningo`sishivakamayishiraqibdavlatdagiqurollarmiqdoriga,
o`zidagimavjudqurollarningeskirishidarajasigaproportsionalbo`ladidebfarazqilinadi.

49. $$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} = \alpha_1(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dM_2}{dt} = \alpha_2(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_2(t) \end{cases}$$

differentsialtenglamalarsistemasiqandayjarayonniifodalaydi?
a) ikkidavlato`rtasidagiqurollanishpoygasimodelini;
b) yirtqich-o`ljasistemasiningo`zaromunosabatimodelini;
v) ikkiarmiyao`rtasidagijangovarharakatmodelini.

50. Ikkiarmiyao`rtasidagijangovarharakatmodeliquyidagifarazlarningqaysibirigaasoslangan?
a)
harbirarmiyadagiqo`shinlarsoniningkamayishtezligibevositajangovarharakatlargabog`liqbo`lmagansababla rbilan,
raqibarmiyaningjangovarharakativayordamchikuchlarningqo`shilishtezligibilanbog`liq;
b)
harbirarmiyadagiqo`shinlarsoniningkamayishtezligiraqibarmiyaningjangovarharakativayordamchikuchlarningqo`shilishtezligibilanbog`liq;
v)
harbirarmiyadagiqo`shinlarsoniningkamayishtezligibevositajangovarharakatlargabog`liqbo`lmagansabablarbilan, raqibarmiyaningjangovarharakatibilanbog`liq.

51. $$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} = -\alpha_1(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dM_2}{dt} = -\alpha_2(t)M_2 - \beta_1(t)M_1 + \gamma_2(t) \end{cases}$$

differentsialtenglamalarsistemasiqandayjarayonniifodalaydi?
a) ikkiarmiyao`rtasidagijangovarharakatmodelini;
b) ikkidavlato`rtasidagiqurollanishpoygasimodelini;
v) yirtqich-o`ljasistemasiningo`zaromunosabatimodelini.

52. $$\begin{cases} \dfrac{dM_1}{dt} = -\alpha_1(t)M_1 - \beta_2(t)M_2 + \gamma_1(t) \\ \dfrac{dM_2}{dt} = -\alpha_2(t)M_2 - \beta_1(t)M_1M_2 + \gamma_2(t) \end{cases}$$

differentsialtenglamalarsistemasiqandayjarayonniifodalaydi?
a) muntazamarmiyavapartizanqismlario`rtasidagijangovarharakatmodelini;
b) ikkidavlato`rtasidagiqurollanishpoygasimodelini;
v) yirtqich-o`ljasistemasiningo`zaromunosabatimodelini.

53. $\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \dfrac{d}{dt}\left(\rho x^3\right)$ifodaqandayjarayonniifodalaydi?
a) moddavaenergiyamuvozanatini;
b) massanisaqlanishqonunini;
v) populyatsiyalarningo`zgarishqonunini.

54. $x(t) = \sqrt{\dfrac{a}{b}}\dfrac{1-e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1+e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}$ ifodaqandayjarayonniifodalaydi?
a) daraxtbalandliginivaqto`tishibilano`zgarishini (o`sishini);
b) daraxterkinenergiyasini;
v) ozuqaviyeritmanidaraxtningbarchaqismlarigayetkazibberishuchunsarfbo`ladiganenergiyani.

55. Moddavaenergiyamuvozanatiniifodalaydiganmatematikmodelnihosilqilishdaquyidakeltirilganqaysifarazlardanfoydalaniladi?
a) yetuklikyoshidagidaraxto`sishjarayonidageometriko`xshashliknisaqlabqoladi; daraxterkinenergiyani (daraxtuchunzarurbo`lganmoddani) faqatginafotosintezjarayonisabablioladivabuenergiyafotosintezga, tiriktananishakllantirish (o`sish) vaeritmanituproqdanko`tarishuchunsarfbo`ladi;
b) daraxterkinenergiyani (daraxtuchunzarurbo`lganmoddani) faqatginafotosintezjarayonisabablioladivabuenergiyafotosintezga, tiriktananishakllantirish (o`sish) vaeritmanituproqdanko`tarishuchunsarfbo`ladi;
v) daraxterkinenergiyani (daraxtuchunzarurbo`lganmoddani) faqatginafotosintezjarayonisabablioladivabuenergiyatiriktananishakllantirish (o`sish) vaeritmanituproqdanko`tarishuchunsarfbo`ladi.

