

Lucas Retore Carboni - 12676091
Roberto Tetsuo Hamaoka - 10334770
Vitor Lucas Buter - 12555700

**MODELAGEM DA DINÂMICA PLANA DE
AERONAVE SUPERSÔNICA DE
PASSAGEIROS DURANTE FASE DE
FREE-ROLL DA ATERRISSAGEM – PME3380**

São Paulo, Brasil

2023

Lucas Retore Carboni - 12676091
Roberto Tetsuo Hamaoka - 10334770
Vitor Lucas Buter - 12555700

**MODELAGEM DA DINÂMICA PLANA DE AERONAVE
SUPERSÔNICA DE PASSAGEIROS DURANTE FASE DE
FREE-ROLL DA ATERRISSAGEM – PME3380**

Universidade de São Paulo - USP
Escola Politécnica
Programa de Graduação em Engenharia Mecânica

São Paulo, Brasil
2023

Lista de ilustrações

Figura 1 – Influência da arfagem em aviões supersônicos a $0,3\ Mach$	8
Figura 2 – Fases da aterrissagem	11
Figura 3 – Modelo físico proposto – sem forças externas	14
Figura 4 – C_L médio para asa em delta em baixo número de Mach	16
Figura 5 – C_D médio para asa em delta em baixo número de Mach	17
Figura 6 – Modelo físico final proposto	20
Figura 7 – Medidas de ângulo de arfagem em <i>free-roll</i>	26
Figura 8 – Polos do sistema para configuração inicial de pouso	33
Figura 9 – Parte real dos polos do sistema em função da velocidade do vento	34
Figura 10 – Parte real dos polos do sistema em função da velocidade longitudinal	34
Figura 11 – Parte real dos polos do sistema em função do ângulo de arfagem	35
Figura 12 – Forma dos termos da resposta homogênea	37
Figura 13 – Resposta impulsiva homogênea do sistema	37
Figura 14 – Resposta homogênea do sistema em comparação com T2	38
Figura 15 – Diagramas de Bode referentes à $q_2(t)$	39
Figura 16 – Diagramas de Bode referentes à $\theta(t)$	40
Figura 17 – Diferença para modelo linear e não linear	43
Figura 18 – Diferença para modelo linear e não linear - vento de $-5m/s$	43
Figura 19 – Diferença para modelo linear e não linear - $y_{ext} = \sin(12t)m$	44
Figura 20 – Influência do cancelamento de polos no comportamento de q_2	44
Figura 21 – Diagrama dos esforços atuantes no avião	45
Figura 22 – Gráficos das posições finais de equilíbrio do modelo	46
Figura 23 – Gráficos de θ e da carga inercial com entradas no valor de referência	47
Figura 24 – Gráficos das acelerações com entradas no valor de referência	48
Figura 25 – Gráficos de θ e da carga inercial com variação no valor de C_{pav}	48
Figura 26 – Gráficos das acelerações com variação no valor de C_{pav}	49
Figura 27 – Gráficos de θ e da carga inercial com variação no valor de y_{ext}	49
Figura 28 – Gráficos das acelerações com variação no valor de y_{ext}	50
Figura 29 – Gráficos de θ e da carga inercial com variação no valor de Φ_0	50
Figura 30 – Gráficos das acelerações com variação no valor de Φ_0	51
Figura 31 – Gráficos de θ e das cargas inerciais com variação no valor de u_v	51
Figura 32 – Gráficos das acelerações com variação no valor de u_v	52
Figura 33 – Gráficos de θ e das argas inerciais com variação no valor de u_{vert}	52
Figura 34 – Gráficos das acelerações com variação no valor de u_{vert}	53
Figura 35 – Gráficos de θ e das cargas inerciais com variação no valor de M	53
Figura 36 – Gráficos das acelerações com variação no valor de M	54

Figura 37 – Gráficos de θ e das cargas inerciais com variação no valor de k_t	54
Figura 38 – Gráficos das acelerações com variação no valor de k_t	55
Figura 39 – Gráficos de θ e das cargas inerciais com variação no valor de c_t	55
Figura 40 – Gráficos das acelerações com variação no valor de c_t	56
Figura 41 – Modelo físico proposto pós toque frontal – sem forças externas	62

Lista de tabelas

Tabela 1	–	Parâmetros para a aterrissagem	19
Tabela 2	–	Parâmetros físicos da aeronave	20
Tabela 3	–	Dimensões da aeronave	20
Tabela 4	–	Razão entre amplitude de resposta máxima e amplitude do polo positivo no intervalo $[t_{n-1} - t_n]$	38
Tabela 5	–	Razão entre amplitude de resposta quadrática média e amplitude do polo positivo no intervalo $[t_n - 1t_n]$	39
Tabela 6	–	Valores adotados para análise do modelo	47
Tabela 7	–	Parâmetros que influenciam no conforto e cargas inerciais	56

Lista de abreviaturas e siglas

C_{pav}	Coeficiente de atrito ao rolamento da pista
CM	Centro de massa
D	Força de arrasto
G	Centro de massa da aeronave
J_{OZ}	Momento de inércia da aeronave em relação ao eixo OZ
L	Força de sustentação
M	Massa da aeronave
N	Força normal
O	Ponto de fixação do conjunto de trens de pouso traseiros e fuselagem
P	Centro de pressão da aeronave
S	Área planiforme
ρ_{vw}	Vetor posição w-v
g	Aceleração da gravidade
c_r	Constante de amortecimento do conjunto de pneus traseiros
c_t	Constante de amortecimento do trem de pouso traseiro
k_r	Constante de mola do conjunto de pneus traseiros
k_t	Constante de mola do trem de pouso traseiro
u_v	Velocidade do vento
m	Massa do conjunto de pneus traseiros
y_{ext}	Excitação imposta pela pista
Φ_0	Ângulo de arfagem inicial
θ	Desvio do ângulo de arfagem inicial
μ_{rol}	Coeficiente de resistência ao rolamento
ρ	Massa específica
\forall	Volume

Sumário

1	INTRODUÇÃO	8
1.1	Contextualização	8
1.2	Acesso aos códigos do relatório	9
2	OBJETIVOS	10
2.1	Análise dos esforços sobre os trens de pouso traseiro	10
2.2	Análise da estabilidade do ângulo de arfagem no toque	10
2.3	Análise do conforto dos passageiros	10
3	METODOLOGIA	11
3.1	Escopo de análise	11
3.2	Meios de análise	11
3.3	Hipóteses simplificadoras	12
3.4	Capacidades do modelo	12
4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	13
4.1	Trabalhos analisados sobre modelos físico de aeronaves	13
4.2	Trabalhos analisados sobre o equacionamento de modelos	13
5	MODELO FÍSICO	14
5.1	O modelo proposto	14
5.2	Coordenadas generalizadas	14
5.3	O vetor de estados	15
5.4	O vetor de entradas	15
5.5	Forças externas	15
5.5.1	Força de sustentação	15
5.5.2	Força de arrasto	16
5.5.3	Resistência ao rolamento	17
5.6	Parâmetros físicos	18
5.7	Modelo final	20
6	MODELO MATEMÁTICO	21
6.1	Equacionamento mecânico	21
6.1.1	Equacionamento para fase de Free-Roll	22
6.1.2	Equacionamento para fase pós toque frontal	23
6.2	Espaço de estados e linearização	23
6.2.1	Espaço de estados não linear	23

6.2.2	Espaço de estados linear	24
6.2.2.1	Pontos de linearização	25
6.2.2.2	Calibração do modelo	26
6.2.3	Modelo completo do espaço de estados linearizado	27
6.3	Análise no domínio da frequência	30
6.3.1	Função de transferência	30
6.4	Polos e zeros do sistema	32
6.5	Resposta homogênea a impulso e aplicabilidade do modelo	36
6.6	Diagrama de bode	39
6.7	Critério de Estabilidade de <i>Routh-Hurwitz</i>	41
7	SIMULAÇÕES	42
7.1	Seleção do passo de integração	42
7.2	Diferenças entre modelo linear e não linear	42
7.3	Influência do cancelamento de polos	44
7.4	Validação do modelo integrado	44
7.5	Análises de cenários	46
7.6	Conforto e forças inerciais no trem de pouso	56
8	CONCLUSÃO	58
8.1	Pontos a melhorar e próximos passos	58
	REFERÊNCIAS	59
9	APÊNDICES	62

1 Introdução

1.1 Contextualização

O desenvolvimento dos trens de pouso acompanhou o desenvolvimento dos aviões, principalmente por ser um elemento chave na operação segura de aeronaves. Desde a invenção dos aviões os trens de pouso passaram de rodas em estruturas rígidas para mecanismos complexos, retráteis e com funcionalidades diversas. Apesar de, em geral, representar cerca de 3% a 6% (para trens de pouso retráteis) da massa total de uma aeronave (INFOSYS, 2018) os trens de pouso representam mais de 40% dos acidentes por falhas de manutenção, seja nos mecanismos de atuação, seja nos pneus (KARPENKO, 2022). Esse dado é relevante, principalmente considerando que mais de 30% dos acidentes aéreos ocorrem durante o pouso (ICAO, 2023).

Os dados acima apresentados crescem de importância ao considerarmos aviões supersônicos, visto que são projetados para operar em altas velocidades, condição não satisfeita em condições de aterrissagem. Os aviões supersônicos tem uma taxa de descida maior que os aviões convencionais em decorrência da menor sustentação fornecida pela asa em baixas velocidades, como pode ser visto no gráfico abaixo (Figura 1).

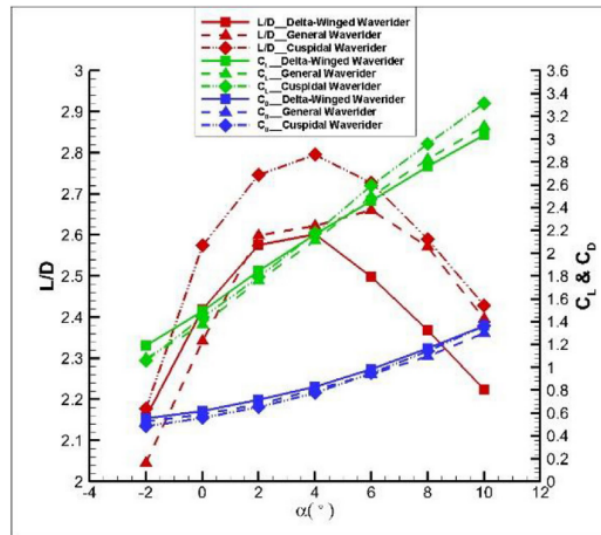


Figura 1 – Influência da arfagem em aviões supersônicos a 0,3 *Mach*

Fonte: (ZHAO et al., 2019)

Vale ressaltar que o progressivo avanço tecnológico apresenta alternativas frente aos desafios que culminaram na decadência da aviação civil supersônica. A exemplo disso, pode-se citar o desenvolvimento do combustível de aviação sustentável, substituição de

materiais e refinamento energético dos motores das aeronaves. Desse modo, a reentrada da categoria torna-se iminente com, inclusive, empresas realizando pedidos de aviões comerciais supersônicos de *start-ups* (CALDER, 2023). Desse modo, o estudo sobre a eficiência e confiabilidade dos trens de pouso e seus componentes ganha destaque.

Outro ponto relevante é que as aeronaves supersônicas pousam com um ângulo de arfagem maior que as aeronaves convencionais. O maior ângulo de arfagem é usado para compensar a falta de sustentação devido à aerodinâmica otimizada para velocidades supersônicas. Essa maior inclinação traz a tona problemas de instabilidade aerodinâmica (CAUGHEY, 2011), levando à perda de sustentação em alguns casos.

A combinação da maior taxa de descida com a instabilidade de altos ângulos de arfagem geram condições de voo peculiares no momento da aterrissagem, que como já comentado, é crítico. Essa combinação, junto com fatores como o transporte de pessoas e cargas, torna o problema relevante e de alta importância no desenvolvimento de aeronaves comerciais supersônicas.

O cenário atual, portanto, passa por novos estudos de viabilidade e investimentos para com os sistemas dessa classe de aeronaves, a exemplo das empresas “*Boom Supersonic*” e “*Spike Aerospace*”. Desse modo, cabe destacar **a proposta assumida para o desenvolvimento do trabalho, na qual tomou-se o modelo do Concorde como base para muitos dos parâmetros geométricos, contudo, como as atualizações tecnológicas implicam em modificações em parâmetros físicos e construtivos, parâmetros como a massa, momento de inércia e área da asa foram corrigidos.** Todos os pontos pertinentes nesse âmbito serão detalhadamente descritos na [seção 5.6](#).

1.2 Acesso aos códigos do relatório

Todos os códigos desenvolvidos para este relatório estão presentes no [GitHub](#), com arquivos apresentando nomes pertinentes e incluindo o capítulo no qual foram utilizados. Caso desejado acessar diretamente do navegador, o link correspondente é: [<https://github.com/Tet-oka/Modelagem---Grupo-K.git>](https://github.com/Tet-oka/Modelagem---Grupo-K.git)

2 Objetivos

2.1 Análise dos esforços sobre os trens de pouso traseiro

Aeronaves supersônicas, devido à sua geometria aerodinâmica, tem pouca sustentação a baixas velocidades, sendo necessário aumentar o ângulo de arfagem para garantir a sustentação necessária. Isso implica em maiores velocidades verticais de pouso, estressando a fuselagem e o trem de pouso além do esperado em aviões comuns. Dessa forma, pretende-se analisar os esforços sobre o trem de pouso para permitir um dimensionamento correto dos trens de pouso, visando a possibilidade de usar trens de pouso de aeronaves convencionais.

2.2 Análise da estabilidade do ângulo de arfagem no toque

Voos a baixa velocidade e ângulos de arfagem altos são instáveis e podem resultar no estol, o descolamento do fluxo no extradorso da asa, e consequente perda de sustentação. Assim, na condição de pouso de aeronaves supersônicas, o risco da perda repentina de sustentação é alto. Dessa forma, a modelagem proposta visa a análise da estabilidade do ângulo de arfagem em diferentes condições iniciais de pouso.

2.3 Análise do conforto dos passageiros

As altas velocidades de descida e o grande ângulo de arfagem nos pousos de aeronaves supersônicas são condições favoráveis a altas acelerações no toque com o solo. Assim, o modelo proposto foi utilizado para analisar as vibrações induzidas e as acelerações na fuselagem, que são resultados das vibrações do trem de pouso combinado com as vibrações angulares da fuselagem. Essas vibrações podem, naturalmente, ser causa de desconforto nos passageiros.

3 Metodologia

3.1 Escopo de análise

O escopo de análise do modelo proposto é o período de free-roll, o momento logo após o toque da aeronave com o solo e antes da aplicação de qualquer freio, seja dos trens de pouso ou aerodinâmicos, como pode ser visto na [Figura 2](#). Por ser um período do voo muito relativo, que depende de avião para avião, o período usualmente adotado é de 2 segundos ([LYSSIS, 2010](#)).

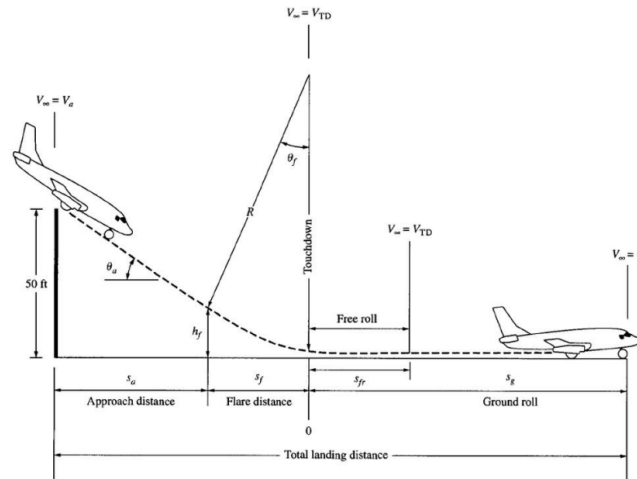


Figura 2 – Fases da aterrissagem

Fonte: ([RAO et al., 2013](#))

3.2 Meios de análise

As análises dos objetivos descritos no [Capítulo 2](#) serão feitas seguindo os seguintes métodos, determinados antes da coleta de resultados para evitar enviesamentos.

Quanto às cargas no trem de pouso, as análises se basearão no documento *Federal Aviation Administration, Department of Transportation; Part 23; Subpart C–Structure*, que norteia o mensuramento de trens de pouso através das cargas inerciais experimentadas. A carga inercial ($L.F$) é dada pela aceleração da estrutura analisada dividida pela aceleração gravitacional, ou seja, $L.F = \frac{a}{g} = \frac{a}{9,81}$. Nesse sentido, para condições normais de pouso em $L.F$ superior à 2,67 não se garante segurança do trem de pouso. Em condições de peso máximo, em $L.F$ superior à 2,0 não se garante segurança ([FAA, 2023](#)).

Já para a avaliação do conforto na aeronave, a classificação partirá das vibrações e acelerações sentidas na fuselagem foram feitas baseadas em estudos biomecânicos dos

efeitos de vibrações sobre o corpo humano. Dentre os dados mais relevantes levantados, temos que frequências abaixo de $1Hz$ por tempo prolongado são causadoras de enjoo e frequências de 2 a $6Hz$ causam hiperventilação, além de que a exposição prolongada ou frequente a vibrações gera problemas ortopédicos e dores crônicas (BALLARD et al., 2020).

Por fim, para a análise da estabilidade do ângulo de arfagem, os resultados se basearão na análise linear no domínio da frequência do problema. Caso a análise linear se mostre inválida, a análise se dará simplesmente por meio da simulação não-linear do ângulo de arfagem frente à perturbações externas e variação nas condições iniciais.

3.3 Hipóteses simplificadoras

Para chegar no modelo proposto as seguintes hipóteses simplificadoras foram adotadas. Avião sem frenagem e superfícies aerodinâmicas de comando para frenagem - *free-roll*; Pouso com rolagem nula; ausência de atrito viscoso nos mancais dos pneus; linha da corda da asa alinhada com o eixo longitudinal da aeronave; corpos e vínculos rígidos; ausência de aquaplanagem e derrapagem; centro de massa no pouso não variante; coeficientes aerodinâmicos constantes em relação à corda; efeito solo desprezível; forças aerodinâmicas aplicadas no centro da asa (meia-corda); trem de pouso com movimento restrito na vertical; pista não inclinada

Dentre as implicações das hipóteses adotadas, o pouso sem ângulo de rolagem permite agrupar o par de trens de pouso traseiros em um único corpo no modelo; o centro de massa não variante permite analisar o avião como um corpo rígido e simplifica a simulação; a utilização das forças aerodinâmicas em meia corda é uma hipótese comum e será discutida mais adiante.

3.4 Capacidades do modelo

O modelo deve ser capaz de capturar a dinâmica da aeronave nos instantes iniciais do pouso, pelo menos para os 2 segundos iniciais após toque. Após esse tempo, a utilização de frenagem já é praticamente inevitável, contudo, o modelo pode ser capaz de prever o comportamento da aeronave após o *free – roll* caso essa não experienciasse frenagem. O modelo não é capaz de capturar a dinâmica longitudinal nem de rolagem na aterrissagem, tampouco analisar toque em condições externas nas quais sem a atuação do piloto o avião não desceria o nariz – condições que impossibilitam o usual período de *free-roll* anteriormente abordado.

4 Revisão Bibliográfica

4.1 Trabalhos analisados sobre modelos físico de aeronaves

Para o modelo físico proposto poucos exemplos de modelos semelhantes foram encontrados. Um dos trabalhos usados como base foi o “*Dynamic model of aircraft landing*” (SUHAREVS et al., 2016a) que propõe um modelo tridimensional pré-toque e um bidimensional pós-toque para o estudo de pouso de aeronaves.

Trabalhos de modelos físicos de trens de pouso de aeronaves foram estudados, a grande maioria utilizando o modelo de triciclo – tridimensional. Um dos artigos base para o modelo físico foi o “*Evaluation of aircraft random vibration under roughness excitation during taxing*” (LIU et al., 2023). O artigo traz um modelo de avião na configuração de tripé de pouso e faz uma análise versando sobre vibrações em rolagem, arfagem e verticais sobre a aeronave. Além das características do modelo físico, o equacionamento do modelo neste artigo é de grande relevância para o presente trabalho.

4.2 Trabalhos analisados sobre o equacionamento de modelos

Para o equacionamento de aeronaves alguns trabalhos foram consultados, dentre eles, pode-se citar o “*Mathematical model and vibrationan alysis of aircraft with activelanding gears*” (SIVAPRAKASAM; HARAN, 2013) que versa sobre modelos matemáticos de trens de pouso e analise, inclusive, o efeito de deformações na pista. Além do modelo matemático, o trabalho encaminha a análise para o lado do controle, mostrando que e possível amenizar as vibrações na cabine por meio de atuadores lineares.

Outra referência consultada para fazer o equacionamento do trabalho foi o “*Landing-gear impacts*” (FLUGGE, 1952) que aborda os esforços nos trens de pouso no momento do toque e no taxi da aeronave. O relatório em questão realiza o equacionamento do conjunto de amortecimento do trem de pouso na forma de equações diferenciais lineares, que apesar de não serem uma representação fiel do comportamento real do trem de pouso, são um ótimo ponto de partida para análises. O uso desses modelos idealizados, apesar de fugir do caso real, permitem uma análise inicial crucial para começar a entender o comportamento de mecanismos mais complexos e não lineares.

5 Modelo Físico

O modelo físico proposto envolve o corpo do avião e o trem de pouso traseiro, representados de forma simplificada na Figura 3, acima. No modelo P , G e O são respectivamente o centro de pressão da asa do avião, o centro de massa da aeronave e o ponto de fixação do trem de pouso à fuselagem. Ademais, k_t e k_r são as constantes de mola equivalentes do pneu e da suspensão do trem de pouso, assim como c_t e c_r são as constantes de amortecimento equivalentes. Por fim, M e m representam as massas suspensas e não suspensas do avião e J_{oz} é o momento de inércia de arfagem em relação a O .

