7.1.MA`RUZA

Jamiyat rivojlanishining demografik modeli

I.N.Tojimamatov

Reja

- **Demografiya tushunchasi.**
- **Jamiyat rivojlanishining demografik modeli**

Demografiya tuchunchasi

- **Demografiya** (qadimgi yunoncha δῆμος — odamlar, yunoncha γράφω — yozaman) - aholining ko‘payish qonuniyatlari, uning tabiatining ijtimoiy-iqtisodiy va tabiiy sharoitlarga bog‘liqligi, aholining soni, hududiy taqsimlanishi va tarkibi, ularning o‘zgarishi, bu o‘zgarishlarning sabab va oqibatlarini o‘rganuvchi hamda tavsiyalar beruvchi, migratsiya jarayonlari haqidagi fan sohasidir.

Demografik muammolar

- Aholi jon boshiga ekiladigan qishloq xo‘jaligi erlari va dengiz mahsulotlari kamayishi (oziq-ovqat muammosi)
- Atrof-muhitning haddan tashqari ifloslanishi
- Rivojlanmagan mamlakatlarda hayotni ta'minlash tizimining yomonlashishi (energiya iste'moli stavkalari pasaymoqda, iste'mol tovarlari ishlab chiqarish va boshqalar).
- Rivojlangan mamlakatlarda xalqlarning qarishi kuzatilmoqda
- Turli muammolarni hal qilishda nizolarning kuchayishi

Dunyo aholisining o'sib borishi

Qadim zamonlardan to 20-asr boshlarigacha aholi soni o‘zgarib turdi. Yaqin hisoblashlar quydagichadir:

- 1830 yil - 1 mlrd
- 1930 yil - 2 mlrd
- 1960 yil - 3 mlrd
- 1975 yil - 4 mlrd
- 1987 yil - 5 mlrd
- 2000 yil - 6 mlrd
- 2011 yil - 7 mlrd
- 2021 yil – 7,9 mlrd

Bashorat: 21-asr oxiriga kelib 11 milliard odam bo`lish kutilmoqda

Demografik nazariya

- XVIII asr, ingliz ruhoniysi Maltus: Kapitalizm sharoitida ishchilarning farovonligi "aholining tabiiy o`sish qonuni" bilan belgilanadi (dunyo aholisi geometrig progressiya bo`yicha o'sib boradi, ishlab chiqarishning o'sishi esa arifmetika progressiya bo`yicha o'sib boradi)

Maltus modeli

$$P(t) = P_0 e^{rt}$$

Lotika tenglamasi

$$B(t) = \int_0^t B(t-a)\ell(a)b(a)\,da$$

- B – bir vaqtda tug`ilishlar soni
- t – a yoshgacha yashash funktsiyasi
- b – tug`ilish yoshi

Doimiy aholi uchun Lotika tenglamasi

$$B(t) = Qe^{rt}.$$

$$Qe^{rt} = \int_0^t Qe^{r(t-a)} \ell(a) b(a)\, da$$

$$1 = \int_0^t e^{-ra} \ell(a) b(a)\, da$$

Diskret holatlar Lotika tenglamasi

- Qayerda, $\lambda = \mathrm{e}^{\mathrm{r}}$

$$1 = \sum_{a=\alpha}^{\beta} e^{-ra}\ell(a)b(a)$$

$$1 = \sum_{a=1}^{\omega} \lambda^{-a}\ell(a)b(a)$$

Lotika tenglamasini yechish metodlari

$$1 = \sum_{a=1}^{\omega} \lambda^{-a} \ell(a) b(a)$$

$$[\omega] \quad + \quad [\beta - \alpha] \quad + \quad 2$$

Maltus va Fyurxst-Perl modellari.

REJA

- **Maltus modeli**
- **Fyurxst- Perl modellari**

O'zaro ta'sir qiluvchi populyatsiyalar dinamikasini matematik tavsiflash muammolari uzoq tarixga ega. **Tomas Maltusning** ishida birinchi marotaba barcha o'sish modellari asosida aholi zichligining o'sish sur'ati aholi zichligiga mutanosib bo'lgan degan asosiy taxminlardan birini shakllantirdi. Tavsiya etilgan modelga muvofiq, har qanday tur, hech qanday cheklovlarsiz, o'z sonini eksponentsial qonuniyat bilan oshiradi, ya'ni

$$\frac{dx}{dt} = mx$$

Bunda x – tur zichligi, m – populyatsiya o’sish ko’rsatkichi.

Maltus

Томас Роберт Мальтус, 1766 – 1834, английский священник и учёный, демограф и экономист. Автор теории, согласно которой неконтролируемый рост народонаселения должен привести к голоду на Земле. 1798 – Essay on the Principle of Population («Опыт о законе народонаселения»).

Fyurxst- Perl model

- Maltus modeli aholining o'sishiga to'sqinlik qiladigan omillarni, masalan, cheklangan resurslarni yoki yashash joyining hajmini hisobga olmaydi. **Pyer Fransua Ferhulst** aholi sonining o'sishining pasayishini hisobga olgan holda logistik o'sish tenglamasini taklif qildi:

$$\frac{dx}{dt} = mx(1 - xK)$$

Fyurxst- Perl

	**Пьер Франсуа Ферхюльст**, 1804 – 1849, бельгийский математик. Предложил модель ограниченной одиночной популяции.

Eng sodda evolyutsion model bu populyatsiya dinamikasi modeli (Maltus modeli).

Matematik model

Matematik model birinchi darajali chiziqli differentsial tenglama uchun Koshi masalasidir.

$$\frac{dN(t)}{dt} = (\alpha(t) - \beta(t))N(t), \quad N(0) = N_0,$$

bu erda N (t) - aholi soni, α (t) - ko'payish koeffitsiyenti, β (t) - o'lim koeffitsiyenti. Ushbu tenglama o'zgaruvchilarni ajratish usuli bilan yechiladi.

Разделяем переменные $\frac{dN(t)}{N(t)} = \left(\alpha(t) - \beta(t)\right)dt$. Интегрируя правую и левую части уравнения, получаем общий интеграл

$$\int \frac{dN(t)}{N(t)} = \ln\left|N(t)\right| = \int \left(\alpha(t) - \beta(t)\right)dt + \ln|C|,\ C \neq 0.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$N(t) = Ce^{\int \left(\alpha(t) - \beta(t)\right)dt}.$$

Из начального условия следует

$$N_0 = Ce^{\int(\alpha(t)-\beta(t))dt\big|_{t=0}} \text{ и } C = N_0 e^{-\int(\alpha(t)-\beta(t))dt\big|_{t=0}}.$$

Если коэффициенты $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ являются константами, то решение имеет вид

$$N(t) = N_0 e^{(\alpha-\beta)t}.$$

- Olingan yechim tahlili quyidagilarni ko’rsatadi:
- agar $a > \beta$ bo’lsa, populyatsiya soni cheksiz o’sadi;
- agar $a < \beta$ bo’lsa, populyatsiya soni kamayadi;
- agar $a = \beta$ bo’lsa, populyatsiya soni o’zgarmayadi.

Agar koeffitsiyentlar vaqtga bog'liq bo'lsa, o'sish surati boshqacha bo'ladi.

Misol uchun,

$$\alpha(t) = \cos t, \quad \beta(t) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right),$$

bo'lsin, u holda yechim

$$N(t) = N_0 e^{\sin t - \cos\left(t + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}.$$

ga teng bo'ladi.

2.1 rasmda ushbu bog'liqlikning xarakteristikasi $N_0 = 50$ uchun keltirilgan.

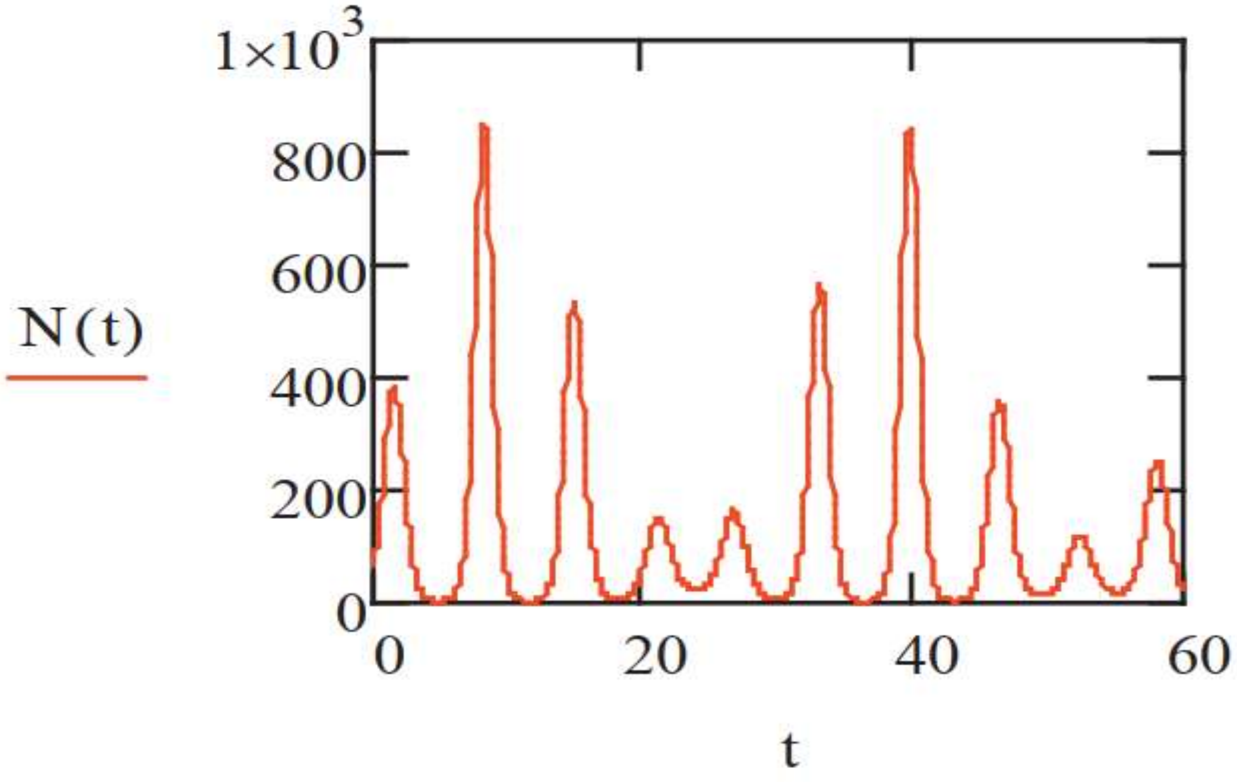


Рис. 2.1

Model cheklovlari

Modelda boshqa populyatsiyalar bilan cheklangan resurslar va raqobat omillari hisobga olinmaydi,

ammo a (t) va β (t) funksiyalarini tanlash orqali ushbu omillar qisman hisobga olinishi mumkin. Ferhulst tomonidan aniqroq model taklif qilingan.

Populyatsiya dinamikasini ko'rib chiqishda tenglamani olish uchun dastlabki taxminlar quyidagicha:

- boshqa shartlar bir xil bo’lganda, populyatsiyaning ko'payish tezligi uning hozirgi hajmiga proportsional;
- boshqa shartlar bir xil bo’lganda, populyatsiyaning ko'payish tezligi mavjud bo'lgan resurslar miqdoriga proportsional.

Shunday qilib, tenglamadagi ikkinchi had aholining o'sishini cheklaydigan resurslar uchun raqobatni aks ettiradi.

Populyatsiya sonini P bilan belgilab (ekologiyada ko'pincha N belgisi ishlatiladi) va vaqtni – t bilan belgilasak, modelni quyidagi differentsial tenglama bilan ifodalash mumkin

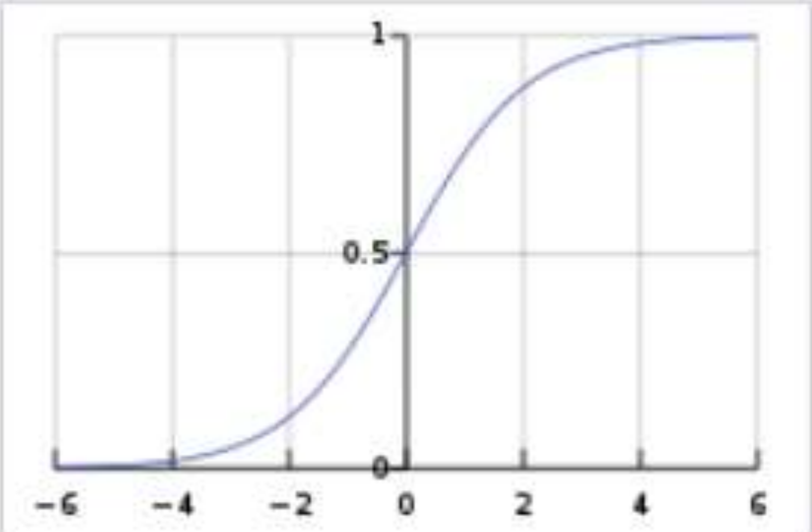
$$\frac{dP}{dt} = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right),$$

bu erda r parametri o'sish (ko'payish) tezligini bildiradi, va K - muhitning hajmi (ya'ni populyatsiyaning mumkin bo'lgan maksimal miqdori). Koeffitsientlar nomidan kelib chiqqan holda, ekologiyada turlarning o'zini tutishning ikkita strategiyasi ko'pincha ajratiladi:

r -strategiya tez ko'payish va qisqa umr ko'rishni nazarda tutadi;

• K-strategiyasi - ko'payish darajasi past va uzoq umr ko'rish.

Tenglamaning aniq echimi (bu erda P_0 - boshlang'ich populyatsiya miqdori) logistik funktsiya bo'ladi, S shaklidagi egri chiziq (logistik egri chiziq):



Логистическая кривая для $K = 1$, $P_0 = 0{,}5$ и $r = 1$

$$P(t) = \frac{K P_0 e^{rt}}{K + P_0\left(e^{rt} - 1\right)},$$

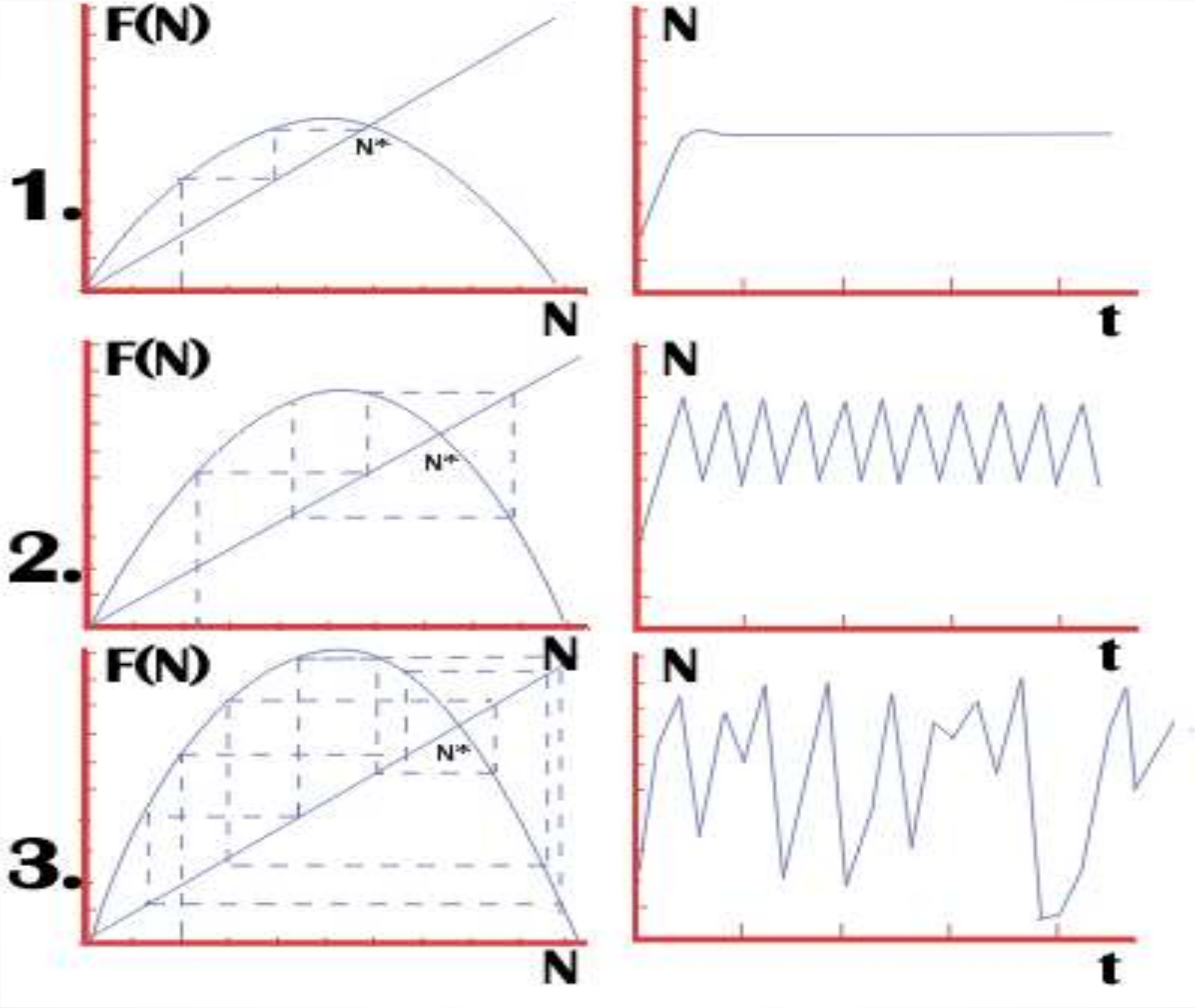
где

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = K.$$

Ma'lumki, "yetarli miqdordagi resurslar" sharoitida, ya'ni P (t) K ga qaraganda ancha past bo'lsa, logistik funktsiya dastlab taxminan eksponentsial ravishda o'sib boradi. Xuddi shunday, resurslar tugaganda ($t \to \infty$), farq K-P(t) bir xil ko'rsatkich bilan eksponentsial ravishda kamayadi. :

$$\frac{P(t)}{P_0 e^{rt}} = \frac{K}{K + P_0\left(e^{rt} - 1\right)} = \frac{1}{1 + \frac{P_0}{K}\left(e^{rt} - 1\right)}.$$

rejimi.



- Keyingi qadamdagi aholi sonning avvalgi qadamdagi songa bog'liqligi (a) va (b) aholi sonning vaqt bo’yicha o’zgarishi, logistik o'sishning diskret modeli uchun *r* parametrining har xil qiymatlari uchun (3): 1 - cheklangan o'sish; 2 - tebranishlar; 3 – xaos (tartibsizlik).

- Diskret tavsif turli xil tizimlar uchun samarali ekanligini ayon bo’ldi. Tekislikdagi *[x_t, x_t + T]* koordinatalarda tizimning dinamik harakatlarini aks ettirish apparati kuzatilayotgan tizimning tebranuvchi yoki kvazistoxastik ekanligini aniqlashga imkon beradi. Masalan, elektrokardiogramma ma'lumotlarining berilishi inson yuragining qisqarishi normal ravishda notekisligini va stenokardiya xuruji paytida yoki infarktgacha bo'lgan holatida yurak qisqarish ritmining qat'iyligini aniqlab olishga imkon berdi. Rejimning bu "qattiqlashishi" organizmning stressli holatdagi himoya reaktsiyasi bo'lib, tizim hayotiga tahdidni ko'rsatadi.

Модель

- (от лат. *modulus* — «мера, аналог, образец») — это упрощенное представление реального устройства и/или протекающих в нем процессов, явлений.

- Мысленно представляемая и материально реализованная система, которая, отображая и воспроизводя объект исследования, способна замещать его так, что её изучение дает новую информацию об этом объекте.

Виды моделей

- ✓Математическая
- ✓Компьютерная
- ✓Информационная
- ✓Имитационная
- ✓Физическая
- ✓Химическая
- ✓Биологическая
- ✓Эволюционная
- ✓Логическая и др…

Математическая модель

- «„эквивалент“ объекта, отражающий в математической форме важнейшие его свойства — законы, которым он подчиняется, связи, присущие составляющим его частям, и т. д.»
- «совокупность математических соотношений, уравнений, неравенств и т.п., описывающих основные закономерности, присущие изучаемому процессу, объекту или системе.»

Компьютерная модель

- компьютерная программа, работающая на отдельном компьютере, суперкомпьютере или множестве взаимодействующих компьютеров (вычислительных узлов, сетей), реализующая абстрактную модель некоторой системы.

- Компьютерная модель - традиционный инструмент математического моделирования, применяется в различных направления научной и прикладной деятельности человека.
- Компьютерные модели используются для получения новых знаний о моделируемом объекте или для приближенной оценки поведения систем, слишком сложных для аналитического исследования.

Программное обеспечение

- Универсальные математические системы
- Специализированные программные продукты для математического моделирования
- Программы для автоматизации научных исследований
- Статистические пакеты

Универсальные математические системы

- MATHLAB
- Mathematica
- MathCAD
- Maple
- Macsyma
- Программы общего назначения для выполнения на компьютере разнообразных математических расчетов (табличные редакторы семейств Microsoft и OpenOffice).