56. Moddavaenergiyamuvozanatiniifodalaydiganmatematikmodeldanqandayxulosalarolishmumkin?
a) avvaldaraxtvaqto`tishidavomidato`xtovsizo`sib, ma’lumbirvaqtdankeyindaraxtningo`sishisekinlashadivanihoyatumumano`sishdanto`xtabqoladi;
b) daraxtvaqto`tishidavomidato`xtovsizo`sibboradi;

v) daraxtvaqto`tishidavomidato`xtovsizo`sibboradi, ma'lumbirvaqtdankeyindaraxtningo`sishisekinlashadivadaraxtyanao`sishdadavometadi.

57. $x(t)+y(t)=N+1$ ifodaqandayjarayonniifodalaydi?
a) aholisisoni N gatengbo`lganhududdaepidemiyagachalingan 1 takasalkelibqo`shilishinatijasidahududdaepidemiyatarqalishijarayoniniifodalaydi;
b) daraxtbalandliginivaqto`tishibilano`zgarishini (o`sishini);
v) daraxterkinenergiyasini.

58. $\frac{dx}{dt}=\alpha x(N+1-x)$ ifodaqandayjarayonniifodalaydi?
a) aholisisoni N gatengbo`lganhududdaepidemiyagachalingan 1 takasalkelibqo`shilishinatijasidahududdakasallarsoniningvaqtbo`yichao`zgarishiniifodalayli;
b) daraxtbalandliginivaqto`tishibilano`zgarishini (o`sishini);
v) daraxterkinenergiyasini.

59. Aholisisoni N gatengbo`lganhududdaepidemiyagachalingan 1 takasalkelibqo`shilishinatijasidahududdakasallarsoniningvaqtbo`yichao`zgarishiniqandaymunosabatbilananiqlanadi?
a) $x(t)=\dfrac{N+1}{Ne^{-\alpha(N+1)t}+1}$;
b) $x(t)=\dfrac{N+1}{Ne^{\alpha(N+1)t}+1}$
v) $x(t)=\dfrac{1}{Ne^{\alpha(N+1)t}+1}$.

60. $\frac{dN}{dt}=[\alpha_1(t)+\alpha_2(t)N(t)](N_0-N)$ ifodaqandayjarayonniifodalaydi?
a) reklamakompaniyasinitashkillashtirishmodelini;
b) chiziqsizpopulyatsiyamodelini;
v) FERXYULST-Perlmodelini.

61. Bittatovardantushadiganfoyda p, xaridorlarsoni N va $\alpha_1(t)$ reklamauchunvaqtbirligiichidaqilinadiganharakatlarsonibo`lsa, uholdatovarnisotishdantushadiganfoydanimagateng?
a) $P=pN(t)=pN_0\int_0^t \alpha_1(t)dt$;
b) $P=p/N(t)=p\Big/N_0\int_0^t \alpha_1(t)dt$;
v) $P=p/N(t)=N_0\int_0^t \alpha_1(t)dt\Big/p$.

62. Xaridorlarsoni N, $\alpha_1(t)$ reklamauchunvaqtbirligiichidaqilinadiganharakatlarsoni, elementarreklamaharakatiningnarxi s bo`lsa, uholdasarfqilinganxarajatlarnimagateng?

a) $S = s\int_0^t \alpha_1(t)dt$;

b) $S = \int_0^t \alpha_1(t)dt \Big/ s$;

v) $S = s \Big/ \int_0^t \alpha_1(t)dt$.

