

Lucas Retore Carboni - 12676091
Roberto Tetsuo Hamaoka - 10334770
Vitor Lucas Buter - 12555700

EXERCÍCIO E1 - 2023 - PME 3380

São Paulo, Brasil

2023

Lucas Retore Carboni - 12676091
Roberto Tetsuo Hamaoka - 10334770
Vitor Lucas Buter - 12555700

EXERCÍCIO E1 - 2023 - PME 3380

Universidade de São Paulo - USP
Escola Politécnica
Departamento de Engenharia Mecânica - PME
Programa de Graduação em Engenharia Mecânica

São Paulo, Brasil
2023

Lista de ilustrações

Figura 1 – Esquema do sistema	5
Figura 2 – Representação matricial do espaço de estados não-linearizado	8
Figura 3 – Representação matricial do espaço de estados linearizado	9
Figura 4 – Modelo linear na forma de espaço de estados	10
Figura 5 – Implementação do método de Euler explícito para caso não-linear	12
Figura 6 – Comparação entre os modelos linear e não-linear	13
Figura 7 – Resultados para curtos intervalos de integração	13
Figura 8 – Comparação entre os métodos de integração não-linearizados	14
Figura 9 – Validação do modelo linearizado	14
Figura 10 – Solução linear e não-linear para C2	16
Figura 11 – Solução não-linear para C2	16
Figura 12 – Solução não-linear para C2 – passo reduzido	17
Figura 13 – Análise energética para C2	18
Figura 14 – Esboço de funcionamento dos métodos de integração implementados	19
Figura 15 – Esboço de funcionamento dos métodos de integração implementados	19
Figura 16 – Amortecimento numérico para C2 não-linear	20

Sumário

1	EQUACIONAMENTO E MODELAGEM DO SISTEMA	5
1.1	Modelo Proposto	5
1.2	Análise Conservativa - <i>item A</i>	6
1.2.1	Energia Cinética	6
1.2.2	Energia Potencial	7
1.3	Equação Dinâmica do Sistema	7
1.3.1	Análise Não-Linear - <i>item B</i>	7
1.3.2	Análise Linear - <i>item C</i>	8
1.4	Frequências Naturais do Sistema - <i>item D</i>	9
2	SIMULAÇÃO NUMÉRICA E ANÁLISE DOS RESULTADOS	11
2.1	Definição das condições iniciais para as simulações - <i>item E</i>	11
2.2	Escolha dos métodos de integração numérica - <i>item F</i>	11
2.3	Validação do modelo linear e dos métodos de integração - <i>item G</i> .	12
2.4	Aplicabilidade da solução linear - <i>item H</i>	15
	REFERÊNCIAS	21

Resumo

O problema tratado no atual relatório refere-se ao exercício proposto no curso "PME3380 - Modelagem de Sistemas Dinâmicos" que versa sobre a modelagem e linearização da dinâmica de um pêndulo duplo rígido.

O relatório apresenta o equacionamento do modelo linear e não linear por meio de mecânica analítica. A partir disso ambos modelos foram simulados e integrados numericamente, e as análises dos resultados, com atenção especial a convergência do método linear, também apresentadas. Nessa seção, quando não indicado o contrário, o passo utilizado foi $10^{-2} s$.

Para o equacionamento, o *software Wolfram Mathematica 13.2* foi utilizado. Para a integração numérica, a ferramenta implementada foi o *MATLAB* da *MathWorks*. Todos os códigos estão presentes neste [GitHub](#).

1 Equacionamento e Modelagem do Sistema

1.1 Modelo Proposto

O modelo proposto é esquematizado pela [Figura 1](#).

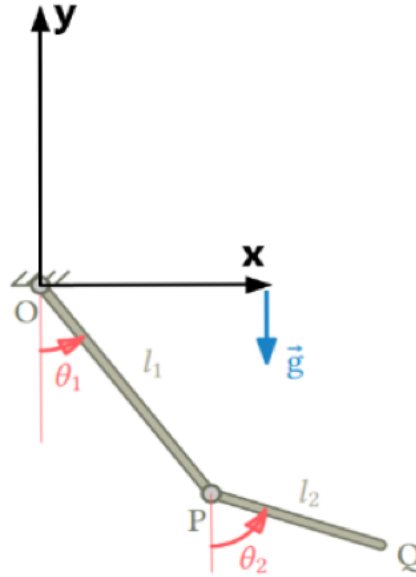


Figura 1 – Esquema do sistema

Fonte: Adaptado de “PME 3380 – Modelagem de Sistemas Dinâmicos – Exercício E1 – 2023”

No atual relatório, a barra PO será também chamada de barra 1 e, analogamente, a barra QP de barra 2. Os parâmetros utilizado neste grupo são:

$$\omega_p = \frac{\sqrt{g}}{l_1} = 1 \text{ rad/s} \quad (1.1)$$

$$\lambda = \frac{l_1}{l_2} = 1 + \sum_j \frac{D_j}{20} = 1 + \frac{1}{20} = 1,05 \quad (1.2)$$

Note que o esquema proposto já indica as coordenadas generalizadas a serem utilizadas: θ_1 e θ_2 . É importante notar que elas estão dadas em relação ao eixo OY , assim, são em referencial absoluto, o que simplifica o vetor de rotação da barra PQ em comparação a um hipotético caso no qual a segunda coordenada estivesse subordinada à primeira. Assim, pode-se definir o vetor de coordenadas generalizadas ([Equação 1.3](#)) e de quasi-velocidades ([Equação 1.4](#)).

$$\mathbf{q}(t) = \{\theta_1(t), \theta_2(t)\} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{v}(t) = \{\theta'_1(t), \theta'_2(t)\} \quad (1.4)$$

1.2 Análise Conservativa - item A

Para o cálculo das energias cinética e potencial do sistema, **tomado como conservativo**, os vetores posição de polos de interesse da barra devem ser encontrados. Por conveniência, define-se o vetor $(P - O)$ e $(Q - P)$, que são já suficientes:

$$\rho_{PO} = \{l_1 \sin(\theta_1(t)), -l_1 \cos(\theta_1(t)), 0\} \quad (1.5)$$

$$\rho_{QP} = \{l_2 \sin(\theta_2(t)), -l_2 \cos(\theta_2(t)), 0\} \quad (1.6)$$

1.2.1 Energia Cinética

Naturalmente, precisa-se do vetor velocidade de um polo de cada barra para o cômputo da energia cinética por meio do teorema da energia cinética, apresentado abaixo:

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_o|^2 + m\vec{v}_o \cdot \vec{\omega} \times (G - O) + \frac{1}{2}J_{oZ}|\vec{\omega}|^2 \quad (1.7)$$