5.1 O modelo proposto

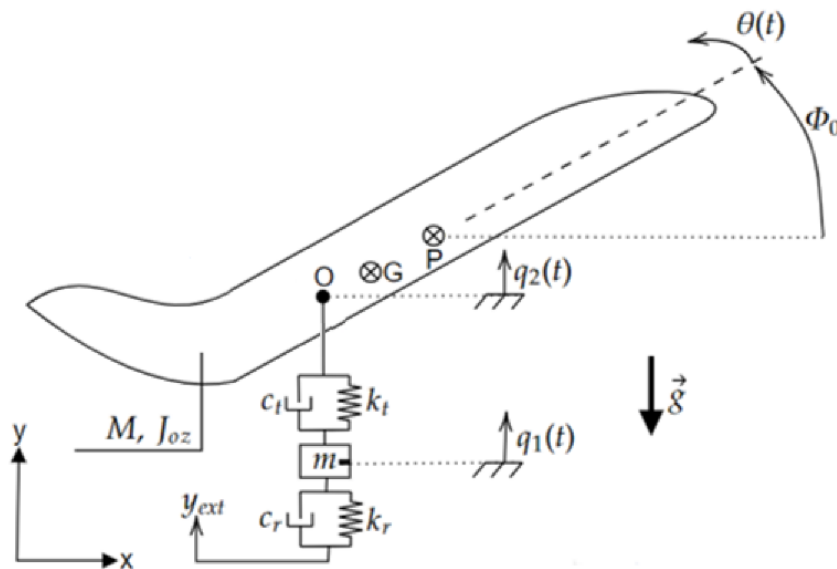


Figura 3 – Modelo físico proposto – sem forças externas

Fonte: Autoria própria

5.2 Coordenadas generalizadas

A coordenada generalizada $q_1(t)$ é a coordenada relativa ao cubo da roda do avião, $q_2(t)$ é a coordenada da massa suspensa do avião. Ambas são incrementais e foram adotadas como zero na condição em que toda a massa do avião está apoiada sobre os trens de pouso traseiro, ou seja, k_r (referente ao pneu) suporta $M + m$ e k_t suporta apenas M .

A coordenada da variação do ângulo de arfagem (θ) foi definida como zero para o ângulo de arfagem inicial (Φ_0). Dessa forma esta coordenada depende da condição inicial

de pouso, mas sempre inicia a aterrissagem com o valor zero e recebe um incremento ou decremento a depender se o nariz do avião sobe ou desce.

5.3 O vetor de estados

Para o movimento plano, o número de meios de armazenamento de energia do sistema indica o número de componentes do vetor de estados (HILL, 2015). O sistema tem 4 meios de armazenamento de energia potencial (elástica nas duas molas e potencial nas duas massas) e 2 meios de energia cinética (ambas massas). Assim, espera-se um vetor de estados com 6 componentes, como apresentado na [Equação 5.1](#).

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \theta(t) \\ \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix} \iff \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

\mathbf{q} é o vetor de coordenadas generalizadas, ou seja, q_1 , q_2 , θ .

\mathbf{v} é o vetor de quasi-velocidades, ou seja, \dot{q}_1 , \dot{q}_2 , $\dot{\theta}$.

5.4 O vetor de entradas

O vetor de entradas deve representar a interação da mola e amortecedor que representam o pneu do avião com o solo. Desse modo:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} y_{ext}(t) \\ \dot{y}_{ext}(t) \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

5.5 Forças externas

No momento em que as rodas do trem de pouso tocam o solo, novas forças surgem (natureza do rolamento) e as forças anteriormente já existentes (natureza aerodinâmica) iniciam a mudar (SUHAREVS et al., 2016b). Nesse sentido, as forças envolvidas relevantes aos estudos propostos no [Capítulo 2](#) devem identificadas. Naturalmente, nem todas as forças envolvidas serão inclusas nesse modelo – revisitar [seção 3.3](#).

5.5.1 Força de sustentação

Mesmo logo após o avião tocar o solo ainda se tem força de sustentação, afinal, o corpo ainda possui velocidade – caso contrário, o pouso seria extremamente mais brusco

visto que o avião, privado de força de sustentação, estaria em queda livre. A força de sustentação é dada por:

$$L = C_L \cdot S \cdot \frac{\rho \cdot \dot{x}^2}{2} \quad (5.3)$$

Dados experimentais serão utilizados para a obtenção de C_L . A referência considerada mais adequada nesse cenário é do artigo “*The discovery and prediction of vortex flow aerodynamics*” de J.M Luckring, no qual os dados de asa em delta são fornecidos para aerodinâmica de baixo *Mach*. Esses dados, também referenciados aos colhidos por Polhamus em 1966, são delicados visto que esse tipo de asa possui, em baixas velocidades, contribuição alta de vórtices para a sustentação – o C_L e C_D fornecidos pelo artigo já englobam esse fato.

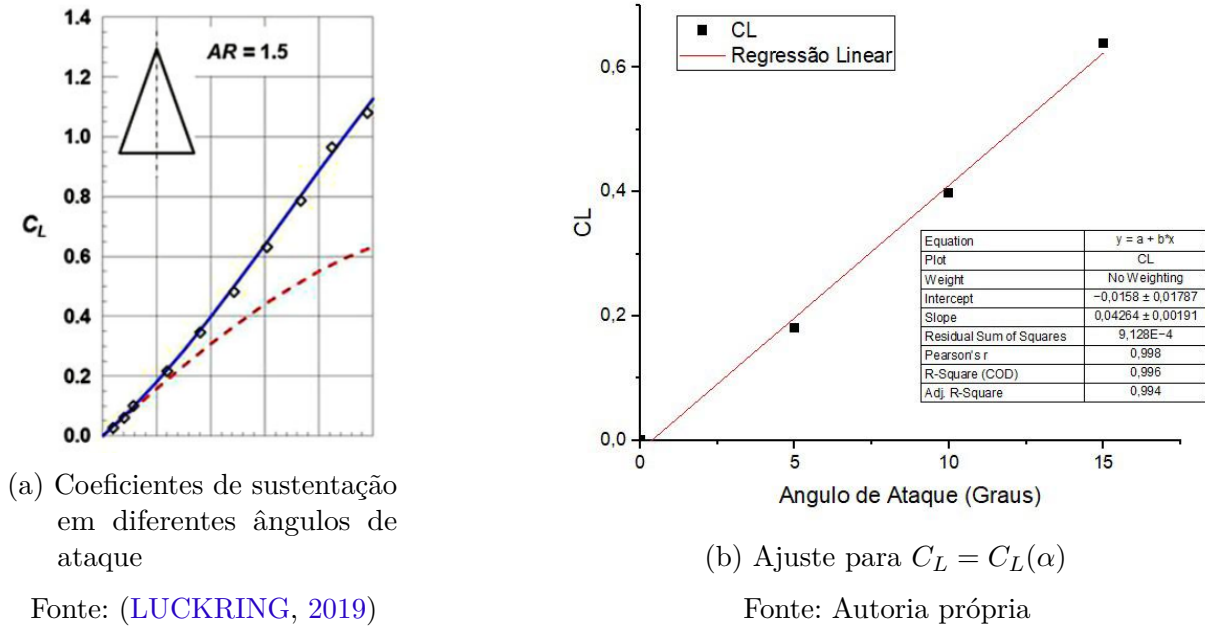


Figura 4 – C_L médio para asa em delta em baixo número de Mach

Para os ângulos intermediários, interpolação linear foi utilizada, o que é válido para ângulos de ataque não tão elevados ($\alpha < 20^\circ$) (ANDERSON, 2011). Os dados dos gráficos foram extraídos com o uso da ferramenta WebPlotDigitizer e analisados com a ferramenta Origin 2022b. Desse modo, usar-se-á C_L dado pela Equação 5.4.

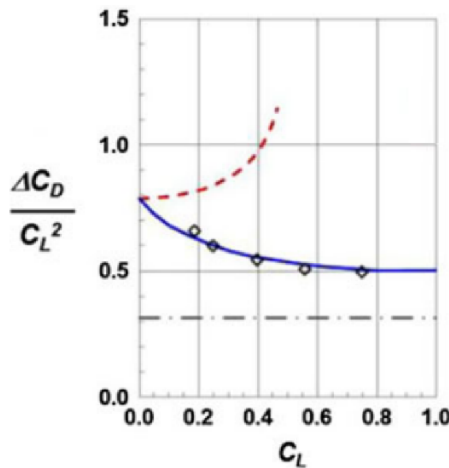
$$C_L = 0,04264 * \alpha - 0,0158 \quad (5.4)$$

5.5.2 Força de arrasto

Ao se deslocar em fluidos, o arrasto de pressão é gerado pelas componentes de força provenientes da pressão normal à superfície agindo em todos os pontos (HOUGHTON et al., 2017). O comportamento da força de arrasto é análogo ao da força de sustentação:

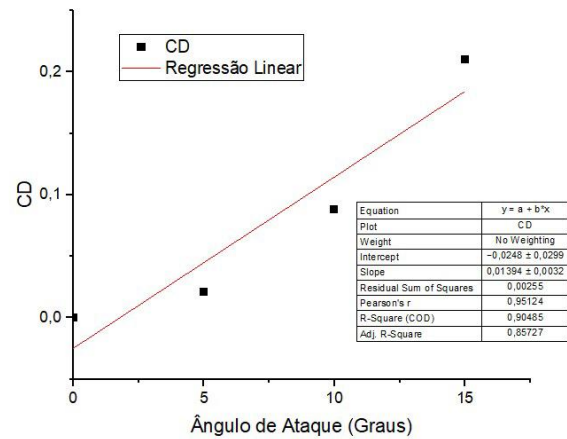
$$D = C_D \cdot S \cdot \frac{\rho \cdot \dot{x}^2}{2} \quad (5.5)$$

Dados experimentais também serão utilizados. Para manter a coerência dos dados, o mesmo artigo foi utilizado como base para a extração dos dados do coeficiente de atrito, como mostrado na Figura 5a, e mesmos procedimentos adotados.



(a) Coeficiente de arrasto médio para asa em delta em baixo número de Mach

Fonte: (LUCKRING, 2019)



(b) Ajuste para $C_D = C_D(\alpha)$

Fonte: Autoria própria

Figura 5 – C_D médio para asa em delta em baixo número de Mach

Assim, usar-se-á C_D dado pela Equação 5.6.

$$C_D = 0,0139 \cdot \alpha - 0,0248 \quad (5.6)$$

5.5.3 Resistência ao rolamento

A resistência ao rolamento, neste caso nos pneus do trem de pouso, pode resultar de inúmeros fenômenos, como da colisão nos contatos de duas superfícies, compressão e expansão do material ou por sua deformação permanente. Contudo, um modelo simples para modelar essa força pode ser encontrado (CROSS, 2017). Para isso, o coeficiente μ_{rol} é utilizado na Equação 5.7, que busca englobar todos os fenômenos envolvidos.

$$F_{rol} = \mu_{rol} \cdot N \quad (5.7)$$

Para o cálculo de μ_{rol} , muitas fórmulas empíricas são propostas. Neste trabalho, considerar-se-á a proposta pelo *University of Michigan Transportation Research Institute* no escopo de caminhões pesados (GILLESPIE, 1992), apresentada pela Equação 5.8.

Faz-se uso dessa fórmula pois trabalhos semelhantes no ramo aeronáutica já o fizeram (SUHAREVS et al., 2016b).

$$\mu_{rol} = (0,0041 + 0,000041\dot{x}).C_{pav} \quad (5.8)$$

Onde C_{pav} é o coeficiente do pavimento, sendo 1,0 para concreto liso, 1,2 para concreto gasto e 1,5 para asfalto quente (GILLESPIE, 1992).

Note que a força de resistência ao rolamento age, assim como o arrasto, na dinâmica horizontal do avião, ou seja, são forças paralelas ao eixo OX . Contudo, a resistência ao rolamento age no trem de pouso que, pelas hipóteses simplificadoras, possui dinâmica puramente unidimensional no eixo OY . Assim, a inclusão dessa força em nada impactaria o modelo, visto que nenhuma equação dinâmica a retrataria.

Desse modo, é necessário expressar a força de resistência à rolamento não como uma força atuante no trem de pouso, mas como uma força de perturbação na fuselagem que, em última análise, será um momento de perturbação no polo ao redor do qual o avião rotaciona. Para isso, a Equação 5.7 será aplicada considerando $N = W - L$ e, após isso, essa força será transportada ao centro de massa da fuselagem e o sistema de forças equivalente aplicado ao ponto de acoplamento. Como a força horizontal aplicada sobre o ponto de rotação O não fará diferença alguma nas equações dinâmicas do sistema, o resultado desse processo será apenas um momento de perturbação. Como $F_{rol} = F_{rol}(\dot{x}, \theta, t)$, essa força será obtida por integração numérica e o momento de perturbação resultante imposto com um valor já calculado no sistema para cada passo da simulação.

Em verdade, poder-se-ia fazer o mesmo com as demais forças e expressá-las já em como um sistema de forças equivalente aplicado ao ponto O , contudo, por clareza, não o fará – o teorema do movimento do baricentro e da quantidade de movimento angular o farão indiretamente. Assim sendo, tem-se:

$$M_{oz}^{rol} = F_{rol} \times \vec{\rho}_{GO} \quad (5.9)$$

5.6 Parâmetros físicos

Como já dito anteriormente o avião referência para o trabalho foi o Concorde, dessa forma, muitos dos parâmetros utilizados foram deste avião. O peso máximo corrigido foi encontrado a atualizando a massa operacional do Concorde considerando que ele seria fabricado com materiais compósitos (razões descritas no Capítulo 1), pouco usados na época. Para isso foi usado a proporção de 50% em massa de materiais compósitos (KESARWANI et al., 2017) em substituição ao alumínio presente no Concorde, visto que é a mesma proporção utilizada no *Boeing 787* – isso corresponde à 70% em volume. O material foi selecionado tomando como base o projeto em desenvolvimento do *Boom Overture*, o qual

usará o compósito Toray TC350-1 (KOUROUSIS, 2023). Após calcular a massa do avião vazio, adicionou-se a diferença entre a massa máxima de aterrissagem (BRITISHAIRWAYS, 1977) e a massa operacional do avião, considerando a mesma capacidade de carga entre os dois. Algebricamente, o processo feito foi:

$$\text{Sendo } \rho_{fibra} = 1550 \text{ Kg/m}^3; \rho_{alum} = 2710 \text{ Kg/m}^3; m_{conc} = 78700 \text{ Kg}$$

Aestimativa da massa do modelo:

$$m_{model} = 0.7 \cdot \forall \cdot \rho_{fibra} + 0.3 \cdot m_{conc} , \text{ onde } \forall = \frac{m_{conc}}{\rho_{alum}} \quad (5.10)$$

O restante dos parâmetros para a aterrissagem foram obtidos do manual de voo, volume II do Concorde (BRITISHAIRWAYS, 1977), apresentados na Tabela 1

Parâmetro	Valor	Unidade
Peso máximo para aterrissagem do Concorde	111	ton
Peso máximo para aterrissagem corrigido	88	ton
Velocidade de aproximação	280 a 300	km/h
Velocidade vertical máxima no pouso	3,0	m/s
Ângulo de arfagem no pouso	9 a 13	graus

Tabela 1 – Parâmetros para a aterrissagem

Os parâmetros físicos para o trem de pouso traseiro foram obtidos a partir de estudos de trens de pouso de duas toneladas (PASH; SEBASTIAN; JOOHNSON, 2018), que somando um conjunto de dois, pesam 4 toneladas, cerca de 5% da massa corrigida do avião, dentro do esperado para trens de pouso retráteis (INFOSYS, 2018). Os dados do pneus foram encontrados a partir de interpolação de dados de estudos de pneus de trens de pouso de aviões a partir de testes de vibrações e queda livre de aeronaves (SLEEPER; DREHER, 1980). Os dados do trem de pouso dianteiro foram calculados a partir do trem de pouso traseiro pela falta de material de referência sobre.

Note que, para um avião mais leve, não faz sentido importar a mesma área da asa do Concorde. Assim, o parâmetro utilizado para a área da asa corrigida foi a carga alar, ou *wing load* (WL), que é a carga imposta por unidade de área do asa do avião. Ela foi calculada a partir da massa máxima de aterrissagem e da área da asa do Concorde, apresentados na Tabela 1 e na Tabela 3, sendo a área calculada pela razão entre o quadrado da envergadura e a razão de aspecto. Desse modo, a área da asa usada neste trabalho será:

$$S = \frac{M_{corrigido}}{WL_{Concorde}} = \frac{88000}{285} \approx 308m^2 \quad (5.11)$$

As dimensões da aeronave foram obtidas de uma página dedicada ao estudo do Concorde (SAUSMAREZ, 2010), onde são disponibilizados os dados e desenhos técnicos do avião, incluindo documentos de museus e outros. Os dados são apresentados na Tabela 3

Parâmetro	Valor	Unidade
Constante de mola do trem de pouso traseiro	11486,8	kN/m
Constante de amortecimento do trem de pouso traseiro	102,2	kNs/m
Constante elástica dos pneus traseiros	13 600	kN/m
Constante de amortecimento do pneu	9,7	kNs/m
Peso do sistema de trem de pouso traseiro	4	ton
Quantidade de trens de pouso traseiros	2	-
Quantidade de rodas por trem de pouso traseiro	4	-
Momento de inércia em relação ao CM	16864415	$kg.m^2$
Carga alar	285	kg/m^2

Tabela 2 – Parâmetros físicos da aeronave

Parâmetro	Valor	Unidade
Comprimento da aeronave	62	m
Distância do cock-pit ao trem de pouso traseiro	29,6	m
Altura do trem de pouso traseiro	3,8	m
Distância do nariz ao trem de pouso traseiro	39,2	m
Distância do nariz ao trem de pouso dianteiro	18,7	m
Envergadura	25,6m	m
Razão de aspecto	1,67	-
Corda aerodinâmica de referência	27,7	m
Distância do nariz ao centro de massa	37	m
Distância do nariz ao centro de pressão	34,2	m

Tabela 3 – Dimensões da aeronave

5.7 Modelo final

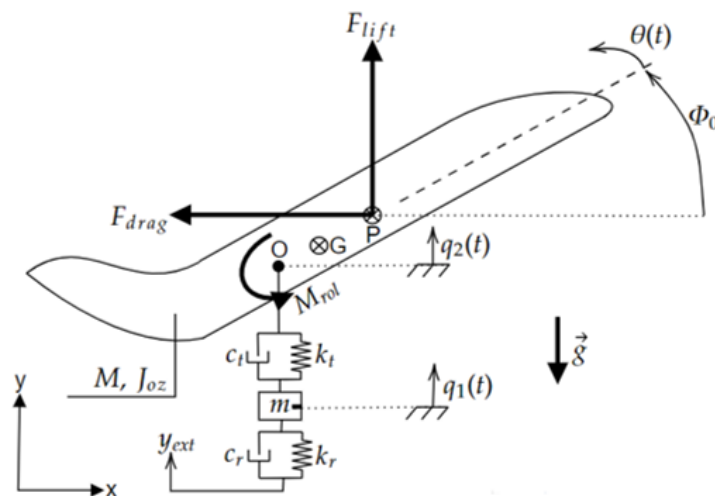


Figura 6 – Modelo físico final proposto

Fonte: Autoria própria

6 Modelo Matemático

6.1 Equacionamento mecânico

O equacionamento mecânico foi feito a partir do modelo apresentado acima na [Figura 6](#), que representa o avião entre o instante do toque no solo e a aplicação dos freios – *free-roll*. Além disso, um segundo modelo, idealizado para atestar a validade física do fenômeno retratado, representa o avião após o toque do trem de pouso dianteiro no solo, e consiste basicamente num modelo de meio carro adicionando-se uma massa m_f , relacionada ao trem de pouso frontal.

Ressalta-se que **as análises são feitas todas sobre o primeiro modelo, ou seja, o modelo durante o qual o avião passa o período de *free-roll* e o trem de pouso frontal não toca o solo.** O segundo modelo é, reforçando, apenas para comprovar que o avião no final do pouso estará nivelado e, assim, evitar confusões.

Para o segundo modelo, para q_3 a posição de referência adotada foi considerando que apenas a massa suspensa do trem de pouso frontal esteja apoiada sobre as rodas. Nessa configuração é esperado que a posição final, com a aeronave parada e em equilíbrio estático, de q_3 seja negativa e a de q_1 e q_2 sejam positivas, fato que será melhor explicado na [seção 7.5](#).

Para a obtenção das equações dinâmicas o método de Newton-Euler foi utilizado, desenvolvidas através do software *Wolfram Mathematica*.