Mustaqilta’limuchunmavzular

Amaliy masalalarni matematikmodellashtirishfanidan mustaqilta'limuchunmavzular

1. Modellashtirishdatabiatningsaqlanishqonunlaridanfoydalanishga doir misollar.
2. Yumshoqvaqattiq matematik modellar. Ularga doir misollar.
3. Iqtisodiy masalalarni yechishda chiziqli programmalashtirishdan foydalanish.
4. Chiziqliprogrammalashtirishning ekstremalmasalalari.
5. Chiziqsiz matematik modellar.
6. Atrof-muxitnimuhofaza qilishmodellari.
7. Ekologiyamodellari.
8. Imitatsionmodellashtirish.
9. Tovarlarni mijozlarga yetkazib berishda marshrutlarni optimallashtirish.
10. Filьtratsiyaning chiziqsiz modellari.

SLAYDLAR

Mathematical Modeling

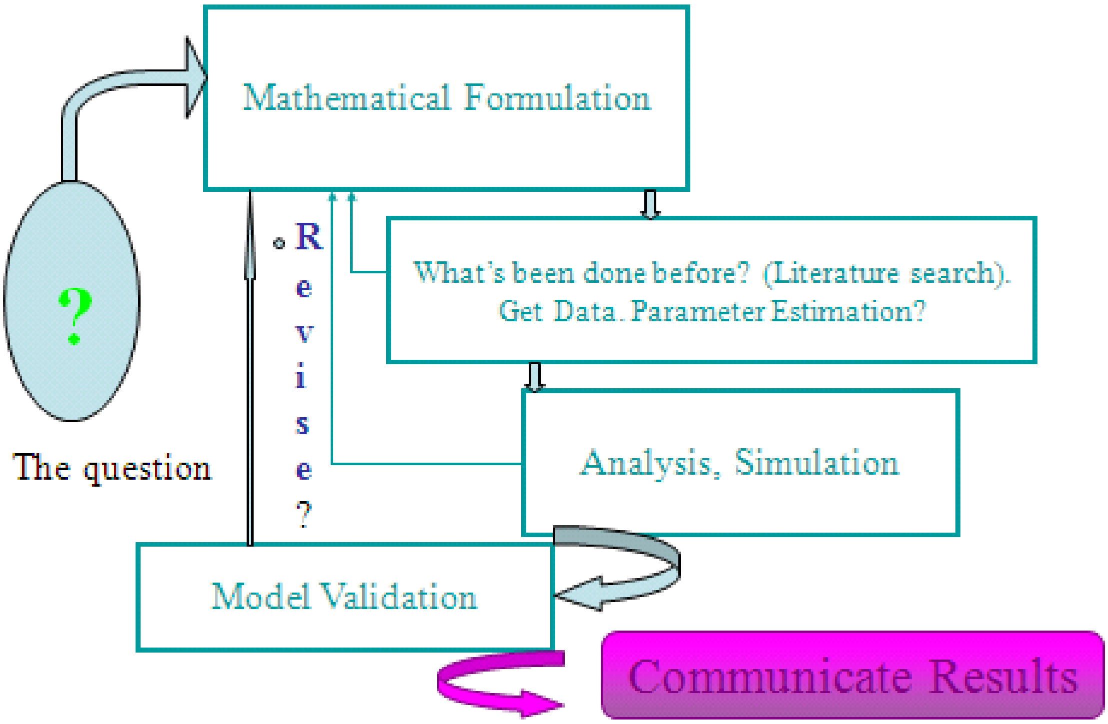
What is it?

