Mata kuliah/SKS Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS

Hari, Tanggal Senin, 16 Oktober 2023 Waktu 07.00-08.40 WIB (100 menit)

Sifat Tertutup Kelas 4-10

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan. Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

#### DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Diberikan tiga titik koordinat A(-1,3), B(1,-2), dan C(3,0).

- (a) Dapatkan persamaan garis lurus q yang melalui titik B dan C.
- (b) Dapatkan persamaan garis lurus k yang melalui titik A dan tegak lurus dengan garis g.
- (c) Dapatkan jarak titik A ke garis lurus g.

2. Diketahui 
$$f(x) = \frac{4}{x^2 - 1}$$
 dan  $g(x) = \sqrt{x + 4}$ .

- (a) Dapatkan domain f dan g.
- (b) Dapatkan  $(g \circ f)(x)$  beserta domainnya.
- 3. Diberikan fungsi  $f(x) = 1 + \sqrt{8 x^2}$ .
  - (a) Dapatkan invers fungsi f(x).
  - (b) Dapatkan domain dan range invers fungsinya.

4. Diberikan 
$$f(x)=\begin{cases} 2k^2(x-1), & x\leq 2\\ \left(\frac{1-k}{2}\right)x, & x>2 \end{cases}$$
 Tentukan semua nilai  $k$  yang memenuhi agar  $\lim_{x\to 2}f(x)$  ada.

5. Gunakan diferensiasi implisit untuk mendapatkan  $\frac{dy}{dx}$  dari persamaan  $y - x^2y^3 = y^2x - x$ .

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS

Hari, Tanggal : Senin, 16 Oktober 2023 Waktu : 09.00-10.40 WIB (100 menit)

Sifat : Tertutup Kelas : 11-16

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan. Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

# DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Dapatkan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan

$$\frac{\frac{1}{3}x - 5}{2x - 5} \ge 3$$

- 2. Diberikan  $f(x) = x^2 1$  dan  $g(x) = \sqrt{x 3}$ .
  - (a) Dapatkan domain f dan g
  - (b) Dapatkan  $(g \circ f)(x)$  beserta domainnya.
- 3. Diberikan fungsi  $f(x) = x^2 4x + 5$ .
  - (a) Tentukan nilai k terkecil sehingga f(x) memiliki invers pada  $[k, \infty)$
  - (b) Tentukan invers fungsi f(x).
- 4. Diketahui  $f(x) = \frac{1}{|3-x|}$ 
  - (a) Hitunglah  $\lim_{x \to 3} f(x)$ .
  - (b) Berapa nilai f(3)?
  - (c) Apakah f(x) kontinu? Jelaskan!
  - (d) Apakah diskontinuitas f(x) dapat dihilangkan? jika iya, definisikan kembali f(x) sehingga menjadi kontinu.
- 5. Gunakan diferensiasi implisit untuk mendapatkan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $x^3y^3 2y^2 3x + 7 = 0$ .

## SOLUSI

- 1. .
- 2. .
- 3. .
- 4.

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 ( SM234101 ) / 3 SKS

Hari, Tanggal : Senin, 16 Oktober 2023 Waktu : 11.00-12.40 WIB (100 menit)

Sifat : Tertutup Kelas : 31-37

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan. Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

# DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Dapatkan himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan

$$\frac{x-1}{2-x} \geq \frac{x+1}{x+2}$$

2. Diketahui  $f(x) = \sqrt{x+1}$  dan  $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ .

(a) Dapatkan domain f dan g

(b) Dapatkan  $(g \circ f)(x)$  beserta domainnya.

3. Diberikan suatu fungsi  $f(x) = 2 + \sqrt{4-x}$  dengan domain f adalah [a, 2].

(a) Tentukan nilai terkecil a agar  $f^{-1}(x)$  ada.

(b) Dapatkan  $f^{-1}(x)$ 

(c) Sketsa grafik f(x) dan  $f^{-1}(x)$  pada satu bidang koordinat.

4. Diberikan  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 2x^2 + x - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ k, & x = 1 \end{cases}$  Tentukan nilai k, sehingga f(x) kontinu.