Define-se inicialmente o parâmetro α , o qual representa o ângulo de ataque da aeronave ([Equação 6.1](#)) e as distâncias entre os pontos de pressão e o ponto de fixação do conjunto de trem de pouso traseiro ([Equação 6.2](#)) e entre centro de gravidade e, novamente, do ponto de fixação do conjunto ([Equação 6.3](#)).

$$\alpha = \theta + \Phi_0 \quad (6.1)$$

$$\rho_{PO} = \{D_{PO} \cos(\theta + \Phi_0), D_{PO} \sin(\theta + \Phi_0), 0\} \quad (6.2)$$

$$\rho_{GO} = \{D_{GO} \cos(\theta + \Phi_0), D_{GO} \sin(\theta + \Phi_0), 0\} \quad (6.3)$$

Prosseguiu-se com a determinação das forças e momentos externos do modelo a partir das informações apresentadas na [seção 5.5](#). Dado que o modelo proposto incorpora a condição de vento no pouso, adiciona-se em cada componente aerodinâmica a contribuição do mesmo, uma vez que a velocidade de entrada para tais equações é relativa. Mesmo que o movimento seja plano, as forças foram expressas de forma vetorial para a aplicação direta dos produtos vetoriais no *software*.

$$\vec{W} = \{0, -gM, 0\} \quad (6.4)$$

$$\vec{D}_{ext} = \left\{ -\frac{1}{2}\rho SC_D (u_{longit} + u_{vento})^2, 0, 0 \right\} \quad (6.5)$$

$$\vec{L}_{ext} = \left\{ 0, \frac{1}{2}\rho SC_L (u_{longit} + u_{vento})^2, 0 \right\} \quad (6.6)$$

$$\vec{F}_{rol} = \left\{ \mu_{rol} \left(\frac{1}{2}\rho SC_L (u_{longit} + u_{vento})^2 - gM \right), 0, 0 \right\} \quad (6.7)$$

$$\vec{M}_{rol} = \left\{ 0, 0, \frac{1}{2}D_{GO}\mu_{rol} \sin(\theta + \Phi_0) (2gM - \rho SC_L (u_{longit} + u_{vento})^2) \right\} \quad (6.8)$$

$$\vec{M}_{aero} = \left\{ 0, 0, \frac{1}{2}\rho SD_{PO} (u_{longit} + u_{vento})^2 (C_D \sin(\theta + \Phi_0) + C_L \cos(\theta + \Phi_0)) \right\} \quad (6.9)$$

$$\vec{M}_{peso} = \{0, 0, -gMD_{GO} \cos(\theta + \Phi_0)\} \quad (6.10)$$

6.1.1 Equacionamento para fase de Free-Roll

Desta maneira, aplica-se o *Teorema da Quantidade de Movimento Angular* (TQMA) em relação a O , objetivando simplificar o equacionamento por conta momento nulo de forças vindas do conjunto de molas para esse ponto. Já levando em conta a hipótese de movimento plano. Obtem-se a seguinte expressão:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}D_{GO} \left(\mu_{rol} \sin(\theta + \Phi_0) \left(\rho SC_L (u_{longit} + u_{vento})^2 - 2gM \right) + 2M(g + \ddot{q}_2) \cos(\theta + \Phi_0) \right) - \\ & \frac{1}{2}\rho SD_{PO} (u_{longit} + u_{vento})^2 (C_D \sin(\theta + \Phi_0) + C_L \cos(\theta + \Phi_0)) + J_{oz}\ddot{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (6.11)$$

Para tomar o *Teorema do Movimento do Baricentro* (TMB), nota-se que o centro de massa (G) está deslocado do ponto rotação (O), cuja dinâmica é conhecida graças a tratativa de m como um corpo rígido. Dessa maneira, faz-se necessária a aplicação do campo de acelerações do polo O para G . A expressão para aceleração da fuselagem (Equação 6.12) é obtida, em seguida as expressões de movimento do sistema.

$$\begin{aligned} a_G = a_O + \vec{\alpha} \wedge (G - O) + \vec{\omega} \wedge \vec{\omega} \wedge (G - O) = & \{ D_{GO}\dot{\theta}^2 (-\cos(\theta + \Phi_0)) \\ & - D_{GO}\ddot{\theta} \sin(\theta + \Phi_0), D_{GO}\ddot{\theta} \cos(\theta + \Phi_0) + D_{GO}\dot{\theta}^2 (-\sin(\theta + \Phi_0)) + \ddot{q}_2, 0 \} \end{aligned} \quad (6.12)$$

TMB para m:

$$c_r (\dot{q}_1 - \dot{y}_{ext}) + c_t (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + k_r (q_1 - y_{ext}) + k_t (q_1 - q_2) + m\ddot{q}_1 = 0 \quad (6.13)$$

TMB para M:

$$\begin{aligned} & M \left(D_{GO} \left(\ddot{\theta} \cos(\theta + \Phi_0) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta + \Phi_0) \right) + \ddot{q}_2 \right) \\ & + k_t (q_2 - q_1) + c_t (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - \frac{1}{2}\rho SC_L (u_{longit} + u_{vento})^2 = 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

6.1.2 Equacionamento para fase pós toque frontal

Para o modelo pós toque, apresentado no [Capítulo 9](#) na [Figura 41](#), o mesmo procedimento foi aplicado, conservando-se as forças e momentos externos. Entende-se para a etapa pós toque do trem de pouso frontal pelo conhecido modelo de meio carro. Assim, as expressões dinâmicas do modelo são:

O TQMA:

$$\begin{aligned} D_{FO} \cos(\theta + \Phi_0) \left(D_{FO} \left(c_{Tf} \dot{\theta} \cos(\theta + \Phi_0) + k_{Tf} \sin(\theta + \Phi_0) \right) + c_{Tf} (\dot{q}_2 - \dot{q}_3) + k_{Tf} (q_2 - q_3) \right) + \\ \frac{1}{2} D_{GO} \left(\mu_{rol} \sin(\theta + \Phi_0) \left(\rho S C_L (u_{longit} + u_{vento})^2 - 2gM \right) + 2M (g + \ddot{q}_2) \cos(\theta + \Phi_0) \right) - \\ \frac{1}{2} \rho S D_{PO} (u_{longit} + u_{vento})^2 (C_D \sin(\theta + \Phi_0) + C_L \cos(\theta + \Phi_0)) + J_{oz} \ddot{\theta} = 0 \end{aligned} \quad (6.15)$$

TMB para m:

$$c_r (\dot{q}_1 - \dot{y}_{ext}) + c_t (\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + k_r (q_1 - y_{ext}) + k_t (q_1 - q_2) + m \ddot{q}_1 = 0 \quad (6.16)$$

TMB para mf:

$$\begin{aligned} - c_{Tf} \left(D_{FO} \dot{\theta} \cos(\theta + \Phi_0) + \dot{q}_2 - \dot{q}_3 \right) + c_{rf} (\dot{q}_3 - \dot{y}_{ext}) - \\ k_{Tf} (D_{FO} \sin(\theta + \Phi_0) + q_2 - q_3) + k_{rf} (q_3 - y_{ext}) + m_f \ddot{q}_3 = 0 \end{aligned} \quad (6.17)$$

TMB para M:

$$\begin{aligned} c_{Tf} \left(D_{FO} \dot{\theta} \cos(\theta + \Phi_0) + \dot{q}_2 - \dot{q}_3 \right) + c_t (\dot{q}_2 - \dot{q}_1) - \frac{1}{2} \rho S C_L (u_{longit} + u_{vento})^2 \\ + M \left(D_{GO} \left(\ddot{\theta} \cos(\theta + \Phi_0) - \dot{\theta}^2 \sin(\theta + \Phi_0) \right) + \ddot{q}_2 \right) \\ + k_{Tf} (D_{FO} \sin(\theta + \Phi_0) + q_2 - q_3) + k_t (q_2 - q_1) = 0 \end{aligned} \quad (6.18)$$

6.2 Espaço de estados e linearização

A partir da [Equação 6.13](#), [Equação 6.14](#) e [Equação 6.11](#) descritas na seção anterior, pode-se construir o espaço de estados do sistema. O estado do sistema é uma coleção de variáveis que agrupam o passado do sistema com o objetivo de prever seu futuro – para um sistema físico, como o atual, o estado é composto por variáveis referentes ao armazenamento de massa, momento e energia ([ASTRÖM, 2008](#)). O espaço de estados pode ser não linear ou linear, dependendo das características intrínsecas ao sistema e sua operação.

6.2.1 Espaço de estados não linear

O espaço de estados não linear é em especial útil para sua utilização com simulações numéricas, afinal, ele pode ser aplicado a praticamente qualquer sistema. Na prática, os

erros provenientes da aritmética de ponto flutuante ou do próprio método e parâmetros de integração podem ser muito perigosos e os resultados devem ser cuidadosamente analisados. Mesmo assim, a integração numérica baseada no espaço de estados não linear de um sistema vem apresentando significativa influência no processo de solução de problemas na engenharia (CHAPRA, 2014). Para as equações dinâmicas do sistema, obtêm-se o espaço de estados não linear agrupando os coeficientes do vetor \mathbf{f} , resultando em:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{\theta} \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{f}^{6x1}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (6.19)$$

Onde as expressões de \ddot{q}_1 , \ddot{q}_2 e $\ddot{\theta}$ são representados a seguir:

$$\ddot{q}_1 = \left(\frac{1}{m}\right)[c_r(\dot{y}_{\text{ext}} - \dot{q}_1) + c_t(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + k_r(y_{\text{ext}} - q_1) + k_t(q_2 - q_1)] \quad (6.20)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 = & \frac{-1}{2M(MD_{\text{GO}}^2 \cos^2(\theta + \Phi_0) - J_{\text{oz}})} \left[J_{\text{oz}} \left(2c_t(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \rho SC_L (u_{\text{longit}} + u_{\text{vento}})^2 + 2k_t(q_1 - q_2) \right) + \right. \\ & MD_{\text{GO}}^2 \cos(\theta + \Phi_0) \left(\mu_{\text{rol}} \sin(\theta + \Phi_0) \left(\rho SC_L (u_{\text{longit}} + u_{\text{vento}})^2 - 2gM \right) + 2gM \cos(\theta + \Phi_0) \right) \\ & + \frac{1}{2} MD_{\text{GO}} \left(4J_{\text{oz}} \dot{\theta}^2 \sin(\theta + \Phi_0) - \rho SD_{\text{PO}} (u_{\text{longit}} + u_{\text{vento}})^2 (C_D \sin(2(\theta + \Phi_0))) \right. \\ & \left. \left. + 2C_L \cos^2(\theta + \Phi_0) \right) \right] \end{aligned} \quad (6.21)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \left(\frac{1}{2MD_{\text{GO}}^2 - 2J_{\text{oz}} \sec^2(\theta + \Phi_0)} \right) \left[\sec(\theta + \Phi_0) (D_{\text{GO}} (2(c_t(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - gM\mu_{\text{rol}} \tan(\theta + \Phi_0) + gM + \right. \\ & k_t(q_1 - q_2)) + \rho SC_L (u_{\text{longit}} + u_{\text{vento}})^2 (\mu_{\text{rol}} \tan(\theta + \Phi_0) + 1) + \\ & \left. \left. \rho(-S)D_{\text{PO}} (u_{\text{longit}} + u_{\text{vento}})^2 (C_D \tan(\theta + \Phi_0) + C_L) + 2MD_{\text{GO}}^2 \dot{\theta}^2 \sin(\theta + \Phi_0) \right) \right] \end{aligned} \quad (6.22)$$

Ainda há o vetor de observações \mathbf{y} , que expressará que as observações são nas coordenadas θ , q_2 e suas quasi-velocidades (razões na subseção 6.2.3).

6.2.2 Espaço de estados linear

A representação do espaço de estados na forma linear é muito interessante do ponto de vista de análise, pois pode-se obter informações sobre o comportamento e propriedades do sistema mesmo sem realizar sua integração numérica, que pode ser custosa.

Para realizar a linearização, define-se variáveis incrementais nas coordenadas generalizadas, dadas pela expansão em serie de Taylor truncada em primeira ordem da variável original em torno do ponto de linearização. Neste trabalho, a linearização foi feita aplicando-se a função *Linearize.m* de autoria do Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino, também presente no [GitHub](#), a qual recebe como entradas a equação dinâmica

não linearizada e a posição de equilíbrio do sistema, retornando a equação dinâmica linearizada. Contudo, note que no sistema em questão dois problemas estão envolvidos em sua linearização: a não existência de um ponto de equilíbrio conhecido das coordenadas durante o período (*free-roll*) analisado e a incerteza da distância do centro de massa G ao ponto de rotação O , um parâmetro sensível ao modelo. A solução desses problemas é apresentada abaixo.

6.2.2.1 Pontos de linearização

Como explicado, o modelo linear permanecerá válido apenas quando o sistema opera em uma faixa suficientemente pequena em torno do ponto de linearização (BROUCKE, 2020). Contudo, o modelo proposto na fase de *free-roll* é quase como um pêndulo duplo invertido, considerando que as molas e amortecedores modelariam, nesse hipotético cenário, a histerese e elasticidade das barras. Naturalmente, não há um ponto de equilíbrio – o avião irá, no modelo proposto (sem o chaveamento explicado mais adiante), descer o nariz indefinidamente. Outra proposta praticamente análoga é linearizar em torno de um ponto de operação desejado do sistema, afinal, a linearização é essencialmente uma aproximação da dinâmica não linear nessa faixa (ASTRÖM, 2008). Seguindo essa última premissa, dois motivos sustentam a proposta de linearizar θ em torno de 0° .

O primeiro baseia-se em tornar o modelo linear capaz capturar o comportamento do sistema logo nos primeiros instantes do toque, período no qual a variação do ângulo θ é pequena. Como o instante do toque na pista é o que traz mais cargas ao trem de pouso e, pela velocidade e ângulos mais elevados, traz mais dificuldades ao controle da aeronave, a aproximação linear conseguiria retratar melhor o período justamente no qual as dinâmicas mais interessantes ocorrem.

Já o segundo motivo, o principal do ponto dos resultados numéricos na simulação, relaciona-se à faixa de operação do sistema. Como descrito na Tabela 1, o ângulo de arfagem usual máximo do Concorde no toque é de 13° . Nesse sentido, linearizando θ em torno de 0° , o momento imediatamente anterior ao toque do trem de pouso frontal na pista, último instante no qual o modelo de *free-roll* é válido, a diferença do ponto de linearização até o ângulo real será de -13° . Expandindo termos não-lineares da Equação 6.19, por exemplo o seno e cosseno, e truncando no termo de primeira ordem, assim como a função *Linearize*, tem-se $\cos(\theta) \approx 1$ e $\sin(\theta) \approx x$. Para $\theta = \frac{13\pi}{180}$, o erro da aproximação do seno é de 0,86% e do cosseno é de 2,63%. Dada as incertezas dos parâmetros utilizados, por exemplo, a massa do avião que variaria moderadamente de voo para voo, os erros são aceitáveis, em especial considerando que se pronunciariam mais ainda no momento de menor interesse da análise, como explicado anteriormente.

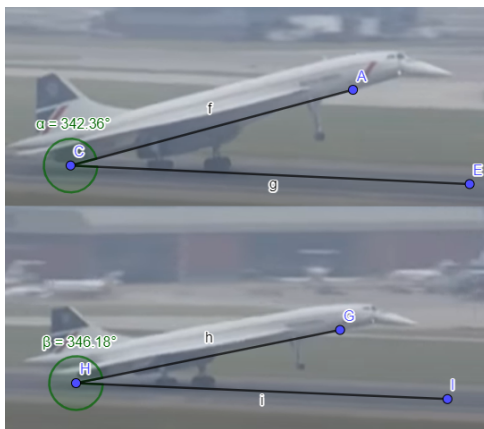
6.2.2.2 Calibração do modelo

Um dos principais problemas enfrentados na simulação é a distância do centro de massa. Logo no instante do toque, considerando os valores máximos apresentados na [Tabela 1](#) e ausência de vento, pela [Equação 6.6](#) e [Equação 6.5](#) tem-se $L \approx 6.5 * 10^5 N$ e $D \approx 1.9 * 10^5 N$, enquanto $W = 8 * 10^5 N$. Note que os valores possuem mesma ordem de grandeza e são próximos – por conta disso, a distância do centro de massa ao ponto de rotação, que define o braço do momento da força peso, é de extrema importância para a fidedignidade das simulações.

Essa distância é, segundo a principal referência de parâmetros físicos deste trabalho, de $2,2m$ ([SAUSMAREZ, 2010](#)). Contudo, ficou-se hesitante em adotar esse valor primeiramente pelo fato de que o centro de massa de um avião é extremamente variável, afinal, as pessoas, bagagens e o próprio combustível no avião se deslocam de maneira imprevisível a cada voo.

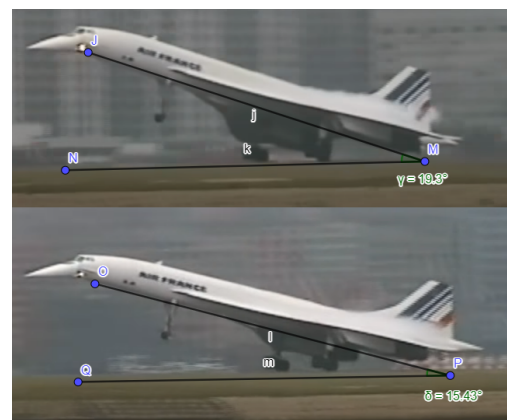
Sendo assim, a solução foi analisar vídeos do Concorde pousando em diferentes aeroportos e foram medidos os ângulos de arfagem no momento do toque e após dois segundos, tempo no qual a hipótese de *free-roll* se sustenta. Com o ângulo em mãos, o próximo passo foi substituir na simulação não-linear os parâmetros físicos de massa, área de asa e momento de inércia pelos referentes ao Concorde, além de simular com a velocidade vertical de aproximação nominal de $-2m/s$ ([AIGOIN, 2012](#)). Por fim, a distância D_{GO} foi ajustada até que o braço da força peso proporcionasse, para o Concorde, o mesmo comportamento observado no vídeo. Como as dimensões (com exceção da área asa) estão sendo importadas do Concorde, o mesmo braço foi utilizado no modelo.

As cinco medidas realizadas mostraram que o ângulo de arfagem do avião varia de 3° a 5° em aproximadamente $2s$ após o toque, como mostrado nas figuras abaixo:



(a) Pouso em *Heathrow Airport*

Fonte: ([THAMESTV, 2019](#))



(b) Pouso em *KAI-TAK Airport*

Fonte: ([JUSTPLANES, 2018](#))

Figura 7 – Medidas de ângulo de arfagem em *free-roll*

Naturalmente, há distorção e imprecisão nas imagens, contudo, os cinco pousos mostraram valores dentro dessa faixa. Com esse processo, iterativamente chegou-se em $D_{GO} = 3.5m$, para o qual o ângulo varia $4,1^\circ$ em $2s$. Como a precisão do modelo não é da ordem de décimo de grau e, em verdade, essa ordem de grandeza é tampouco significativa. Nesse caso, tem-se um modelo no estilo paramétrico, o qual representa uma dada estrutura onde os parâmetros são algumas vezes desconhecidos e devem ser estimados (COELHO, 2016). Portanto, considerou-se a calibração do modelo paramétrico válida.

Com os problemas envolvidos com a linearização contornados, obteve-se o seguinte espaço de estados linear:

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{\theta} \\ \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{\theta} \end{pmatrix} = \mathbf{f}_{lin}^{6 \times 1}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \quad (6.23)$$

Onde as expressões de \ddot{q}_1 , \ddot{q}_2 e $\ddot{\theta}$ são representados a seguir:

$$\ddot{q}_1 = \left(\frac{1}{m}\right)[c_r(\dot{y}_{ext} - \dot{q}_1) + c_t(\dot{q}_2 - \dot{q}_1) + k_r(y_{ext} - q_1) + k_t(q_2 - q_1)] \quad (6.24)$$

$$\begin{aligned} \ddot{q}_2 = & \left(\frac{1}{4M(MD_{GO}^2 \cos^2(\Phi_0) - J_{oz})}\right) \left[-2J_{oz} \left(2c_t(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) + \rho SC_L (u_{longit} + u_{vento})^2 + 2k_t(q_1 - q_2) \right) \right. \\ & + 2MD_{GO}^2 \cos(\Phi_0) \left(\mu_{rol}(\theta \cos(\Phi_0) + \sin(\Phi_0)) \left(2gM - \rho SC_L (u_{longit} + u_{vento})^2 \right) \right. \\ & + 2M\rho SD_{GO} D_{PO} \cos(\Phi_0) (u_{longit} + u_{vento})^2 (\sin(\Phi_0)(C_D - C_L\theta) + \cos(\Phi_0)(C_D\theta + C_L)) \Big] \\ & \left. + 2gM(\theta \sin(\Phi_0) - \cos(\Phi_0)) \right] \end{aligned} \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = & \left(\frac{1}{2MD_{GO}^2 \cos^2(\Phi_0) - 2J_{oz}}\right) D_{GO} \left[(2 \cos(\Phi_0)(c_t(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) - gM\mu_{rol}\theta + gM + k_t(q_1 - q_2)) + \right. \\ & \rho SC_L (u_{longit} + u_{vento})^2 (\mu_{rol}(\theta \cos(\Phi_0) + \sin(\Phi_0)) + \cos(\Phi_0)) - 2gM \sin(\Phi_0)(\mu_{rol} + \theta)) \\ & \left. - \rho SD_{PO} (u_{longit} + u_{vento})^2 (\sin(\Phi_0)(C_D - C_L\theta) + \cos(\Phi_0)(C_D\theta + C_L)) \right] \end{aligned} \quad (6.26)$$

6.2.3 Modelo completo do espaço de estados linearizado

Pode-se, contudo, expressar o espaço de estados linear da maneira completa com a seguinte representação:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{aligned} \quad (6.27)$$

Onde $\mathbf{A}^{6 \times 6}$ a matriz de estados do sistema, expressando como os estados internos estão conectados entre si, e $\mathbf{B}^{6 \times 2}$ a matriz de entradas, mostrando como as entradas são absorvidas pelo sistema. Essas duas são determinadas pela estrutura e elementos do sistema. Já a matriz $\mathbf{C}^{4 \times 6}$ é a matriz de observações, expressando como os estados se combinam para formar a saída do sistema, e $\mathbf{D}^{4 \times 2}$ é a matriz de alimentação, não utilizada neste trabalho, sendo estas definidas a partir da escolha das variáveis de saída.

A partir das equações dinâmicas, define-se \mathbf{A} algebricamente como:

$$\mathbf{A}^{6 \times 6} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_r+k_t}{m} & \frac{k_t}{m} & 0 & -\frac{c_r+c_t}{m} & \frac{c_t}{m} & 0 \\ A_{5,1} & A_{5,2} & A_{5,3} & A_{5,4} & A_{5,5} & 0 \\ A_{6,1} & A_{6,2} & A_{6,3} & A_{6,4} & A_{6,5} & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.28)$$

De modo que os termos da matriz \mathbf{A} são apresentados a seguir:

$$A_{5,1} = -\frac{J_{oz}k_t}{M(MD_{GO}^2 \cos^2(\Phi_0) - J_{oz})} \quad (6.29)$$

$$A_{5,2} = \frac{J_{oz}k_t}{M(MD_{GO}^2 \cos^2(\Phi_0) - J_{oz})} \quad (6.30)$$

$$A_{5,3} = \frac{D_{GO}^2 \mu_{rol} \cos^2(\Phi_0) (2gM - \rho SC_L (u_{longit} + u_{vento})^2)}{2(MD_{GO}^2 \cos^2(\Phi_0) - J_{oz})} + \frac{gMD_{GO}^2 \sin(\Phi_0) \cos(\Phi_0)}{MD_{GO}^2 \cos^2(\Phi_0) - J_{oz}} - \frac{\rho SC_L D_{GO} D_{PO} \sin(\Phi_0) \cos(\Phi_0) (u_{longit} + u_{vento})^2}{2(MD_{GO}^2 \cos^2(\Phi_0) - J_{oz})} + \frac{\rho SC_D D_{GO} D_{PO} \cos^2(\Phi_0) (u_{longit} + u_{vento})^2}{2(MD_{GO}^2 \cos^2(\Phi_0) - J_{oz})} \quad (6.31)$$

$$A_{5,4} = \frac{c_t J_{oz}}{M(J_{oz} - MD_{GO}^2 \cos^2(\Phi_0))} \quad (6.32)$$

$$A_{5,5} = \frac{c_t J_{oz}}{M^2 D_{GO}^2 \cos^2(\Phi_0) - M J_{oz}} \quad (6.33)$$

$$A_{6,1} = \frac{2D_{GO}k_t \sec(\Phi_0)}{2MD_{GO}^2 - 2J_{oz} \sec^2(\Phi_0)} \quad (6.34)$$

$$A_{6,2} = -\frac{2D_{GO}k_t \sec(\Phi_0)}{2MD_{GO}^2 - 2J_{oz} \sec^2(\Phi_0)} \quad (6.35)$$

$$A_{6,3} = \frac{\rho SC_L D_{PO} \tan(\Phi_0) \sec(\Phi_0) (u_{longit} + u_{vento})^2}{2MD_{GO}^2 - 2J_{oz} \sec^2(\Phi_0)} + \frac{\rho SC_L D_{GO} \mu_{rol} \sec(\Phi_0) (u_{longit} + u_{vento})^2}{2MD_{GO}^2 - 2J_{oz} \sec^2(\Phi_0)} - \frac{\rho SC_D D_{PO} \sec(\Phi_0) (u_{longit} + u_{vento})^2}{2MD_{GO}^2 - 2J_{oz} \sec^2(\Phi_0)} - \frac{2gMD_{GO} \mu_{rol} \sec(\Phi_0)}{2MD_{GO}^2 - 2J_{oz} \sec^2(\Phi_0)} - \frac{2gMD_{GO} \tan(\Phi_0) \sec(\Phi_0)}{2MD_{GO}^2 - 2J_{oz} \sec^2(\Phi_0)} \quad (6.36)$$

$$A_{6,4} = \frac{c_t D_{GO} \sec(\Phi_0)}{MD_{GO}^2 - J_{oz} \sec^2(\Phi_0)} \quad (6.37)$$

$$A_{6,5} = \frac{c_t D_{GO} \sec(\Phi_0)}{J_{oz} \sec^2(\Phi_0) - MD_{GO}^2} \quad (6.38)$$

Observe que os elementos que compõe os dois blocos 2×2 inferiores nos cantos esquerdo e direito apresentam, pela simetria dos sistemas massa-mola na massa m , valores alternados nas duas linhas – esse fato trará um fenômeno interessante.