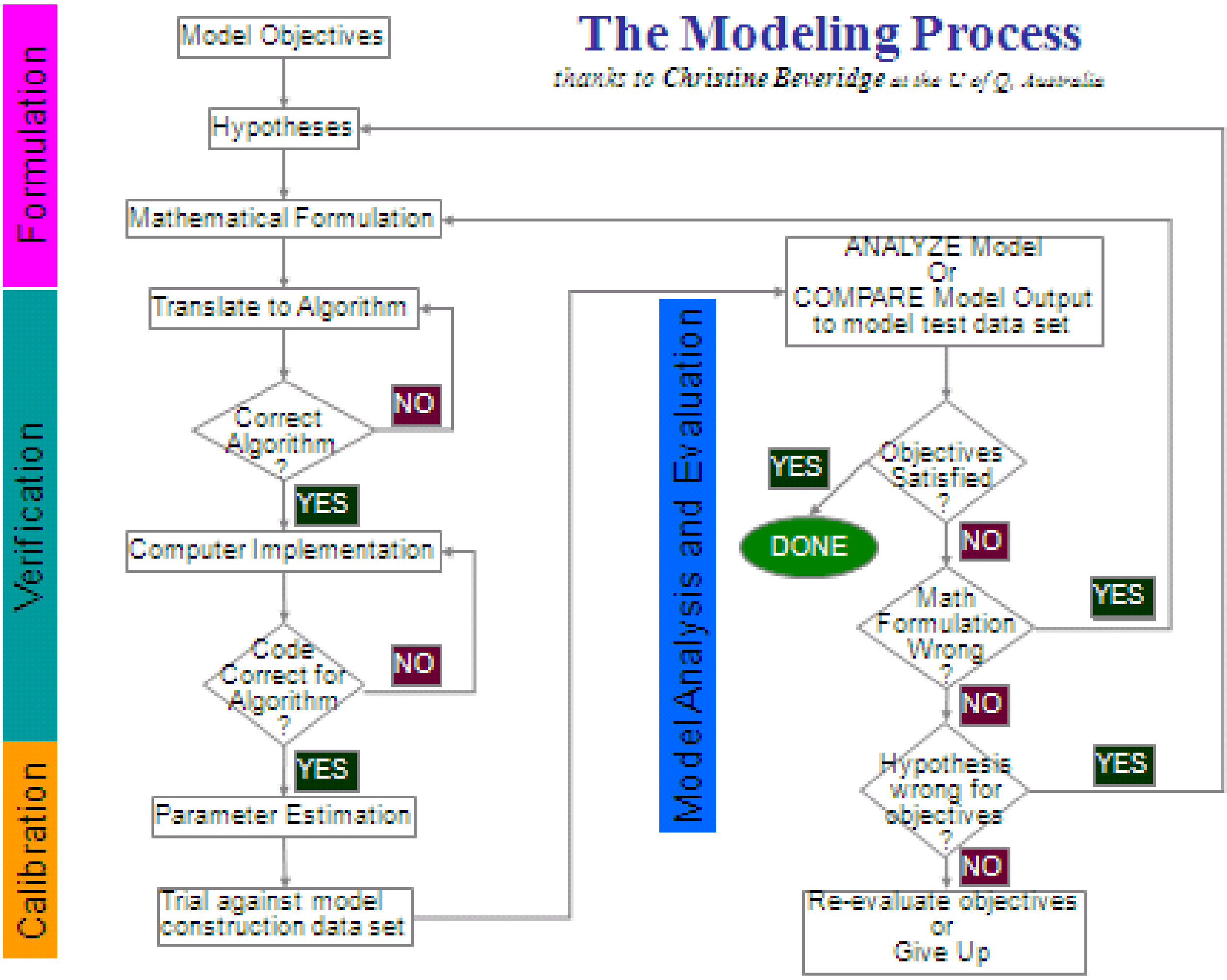
(and how do you spell it?)

A Few Words from others …

- Applied mathematics is concerned with a better understanding of phenomena by the use of mathematical methods. The process of *formulating* the mathematical model is often called *mathematical modeling. (F.Wan)*
- *Mathematical Modeling* is the applied mathematician at work. *(M.S.Klamkin)*
- *Applied Mathematics* consists of applying mathematics to real-world problems. *(J.L.Synge)*

Main point: mathematical modeling is a ***PROCESS***





These steps consist of:

1. Recognizing the problem (Nature may require you to "dig" for them)
   – *Interpreting* the problem, or refining it.
2. Selecting a mathematical framework (stochastic, deterministic, continuous, discrete). Be aware of what's been done before, and what's still undone.
3. Finding the appropriate mathematical *tools* (computation is generally required).
4. The solution may be *approximate*.
5. Feedback is required: is the approximation ok? Is the question being answered the one that was asked?
6. Communication will be oral AND written, summarized AND detailed.