Analizando a [Equação 1.7](#), nota-se que para a barra 1 o polo de interesse é o O , o que fará com que apenas o último termo se mantenha, dado que $\vec{v}_o = 0$. Na barra 2, facilita usar o polo G_2 , o que simplifica o termo cruzado. Note que $\vec{\omega}_1 = \{0, 0, \mathbf{v}(1)\}$ e $\vec{\omega}_2 = \{0, 0, \mathbf{v}(2)\}$. Assim, calculando a velocidade desses respectivos polos, obtém-se:

$$\vec{v}_o = (0, 0, 0) \quad (1.8)$$

$$\vec{v}_p = \vec{v}_o + \vec{\omega}_1 \times \rho_{PO} = (l_1\theta'_1(t) \cos(\theta_1(t)), l_1\theta'_1(t) \sin(\theta_1(t)), 0) \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_{G_2} &= \vec{v}_p + \vec{\omega}_2 \times \frac{\rho_{QP}}{2} = \\ &= (l_1\theta'_1(t) \cos(\theta_1(t)) + \frac{1}{2}l_2\theta'_2(t) \cos(\theta_2(t)), l_1\theta'_1(t) \sin(\theta_1(t)) + \frac{1}{2}l_2\theta'_2(t) \sin(\theta_2(t)), 0) \end{aligned} \quad (1.10)$$

Com essas velocidades como entrada da [Equação 1.7](#), obtém-se:

$$T_1 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \frac{1}{3} \cdot l_1^2 \cdot (\omega_1 \cdot \omega_1) \quad (1.11)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot (v_p \cdot v_p) + m_2 \cdot v_p \cdot \omega_2 \times \rho_{QP}/2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \frac{1}{3} \cdot l_2^2 \cdot (\omega_2 \cdot \omega_2) \quad (1.12)$$

Note que caso as barras fossem não homogêneas, tanto os momentos de inércias quanto o vetor $G_2 - P$ deveriam ser recalculados. A energia cinética do sistema é a soma das duas, a qual, após simplificações algébricas, resulta em:

$$T = \frac{1}{6} \left(l_1^2(m_1 + 3m_2)\theta'_1(t)^2 + l_2^2m_2\theta'_2(t)^2 + 3l_1l_2m_2\theta'_2(t)\theta'_1(t) \cos(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \right) \quad (1.13)$$

1.2.2 Energia Potencial

A energia potencial envolvida no sistema é apenas a energia potencial gravitacional, a qual depende neste exercício apenas da posição $y = y(t)$ dos centros de massa. Como energia potencial depende de uma referência, adotou-se que $V(y = 0) = 0$. Assim, a energia potencial de cada barra e a total do sistema são:

$$V_1 = m_1 \cdot g \cdot \rho_{y_{PO}} / 2 \quad (1.14)$$

$$V_2 = m_2 \cdot g \cdot (\rho_{y_{PO}} + \rho_{y_{QP}} / 2) \quad (1.15)$$

$$V = -\frac{1}{2}g (l_1(m_1 + 2m_2) \cos(\theta_1(t)) + l_2 m_2 \cos(\theta_2(t))) \quad (1.16)$$

1.3 Equação Dinâmica do Sistema

1.3.1 Análise Não-Linear - item B

Como esperado, as energias do sistema foram obtidas justamente para a aplicação de mecânica analítica via método de Lagrange. O método de Lagrange para sistemas holônomos, como o apresentado neste relatório, é descrito pela [Equação 1.17](#).

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_k \quad \text{para } k = 1, 2, \dots, n \quad (1.17)$$

Note que para o sistema proposto, $Q_k = 0$ e são duas coordenadas generalizadas, logo, duas equações que descrevem a dinâmica do sistema serão obtidas. Em verdade, no código presente no [GitHub](#), utilizou-se o Lagrangiano do sistema para cada coordenada ao invés da equação expandida, contudo, a análise é exatamente a mesma com notações distintas. Após aplicar o método, as duas equações dinâmicas foram encontradas e resolvidas. Note que ambas foram igualadas a zero visto que não há forças ou momentos externos no sistema. Agrupou-se os termos isolando $\theta_1''(t)$ e $\theta_2''(t)$, o que resultou em:

$$\theta_1''(t) \rightarrow -\frac{g((4m_1 + 5m_2) \sin(\theta_1(t)) + 3m_2 \sin(\theta_1(t) - 2\theta_2(t)))}{l_1(8m_1 - 9m_2 \cos(2(\theta_1(t) - \theta_2(t))) + 15m_2)} + \frac{6l_2 m_2 \theta_2'(t)^2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t))}{l_1(9m_2 \cos^2(\theta_1(t) - \theta_2(t)) - 4(m_1 + 3m_2))} + \frac{9m_2 \theta_1'(t)^2 \sin(2(\theta_1(t) - \theta_2(t)))}{-8m_1 + 9m_2 \cos(2(\theta_1(t) - \theta_2(t))) - 15m_2} \quad (1.18)$$

$$\theta_2''(t) \rightarrow \frac{9g(m_1 + 2m_2) \sin(2\theta_1(t) - \theta_2(t)) - 3g(m_1 + 6m_2) \sin(\theta_2(t))}{l_2(8m_1 - 9m_2 \cos(2(\theta_1(t) - \theta_2(t))) + 15m_2)} + \frac{6l_1(m_1 + 3m_2) \theta_1'(t)^2 \sin(\theta_1(t) - \theta_2(t))}{l_2(4(m_1 + 3m_2) - 9m_2 \cos^2(\theta_1(t) - \theta_2(t)))} + \frac{9m_2 \theta_2'(t)^2 \sin(2(\theta_1(t) - \theta_2(t)))}{8m_1 - 9m_2 \cos(2(\theta_1(t) - \theta_2(t))) + 15m_2} \quad (1.19)$$

Observe que há inúmeros termos não lineares nas coordenadas generalizadas – caso houvessem termos trigonométricos que não as envolvessem, não haveria problema algum em termos de linearização. Para escrever o espaço de estados não linear do sistema, precisa-se anteriormente definir o vetor de estados, o qual é o conjunto mínimo de variáveis que

descreve completamente o sistema, sendo possível então prever seu comportamento. É esperado que esse vetor tenha 4 componentes, afinal, esse número reflete o a quantidade de meios distintos que o sistema armazena energia (HILL, 2015) – potencial e cinética em cada uma das barras, resultando em 4 meios. O vetor de estados é:

$$\mathbf{x}(t) = \{\theta_1(t), \theta_2(t), \theta'_1(t), \theta'_2(t)\} \quad (1.20)$$

Para obter $\dot{\mathbf{x}}(t) = f(x)$, basta substituir a Equação 1.18 e Equação 1.19 em $\dot{\mathbf{x}}(t)$, ou seja, derivar o vetor de estados e substituir o resultado obtido da equação dinâmica não linear do sistema, o que resulta no seguinte espaço de estados já parametrizados em função de λ e ω_p , apresentados na seção 1.1:

$$\begin{pmatrix} \theta_1'[t] \\ \theta_2'[t] \\ -\frac{3(\lambda((5+4\lambda)\sin[\theta_1[t]]-3\sin[\theta_1[t]-2\theta_2[t]])\omega_p^2+2\sin[\theta_1[t]-\theta_2[t]](3\lambda\cos[\theta_1[t]-\theta_2[t]]\theta_1'[t]^2+2\theta_2'[t]^2))}{\lambda(15+8\lambda-9\cos[2(\theta_1[t]-\theta_2[t])])} \\ \frac{3(\lambda(3(2+\lambda)\sin[2\theta_1[t]-\theta_2[t]]-(6+\lambda)\sin[\theta_2[t]])\omega_p^2+2\sin[\theta_1[t]-\theta_2[t]](2\lambda(3+\lambda)\theta_1'[t]^2+3\cos[\theta_1[t]-\theta_2[t]]\theta_2'[t]^2))}{15+8\lambda-9\cos[2(\theta_1[t]-\theta_2[t])]} \end{pmatrix}$$