MATHLAB

- Программа обладает интуитивным интерфейсом, встроенным языком математических и графических функций.
- Содержит инструменты:
  - Сбора данных
  - Анализа и обработки данных
  - Визуализации и цифровой обработки сигналов и изображений
  - Создания алгоритмов и проектирования
  - Моделирования и имитации
  - Программирования и разработки приложений

Mathematica

- одна из универсальных математических систем, которая дает возможность решать большое количество весьма сложных задач не вдаваясь в сложности программирования.
- В ряду себе подобных одна из самых мощных и детально разработанных.
- С ее помощью легко осуществляются численные и символьные вычисления.

- Сильной стороной системы, выгодно отличающей ее от остальных, является двух- и трехмерная графика, применяемая для визуализации кривых и поверхностей в трехмерном пространстве.
- Однако использование этой системы для решения систем дифференциальных уравнений (даже обычных) нецелесообразно.
- Более всего Mathematica напоминает программу MAPLE с очень хорошим графическим интерфейсом.

MathCAD

- многофункциональная интерактивная вычислительная система, позволяющая, благодаря встроенным алгоритмам, решать аналитически и численно большое количество математических задач не прибегая к программированию, включая возможность решения систем дифференциальных уравнений.
- рабочий документ MathCAD – электронная книга с живыми формулами, вычисления в которой производятся автоматически в том порядке, в котором записаны выражения.

- Отличается простым и удобным интерфейсом, написанием выражений стандартными математическими символами, хорошей двух- и трехмерной графикой, возможностью подключения к распространенным офисным и конструкторским программам, а также к сети Internet.

Maple

- одна из наиболее популярных систем символьных вычислений, обладающая превосходной научной графикой. Символьный анализатор MAPLE используется в системах Matlab, Mathcad, MATH Office и других.

Macsyma

- Одна из первых математических программ, оперирующих символьной математикой, то есть предназначенных не только для численных, но и для аналитических расчетов.
  Она начала разрабатываться еще в 1968 году в Массачусетском технологическом институте (США), что отражено в ее названии, которое является аббревиатурой словосочетания Massachusetts computation symbolic algebra (MaCSymA).

- Программа занимала некоторое время лидирующую позицию среди универсальных математических программ.
- Появившаяся вскоре программа Maple, а за ней Mathematica потеснили Macsyma с пьедестала почета, однако благодаря своим сильным сторонам - линейной алгебре и дифференциальным уравнениям - она не потеряла популярности.
- Свое второе рождение программа Macsyma получила в 1992 году, когда возникла компания Macsyma Inc., представившая обновленную, удобную, эффективную программу Macsyma.

Специализированные программные продукты для математического моделирования

- Model Vision Studium
- SCoP
- GPSS World
- ELCUT
- FEMLAB
- Пакет ODE
- Программное обеспечение по анализу контроля метаболизма

Model Vision Studium

- компьютерная лаборатория для моделирования и исследования сложных динамических систем, интегрированная графическая оболочка для быстрого создания интерактивных визуальных моделей сложных динамических систем и проведения вычислительных экспериментов с ними.
- Последняя версия системы обладает подсистемой оптимизации, однако качество этой оптимизации необходимо изучать отдельно для каждой конкретной задачи.

SCoP

- Программное обеспечение для математического моделирования, ориентированное на биологические приложения.

GPSS World

- Общецелевая система имитационного моделирования.
- Система GPSS World, разработанная компанией Minuteman Software (США), – это мощная среда компьютерного моделирования общего назначения, разработанная для профессионалов в области моделирования.
- Широкие возможности этой системы отягощены необходимостью изучения достаточно сложного внутреннего языка.

ELCUT

- мощный комплекс программ для инженерного моделирования электромагнитных, тепловых и механических задач методом конечных элементов. Дружественный русскоязычный пользовательский интерфейс, простота описания даже самых сложных моделей, широкие аналитические возможности комплекса и высокая степень автоматизации всех операций позволяют разработчику полностью сосредоточиться на своей задаче.
- Для целей математического моделирования в биофизике удобно пользоваться модулями "теплопередача" и "упругие деформации".

FEMLAB

- Комплекс инструментальных средств новой высоко популярной технологии моделирования физических полей во всех научных и технических приложениях.
- Главная особенность – лёгкость, с которой может быть выполнено моделирование и его неограниченные мультифизические возможности моделирования одномерных, двумерных и трёхмерных физических полей.
- В системе поддерживаются современные численные методы математического анализа в моделировании.
- Аббревиатура FEMLAB дословно переводится на русский язык как "конечноэлементная лаборатория" (FEM – Finite Elements Method – метод конечных элементов, а более строго – комплекс конечноэлементных методов).

Пакет ODE

- предметно-ориентированная среда для решения и исследования поведения решений обыкновенных дифференциальных уравнений и систем. Программа обладает широкими вычислительными и графическими возможностями. Ввод уравнений производится в общепринятой математической записи, результаты вычислений и графических построений представляются в наглядной, принятой в литературе по дифференциальным уравнениям, форме.
- По сравнению с универсальными математическими пакетами ODE значительно проще в освоении и в работе, предъявляет минимальные требования к ресурсам компьютера.

Программы для автоматизации научных исследований

- LabVIEW
- Multisim
- Вспомогательные программы:
  - Grafula
  - Tracer
  - Ciphering
  - WinDig
  - TableCurve

LabVIEW

- Платформа позволяет автоматизировать процессы измерений, обработки сигналов, отображения и архивирования результатов экспериментов, интерактивного генерирования отчетов, управления технологическими процессами на базе персонального компьютера, превратив персональный компьютер не просто в мощный калькулятор, а, в измерительный прибор.

Multisim

- одна из наиболее популярных в мире программ конструирования электронных схем, характеризуется сочетанием профессиональных возможностей и простоты, расширяемостью функций от простой настольной системы до сетевой корпоративной системы.

Статистические пакеты

- Statistica
- SPSS
- StatGraphics
- STADIA
- Stata
- XLSTAT

Statistica

- современный пакет статистического анализа, в котором реализованы все новейшие компьютерные и математические методы анализа данных.
- Имеет мощную графическую систему визуализации данных и результатов статистического анализа.
- Развитая система подготовки статистических отчетов.
- Встроенные языки программирования.
- Нетребовательна к аппаратным ресурсам.
- Однако, требует определенного уровня подготовки перед началом работы с данными.

SPSS

- модульный, полностью интегрированный, обладающий всеми необходимыми возможностями программный продукт, предназначенный для всех этапов аналитического процесса: планирования, сбора данных, доступа к данным и управления данными, анализа, создания отчетов и распространения результатов.
- Сохраняет за собой позицию лидера среди продуктов статистического анализа данных.

StatGraphics

- Пакет прикладных программ использования персонального компьютера для математического и статистического анализа.
- Универсальный многопрофильный пакет с хорошо продуманным меню-ориентированным интерфейсом пользователя.

STADIA

- Универсальный российский статистический пакет STADIA - реализует все базовые разделы и методы современной прикладной статистики, а также средства деловой и научной 2-х и 3-мерной репрезентационной графики, импорт/экспорт и преобразование данных, развитую систему экспресс-помощи и совета.

Stata

- универсальный статистический пакет со специализацией в областях эконометрики, биометрики, анализе стратифицированных обследований.
- Разработчик: Stata Corporation.

XLSTAT

- приложение в области статистики и анализа данных для Microsoft Excel.
- Разработчик: Addinsoft.
- Реализован в виде надстройки «Анализ данных» в версиях MS Office Excel, начиная с версии MS Excel 97.
- Содержит более 10-ти видов анализа данных с высоким уровнем визуализации.

Информационная модель

- модель объекта, представленная в виде информации, описывающей существенные для данного рассмотрения параметры и переменные величины объекта, связи между ними, входы и выходы объекта и позволяющая путём подачи на модель информации об изменениях входных величин моделировать возможные состояния объекта.

- Информационные модели не имеют материального воплощения, потому что строятся только на информации. Информационная модель — совокупность информации, характеризующая существенные свойства и состояния объекта, процесса, явления, а также взаимосвязь с окружающей средой.

Имитационная модель

- логико-математическое описание объекта, которое может быть использовано для экспериментирования на компьютере в целях проектирования, анализа и оценки функционирования объекта.

- Класс объектов, для которых по различным причинам не разработаны аналитические модели, либо не разработаны методы решения полученной модели. В этом случае аналитическая модель заменяется имитационной моделью.

Процесс моделирования

включает в себя три элемента:

- субъект (исследователь),
- объект исследования,
- модель, определяющую (отражающую) отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Основные этапы моделирования

- Постановка задачи.
- Определение цели анализа и пути ее достижения и выработки общего подхода к исследуемой проблеме. На этом этапе требуется глубокое понимание существа поставленной задачи. Иногда, правильно поставить задачу не менее сложно, чем ее решить. Постановка - процесс не формальный, общих правил нет.

- Изучение теоретических основ и сбор информации об объекте оригинала.
- На этом этапе подбирается или разрабатывается подходящая теория. Если ее нет, устанавливаются причинно-следственные связи между переменными описывающими объект. Определяются входные и выходные данные, принимаются упрощающие предположения.

- <u>Формализация</u>.
- Заключается в выборе системы условных обозначений чтобы с их помощью записывать отношения между составляющими объекта в виде математических выражений. Устанавливается класс задач, к которым может быть отнесена полученная математическая модель объекта. Значения некоторых параметров на этом этапе еще могут быть не конкретизированы.

- **Выбор метода решения**.
- **На этом этапе устанавливаются окончательные параметры моделей с учетом условия функционирования объекта. Для полученной математической задачи выбирается какой-либо метод решения или разрабатывается специальный метод. При выборе метода учитываются знания пользователя, его предпочтения, а также предпочтения разработчика.**

- <u>Реализация модели</u>.
- Задача решается аналитически либо численно, в том числе, с применением вычислительной техники.

- <u>Анализ полученной информации</u>.
- Сопоставляется полученное и предполагаемое решение, проводится контроль погрешности моделирования.

- **Проверка адекватности реальному объекту.**
- **Результаты, полученные по модели сопоставляются либо с имеющейся об объекте информацией или проводится эксперимент и его результаты сопоставляются с расчётными.**

- В случае получения неудовлетворительных результатов на завершающих этапах, осуществляется возврат к одному из ранних этапов, который мог привести к разработке неудачной модели.
- Этот этап и все последующие уточняются и такое уточнение модели происходит до тех пор, пока не будут получены приемлемые результаты.

Основные методы экологических исследований

- *Полевые исследования* - изучение популяций видов и их сообществ в естественной обстановке. Позволяют выяснить характер влияния на популяцию того или иного комплекса факторов, общую картину развития и жизнедеятельности вида в конкретных условиях. Однако полевые наблюдения не всегда могут дать точный ответ на поставленные вопросы. Например, на вопрос, какой из факторов среды определяет характер жизнедеятельности особи, вида, популяции или сообщества, можно ответить только с помощью эксперимента, главной задачей которого является выяснение причин установленных взаимоотношений.

- ***Экологический эксперимент*** **- моделирование естественной системы в искусственных условиях (например, аквариум может служить натурной моделью водоема) и изучение особенностей влияния отдельных факторов на развитие организма. Экспериментальные методы позволяют вычленить и проанализировать роль отдельных факторов при постоянстве всех остальных в искусственно созданных и контролируемых условиях.**

- ***Математическое моделирование биологических явлений*** **- моделирование реально существующих объектов и явлений осуществляемое средствами языка математики. Математическое моделирование основано на создании и исследовании математической модели реальной системы, описанной с помощью математических уравнений. Имитация различных сигналов (например, изменение климатических условий, антропогенных нагрузок) по отношению к исследуемой математической модели позволяет теоретически определить поведение реальной системы без сложного, дорогого или опасного эксперимента, а также даёт возможность изучать явления, которые невозможно воспроизвести экспериментально.**

Модель Мальтуса (рождаемость смертность)
…

- В популяциях микроорганизмов удельная скорость роста зависит от скорости деления клеток. Исходные клетки делятся на дочерние, что и определяет прирост численности.
  В популяциях многоклеточных организмов удельная скорость роста зависит от рождаемости и смертности.
  Рождаемость характеризует частоту появления новых особей в популяции.

- Различают рождаемость абсолютную и удельную.
- *Абсолютная рождаемость* - число особей , появившихся в популяции за единицу времени. *Удельная рождаемость* выражается в числе особей на особь в единицу времени. Например, для популяции человека как показатель удельной рождаемости обычно используют число детей, родившихся в год на 1000 человек.
- *Смертность (абсолютная и удельная)* характеризует скорость убывания численности популяции, в следствии гибели особей от хищников, болезней, старости и т.д.

- Используя такие параметры модели изменения численности популяции , австрийский священник Мальтус опубликовал в 1802 году результаты своих исследований , основанных на данных о росте населения в американских колониях.

Математическая модель

- Пусть в популяции с начальной численностью $\boldsymbol{N}$ особей за промежуток времени $\boldsymbol{dt}$ появляется $\boldsymbol{dN}$ новых особей. Если число вновь появившихся особей прямо пропорционально $\boldsymbol{N}$ и $\boldsymbol{dt}$. то имеем уравнение

$$\boldsymbol{dN = r \cdot dt \cdot N}$$

- Разделив обе части на $\boldsymbol{dt}$ получим

$$\boldsymbol{\frac{dN}{dt} = r \cdot N \ (1)}$$

$\boldsymbol{\frac{dN}{dt}}$ - абсолютная скорость роста численности ,

$\boldsymbol{r}$ - биотический потенциал

- Решением уравнения $(\boldsymbol{1})$ будет $\boldsymbol{N(t) = N_0 \cdot e^{rt}(2)}$
  в дискретном виде это уравнение можно записать так

$$\boldsymbol{N(t+1) = N_0 \cdot e^{r\cdot(t-t_0)}(3)}$$

Это уравнение можно взять за основу при создании компьютерной модели.

Компьютерная модель

	A	B	C	D	E
1	Коэффициент рождаемости 0,5	Коэффициент смертности 0,2	Начальная численность 1000		
2	0 0	=A2+1 1	=B2+1 2	=C2+1 3	=D2+1 4
3	=c$1 1000	=$A$3*EXP((($A$1-$B$1)/1000)*(B2-$A$2))	Копировать формулу из B3	...	...

Так как расчет рождаемости и смертности у популяции людей вычисляется на 1000 человек, то биотический потенциал следует уменьшить в 1000 раз (смотри формулу в B3)

ЗАДАНИЕ:

- ***Население России в 1990 году составило 147 млн. человек. Каким будет население России в 2000 году, если известны такие показатели рождаемости и смертности за несколько лет?***

Год	Рождаемость	Смертность
1990	14,6	10,6
1991	12,1	10,4
1992	10,7	12,2
1993	9,3	14,3
1994	9,5	15,5
1995	9,2	14,8

Модель Ферхюльста (рождаемость и смертность с учетом роста численности)

Постановка задачи

- Как правило, численность популяции зависит не только от рождаемости и смертности, но и от ограниченности пищевых и других ресурсов.
- Вскоре за созданием модели Мальтуса, бельгийский математик Ферхюльст задался вопросом: будет ли население Бельгии расти неограниченно?
- Ответом на этот вопрос было создание новой модели динамики численности популяции при ограниченных ресурсах, описываемая следующим уравнением:
  $dN/dt=r*N-m*N^2$(1)
  r – удельная скорость роста численности
  N - численность популяции
  m - число встреч членов популяции, при котором они могут конкурировать за какой-либо ресурс

- **уравнение это отличается от уравнения экспотенциального роста (уравнения Мальтуса) выражением $m*N^2$, которое как раз и отражает ограниченность ресурсов.
Перепишем уравнение (1) так:
$dN/dt=N(r-m*N)$ (2)
Выражение в скобках - это удельная скорость роста популяции. Причем чем больше численность популяции (N), тем меньше скорость роста. Если в правой части уравнения вынести за скобки выражение r
$dN/dt=N*r(1-N*m/r)$
и обозначить m/r за 1/K, то уравнение (1) можно переписать так:
$dN/dt=N*r(1-N/K)$ (3)**

- При малых N значением N/K можно пренебречь, и тогда рост численности идет по экспоненциальному закону, при возрастании N и неизменном K рост численности будет замедляться, и при N близком к K рост остановится. Величину K называют *емкостью среды*. Она отражает возможности среды обитания предоставить популяции нужные для ее роста ресурсы.

- Уравнение (3) графически отображается в виде S-образной кривой. Эта кривая называется *логистической кривой*, а рост численности ,соответствующий уравнению (3) - *логистическим*. Исследуя кривую, можно сказать , что максимальная скорость роста достигается , когда численность равна К/2. В некоторый момент численность стабилизируется и остается постоянной величиной. Популяции, существующие в условиях ограниченных ресурсов, часто хорошо подчиняются правилам логистического роста. Например, когда овцы были завезены в Тасманию, рост их стада описывался логистической кривой.
Но правила логистического роста приложимы не ко всем случаям. Например, у размножающихся половым путем видов, при слишком малой численности мала вероятность встреч особей разного пола и размножение может вообще прекратиться.

- **Для реализации модели в среде электронных таблиц уравнение (3) следует представить в дискретном виде**
  N(i+1)=N(i)*r*(1-N(i)/K) (4)
  где N(i) - численность популяции в i-й момент времени;
  r -удельная скорость роста популяции (рождаемость/ смертность);
  K - емкость среды

Компьютерная модель

	A	B	C	D	E	F
1	Коэффициент рождаемости 14,5	Коэффициент смертности 10,2	Начальная численность 147000000	Емкость среды K (7350000000)	Удельная скорость роста =$A$1/$B$1	
2	0 0	=A2+1 1	=B2+1 2	=C2+1 3	=D2+1	…
3	=c$1 1000	=A3*$E$1*(1 - A3/$D$1)	Копировать формулу из B3	…	…	…

Для этой модели нужно взять побольше временной диапазон, т.к. она наглядна на длинном промежутке времени

ЗАДАНИЕ:

- *Известно, что каждую минуту на земле рождается 240 человек, а умирает 120.*

В настоящее время население земного шара равно 6,5 млрд. человек.

Емкость среды нашей планеты по оценкам ряда ученых (при прогрессивном и грамотном ведении хозяйства) приблизительно равно 20 млрд. человек.

- *Используя модель Ферхюльста, попытайтесь спрогнозировать через сколько лет должен прекратиться рост населения, и каким оно будет?*

Простейшая модель "хищник-жертва" модель Лотки - Вольтерра

- Первыми математическими моделями простейших экологических систем хищник - жертва, и паразит - хозяин были теоретические разработки Лотки – Вольтерра, выполненные в 1925-1926 годах и послужившие основой для построения более сложных моделей.
- Впервые модель была получена А.Лоткой (1925 г.), который использовал для описания динамики взаимодействующих биологических популяций.

- Чуть позже и независимо от Лотки аналогичные (и более сложные) модели были разработаны итальянским математиком В.Вольтерра (1926 г.), глубокие исследования которого в области экологических проблем заложили фундамент математической теории биологических сообществ или так называемой математической экологии.

- Пусть два биологических вида совместно обитают в изолированной среде. Среда стационарна и обеспечивает в неограниченном количестве всем необходимым для жизни один из видов, который будем называть жертвой. Другой вид - хищник также находится в стационарных условиях, но питается лишь особями первого вида. Это могут быть караси и щуки, зайцы и волки, мыши и лисы, микробы и антитела и т. д. Будем для определенности называть их карасями и щуками.
- Итак, караси и щуки живут в некотором изолированном пруду. Среда предоставляет карасям питание в неограниченном количестве, а щуки питаются лишь карасями.

- Обозначим:

  y - число щук

  x - число карасей

- Со временем число карасей и щук меняется, но так как рыбы в пруду много, то не будем различать 1020 карасей или 1021 и поэтому будем считать (x) и (y) непрерывными функциями времени (t). Будем называть пару чисел (x, y) состоянием модели.
- Попробуем из самых простых соображений найти, как меняется состояние (x, y).

- Итак, если число карасей - x, а число щук - y, то вероятность, что карась встретится со щукой, пропорциональна произведению (xy). Другими словами, чем выше численность одного из видов, тем выше вероятность таких встреч. В отсутствие щук популяция карасей будет расти экспоненциально (по крайне мере вначале), а в отсутствие карасей популяция щук из за голода сократится до нуля. Теперь, если dx - изменение популяции карасей за время dt, а dy изменение популяции щук за тот же интервал времени, то две популяции описываются дифференциальными уравнениями:

$$dx/dt = rx - Axy$$

и $$dy/dt = -qy + Bxy$$

где r - скорость роста численности карасей в отсутствие щук, а q - скорость сокращения численности щук в отсутствие карасей. Постоянные A и B - скорость, с которой встречи щук с карасями удаляют карасей из популяции, и скорость, с которой эти встречи позволяют щукам прибавлять численность своей популяции.

- Знак минус в первом уравнении показывает, что встречи сокращают популяцию жертвы, а знак плюс во втором говорит о том, что встречи увеличивают популяцию хищника. Как видите, любое изменение численности карасей влияет на численность щук, и наоборот. Две популяции необходимо рассматривать вместе.
- Эта система уравнений называется моделью Лотки - Вольтерра. Числовые коэффициенты r, q, A, B называются параметрами модели. Очевидно, что характер изменения состояния (x, y) определяется значениями параметров. Изменяя эти параметры и решая систему уравнений модели, можно исследовать закономерности изменения состояния экологической системы.
- Решение этих уравнений показывает, что обе популяции развиваются циклически. Если популяция жертв-карасей увеличивается, вероятность встреч хищник-жертва возрастает, и, соответственно (после некоторой временной задержки), растет популяция хищников-щук. Но рост популяции щук приводит к сокращению популяции карасей (также после некоторой задержки), что ведет к снижению численности потомства щук, а это повышает число карасей и так далее. Эти две популяции как бы танцуют вальс во времени - когда изменяется одна из них, за ней следом изменяется и другая.

