Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
ICS2123 – Modelos Estocásticos
Profesores Nicolás Vargas y Maximiliano González
Ayudante Jefe Francisco Tamarín
Primer Semestre 2025

Tarea 2:
Proceso de Poisson II y CMTD I

Instrucciones

- Esta tarea debe ser realizada **individualmente** o **en parejas** (pueden ser de diferentes secciones dentro de las que son coordinadas). Deben indicar en la primera plana del PDF los nombres de los/as integrantes, junto con las secciones respectivas de c/u.
- Tienen plazo hasta el **Domingo 27 de abril a las 23:59 hrs** para entregar sus soluciones.
- Deben entregar un archivo reporte, **en formato PDF**. En el archivo PDF deben entregar sus respuestas de los 3 problemas. Los códigos implementados deben adjuntarse como un archivo .ZIP **aparte** en el buzón. En caso de no cumplir con esto, se aplicará un descuento de **5 décimas** sobre la nota final de la tarea.
- En el PDF deberá estar el desarrollo, resumen de resultados y correspondiente análisis. Se recomienda fuertemente utilizar LaTeX. Sin embargo, estas también pueden ser escritas en algún otro editor de texto o a mano y escaneadas, pero **debe estar ordenado y legible**, de lo contrario, se descontarán 5 décimas a la nota final de la tarea. Cualquier código o referencia que utilicen de internet debe ser debidamente citado insertando el *link* asociado.
- Si realizan la tarea completa en LaTeX, incluyendo todas las fórmulas y ecuaciones, tendrán **3 décimas extras**.
- La tarea tiene un total de 60 puntos. La nota final será calculada como la suma de las tres preguntas mediante la fórmula

$$Nota = \frac{P_1 + P_2 + P_3}{60} \cdot 6 + 1 + Bonus - Descuentos$$

  Donde P_i corresponde al puntaje de la pregunta i. Se aproxima a dos decimales.
- Las preguntas se harán a través del foro de discusión asociado a la Tarea 2 en Canvas, por lo que les pedimos que **NO** manden dudas por mail sobre la tarea. De esta manera, todos tienen acceso a las respuestas.
- Seremos estrictos en que **no se aceptarán envíos por mail**. Evite problemas de internet, del sistema Canvas, de la calidad de la foto o cualquier otro que pudiese ocurrir al entregar sobre la hora. El/La alumno/a que envíe su tarea después de la hora límite, tendrá **nota 1.0**.

Problema 1 (20 puntos)

Considere el puesto de las sabrosas fajitas que se ubica a las afueras del campus de la universidad. Según diferentes estudios realizados por el dueño del local, se sabe que la cantidad de gente que va a comprar lo hacen según un Proceso de Poisson, donde la tasa $\lambda(t)$ clientes por hora, depende de la hora del día, siendo en este caso:

$$\lambda(t) = \begin{cases} \frac{\lambda}{t+1} & \text{si } \lfloor t \rfloor \text{ es par} \\ \lambda \cdot \ln(t+1) & \text{si } \lfloor t \rfloor \text{ es impar} \end{cases}$$

Cada cliente $i \in \mathbb{N}$ puede comprar una cantidad $X_i \sim \text{Binomial}(n, p)$ de fajitas, donde la mínima cantidad a comprar es 0 (puede ser que el cliente se arrepienta de comprar y se vaya) y la máxima es $n \in \mathbb{N}$, con $p \in (0, 1)$. Estas variables aleatorias son iid. El dueño vende las fajitas a $\$C > 0$ pesos cada una.

(a) **(6 puntos)** Derive una expresión cerrada para $m(t)$, para cualquier $t \in Z_0^+$. Con ello determine $m(4)$ y $m(9)$.

(b) **(4 puntos)** Si hasta $t = 6$ habían llegado 20 clientes, y entre $t = 3$ y $t = 7$ llegaron 50, ¿Cuál es la probabilidad que entre $t = 5$ y $t = 10$ hayan llegado 80 clientes?

(c) **(4 puntos)** Determine una expresión cerrada en función de $\lambda, n,\ p$ y C para el dinero ingresado esperado para el local de fajitas en un día, considerando que atiende desde $t = 10$ hasta $t = 18$.