Validation and Revision is CRUCIAL!

- Example: A bank has three tellers. Which is better, first available, or form three lines and go to the shortest one?

What's the question?

What type of model should you use?

What tools might be necessary?

How could we validate the model?

Data can be important …

- Learn about available databases.
- Look at previous research.
- What does "parameter estimation" mean?
- Data is also important in model validation.

How about Simulation?

- Computers can be helpful, but deep knowledge isn't always necessary (you may need to collaborate!)
- Do you always need data before a simulation can be done?
- How is the simulation used?
- Does the importance or type of simulation depend on the type of model? (discrete, continuous, stochastic, deterministic)

Гл. 1. Основные понятия и принципы математического моделирования.

1. Математика и математическое моделирование.

Основные этапы метода математического моделирования.

1. Создание качественной модели.

Выясняется характер законов и связей, действующих в системе. В зависимости от природы модели эти законы могут быть физическими, химическими, биологическими, экономическими.

Задача моделирования-выявить главные, характерные черты явления или процесса, его определяющие особенности.

Применительно к исследованию физических явлений создание качественной модели – это формулировка физических закономерностей явления или процесса на основании эксперимента.

2. Создание математической модели (постановка математической задачи).

Если модель описывается некоторыми уравнениями, то она называется детерминированной. Рассмотренные в курсе математической физики начально-краевые задачи являются примерами детерминированных дифференциальных моделей.

Если модель описывается вероятностными законами, то она называется стохастической.

1) Выделение существенных факторов.

Основной принцип: если в системе действует несколько факторов одного порядка, то все они должны быть учтены, или отброшены.

2) Выделение дополнительных условий (начальных, граничных, условий сопряжения и т.п.).

3. Изучение математической модели.

1) Математическое обоснование модели. Исследование внутренней непротиворечивости модели. Обоснование корректности дифференциальной модели. Доказательство теорем существован6ия, единственности и устойчивости решения.

2) Качественное исследование модели. Выяснение поведения модели в крайних и предельных ситуациях.

3) Численное исследование модели. а) Разработка алгоритма. б) Разработка численных методов исследования модели. Разрабатываемые методы должны быть достаточно общими, алгоритмичными и допускающими возможность распараллеливания. в) Создание и реализация программы. Компьютерный эксперимент.

Лабораторный эксперимент	Компьютерный эксперимент
Образец	Математическая модель
Физический прибор	Программа
Калибровка	Тестирование программы
Измерения	Расчеты
Анализ данных	Анализ данных

По сравнению с лабораторным (натурным) экспериментом компьютерный эксперимент дешевле, безопасней, может проводиться в тех случаях, когда натурный эксперимент принципиально невозможен.

4. Получение результатов и их интерпретация.

Сопоставление полученных данных с результатами качественного анализа, натурного эксперимента и данными, полученными с помощью других численных алгоритмов. Уточнение и модификация модели и методов её исследования.

5. использование полученных результатов.

Предсказание новых явлений и закономерностей.

2. Прямые и обратные задачи математического моделирования.

1. Прямая задача: все параметры исследуемой задачи известны и изучается поведение модели в различных условиях.

2. Обратные задачи:

а) Задача распознавания: определение параметров модели путем сопоставления наблюдаемых данных и результатов моделирования. По результатам наблюдений пытаются выяснить, какие процессы управляют поведением объекта и находят определяющие параметры модели. В обратной задаче распознавания требуется определить значение параметров модели по известному поведению системы как целого.

Примеры задач распознавания: -Задача электроразведки: определение подземных структур при помощи измерения на поверхности. -Задача магнитной дефектоскопии: определение дефекта в детали, помещённой между полюсами магнита, по возмущению магнитного поля на поверхности детали.

б) Задача синтеза (задача математического проектирования): построение математических моделей систем и устройств, которые должны обладать заданными техническими характеристиками. В отличие от задач распознавания в задачах синтеза отсутствует требование единственности решения («веер решений»). Отсутствие единственности решения позволяет выбрать технологически наиболее приемлемый результат.