- Однако математическое моделирование процесса или явления не всегда может дать полного знания о нём. Это особенно существенно в том случае, когда предметом математического моделирования являются сложные системы, поведение которых зависит от значительного числа взаимосвязанных факторов различной природы. Поэтому иногда математическое моделирование дополняют натуральным модельным моделированием.

Временной ряд (ряд динамики)

- собранный в разные моменты времени статистический материал о значении каких-либо параметров (в простейшем случае одного) исследуемого (наблюдаемого) процесса.
- Каждая единица статистического материала называется измерением или отсчётом, также допустимо называть его уровнем на указанный с ним момент времени.

- Во временном ряде каждому значению должно соответствовать время измерения или номер измерения по порядку.
- Временной ряд существенно отличается от простой выборки данных, так как при анализе учитывается взаимосвязь измерений со временем, а не только статистическое разнообразие и статистические характеристики выборки.

СКОЛЬЗЯЩЕЕ СРЕДНЕЕ

- семейство функций, значения которых в каждой точке определения равны среднему значению исходной функции за предыдущий период.
- Скользящие средние обычно используются с данными временных рядов для сглаживания краткосрочных колебаний и выделения основных тенденций или циклов.

- **Математически скользящее среднее является одним из видов свёртки, и поэтому его можно рассматривать как фильтр нижних частот, используемых в обработке сигналов.**

- Скользящее среднее используется для расчета значений в прогнозируемом периоде на основе среднего значения переменной для указанного числа предшествующих периодов.
- Скользящее среднее, в отличие от простого среднего для всей выборки, содержит сведения о тенденциях изменения данных.
- Этот метод может использоваться для прогноза сбыта, запасов и других процессов.

- Расчет прогнозируемых значений выполняется по следующей формуле :
- $F_j = A_j / N$, где:

N — число предшествующих периодов, входящих в скользящее среднее;

A_j — фактическое значение в момент времени j;

F_j — прогнозируемое значение в момент времени j.

- Во втором столбце выводятся стандартные погрешности.
- Также выводится график по которому можно оценить различие между фактическими значениями и прогнозом.

ЛИТЕРАТУРА:

- С.Гланц «Медико-биологическая статистика». – М.: Практика, 1999
- Б.А.Кобринский, Т.В.Зарубина «Медицинская информатика». – М.: Академия, 2009
- Н.В.Макарова «Информатика. Практикум по технологии работы на компьютере» (2 т.). – М.: Финансы и статистика, 2005
- В.П.Омельченко, А.А.Демидова «Практикум по медицинской информатике». – Ростов-на-Дону.: Феникс, 2001
- http://www.ecololife.ru/study-220-1.html

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

…

Populyatsiya chiziqsiz modelining uch turdagi rejimi

8.3-Maruza

REJA

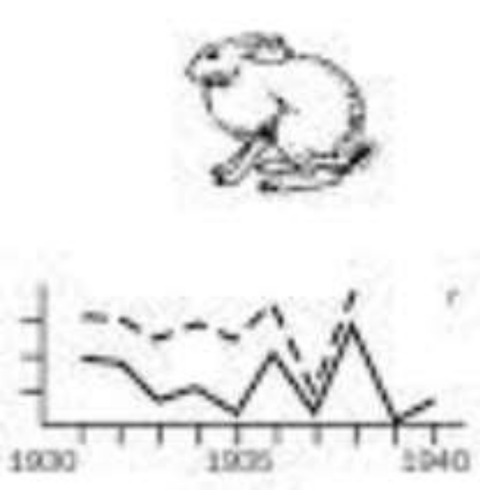
1. Populyasiya evolyasiyasi model
2. Chiziqli Maltus modeli
3. Matematik modellar chiziqsizligi haqida
4. Chiziqsiz Maltus modeli (logistik model)
5. Populyasiya chiziqsiz modelining uch rejimi

Populyasiya evolyasiyasi modeli.

- Ekologiyada, biologiyada tirik organizmlarning tashqi muhit bilan o'zaro munosabatini o'rganiladi. Ko'payish yoki turli sabablarga ko'ra nobud bo'lish bilan bog'liq bo'lgan populyasiyalarning ba'zi differensial modellarini keltiramiz. Vaqtning bir birligida populyasiyada tug'ilishlar sonini A, nobud bo'ladiganlari sonini B desak, yetarli asos bilan populyasiya soni x ning vaqtga bog'liq o'zgarish tezligini

$$\frac{dx}{dt} = A - B \qquad (1)$$

formula bilan berish mumkin. Endi masala A va B ni x ga bog'liqligini tavsiflashdan iborat



a) Eng sodda hol, populyasiyalar evololyusiyasi masalasida agar populyasiya ajratilgan, ozuqa resurslari chegaralanmagan, ko’payish tezligi balog’atdagi jonzotlar mikdoriga proporsional deb hisoblansa

$$A = ax, \quad B = bx \tag{2}$$

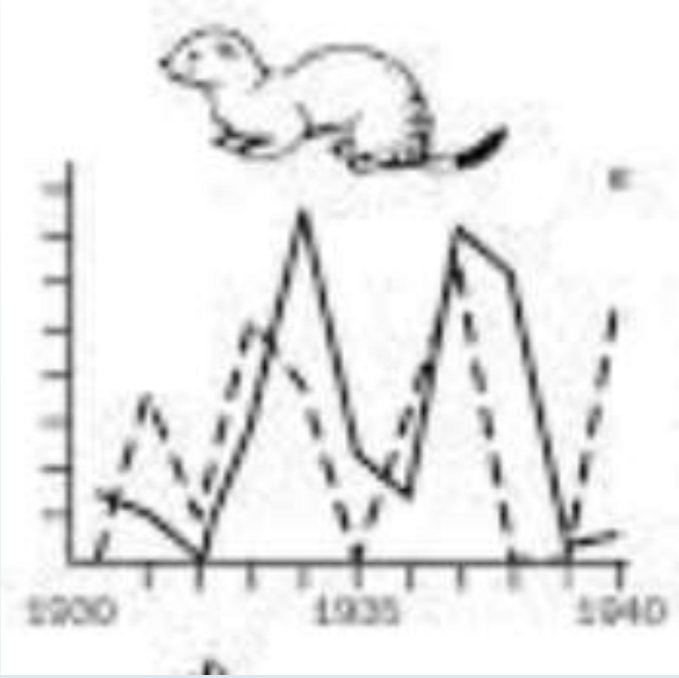
dan iborat, bu yerda a va b – vaqtning bir birligida tug’ilish va nobud bo’lish koeffisentlari. (2) ni hisobga olinsa, (1) ni

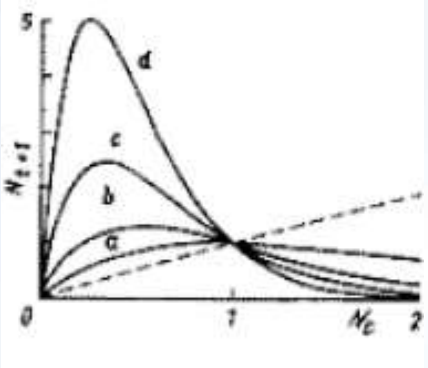
$$\frac{dx}{dt} = (a - b)x \tag{3}$$

ko’rinishda yozish mumkin. Bu tenglamaning yechimi

$$x(t) = x(t_0)e^{k(t-t_0)}$$

bo’ladi





bu yerda $x(t_0)=x_0$ – boshlang'ich momentdagi populyasiya soni $k=a-b$ (1) tenglamani 1802 yil Maltus birinchi bo'lib o'rgandi. Maltusning bu modeli kamchiligi shundan iboratki, bu tenglama populyasiyalarning juda tor sinfi uchun o'rinli bo'ladi. Maltus esa uni butun tabiat uchun, hatto kishilar jamiyati uchun ham universal qonun deb hisoblagan.

b) $A=ax$, $B=bx^2$ hol ham uchraydi. Bunda

$$\frac{dx}{dt}=ax-bx^2 \tag{4}$$

tenglama hosil bo'ladi. $x(t_0)=x_0$ bo'lsa, yechim

$$x(t)=\frac{x_0\dfrac{a}{b}}{x_0+\left(\dfrac{a}{b}-x_0\right)e^{-a(t-t_0)}}$$

dan iborat bo'ladi.

(4) tenglama 1845 yilda olingan Ferxyulst–Perl tenglamasidan iborat bo'lib, unda populyasiyadagi ichki kurash xisobga olinadi. Bu Maltusning (1) tenglamasiga nisbatan populyasiyaning rivojlanishini aniqroq tavsiflaydi

b) Ikki biologik populyasiyaning o'zaro ta'sirida kichik tebranishlar.

Bitta hududda $N(t)$ va $M(t)$ sondagi ikkita biologik populyasiya berilgan bo'lib, birinchisi o'txo'r, ikkinchisi esa birinchi ko'rsatilgan populyasiya bilan oziqlanuvchi populyasiya bo'lsin.

$N(t)$ o'zgarish tezligi chiziqli Maltus modeli formulasining o'ng tomonidagi birinchi had bilan aniqlanuvchi o'sish tezligi (to'yinganlik effekti e'tiborga olinmaydi) va ikkinchi populyasiya tufayli kamayishi tezliklari yig'indisidan iborat:

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha_1 - \beta_1 M)N, \qquad (4^*)$$

bu yerda $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_1 MN$ had majburiy kamayishni ifodalaydi. (Populyasiyaning tabiiy kamayishi hisobga olinmaydi).

Ikkinchi populyasiyaning soni, birinchi populyasiyaning soni qancha ko'p bo'lsa shuncha tezroq o'sadi, u bo'lmaganda esa $M(t)$ ning qiymatiga proporsional bo'lgan tezlikda kamayadi (bu bilan uning ko'payishi ham e'tiborga olinmaydi):

$$\frac{dM}{dt} = (-\alpha_2 + \beta_2 N)M, \qquad (5)$$

bu yerda $\alpha_2 > 0, \ \beta_2 > 0$.

Ko'rinib turibdiki, $\frac{dN}{dt} = \frac{dM}{dt} = 0$ bo'lganda, sistema $M_0 = \frac{\alpha_1}{\beta_1}$ va $N_0 = \frac{\alpha_2}{\beta_2}$ qiymatlarda muvozanat holatda bo'ladi. Sistemaning muvozanat holatlaridagi qiymatlaridan kichik o'zgarishni qaraymiz, ya'ni $N = N_0 + n, \quad M = M_0 + m$, $n \ll N_0, \ m \ll M_0$ ko'rinishdagi yechimni qaraymiz. (4), (5) tenglamaga N va M larning bu qiymatlarini qo'yib, yuqoriroq tartibdagi hadlarni tashlash bilan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\frac{dn}{dt} = -\beta_1 N_0 m, \qquad \frac{dm}{dt} = -\beta_2 M_0 n. \qquad (7)$$

(6) ni t bo'yicha differensiallab va (7) dan aniqlanadigan tenglamaga $\frac{dm}{dt}$ funksiyani qo'yib, tebranish modeli formulasiga o'xshash tenglamaga kelamiz:

$$\frac{d^2 n}{dt^2} = -\alpha_1 \alpha_2 n, \qquad (8)$$

Demak, sistemada faqat ko'payish α_1 va kamayish koeffisiyentlari α_2 ga bog'liq bo'lgan kichik tebranishlar $\omega = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ chastota bilan sodir bo'ladi. Eslatib o'tamizki, $m(t)$ kattalik (8) tenglamadagidek tenglamaga (qonuniyatga) bo'yso'nadi, agar $n(t)$ ning o'zgarishi $t = 0$ boshlang'ich momentda nolga teng bo'lsa, unda $m(t = 0)$ maksimal amplitudaga ega bo'ladi va aksincha. Bu holat $n(t)$ va $m(t)$ sonlar qarama-qarshi fazoda joylashgan bo'lsa $t_i = \frac{iT}{4}$, $i = 1, 2, \ldots$ barcha momentlar uchun sodir bo'ladi (T – tebranish davri) va bir populyasiya sonining boshqasi o'zgarishiga reaksiyasi kechikishini ifodalaydi.

Chiziqli Maltus modeli

a) Radioaktiv yemirilish modeli. Quyidagi belgilishlarni kiritamiz: N(0) - radioaktiv moddaning (masalan uran, pluton kabilar) atomlar soni, N(t) - radioaktiv moddaning t vaqtdagi hali yemirilmagan atomlari soni bo'lsin. Tajribalardan ma'lumki, vaqt birligida sochilayotgan atomlar sonining o'zgarish tezligi radioaktiv modda atomlari soniga proporsional

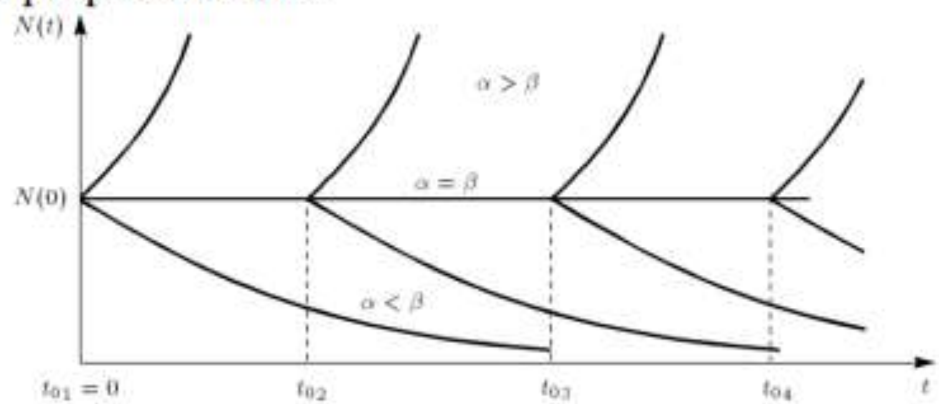
$$N' = \frac{dN(t)}{dt} = -\lambda N(t), \quad \lambda > 0 \qquad (1)$$

bu yerda λ - qaralayotgan radioaktiv moddagagina xos bo'lgan o'zgarmas (radioaktivlik koeffisiyenti deb ataladi). Maktab matematika kursidan ma'lumki, (1) differensial tenglama yechimi

$$N(t) = N(0)\, e^{-\lambda t} \tag{2}$$

kabi ko'rinishda bo'ladi.

b) Maltus chiziqli modeli. Bu model asosida quyidagi oddiy tasdiq yotadi: aholining vaqt bo'yicha o'zgarish tezligi uning *t* vaqt momentidagi soni *N(t)* ning tug'ilish koeffisiyenti $\alpha(t) \geq 0$ va o'lish koeffisiyenti $\beta(t) \leq 0$ lar yig'indisiga ko'paytirilganiga proporsionaldir.



1-rasm

Natijada radioaktiv radioaktiv yemirilish tenglamasiga juda o'xshash bo'lgan va $\alpha < \beta$ (α va β doimiylar) bo'lganda esa, u bilan ustma-ust tushuvchi quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$\frac{dN(t)}{dt} = [\alpha(t) - \beta(t)]N(t) \quad (3)$$

(3) tenglamani integrallab tenglama yechimini olamiz:

$$N(t) = N(0)\, e^{\int_{0}^{t} [\alpha(\tau) - \beta(\tau)] d\tau} \quad (4)$$

bu yerda $N(0) = N(t = 0)$ - boshlang'ich tezlik.

Ko'rinib turibdiki, qaralgan ikki xil tabiatga ega bo'lgan masalalar modellari ((1) va (3) tenglamalar) bir xil, chunki bunda tenglamalarni keltirib chiqarishda bir xil mulohazalardan foydalaniladi.

1-rasmda α va β doimiy bo'lganda $N(t)$ funksiyaning grafigi keltirilgan. Ko'rinib turibdiki, $\alpha = \beta$ bo'lganda aholi soni o'zgarmaydi, ya'ni bu holda (1) tenglamaning yechimi $N(t) = N(0)$ o'zgarmas miqdordan iborat bo'ladi. Tug'ilish va kamayish orasidagi muvozanat shu ma'noda turg'un emaski, $\alpha = \beta$ tenglikning ozgina buzilishi vaqt o'tishi bilan $N(t)$ funksiyaning $N(0)$ muvozanat qiymatdan katta miqdorga og'ishiga olib keladi. $\alpha < \beta$ bo'lganda aholi soni kamayadi va bunda $t \to \infty$ bo'lganda nolga intiladi, $\alpha > \beta$ bo'lganda esa eksponensial qonun bo'yicha o'sadi va $t \to \infty$ bo'lganda cheksizlikka intiladi. Bu

Shuni ta’kidlash kerakki, axoli sonining o’zgarish jarayoni odamlarning o’zlarining ongli aralashuviga bog’liq bo’lib, uni albatta, oddiy qonuniyat bilan ifodalab bo’lmaydi. Hattoki ideal sharoitdagi ajratib qo’yilgan biologik populyasiyaning mavjud bo’lishi uchun zarur bo’lgan resurslar cheklangani sababli taklif etilayotgan model real vaziyatga to’lasincha mos kelmaydi. Bu aytilganlar juda murakkab hodisalar matematik modellarini qurishda analogiya usulining rolini kamaytirmaydi. Analogiya usulining qo’llanilishi modellarning muhim xossalaridan biri – ularning universalligiga, ya’ni turli tabiatli obyektlarga qo’llanishi mumkinligiga asoslangan. O’zining universalligi va keng ko’lamda qo’llanilishi bilan berilgan, asosiy qonunlari variasion prinsip deb nomlanadigan yana bir modellarning qurilishiga kelamiz. Ular qaralayotgan obyekt uchun ko’plab umumiy tasdiqlarni bildiradi va barcha mumkin bo’lgan tartib (harakat, evolyusiya) variantlari orasidan faqat aniq bir shartni qanoatlantiradigan variantlarni tanlaydi. Odatda ushbu shartga ko’ra obyektga bog’liq bo’lgan qandaydir kattalik bir holatdan boshqa holatga o’tayotganda ektremal qiymatga erishadi.

Matematik modellar chiziqsizligi haqida

- Yuqorida qaralgan modellarning soddaligi ularning chiziqli ekanligiga bog’liq. Matematik nuqtai nazardan bu muhim tushuncha superpozisiya prinsipi o’rinli ekanligi anglatadi, ya’ni yechimlarning ixtiyoriy kombinatsiyasi (masalan, ularning yig’indisi) ham yechim bo’ladi. Superpozisiya prinsipidan foydalanib xususiy hollar uchun yechimlar topib umumiy hol uchun yechim qurish qiyin emas. Shuning uchun umumiy hol sifat xususiyatlari haqida xususiy hol xossalaridan xulosa chiqarish mumkin. Boshqacha qilib aytganda, chiziqli modellarda obyektning biror-bir shartlar o’zgarishiga javobi shu o’zgarishning kattaligiga proporsional bo’ladi. Matematik modellari superpozisiya prinsipiga bo’ysunmaydigan chiziqsiz modellarda esa obyektlarning bir qismi haqidagi xulosalardan butun obyekt haqida to’g’ri xulosa chiqarishga kafolat bermaydi, uning shartlar o’zgarishiga javobi shu o’zgarishlar kattaligiga sifat jihatdan bog’langan. Ko’pgina real jarayonlar va ularga mos keluvchi matematik modellar chiziqsiz hisoblanadi. Chiziqli modellar esa juda xususiy hollargagina mos bo’lib, odatda real voqyeilikka dastlabki yaqinlashish uchun xizmat qiladi.

Chiziqsiz Maltus modeli (logistik model)

- Masalan oldingi mavzuda qaralgan populyasiya modeli uchun zaruriy resurslarning chegaralanganligini e'tiborga olsak, u chiziqsiz modelga aylanadi. Bu cheklov kiritilayotganda qo'yidagilar hisobga olinadi: 1) populyasiya soni uchun atrof muhit ta'mirlay oladigan qandaydir N_m «muvozanat» soni mavjud; 2) populyasiya sonining o'zgarish tezligi populyasiya soni bilan uning muvozanat qiymatidan og'ish kattaligiga ko'paytmasiga (chiziqli Maltus modelidan farqli ravishda) proporsional, ya'ni

$$\frac{dN}{dt} = \alpha\left(1 - \frac{N}{N_m}\right)N, \quad \alpha > 0 \qquad (3)$$

$$\frac{dN}{dt} = \alpha\left(1 - \frac{N}{N_m}\right)N, \quad \alpha > 0 \tag{3}$$

Bu tenglamadagi $\left(1 - \frac{N}{N_m}\right)$ had populyasiya soni «to'yinganlik» mexanizmini ta'minlaydi: $N < N_m$ bo'lganda o'sish tezligi musbat va $N \to N_m$ da nolga intiladi; $N > N_m$ bo'lganda esa o'sish tezligi manfiy va nolga intiladi.