5. Dapatkan persamaan garis singgung kurva  $x^3y + 4xy = 12y$  di titik (2,1).

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 ( SM234101 ) / 3 SKS

Hari, Tanggal : Selasa, 17 Oktober 2023 Waktu : 07.00-08.40 WIB (100 menit)

Sifat : Tertutup Kelas : 17-23

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan. Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

## DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Dapatkan himpunan penyelesaian pertidaksamaan

$$2 \le \frac{x^2 + 1}{x} < x + 3$$

- 2. Diberikan fungsi  $f(x) = \sqrt{5-x}$  dan  $g(x) = \frac{1}{9-x^2}$ .
  - (a) Dapatkan domain f dan g
  - (b) Dapatkan  $(g \circ f)(x)$  beserta domainnya.
- 3. Diketahui  $f(x) = \sqrt{4 x^2}$ .
  - (a) Tentukan domain f(x).
  - (b) Apakah  $f^{-1}(x)$  ada? Jelaskan alasannya.
  - (c) Jika tidak ada, definisikan domain f(x) agar  $f^{-1}(x)$  ada.
- 4. Hitunglah  $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x^2-5}-2}{x-3}$
- 5. Diberikan  $f(x) = \frac{x+3}{x+2}$ 
  - (a) Dapatkan  $\frac{dy}{dx}$ .
  - (b) Jika  $(x_0, y_0)$  merupakan titik pada kurva f(x), maka dapatkan titik  $(x_0, y_0)$  dan garis singgung di  $(x_0, y_0)$  yang tegak lurus dengan y = x.

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS

Hari, Tanggal : Selasa, 17 Oktober 2023 Waktu : 09.00-10.40 WIB (100 menit)

Sifat : Tertutup Kelas : 24-30

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan. Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

## DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Tentukan semua nilai x yang memenuhi

$$1 < \frac{1}{|x-2|} \le 4$$

- 2. diketahui  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$  dan  $g(x) = \frac{x}{1-x}$ ,
  - (a) Dapatkan domain f dan g.
  - (b) Dapatkan  $(f \circ g)(x)$  beserta domainnya.
- 3. Diberikan fungsi  $f(x) = x^2 2x + 1$ 
  - (a) Tentukan nilai k terbesar sehingga f(x) memiliki invers pada  $[-\infty, k]$ .
  - (b) Tentukan  $f^{-1}(x)$ .
  - (c) Sketsa grafik f(x) dan  $f^{-1}(x)$  dalam satu bidang koordinat.
- 4. Diberikan fungsi  $f(x) = \begin{cases} 2|x+1| & x < -1 \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$ 
  - (a) hitunglah  $\lim_{x \to -1} f(x)$ .
  - (b) Berapa nilai f(-1)?
  - (c) Apakah f(x) kontinu? jelaskan!

Apakah f(x) kontinu di x = -1? jelaskan!

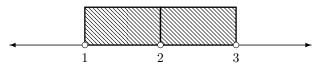
5. Diketahui garis singgung pada kurva  $y^3 = 2x^2$  di titik (a, b) sejajar dengan garis 2x + 3y - 5 = 0. Tentukan titik (a, b).

#### SOLUSI

- 1. Bagi kasus pada pertidaksamaan.
  - (1) Untuk  $1 < \frac{1}{|x-2|}$  diperoleh:

(\*Catatan: Hasil nilai mutlak selalu positif, sehingga jika kedua ruas dikali |x-2| tidak akan mengubah tanda pertidaksamaan)

$$1 < rac{1}{|x-2|}$$
 $1|x-2| < 1, \quad x 
eq 2$  (Penyebut tak nol)
 $|x-2| < 1, \quad x 
eq 2$ 
 $-1 < x - 2 < 1, \quad x 
eq 2$  (Definisi jarak)
 $1 < x < 3, \quad x 
eq 2$ 



$$HP_1 = \{x \mid 1 < x < 2 \ \lor \ 2 < x < 3\} = (1, 2) \cup (2, 3)$$

(2) Untuk  $\frac{1}{|x-2|} \le 4$  diperoleh:

$$\frac{1}{|x-2|} \le 4$$

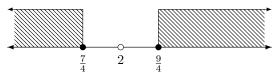
$$1 \le 4|x-2|, \quad x \ne 2 \text{ (Penyebut tak nol)}$$

$$\frac{1}{4} \le |x-2|, \quad x \ne 2$$

$$\frac{1}{4} \le x - 2 \bigvee -\frac{1}{4} \ge x - 2, \quad x \ne 2 \text{ (Definisi jarak)}$$