Quanto à matriz \mathbf{B} , sabe-se que ela deve possuir apenas dois componentes não nulos, afinal, apenas a mola e amortecedor referentes ao pneu recebem entradas. Como previsto:

$$\mathbf{B}^{6 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{k_r}{m} & \frac{c_r}{m} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.39)$$

Para definir \mathbf{C} , foi estudado quais variáveis poderiam ser medidas através de sensores. Com um sensor de distância até a pista, poder-se ia incluir um sensor alinhado ao ponto O – fornece $q_2(t)$ e outro em qualquer ponto diferente na mesma linha - conhecendo-se a distância entre os dois, ter-se-ia $\theta(t)$. Com essas posições em função do tempo, pode-se igualmente obter as derivadas das coordenadas anteriores no tempo. Assim, a matriz \mathbf{C} deve expressar que $q_2(t), \theta(t), \dot{q}_2(t)$ e $\dot{\theta}(t)$ serão observados, como apresentado na [Equação 6.40](#). A matriz \mathbf{D} será composta por zeros – inutilizada.

$$\mathbf{C}^{4 \times 6} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \mathbf{D}^{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

Ao juntar as matrizes, obtém-se a representação completa do espaço de estados. Contudo, note que a matriz \mathbf{A} varia no tempo, visto que a velocidade longitudinal do avião é, devido a incapacidade do modelo de retratar a dinâmica longitudinal do problema, uma variável imposta com uma valor distinto para cada instante de tempo, tornando a matriz \mathbf{A} dependente do tempo e, assim, o sistema linear variante no tempo.

Mesmo que esse tipo de sistema não seja escopo do curso, é possível as análises cabíveis ao atual trabalho sem grandes complicações. Primeiramente, para realizar a análise no domínio da frequência na [seção 6.3](#), nota-se que a cada momento ter-se-á uma matriz \mathbf{A} distinta e, desse modo, cada configuração momentânea do sistema irá apresentar função de transferência, polos e zeros distintos. Naturalmente, é inviável analisar todos os instantes profundamente e, desse modo, os parâmetros no instante inicial do toque foram utilizados, visto que, como já explicado, é o momento mais crítico que deseja-se estudar. Assim, a matriz \mathbf{A} com os valores numéricos foi obtida substituindo u_{longit} por 300 km/h , $u_{vento} = 0 \text{ m/s}$ e $\Phi_0 = 13^\circ$, lembrando que $\theta = 0$ na linearização e, assim, o ângulo de ataque é o próprio Φ_0 . Essa escolha também é motivada pelo fato de que, como demonstrado na [Capítulo 7](#), a velocidade não varia substancialmente durante o *free-roll*.

De qualquer modo, na [seção 6.4](#) foi-se discutida a variação de \mathbf{A} no tempo e as implicações no comportamento do sistema.

O espaço de estados completo é dado, portanto, por:

$$SS = \left(\begin{array}{cccccc|cc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{62717}{10} & \frac{28717}{10} & 0 & -\frac{13987}{500} & \frac{25549}{1000} & 0 & 3400 & \frac{97}{40} \\ 138,965 & -138,965 & -0,192852 & 1,23635 & -1,23635 & 0 & 0 & 0 \\ -2,47292 & 2,47292 & 0,0565499 & -0,0220011 & 0,0220011 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad (6.41)$$

6.3 Análise no domínio da frequência

Determinar a estabilidade de sistemas dinâmicos interconectados, em especial quando integrado com *feedback* (ainda não o caso deste trabalho), pode se tornar uma tarefa intrincada pois cada parte tem influência sobre as demais e, da mesma forma, é influenciada pelas mesmas. Para contornar esse problema de análise, utiliza-se as técnicas de funções de transferências no domínio da frequência ([ASTRÖM, 2008](#)).

6.3.1 Função de transferência

A função de transferência ($G(s)$) estabelece a relação no domínio da frequência entre os sinais de entrada e saída do sistema, naturalmente, também expressos no domínio da frequência, desconsiderando-se as condições iniciais. Para tanto, basta realizar a transformada de Laplace dos sinais de entrada e saída – a razão entre esses é a função de transferência.

$$G(s) = \frac{\mathcal{L}[\text{Saída}]}{\mathcal{L}[\text{Entrada}]} = \frac{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}} \quad (6.42)$$

Desse modo, como a função de transferência $G(s)$ relaciona cada saída a cada uma das entradas do sistema, ela será representada por uma matriz 4×2 , cada linha representando uma das variáveis observadas, dadas pela [Equação 6.40](#), e cada coluna indicando a entrada à qual $G(s)$ está relacionada, indicadas pela [Equação 5.2](#). Tomando o espaço de estados supracitado, a seguinte $G(s)$ é obtida:

$$TF^{4x2} = \begin{pmatrix} TF_1^{4x1} & TF_2^{4x1} \end{pmatrix} \quad (6.43)$$

$$TF_1^{4x1} = \begin{pmatrix} \frac{472482+4203,58s}{472460+4540,48s+6413,66s^2+29,2103s^3+s^4} \\ -\frac{74,8037(5,3497*10^{-13}-2,35569*10^{-14}s+112,4s^2+s^3)}{-25097,3-241,186s+472119s^2+4538,93s^3+6413,61s^4+29,2103s^5+s^6} \\ \frac{472482s+4203,58s^2}{472460+4540,48s+6413,66s^2+29,2103s^3+s^4} \\ -\frac{-8407,92s^3-74,8037s^4}{-25097,3-241,186s+472119s^2+4538,93s^3+6413,61s^4+29,2103s^5+s^6} \end{pmatrix} \quad (6.44)$$

$$TF_2^{4x1} = \begin{pmatrix} \frac{336,991+2,99814s}{472460+4540,48s+6413,66s^2+29,2103s^3+s^4} \\ -\frac{0,0533526(-1,06543*10^{-12}s+112,4s^2+s^3)}{-25097,3-241,186s+472119s^2+4538,93s^3+6413,61s^4+29,2103s^5+s^6} \\ \frac{336,991+2,99814s}{472460+4540,48s+6413,66s^2+29,2103s^3+s^4} \\ -\frac{-5,99682s^3-0,0533526s^4}{-25097,3-241,186s+472119s^2+4538,93s^3+6413,61s^4+29,2103s^5+s^6} \end{pmatrix} \quad (6.45)$$

Note que há dois denominadores distintos – esse fato será abordado mais adiante. O polinômio característico do sistema é:

$$p(s) = -25097,3 - 241,186s + 472119s^2 + 4538,93s^3 + 6413,61s^4 + 29,2103s^5 + s^6 \quad (6.46)$$

Uma prática usualmente empregada quando se trabalha com funções de transferência é a expansão em frações parciais. Essa é uma ferramenta para, além de otimizar a aplicação da transformada de Laplace inversa, facilitar a análise qualitativa de $G(s)$. Expandindo-a em frações parciais, obtém-se as seguintes colunas:

$$TF_1^{4x1} = \begin{pmatrix} \frac{-0,328452s-85,0131}{1.s^2+28,833s+6328,12} + \frac{0,328452s+75,6668}{1.s^2+0,377331s+74,6604} \\ \frac{-0,00584555s-1,34555}{1.s^2+0,377331s+74,6604} + \frac{0,00584488s+1,51282}{1.s^2+28,833s+6328,12} - \frac{0,00204899}{1.s-0,230479} + \frac{0,00204966}{1.s+0,230479} \\ \frac{2078,48-75,5429s}{1.s^2+28,833s+6328,12} + \frac{75,5429s-24,5223}{1.s^2+0,377331s+74,6604} \\ \frac{0,436431-1,34335s}{1.s^2+0,377331s+74,6604} + \frac{1,34429s-36,9871}{1.s^2+28,833s+6328,12} - \frac{0,000472249}{1.s-0,230479} - \frac{0,000472403}{1.s+0,230479} \end{pmatrix} \quad (6.47)$$

$$TF_2^{4x1} = \begin{pmatrix} \frac{-0,000234263s-0,0606344}{1.s^2+28,833s+6328,12} + \frac{0,000234263s+0,0539683}{1.s^2+0,377331s+74,6604} \\ \frac{-4,169253*10^{-6}s-0,000959694}{1.s^2+0,377331s+74,6604} + \frac{4,168774*10^{-6}s+0,00107899}{1.s^2+28,833s+6328,12} - \frac{1,461413*10^{-6}}{1.s-0,230479} + \frac{1,461891*10^{-6}}{1.s+0,230479} \\ \frac{1,48245-0,0538799s}{1.s^2+28,833s+6328,12} + \frac{0,0538799s-0,0174902}{1.s^2+0,377331s+74,6604} \\ \frac{0,000311278-0,000958121s}{1.s^2+0,377331s+74,6604} + \frac{0,000958795s-0,0263805}{1.s^2+28,833s+6328,12} - \frac{3,368245*10^{-7}}{1.s-0,230479} - \frac{3,369348*10^{-7}}{1.s+0,230479} \end{pmatrix} \quad (6.48)$$

Onde [Equação 6.47](#) está relacionada com a entrada de posição e [Equação 6.48](#) de velocidade. Observe que um fenômeno peculiar ocorre – para q_2 e \dot{q}_2 , o sistema perde 2 graus de liberdade, reduzindo para um sistema de 4^a ordem. Esse fenômeno é conhecido como cancelamento de polos e zero (tema tratado na próxima seção), o que indica que alguma dinâmica no sistema deixa de ser vista pela saída e nem pode ser alterada pela entrada, ou seja, perda de controlabilidade ([CABRAL, 2015](#)). Ele surge do fato de que como $G(s)$ é definida por uma divisão de polinômios, pode ocorrer de haver termos comuns que se cancelem – em particular, o cancelamento no modelo atual ocorre pois há alternância

de termos nas duas últimas linhas de \mathbf{A} . Nesses casos, uma pequena perturbação no sistema pode evitar o cancelamento (ASTRÖM, 2008), e é o que ocorre no modelo. Por exemplo, mantendo os demais parâmetros do espaço de estados e impondo agora vento de $u_{vento} = 160m/s$, o sistema volta a apresentar denominador comum e é de 6 ordem para todas as saídas observáveis.

Em suma, pela simetria dos blocos inferiores da matriz \mathbf{A} , para um sistema pouco perturbado as saídas relacionadas a q_2 independem de duas dinâmicas do sistema. Como a função de transferência nesse cenário é composta pela superposição de dois sistemas de segunda ordem para q_2 e \dot{q}_2 (elementos das linhas 1 e 3 de $G(s)$), a dinâmica governante é a dos dois conjuntos massa-mola-amortecedor referentes ao trem de pouso e aos pneus, assim, θ e $\dot{\theta}$ não tem grande influência nesse cenário de poucas perturbações sobre q_2 e \dot{q}_2 . Esse fato será demonstrado na Capítulo 7 por meio da Figura 20.

Esse fenômeno de cancelamento deve ser cuidadosamente tratado, afinal, caso ocorra cancelamento de polo e zero com um polo instável, a função de transferência em relação a uma entrada pode permanecer limitada enquanto outra pode estourar exponencialmente – é exatamente isso que ocorre no sistema, como apresentado a seguir.

6.4 Polos e zeros do sistema

Um sistema dinâmico pode ser caracterizado, no domínio da frequência, por seus polos e zeros no sentido de que eles permitem a reconstrução da equação diferencial de entrada e saída (GONZALEZ, 2004). Os polos do sistema são as raízes do denominador de $G(s)$. Como os coeficientes dos termos no denominador são puramente reais, os polos podem ser apenas reais ou complexos conjugados. Já os zeros do sistema são as raízes do numerador.

A existência de um zero faz com que, para a frequência analisada, a saída do sistema não responda à entrada em questão. Desse modo, a existência de um zero nas vizinhanças de um polo pode reduzir o efeito deste sobre a resposta do sistema (TANI, 2004). Os polos do sistema são de peculiar importância, pois se p for um polo, por exemplo, $y(t) = e^{pt}$ será uma solução homogênea da equação diferencial que descreve o sistema, ou seja, o polo p corresponde ao modo do sistema relacionado à solução e^{pt} . Assim, o movimento não forçado do sistema para uma excitação genérica é, basicamente, a soma ponderada de todos os modos (ASTRÖM, 2008). Para o mesmo espaço de estado tratado anteriormente, tem-se como zeros:

$$\mathbf{Z}_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} -112,4 & -112,4 \\ -112,4, 0, -6,898 * 10^{-8}i, +6,898 * 10^{-8}i & -112,4, 0 \\ -112,4, 0 & -112,4, 0 \\ -112,4, 0, 0, 0 & -112,4, 0, 0, 0 \end{pmatrix}. \quad (6.49)$$

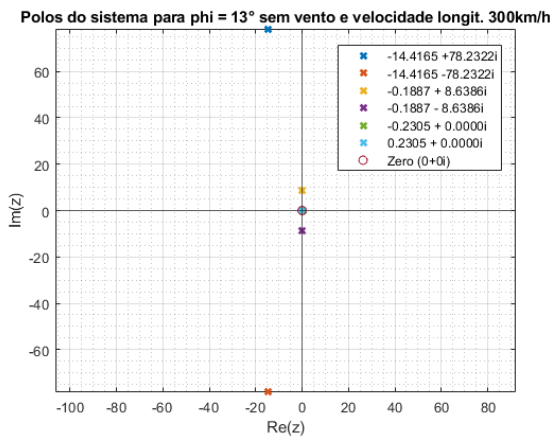
Como esperado, os complexos vêm em pares conjugados dado que todos os coeficientes de $p(s)$ são reais. Já os polos do sistema, arredondados para facilitar visualização, são:

$$\mathbf{P}^{4 \times 2} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1^{4 \times 1} & \mathbf{P}_2^{4 \times 1} \end{pmatrix} \quad (6.50)$$

$$\mathbf{P}_1^{4 \times 1} = \mathbf{P}_2^{4 \times 1} = \begin{pmatrix} 14, 4 - 78, 2i, -14, 4 + 78, 2i, -0, 18 - 8, 6i, -0, 18 + 8, 6i \\ 14, 4 - 78, 2i, -14, 4 + 78, 2i, -0, 23, -0, 18 - 8, 6i, -0, 18 + 8, 6i, 0, 23 \\ 14, 4 - 78, 2i, -14, 4 + 78, 2i, -0, 18 - 8, 6i, -0, 18 + 8, 6i \\ 14, 4 - 78, 2i, -14, 4 + 78, 2i, -0, 23, -0, 18 - 8, 6i, -0, 18 + 8, 6i, 0, 23 \end{pmatrix} \quad (6.51)$$

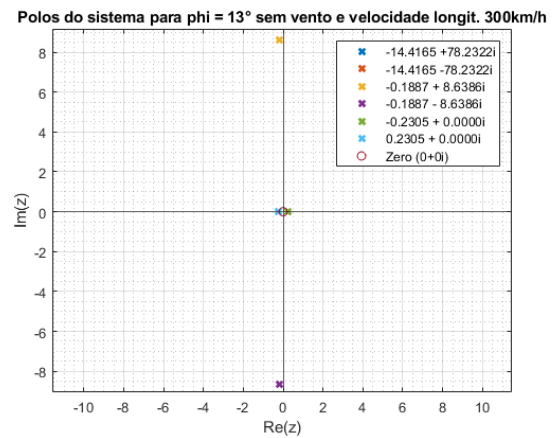
Observe que, como os denominadores da função de transferência são comuns (ignorando-se o cancelamento de polo e zero), os polos são os mesmos para todos os elementos da matriz. Em realidade, sabe-se agora que o cancelamento de polos é instável pois os dois polos adicionais das saídas referentes a θ são reais opostos $(0, 23, -0, 23)$. Retornando à resposta homogênea, nota-se que um polo com parte real positiva faz com que a resposta do sistema a uma excitação genérica se comporte exponencialmente no tempo, o que levaria o sistema a ter energia infinita – na realidade, isso é impossível, e o sistema se tornará instável. Nesse cenário, a análise linear do problema seria de antemão errônea devido à imprevisibilidade do sistema na região de aproximação linear. Contudo, como mostrado adiante na [seção 6.5](#), pode-se com cuidados manter a análise linear dependendo do intervalo de tempo observado.

Quanto aos zeros do sistema, um deles está muito distante de todos os polos do sistema, o que diminui muito sua influência. Já o outro está centrado na origem do plano complexo e, assim, influencia na dinâmica dos polos por perto. A análise profunda da influência desse zero no comportamento do sistema não se mostrou pertinente neste relatório.



(a) Retrato geral

Fonte: Autoria própria



(b) Retrato aproximado

Fonte: Autoria própria

Figura 8 – Polos do sistema para configuração inicial de pouso

Os polos mostrados na Figura 8 calculados são para uma específica condição de velocidade longitudinal, vento e ângulo de arfagem. Pode-se, todavia, obter os polos do sistema em função dessas variáveis, como mostrado nas figuras abaixo:

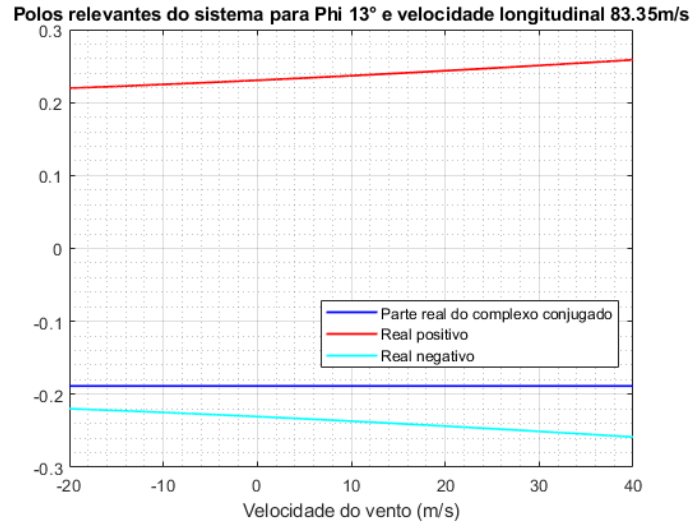


Figura 9 – Parte real dos polos do sistema em função da velocidade do vento

Fonte: Autoria própria

Observe que, como esperado, quanto maior é a velocidade do vento na hora do pouso, mais instável é o comportamento do avião, ou seja, mais positivo é um dos polos puramente real. Em uma situação real, o piloto faz ainda mais uso das superfícies aerodinâmicas de controle quando há vento, justamente para controlar a resposta instável mais veloz do ângulo de arfagem no momento do toque.

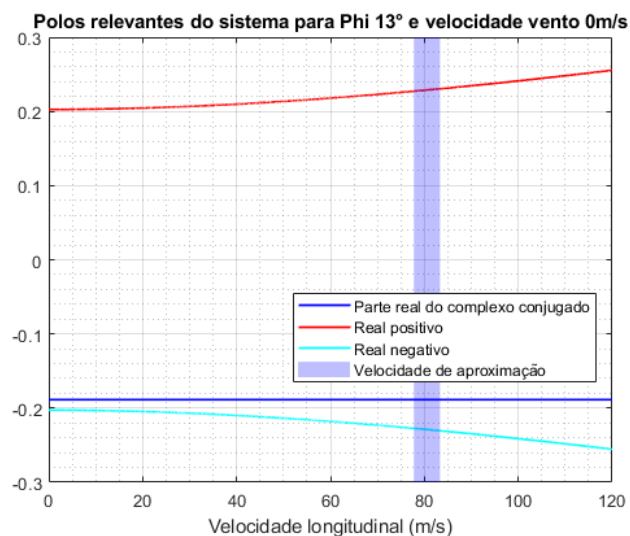


Figura 10 – Parte real dos polos do sistema em função da velocidade longitudinal

Fonte: Autoria própria

A Figura 10 mostra que a diminuição da velocidade do avião vai tornando a resposta instável do sistema cada vez mais lenta. Esse gráfico não é integralmente passível de análise neste trabalho, afinal, quando a velocidade longitudinal do avião durante o pouso se afasta muito da velocidade de aproximação, o piloto já estará impondo frenagem e abrindo *flaps* e *spoilers*, configuração para a qual o presente modelo não está apto. De qualquer modo, dentro da faixa da velocidade de aproximação, pode-se fazer ressalvas sobre um possível ponto de equilíbrio, no momento aerodinâmico, proporcional à velocidade do avião, estaria em equilíbrio com o momento da força peso e atrito de rolamento. Para ocorrer esse balanceamento de forças tomando o ângulo de arfagem fixo e sem vento, o avião deveria estar a $148,89\text{m/s}$, contudo, note que para essa velocidade ele terá polo com parte real positiva – isso ocorre por ser uma posição de equilíbrio instável. Se a velocidade longitudinal cai minimamente, a sustentação e arrasto diminuem, baixando o nariz do avião, fato que torna o momento da força peso ainda maior e o momento das forças aerodinâmicas ainda menor, tirando rapidamente o avião do equilíbrio. A situação oposta ocorre para um leve aumento de velocidade. Como essa diferença pode ser inclusive gerada por erros de integração numérica e a exponencial amplifica prontamente qualquer perturbação, esse fato não é nem observado nas simulações feitas no Capítulo 7.

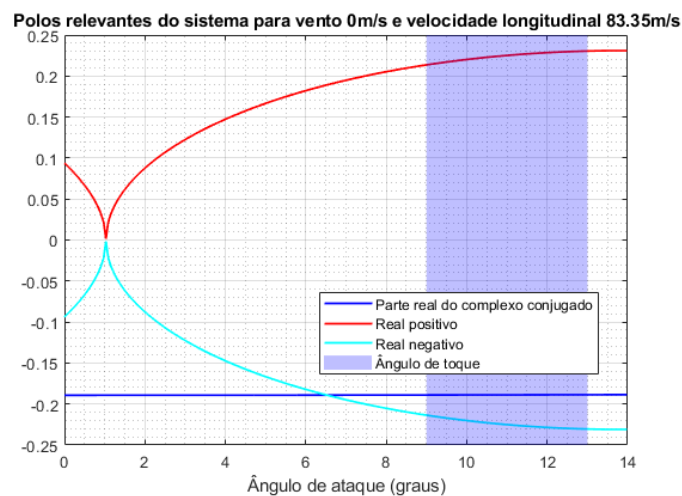


Figura 11 – Parte real dos polos do sistema em função do ângulo de arfagem

Fonte: Autoria própria

A Figura 11 é, talvez, a análise mais interessante a ser feita, afinal, ela justifica a afirmação motivadora do tema de que ângulos de arfagem muito elevados são dinamicamente instáveis (CAUGHEY, 2011). Observe que quanto maior o ângulo de arfagem, maior é o termo positivo e, assim, mais rapidamente modo instável de resposta se sobressai sobre os demais modos. O fato de que o menor valor não condiz com o menor ângulo de arfagem vem da maneira como as forças aerodinâmicas foram definidas na Equação 5.6 e Equação 5.4 contando com uma parcela não nula mesmo com o ângulo nulo.