Endi olingan (3) modelni tadqiq qilamiz. (3) tenglamani

$$\frac{dN}{N_m - N} + \frac{dN}{N} = \alpha t$$

shakldа yozib olib integrallaymiz va

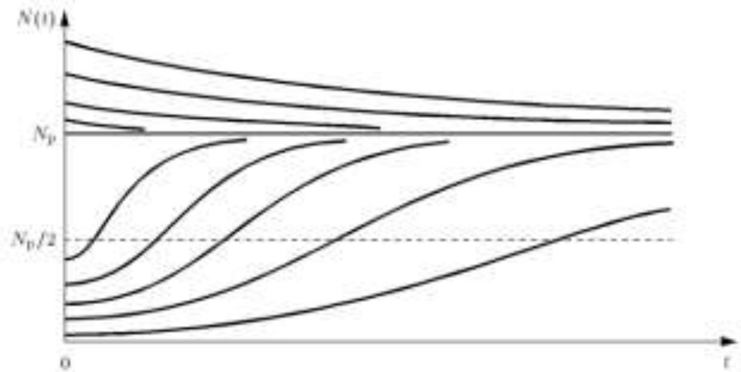
$$\ln(N_m - N) + \ln N = 2t + C$$

tenglikni olamiz. Bu yerdagi o'zgarmas (S) $N(t=0)=N(0)$ boshlang'ich shartdan olinadi: $C=\ln\frac{N(0)}{N_m-N(0)}$. Natijada

$$N=N_m\frac{N(0)}{N_m-N(0)}\ell^{\alpha t}-N\frac{N(0)}{N_m-N(0)}\ell^{\alpha t}, \text{ yoki}$$

$$N(t)=\frac{N_m N(0)e^{\alpha t}}{N_m-N(0)(1-e^{\alpha t})} \tag{4}$$

Bu funksiyaning o'zini tutish *logistik egri chiziq* deb ataluvchi grafik bilan tasvirlanadi (2-rasm).



2-rasm

Qarab chiqilgan chiziqsiz Maltus modeli (logistik model ham deb yuritiladi) chiziqli Maltus modeliga qaraganda populyasiya dinamikasini nisbatan haqqoniy aks ettirsada, chiziqsizligi tufayli murakkab hisoblanadi. Shuni ham ta'kidlash kerakki, yuqorida qo'llanilgan to'yinganlik mexanizmi turli fan sohalaridagi modellarda qo'llaniladi.

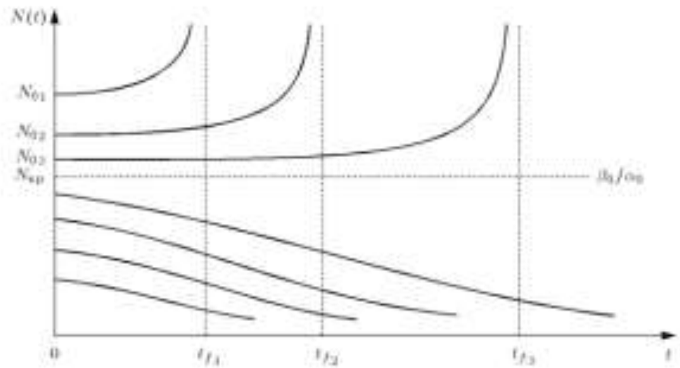
Populyasiya chiziqsiz modelining uch rejimi

3. Populyasiya chiziqsiz modelining uch rejimi. Yuqorida murakkabligi ta'kidlangan chiziqsiz modelni tadqiq etishda davom etamiz. (1) va (3) modellardan farqli ravishda tug'ilish koeffisiyenti populyasiya soniga, ya'ni $N(t)$ga bog'liq bo'lsin deb hisoblaymiz: $\alpha = \alpha(N)$. Kamayish (o'lim) koeffisiyenti ham N ga bog'liq bo'lsin.

Aniqlik uchun $\beta(N) = \beta_0 = const$, $\alpha(N) = \alpha_0 N$ deb olamiz, ya'ni tug'ilish populyasiya soniga proporsional (masalan, chunki populyasiya a'zolari ko'payishdan manfaatdor). U holda (1) tenglama

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_0 N^2 - \beta_0 N \tag{5}$$

ko'rinishga keladi. Turli boshlang'ich qiymatlarda $(N(0) = N_0)$ $N(t)$ funksiya xarakterini qarab chiqamiz (3-rasm).



a) $N_0 < N_m = \beta_0 / \alpha_0$ bo'lganda monoton ravishda kamayib, nolga intiladi $(t \to \infty)$.

Bu hol uchun (5) tenglama yechimi (3) tenglama yechimiga o'xshash formula bilan beriladi, faqat t qarama – qarshi ishora bilan olinadi (teskari logistik chiziq).

b) N_0 ning kritik (muvozanat) qiymatida $(N_0 = N_m)$ populyasiya soni vaqtga bog'liq bo'lmay qoladi.

v) $N_0 > N_m$ bo'lganda yechim

$$N(t) = \frac{N_0 \cdot \beta_0 / \alpha_0}{N_0 + \left[\beta_0 / \alpha_0 - N_0 \right] e^{-\beta_0 t}}, \quad N(0) = N_0 \tag{6}$$

ko'rinishda bo'lib, u a) va b) harakat jihatdan keskin farq qiladi: populyasiya soni o'sadi, buning ustiga o'sish shu qadar tezki chekli $t = t_f$ vaqt oralig'ida cheksizlikka intiladi. Populyasiya boshlang'ich soni N_0 qancha katta bo'lsa, bu $t = t_f$ vaqt shuncha kichik bo'ladi.

Demak, (5) tenglamaning chiziqsizligi, hatto oddiy modelda ham turli tuman effektlarni yuzaga keltirib chiqaradi, populyasiya soni vaqt bo'yicha o'zgarishining mumkin bo'lgan uch rejimi; b) rejimning turg'unsizligi, ya'ni a) yoki v) sohalarga tomon kichik og'ishlar yuz berganda yechim $N_m = \beta_0 / \alpha_0$ chiziqdan uzoqlashadi; $N(t)$ funksiyaning boshlang'ich qiymatlarga juda sezgirligi; va nihoyat $N_0 > N_m$ bo'lganda chekli vaqt oralig'ida populyasiya sonining keskin tarzda oshib ketishi kabilar.

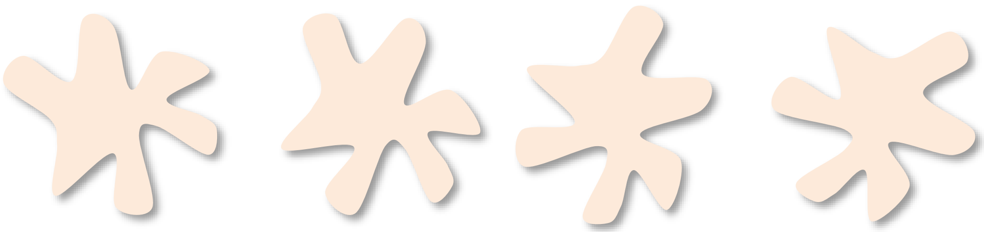
Shuni ham qo'shimcha qilish mumkinki, (5) munosabat, meva zarurkunandalari va ayrim turdagi bakteriyalar populyasiyalar dinamikasi moddellarini ham ifodalaydi.

Mavzu: «Yirtqich-o’lja» sistemasining o’zaro munosabat modeli.

8.4_2-maruza. Yirtqich-o`lja modeli

Моделлаштириш услубидан хозирги замон фанида кенг фойдаланилмоқда. У илмий тадқиқот жараёнини енгиллаштиради, баъзи холларда эса мураккаб объектларни ўрганишнинг ягона воситасига айланади. Моделлаштириш услубидан физика, астрономия, биология, иқтисод фанларида объектнинг фақат маълум хусусият ва муносабатларини аниқлашда ҳам фойдаланилади. Математик модаллар ҳаёт хақидаги фанларга ушбу маълумотларни рақамлар кўринишида тақдим этадиган ўлчовлар пайдо бўлганда кира бошлаган.

Бўлиниш модели

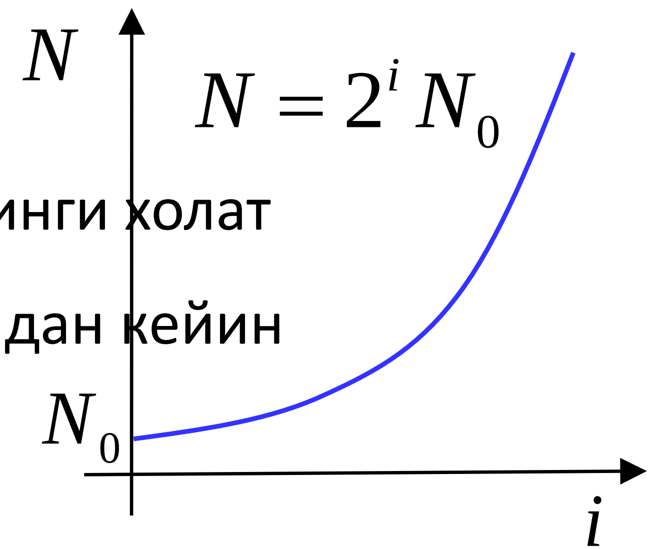


N_0 – бошланғич сони

$N_1 = 2N_0$ – 1-бўлиниш циклидан кейинги холат

$N_2 = 2N_1 = 4N_0$ – 2- бўлиниш циклидан кейин

$N_i = 2N_{i-1} = 2^i N_0$



Моделнинг хусусияти:

1) Ўлим ҳисобга олинмайди
2) Ташқи таъсирлар ҳисобга олинмайди
3) Бошқа турларнинг таъсири ҳисобга олинмайди

Экпоненциал ўсиш модели (Мальтус модели)

Энг таниқли ва содда динамик моделлардан бири таниқли инглиз демографи ва иқтисодчиси Томас Мальтус (1766-1834) томонидан таклиф қилинган модел бўлиб, унга кўра ахолининг назоратсиз ўсиши ер юзида очликка олиб келиши керак.

Чекланмаган ўсиш модели (Т. Мальтус)

$$N_i = N_{i-1} + K_p \cdot N_{i-1} - K_c \cdot N_{i-1}$$

K_p – туғилиш коэффициент

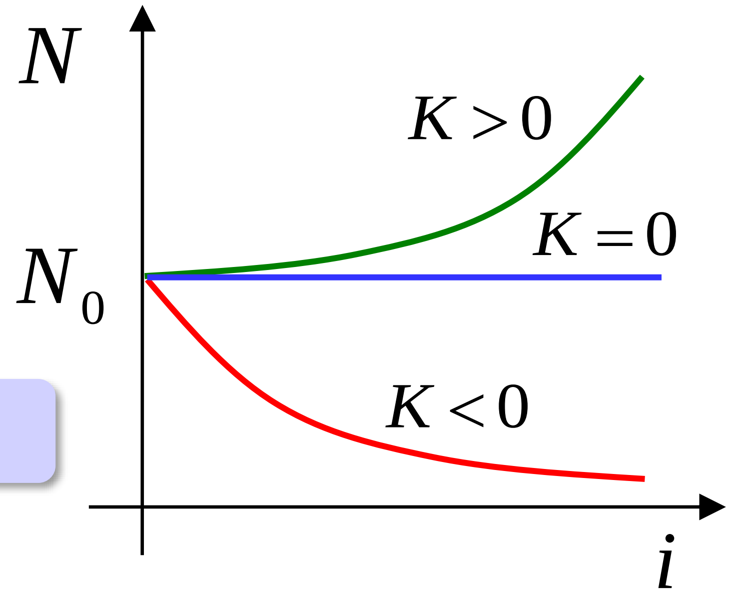
K_c – ўлиш коэффициент

Ортиб бориш коэффициент $\quad K = K_p - K_c$

$$\boxed{N_i = (1+K) \cdot N_{i-1}}$$

$$N_i = N_{i-1} + K \cdot N_{i-1}$$

Ортиб бориш



Моделнинг хусусияти:

1) *N бошланғичлар сонининг таъсири ва K га ташқи мухит таъсири ҳисобга олинмайди*
2) *K га бошқа турларнинг таъсири ҳисобга олинмайди*

Грипп эпидемияси модели

L – жами аҳоли

N_i – i-кунда касаллар сони

Z_i – i-кунда касалланганлар сони

V_i – тузалганлар

W_i – i кунда жами тузалганлар сони

Асосий тенглама:

$$N_i = N_{i-1} + Z_i - V_i$$

Чекланган ўсиш:

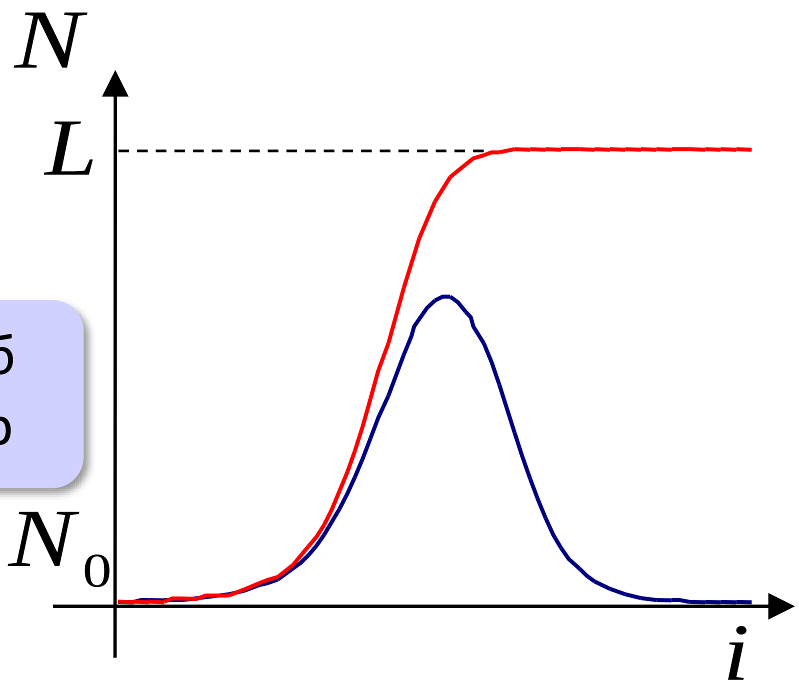
$$Z_i = \frac{L - N_{i-1} - \boxed{W_{i-1}}}{L} \cdot N_{i-1}$$

Касал бўлиб тузалганлар

Тузалиш (7 кундан кейин):

$$V_i = Z_{i-7}$$

$$W_i = W_{i-1} + V_i$$



«Йиртқич-ўлжа» тизими модели

Зоғора балиқ

Чўртан балиқ

$$N_i = \left(1 + K\frac{L - N_{i-1}}{L}\right)\cdot N_{i-1}$$

$$Z_i = (1 - D)\cdot Z_{i-1}$$

Овқатсиз ўлиб кетади

Модель – тизим:

1) Агар учрашишлар сони пропорционал бўлса $N_i \cdot Z_i$
2) «эффект» учрашишлар сони пропорционал бўлса

$$N_i = \left(1 + K\frac{L - N_{i-1}}{L}\right)\cdot N_{i-1} - b_1 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

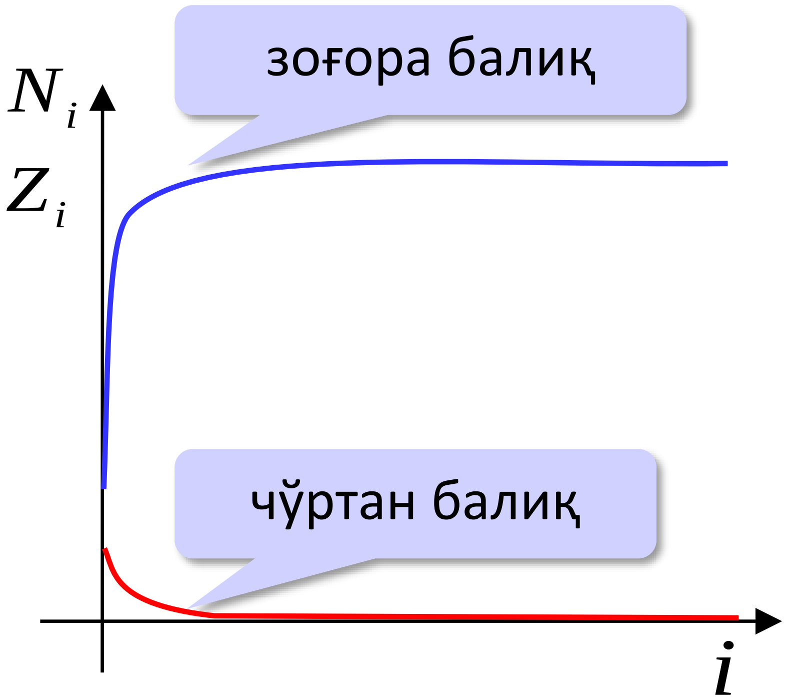
$$Z_i = (1 - D)\cdot Z_{i-1} + b_2 \cdot N_{i-1} \cdot Z_{i-1}$$

Сони камаяди

Сони ўсади

«Йиртқич-ўлжа» тизими модели

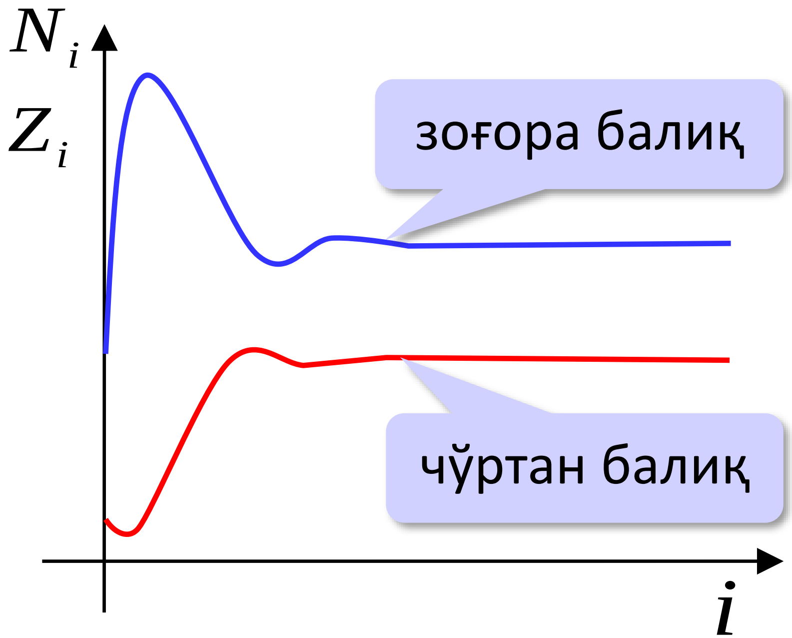
Йиртқичлар ўлиб кетади:



$$d = 0,8$$

$$b_1 = b_2 = 0,005$$

Мувозанат сақланади:



$$d = 0,8$$

$$b_1 = 0,01; \quad b_2 = 0,012$$

Yirqich-o’lja modelini quyidagi tenglamalar sistemasi bilan ifodalash mumkin

$$\frac{dx_1}{dt} = a_1x_1 + b_{12}x_1x_2 - c_1x_1^2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_2x_2 - b_{21}x_1x_2 - c_2x_2^2$$

bu yerda

x_1 – yirtqich populyatsiyasining soni

x_2 – o’lja populyatsiyasining soni.

- 20-аср бошларида америкалик А. Лотка ва италиялик В. Вольтерра бир-биридан мустасно ҳолда йиртқич билан унинг ўлжаси ўртасидаги муносабатларни тавсифлаш учун дифференциал тенглама системасини таклиф этишди. Системадаги иккала компонентнинг ўзгариб туриши (турғунлаштирувчи, камайтирувчи ёки кўпайтирувчи амплитудада) математик модели табиий жамоаларнинг ҳолатини тавсифлашда кенг қўлланилади. Табиатда фақат «йиртқич—ўлжа» системаси билан боғлиқ бўлган соф ҳолдаги ўзгариш кам учрайди; бироқ кўп ҳолларда ўлжанинг сон жиҳатдан ўзгариши йиртқич сонининг ўзгаришига олиб келиши кузатилади.

Лотка, Альфред Джеймс

Alfred James Lotka

Альфред Лотка, 1942 г.

Дата рождения	2 марта 1880[1]
Место рождения	Лемберг, Австро-Венгрия (сейчас Львов, Украина)
Дата смерти	5 декабря 1949[2][3] (69 лет)
Место смерти	Нью-Йорк, Нью-Йорк,

Вито Вольтерра

итал. *Vito Volterra*

Дата рождения	3 мая 1860
Место рождения	Анкона
Дата смерти	11 октября 1940 (80 лет)
Место смерти	Рим
Страна	Италия
Научная сфера	математика, физика
Место работы	Туринский университет, Римский университет
Альма-матер	Флорентийский университет, Пизанский университет
Учёная степень	доктор философии[1] (1882)

Дифференциал тенгламалар системаси қуйидаги кўринишга эга:

$$\frac{dx}{dt} = (\alpha - \beta y)x,$$

$$\frac{dy}{dt} = (-\gamma + \delta x)y,$$

- Йиртқичлар ва ўлжалар тўқнашганда (тўқнашиш частотаси *xy* катталикка пропорционал), ўлжалар *в* коэффициент билан ўлади, қорни тўқ йиртқичлар эса, δ коэффициент билан кўпаяди. Шуларни ҳисобга олган холда, тенгламалар системасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy = (\alpha - \beta y)x \\
\dfrac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy = (\delta x - \gamma)y
\end{cases}
$$

- *x* – ўлжалар (ўтхўрлар) сони;
- *y* – йиртқичлар сони;
- α – ўтхўрларнинг кўпайиш эҳтимоллиги;
- β – ўтхўрлар йиртқичлар томонидан еб тугалланиши эҳтимоллиги;
- γ – йиртқичнинг очликдан ўлиши эҳтимоллиги;
- δ – йиртқичнинг келгусида кўпайиши учун овқатининг етарлилиги эҳтимоллиги.