Примеры задач синтеза: -Синтез диаграммы направленности антенны: определение распределения токов, создающих заданную диаграмму направленности антенны.-Синтез градиентных световодов: определение профиля функции диэлектрической проницаемости, при котором световод обладает заданными характеристиками.

3. Задача проектирования управляющих систем: особая область математического моделирования, связанная с автоматизированными информационными системами и автоматизированными системами управления.

3. Универсальность математических моделей. Принцип аналогий.

Универсальность математических моделей есть отражение принципа материального единства мира. Математическая модель должна описывать не только конкретные отдельные явления или объекты, но достаточно широкий круг разнородных явлений и объектов. Одним из плодотворных подходов к моделированию сложных объектов является использование аналогий с уже изученными явлениями. Пример: процессы колебаний в объектах различной природы.

1. Колебательный электрический контур, состоящий из конденсатора и катушки индуктивности. Сопротивление проводов считаем равным нулю, q(t) – заряд на обкладках конденсатора, u(t) –напряжение на обкладках конденсатора, C – ёмкость конденсатора, L – индуктивность катушки, E – э.д.с. самоиндукции, i – ток.

$$Cu(t) = q(t),\ E = -L\frac{di}{dt},\ i = -\frac{dq}{dt},\ u(t) = -E(t) \to$$

$$L\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{q}{C} \to \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0$$

2. Малые колебания при взаимодействии двух биологических популяций.

N(t)-численность растительноядной популяции 1; *M(t)*- численность плотоядной популяции 2.

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = (a_1 - b_1 M)N,\ a_1 > 0,\ b_1 > 0, \\ \dfrac{dM}{dt} = (-a_2 + b_2 N)M,\ a_2 > 0,\ b_2 > 0. \end{cases}$$

Система находится в равновесии, если $\frac{dN}{dt} = \frac{dM}{dt} = 0.$ Линеаризованная система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dn}{dt} = -b_1 N_0 m \\ \dfrac{dm}{dt} = b_2 M_0 n \end{cases} \to \frac{d^2n}{dt^2} + a_1 a_2 n = 0,\ n = N - N_0,\ m = M - M_0,$$

где $M_0 = \frac{a_1}{b_1},\ N_0 = \frac{a_2}{b_2}.$

снова приводит к уравнению колебаний.

3. Простейшая модель изменения зарплаты и занятости: $p(t)$ –зарплата, $N(t)$-число занятых работников. Равновесие рынка труда: за плату p_0>0 согласны работать N_0>0 человек.

Предполагается, что

а) работодатель изменяет зарплату пропорционально отклонению численности занятых работников от равновесного;

б) численность работников изменяется пропорционально изменению зарплаты относительно p_0.

Система уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = -a_1(N - N_0),\ a_1 > 0, \\ \dfrac{dN}{dt} = a_2(p - p_0),\ a_2 > 0. \end{cases}$$

Отсюда получаем уравнение $$\frac{d^2(p-p_0)}{dt^2} + a_1 a_2 (p - p_0) = 0.$$

4. Иерархия моделей.

Принцип «от простого к сложному»: построение цепочки (иерархии) все более полных моделей, каждая их которых обобщает предыдущую, включая её в качестве составного случая.

Модель многоступенчатой ракеты. Пренебрегаем сопротивлением воздуха, гравитацией.

а) **Одноступенчатая ракета.** u=3-5 км/с – скорость истечения продуктов сгорания топлива (относительно Земли), $V(t)$ – скорость ракеты (относительно Земли); $m(t)$ – масса ракеты. Закон сохранения импульса:

$$m(t)V(t) = m(t+dt)V(t+dt) - dm(V(t+\theta dt) - u),\ 0<\theta<1.$$

Линеаризация:

$$m(t+dt) = m(t) + \frac{dm}{dt}dt + O(dt^2) \ \rightarrow\ m\frac{dV}{dt} = -\frac{dm}{dt}u \ \rightarrow\ \frac{dV}{dt} = -u\frac{d(\ln m)}{dt} \ \rightarrow$$

$$V(t) = V_0 + u\ln\left(\tfrac{m_0}{m(t)}\right),\quad V_0 = V(0),\ m_0 = m(0).$$