Note que para ângulos comuns de aproximação ($0^\circ < \theta < 13^\circ$), o polo que possui parte real positiva apresenta valores pequenos, o que explica a controlabilidade da aeronave durante o período de *free-roll*, pois, a resposta à esse modo cresce relativamente lentamente no tempo, o piloto possui tempo hábil de controlar o ângulo de arfagem até fazer uso da frenagem – similar a uma bicicleta em altas velocidades. Esse fato será retomado a seguir, onde também explica-se a utilização do termo “polos relevantes” nas análises desta seção.

A grande ressalva feita nesse âmbito é a validade da análise dos polos no ângulo, pois, como explicado na [subseção 6.2.2.1](#), com o ângulo de ataque muito alto se foge da aproximação truncada, e os polos previstos para ângulos muito altos apresentam sentido físico duvidoso.

6.5 Resposta homogênea a impulso e aplicabilidade do modelo

Neste capítulo, todas as análises foram realizadas no domínio da frequência, contudo, é necessário retornar ao domínio do tempo para visualizar a comportamento do sistema – isso é feito fazendo a transformada inversa de Laplace. Pela definição da transformada de Laplace, sabe-se que a transformada inversa da função de transferência é a resposta da respectiva saída à uma entrada impulsiva. Esse fato é de grande valia e permite analisar o comportamento do sistema modelado frente a uma “entrada-teste” – nesse caso, o impulso.

Como a principal coordenada de interesse é $\theta(t)$ e, ainda por cima, não apresenta cancelamento de polos, tomou-se a transformada inversa dela frente à entrada impulso em y_{ext} (2º elemento da [Equação 6.47](#)). A expressão obtida foi:

$$\mathcal{L}^{-1}[G(s)_{12}] = T1 + T2 + T3 + T4, \text{ onde:} \quad (6.52)$$

$$T1(t) = 0,00204966.exp((-0,230479.t)) \quad (6.53)$$

$$T2(t) = -0,00204899.exp((0,230479.t)) \quad (6.54)$$

$$\begin{aligned} T3(t) = & exp(-14,4165.t).[(+0,00292244.cos(78,2322.t) \\ & +0,00292244.cos(78,2322.t).cos(156,464.t) + 0,0091302.sin(78,2322.t) \\ & -0,0091302.cos(156,464.t).sin(78,2322.t) + 0,0091302.cos(78,2322.t).sin(156,464.t) \\ & +0,00292244.sin(78,2322.t).sin(156,464.t)] \end{aligned} \quad (6.55)$$

$$\begin{aligned} T4(t) = & exp(-0,188665.t) * [-0,00292278.cos(8,63857.t) \\ & -0,00292278.cos(8,63857.t).cos(17,2771.t) - 0,0778166.sin(8,63857.t) \\ & +0,0778166.cos(17,2771.t).sin(8,63857.t) - 0,0778166.cos(8,63857.t).sin(17,2771.t) \\ & -0,00292278.sin(8,63857.t).sin(17,2771.t)] \end{aligned} \quad (6.56)$$

Observe justamente que os expoentes das exponenciais são os polos do sistema apresentados na [Equação 6.50](#). Note que a [Equação 6.53](#) e [Equação 6.54](#) expressam exponenciais não oscilatórias, afinal, vêm de polos puramente reais. Já a [Equação 6.55](#) e [Equação 6.56](#) vêm de polos complexos conjugados, assim, apresentarão resposta oscilatória no tempo envolvidas por uma exponencial decrescente. Compare a [Figura 8](#) com a figura [Figura 12](#).

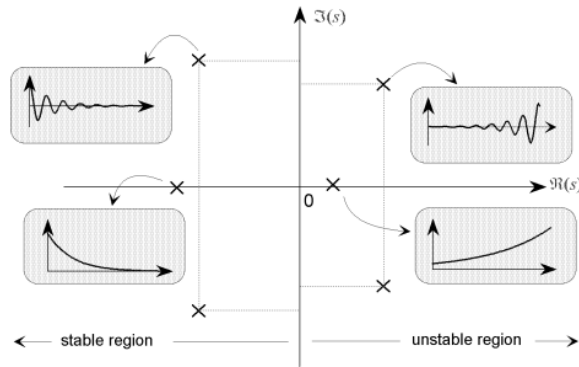
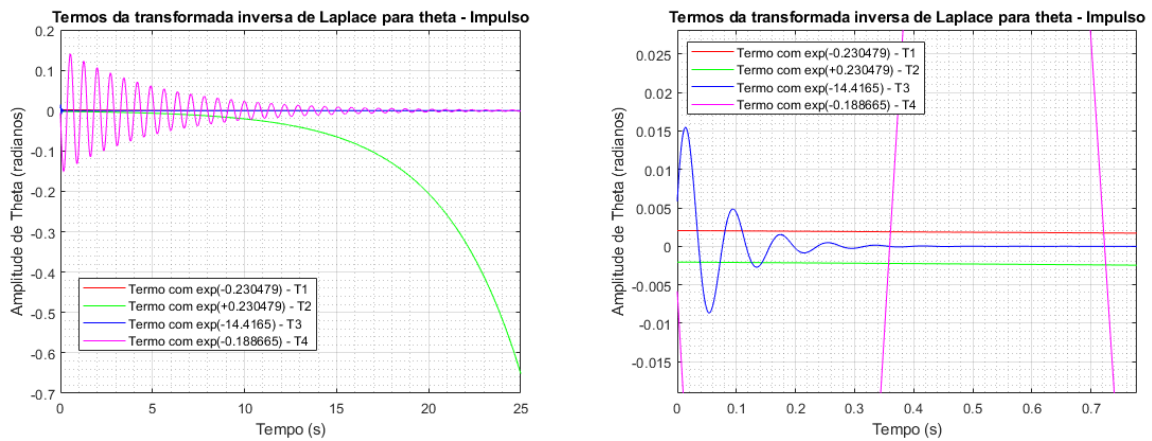


Figura 12 – Forma dos termos da resposta homogênea

Fonte: ([GONZALEZ, 2004](#))

Plotando os termos individualmente, é exatamente esse o comportamento obtido:



(a) Retrato geral de $\mathcal{L}^{-1}[G(s)]_{12}$

(b) Retrato aproximado de $\mathcal{L}^{-1}[G(s)]_{12}$

Figura 13 – Resposta impulsiva homogênea do sistema

Fonte: Autoria própria

Observe no quadro mais aproximado que $T3$ e $T4$ possuem, mesmo que comportamento similar, amplitudes muito distintas. Isso ocorre pelo fato de que a amplitude de $T3$ cai com $e^{-14,4}$, enquanto $T4$ cai com $e^{-0,18}$. Por conta disso, na análise dos polos relevantes, o polo relacionado ao termo $T3$ foi ignorado, pois representa uma dinâmica (modo do sistema) que some muito rapidamente, como expresso pela [Figura 13b](#) – é como

perder uma ordem do modelo. Ainda nesse cenário, o principal tópico a ser analisado nesta seção é o termo instável $T2$.

Note que $T2$ cresce com $e^{0,2305}$ e é ponderado por $-0,0021$ (Equação 6.54) e, desse modo, demora para que a exponencial faça efeito e decaia. Em verdade, como é um polo de primeira ordem (veja Equação 6.47), sua constante de tempo é dada pelo inverso de seu módulo, ou seja, $\tau = \frac{1}{0,2305} = 4,33s$. Isso implica que a amplitude de resposta é amplificada pelo fator $e \approx 2,718$ apenas a cada 4,33 segundos, que é já superior ao tempo usual de *free-roll*, como explicitado pela Figura 14.

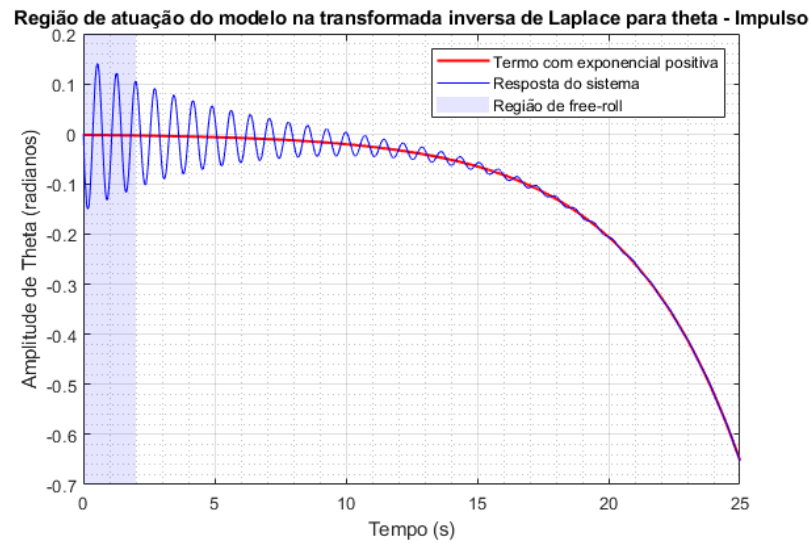


Figura 14 – Resposta homogênea do sistema em comparação com $T2$

Fonte: Autoria própria

Em termos numéricos, o impacto de $T2$ na análise proposta pode ser estimado pela razão entre a amplitude máxima da resposta do sistema em um determinado intervalo e a amplitude da resposta associada à exponencial positiva ($T2$) no ponto de amplitude máxima da resposta. Esse parâmetro foi nomeado de $R.M$, e apresentado na Tabela 4.

Intante n (s)	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5	t = 7	t = 10	t = 20
R.M	0,017	0,018	0,020	0,024	0,032	0,051	0,068	0,625

Tabela 4 – Razão entre amplitude de resposta máxima e amplitude do polo positivo no intervalo $[t_{n-1} - t_n]$

Para os instantes iniciais, a resposta instável tem magnitude inferior a 5% da resposta do sistema, o que justifica a aplicação dos métodos de análise anteriormente realizados dentro do intervalo de *free-roll*. Avançando-se no tempo, os termos estáveis começam a se tornar menos relevantes, como mostrado na Figura 13a, e a resposta instável domina e representa praticamente a resposta total do sistema. Por conta disso, entre 10 e 20 segundos, $R.M$ já é 62,5%, o que expressa que a análise linear já deixou de ser válida.

Note que $R.M$ é um critério conservador, visto que a amplitude máxima de resposta é tomada. Pode-se para os primeiros instantes no qual a resposta do sistema apresenta maior amplitude de oscilação, tomar o RMS da resposta para realizar a razão o que resulta em:

Intante n (s)	t = 1	t = 2	t = 3	t = 4	t = 5
R.M (rms)	0,023	0,027	0,031	0,038	0,045

Tabela 5 – Razão entre amplitude de resposta quadrática média e amplitude do polo positivo no intervalo $[t_n - 1t_n]$

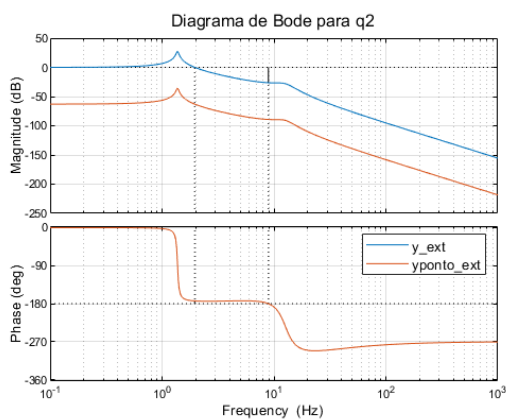
Os resultados são um pouco mais restritivos à análise linear, mas permanecem corroborando com a análise linear nos instantes iniciais do pouso.

Observe que, como o sistema é linear, a resposta do sistema é basicamente a soma de $T1, T2, T3, T4$. Por conta disso, para tempos elevados, todas as dinâmicas expressas por $T1, T3, T4$ já foram amortecidas e somem da resposta do sistema justamente por decaírem exponencialmente, logo, no infinito, a resposta ($y(t)$) do sistema será $y(t) = T2(t)$. Por conta disso, a razão sempre aumenta.

Desse modo, mesmo com a presença de um polo instável, nas restrições propostas e aceitas desde o início do modelo e sendo a principal hipótese o período de *free-roll*, se faz válida a análise linear.

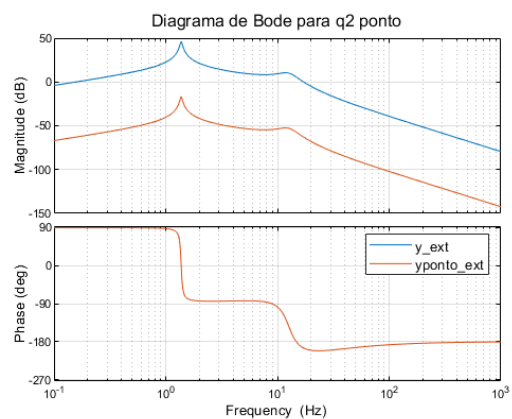
6.6 Diagrama de bode

Para o espaço de estados especificado na [Equação 6.41](#), nas condições anteriormente já nomeadas, os seguintes diagramas descrevem o comportamento do sistema:



(a) Diagrama de Bode para $q_2(t)$

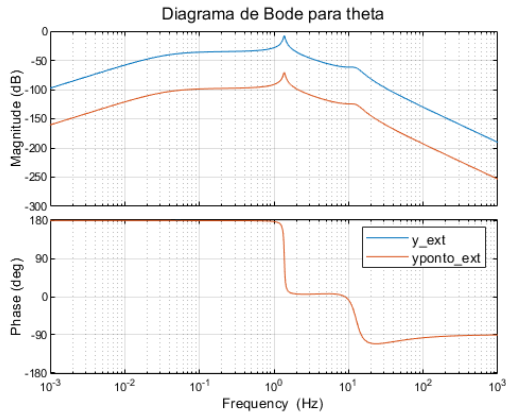
Fonte: Autoria própria



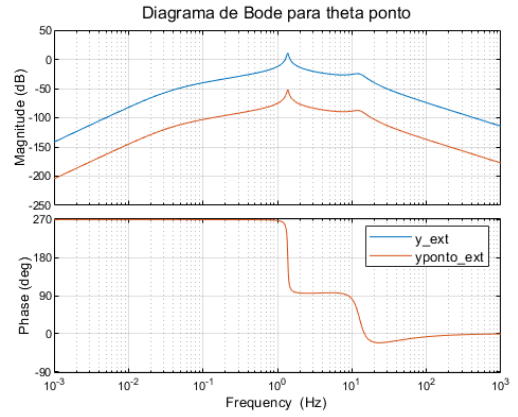
(b) Diagrama de Bode para $\dot{q}_2(t)$

Fonte: Autoria própria

Figura 15 – Diagramas de Bode referentes à $q_2(t)$

(a) Diagrama de Bode para $\theta(t)$

Fonte: Autoria própria

(b) Diagrama de Bode para $\dot{\theta}(t)$

Fonte: Autoria própria

Figura 16 – Diagramas de Bode referentes à $\theta(t)$

O diagrama de Bode é uma maneira útil de representar a resposta e fase de um sistema dinâmico em função da frequência, diferindo das técnicas anteriores por claramente trazer o ganho que da resposta do sistema apresenta a partir de determinada entrada. Iniciando a interpretação da [Figura 15](#), observa-se dois picos pronunciados no ganho de resposta do sistema para as frequências entre $1,3Hz$ e $1,4Hz$ e entre $12Hz$ e $13Hz$. De fato, era esperado ao menos dois picos pronunciados – um para a frequência de ressonância da própria suspensão do trem de pouso e outra para a do pneu. Ademais, como o pneu apresenta massa menor e maior rigidez equivalente no sistema, sabe-se que o pico mais à direita deve representar a frequência de ressonância do pneu, enquanto o mais à esquerda retrata a da suspensão do trem de pouso. Considerando $M \gg m$ para simplificar o cálculo na [Equação 6.58](#), tem-se:

$$f_{r0} = \sqrt{\frac{k_t + k_r}{m}} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{79,1941}{2\pi} = 12,6Hz \quad (6.57)$$

$$f_{t0} \approx \sqrt{\frac{\frac{1}{k_t} + \frac{1}{k_r}}{M}} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{8,4121}{2\pi} = 1,34Hz \quad (6.58)$$

Exatamente como o previsto. Também observa-se que a margem de ganho (ganho na resposta do sistema quando a fase atinge -180°), expressa pela linha preta no gráfico de magnitude na [Figura 15a](#), é negativa – característica de sistemas instáveis, significando que mesmo um pequeno ganho pode causar resposta instáveis ([STUTTS, 1999](#)). Após a primeira ressonância, o sistema começa a responder defasado em cerca de -180° , ou seja, adiantado e, após a segunda, em aproximadamente -270° . As mesmas observações se aplicam ao diagrama referente à $\dot{q}_2(t)$. Por fim, observa-se, mesmo que o denominador da [Equação 6.43](#) seja de quarta ordem para os termos referentes a q_2 , apenas os dois pontos referente à ressonância causam acentuações no gráfico – isso indica que a dinâmica de

dois modos do sistema não influenciam grandemente na resposta, o que pode inclusive ser observado pela parte real dos polos do sistema, como já anteriormente discutido.

Para os diagramas referente à θ , a observação sobre os picos de ressonância é igualmente aplicável, contudo, note que agora o gráfico é mais ondulado, representando dinâmicas influentes na resposta de θ e não em q_2 – novamente, o que já havia sido interpretado anteriormente a partir da análise da função de transferência. É interessante notar que, nesse caso, a resposta em frequências inferiores a f_{t0} é defasada em 180° , entre as duas frequências de ressonância fica em fase e, após o último pico, defasa em 90° . Esse efeito em frequências mais baixas é similar a um contra-esterçamento – suas implicações no comportamento dinâmico não foram aprofundadas.

Note que nos diagramas de q_2 e θ o ganho cai $60dB$ por década, ou seja, o sistema para altas frequências se comporta como um sistema de terceira ordem. Para $\dot{\theta}$, o ganho cai $40dB$, ou seja, se comportando como de segunda ordem. Os zeros do sistema influenciam nas inclinações positivas do diagrama.

Em termos de controlabilidade, todos os gráficos demonstram que o sistema é mais sensível à entradas em y_{ext} que em \dot{y}_{ext} . Ou seja, é mais influente ao sistema a magnitude das ondulações na pista que propriamente a velocidade com a qual o avião as percorre.

6.7 Critério de Estabilidade de *Routh-Hurwitz*

A determinação das raízes de um polinômio de alta ordem superior pode ser difícil e sujeita a erros numéricos. Assim, pode-se utilizar o critério de *Routh-Hurwitz*, usado aqui apenas para validação das conclusões já apresentadas. Para obtê-la faz-se o cálculo da sequência dos determinantes de suas submatrizes, o que, para este trabalho, foi feito com base no código *open-source* disponível no *GitHub* deste trabalho. Ela está apresentada na [Equação 6.59](#).

$$\begin{bmatrix} -25097,3 & 472119 & 6413,61 & 1 \\ -241,186 & 4538,93 & 29,21 & 0 \\ -192,36 & 3374,05 & 1 & 0 \\ 308,48 & 27,95 & 0 & 0 \\ 3391,48 & 1 & 0 & 0 \\ 27,86 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

Com há mudança de sinal na primeira coluna, o sistema é instável e há tanto polos do lado instáveis quanto for o número de mudanças de sinal na primeira coluna ([DONHA, 2022](#)). Como há apenas uma mudança de sinal ($-192,36 \rightarrow 308,48$), isso comprova com solução exata que o sistema apresenta apenas um polo instável.

7 Simulações

7.1 Seleção do passo de integração

As simulações realizadas na [seção 6.5](#), assim como as que seguirão nesta seção, tem resultado dependente do passo de integração selecionado. Por exemplo, se um passo errôneo fosse utilizado, os picos observados em $T4$ na [Figura 13a](#) poderiam ser mal capturados e $T3$ na [Figura 13b](#) poderia inclusive sumir diretamente. Para isso, faz-se a calibração do passo de integração seguindo os períodos de oscilação de cada um dos polos que descrevem a resposta linear do sistema.

Para os polos de segunda ordem do sistema, que configuram a resposta oscilatória, tem-se que a frequência de oscilação é igual ao inverso do módulo do polo complexo ($\mathbf{P_C}$). Desse modo:

$$T_P = \frac{1}{f_p} = \frac{2\pi}{\text{abs}(\mathbf{P_C})} \quad (7.1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P_C} = -14,4 + 78,2i &\implies T = \frac{2\pi}{79.5495} = 0,08s \\ \mathbf{P_C} = -0,1887 + 8.6386i &\implies T = \frac{2\pi}{8.6406} = 0,7271s \end{aligned} \quad (7.2)$$

Como deseja-se obter o pico de cada oscilação, deve-se utilizar um passo de, no máximo, $\frac{T}{2}$. Em um caso real, retratar o polo com parte real $-14,4$ não seria necessário, contudo, pela capacidade de fazê-lo, **utilizou-se um passo de 0,02s nas simulações abaixo** para retratar toda a dinâmica do sistema e, assim, buscar uma maior aproximação entre o modelo linear e não linear. Claro que, quanto maior o passo, maior o tempo de integração, como mostrado pela tabela abaixo, feita com 5 iterações para cada passo e tomando 2 algarismos significativos para a integração completa dos modelos linear e não linear:

Passo (ms)	20	10	5	2,5	2
Tempo de integração médio (s)	0,022	0,15	0,35	0,80	1,2

Para sistemas mais complexos com mais graus de liberdade, o custo computacional passa a ser também decisivo na escolha do passo – não é o caso atual. Os demais polos não apresentam resposta oscilatória e, assim, não são críticos na seleção do passo.