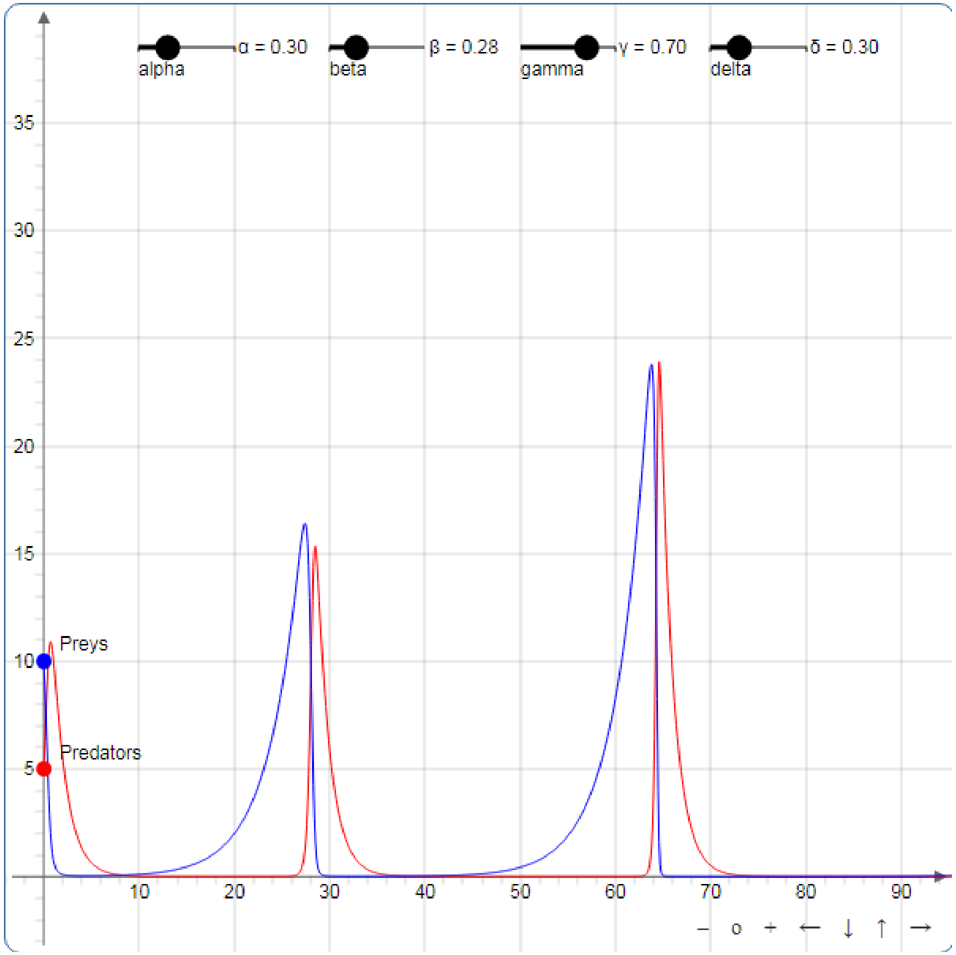
- Тенгламалар системасидан кўриниб турибдики, агар ўлжа йўқ бўлса (x = 0), йиртқичлар қандайдир бошланғич (γ - тенгламада берилганидек), коэффициент билан экспоненциал равишда қирилиб кетиши келиб чиқади.

$$\dot{y} = -\gamma \cdot y \Rightarrow y = C_1 \cdot e^{-\gamma t}, C_1 \in \mathbb{R}$$

$$\dot{x} = \alpha \cdot x \Rightarrow x = C_2 \cdot e^{\alpha \cdot t}, C_2 \in \mathbb{R}$$

- Ўлжалар сони олдиндан берилган қандайдир (α) коэффициент билан экспоненциал ўсади. Шуни таъкидлаш керакки, ушбу моделда бир нечта тахминлар мавжуд:
- Ўтхўрларнинг овқати чекланмаган миқдорда;
- Ўтхўрлар ҳам, йиртқичлар ҳам муҳитдан чиқиб кетмайди;
- Ташқаридан бошқа ҳайвонлар кириб келмайди;
- Ушбу моделда ҳайвонларнинг қарилик ёки бошқа ташқи таъсирлар натижасида ўлиши ҳисобга олинмаган.

Қуйидаги графикларда популяция сонининг берилган бошланғич шартларга боғлиқ равишда ўзгариши кўрсатилган:
Горизонтал ўқда вақт, вертикал ўқда эса – ўлжа популяцияси (кўк рангда) ва йиртқич (қизил рангда) берилган.



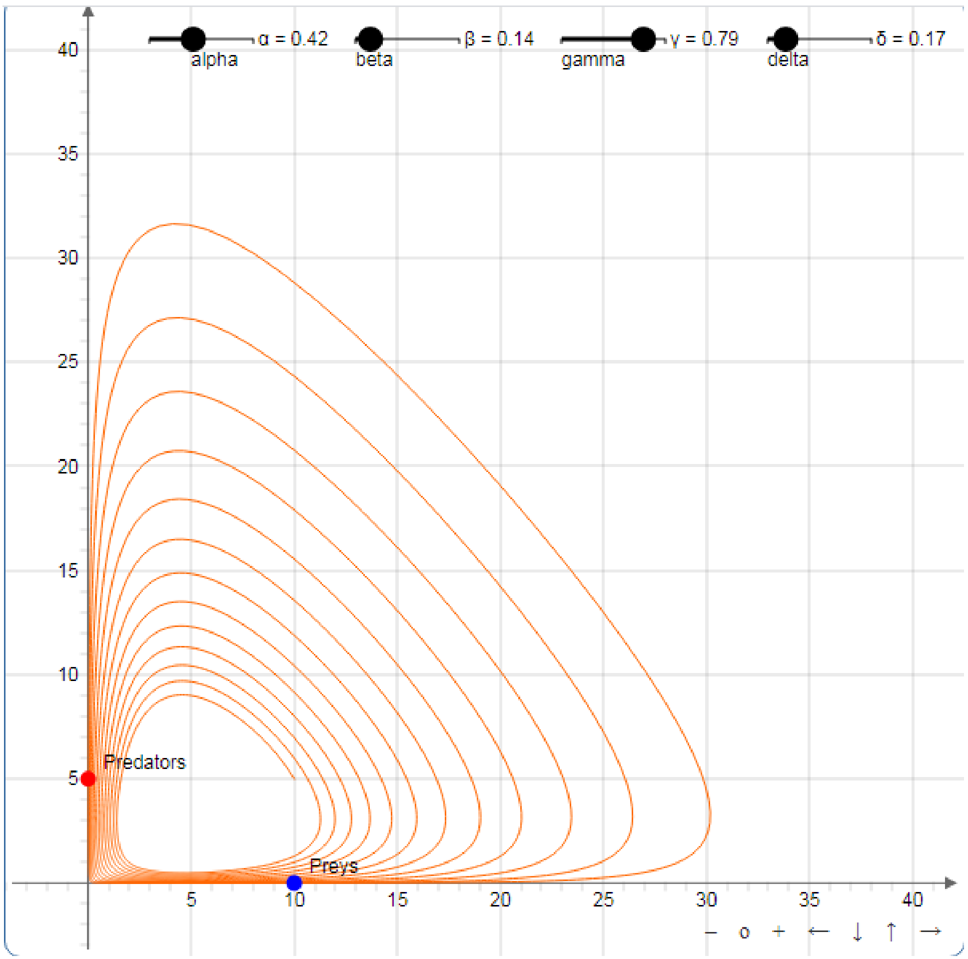
Тенгламалар системасининг махсус нуқталарини аниқлаймиз:

$$\begin{cases} (\alpha - \beta y)\,x = 0 \\ (-\gamma + \delta x)\,y = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \alpha x = \beta x y \\ \gamma y = \delta x y \end{cases} \xrightarrow{x \neq 0,\, y \neq 0} \begin{cases} y(0) = \dfrac{\alpha}{\beta} \\ x(0) = \dfrac{\gamma}{\delta} \end{cases}$$

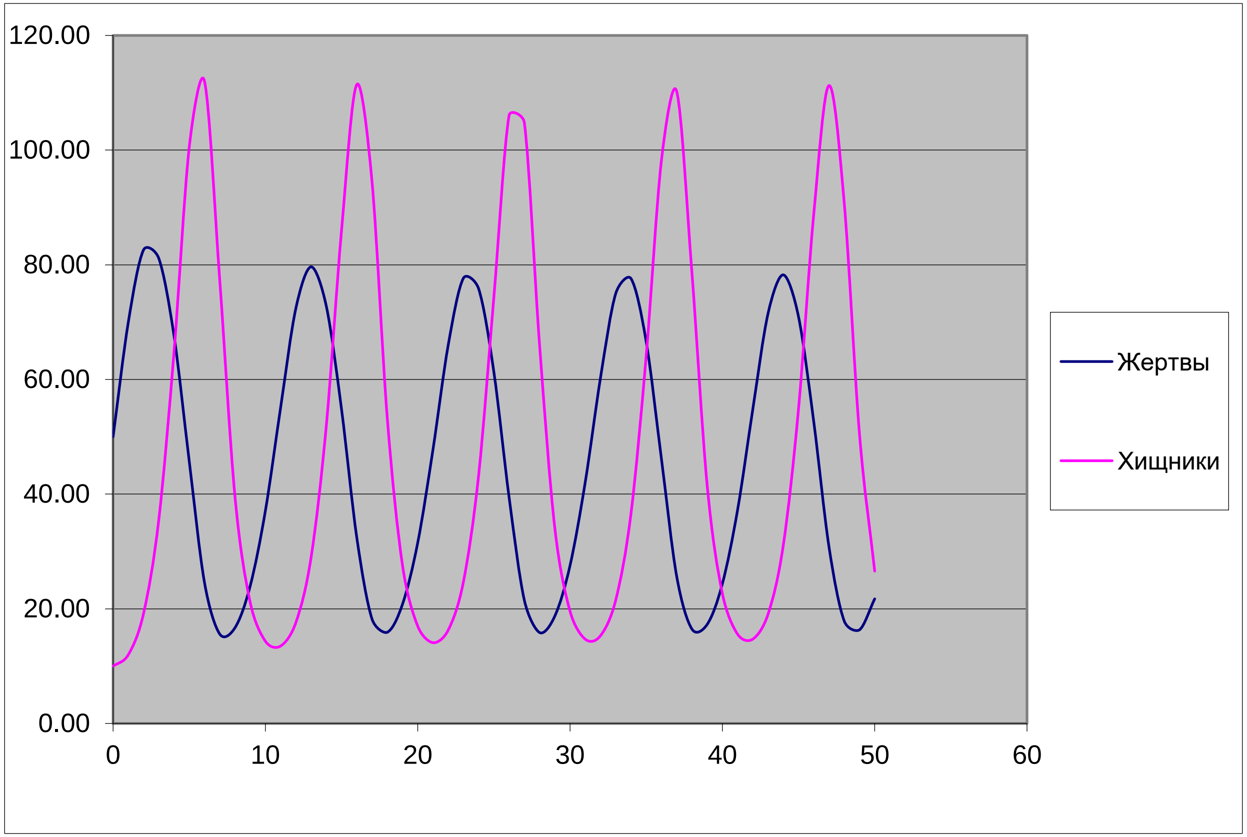
- $x(0) = 0$, $y(0) = 0$ бўлганда, махсус нуқта (0,0) бўлади, лекин бу хол бизни қизиқтирмайди, чунки нолинчи вақтда ҳайвонлар йўқ эди.
- Вақтнинг нолдан фарқли моментларидаги ҳолат қизиқарлироқдир. Бошланғич параметрларга боғлиқ равишда махсус нуқта ҳам ўзгаради – бу иккала популяция сони ўзгармас ва мувозанатда бўлган холдаги популяция ўлчамининг қийматидир.

- Агар бошланғич шарт махсус нуқтага тўғри келмаса, фазовий эгри чизиқлар унинг атрофидан ўтади ва чексиз циклик тебранишларни ҳосил қилади. Бу ҳақида Лотка ва Вольтерра айтиб ўтишган. Бу холда, бир турнинг ҳайвонлари сони кўпаяди, иккинчиси – камаяди, кейин аксинча ва чексиз вақт давомида (албатта, оқилона чегара доирасида).

Горизонтал ўқда ўлжа популяциясининг миқдори, вертикал ўқда – йиртқичлар сони

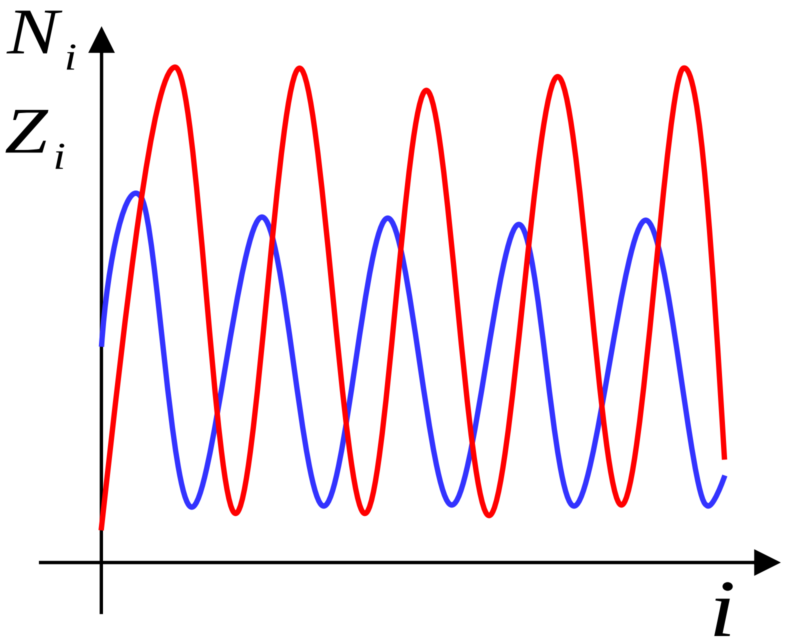


«Йиртқич-ўлжа» тизими модели



«Йиртқич-ўлжа» тизими модели

Тебраниш:



$$d = 0{,}8$$

$$b_1 = 0{,}01; \;\; b_2 = 0{,}015$$

- Такрорлаш учун саволлар:
- Икки популяциянинг ўзаро муносабати қандай моделлаштирилади?
- Йиртқич-ўлжа моделини тушунтиринг.
- Лотка ва Вольтерра моделида қандай тахминлар қилинган?

ЭЪТИБОРИНГИЗ УЧУН РАХМАТ!

8.4.MA`RUZA

«Yirtqich-o'lja» sistemasining o'zaro munosabat modeli

I.N.Tojimamatov

Yirtqich-o‘lja sistemasi o‘zaro munosabati modeli

- Populyasiya soni dinamikasi, ya’ni o‘lja sonining o‘zgarishi yirtqichlar sonining o‘zgarishiga olib keladi. Populyasiya o‘zaro munosabatda yashaydi. Ikki turdagi yirtqich-o‘lja sistemasi quyidagi xollarga asoslanadi:

1. O‘ljaning rivojlanish soni N va yirtqich soni M faqat vaqtning funksiyalari bo‘lsin, ya’ni M(t), N(t)
2. Agar o‘zaro munosabat yo‘q bo‘lsa, ularning sonining Mal’tuz modeli o‘zgaradi, bunda yirtqich kamayadi o‘lja ko‘payadi.

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N, \qquad \frac{dM}{dt} = -\beta M, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

Yirtqich-o‘lja sistemasi o‘zaro munosabati modeli

- 3. Tabiiy o‘zgarishlar yo‘q deb faraz qiladi.
  4. O‘lja sonining o‘sish tezligi proporsional ravishda yirtqich sonining o‘sishi bilan o‘sadi, ya’ni CM katta, C>0
  Yirtqich sonining o‘sish tempi o‘lja soni bilin proporsional o‘sadi, ya’ni bN, b>0, u xolda quyidagi Vol’ter tenglamalar sistemasi xos bo‘ladi.

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = (\alpha - CM)N \\ \dfrac{dM}{dt} = (-\beta + bN)M \end{cases}$$

Boshlang`ich holatda

- Boshlang‘ich xolatda: (1) $N(0)=N_0$ $M(0)=M_0$ populyasiya sonini vaqtni xar xil momentiga aniqlash mumkin.
- 1. Sistemani tekshirish uchun, 1-tenglamani 2-tenglamaga bo‘lamiz:

$$\frac{dN}{dM}=\frac{(\alpha-CM)N}{(-\beta+bN)M}$$

$$M_0=\frac{\alpha}{C} \qquad N_0=\frac{\beta}{b}$$

larda (1) va (2) tenglamalar muvozanat xolatlaridi bo`ladi. (vaqtga bog`liq bo`lmaydi)

2. Tenglamani quyidagi xolga keltiramiz:

$$dN(-\beta+bN)M = dM(\alpha-CM)N$$

2 tomonini NM ga bo‘lib chap tomonga o‘tkazib, quyidagini xosil qilamiz:

$$\frac{-\beta dNM}{NM}+dN\frac{bNM}{NM}-\alpha\frac{dMN}{MN}+dMC\frac{NM}{NM}=0$$

$$-\beta\frac{dN}{N}+bdN-\alpha\frac{dM}{M}+CdM=0$$

$$\beta\frac{dN}{N}-bdN+\alpha\frac{dM}{m}-CdM=0$$

(3) ni Integrallab quyidagini xosil qilamiz:

$$\beta \ln N - bN + \alpha \ln M - CM = const,$$

bu erda konstanta dastlabki N_0 va M_0 xolatlar bo‘yicha aniqlanadi.
Demak, (1) sistema

$$\ln N^{\beta} + \ln e^{-bn} + \ln M^{\alpha} + \ln e^{-CM} = C_1$$

echimga ega bo‘ladi,

yoki bu erdan $N^{\beta} e^{-bn} = C_1 M^{\alpha} e^{-CM}, C_1 > 0$

ni olamiz (4) dan quyidagi xulosa qilish mumkin:

1. Agar $N(0)=N_0$ $M(0)=M_0$ boshlang‘ich xolatda bo‘lsa, populyasiyalar soni vaqtning xar qaysi holatida o‘zgarmaydi.
2. O‘lja va yirtqichlar sonining muvozanat xolatidan kichik cheklanishlarida vaqt o‘tishi bilan o‘z muvozanat xalatiga qaytmaydi.
3. Muvozanat xolatidan cheklanish katta bo‘lsa, N(t) va M(t) funksiyalar uchun sistemaning o‘zgarish vaqt o‘tishi bilan muvozanat xolatiga qaytmaydi.

O‘lja va yirtqichning populatsiyalar sonlari muvozanat xolati atrofida davriy tebranishlarn hosil qilishni bildiradi, bunda tebranish amplitudasi bir-biriga qarama qarshi fazoalrda joylashadi.

Tebranishlar 2 xil ko‘rinishdagi populayasion sistemalarda juda murakab jarayonlar paydo bo‘lishini bildiradi.

Masalan: O‘lja populyasiyasining to‘yinishni xisobga olgan xolda logistik hat paydo bo‘ladi va u quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$\frac{dN}{dt} = (\alpha - CM - bN)N.$$

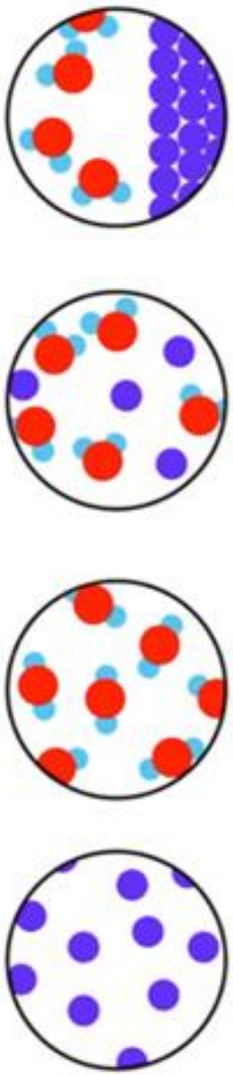
Muvozanat holatida atrofida bo�much lgan holalrda troektorilar spiral ko‘rinishida bo‘ladi, tebranishlar amplutudasi vaqt o‘tishi bilan kamayib boradi.

Modda va energiya muvozanatining modeli. Epidemiya modeli.

8.8-maruza

Reja

1. Модда тушунчаси
2. Энергия тушунчаси
3. Модда ва энергия мувозанатини математик модели
4. Эпидемия модели



Модда тушунчаси

Модда — тинч ҳолатда массага эга бўлган зарралар мажмуидир.

Умумий тинч холдаги массаси нолга тенг бўлмаган элементар зарралар (асосан, электрон, proton ва нейтрон) модда деб аталади ва улар газ, суюқлик, қаттиқ жисм ва плазма ҳолида бўлади.

Модда — материянинг асосий шаклларидан бири. Квант механикаси, электродинамика ва элементар зарралар физикаси тараққиёти натижасида физик реалликнинг моддадан бошқа шаклда — майдон шаклида бўлиши ҳам аниқланди.