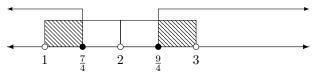
$$\frac{1}{4} + 2 \le x \bigvee -\frac{1}{4} + 2 \ge x, \quad x \ne 2$$

$$\frac{9}{4} \le x \bigvee \frac{7}{4} \ge x, \quad x \ne 2$$



$$HP_2 = \left\{ x \mid x \le \frac{7}{4} \ \lor \ x \ge \frac{9}{4} \right\} = \left( -\infty, \frac{7}{4} \right] \cup \left[ \frac{9}{4}, +\infty \right)$$

Sehingga irisan kedua himpunan penyelasaian



$$HP = HP_1 \cap HP_2 = \left\{ x \mid 1 < x \le \frac{7}{4} \lor \frac{9}{4} \le x < 3 \right\} = \left(1, \frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{9}{4}, 3\right).$$

2. (a) Karena fungsi berbentuk pecahan, maka penyebutnya tidak boleh nol.

$$D_f = \{x \mid x \neq 1\}$$
  
 $D_g = \{x \mid x \neq 1\}$ 

(b) Ingat bahwa  $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ , sehingga

$$\begin{split} f(g(x)) &= \frac{1+g(x)}{1-g(x)} \\ &= \frac{1+\left(\frac{x}{1-x}\right)}{1-\left(\frac{x}{1-x}\right)} \qquad \left( \textbf{Subtitusi } g(x) = \frac{x}{1-x} \right) \\ &= \frac{\left(\frac{1-x+x}{1-x}\right)}{\left(\frac{1-x-x}{1-x}\right)} \\ &= \frac{\frac{1-x+x}{1-x}}{1-x}, \quad x \neq 1 \\ &= \frac{1}{1-2x}, \quad x \neq 1 \end{split}$$

Definisi domain fungsi komposisi  $f \circ g$  adalah  $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}.$ 

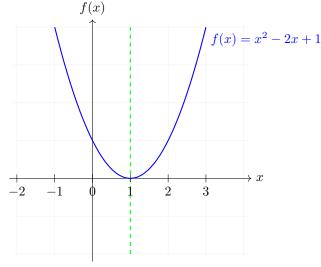
$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in \mathbb{R}/\{1\} \mid g(x) \in \mathbb{R}/\{1\} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}/\{1\} \mid \underbrace{\frac{x}{1-x} \in \mathbb{R}/\{1\}} \right\}$$

$$\underbrace{\left[ \frac{x}{1-x} \neq 1 \right]}_{x = 1} \Rightarrow \underbrace{\left[ \frac{x}{2} \neq 1 \right]}_{x = 1} \Rightarrow \underbrace{\left[ \frac{1}{2} \right]}_$$

: 
$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{1-2x} \text{ dan } D_{f \circ g} = \{x \mid x \neq 1 \ \lor \ x \neq \frac{1}{2}\}$$

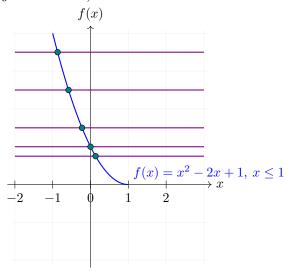
3. (a) Perhatikan bahwa  $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2$ . agar f(x) mempunyai invers maka haruslah f(x) fungsi satu-satu. Gambar grafiknya sebagai berikut:



Perhatikan bahwa f(x) simetri terhadap garis x=1. Ketika ingin mengambil k terbesar agar f(x) punya invers, haruslah pilih k=1 sehingga interval domainnya menjadi  $[-\infty, 1]$ .