7.2 Diferenças entre modelo linear e não linear

É óbvio que, como o modelo linear provém de aproximações em torno de um ponto de operação (ver [subseção 6.2.2.1](#)), diferenças entre a simulação não linear e linear serão

observadas e, em verdade, servem de um indicativo no domínio do tempo se as análises lineares são válidas. Simulando para as condições no instante do toque (mesma condições tomadas para a elaboração do espaço de estados [Equação 6.41](#)), tem-se:

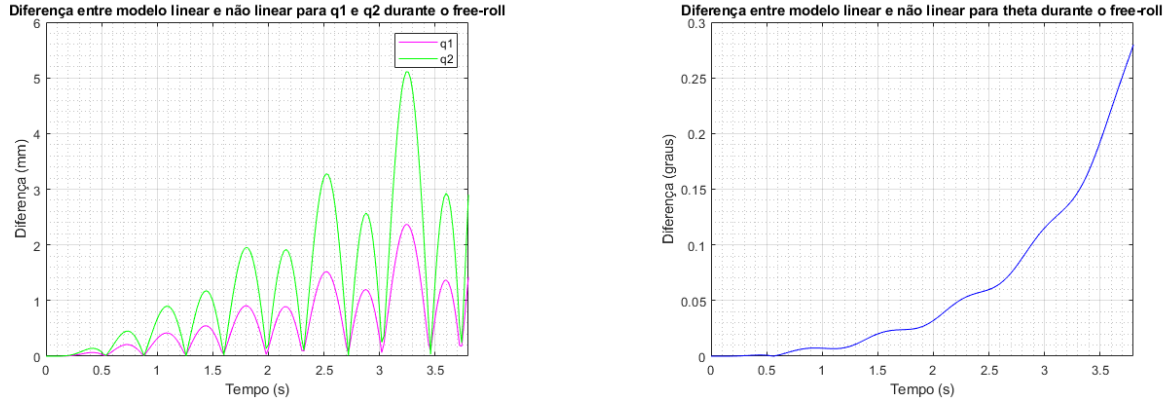


Figura 17 – Diferença para modelo linear e não linear

Note que a diferença entre o modelo linear está na ordem de grandeza de milímetros para $q_1(t)$ e $q_2(t)$ e de décimos de grau para $\theta(t)$. Essas diferenças são muito pequenas e, considerando a possível integração de sensores para a medição dessas coordenadas, são possivelmente menores que a própria imprecisão do sensor somada à maneira de fixação, em especial para $\theta(t)$. Essa convergência no intervalo curto de tempo havia anteriormente sido prevista no domínio da frequência, servindo estes resultados de confirmação das análises. Agora, apresenta-se os mesmos gráficos alterando a velocidade do vento:

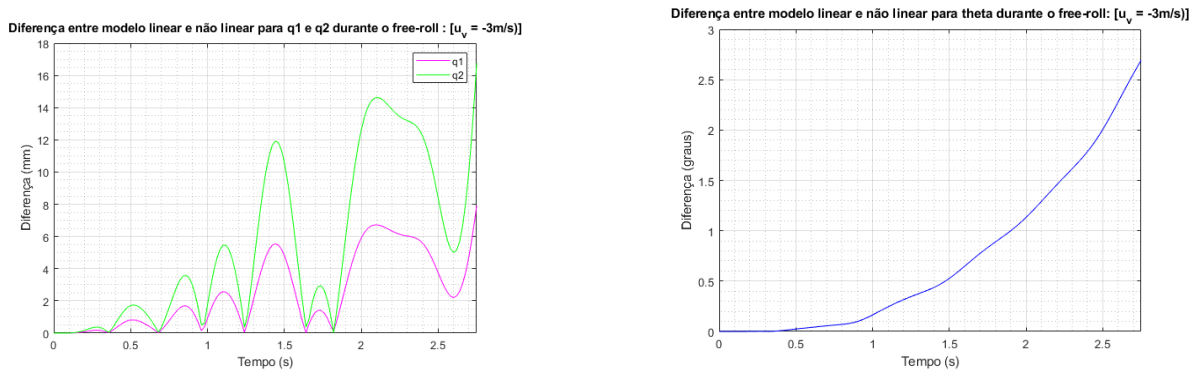


Figura 18 – Diferença para modelo linear e não linear - vento de $-5m/s$

Observe, que a diferença aumentou consideravelmente com vento, em especial para $\theta(t)$. Nesse caso, é necessário ter cautela com a aplicação do modelo linear, visto que as diferenças já se mostram significativas no modelo, o que inclusive foi previsto pela [Figura 9](#). Isso ocorre pois os termos que foram linearizados, como o braço da força aerodinâmica, têm mais peso na resposta do sistema por serem amplificados ao se impor vento, magnificando as diferenças. Por fim, inclui-se perturbações da pista:

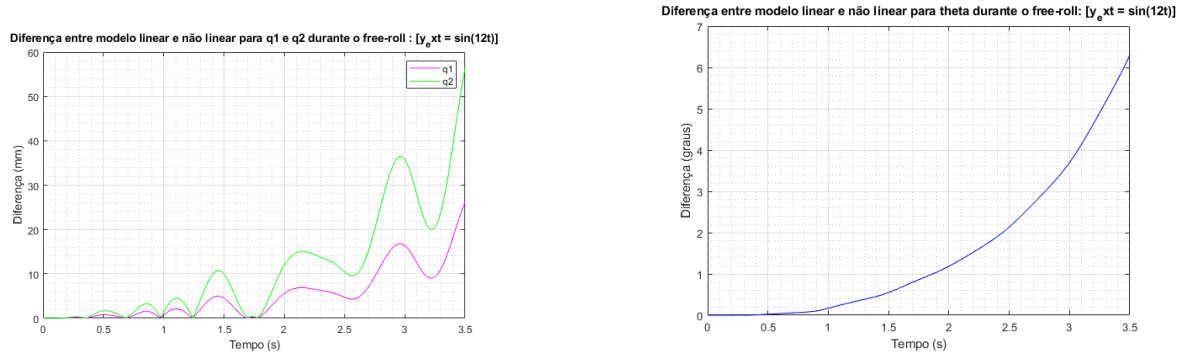


Figura 19 – Diferença para modelo linear e não linear - $y_{ext} = \sin(12t)m$

O aumento significativo das diferenças nesse cenário era esperado, visto que as entradas advindas da pista foram linearizadas em torno de 0. Nesse caso, a análise linear se mostra inválida e não suficiente para prever o comportamento do sistema, mesmo que em intervalos de tempo ainda mais pequenos apresente, marcadamente, resultados condizentes.

7.3 Influência do cancelamento de polos

Como tratado na [subseção 6.3.1](#), o cancelamento de polos ocorrido para q_2 e \dot{q}_2 expressa que o comportamento dinâmico do sistema não sofre grande influência de θ e $\dot{\theta}$, em especial para pequenos valores. Os valores de pico se alteram levemente, contudo, a frequência de oscilação se mantém. Os gráficos têm diferente ponto de término pelo fato de que o tempo de *free-roll* se altera para cada simulação.

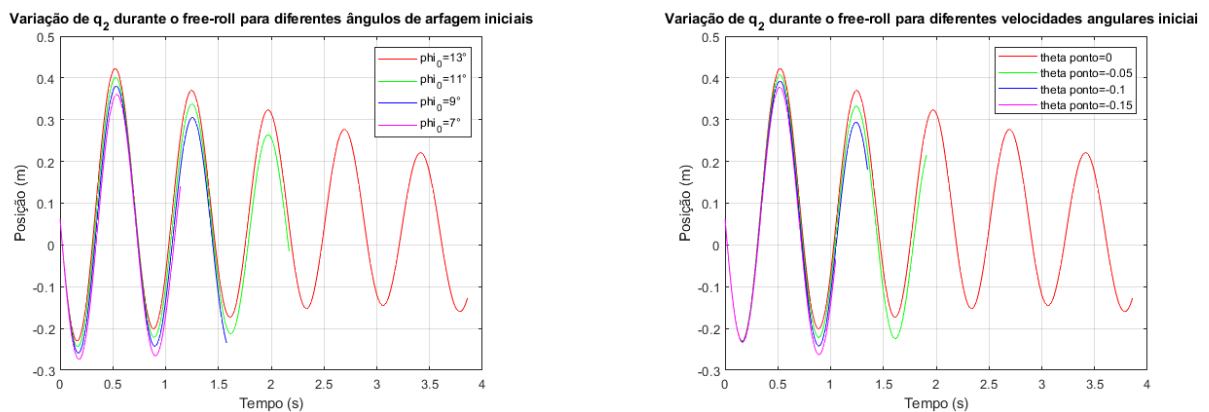


Figura 20 – Influência do cancelamento de polos no comportamento de q_2

7.4 Validação do modelo integrado

O modelo de meio carro integrado ao modelo inicial proposto foi feito para mostrar que, após o toque do trem de pouso dianteiro, o avião segue para a condição de equilíbrio

final, em que sua velocidade é nula e seu peso é suportado apenas pelos trens de pouso, sem nenhuma sustentação aerodinâmica.

Uma observação deve ser feita em relação à condição de equilíbrio final do avião, em que as coordenadas q_1 e q_2 e θ são positivas e q_3 é negativa. Para demonstrar essa condição, ao fim, pode-se fazer a análise de equilíbrio estático da aeronave, equilibrando as forças verticais (forças elásticas e força peso) e os momentos gerados. A seguir será feito o equacionamento da condição de equilíbrio, igualando a zero a soma dos momentos em O e dos esforços verticais sobre a aeronave, que podem ser vistos no diagrama simplificado na [Figura 21](#):

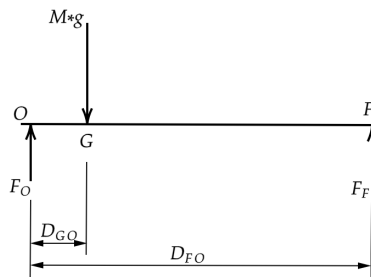


Figura 21 – Diagrama dos esforços atuantes no avião

Fonte: Autoria própria

$$\sum F_{vert} = 0 \rightarrow Mg = F_O + F_F \quad (7.3)$$

$$\sum M_O = 0 \rightarrow MgD_{GO} - F_FD_{FO} = 0 \rightarrow F_F = \frac{MgD_{GO}}{D_{FO}} \quad (7.4)$$

Substituindo a [Equação 7.4](#) na [Equação 7.3](#) obtemos:

$$F_O = Mg - \frac{MgD_{GO}}{D_{FO}} \rightarrow F_O = Mg \frac{D_{FO} - D_{GO}}{D_{FO}} \quad (7.5)$$

Ao substituir os valores de D_{GO} e de D_{FO} temos que 90% da massa da aeronave é suportada pelos trens de pouso traseiros e 10% pelo trem de pouso dianteiro. Assim, considerando as posições de referência adotadas percebe-se que q_1 e q_2 ficam ligeiramente positivos, já que foram admitido como zero na posição em que suportam todo o peso do avião, e q_3 é negativo, já que a referência zero foi tomada assumindo que apenas o próprio peso do trem de pouso era sustentado. Esses valores podem ser observados na [Figura 22](#) a seguir, que mostra os gráficos gerados pela simulação, destacando-se o ponto de equilíbrio final de q_1 , q_2 e q_3 :

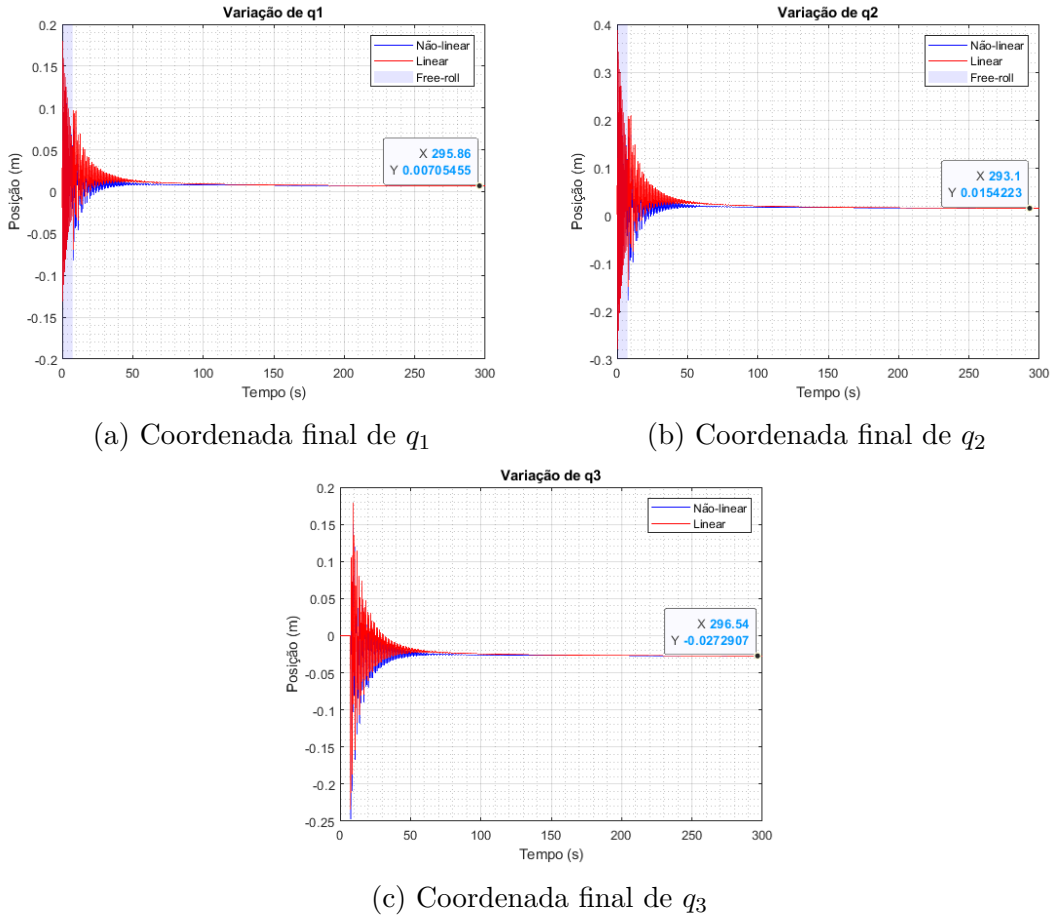


Figura 22 – Gráficos das posições finais de equilíbrio do modelo

Pela linearização de θ em torno de Φ_0 para o modelo do avião nivelado para manter as mesmas coordenadas apresentadas no modelo físico, as respostas apresentadas [Figura 22](#) demoram mais para atingir o equilíbrio atingido previamente pelo modelo não linear.

7.5 Análises de cenários

Para uma análise efetiva dos esforços nos trens de pouso no momento do toque da aeronave no solo e da estabilidade do ângulo de arfagem, é importante entender o sistema e seu comportamento frente a diferentes entradas. Para isso, é importante que seja feita uma análise que isole os efeitos de cada variável, permitindo que se compreenda os efeitos causados por cada mudança feita. Assim, vários cenários devem ser gerados e analisados, de forma que, ao fim, se tenha um bom entendimento do comportamento do modelo.

Para analisar vários cenários serão considerados variáveis da nossa simulação o ângulo de arfagem inicial (Φ_0), o coeficiente de arrasto ao rolamento do pavimento (C_{pav}), o vento (u_v), a constante de mola e amortecimento do trem de pouso traseiro (k_t e c_t), a velocidade vertical de aproximação (u_{vert}), a massa da aeronave (M) e as excitações da pista (y_{ext}). Cada uma das variáveis acima será simulada com 3 valores diferentes, de

forma a permitir a análise individual dos efeitos sobre a carga inercial no trem de pouso, na estabilidade do ângulo de arfagem e no conforto dos passageiros.

Ao variar os parâmetros acima é importante ter um cenário referência, a partir do qual serão comparados as outras condições iniciais. A referência para os parâmetros e os valores a serem testados estão apresentados na [Tabela 6](#). Os valores de referência são referentes ao pouso em pista lisa, sem vento, com velocidade vertical máxima, ângulo de arfagem de 13° , massa máxima de aterrissagem e valores de constantes de mola e amortecimento encontrados na literatura.

Variável	Valor de referência	Valor 1	Valor 2	Valor 3	Unidade
C_{pav}	1	0,5	2	4	—
y_{ext}	0	$0,05 * \sin(4t)$	$0,05 * \sin(8t)$	$0,05 * \sin(12t)$	m
Φ_0	13°	12°	10°	8°	$graus$
u_v	0	-5	4	7,5	m/s
u_{vert}	-3	-2,5	-2	-3,5	m/s
M	88	78	68	58	ton
k_t	k_{t0}	$k_{t0} * 1,2$	$k_{t0} * 0,8$	$k_{t0} * 0,6$	kN/m
c_t	c_{t0}	$c_{t0} * 0,6$	$c_{t0} * 1,4$	$c_{t0} * 1,8$	kNs/m

Tabela 6 – Valores adotados para análise do modelo

Fonte: Autoria própria

Com todos os parâmetros em seu valor de referência, obtém-se os gráficos da [Figura 23](#) e [Figura 24](#), que serão o ponto de partida da análise dos casos seguintes. Os gráficos retratam o comportamento do ângulo de arfagem, a carga inercial sobre o trem de pouso, a aceleração angular do avião e a aceleração no *cockpit* do avião, que é o ponto que sofre maiores influências da variação do ângulo de arfagem.

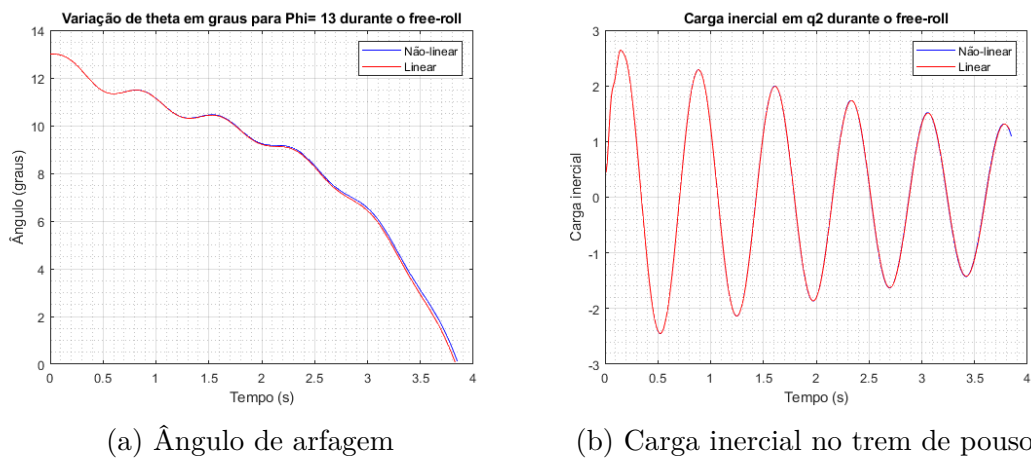
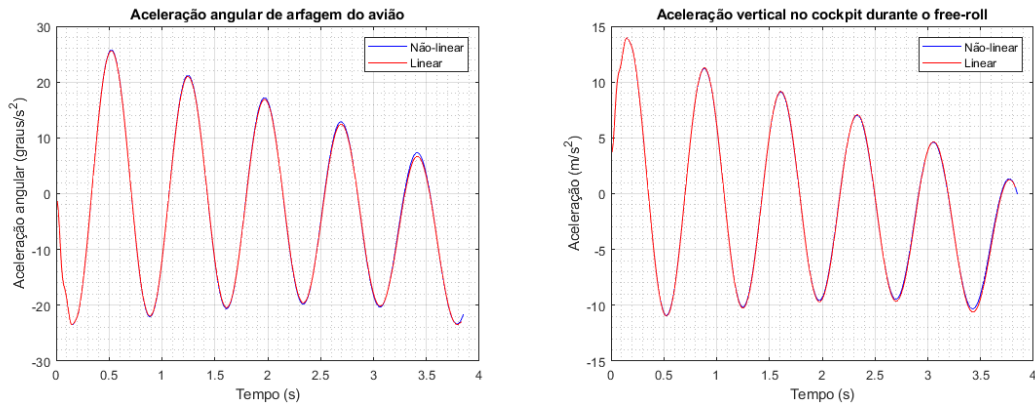


Figura 23 – Gráficos de θ e da carga inercial com entradas no valor de referência



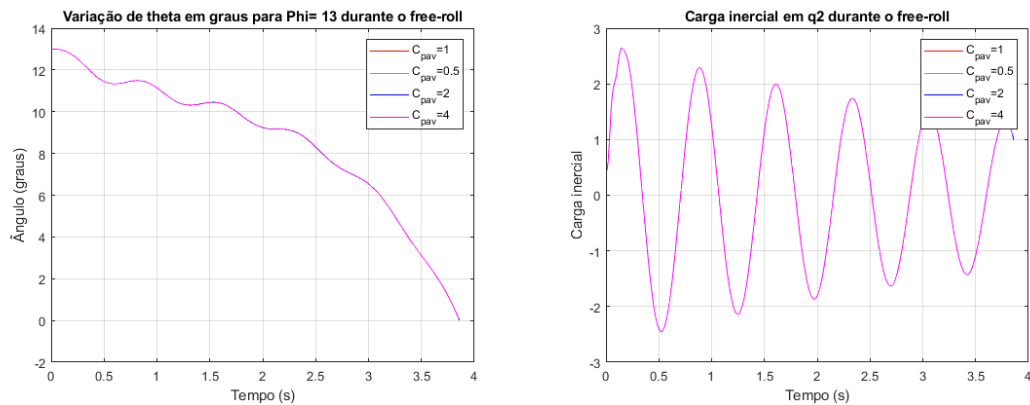
(a) Aceleração angular de arfagem

(b) Aceleração no *cockpit* do avião

Figura 24 – Gráficos das acelerações com entradas no valor de referência

Dos gráficos com os valores de referência, [Figura 24](#) é possível verificar que as frequências de vibração giram em torno de 1,5 Hz, que a carga inercial, [Figura 23](#) sobre o trem de pouso ultrapassa o limite aceitável para carga máxima equivalente a 2 vezes a aceleração da gravidade ([FAA, 2005](#)) e que o ângulo de arfagem decai de forma lenta nos primeiros 2 segundos de contato com o solo.

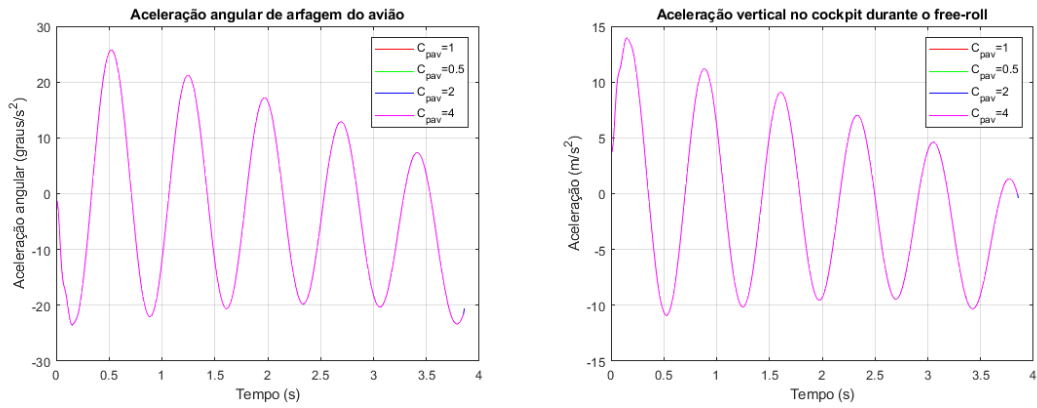
Variando o C_{pav} entre 0,5 e 4, temos pouca variação na resposta do sistema, ou seja, o sistema é insensível em relação ao C_{pav} , ou a variação do C_{pav} em valores comuns, como os utilizados, não é relevante ao modelo em free-roll. Isso pode ser por conta da magnitude das outras forças presentes no modelo, que são ordens de grandeza maiores que o atrito do pneu com o solo. Desta forma, mesmo impondo variações de até 800% no coeficiente de atrito ao rolamento a resposta do modelo praticamente permanece inalterada, como pode ser visto nas [Figura 25](#) e [Figura 26](#).