Кимёда моддани бир кимёвий элемент атомларидан иборат оддий ва кимёвий бирикмалардан тузилган мураккаб моддаларга бўлиш қабул қилинган.

Модда тушунчаси

Моддалар 4 хил ҳолатда бўлади. Улар қаттиқ жисм, суюқлик, газ ва плазма холатида бўлади.

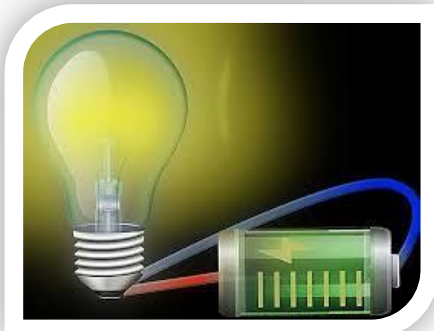
Қаттиқ жисм

Суюқлик

Газ

Плазма

Энергия тушунчаси



Энергия (қадимги юнонча: ἐνέργεια) физик тизимнинг бошқа физик тизимларга нисбатан иш бажара олиш қобилиятидидир. Ёки қобилялар сонидир

Энергия (юн.— ҳаракат, фаолият) — ҳар қандай кўринишдаги материя, хусусан, жисм ёки жисмлар тизимини ташкил этувчи зарралар ҳаракатининг ҳамда бу зарраларнинг ўзаро ва бошқалар зарралар билан таъсирларининг миқдорий ўлчовидир.

Халқаро бирликлар тизимида энергия худди иш ка би жоулда; атом физикаси, ядро физикаси ва элеме нтар зарралар физикасида жса електроволтда ўлча нади.

Энергия йўқдан бор бўлмайди ва мавжуд энергия йўқолмайди, фақат у бир турдан иккинчи турга ўтади

Модда ва энергия мувозанатини моделлаштириш масаласи

- Энг қулай шароитларда ҳам дарахтнинг ўсиши маълум бир чегарадан ошмаслиги барчага маълум. Шу сабабли нима учун аксарият ҳамма дарахтлар қанақа бўлишидан қатъий назар, аввалига тез ўсиб, маълум бир вақтдан кейин дарахтнинг ўсиши секинлашади ва ниҳоят умуман ўсишдан тўхтаб қолади?
- Бу саволга жавоб бериш учун модда ва энергия мувозанатини ифодалайдиган математик моделни таҳлил қиламиз.

Модда ва энергия мувозанатини ифодалайдиган математик модель қуйидаги фаразларга асосланган:

1-ФАРАЗ

Етуклик ёшидаги дарахт ўсиш жараёнида геометрик ўхшашликни сақлаб қолади. Яъни, етуклик ёшидаги дарахтнинг ўсиши давомида унинг геометрик ўлчамларининг нисбати, масалан, баландликнинг диаметрга нисбати ўзгармасдан қолади.

$$\left(h/d = const\right)$$

2-ФАРАЗ

Дарахт эркин энергияни (дарахт учун зарур бўлган моддани) фақатгина фо тосинтез жараёни сабабли олади.

3-ФАРАЗ

Эркин энергия фотосинтезга, тирик т анани шакллантириш (ўсиш) ва эрит мани тупроқдан кўтариш учун сарф б ўлади.

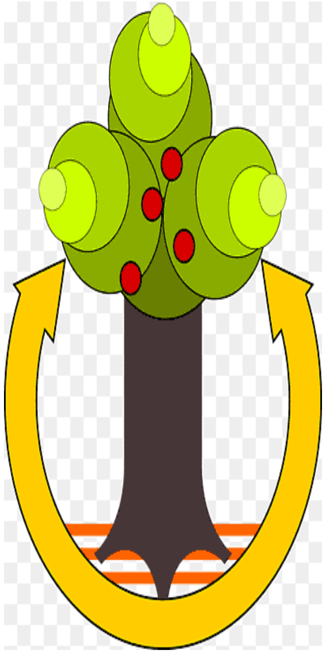
Модда ва энергия мувозанатини ифодалайдиган математик модель қуйидаги фаразларга асосланган:

4-ФАРАЗ

Дарахт катта вақт оралиқларида тана сининг бирлик юзасига тўғри келувч и ўзгармас миқдордаги ёруғликни ол ади (кунлик ва мавсумий тебранишл арни ҳисобга олмаган ҳолда) ва тупр оқдаги чегараланмаган заҳирадан ке ракли моддаларни ютади.

Модда ва энергия мувозанати математик модель

x билан дарахтнинг баландлиги белгиланса, 1-фаразга кўра, барглар сатҳининг юзаси x^2 га, ўсимлик ҳажми эса x^3 катталикка пропорционал бўлади. Маълумки, дарахтнинг баландлиги x вақт ўтиши билан ўзгаради, яъни $x = x(t)$.



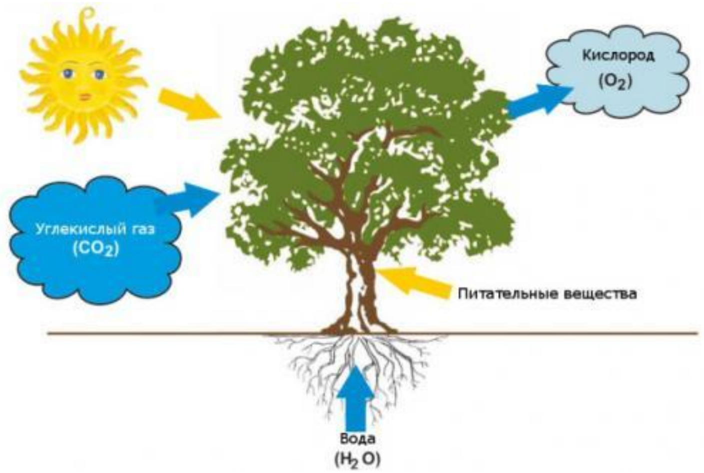
$$E = \alpha x^2$$

Бу ерда α - пропорционаллик коэффициенти (у баргларнинг ўлчами ва шаклига боғлиқ бўлиб, конкрет дарахт учун уни ўзгармас деб ҳисоблаш мумкин).

Модда ва энергия мувозанати математик модель

Энергиянинг бу сарфи x^2 га боғлиқ бўлиб, уни βx^2 билан ифодалаш мумкин (β коэффициент α дан кичик бўлган пропорционаллик коэффициенти).

Бу энергия сарфи x^3 ҳажмга ва x баландликка боғлиқ бўлганлиги сабабли бу энергия сарфини ҳажм ва баландликларнинг кўпайтмаси, яъни $\gamma x^3 x$ га пропорционал деб ҳисоблаш мумкин.



Модда ва энергия мувозанати математик модель

($m = \rho x^3$, бу ерда ρ - дарахтнинг ўртача зичлиги, x^3 – дарахт ҳажми). Демак, ушбу энергия сарфини қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$\delta \frac{d}{dt}\left(\rho x^3\right),$$

бу ерда δ – пропорционаллик коэффициенти.

Модда ва энергия мувозанати математик модель

Энергиянинг сақланиш қонунига кўра ихтиёрий вақтдаги сарф бўлган энергиялар йиғиндиси энергиянинг бошланғич миқдорига (дарахт мисолида энергиянинг сарф бўлиши энергиянинг келиб тушишига) тенг бўлиши керак:

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + \delta \frac{d}{dt}\left(\rho x^3\right)$$

ёки

$$\alpha x^2 = \beta x^2 + \gamma x^4 + 3\delta\rho x^2 \frac{dx}{dt}. \qquad (1)$$

Модда ва энергия мувозанати математик модель

Бу математик модель $x(t)$ га нисбатан дифференциал тенгламани ифодалайди ва у И.А.Полетаев томонидан таклиф этилган. Ушбу тенгламани ҳар икки томонини $3\delta\rho x^2 \neq 0$ ифодага бўлиб,

$$a = \frac{\alpha - \beta}{3\delta\rho} > 0, \quad b = \frac{\gamma}{3\delta\rho} > 0$$

белгилашлар киритилгандан сўнг уни қуйидаги кўринишга келтириш мумкин:

$$\frac{dx}{dt} = a - bx^2, \quad x(0) \approx 0 \qquad (2)$$

муносабатларга эга бўлиш мумкин.

Дарахт ўсиб бораётганлиги сабабли $dx/dt > 0$, яъни $a - bx^2 > 0$. Демак, $x^2 < a/b$.

Модда ва энергия мувозанати математик модель

Дарахт ўсиб бораётганлиги сабабли $dx/dt > 0$, яъни $a - bx^2 > 0$.

Демак, $x^2 < a/b$.

(2) дифференциал тенгламани интеграллаб, қуйидагига эга бўлиш мумкин:

$$ln \frac{\sqrt{\frac{a}{b}} + x}{\sqrt{\frac{a}{b}} - x} = 2\sqrt{ab}\,(t - t_0)$$

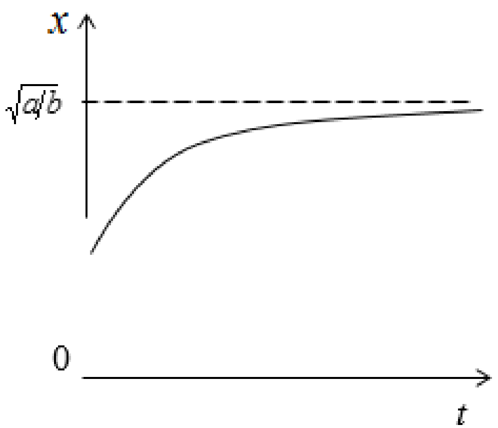
Бу муносабатдан дарахт баландлигини аниқлаш мумкин:

$$x(t) = \sqrt{\frac{a}{b}}\,\frac{1 - e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}{1 + e^{-2\sqrt{ab}(t-t_0)}}. \qquad (3)$$

Модда ва энергия мувозанати математик модель

Агарда a ва b коэффициентлар маълум бўлса (улар дарахтнинг турига боғлиқ бўлади), у ҳолда ушбу формула бўйича берилган турдаги дарахтнинг ёшига қараб ўртача ўсишини аниқлаш мумкин. Модель реал тажрибаларда синовдан ўтказилган. Тажриба натижалари моделнинг адекватлигини, моделни ҳосил қилишда юқорида келтирилган фаразлар ҳақиқатга зид эмаслигини кўрсатди.

(3) формула бўйича дарахтнинг вақт бўйича ўсиши



графикда келтирилган

Reklama kompaniyasini tashkillashtirish. Korxonalar o'zaro qarzlarini bartaraf etish.

8.9-maruza

I.N.Tojimamatov

Reja

1. Reklama kompaniyasini tashkillashtirish
2. Korxonalar o’zaro qarzlarini bartaraf etishi

Reklama kompaniyasini tashkillashtirish

1-режа

Фараз қилайлик, фирма янги товари ёки хизматини реклама қилишни режалаштирмоқда. Иш бошланишида янгиликдан истеъмолчиларнинг озгина қисми хабордорлиги сабабли рекламага сарф этиладиган харажатлар реклама компанияси оладиган фойдага нисбатан кўпроқ бўлиши мумкин.

Кейинчалик, вақт ўтиши билан истеъмолчилар сонини ошиши туфайли сезиларли фойдага умид қилиш мумкин. Шундай вақт моменти келадики, бу вақтда фирма янги товари ёки хизмати тури билан истеъмолчилар бозори тўйинган бўлади ва энди товарни ёки хизматни реклама қилиш маънога эга бўлмай қолади.

Бундан кейин мавзуни баён қилишда товар ёки хизмат тури иборалари ўрнига қулайлик учун фақат товар сўзидан фойдаланамиз.

РЕКЛАМА КОМПАНИЯСИНИ ТАШКИЛЛАШТИРИШ

Реклама компаниясининг математик моделини тузишда қуйидаги белгилашлардан фойдаланилади:

t - реклама компанияси бошланганидан кузатувгача бўлган вақт;

$N(t)$ - фирма товаридан хабордор мижоз ёки истеъмолчиларнинг t вақтдаги сони;

N_0 - фирма товарига пул тўлаши мумкин бўлган харидорларнинг умумий сони.

РЕКЛАМА КОМПАНИЯСИНИ ТАШКИЛЛАШТИРИШ

Математик моделни қуриш қуйидаги асосий фаразлари:

Товар ҳақида хабордор бўлган ва уларни сотиб олишга қурби етган истеъмолчилар сонининг вақт бўйича ўзгариш тезлиги dN/dt товар ҳақида хабари бўлмаган харидорлар сони $\alpha_1(t)(N_0 - N(t))$ га пропорционал.

Бу ерда $\alpha_1(t) > 0$ - реклама компанияси ишини жадаллиги (ушбу вақт моментида рекламага сарф этилган харажатлар) ни англатади.

Шунингдек, товар ҳақида хабардор бўлган харидорлар товар ҳақида хабардор бўлмаган харидорларга у ёки бу тарзда товар ҳақида ахборот тарқатиб, фирмани қўшимча реклама агенти сифатида иштирок этади деб фараз қилинади. Уларнинг улуши $\alpha_2(t)N(t)(N_0 - N(t))$ миқдорга тенг бўлиб, агентлар сони ошиши билан бу миқдор ҳам ошиб боради. $\alpha_2(t) > 0$ миқдор харидорлар ўртасидаги ўзаро муомала (ахборот алмашиш) даражасини характерлайди (бу миқдорни қиймати, масалан, сўровнома ўтказиш йўли билан ҳам аниқланиши мумкин).

РЕКЛАМА КОМПАНИЯСИНИ ТАШКИЛЛАШТИРИШ

Математик модели

Юқоридаги фаразларга асосан реклама компаниясининг математик модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\frac{dN}{dt} = [\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)](N_0 - N). \qquad (1)$$

Агар $\alpha_1(t) >> \alpha_2(t)N(t)$ бўлса, (1) моделдан Мальтус типидаги моделга эга бўлиш мумкин, аксинча тенгсизликда популяциянинг қуйидаги моделини ҳосил қилиш мумкин:

$$\frac{dN}{d\tau} = N(N_0 - N), \qquad d\tau = \alpha_2(t)dt.$$

РЕКЛАМА КОМПАНИЯСИНИ ТАШКИЛЛАШТИРИШ

Математик модели

Ушбу моделни ва популяция моделини тузишда қандайдир миқдорнинг вақт бўйича ўсиш тезлиги ушбу миқдорнинг жорий вақтдаги $N(t)$ қийматини мувозанат ҳолати (популяцияда) дагидан ёки харидорларнинг максимал қийматидан жорий вақтдаги $N(t)$ қийматини айирмаси - $N_0 - N(t)$ кўпайтмасига пропорционал деган фаразга таянилган эди. Шу сабабли уларни анологиясидан фойдаланиш мумкин. Агар $\alpha_1(t) + \alpha_2(t)N(t)$ миқдор вақтнинг кандайдир моментида нолга тенглашса ёки манфий қийматга эга бўлса (бунинг учун $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ коэффициентларнинг бирортаси ёки иккаласи хам манфий ишорага эга бўлиши лозим) ушбу жараёнлар ўртасидаги аналогия тугайди. Шунга ўхшаш негатив ҳолатлар турли реклама компанияларида тез-тез учраб туради. Бундай ҳолларда рекламани характерини ўзгартириш ёки бўлмаса рекламадан бутунлай воз кечиш лозим бўлади. Товарни оммавийлигини ошириш тадбири $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$, $N(t)$ миқдорларни қийматларига боғлиқ ҳолда тўғридан-тўғри ($\alpha_1(t)$ параметр) ёки иккиламчи тарзда ($\alpha_2(t)$ параметр) реклама натижасини яхшилашга йўналтирилиши мумкин.

РЕКЛАМА КОМПАНИЯСИНИ ТАШКИЛЛАШТИРИШ

Математик модели

(1) математик модель чекли вақт моментларида нолга айланадиган ечимларга эга эмас. Популяция сонини вақт бўйича ўзгаришидан маълумки, $t \to -\infty$ да $N(t) \to 0$. Реклама компаниясига нисбатан бу нарса шуни англатадики, реклама бошланишидан олдинроқ харидорларнинг бир қисми янги товардан хабардор бўлишган.

Агар $N << N_0$, $\alpha_2(t)N << \alpha_1(t)$ деб ҳисоблаб, (1) математик моделни $N(t=0) = N(0) = 0$ ($t = 0$ - рекламани бошланиш вақти) нуқта атрофида қарайдиган бўлсак, (1) тенглама қуйидаги кўринишга келади:

$$\frac{dN}{dt} = \alpha_1(t) N_0$$

ва у $t = 0$ даги бошланғич шартни қаноатлантирувчи

$$N(t) = N_0 \int_0^t \alpha_1(t) dt \qquad (2)$$

ечимга эга.

РЕКЛАМА КОМПАНИЯСИНИ ТАШКИЛЛАШТИРИШ

Математик модели

Энди, битта товардан тушадиган фойдани p оркали белгилаймиз. Соддалик учун ҳар бир харидор фақатгина битта товар сотиб олсин деб ҳисоблаймиз. Маълумки, $\alpha_1(t)$ коэффициент маъноси бўйича реклама учун вақт бирлиги ичида қилинадиган ҳаракатлар сонига тенг (масалан, бир турдаги афишаларни елимлаш). s оркали элементар реклама ҳаракатининг нархини белгилаймиз. У ҳолда жами фойда қуйидагига тенг бўлади:

$$P = pN(t) = pN_0 \int_0^t \alpha_1(t)dt\,, \qquad (3)$$

сарф қилинган харажатлар эса

$$S = s\int_0^t \alpha_1(t)dt\,.$$

РЕКЛАМА КОМПАНИЯСИНИ ТАШКИЛЛАШТИРИШ

Математик модели

Кўриниб турибдики, $pN_0 > s$ бўлгандагина фойда харажатларга нисбатан юқори бўлади. Жуда самарали бўлмаган ёки қиммат рекламадан фирма биринчи қадамидаёқ камомадга учрайди. Аммо, бу ҳолат рекламани тўхтатиш учун асос бўла олмайди. Ҳақиқатдан ҳам (3) ифода ва $pN_0 > s$ шарт фақатгина $N(t)$ нинг кичик қийматларида ҳамда P ва S вақт бўйича бир хил қонуният асосида ўсиб борсагина ўринли бўлади. $N(t)$ нинг ўсиши билан (1) формулада ташлаб юборилган ҳадлар сезиларли қийматларга эга бўлади, хусусан иккиламчи рекламанинг таъсири кучаяди. Шунинг учун $N(t)$ функция (3) формуладагига нисбатан вақт бўйича тез ўсувчи функция бўлиб қолиши мумкин. $N(t)$ миқдорнинг ўзгаришидаги бу чизиқсиз эффект харажатларнинг ўзгармас темпда ўсишида реклама компаниясининг бошланғич босқичидаги молиявий муваффақиятсизлигини компенсация қилиш имконини беради.

РЕКЛАМА КОМПАНИЯСИНИ ТАШКИЛЛАШТИРИШ

Математик модели

Ушбу тасдиқни (1) тенгламанинг хусусий ҳоли, яъни $\alpha_1(t)$, $\alpha_2(t)$ коэффициентлар ўзгармас бўлганда изоҳлаймиз. Қуйидаги

$$\bar{N} = \alpha_1 / \alpha_2 + N$$

белгилаш оркали (1) тенглама

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \alpha_2 \bar{N}(\bar{N}_0 - \bar{N}), \qquad \bar{N}_0 = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} + N_0 \qquad (4)$$

кўринишга келади. Ушбу тенгламани ечими қуйидагидан иборат:

$$\bar{N}(t) = \left[1 + (\bar{N}_0\, \alpha_2 / \alpha_1 - 1) \cdot \exp(-\alpha_2 t \bar{N}_0)\right]^{-1}. \qquad (5)$$

Бунда $\bar{N}_0 = \alpha_1 / \alpha_2$. Шундай қилиб, $N(0) = 0$, яъни бошланғич шарт бажарилмоқда. (4) дан кўриниб турибдики, $\bar{N}(t)$ функциянинг ҳосиласи, хусуан $N(t)$ функция $t > 0$ бўлганда бошланғич қийматларидан катта бўлиши мумкин ($\bar{N}_0 > 2\alpha_1 / \alpha_2$ ёки $N_0 > \alpha_1 / \alpha_2$ шартларда). $\bar{N} = \bar{N}_0 / 2$, $N = (\alpha_1 / \alpha_2 + N_0) / 2$ қийматларда $\bar{N}(t)$ функциянинг ҳосиласи максимумга эришади:

$$\left(\frac{d\bar{N}}{dt}\right)_m = \left(\frac{dN}{dt}\right)_m = \alpha_2 \frac{\bar{N}_0^{\,2}}{4} = \alpha_2 \frac{(\alpha_1 / \alpha_2 + N_0)^2}{4}.$$

Бу вақтга келиб вақт бирлиги ичида олинадиган жорий фойда қуйидагига тенг:

$$P_m = p \frac{dN}{dt} = p\alpha_2 \frac{(\alpha_1 / \alpha_2 + N_0)^2}{4}.$$

P_m ж$_{\text{орий}}$й фойдадан бошланғич жорий фойда $P_0 = p(dN/dt)_{t=0} = \alpha_1 N_0$ ни айириб, қуйидагига эга бўлиш мумкин:

$$P_m - P_0 = p \frac{(\alpha_1 / \sqrt{\alpha_2} - \sqrt{\alpha_2} N_0)^2}{4}.$$

Бундан кўриниб турибдики, бошланғич жорий фойда ва максимал жорий фойданинг фарқи етарли даражада сезиларли бўлиши мумкин.