(d) **(6 puntos)** Si se sabe que en toda la jornada (de 10 a 18 horas) se vendieron $k \in \mathbb{N}$ fajitas, ¿Cuál es la probabilidad de que hayan llegado $m \in \mathbb{N}$ clientes en el total de la jornada (con $m \cdot n \geq k$)?

Problema 2 (20 puntos)

Considere una Cadena de Markov en Tiempo Discreto con espacio de estados $S := \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y la siguiente matriz de probabilidades de transición:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0 & 0.7 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0 & 0.4 & 0.2 & 0 & 0.1 & 0 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.2 & 0.1 & 0 & 0 & 0.2 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(a) **(3 puntos)** Esboce el grafo de la CMTD e identifique las clases de estados y clasifiquelos en transientes, recurrentes positivos, o recurrentes nulos. Determine además si son aperiódicos o periódicos, y el valor del período si corresponde.

(b) **(6 puntos)** Determine todos los $F(i,j)$ para cualquier $i,j \in S$. Valide estos resultados con la clasificación declarada en (a).

(c) **(6 puntos)** Determine todos los $\mathbb{E}[T(i,j)]$ para cualquier $i \in S$ y $j \in \{1,5\}$.

(d) **(3 puntos)** Encuentre una expresión cerrada para $\mathbb{P}(T(2,10)=k)$ para cualquier $k \in \{1,2,3....\}$. El resultado debe dejarse expresado en función de las probabilidades de transición en una etapa P_{ij}.

(e) **(2 puntos)** Suponga que $f^{(0)} = [0, 0.05, 0, 0.15, 0.1, 0, 0.2, 0.1, 0, 0.4]^T$. Calcule $\mathbb{P}(X_5 = 4, X_4 = 9)$.

Problema 3 (20 puntos)

Se desea modelar la cantidad de pasajeros de un vagón de metro de la línea 6 de la ciudad de Salsipuedes. Se propone un modelo simplificado donde cada estación del metro es independiente entre sí y todas las estaciones se comportan de igual forma. El metro parte en la estación 1 y va en orden a la estación 2, luego a la estación 3, y así hasta la estación n. Una vez que se llega a la estación n, se invierte el orden, y de la estación n se va a la estación $n-1$, luego a la $n-2$, y así hasta la estación 1. Se repite este ciclo indefinidamente. El conjunto de estaciones se definirá como $S := \{1, ..., n\}$.

El vagón de metro tiene una capacidad máxima de $M \in \mathbb{N}$ y que, una vez que llega a una estación, existe un número aleatorio de pasajeros que se baja del vagón y un número aleatorio de pasajeros esperando para subir. Dado que la gente es muy "cordial", primero se bajan todos los pasajeros que desean hacerlo y luego suben todos los pasajeros que están esperando. Si hay más pasajeros esperando de los que se pueden subir, entonces se sube la cantidad suficiente hasta llegar a la capacidad máxima del vagón, y los pasajeros que no se pueden subir se van a otro vagón para intentar subirse (no son relevantes para la modelación del problema).

Si se está en la estación $i \in S$ en el viaje $t \in \mathbb{N}$, la cantidad de personas que se bajarán del metro al llegar a la próxima estación distribuye según una variable aleatoria discreta genérica $B_i(X_t)$, donde se cumple que $\text{mín}\{\Phi_{B_i(X_{t-1})}\} \geq 0$ y $\text{máx}\{\Phi_{B_i(X_{t-1})}\} \leq X_i$ para todo $i \in S$ y $t \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, si se está en la estación $i \in S$ y se va en dirección a la estación $j \in S$, la cantidad de personas que se esperan que lleguen a la estación j distribuye según una variable aleatoria discreta genérica $A_{i,j}$, donde se cumple que $\text{mín}\{\Phi_{A_{i,j}}\} \geq 0$ y $\text{máx}\{\Phi_{A_{i,j}}\} \leq M$ para todo par de estaciones conectadas $i, j \in S$. Asuma que la cantidad de personas en la estación es independiente de la cantidad de personas en el metro y de la cantidad de estaciones recorridas.