Максимальная скорость при полном сгорании топлива и нулевой начальной скорости $V_0=0$ (формула Циолковского):

$$V = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p+m_s}\right).$$

Здесь m_p - полезная масса (масса спутника), m_s – структурная масса (топливных баков, двигателей, систем управления ракетой т.д.). Введем

параметр $\lambda = \frac{m_s}{m_0-m_p}$. **Обычное значение** λ **= 0.1. При этом**

получается, что при u=3 км/с и и $m_p=0$ $V=7$ км/с. Одноступенчатая ракета не сможет поднять полезный груз!

б) <u>Многоступенчатая ракета:</u> основная идея – избавление от балласта.

m_i - общая масса i-ой ступени; λ m_i – структурная масса i- ой ступени; (1-λ)m_i – масса топлива i - ой ступени. Считаем, что λ и u одинаковы для всех ступеней. Пусть n=3; $m_0=m_p+m_1+m_2+m_3$. По формуле Циолковского скорость равна:

$$V_1 = u\ln\left(\frac{m_0}{m_p+\lambda m_1+m_2+m_3}\right).$$

После отброса структурной массы λ m_1 включается вторая ступень. Масса ракеты в этот момент m_p $+m_2$ $+m_3$. После выгорания топлива второй ступени скорость равна

$$V_2 = V_1 + u\ln\left(\frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+\lambda m_2+m_3}\right),$$

а после отброса структурной массы λ m_2 и включения двигателя третьей ступени равна

$$V_3 = V_2 + u\ln\left(\frac{m_p+m_3}{m_p+\lambda m_3}\right).$$

При n=3 получим

$$\frac{V_3}{u} = \ln\left\{\left(\frac{a_1}{1+\lambda(a_1-1)}\right)\left(\frac{a_2}{1+\lambda(a_2-1)}\right)\left(\frac{a_3}{1+\lambda(a_3-1)}\right)\right\} = f(a_1,a_2,a_3),$$

где

$$a_1 = \frac{m_0}{m_p+m_2+m_3},\ a_2 = \frac{m_p+m_2+m_3}{m_p+m_3},\ a_3 = \frac{m_p+m_3}{m_p}.$$

Максимум функцией $f(a_1,a_2,a_3)$ достигается при $a_1=a_2=a_3=a$. Для n=3 получим:

$$a=\frac{1-\lambda}{p-\lambda},\ p=\exp\left(-\frac{V_3}{3u}\right),\ a_1a_2a_3=a^3=\frac{m_0}{m_p}=\left(\frac{1-\lambda}{p-\lambda}\right)^3.$$

В общем случае для n ступеней имеем:

$$\frac{m_o}{m_p}=\left(\frac{1-\lambda}{p-\lambda}\right)^n,\ p=\exp\left(-\frac{V_n}{nu}\right).$$

При V_n=10,5 км/с, λ=0,1 получаем:

$n=2$	$m_0=149m_p$
$n=3$	$m_0=77m_p$
$n=4$	$m_0=65m_p$

Вывод: наиболее выгодна трехступенчатая ракета.

Ta'limtexnologiyasi

Amaliy masalalarni matematik modellashtirish fanini o`qitishdazamonaviyaxborotvapedagogiktexnologiyalar

Amaliymasalalarnimatematikmodellashtirishfanini o`qitishma’ruza, amaliy mashg`ulotlarhamdamustaqiltopshiriqlardaniboratbo`lib, ularbirgalikdafanningbutunliliginita’minlaydi. Ma’ruzalarorqaliolinganbilimnimustahkamlashuchunamaliy mashg`ulotlarmuhim ahamiyatga ega. Mustaqilmashg`ulotlarbufandoirasidamustaqilbilimolish, o`zlashtirishhisoblanadi.