Figura 2 – Representação matricial do espaço de estados não-linearizado

Fonte: Autoria própria

1.3.2 Análise Linear - item C

A linearização se baseia em torno de uma posição de equilíbrio em torno da qual o sistema pode ser linearizado sem que a solução seja muito discrepante da solução não-linear, dado um certo intervalo. No cenário proposto da Figura 1, é natural que a posição de equilíbrio do sistema seja $\theta_1(t_0) = 0$ e $\theta_2(t_0) = 0$, sendo esta a configuração de equilíbrio estável e trivial do sistema.

Para realizar a linearização, define-se variáveis incrementais que expressam a diferença do valor original e no equilíbrio em questão. Elas são dadas pela expansão em serie de Taylor truncada em primeira ordem da variável original em torno da posição de equilíbrio. No exercício, a linearização foi feita aplicando-se a função *Linearize.m* de autoria do Prof. Dr. Renato Maia Matarazzo Orsino, também presente no [GitHub](#), a qual recebe como entradas a equação dinâmica não linearizada e a posição de equilíbrio do sistema, retornando a equação dinâmica linearizada.

Com a equação dinâmica linear, basta passar pelo mesmo processo de solução descrito na subseção 1.3.1 para encontrar a solução da equação isolando isolando $\theta_1''(t)$ e $\theta_2''(t)$.

$$\theta_1''(t) \rightarrow \frac{9gm_2\theta_2(t) - 6g(m_1 + 2m_2)\theta_1(t)}{l_1(4m_1 + 3m_2)} \quad (1.21)$$

$$\theta_2''(t) \rightarrow \frac{9g(m_1 + 2m_2)\theta_1(t) - 6g(m_1 + 3m_2)\theta_2(t)}{l_2(4m_1 + 3m_2)} \quad (1.22)$$

Note de antemão a simplificação das soluções para $\theta_1''(t)$ e $\theta_2''(t)$ entre o método linear e não-linear, presente na [Equação 1.18](#) e [Equação 1.19](#). Para obter a solução em forma de espaços, aplica-se o mesmo procedimento já comentado e substitui-se os parâmetros λ e ω_p .

$$\begin{pmatrix} \theta_1' [t] \\ \theta_2' [t] \\ \frac{3\omega_p^2 (-2(2+\lambda)\theta_1[t] + 3\theta_2[t])}{3+4\lambda} \\ \frac{3\lambda\omega_p^2 (3(2+\lambda)\theta_1[t] - 2(3+\lambda)\theta_2[t])}{3+4\lambda} \end{pmatrix}$$

Figura 3 – Representação matricial do espaço de estados linearizado

Fonte: Autoria própria

1.4 Frequências Naturais do Sistema - *item D*

Nesta seção, todas as análises feitas levarão em consideração apenas a solução linear. Isso é feito pelo fato de que, usualmente, os sistema não-lineares obtidos não apresentam solução analítica, o que impede a sua análise qualitativa (veja a complexidade para resolver analiticamente as equações não-lineares apresentadas na [subseção 1.3.1](#)). Nesses casos, pode-se tomar uma posição de equilíbrio conhecida e linearizar a equação na sua vizinhança, o que resulta em um conjunto de ODEs que, em geral, pode-se resolver. Essa solução fornece informações qualitativas importantes sobre o comportamento do sistema, por exemplo, se o equilíbrio é instável ou estável ou como o sistema se aproxima ou afasta desse ponto de equilíbrio ([LLOYD, 2017](#)).

Para expressar o modelo completo na forma de estados, deve-se representar a derivada do vetor de estados $\dot{\mathbf{x}}(t)$ como função da multiplicação de uma matriz \mathbf{A} pelo próprio vetor de estados $\mathbf{x}(t)$. A matriz \mathbf{A} é chamada de matriz de estados, e, em termos físicos, expressa como a os estados internos estados estão conectados entre si. Para obtê-la, basta colher os coeficientes de $\dot{\mathbf{x}}(t)$ do espaço de estados linear ([Figura 3](#)).

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{6\omega_p^2(\lambda\mu l_2 + 2\mu l_2)}{4\lambda\mu l_2 + 3\mu l_2} & \frac{9\mu l_2\omega_p^2}{4\lambda\mu l_2 + 3\mu l_2} & 0 & 0 \\ \frac{9\lambda\omega_p^2(\lambda\mu l_2 + 2\mu l_2)}{4\lambda\mu l_2 + 3\mu l_2} & -\frac{6\lambda\omega_p^2(\lambda\mu l_2 + 3\mu l_2)}{4\lambda\mu l_2 + 3\mu l_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.23)$$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \\ \ddot{\theta}_1(t) \\ \ddot{\theta}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{6\omega_p^2(\lambda\mu l_2+2\mu l_2)}{4\lambda\mu l_2+3\mu l_2} & \frac{9\mu l_2\omega_p^2}{4\lambda\mu l_2+3\mu l_2} & 0 & 0 \\ \frac{9\lambda\omega_p^2(\lambda\mu l_2+2\mu l_2)}{4\lambda\mu l_2+3\mu l_2} & -\frac{6\lambda\omega_p^2(\lambda\mu l_2+3\mu l_2)}{4\lambda\mu l_2+3\mu l_2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \\ \dot{\theta}_1(t) \\ \dot{\theta}_2(t) \end{pmatrix} \\ \dot{\mathbf{X}} \qquad \qquad \mathbf{A} \qquad \qquad \mathbf{X} \end{array}$$

Figura 4 – Modelo linear na forma de espaço de estados

Fonte: Autoria própria

De primeira vista, observe que o sistema não é amortecido, visto que $\ddot{\mathbf{q}}(t)$ não depende em nenhum termo da derivada primeira das coordenadas generalizadas. Nesse sentido, o sistema é análogo a um massa mola e, em verdade, pode-se expressar o comportamento dinâmico como uma equação do tipo $M[\ddot{x}] + K[x] = 0$. Multiplicando-se \mathbf{A} por \mathbf{x} , essa equivalência fica explícita na equação entre as duas últimas entradas das matrizes resultantes ($\dot{\mathbf{x}}$ e \mathbf{Ax}).