El gerente del metro le propone el siguiente esquema para modelar la CMTD. Sea

$$\{(X_t, Y_t, Z_t) \in \{0, \ldots, M\} \times \{1, \ldots, n\} \times \{0, 1\} \,|\, t \in \mathbb{N},\ (Y_t, Z_t) \neq (n, 0),\ (Y_t, Z_t) \neq (1, 1)\}$$

el proceso estocástico para modelar la ocupación y movimiento del metro en su viaje número t. X_t indica la cantidad de gente en el metro tras llegar a la estación actual Y_t. Por otra parte, Z_t es una variable binaria que indica si la dirección del metro, siendo estas si va de la estación 1 a la estación n (0) o si va de la estación n a la estación 1 (1).

Sea B_t la cantidad de gente esperando por bajarse en el viaje número t del vagón de metro. Por otro lado, A_t indicará el número de personas que se quieren subir al vagón del metro en el viaje t. Así

$$\begin{aligned} B_t \sim& B_{Y_{t-1}}(X_{t-1}) \\ A_t \sim& \begin{cases} A_{Y_{t-1}, Y_{t-1}+1} & \text{si } Z_{t-1} = 0 \\ A_{Y_{t-1}, Y_{t-1}-1} & \text{si } Z_{t-1} = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

De esa manera, la recursión queda definida como

$$(X_t, Y_t, Z_t) = \begin{cases} (X_{t-1} - B_t + A_t, Y_{t-1} + 1, 0) & \text{si } X_{t-1} - B_t + A_t \leq M \wedge Z_{t-1} = 0 \wedge Y_{t-1} < n - 1 \\ (M, Y_{t-1} + 1, 0) & \text{si } X_{t-1} - B_t + A_t > M \wedge Z_{t-1} = 0 \wedge Y_{t-1} < n - 1 \\ (X_{t-1} - B_t + A_t, n, 1) & \text{si } X_{t-1} - B_t + A_t \leq M \wedge Z_{t-1} = 0 \wedge Y_{t-1} = n - 1 \\ (M, n, 1) & \text{si } X_{t-1} - B_t + A_t > M \wedge Z_{t-1} = 0 \wedge Y_{t-1} = n - 1 \\ (X_{t-1} - B_t + A_t, Y_{t-1} - 1, 1) & \text{si } X_{t-1} - B_t + A_t \leq M \wedge Z_{t-1} = 1 \wedge Y_{t-1} > 2 \\ (M, Y_{t-1} - 1, 1) & \text{si } X_{t-1} - B_t + A_t > M \wedge Z_{t-1} = 1 \wedge Y_{t-1} > 2 \\ (X_{t-1} - B_t + A_t, 1, 0) & \text{si } X_{t-1} - B_t + A_t \leq M \wedge Z_{t-1} = 1 \wedge Y_{t-1} = 2 \\ (M, 1, 0) & \text{si } X_{t-1} - B_t + A_t > M \wedge Z_{t-1} = 1 \wedge Y_{t-1} = 2 \end{cases}$$

Por definición se cumple que $X_{t-1} \geq B_t$ para todo $t \in \mathbb{N}$. Ahora para las probabilidades de transición, lo relevante es centrarse en la evolución entre X_{t-1} y X_t. Para ello se revisa $\mathbb{P}(X_t = n + m | X_{t-1} = n)$ para todo $m, n \in \mathbb{N}_0$:

- ⋄ Si $M > n + m \geq 0$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t = n + m | X_{t-1} = n) =& \mathbb{P}(A_t - B_t = m) \\ =& \sum_{i \in \Phi_{B_t}} \mathbb{P}(A_t - B_t = m | B_t = i) \cdot \mathbb{P}(B_t = i) \\ =& \sum_{i \in \Phi_{B_t}} \mathbb{P}(A_t = m + i) \cdot \mathbb{P}(B_t = i) \end{aligned}$$

◇ Si $n+m=M$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t=M|X_{t-1}=n)=&\mathbb{P}(X_{t-1}+A_t-B_t\geq M|X_{t-1}=n)\\=&\mathbb{P}(A_t-B_t\geq M-n)\\=&\sum_{i\in\Phi_{B_t}}\mathbb{P}(A_t-B_t\geq M-n|B_t=i)\cdot\mathbb{P}(B_t=i)\\=&\sum_{i\in\Phi_{B_t}}\mathbb{P}(A_t\geq M-n+i)\cdot\mathbb{P}(B_t=i)\end{aligned}$$