(\*Catatan: Secara geometris suatu fungsi dikatakan punya invers ketika kita menggambar sebarang garis horizontal yang melewati grafik fungsi tersebut sedemikian sehingga hanya terdapat maksimal

satu titik potong antara garis horizontal dan grafik fungsi tersebut. lebih jelasnya perhatikan gambar berikut)



(b) Gantikan y dengan x dan juga sebaliknya.

$$x = (y-1)^{2}$$

$$x = (y-1)^{2}$$

$$\sqrt{x} = \sqrt{y-1}^{2}$$

$$\sqrt{x} = |y-1|$$

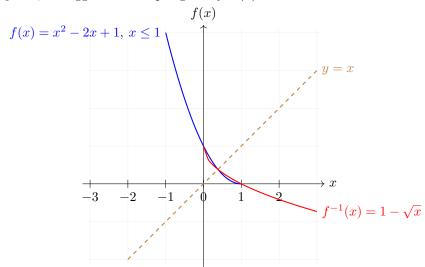
$$\pm \sqrt{x} = y-1$$

$$y = 1 \pm \sqrt{x}$$

$$f^{-1}(x) = 1 \pm \sqrt{x}$$

Karena range  $R_{f^{-1}}=D_f=[-\infty,1],$ maka  $f^{-1}(x)=1-\sqrt{x}.$ 

(c) Salah satu cara menggambar grafik  $f^{-1}(x)$  adalah dengan mencerminkan f(x) terhadap garis y=x, sehingga akan didapat grafik  $f^{-1}(x)$ .



4. Secara definisi 
$$f(x) = \begin{cases} 2|x+1| & x < -1 \begin{cases} 2x+2 & x > = -1, x < -1 \\ -2x-2 & x < -1, x < -1 \end{cases}$$

$$x \ge -1$$

Perhatikan bahwa 
$$(-\infty, -1) \cap [-1, +\infty) = \emptyset$$
, sehingga
$$f(x) = \begin{cases} 2|x+1| & x < -1 \\ 2x+2 & \emptyset \\ -2x-2 & x < -1 \end{cases}$$
$$x^2 \qquad x \ge -1$$

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & x < -1 \\ x^2 & x \ge -1 \end{cases}$$

(a) 
$$\lim_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} -2x - 2 = 0 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x^2 = 1 \end{cases}$$

Karena  $\lim_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim_{x \to -1^+} f(x)$ , maka  $\lim_{x \to -1} f(x)$  tidak ada.

(b) 
$$f(-1) = (-1)^2 = 1$$

- (c) f(x) kontinu di titik x = a, jika memenuhi ketiga syarat:
  - f(a) terdefinisi.
  - $\lim_{x \to a} f(x)$  ada.
  - $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$

f(x) tidak kontinu dimana-mana karena ada titik dimana f(x) tidak kontinu, yaitu di x = -1.

f(x) tidak kontinu di x=-1, karena pada soal (a) sudah disebutkan bahwa  $\lim_{x\to -1} f(x)$  tidak ada. Hal tersebut mengakibatkan syarat kedua dari f(x) kontinu tidak terpenuhi.

5. Ingat bahwa  $m_s = \frac{dy}{dx}$  dengan  $m_s$  adalah garis singgung fungsi y = f(x). Dengan turunan implisit akan didapatkan:

$$\frac{d}{dx}(y^3) = \frac{d}{dx}(2x^2)$$
$$3y^2 \frac{dy}{dx} = 4x$$
$$m_s = \frac{dy}{dx} = \frac{4x}{3y^2}, \quad y \neq 0$$

Karena garis singgung melewati (a,b), maka  $m_s = \frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x=a\\ y=b}} = \frac{4a}{3b^2}$ . Diketahui bahwa garis singgung sejajar dengan garis l := 2x + 3y - 5 = 0.

$$2x + 3y - 5 = 0$$

$$3y = -2x + 5$$

$$y = \underbrace{-\frac{2}{3}}_{m_l} x + \underbrace{\frac{5}{3}}_{c} \quad \left( \text{Bentuk} \left[ y = m_l x + c \right] \right)$$