РЕКЛАМА КОМПАНИЯСИНИ ТАШКИЛЛАШТИРИШ

Математик модели

(4) тенгламадан яна шуни таъкидлаш мумкинки, қандайдир вақтдан бошлаб рекламани давом эттириш фойдасиз бўлиб қолади. Ҳақиқатдан ҳам, $\bar{N}(t)$ нинг N_0 га яқин қийматларида (4) тенгламани

$$\frac{d\bar{N}}{dt} = \alpha_2 N_0 (\bar{N}_0 - \bar{N}) \qquad (6)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенгламанинг ечими $t \to \infty$да секин экспоненциал қонун бўйича $\bar{N}_0$ чекли қийматга ($N(t)$ функция эса N_0 га) интилади. Вақт бирлиги ичида унча кўп бўлмаган сондаги янги харидорлар пайдо бўлади ва товарни сотишдан тушаётган фойда ихтиёрий шартларда ҳам давом этаётган харажатларни қопламай қолади.

Korxonalar o'zaro qarzlarini bartaraf etishi

Free PPT Templates - Standard (4:3)

This PowerPoint Template has clean and neutral design that can be adapted to any content and meets various market segments. With this many slides you are able to make a complete PowerPoint Presentation that best suit your needs.

This PowerPoint Template has clean and neutral design that can be adapted to any content and meets various market segments. With this many slides you are able to make a complete PowerPoint Presentation that best suit your needs.

This PowerPoint Template has clean and neutral design that can be adapted to any content and meets various market segments. With this many slides you are able to make a complete PowerPoint Presentation that best suit your needs.

This PowerPoint Template has clean and neutral design that can be adapted to any content and meets various market segments.

Bozor iqtisodiyoti muvozanatining makromodeli

8.10-maruza

Mazkur mavzuni bayon etishdan awal bozor, bozor muvozanati, narx, muvozanat narxi va boshqa tushunchalami keltiramiz

Tovar — bozorda oldi-sotdi orqali ayirboshlanadigan mehnat mahsuli. Tovar shunday mahsulotki, u o‘zini ishlab chiqaruvchilarning emas, balki boshqalaming talab-ehtiyojini qondirish uchun yaratiladi. Shu sababli u ayirboshlanadi.

<u>Tovar qiymati — tovar ishlab chiqaruvchilaming tovarda gavdalangan va unda moddiylashgan ijtimoiy-zaruriy mehnati miqdoridan iborat</u>

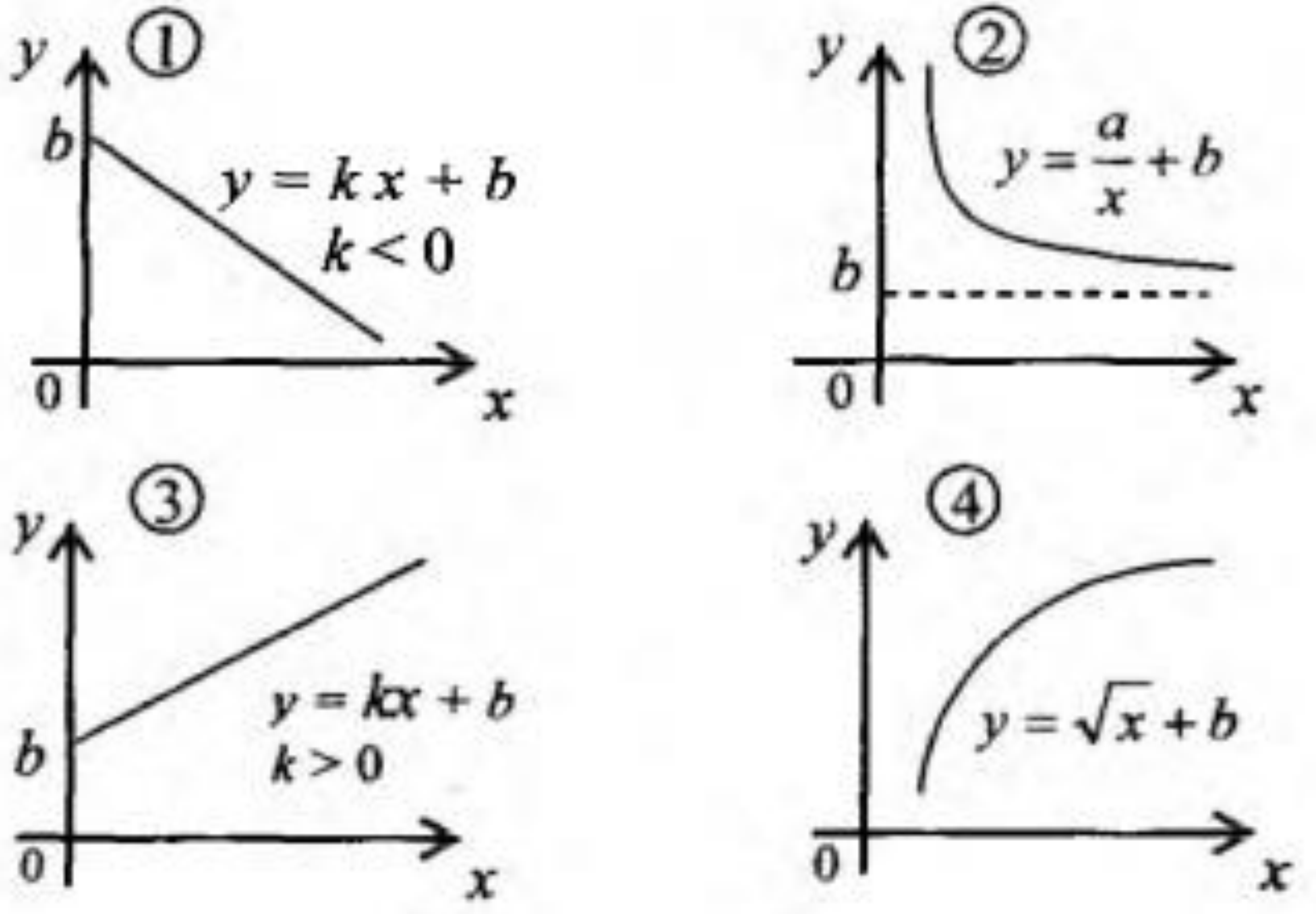
Narx - tovar qiymatining pul shakli. Bozor iqtisodiyotida ikki xil narx amal qiladi: 1) erkin bozor narxlari; 2) davlat boshqarib turadigan narxlar. Ammo birinchi turdagi narxlar asosiy boiadi. Ikkinchi turdagi narxlar o‘z navbatida ikkiga bolinadi: a) davlat belgilagan qat’iy naixlar; b) davlat yuqori chegarasini belgilagan va undan oshib ketmaydigan narxlar - limit narxlari.

Bozor — sotuvchi bilan xaridor o‘rtasida tovami pulga ayirboshlash munosabati. Tovarlar bilan oldi-sotdi munosabatlari tovar ishlab chiqarish, tovar ayirboshlash va pul muomalasi qonunlariga binoan amalga oshiriladi

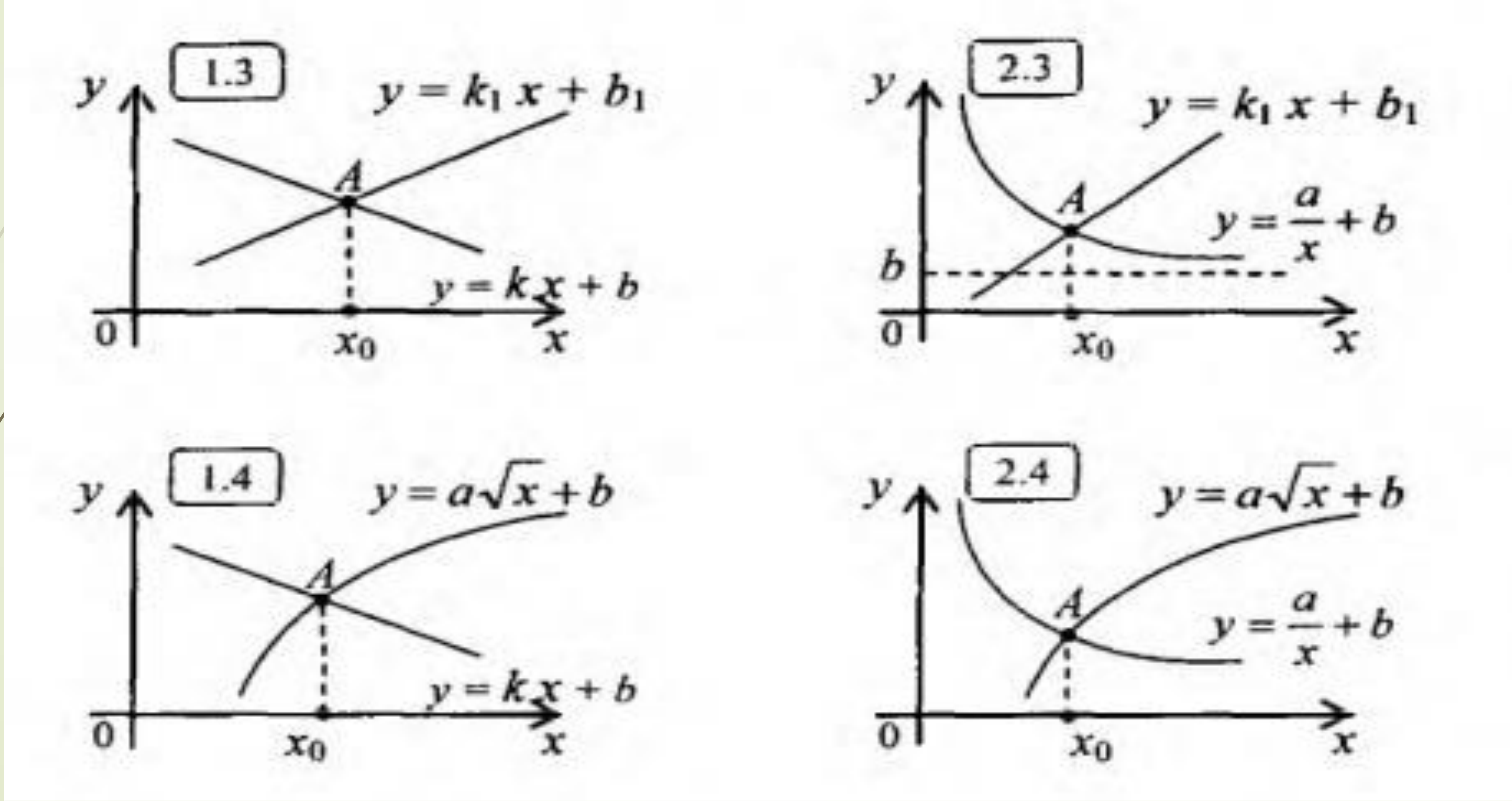
Bozor muvozanati — bozordagi talab va takliflaming miqdor va tarkibiy jihatidan bir-biriga muvofiq kelishi.

Muvozanat narxi — bozor muvozanati sharoitida talab va taklifga tegishli narxlarning ustma-ust tushishi.

Bozor muvozanati va muvozanat narxini hisob-kitob qilish uchun chiziqli va chiziqsiz talab funksiyalari, chiziqli va chiziqsiz taklif funksiyalari graflklarini chizamiz:


①
y
b
$y = kx + b$
$k < 0$
0
x
②
y
$y = \frac{a}{x} + b$
b
0
x
③
y
b
$y = kx + b$
$k > 0$
0
x
④
y
$y = \sqrt{x} + b$
0
x

Bozor muvozanati nuqtasini, muvozanat narxini topish uchun l)-3), l)-4) va 2)-3), 2)-4) hollami birgalikda ko‘rish lozim. Bu hollarga mos chizmalarni keltiramiz.



Yuqoridagi chizmalarda $A(x_0,y_0)$ — bozor muvozanati nutqasi (egar nuqtasi), muvozanat narxi deyiladi. Har bir holda $x_0$ni topish uchun talab chizig‘i va taklif chizig‘i tenglamalari sistemasini yechish kerak bo‘ladi.

1-misol. Avval talab funksiyasini quramiz. Statistik ma'lumotlar quyidagicha bo'lsin.

x	4	9
y	30	20

a) $y = kx + b$ bo'lsa, a va b lar

$$\begin{cases} 30 = 4a + b, \\ 20 = 9a + b \end{cases}$$

sistemadan topiladi: $k = -2$; $b = 38$. Demak,

$$y = -2x + 38. \qquad (2.4)$$

b) $y = \frac{a_1}{x} + b_1$ bo'lsa, a_1 va b_1 lar ushbu

$$\begin{cases} 30 = \frac{a_1}{4} + b_1, \\ 20 = \frac{a_1}{9} + b_1 \end{cases}$$

sistemadan topiladi: $a_1 = 72$ va $b_1 = 12$. Demak,

$$y = \frac{72}{x} + 12. \qquad (2.5)$$

2-misol. Endi taklif funksiyasini quramiz. Jadval quyidagicha bo'lsin.

x	4	9
y	15	30

a) $y = kx + b$. Sodda hisoblashlar yordamida $k=3$; $b=3$ ni topamiz. Demak,

$$y = 3x + 3. \tag{2.6}$$

b) $y = a\sqrt{x} + b$. Parametrlar quyidagi sistemadan topiladi:

$$\begin{cases} 15 = 2a + b, \\ 30 = 3a + b \end{cases}$$

Bundan $a = 15$ va $b = -15$. Demak,

$$y = 15 \cdot \sqrt{x} - 15. \tag{2.7}$$

3-misol.. a) (1)-(3) sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} y = -2x + 38, \\ y = 3x + 3. \end{cases}$$

Ravshanki, $x_0=7$ va $y_0=24$. Shunday qilib, ko'rilayotgan holda muvozanat narxi 7 birlikdan, bozor muvozanati (egar) nuqtasi $A(7,24)$ dan iborat.

b) (2)-(3) ni olaylik:

$$\begin{cases} y = \dfrac{72}{x} + 12, \\ y = 3x + 3. \end{cases}$$

Buni $3x + 3 = 72/x + 12$ yoki $x^2 - 3x - 24 = 0$ ko'rinishda yozamiz. Kvadrat tenglama $x_0 \approx 6,6$ yechimga ega. Shu sababli $y_0 = 22,8$ bo'ladi. Demak, muvozanat narxi $x_0 \approx 6,6$ dan iborat, bozor muvozanati nuqtasi esa $A(6,6;22,8)$ bo'ladi.

d) Endi (1)-(4)ni ko'ramiz.

$$\begin{cases} y = -2x + 38, \\ y = 15 \cdot \sqrt{x} - 15. \end{cases}$$

Bu sistema $2x + 15\sqrt{x} - 53 = 0$ tenglamaga keladi. $\sqrt{x} = z$ desak, $2x + 15\sqrt{x} - 53 = 0$ ga nisbatan kvadrat tenglamani hosil qilamiz. U $z_0 \approx 2,6$ yechimga ega. Bundan $x_0 \approx 6,76$ kelib chiqadi. Demak, $x_0 \approx 6,76$, $A(6,76;24,48)$.

e) Nihoyat, (2)-(4) holni olaylik.

$$\begin{cases} y = \dfrac{72}{x} + 12, \\ y = 15 \cdot \sqrt{x} - 15. \end{cases}$$

Bu sistema ushbu $x \cdot 15\sqrt{x} - 9x - 12 = 0$ ko‘rinishga keladi. Agar $\sqrt{x} = z$ desak, uni $5 \cdot z^3 - 9 \cdot z^2 - 12 = 0$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bu kubik tenglamani taqribiy usul bilan yechamiz. Avval $f(z) = 5 \cdot z^3 - 9 \cdot z - 12$ deb belgilaymiz. Keyin quyidagi hisoblashlarni bajaramiz:

$$f(0) = -12, \quad f(1) \cdot = -16; \quad f(2) = -8; \quad f(3) = -42 > 0.$$

Demak, ildiz z_0 uchun $2 < z_0 < 3$ intervalga ega bo‘lamiz. Yana hisoblashni davom ettiramiz: $f(5/2) = 11{,}87 > 0$. Demak, $2 < z_0 < 2{,}5$ So‘ngra, $f(2{,}25) = -0{,}54$. Demak, $2{,}25 < z_0 < 2{,}5$. Shu sababli, z_0 uchun taxminan 2,3ni olish mumkin. Endi $x_0 = z_0^2 = 2{,}3^2 = 5{,}29$ ni topamiz, y_0 esa, $y_0 = 15 \cdot 2{,}3 - 15 = 19{,}5$.

Shunday qilib, $x_0 = 5,29$, $y_0 = 19,5$.

Yuqoridagi mulohazalar nuqtalar 2 ta bo'lgan holda olib borildi. Nuqtalar soni 3 ta va undan ko'p bo'lsa, talab va taklif funksiyalari qanday ko'riladi? — degan savol tug'iladi.

Ravshanki, 3 ta nuqtadan parabola o'tkazish mumkin. Agar $y = ax^2 + bx + c$ bo'lsa, $y_i = ax_i^2 + bx_i + c_i$, $i = 1,2,3$ sistemadan a,b,clarni topib olamiz. Nuqtalar soni ortgan sari koeffitsientlarni — parametrlarni topish ishi qiyinlashib boradi. Bu ham yetmagandek x ning navbatdagi qiymatida $f(x_{n+1})$ ni hisoblashga to'g'ri keladi. Agar nuqtalar soni n ta bo'lsa, talab yoki taklif funksiyasi $(n-1)$ — tartibli ko'phad bo'ladi. $f(x_{n+1})$ ni hisoblash uchun $x_{n+1}^{n-1}, x_{n+1}^{n-2}, \ldots, x_{n+1}^2$ qiymatlarni hisoblash kerak bo'ladi. Bunday holda bashorat qilish masalasiga qanday yondashish kerakligi 8-bobda bayon etilgan.

Takrorlash uchun savollar

- Tovar va tovar narxi nima?
- Bozor muvozanati nimani bildiradi?

Tabiatshunoslikning fundamental muammolari

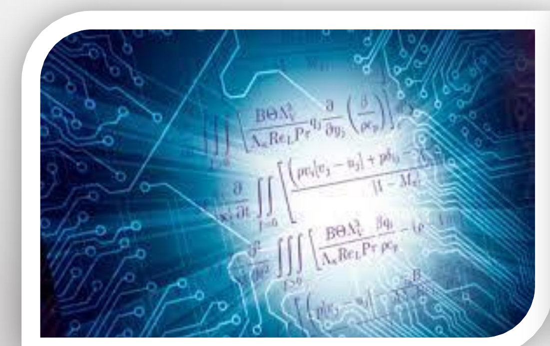
8.11-maruza

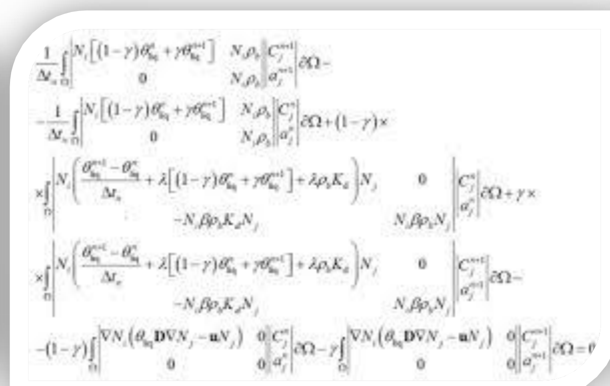
Reja

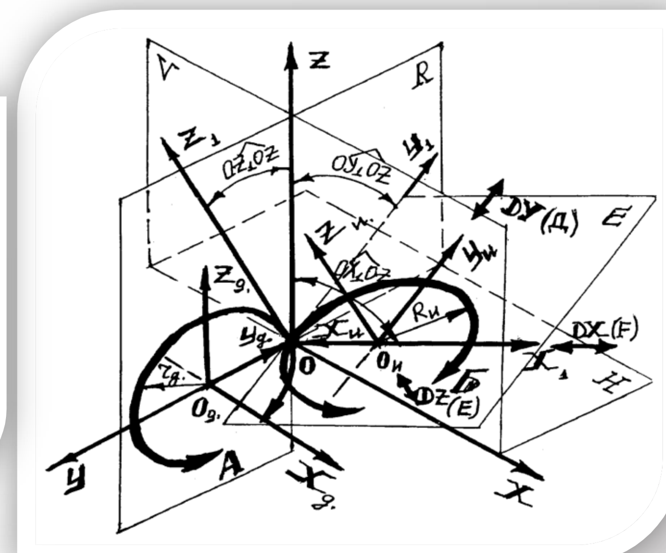
1. Математик моделлар ҳақида
2. Математик моделларни қўллаш соҳалари ва муаммолари
3. Табиатшунослик ва унинг фунданментал муаммолари
4. Брюсселлятор модели
5. Морфогенез ва унинг математик модели

Математик моделлар ҳақида

- Математик модел - математик белгилар ёрдамида ташқи дунёда содир бўлаётган ҳодисаларнинг ифодаланишидир. Математик моделлаштириш-аниқлаштириш, башорат қилиш ва бошқариш усулларидан иборатдир.
- *Математик модел* - бу фақат оддий тенглама бўлмасдан, қўллашда чегараланган қўшимча шартлардир. Бу модел ёрдамида олинган назарий натижа белгиланган чегарада ҳақиқатга яқин бўлади.