(a) Ângulo de arfagem

(b) Carga inercial no trem de pouso

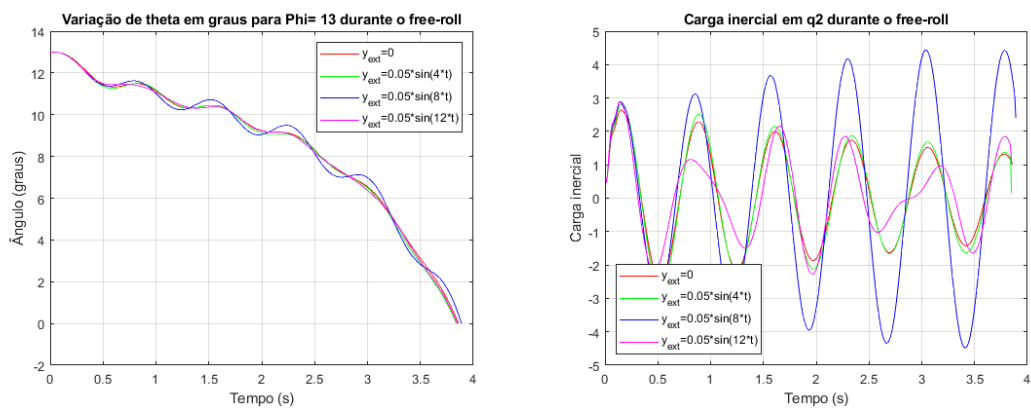
Figura 25 – Gráficos de θ e da carga inercial com variação no valor de C_{pav}



(a) Aceleração angular de arfagem

(b) Aceleração no *cockpit* do aviãoFigura 26 – Gráficos das acelerações com variação no valor de C_{pav}

Ao contrário do que ocorre com a mudança de C_{pav} , a mudança na frequência de entrada de y_{ext} pode excitar o sistema em algumas frequências. Como pode-se ver nas Figura 27 e Figura 28, em que com $y_{ext} = 0,05\sin(8t)$ as acelerações aumentam com o tempo, uma vez que é uma das frequências de ressonância do trem de pouso. O estudo do y_{ext} é de muita relevância no estudo das acelerações na fuselagem e da carga sobre o trem de pouso, pois se forem induzidas vibrações em frequências próximas às naturais da aeronave existe um risco elevado de danos estruturais no avião e desconforto elevado, além de problemas de saúde. Vale ressaltar que cada aeronave tem frequências de ressonância diferentes, sendo de grande importância evitar, no projeto da aeronave, frequências naturais próximas de frequências comuns de vibração de pistas de pouso, sendo um estudo que deve ser feito caso a caso.



(a) Ângulo de arfagem

(b) Carga inercial no trem de pouso

Figura 27 – Gráficos de θ e da carga inercial com variação no valor de y_{ext}

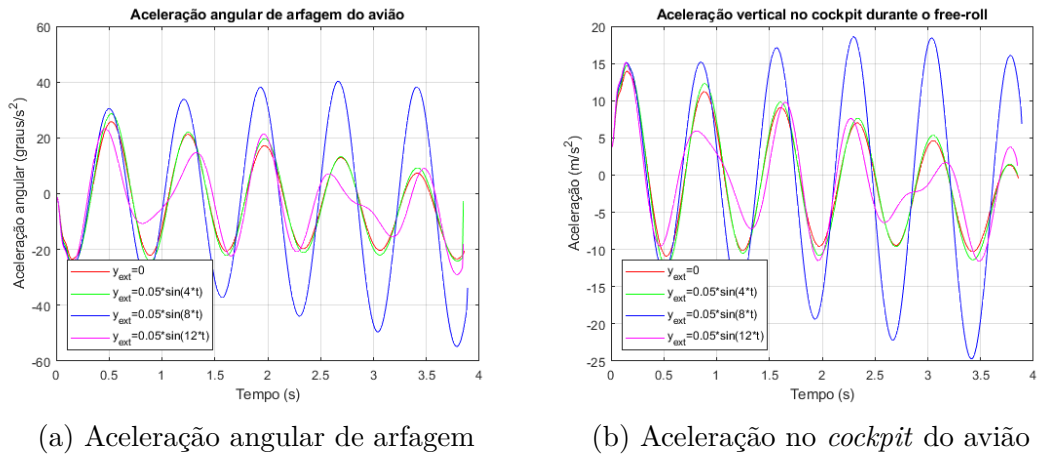


Figura 28 – Gráficos das acelerações com variação no valor de y_{ext}

A mudança do ângulo de arfagem inicial tem pouca influência no estudo da carga inercial em q_2 , sendo possível desprezá-lo. Já em relação às acelerações na fuselagem (Figura 29) a influência é grande e ressalta a importância de uma aterrissagem respeitando os parâmetros ideais impostos. Para ângulos de arfagem inicial menores, é visível na Figura 30 que, a aceleração angular é deslocada para baixo, que pode interferir no conforto e mesmo causar acidentes, pois impõe acelerações negativas (para baixo) maiores que a própria gravidade, que são preocupantes no toque do trem de pouso frontal.

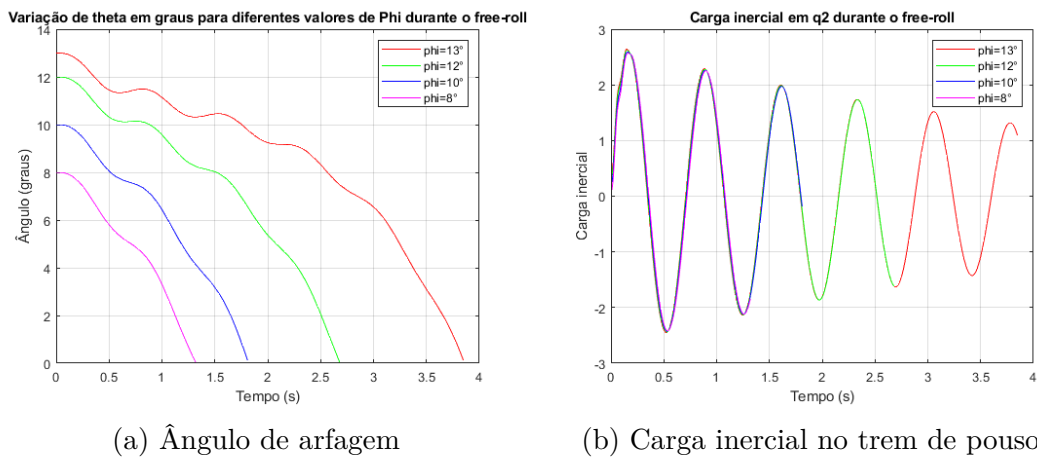


Figura 29 – Gráficos de θ e da carga inercial com variação no valor de Φ_0

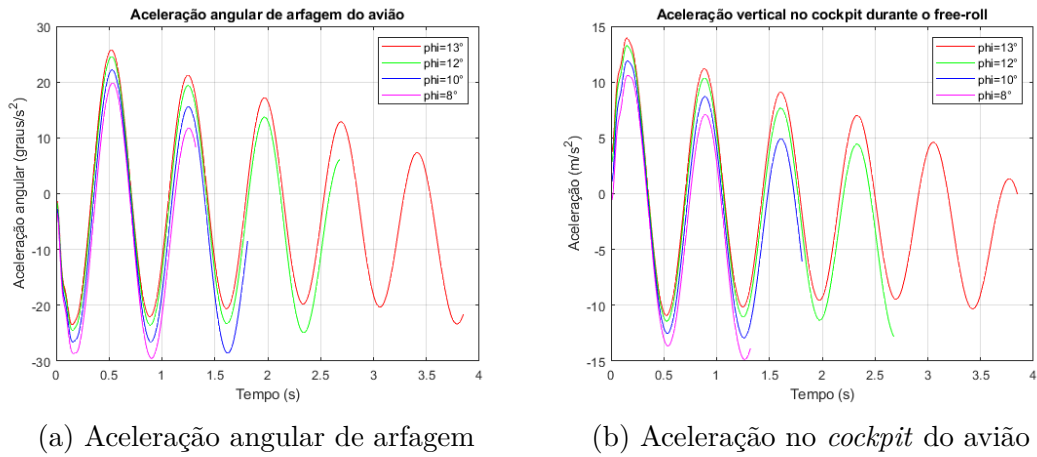


Figura 30 – Gráficos das acelerações com variação no valor de Φ_0

Na [Figura 31](#) observa-se que o modelo é robusto dentro de um intervalo de velocidades de vento, mas foge do comportamento esperado quando a velocidade do vento é muito alta. Para a análise da influência do vento tomou-se como referência a velocidade de aproximação de 280km/h , visto que os pousos devem ser feitos contra o vento, com o objetivo de diminuir a velocidade de aproximação. Dos gráficos da [Figura 31](#) nota-se que, assim como o ângulo de arfagem, a velocidade do vento tem pouca influência sobre a carga inercial nos trens de pouso traseiros e pode ser desprezada na análise dos esforços sobre estes equipamentos. Já em relação à vibração e aceleração na fuselagem, valores de u_v maiores levam à menores acelerações e descida mais lenta do nariz do avião, como visível na [Figura 32](#).

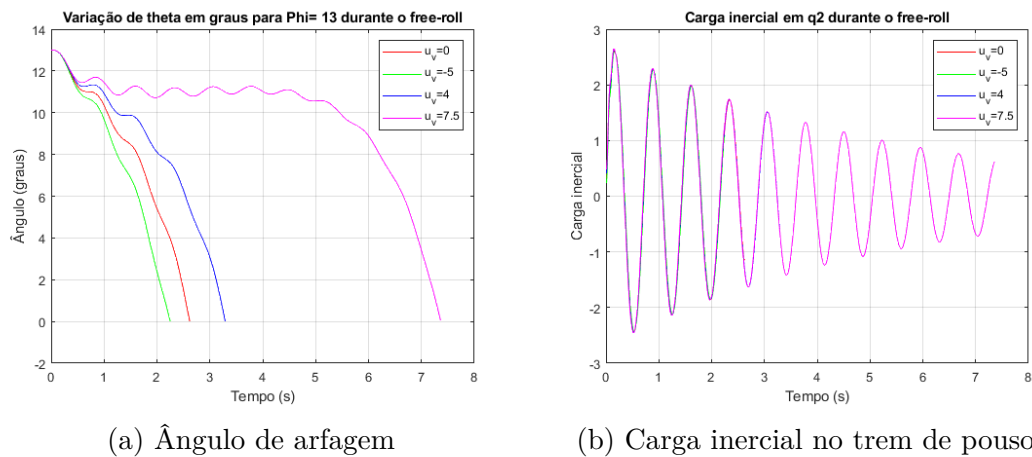


Figura 31 – Gráficos de θ e das cargas inerciais com variação no valor de u_v

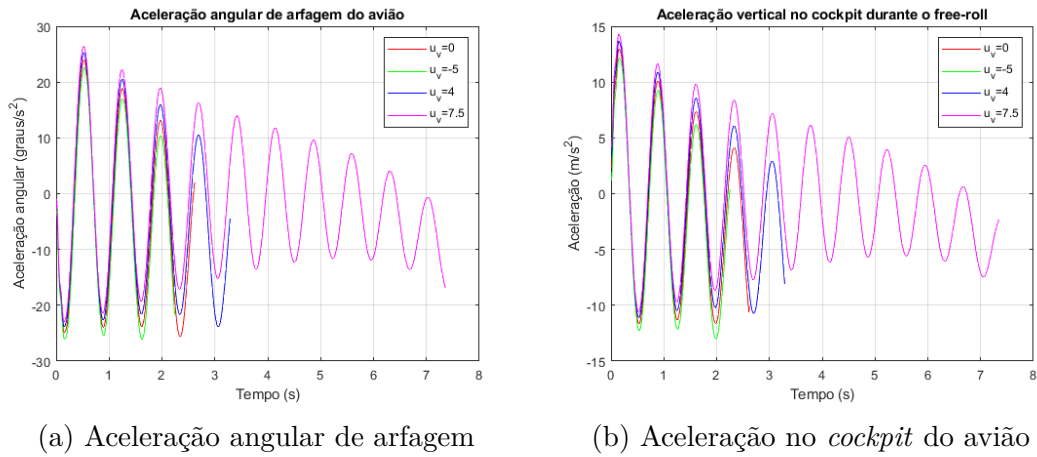


Figura 32 – Gráficos das acelerações com variação no valor de u_v

A velocidade vertical de aterrissagem tem grande influência sobre o conforto e os esforços no trem de pouso traseiro, como ilustrado na [Figura 33](#) e [Figura 34](#). Observa-se do gráfico da carga inercial em q_2 que em velocidades de pouso usuais de 2 a 2,5 m/s a carga inercial, considerando o peso máximo de aterrissagem, fica dentro do delimitado pela norma ([FAA, 2005](#)). Nos casos em que ocorre o pouso com velocidades verticais acima do ideal, como 3,5 m/s, a carga inercial sobre q_2 ultrapassa o limite estipulado, perdendo a garantia da segurança estrutural da aeronave, como já ocorreu com o Concorde em 1977, na cidade de Dakar, em que a alta velocidade de decida danificou a estrutura do avião. Além dos problemas com a carga sobre o trem de pouso a aceleração na fuselagem é aumentada com velocidades maiores de pouso, levando a oscilações mais abruptas e de maior amplitude, reduzindo o conforto significativamente.

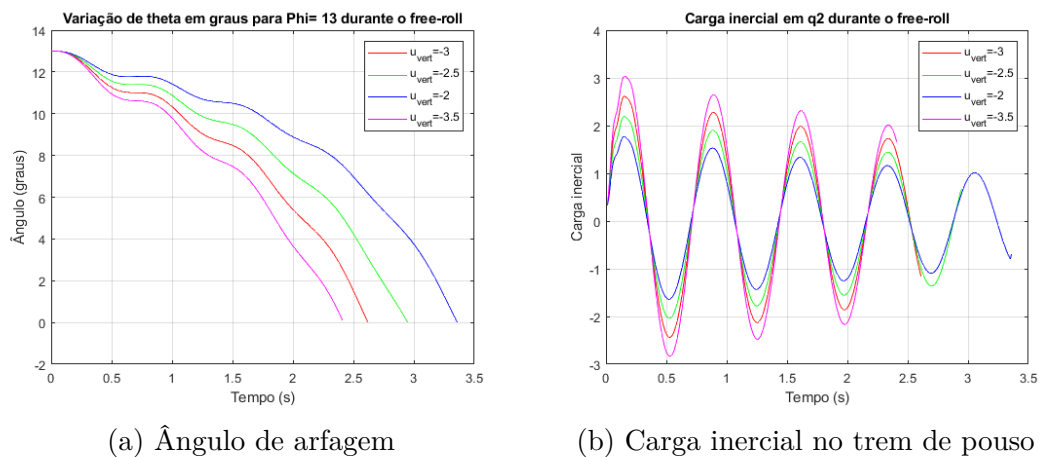
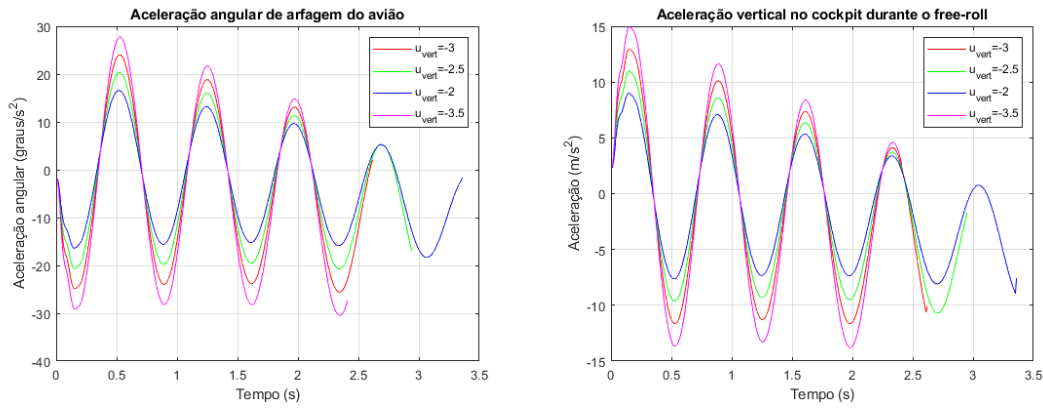


Figura 33 – Gráficos de θ e das argas inerciais com variação no valor de u_{vert}

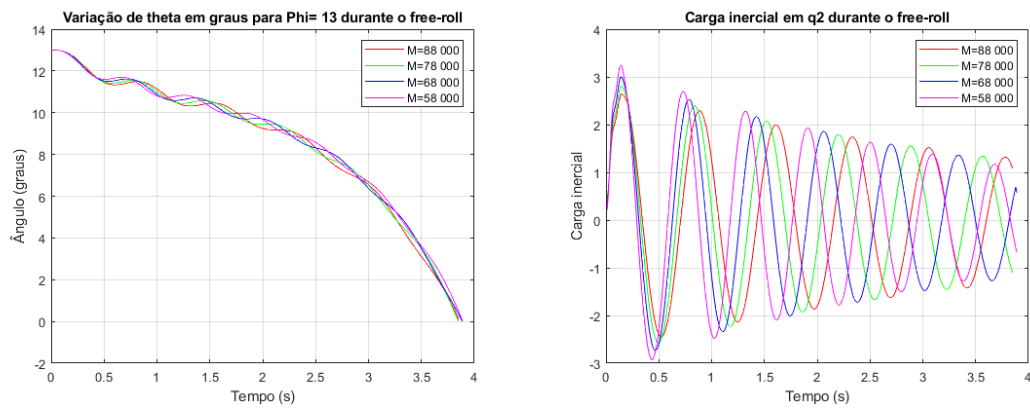


(a) Aceleração angular de arfagem

(b) Aceleração no *cockpit* do aviãoFigura 34 – Gráficos das acelerações com variação no valor de u_{vert}

Para a variação da massa do sistema é natural esperar que a carga inercial sobre o trem de pouso seja diferente para massas diferentes, o que pode ser confirmado na [Figura 35](#). Entretanto, contra-intuitivamente, os maiores valores de carga inercial sobre o trem de pouso ocorreu para massas menores. Esse fenômeno é devido à menor energia potencial envolvida, ou seja, para uma mesma constante de mola, o sistema oscila com amplitude menor e com frequência maior, resultando em maiores acelerações. Fazendo uma analogia, a redução da massa é equivalente a um incremento no valor da constante de mola.

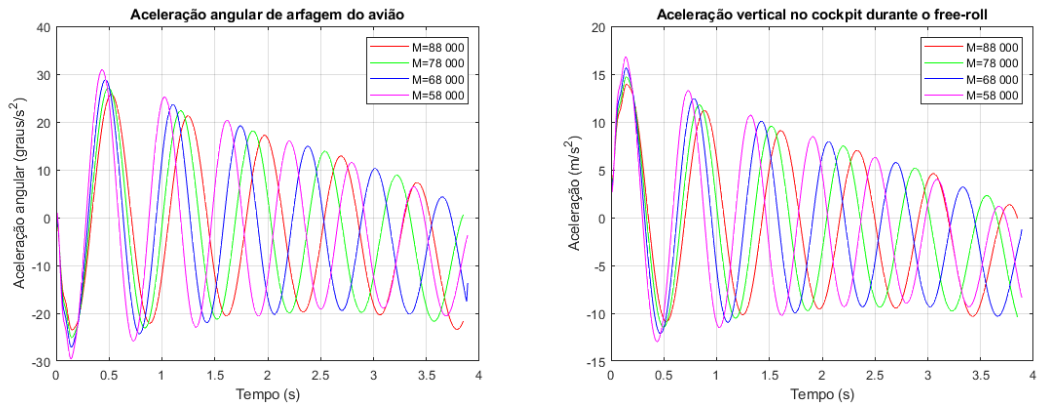
Em relação às acelerações na fuselagem, [Figura 36](#), observa-se o mesmo fenômeno, um aumento na frequência e nas acelerações para massas menores. As oscilações mais rápidas e violentas podem gerar prejuízos aos passageiros e à tripulação, uma vez que chegam perto de algumas frequências naturais do corpo humano, como será discutido na [seção 7.6](#).



(a) Ângulo de arfagem

(b) Carga inercial no trem de pouso

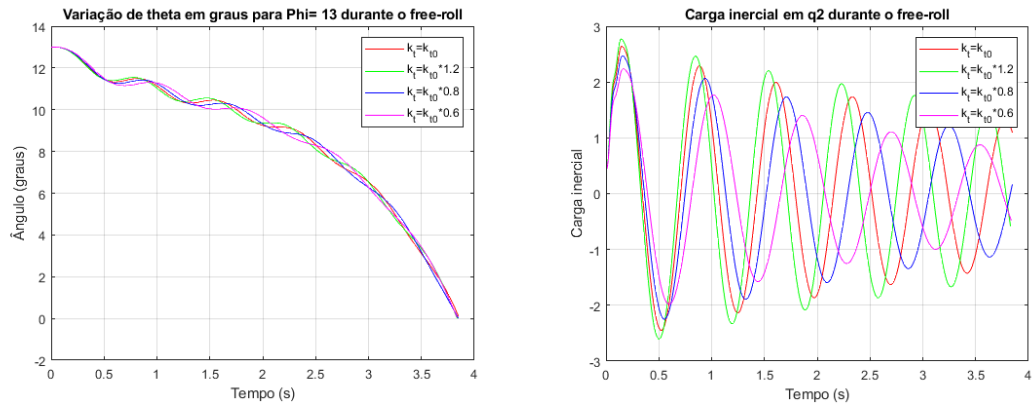
Figura 35 – Gráficos de θ e das cargas inerciais com variação no valor de M



(a) Aceleração angular de arfagem

(b) Aceleração no *cockpit* do aviãoFigura 36 – Gráficos das acelerações com variação no valor de M

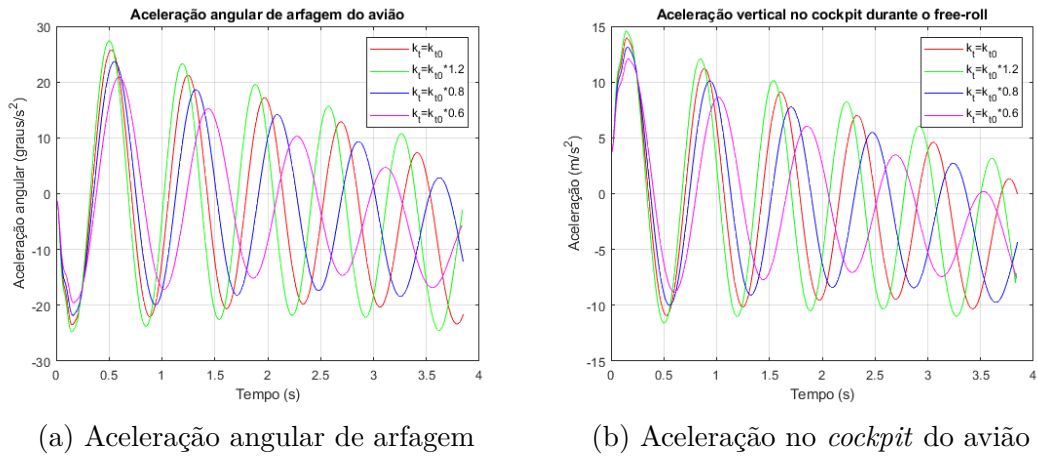
Ao variar a constante de mola do trem de pouso há uma mudança da frequência de oscilação do sistema, que interfere diretamente nas acelerações sentidas dentro da fuselagem. Com constantes de mola menor a frequência diminui e a aceleração absoluta também, como se vê na Figura 38. Esse efeito é resultado do aumento da distância média a ser percorrida para absorver a energia cinética vertical do pouso. Com isso, a carga inercial sobre os trens de pouso também são menores, Figura 37, visto que a aceleração diminui, chegando a valores próximos do valor estipulado como seguro com $0,6 * k_{t0}$ e massa máxima.