Nesses tipos de problemas, a solução puramente oscilatória é do tipo $\mathbf{x} = u e^{j\omega t}$, o que substituindo na equação análoga ao sistema massa mola resulta em:

$$\mathbf{A}^* = \begin{pmatrix} -\frac{6\omega_p^2(\lambda\mu l_2+2\mu l_2)}{4\lambda\mu l_2+3\mu l_2} & \frac{9\mu l_2\omega_p^2}{4\lambda\mu l_2+3\mu l_2} \\ \frac{9\lambda\omega_p^2(\lambda\mu l_2+2\mu l_2)}{4\lambda\mu l_2+3\mu l_2} & -\frac{6\lambda\omega_p^2(\lambda\mu l_2+3\mu l_2)}{4\lambda\mu l_2+3\mu l_2} \end{pmatrix} \quad (1.24)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = \omega^2 \mathbf{x} \implies \mathbf{A}^* \mathbf{x} = \Lambda \mathbf{x} \quad \text{com} \quad \Lambda = -\omega^2 \quad (1.25)$$

Note que, neste momento, $\ddot{\mathbf{x}} = \{\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2\}$ e $\mathbf{x} = \{\theta_1, \theta_2\}$ (por simplicidade, manteve-se a mesma notação para apresentação – ver seção D do código presente no [GitHub](#)). Claramente, isso resulta em um problema de autovalores e autovetores, no qual os autovalores (Λ_1 e Λ_2) dão as frequências naturais de oscilação do sistema e os autovetores (u_1 e u_2) a amplitude de oscilação em cada coordenada generalizada para cada frequência. Assim, a raiz dos autovalores λ da matriz \mathbf{A}^* resultam nas frequências naturais de oscilação do sistema. Empregando a função *Eigenvalues* do *Mathematica*, os seguintes autovetores são obtidos:

$$\begin{pmatrix} \frac{3\left(\lambda(\lambda+4) + \sqrt{(\lambda+1)^2(\lambda(\lambda+2)+4)} + 2\right)\omega_p^2}{4\lambda+3} \\ \frac{3\left(\lambda(\lambda+4) - \sqrt{(\lambda+1)^2(\lambda(\lambda+2)+4)} + 2\right)\omega_p^2}{4\lambda+3} \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Desse modo, as frequências naturais de oscilação do sistema são:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3\left(\lambda(\lambda+4) - \sqrt{(\lambda+1)^2(\lambda(\lambda+2)+4)} + 2\right)\omega_p^2}{4\lambda+3}} \quad (1.27)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3\left(\lambda(\lambda+4) + \sqrt{(\lambda+1)^2(\lambda(\lambda+2)+4)} + 2\right)\omega_p^2}{4\lambda+3}} \quad (1.28)$$

2 Simulação numérica e análise dos resultados

2.1 Definição das condições iniciais para as simulações - *item E*

Um ponto chave a ser estudado nessa etapa é a validade do modelo linearizado e sua limitação para convergência ao valor não-linear. A fim de visualizar tais condições de eficácia para o modo simplificado, definiu-se dois cenários iniciais, C1 e C2. A primeira condição é tal que o vetor de estados inicial é nulo, com exceção ao valor correspondente a θ_1 , igual a 10° . Nesse contexto, a escolha de θ_1 foi feita de modo a respeitar as condições de convergência do modelo linearizado na [subseção 1.3.2](#), de forma que o ângulo inicial desvie ligeiramente em relação à referida posição de equilíbrio: $10^\circ = 0,1745 \text{ rad}$ e $\text{sen}(10^\circ) = 0,1736 \implies$ desvio de cerca de $0,5\%$. Por outro lado, C2 foi determinado de maneira a observar considerável desvio do equilíbrio estático do sistema. Nesse caso, definiu-se $\theta_1 = 60^\circ$: $60^\circ = 1,0472 \text{ rad}$ e $\text{sen}(60^\circ) = 0,5 \implies$ desvio de cerca de 100% . Os demais parâmetros iniciais para C2 permanecem equivalentes aos de C1 (repouso em $t=0 \text{ s}$ e $\theta_2 = 0$).

Com o objetivo de capturar adequadamente o comportamento do sistema, escolheu-se um intervalo de simulação correspondente a 4 períodos completos de oscilação dados pela maior frequência natural do sistema, que para λ e ω_p , resulta em $0,267 \text{ Hz}$, ou seja, $4 * \frac{1}{0,267} = 14,98 \text{ s}$. Implica-se, portanto, que o tempo total de integração é de 15 segundos. Acredita-se que essa escolha permitirá uma análise detalhada das discrepâncias entre os métodos de integração e as diferenças entre as equações linearizadas e não-linearizadas, visto que a natureza do sistema sob análise é caótica, possibilitando um pequeno período de observação para comparação entre modelos e métodos de integração.

2.2 Escolha dos métodos de integração numérica - *item F*

Após a definição dos estados iniciais para cada cenário, procedeu-se à seleção dos pares de métodos de integração numérica para EDOs. Essa escolha foi orientada pela intenção de analisar suas características distintas em termos de velocidade de convergência, eficiência computacional e precisão.

O primeiro método (M1) escolhido é baseado na fórmula de Euler Explícito, cujo algoritmo de integração numérica foi desenvolvido na Seção 4 do arquivo *Simulação_ex_1.m*, anexado no [GitHub](#) e com um caso de implementação presente abaixo na [Figura 5](#). Já o segundo método selecionado foi implementado pela função `"ode45"` do *MATLAB*, cujo algoritmo é fundamentado na fórmula explícita do Runge-Kutta(4,5). Para facilitar as

referências no corpo do texto e códigos, esse método será identificado por "Runge-Kutta (4,5)" ou M2.

```
% y(i+1) = y(i) + T_sim * f
y_euler_n_lin_C1(i+1,1) = y_0(1,1) + T_sim*dydt_n_lin_1;
y_euler_n_lin_C1(i+1,2) = y_0(1,2) + T_sim*dydt_n_lin_2;
y_euler_n_lin_C1(i+1,3) = y_0(1,3) + T_sim*dydt_n_lin_3;
y_euler_n_lin_C1(i+1,4) = y_0(1,4) + T_sim*dydt_n_lin_4;

y_0 = [ y_euler_n_lin_C1(i+1,1) y_euler_n_lin_C1(i+1,2) y_euler_n_lin_C1(i+1,3) y_euler_n_lin_C1(i+1,4)];
```

Figura 5 – Implementação do método de Euler explícito para caso não-linear

Fonte: Autoria própria

Dadas as diferenças de ordem de integração dos métodos, espera-se que M2 (ordem quatro com correção de quinta ordem) apresente uma convergência mais rápida do que M1 (ordem um), contribuindo para resultados mais confiáveis. Essa melhoria na convergência do M2 não deve ser prejudicada pela alta necessidade de poder computacional, especialmente dada a escolha de um período curto de simulação. Além disso, a análise de desempenho pode ser aprimorada ao variar a quantidade de passos por segundo, oferecendo uma compreensão mais detalhada do comportamento dos métodos diante das nuances da dinâmica do sistema.