Análogamente para $\mathbb{P}(X_t=n-m|X_{t-1}=n)$ con $n,m\in\mathbb{N}_0$:

◇ Si $n-m\geq 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_t=n-m|X_{t-1}=n)=&\mathbb{P}(B_t-A_t=m)\\=&\sum_{i\in\Phi_{A_t}}\mathbb{P}(B_t-A_t=m|A_t=i)\cdot\mathbb{P}(A_t=i)\\=&\sum_{i\in\Phi_{A_t}}\mathbb{P}(B_t=m+i)\cdot\mathbb{P}(A_t=i)\end{aligned}$$

◇ No se puede $n-m<0$, dado que se cumple que $B_t\leq X_{t-1}$.

Para el resto de casos, la probabilidad es igual a 0. Notar que esto también incluye el movimiento del metro y las estaciones recorridas (pues son transiciones fijas dependientes de la estación actual y del sentido del vagón). La cadena está compuesta por una única clase recurrente positiva periódica, con $d=2n$. A partir de este esquema, se le solicita:

(a) **(3 puntos)** Explique, **con sus propias palabras**, por qué la CMTD propuesta es correcta. Debe indicar por qué se cumplen las propiedades de la CMTD, la razón de las variables y espacio de estados escogidos (por ejemplo, por qué no se puede simplificar la elección y por qué son necesarias las que están), la relación recursiva, las probabilidades de transición entre estados y la clasificación. Puede apoyarse del código `.ipynb` entregado para su respuesta.

Para los siguientes incisos, utilice el conjunto de parámetros previamente definidos en el código `.ipynb` entregado.

(b) **(6 puntos)** Explique **con sus propias palabras** que hace la función `contar_e_imprimir_caminos` en el código entregado y luego, inspirándose en esta función, implemente un método para determinar la probabilidad de que el metro, estando en la estación $i\in S$ con $0\leq k_1\leq M$ personas, llegue a la estación $j\in S\backslash\{i\}$ (con dirección de $i\to j$) con $0\leq k_2\leq M$ personas en exactamente $|i-j|$ viajes. Posteriormente, para el siguiente grupo de pares de estaciones de estaciones $(i,j)\in\{(1,n),(n,1),(1,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor),(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor,n)\}$ y para todo $(k_1,k_2)\in M\times M$ realice diferentes mapas de calor (con eje x e y de 0 a M) donde se muestre la comparación de la probabilidad para cada caso. Analice detalladamente las diferencias y similitudes identificadas.

(c) **(5 puntos)** Suponiendo que hay $0\leq k_1\leq M$ personas en el vagón de metro en la estación $i_1\in S$, implemente un método que permita determinar el número de viajes (y recorridos) promedio para ir de $i_1\in S$ a la estación estación $i_2\in S$ con $0\leq k_2\leq M$ personas en el vagón (por primera vez). Con ello, para los pares $(i,j)\in\{(1,n),(n,1),(1,\lfloor\frac{n}{2}\rfloor),(\lfloor\frac{n}{2}\rfloor,n)\}$ y para cualquier $(k_1,k_2)\in M\times M$ realice diferentes mapas de calor (con eje x e y de 0 a M) donde se muestre la comparación del número de viajes y recorridos esperados para cada caso. Analice detalladamente las diferencias y similitudes identificadas.

(d) **(6 puntos)** Implemente un simulador de la CMTD que, dado un estado inicial, permita simular $m>0$ recorridos completos del vagón de metro (entiéndase por recorrido un viaje que va de 1 a n y de vuelta, de n a 1). Muestre, en un gráfico, como evoluciona la cantidad de gente en el vagón y el movimiento y dirección de este con 1 recorrido del vagón partiendo con 0 personas en la estación 1. Posteriormente, simule 100.000 **recorridos** y determine la cantidad de gente promedio en el vagón al llegar a cada una de las estaciones, así como la distribución empírica de la cantidad de personas en el vagón al llegar a cada estación. Analice detalladamente sus resultados.