(a) Ângulo de arfagem

(b) Carga inercial no trem de pouso

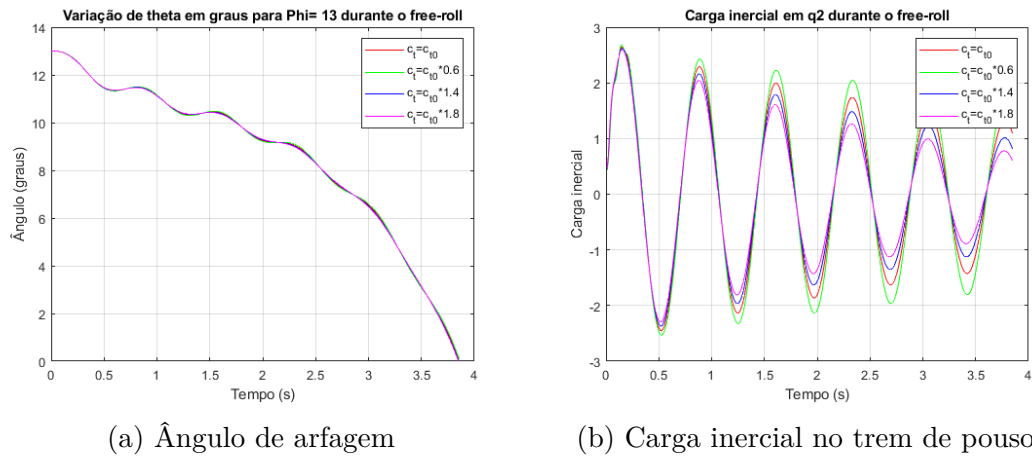
Figura 37 – Gráficos de θ e das cargas inerciais com variação no valor de k_t



(a) Aceleração angular de arfagem

(b) Aceleração no *cockpit* do aviãoFigura 38 – Gráficos das acelerações com variação no valor de k_t

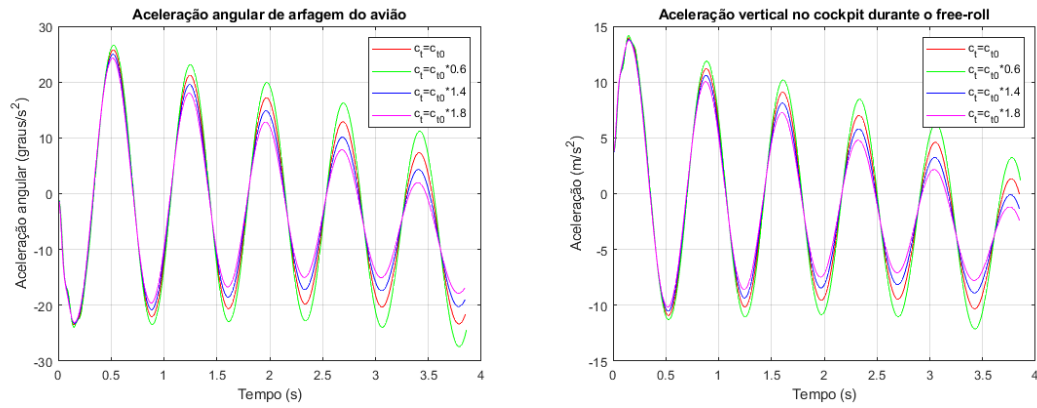
Variando a constante de amortecimento do trem de pouso observa-se que, dentro do intervalo de valores analisado, os efeitos sobre a carga inercial inicial (a mais crítica) é praticamente nulo. Com o tempo o efeito se acumula e pode-se ver uma redução significativa da carga inercial a partir do segundo ciclo, como ilustra o gráfico na [Figura 39](#). Quanto às acelerações sofridas na fuselagem, a frequência permanece inalterada, pois independe de c_t , mas o valor absoluto das acelerações é reduzido ao longo do tempo [Figura 40](#), assim como ocorre com a carga inercial, apresentando valores menores para c_t de maior magnitude.



(a) Ângulo de arfagem

(b) Carga inercial no trem de pouso

Figura 39 – Gráficos de θ e das cargas inerciais com variação no valor de c_t



(a) Aceleração angular de arfagem

(b) Aceleração no *cockpit* do aviãoFigura 40 – Gráficos das acelerações com variação no valor de c_t

Por fim, as influências dos parâmetros e a sua relevância foram organizados na Tabela 7, abaixo.

Parâmetro	influência sobre carga inercial	Influência sobre conforto
C_{pav}	Nenhuma	Nenhuma
y_{ext}	Alta	Alta
Φ_0	Nenhuma	Alta
u_v	Nenhuma	Baixa
u_{vert}	Alta	Alta
M	Baixa	Média
k_t	Média	Alta
c_t	Baixa	Alta

Tabela 7 – Parâmetros que influenciam no conforto e cargas inerciais

7.6 Conforto e forças inerciais no trem de pouso

O valor limite para os esforços sobre o trem de pouso utilizado nesse trabalho estão descritos no Capítulo 3, como exigido pela *Federal Aviation Administration* e em consonância com outras referências (FAA, 2005).

A análise do conforto a partir das vibrações e acelerações sentidas na fuselagem, novamente já descritas no Capítulo 3 – frequências abaixo de 1Hz por tempo prolongado são causadoras de enjoo e frequências de 2 a 6Hz causam hiperventilação.

Assim, para os esforços sobre o trem de pouso, os cenários mais importantes para análise são com variação do y_{ext} e da velocidade vertical. No caso do y_{ext} alguns valores podem excitar frequências de ressonância, fazendo com que a amplitude e aceleração sobre o trem de pouso cresçam de forma indefinida. O u_{vert} tem grande relevância pois pequenas variações na velocidade de descida aumentam de forma significativa a energia a

ser absorvida, visto que a energia é quadraticamente proporcional à velocidade. A análise desses parâmetros cresce de importância, pois variam de pouso para pouso.

A massa do avião, a constante de mola e a constante de amortecimento também merecem atenção, mas, por serem parâmetros que podem ser controlados ou escolhidos, podem ser analisados de forma mais geral, impondo um intervalo de valores ideal.

Como pode ser vistos nos gráficos da seção anterior, nas condições de massa máxima, usando os trens de pouso escolhidos para confecção do modelo e analisando nas condições de velocidade máxima de descida e horizontal a carga inercial ultrapassa os valores estipulados e piora para valores de massa menores. Dos cenários é possível perceber que uma redução na constante de mola do trem de pouso é capaz de reduzir a valores considerados seguros. Assim, propõe-se que o modelo tenha sua constante de mola reduzida para que seja reduzido o desconforto do choque inicial com o solo e garantir a conformidade com a norma de segurança.

Para o conforto na fuselagem a velocidade vertical, as excitações da pista e o ângulo de arfagem inicial devem ser analisados a fundo, pois são parâmetros variáveis para cada pouso. Além de serem variáveis, são parâmetros sobre os quais não há controle ou ele é muito limitado e varia de pouso para pouso, dependendo de muitas variáveis externas, assim, esses parâmetros devem ser fortemente estudados. Para estudar esses parâmetros, entretanto, há de, antes, se definir as constantes de mola e amortecimento, que regem o comportamento do trem de pouso.

Para definir o comportamento ideal do trem de pouso em relação ao conforto deve-se observar as frequências de vibração e a aceleração. As vibrações devem ficar entre 0 e $2Hz$, uma vez que, por ser um período curto de tempo de oscilação, vibrações entre 0 e $1Hz$ não serão preocupantes. Desta forma, o objetivo deve ser reduzir a frequência e as acelerações sentidas na fuselagem, com ênfase no *Cockpit*, onde se localiza a tripulação.

Para amenizar as acelerações, deve-se diminuir a constante de mola em relação à referência, de modo a reduzir a frequência de vibração, baixando-a dos níveis acima de $2Hz$. Além disso, a constante de amortecimento deve ser aumentada, para reduzir de forma mais eficiente a amplitude das vibrações e consequentemente a aceleração. Assim, pelas observações dos gráficos da [seção 7.5](#), valores como $0,6 * k_{t0}$ e $1,8 * c_{t0}$ são interessantes candidatos, nas condições e parâmetros do modelo, que apesar de apresentar uma frequência de vibração dentro do intervalo ideal, ainda apresenta acelerações altas dentro da cabine.

Conclui-se, assim, que o modelo proposto, em relação ao conforto está próximo do ideal, sendo necessário apenas ajustar a constante de mola, de forma a reduzir a amplitude das oscilações mais rapidamente. No que tange aos esforços sobre o trem de pouso, o modelo proposto tem de ser melhorado, fazendo ajustes na constante de mola, de modo que a carga inercial máxima a dois não seja ultrapassado.

8 Conclusão

A partir das análises feitas anteriormente e de estudos de extensa bibliografia, conclui-se que o modelo simula de forma apropriada o comportamento de um avião no período de free-roll. Como visto nos estudos bibliográficos, a dinâmica do avião se torna mais instável quanto maior o ângulo de arfagem e em velocidades maiores (CAUGHEY, 2011), fatos confirmados com as análises na seção 6.4.

Sobre as análises feitas sobre os esforços nos trens de pouso, pode-se concluir que os parâmetros selecionados para o modelo físico fazem com que as cargas inerciais sejam superiores às cargas limites. Com isso, é necessário ajustar as constantes de mola e amortecimento do modelo para que o comportamento se ajuste ao limite delimitado.

Em relação ao conforto dos passageiros, o modelo proposto apresenta frequências dentro dos limites que não causam efeitos fisiológicos no intervalo de tempo analisado. Além disso, as mudanças necessárias ao ajuste do trem de pouso para respeitar à norma farão com que as frequências diminuam, se distanciando das frequências de ressonância do corpo humano (BALLARD et al., 2020). Logo, em relação ao conforto, o modelo proposto satisfaz as condições desejadas, de frequências abaixo de $2Hz$.

8.1 Pontos a melhorar e próximos passos

Após a conclusão e revisão do trabalho, foram notados alguns possíveis pontos de melhoria. Dentre eles está a revisão da inclusão do atrito, que no modelo apresentado parece não ter influência sobre o comportamento do avião – isso pode ter vindo da maneira como ele foi incorporado ao modelo (subseção 5.5.3) ou da própria definição das constantes de atrito (Equação 5.8). Também é necessária atenção ao cancelamento de polos ocorrido no modelo, que pode trazer comportamentos não observáveis para q_2 .

Para o desenvolvimento futuro do projeto, primeiramente, devem ser sanados os pontos de melhoria, citados acima. Após as devidas correções, deve-se complementar o modelo físico com parâmetros desprezados neste trabalho e, posteriormente, adicionar possíveis casos de simulação.

Dentre os parâmetros a serem adicionados estão: momento de inércia do conjunto das rodas e pneus, atrito viscoso nos mancais, influência da inclinação da aeronave nas resultantes do trem de pouso e variação do centro de massa.

Os possíveis casos de simulação a serem implementados para melhor compreensão do comportamento da aeronave são a inclinação da pista, influência do efeito solo, adição de aquaplanagem e derrapagem da aeronave e aplicação de freios.

Referências

- AIGOIN, G. *Characterising hard landings*. 2012. <<https://web.archive.org/web/20170315211202/https://essi.easa.europa.eu/ecast/wp-content/uploads/2012/01/AIGOIN-Characterising-hard-landings.pdf#page=7>>. Accessed: 2023-12-04. Citado na página 26.
- ANDERSON, J. D. *Fundamentals of aerodynamics*. 5th. ed. McGraw-Hill, 2011. Hardcover. ISBN 9780073398105. Disponível em: <<http://www.worldcat.org/isbn/9780073398105>>. Citado na página 16.
- ASTRÖM, R. M. M. K. J. *Feedback Systems - An Introduction for Scientists and Engineers*. Princeton University Press, 2008. ISBN 978-0-691-13576-2. Disponível em: <https://www.cds.caltech.edu/~murray/books/AM08/pdf/am08-complete_28Sep12.pdf>. Citado 4 vezes nas páginas 23, 25, 30 e 32.
- BALLARD, M. T. et al. Human response effects to whole body vibration in aviation: A brief review. 2020. Citado 2 vezes nas páginas 12 e 58.
- BRITISHAIRWAYS. *Concorde Flying manual Volume II*. 1977. Citado na página 19.
- BROUCKE, M. *ECE311 - Dynamic Systems and Control: Linearization of Nonlinear Systems*. 2020. <<https://www.control.utoronto.ca/~broucke/ece311s/Handouts/linearization.pdf>>. Accessed: 2023-11-02. Citado na página 25.
- CABRAL, E. L. L. *Controlabilidade e Observabilidade*. 2015. <<https://www.academia.edu/33596126>>. Accessed: 2023-12-04. Citado na página 31.
- CALDER, S. *Are supersonic passenger flights going to make a comeback?* 2023. <<https://www.independent.co.uk/travel/news-and-advice/supersonic-passenger-flight-boom-b2434545.html>>. Accessed: 2023-11-20. Citado na página 9.
- CAUGHEY, D. A. Introduction to aircraft stability and control course notes for m&ae 5070. *Sibley School of Mechanical & Aerospace Engineering Cornell University*, v. 15, 2011. Citado 3 vezes nas páginas 9, 35 e 58.
- CHAPRA, S. *Numerical Methods for Engineers*. McGraw-Hill Education, 2014. ISBN 9780077492168. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=3GpzCgAAQBAJ>>. Citado na página 24.
- COELHO, L. d. S. C. A. A. R. *Identificação de Sistemas Dinâmicos Lineares*. [S.l.]: Editora UFSC, 2016. Citado na página 27.
- CROSS, R. Origins of rolling friction. *Physics Education*, IOP Publishing, v. 52, n. 5, p. 055001, jun 2017. Disponível em: <<https://dx.doi.org/10.1088/1361-6552/aa77b4>>. Citado na página 17.
- DONHA, D. C. *Crítério de Estabilidade de Routh-Hurwitz*. 2022. <>. Accessed: 2023-12-04. Citado na página 41.

FAA. *Code of Federal Regulations*. [S.l.]: US General Services Administration, National Archives and Records Service . . . , 2005. Citado 3 vezes nas páginas 48, 52 e 56.

FAA. *Department of Transportation; Part 23; Subpart C-Structure*. 2023. <<https://www.law.cornell.edu/cfr/text/14/part-23/subpart-C>>. Accessed: 2023-11-27. Citado na página 11.

FLUGGE, W. *Landing-gear impact*. [S.l.], 1952. Citado na página 13.

GILLESPIE, T. A. *T Fundamentals of Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, 1992. ISSN 9781560911999. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=L6xd0nx5KbwC>>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

GONZALEZ, D. G. *Understanding Poles and Zeros*. 2004. <<https://web.mit.edu/2.14/www/Handouts/PoleZero.pdf>>. Accessed: 2023-11-28. Citado 2 vezes nas páginas 32 e 37.

HILL, R. *System Dynamics and Control: Module 27b - Choosing State Variables*. 2015. <<https://www.youtube.com/watch?v=ÂãRdAZNUfWDpQ>>. Accessed: 2023-12-04. Citado na página 15.

HOUGHTON, E. et al. Chapter 1 - basic concepts and definitions. In: HOUGHTON, E. et al. (Ed.). *Aerodynamics for Engineering Students (Seventh Edition)*. Seventh edition. Butterworth-Heinemann, 2017. p. 1–86. ISBN 978-0-08-100194-3. Disponível em: <<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/B9780081001943000018>>. Citado na página 16.

ICAO. *Accident statistics*. 2023. <<https://www.icao.int/safety/iStars/Pages/Accident-Statistics.aspx>>. Accessed: 2023-11-11. Citado na página 8.

INFOSYS. *Aircraft landing gear design and development - How advanced technologies are helping to meet the challenges?* 2018. <<https://www.infosys.com/industries/communication-services/documents/landing-gear-design-and-development.pdf>>. Accessed: 2023-10-22. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 19.

JUSTPLANES. *Awesome Air France CONCORDE at KAI TAK*. 2018. <https://www.youtube.com/watch?v=fXEIs3gdW_A>. Accessed: 2023-12-02. Citado na página 26.

KARPENKO, M. Landing gear failures connected with high-pressure hoses and analysis of trends in aircraft technical problems. *Aviation*, v. 26, n. 3, p. 145–152, 2022. Citado na página 8.

KESARWANI, S. et al. Polymer composites in aviation sector. *Int. J. Eng. Res*, v. 6, n. 06, 2017. Citado na página 18.

KOUROUSIS, K. I. *Supersonic Transport Aircraft: The Right Material for High Temperatures*. 2023. <<https://www.linkedin.com/pulse/supersonic-transport-aircraft-right-material-high-i-kourousis/>>. Accessed: 2023-11-10. Citado na página 19.

LIU, S. et al. Evaluation of aircraft random vibration under roughness excitation during taxiing. *International Journal of Transportation Science and Technology*, Elsevier, 2023. Citado na página 13.

- LUCKRING, J. The discovery and prediction of vortex flow aerodynamics. *The Aeronautical Journal*, Cambridge University Press, v. 123, n. 1264, p. 729–804, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- LYSSIS, P. *Piano aircraft design software*. 2010. <<https://www.lissys.uk/pug/c00.html>>. Accessed: 2023-12-04. Citado na página 11.
- PASH, G.; SEBASTIAN, J.; JOOHNSON, N. Analysis of a aircraft landing gear suspension system. 2018. Citado na página 19.
- RAO, A. G. et al. Euroflyer final report. 07 2013. Citado na página 11.
- SAUSMAREZ, S. de. *Airframe Dimensions*. 2010. <<https://www.heritageconcorde.com/airframe-dimensions>>. Accessed: 2023-11-23. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 26.
- SIVAPRAKASAM, S.; HARAN, A. Mathematical model and vibration analysis of aircraft with active landing gears. *Journal of Vibration and Control*, v. 21, p. 229–245, 01 2013. Citado na página 13.
- SLEEPER, R. K.; DREHER, R. C. *Tire stiffness and damping determined from static and free-vibration tests*. [S.l.], 1980. Citado na página 19.
- STUTTS, D. S. *Notes on Frequency Methods: Gain Margin Phase Margin, Delays, and the Nyquist Map*. 1999. <<https://web.mst.edu/~stutts/supplementalnotes/stabilityviafreqmethods.pdf>>. Accessed: 2023-12-03. Citado na página 40.
- SUHAREVS, A. et al. Dynamic model of aircraft landing. *Transport and Aerospace Engineering*, v. 3, n. 1, p. 38–43, 2016. Citado na página 13.
- SUHAREVS, A. et al. Dynamic model of aircraft landing. *Transport and Aerospace Engineering*, v. 3, 12 2016. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 18.
- TANI, J. *Lecture 6: Transfer Functions 2: Poles and Zeros*. 2004. <https://ethz.ch/content/dam/ethz/special-interest/mavt/dynamic-systems-n-control/idsc-dam/Lectures/Control-Systems-1/Lectures/L1806-PolesAndZeros_JT.pdf>. Accessed: 2023-11-28. Citado na página 32.
- THAMESTV. *Concorde Landing | Concorde | London | Thames Rushes | 1980's*. 2019. <<https://www.youtube.com/watch?v=Gr86XzJ2aDw>>. Accessed: 2023-12-02. Citado na página 26.
- ZHAO, Z.-t. et al. Low speed aerodynamic performance analysis of vortex lift waveriders with a wide-speed range. *Acta Astronautica*, Elsevier, v. 161, p. 209–221, 2019. Citado na página 8.

9 Apêndices

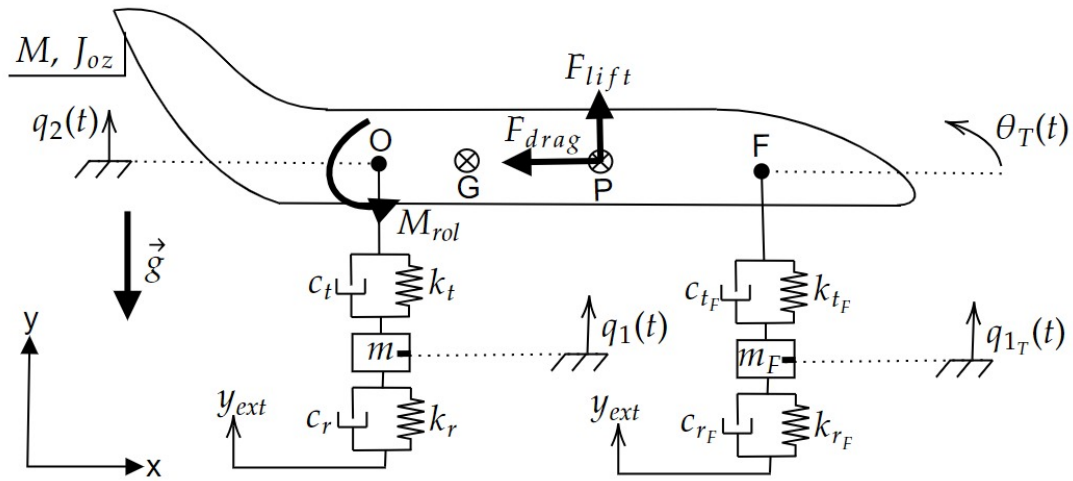


Figura 41 – Modelo físico proposto pós toque frontal – sem forças externas

Fonte: Autoria própria