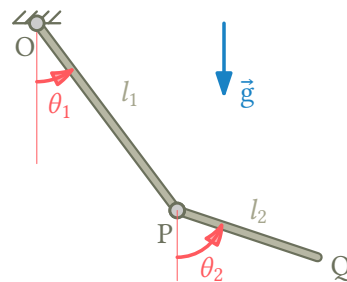




## PME 3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos – Exercício E1 – 2023

Considere um pêndulo duplo constituído por duas barras esbeltas e homogêneas OP e PQ, de mesma massa por unidade de comprimento  $\mu$ . Neste caso, as massas são diretamente proporcionais aos respectivos comprimentos, ou seja,  $m_1 = \mu l_1$  e  $m_2 = \mu l_2$ . Admita desprezíveis os efeitos dissipativos e considere que as juntas de revolução em O e P são ideais. Considere ainda que:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{l_1}} = 1 \text{ rad/s} \quad \text{e} \quad \lambda = \frac{l_1}{l_2} = 1 + \sum_j \frac{D_j}{20}$$



com  $D_j$  representando o último dígito do número USP de cada um dos integrantes do grupo.

Utilize como vetor de estados:

$$\mathbf{x} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dot{\theta}_1 \quad \dot{\theta}_2]^T$$

com  $\theta_1$  e  $\theta_2$  sendo os ângulos indicados na figura.

### Parte I

- Escreva as expressões da energia cinética  $T$  e da energia potencial  $V$  do sistema.
- Expresse as equações de movimento (não-lineares) do sistema na forma de espaço de estados  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Não é necessário mostrar os detalhes da dedução destas equações. Utilize somente  $\omega_p$  e  $\lambda$  como parâmetros na expressão de  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ .
- Expresse na forma de espaço de estados as equações de movimento linearizadas em torno da configuração de equilíbrio estável trivial do sistema. Não é necessário mostrar os detalhes da dedução destas equações.
- Obtenha, a partir das equações apresentadas no item anterior, as frequências naturais de oscilação do sistema.

### Parte II

- Selecione dois cenários de condições iniciais distintos para realizar simulações numéricas:
  - cenário C1, em que seja possível comparar os resultados obtidos pela simulação dos modelos não-linear e linearizado;
  - cenário C2, em que haja discrepâncias significativas entre os resultados obtidos pela simulação destes modelos.

Escolha também o tempo total de simulação a ser adotado em cada caso. Comente brevemente sobre suas escolhas.

- Consulte a documentação da linguagem de programação escolhida (suas opções são Python, Octave, Scilab, MATLAB, Mathematica ou Julia) e selecione 2 dentre os métodos de integração numérica de EDOs disponíveis (doravante denominados M1 e M2) com a finalidade de comparar seu desempenho. Comente brevemente sobre suas escolhas.
- Realize simulações numéricas no cenário C1, tanto para o modelo não-linear quanto para o linearizado utilizando, em cada caso, tanto o método M1, quanto o método M2. Apresente alguns gráficos representativos dos resultados obtidos para o cenário e que ressaltem as diferenças tanto entre os diferentes modelos quanto entre os diferentes métodos de integração. Comente as diferenças observadas.
- Simule o modelo não-linear apenas no cenário C2, utilizando tanto o método M1 quanto o método M2. Para cada simulação, apresente gráficos da variação da energia mecânica em função do tempo. Comente os resultados obtidos.