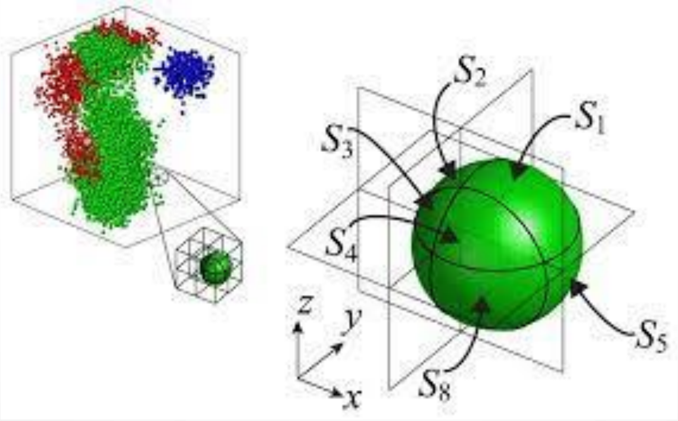




Tabiatshunoslikning fundamental muammolari

- Замонавий илм фан ва техникада эксперимент усули математик моделлаштириш ёрдамда масалаларнинг ечилиши зарур ва мумкин бўлган соҳалар кўпаймоқда.
- Улар қуйидаги сохалардир:

1. ***Энергетик муаммоларни ечиш***
2. ***Космик техника сохаси***
3. ***Технологик жараёнлар сохаси***
4. ***Экологик муаммолар***
5. ***Гео ва астрофизик ҳодисалар***
6. ***Кимё***
7. ***Биология ва бошқалар***

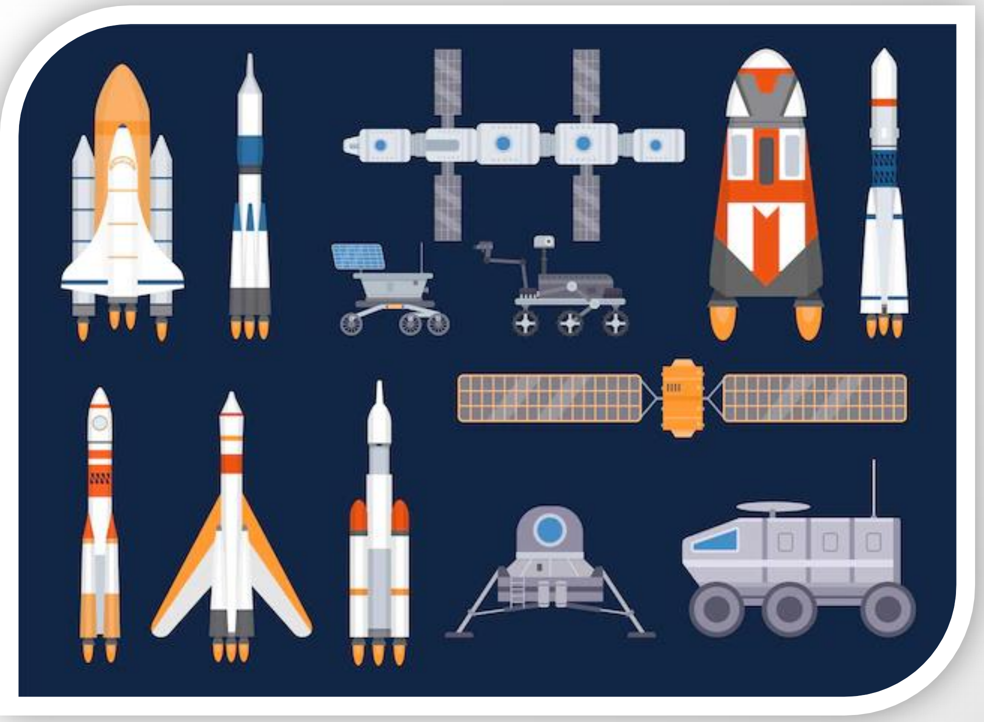


Энергетик муаммолар

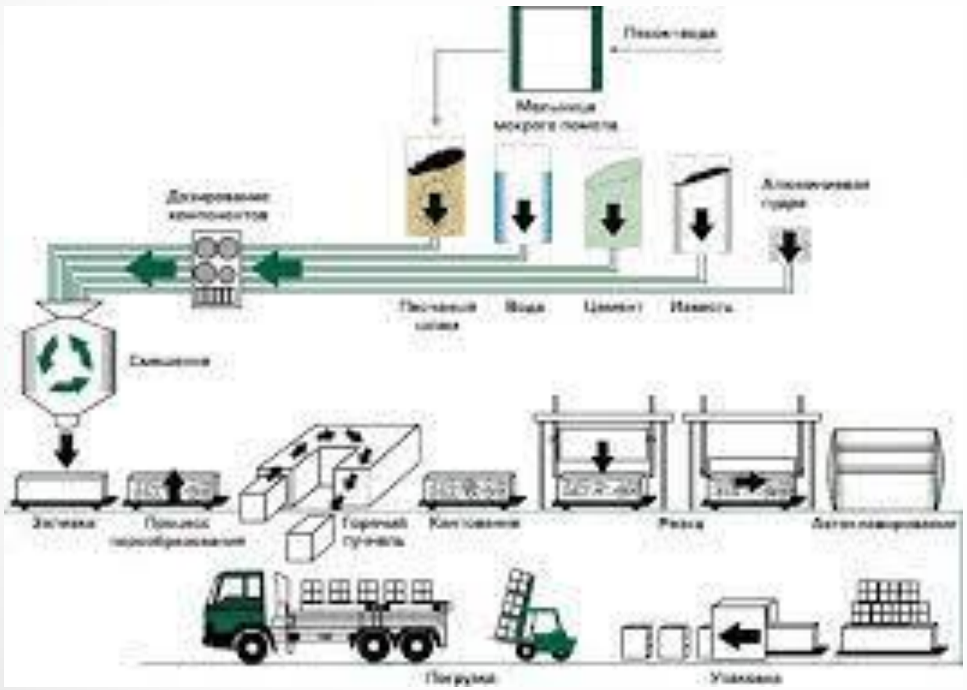
- Термоядро реакторларини математик моделлаштириш натижасида содир бўладиган физик жараёнларни башорат қилиш масалларини кўради.
- Оддий қилиб айтганда:
- Иссиқлик
- Электр энергиясини и/ч
- Табиий захиралар

Космик техника

- Учиш мосламаларини ҳисоблаш автоматик лойиҳалаштириш системалари.
- Табиий эксперимент маълумотларни қайта ишлаш, масалан радиолакацион маълумотлар, спутникдан тасвир, плазма диагностикаси.
- Бу ерда масалалар, ўлчов аппаратура сифатини ошириш асосий муаммо ҳисобланади. Ҳозирги ўрта сифатли ўлчов мосламасига ЭҲМни бирлаштириб, юқори сифатли ўлчовли мослама берадиган натижаларни алоҳида алгортми ёрдамида ҳам олиш мумкин. Шундай қилиб ўлчов мосламаси билан компьютернинг бирикиши янги имкониятлар беради.



Технологик жараён



- Ҳисоблаш техникани яратиш элементи база соҳасидаги муаммоларни ечиш учун крисстал ва пленкаларни олиш, иссиқлик режимини моделлаштириш, лазер плазма жараёни берилган хусусиятлар ёрдамида материални яратиш технологияси.

Экологик муаммо

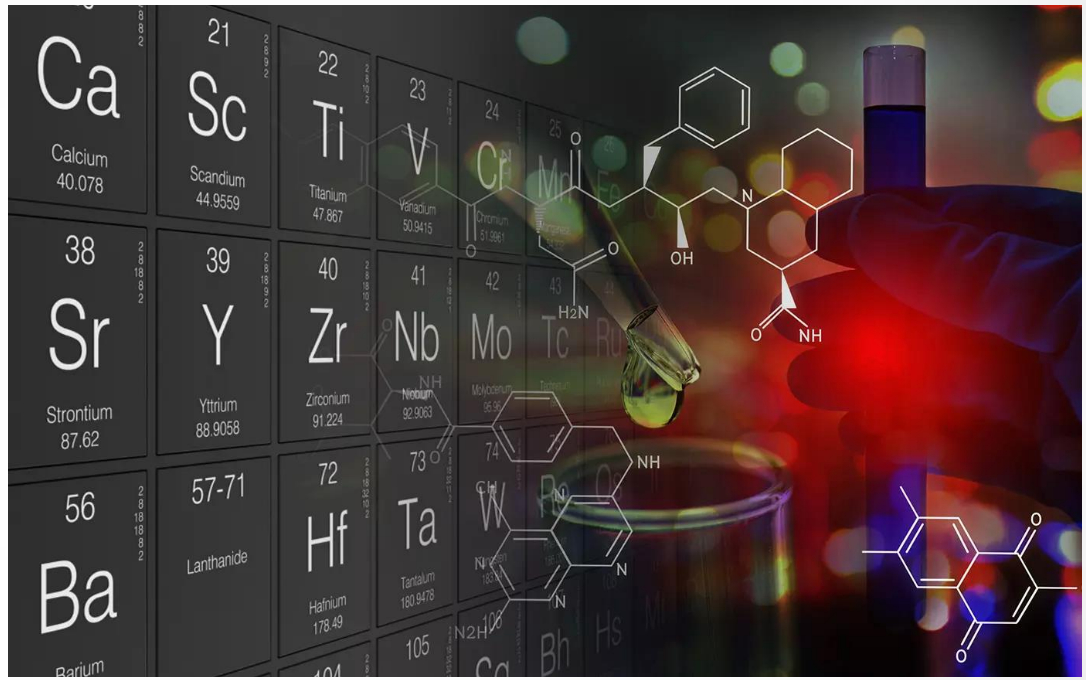
- ***Экологик муаммо***: Башорат қилиш ва экологик системани бошқариш масаласини математик моделлаштириш асосида ечилади, чунки бу системалар ягона нусхада мавжуд.

Гео ва астрофизик ҳодисалар

- ***Гео ва астрофизик ҳодисалар***: Иқлимни моделаштириш, об-ҳавони олдиндан билиш, ер қимирлашлари ва цунами, юлдўзларни ривожлантиришни моделлаштириш ҳар хил коинот ривожланишининг фундаментал муамолар тушунилади.

Кимё

- Кимёвий таъсирларни ҳисоблаш конструкцияларини аниқлаш, кимё технологялар учун акро ва микро даражада кимёвий жараёнларни текшириш.



Биология

- Бу илм-фанда фундаментал муаммоларни ўрганиш биотехнологиянинг янги методларини ишлаб чиқилганлиги учун математик моделга алоҳида қизиқиш берилишини таъкидлаб ўтиш жоиз

Биотехнология

- Биотехнологияда 3 муаммо мавжуд бўлиб, уларнинг ечими илмий ва амалий маънога эга.
- Оқсил озуқасини ишлаб чиқаришни ўрнатишни оптимизациялаштириш.
- Этанол метални ишлаб чиқиш-ёқилғи муаммоси.
- Дори-дармон ишлаб чиқиш.

Hisoblash eksperimenti va uning bosqichlari

8.12-maruza

Reja

1. Математик моделлаштириш ва ҳисоблаш экспериментлари
2. Математик моделни қуриш босқичлари
3. Ҳисоблаш тажрибаси

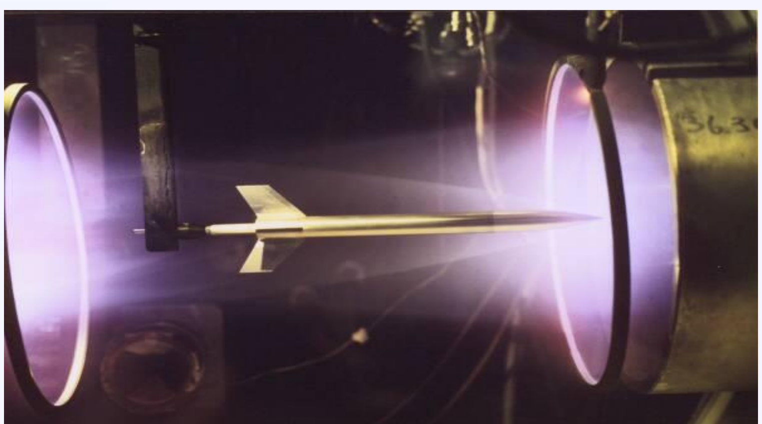
Моделлаштириш

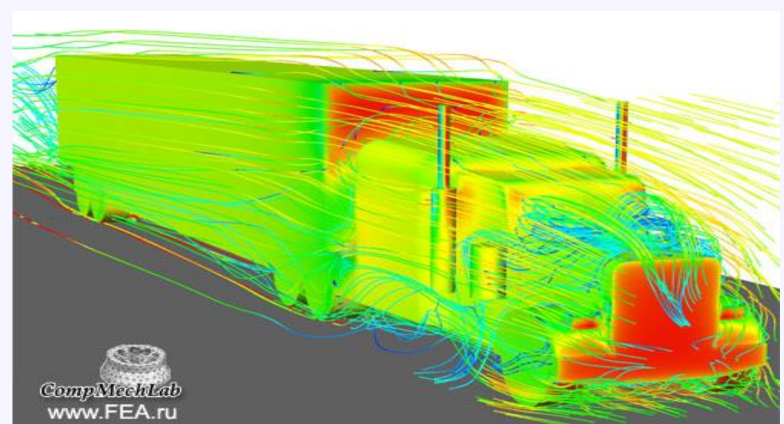
Табиий

ҳақиқий объект лаборатория шароитида тадқиқот ўтказишга имкон берадиган катталаштирилган ёки қисқартирилган материал аналоги билан мос келади.

Математик

объектни тавсифлаш математика тилида, моделни ўрганиш эса турли математик усуллар ёрдамида амалга оширилади.

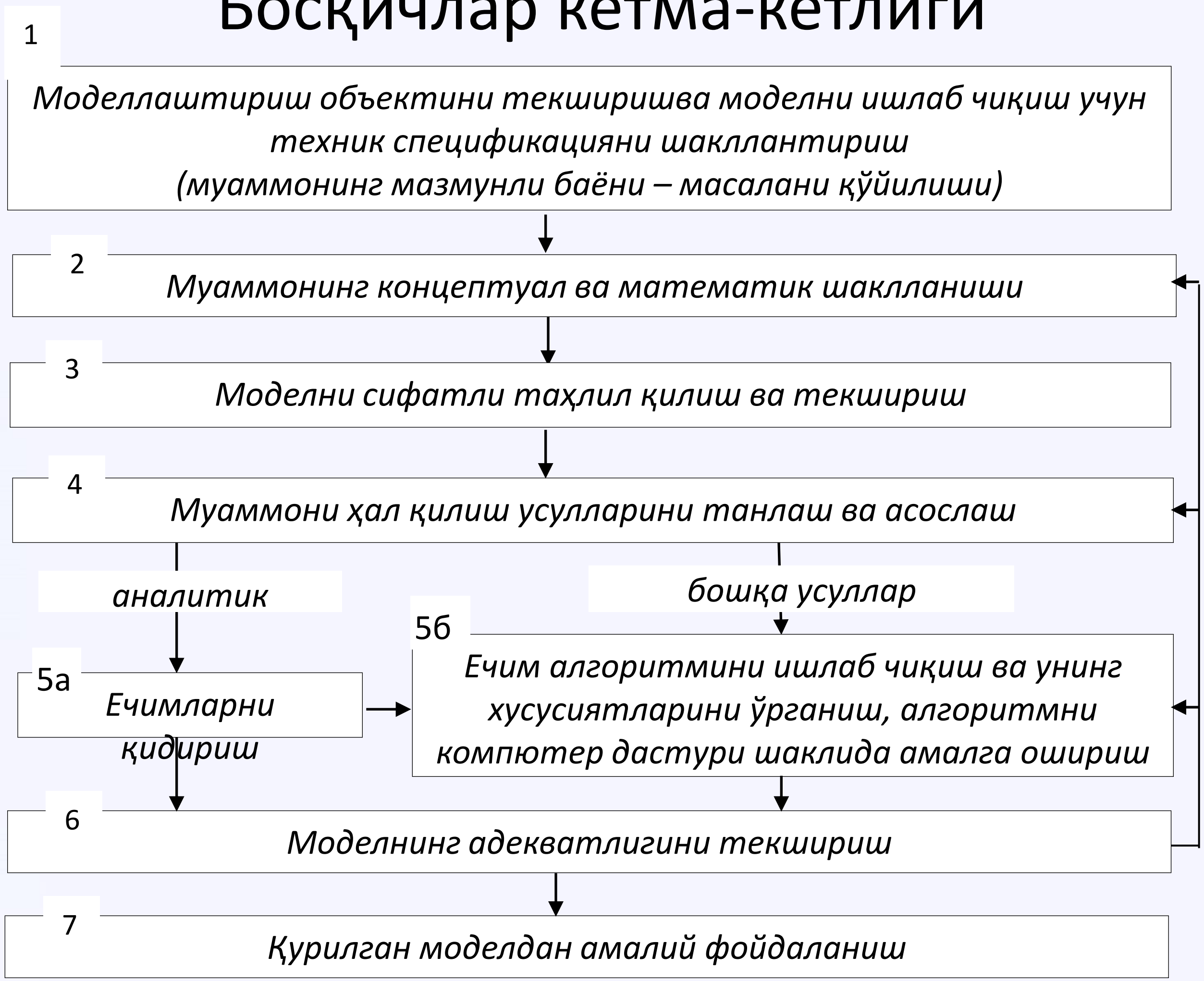




Математик моделлаштириш ва ҳисоблаш экспериментлари

- Математик моделнинг қуйидаги турлари мавжуд:
- **1. *Тўғри масала***: Берилган локал қонунларга асосан (физик, кимёвий, биологик, иқтисодий ва бошқалар) ўрганилаётган тизимни ичидан умумий жиҳатдан система ўзини қандай тушунишига жавоб бериши керак.
- Бу ҳолда ўрганилаётган тизимни ҳамма параметрлари маълум ва ҳар хил шартларни ҳисобга олишда (ўрганишда) моделнинг ҳаракати ўрганилади.
- **2. *Тескари масала***: Берилган маълумотлар ва моделлаштиришни натижаларини модел параметрларини аниқлаш орқали мослаштирилади. Кўпинча ўрганилаётган объектдаги ҳақиқий жараёнлар номаълум бўлсада, Лекин деярли ўхшашлари кўзатилади. Кўзатишларнинг натижалари орқали объект ҳаракатини қандай жараёнлар орқали бошқаришни ва моделни аниқлаштирадиган параметрларни аниқлаштиришга ҳаракат қилади. Тескари масалада система ҳаракати орқали параметрлар қийматини аниқлаш талаб қилинади.
- **3. *Бошқариш системаларини лойиҳалаштириш***. Бу моделлаштиришнинг бутунлай асосий соҳаси бўлиб, автоматизациялашган бошқариш системалари билан иш кўради.

Босқичлар кетма-кетлиги



Математик моделни қуриш бир нечта босқичдан иборат:

- 1. Қонунларни тартиблаш бўлиб, у моделнинг асосий объектларини боғлайди.
- 2. Математик масалаларни ўрганиш.
- 3. Текшириш. Моделни амалиётда қўлланилишини ўрганиш.
- 4. Модел тахлили ва унинг модификацияси.

Математик моделни ўрганиш босқичлари.

- Бу босқичда системада амал қиладиган қонунлар ҳаракатини ва алоқаларни аниқлаш.
- Бу қонунлар физик, химик, биологик, экономик ва ҳоказо бўлиши мумкин. Бу системада асосий аниқловчи кўрсаткичларини ажратиш мумкин. Бу моделдаги ҳамма ҳодисаларни аниқлашни талаб қилиш мумкин эмас. Моделлаштириш масаласи-ҳаракатнинг асосий мезонларини унинг ўзига хос аниқликларини келтириб чиқаришдир. Шунинг учун бу моделни қуришда фақат кучли эффектларни ҳисобга олиш керак. Автомобиллар ҳаракатини кўзатишда релятивистик ва квант эффектларни ҳисобга олиш нотўғри: бу эффектлар сезиларли даражада бўлмайди. Бу ҳолат модел тўзишда ҳар доим ҳам содир бўлавермайди.
- Бу босқич модел сифатини тузиш босқичи дейилади

Математик моделни ташкил қилиш.

- Бу босқичда шу системада нима содир бўлиши математик тартиблаш орқали ифодаланилади. Ўрганилаётган жараённинг математик ифодаси тенгламалар системаси, дифференционал тенгламалар системаси, дифференционал тенгламалар ва қонунлар тўплами бўлиши мумкин. Агар модел дифференционал тенгламалар орқали ифодаланса бу модел дифференционал дейилади. Агар бу модел баъзи бир тенгламалар орқали ифодаланса, бу модел детерминистик бўлади. Агар модел баъзи бир эҳтимоллик қонуниятлар билан ифодаланса, унда модел ҳодисаларни моделаштириш олдидан илм фан ва техникада ғояларни синаш учун гипотезаларни қайта ишлаш, экспериментал материалларни қабул қилишда фойдаланилган. Мисол сифатида автоқурилишни келтириш мумкин. Янги машина устида лойихавий ва конструктор ишларни олиб боришнинг муҳим элементи формаларни танлаш усули ҳисобланади.