2.3 Validação do modelo linear e dos métodos de integração - *item G*

Ao comparar os resultados das simulações numéricas para o caso não-linearizado e o linearizado, nota-se que para o linearizado alguns erros são introduzidos. Estes erros são resultados de aproximações de variáveis e de operações. Dentre as aproximações mais comuns pode-se citar a troca do seno de um ângulo pelo seu próprio valor em radianos, válido para ângulo de até 10° , ou a aproximação do cosseno por um, respeitando as mesmas condições. Nesta seção serão utilizados apenas as simulações do cenário 1, que permite a comparação entre o modelo linearizado e não-linearizado, como será discutido na [seção 2.4](#).

Os gráficos da [Figura 6a](#) e da [Figura 6b](#) a seguir demonstram a introdução de erros de forma visual. Ambos os gráficos mostram que, no caso das equações linearizadas, a solução foge do esperado para tempos maiores de simulação, mesmo que sejam respeitadas as condições de linearização. É visível também que o método de Euler apresenta erros maiores na comparação entre as equações linearizadas e não-linearizadas, que alerta para a importância de testar o método de integração usado para garantir sua eficácia, quando usado em modelos linearizados.

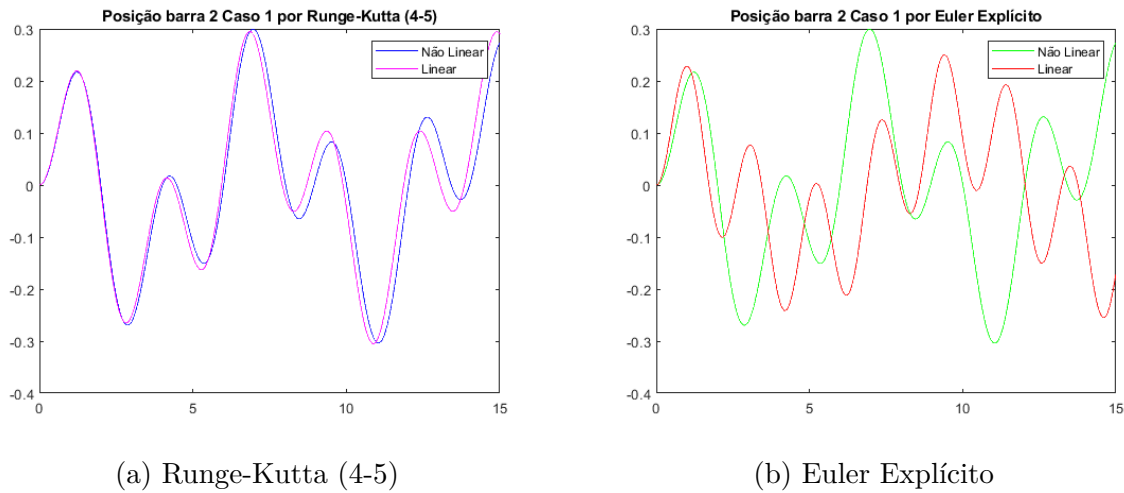


Figura 6 – Comparação entre os modelos linear e não-linear

Como já mencionado acima, os erros em simulações mais longas são mais significativos, isso se deve ao fato de termos usado métodos iterativos, que utilizam valores já calculados para encontrar os próximos. Isso resulta na magnificação do erro, pelo incremento gradual do desvio gerado pelas aproximações, ao passo que a simulação avança. É importante ressaltar, nesse caso, que aproximações devem ser usadas para simulações curtas, para evitar erros como os apresentados. A seguir está apresentado na [Figura 7](#) a comparação para intervalos curtos, demonstrando a eficácia da simulação, mesmo para o modelo linearizado, em períodos curtos.

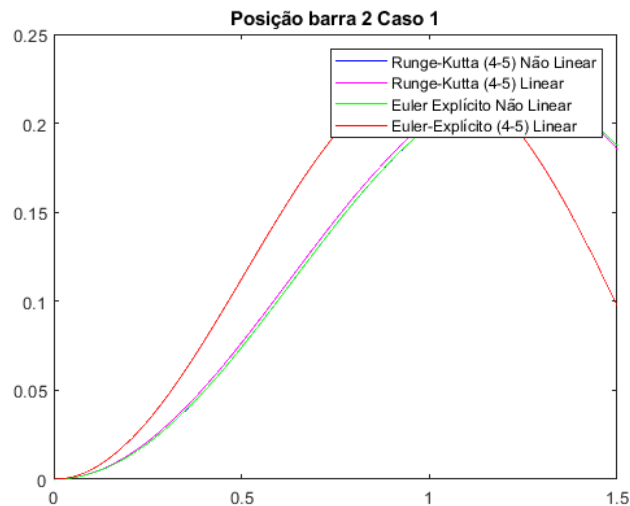
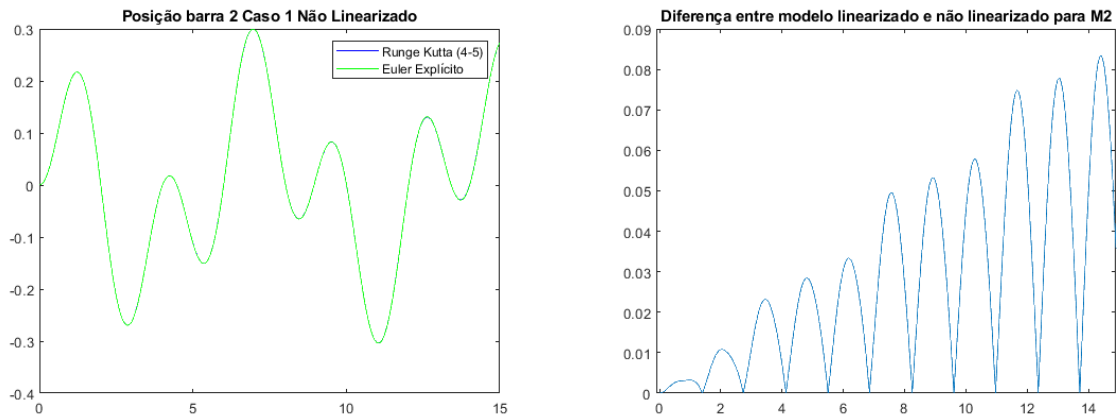


Figura 7 – Resultados para curtos intervalos de integração

Para demonstrar a eficácia dos métodos de integração, a comparação entre eles no caso não-linearizado e linearizado foi feita. A seguir serão discutidas a eficácia e precisão dos métodos a partir das imagens abaixo.