Karena garis saling sejajar, maka

$$m_s = m_l$$

$$\frac{4a}{\beta b^2} = -\frac{2}{\beta}$$

$$4a = -2b^2$$

$$a = -\frac{1}{2}b^2$$
....(1)

Ingat bahwa titik(a,b)juga terletak pada  $y^3=2x^2,$ sehingga

$$(b)^3 = 2(a)^2$$
  
 $b^3 = 2a^2$ .....(2)

Subtitusi persamaan (1) ke persamaan (2).

$$b^{3} = 2(-\frac{1}{2}b^{2})^{2}$$
 
$$b^{3} = \frac{1}{2}b^{4}$$
 
$$b^{3} - \frac{1}{2}b^{4} = 0$$
 
$$b^{3}(1 - \frac{1}{2}b) = 0$$

Didapatkan  $b=0 \lor b=2$ . Subtitusi hasil tersebut ke persamaan (1) atau (2), sehingga didapat titik (a,b) adalah (0,0) dan (-2,2). Namun karena  $y \neq 0$  maka satu-satunya (a,b) yang memenuhi adalah (-2,2).

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS

Hari, Tanggal : Selasa, 17 Oktober 2023 Waktu : 11.00-12.40 WIB (100 menit)

Sifat : Tertutup Kelas : 38-43, 60

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan. Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

# DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Dapatkan penyelesaian dari |2x+1| = |3x-2| + 1.

- 2. Diberikan fungsi  $f(x) = |x^2 1|$  dan  $g(x) = \frac{1}{x^2 9}$ .
  - (a) Dapatkan domain f dan g.
  - (b) Dapatkan  $(g \circ f)(x)$  beserta domainnya.
- 3. Diberikan fungsi sebagai berikut:

$$f(x) = -\frac{2}{x+3}$$
; dan  $g(x) = \frac{3x+2}{x+2}$ 

- (a) Tentukan domain dan range dari masing-masing fungsi tersebut.
- (b) Apakah kedua fungsi tersebut saling invers? Jelaskan alasannya.
- 4. Hitunglah  $\lim_{x \to -\infty} \frac{5-3x}{\sqrt{7+27x^2}}$ .
- 5. Dapatkan persamaan garis singgung dari kurva  $x^3 2x^2y + 2xy^2 y^3 + 3 = 0$  yang melalui titik (1, 2).

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS

Hari, Tanggal : Selasa, 17 Oktober 2023 Waktu : 13.30-15.10 WIB (100 menit)

Sifat : Tertutup Kelas : 44-50

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan. Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

# DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

- 1. Persamaan garis  $\ell$  melalui titik A(2,1) dan B(-2,3).
  - (a) Dapatkan persamaan garis  $\ell$ .
  - (b) Dapatkan persamaan garis k yang tegak lurus dengan garis  $\ell$  yang melalui titik tengah antara A dan B.
  - (c) Sketsa grafik persamaan garis  $\ell$ dan kdalam satu bidang koordinat.
- 2. Diberikan fungsi  $f(x) = \sqrt{1-x}$  dan  $g(x) = \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$ .
  - (a) Dapatkan domain f dan g.
  - (b) Dapatkan  $(g \circ f)(x)$  beserta domainnya.
- 3. Diberikan fungsi  $f(x) = \sqrt[3]{x+1} + 2$ .
  - (a) Dapatkan  $f^{-1}(x)$ .
  - (b) Dapatkan domain dan range dari  $f^{-1}(x)$ .
- 4. Diketahui  $f(x) = \begin{cases} 3x+1, & x>2\\ -2x+11, & x<2 \end{cases}$ 
  - (a) Hitunglah  $\lim_{x\to 2} f(x)$ .
  - (b) Berapa nilai f(2)?
  - (c) Apakah terdapat diskontinuitas dari f(x)? Jelaskan alasannya.
  - (d) Jika terdapat diskontinuitas, apakah dapat dihilangkan? Jika iya, definisikan kembali f(x) agar kontinu.
- 5. Gunakan diferensiasi implisit untuk mendapatkan  $\frac{dy}{dx}$  dari  $x^2 y + \frac{y}{x} = 5$ .