Ushbufannio`qitishdavomida*aqliyxujum* - g`oyalarnigeneratsiya (ishlabchiqish) metodidankengfoydalaniladi. «Aqliyhujum» metodibirormuammoniyechishdatalabalartomonidanbildirilganerkinfikrvamulohazalarnito`plab, ularorqalima’lumbiryechimgakelinadiganengsamaralimetoddir. Aqliyxujummetodiningyozmavaog`zakishakllarimavjudbo`lib, bufandaog`zakishaklidanfoydalaniladi. Fannio`zlashtirishdatalabalarzamonaviyaxborottexnologiyalariyutuqlaridan, shuningdekoxirgiyillardayaratilganturlimatematikdasturiyta’minotlardanfoydalanadilar.

Glossariy

Glossariy

(Izohlilug`at)

Model - lotincha*modulus* so`zidanolinganbo`lib,o`lchov, namuna ma'nolarinianglatadi.

Model – burealob'yektnialmashtirishimumkinbo`lgan, tadqiqotvatajribao`tkazishuchunqulayvaarzonbo`lganboshqabir real yoki abstraktob'yektdir. Model real ob'yektning soddalashtirilgan ko`rinishi bo`lib, uning hamma xossalarini emas, balki asosiy xossalarinigina o`zida mujassam etadi.

MatematikModel – realob'yektnitasavurimizdagiabstraktko`rinishibo`lib, umatematikbelgilarvaba'zibirqonun–qoidalarbilanifodalanganbo`ladi. Masalan, Nьyuton qonunlari, massaning saqlanish qonuni.

MatematikModel - o`rganilayotganjarayonlarnialgebraik, differentsialyokiintegraltenglamalarko`rinishidagitaqribiyifodasi;

Faktorlar - modellashtirishdatashqimuhitningtekshirilayotganob'yektparametrlarigata'sirqiluvchiko`rsatkichlari.

Matematikmodellashtirish - realob'yektyokijarayonlarnimatematikusullarvositasidanazariytadqiqqilishusuli.

Modellashtirishningmohiyati - ob'yektniboshqasoddaroqob'yekt (Model) bilanalmashtirib, modelnixususiyatinitadqiqqilishorqalioriginalob'yektnio`rganishdaniborat.

Realob'yektvauningmatematikmodeliningmuvofiqligi - ob'yekt va uning matematik modeli dinamikalarining sifatvamiqdor jihatdan o`xshashligi.

Avjoluvchirejimlar - vaqtningchekliqiymatidaqandaydirmiqdorcheksizlikkaaylanuvchijarayonlar.

Foydalanilganadabiyotlar

1. A. A. Samarskiy, A. P. Mixaylov. Matematicheskoye modelirovaniye. M., Nauka,1997.
2. S.P.Kapitsa, S.P.Kurdyumov, G.G.Malinetskiy. Sinergetika i prognozы buduщyego. –M., URSS, 2003.
3. MuzafarovX.A., BaklushinM.B., AbduraimovM.G. Matematicheskoyemodelirovaniye. –T., Universitet. 2002.
4. Yu.Yu.Tarasevich. Matematicheskoye i kompьyuternoye modelirovaniye. –M., URSS, 2003.
5. Vvedeniye v matematicheskoye modelirovaniye. Pod red. V. P. Trusova. -M., Logos, 2005.
6. M.I.Israilov. Hisoblash metodlari, I. Toshkent, O`zbekiston, 2003; Hisoblash metodlari, II. Toshkent, 2008.
7. D.Kirьyanov MathCAD. S.Peterburg, «BXV». 2005.
8. Arnolьd V.I. Jyostkiye i myagkiye matematicheskiye modeli. -M., - MTSNMO. 2000.
9. Osipov G.V., Andreyev E.P. Metodы izmereniya v sotsiologii. M., 1977, Nauka.
10. Gorstko A.B. Poznakomьtesь s matematicheskim modelirovaniyem. M., Znaniye, 1991.
11. M.I.G`ulomov. Matematik modellashtirish elementlari. “Buxoro”, 2001. -62 bet.
12. Bogolyubov A.N. Osnovы matematicheskogo modelirovaniya. –M., MGU.
13. *httr://lib/ru.*
14.*httr://ziuo.net.*
15.*www.mathphys.ru.*