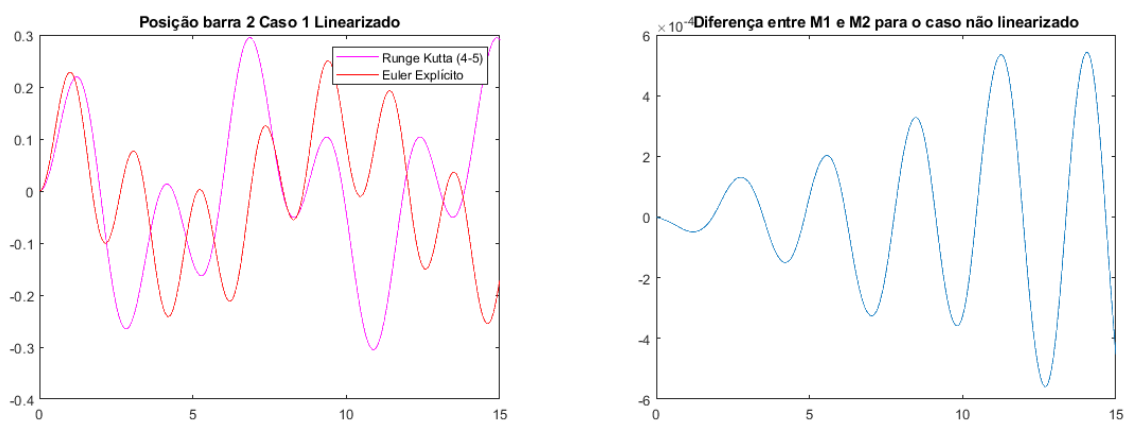


(a) Valores da integração numérica

(b) Diferença de valores entre métodos

Figura 8 – Comparação entre os métodos de integração não-linearizados

Analisando, primeiramente, o gráfico da [Figura 8a](#), que contém a comparação entre os métodos de integração para o caso não-linearizado, ou seja, sem introdução de erros por aproximação, observa-se que ambos retornam valores muito próximos para a amplitude de movimentação da segunda barra, utilizando passo de 10^{-4} segundos. Essa proximidade atesta a eficácia dos métodos de integração, ainda que possa ser visto um desvio da linha traçada entre a integração por Runge-Kutta (4-5) e pelo método de Euler Explícito. Observa-se ainda que os resultados no início da integração são muito próximos, quiçá iguais, e que conforme o tempo de simulação cresce, a discrepância entre os resultados aumenta devido ao caráter iterativo dos métodos de integração numérica, como pode ser observado na [Figura 8b](#).



(a) Comparação entre M1 e M2 linearizados

(b) Diferença entre linearizado e não-linearizado

Figura 9 – Validação do modelo linearizado

O gráfico da [Figura 9a](#), acima, não retorna informações relevantes em relação à eficácia e precisão dos métodos de integração numérica escolhidos. Apesar disso a imagem exemplifica os riscos de se linearizar funções não-lineares. Mesmo utilizando dois métodos

de integração que, no caso não-linear, apresentam valores praticamente idênticos, ao lançar mão de métodos de linearização a garantia de precisão da simulação numérica é perdida, principalmente para intervalos grandes de integração. A [Figura 9b](#) mostra como a diferença de amplitude entre os modelos linearizados e não-linearizados aumentam com o tempo de integração, como citado acima, sendo necessário adotar tempos de simulação mais curtas para garantir a precisão. Apesar dos revezes apresentados aqui, a linearização simplifica o espaço de estados de um modelo não-linear a ponto de facilitar ou mesmo possibilitar a integração numérica de sistemas demasiadamente complexos.

Conclui-se, da análise, que a linearização, apesar de inserir erros na simulação, é muito útil em estudos de sistema dinâmicos com espaços de estados com alto nível de complexidade. A linearização poupa trabalho computacional em troca de perda da precisão, mas em casos em que o sistema apresentado é muito complexo, a linearização pode ser a única saída. Foi possível concluir também que, para usar a linearização, é necessário escolher o método de integração adequado, pois como demonstrado acima, o método de Euler Explícito apresentou erros muito altos quando comparado com o método de Runge-Kutta (4-5).

2.4 Aplicabilidade da solução linear - *item H*

Como descrito na [seção 1.4](#), a análise linear é muito potente no fornecimento de informações sobre o comportamento do sistema, contudo, desde que seja respeitada a proximidade do ponto de equilíbrio selecionado, em torno do qual se lineariza o sistema. Nesta seção, esse fato será posto à prova por meio da simulação do sistema considerando condições que fogem dessa vizinhança, o que torna incoerente a análise via solução linear. Essas condições são as descritas no C2 na [seção 2.1](#).

Antes da apresentação dos resultados das simulações não-lineares, quer-se provar o fato anterior. Para isso, o sistema com C2 foi simulado também com a solução linear do método de Runge-Kutta (4-5), o qual espera-se a solução linear mais precisa dentre os métodos propostos. A partir disso, obtém-se os seguintes gráficos:

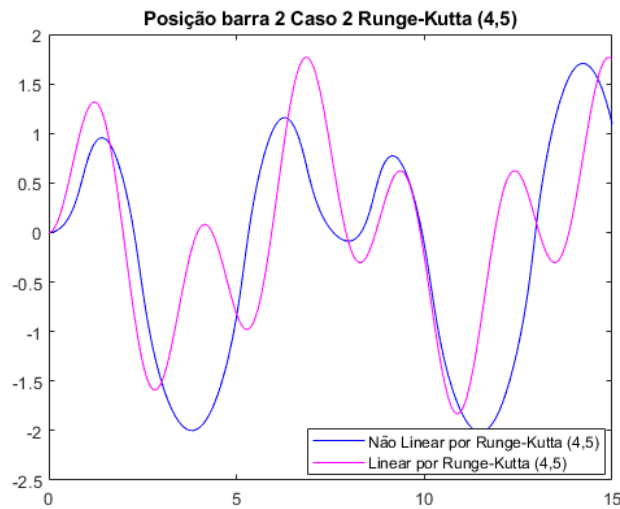


Figura 10 – Solução linear e não-linear para C2

A discrepância nas soluções é claramente perceptível. Note, por exemplo, que já no instante $t = 4,7s$ a diferença da solução linear e não-linear é de 2.015 rad , ou seja, $115,45^\circ$, sendo essa diferença maior que a própria amplitude inicial θ_{1_0} imposta na barra 1. Isso prova que a aproximação linear se restringe a condições que devem ser cuidadosamente respeitadas, caso contrário, as informações de saída do modelo serão totalmente infíeis ao modelo real.

É por conta disso que, no caso 2, comprovadamente apenas as soluções não-lineares devem ser levadas em conta. A posição da barra 2 é novamente apresentada como comparação, visto que essa apresenta o percurso de sua trajetória aleatório, ao contrário da barra 1, que sempre se movimenta com a extremidade marcando uma circunferência. Assim, espera-se um cenário mais influenciado por perturbações ou flutuações numéricas. Abaixo, apresenta-se a posição da barra 2 obtida por ambos métodos:

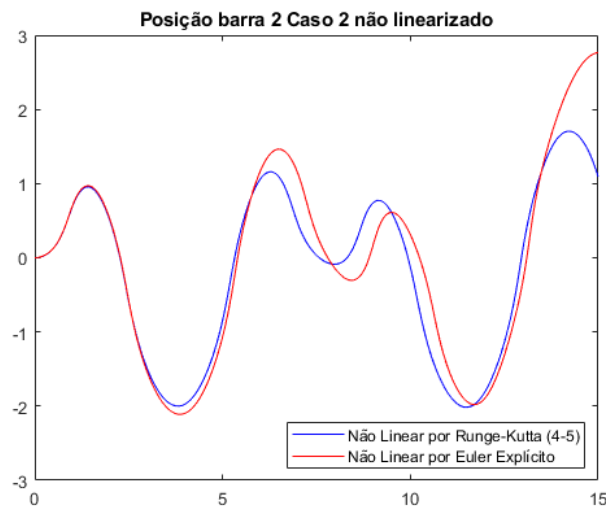


Figura 11 – Solução não-linear para C2

Note que até 6 segundos de simulação, as soluções são bem compatíveis, apresentando diferença máxima de $0,27 \text{ rad}$ em $t = 5,23 \text{ s}$, ou seja, $15,47^\circ$. Contudo, ao avançar do tempo, as soluções começam a divergir, mesmo que ambas façam uso do mesmo espaço de estados. Esse fenômeno, assim como já trabalhado na [seção 2.3](#), provém das diferentes precisões numéricas dos métodos, e é esperado que ele tenha intensidade diminuída com a diminuição do passo. Assim, o passo foi reduzido para 10^{-4} , com vezes menor, e o seguinte resultado é obtido:



Figura 12 – Solução não-linear para C2 – passo reduzido

Agora, a diferença máxima no intervalo de 0 a 15 segundos, mais que o dobro do apresentado na [Figura 11](#), é de $0,038 \text{ rad}$, ou seja, $2,18^\circ$. Naturalmente, o tempo de integração nesse cenário aumentou de 0,14 segundos para 6,7 segundos (tempo de integração total das soluções lineares e não-lineares para C1 e C2 via M1 e M2), o que deixa explícito a necessidade de considerar o custo-benefício computacional na seleção do método de integração, e não apenas a precisão.

Quanto ao comportamento do gráfico, é complexo realizar comentários sobre os valores, visto que o sistema é caótico, ou seja, qualquer perturbação inicial causa grandes desvios na solução e, por conta disso, uma intuição ou previsão dos resultados é impraticável. Quanto ao comportamento da curva, pode-se observar que ela de fato expressa a caoticidade do sistema, visto que a posição θ_2 oscila continuamente de valores positivos a negativos sem periodicidade e limites de amplitude.

Retornando ao número de passos original, pode-se verificar a energia mecânica do sistema. Como descrito nas deduções do [Capítulo 1](#), o sistema analisado é conservativo e não forçado, logo, a energia mecânica do sistema deve apresentar valor constante em todo o tempo de simulação.

Para a obtenção da energia mecânica, é preciso da variação da energia cinética e

potencial com o tempo, cujos gráficos são apresentados abaixo:

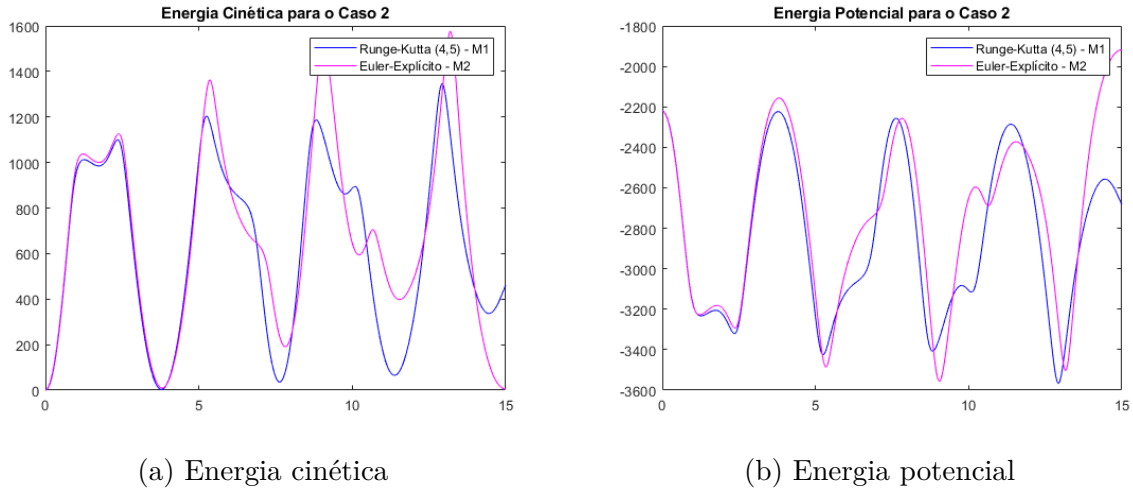


Figura 13 – Análise energética para C2

Os gráficos acima já indicam que a energia mecânica, dada pela soma da potencial com a cinética, se aproximará de um valor constante, visto que os picos de energia potencial coincidem com os vales de cinética e vice-versa – uma se assemelha ao gráfico espelhado verticalmente da outra.

Note, contudo, que há diferenças marcantes entre o método de Euler Explícito e o Runge-Kutta (4-5), as quais se pronunciam ainda mais nos pontos de derivadas de grande magnitude (observe os picos da [Figura 13a](#)). Isso pode ser explicado pelo funcionamento de ambos métodos. Como comentado no [seção 2.1](#), o método de Euler explícito é extremamente simples – basicamente, com a informação da derivada e do passo de integração se estima o próximo ponto com apenas um coeficiente angular. Esse funcionamento faz com que erros consideráveis surjam em se trabalhando com altas derivadas, visto que o próximo ponto será a partir dela diretamente projetado. Desse modo, apenas um ponto de alta derivada pode deslocar um elemento da solução de modo incompatível com o esperado – observe que o Euler explícito na maioria dos casos superestima a solução em casos de altas magnitudes de derivadas positivas e subestima em sendo negativa. Esse fenômeno é explicitado pela [Figura 14a](#).

Já o método de Runge-Kutta (4-5) não enfrenta o mesmo problema, visto que ao contrário do método de Euler explícito, o próximo ponto é estimado com base em uma média ponderada de 4 coeficientes angulares, esquematizados pela [Figura 14b](#). Essa ponderação faz com que o método tenha mais precisão, em particular sobre pontos de alta derivada. Por conta disso, sabe-se que o método que está em discrepância nos gráficos de energia acima é o de Euler explícito, e não o de Runge-Kutta (4-5). A redução do passo faz com que as soluções venham a convergir.

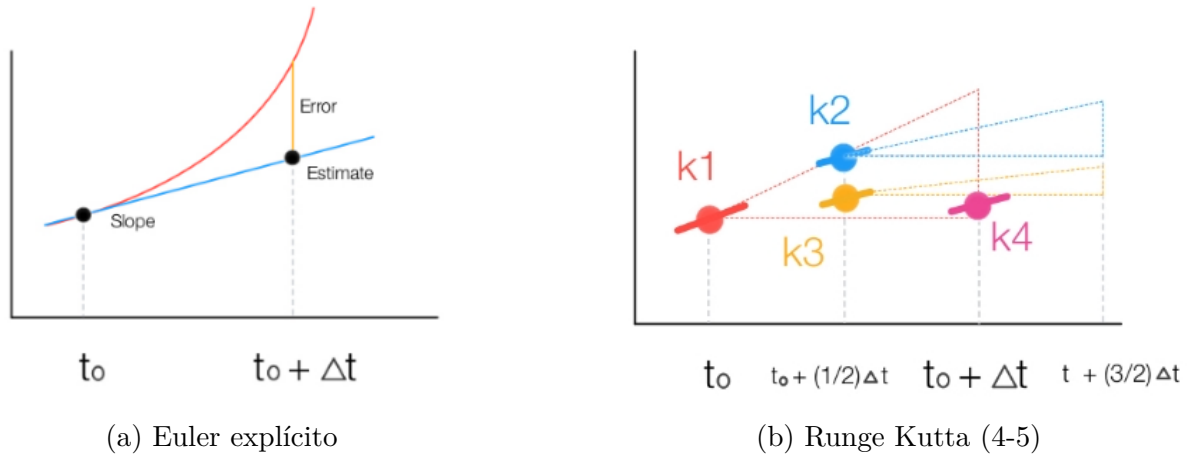


Figura 14 – Esboço de funcionamento dos métodos de integração implementados

Fonte: (SERRANO, 2016)

Por fim, os valores de energia potencial negativa pouco importam, pois ela depende do referencial adotado. O efeito que isso tem sobre o gráfico de energia mecânica é sua translação para cima ou para baixo, contudo, a curva do gráfico deve ser a mesma independentemente do referencial adotado. Apresenta-se abaixo o gráfico de energia mecânica.

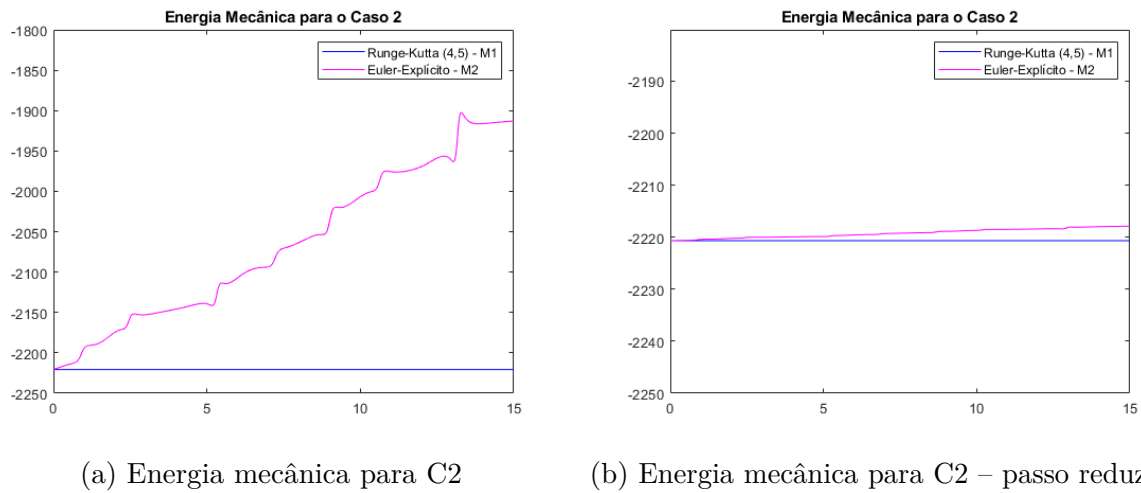


Figura 15 – Esboço de funcionamento dos métodos de integração implementados

Fonte: (SERRANO, 2016)

Primeiramente, observe que o método de Runge-Kutta (4-5) converge para uma energia mecânica constante no valor $-2220,6582J$, o que expressa fielmente o sistema, dado que toda a dedução apresentada no Capítulo 1 foi feita considerando-o conservativo. É interessante o fato de que a solução por Runge-Kutta (4-5) apresenta variações no valor de energia mecânica apenas na 10^{a} casa decimal, ou seja, desprezível. Isso não significa que a solução numérica descreve o comportamento do sistema com precisão até a 10^{a} casa

decimal, afinal, não se tem informação da solução analítica. O que pode ser dito é que a solução é, a níveis práticos, completamente estável até essa casa decimal.

A energia mecânica via Euler explícito está, contudo, muito variável. Isso decorre das razões já explicadas, e pode ser resolvido novamente com a diminuição do passo de integração. Diminuindo-o para 10^{-4} , a energia mecânica já melhora significativamente, como demonstrado pela [Figura 15b](#). Para passos ainda menores, a solução via Euler explícito tende ao mesmo resultado que a estimada via Runge-Kutta (4-5) obtida com passo de ordens de grandeza maior – estabiliza mais rapidamente.

Aumentando o passo máximo da solução via Runge-Kutta (4-5) para 0,00012 s e o tempo de simulação para 50 s, é possível observar a última característica interessante dos métodos de integração numérica padrão implementados a ser abordada neste relatório. Observe que a [Figura 16](#) mostra que, em geral, a energia do sistema diminui na 10^a casa decimal ao longo do tempo. Essa pequena perda de energia com o avanço da integração é proveniente do amortecimento numérico imposto por integradores, o qual é necessário para garantir a estabilidade da solução numérica.

Em analogia mecânica, o amortecedor é incluso em sistemas pois, mesmo que afete o tempo de resposta, deixa-a mais estável e menos susceptível à ruídos. É exatamente por isso que os métodos de integração numérica apresentam esse amortecimento que, do ponto de vista da análise do sistema para aplicações reais, é praticamente irrisório.

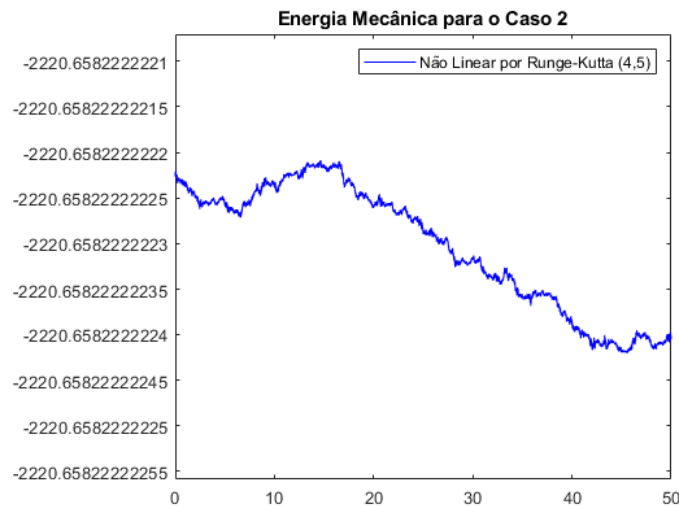


Figura 16 – Amortecimento numérico para C2 não-linear

Referências

HILL, R. *System Dynamics and Control: Module 27b - Choosing State Variables*. University of Detroit Mercy, 2015. Disponível em: <<https://www.youtube.com/watch?v=RdAZNUfWDpQ>>. Citado na página 8.

LLOYD, A. Linearization of differential equation models. North Carolina State University, 2017. Citado na página 9.

SERRANO, H. *Visualizing the Runge-Kutta Method*. 2016. <https://www.haroldserrano.com/blog/visualizing-the-runge-kutta-method>. Citado na página 19.