SKPB - ITS

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GENAP 2023/2024

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 2 (SM234201) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Rabu, 26 Juni 2024
Waktu	:	07.00-08.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	1-13, 101

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan.
Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

---

1. Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh $x = y^2$ dan $2y + x = 3$.
2. Gambarkan daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, dan $x = 0$, kemudian dapatkan volume benda putar jika daerah tersebut diputar pada garis $x = -2$.
3. Diberikan persamaan parametrik $x = t^2 + 1$, $y = t$, $0 \leq t \leq 5$.
   (a) Buatlah sketsa kurva tersebut dengan mengeliminasi parameter t.
   (b) Dapatkan persamaan garis singgung dari persamaan parametrik tersebut saat $t = \frac{1}{2}$.
4. Dapatkan luas daerah dari irisan kardioida $r = 2 - 2\cos\theta$ dan kardioida $r = 2 + 2\cos\theta$.
5. Dapatkan lima suku pertama polinomial Maclaurin untuk fungsi $f(x) = e^{-x^2}$.

Selamat Mengerjakan

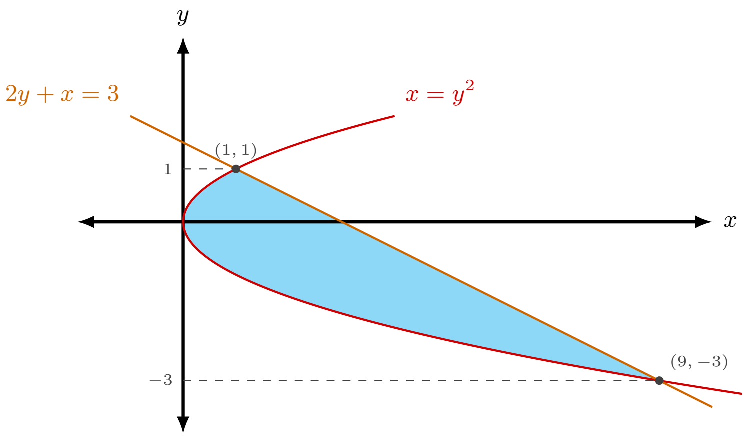
"*Jujur adalah kunci kesuksesan*"

SOLUSI

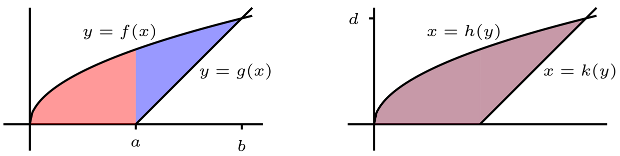
1. Karena batas daerahnya belum diketahui, maka seharusnya batas daerah/luasnya didapatkan melalui titik potong kedua kurva tersebut.

$$\begin{aligned} y^2 &= 3 - 2y \\ y^2 + 2y - 3 &= 0 \\ (y+3)(y-1) &= 0 \\ y = -3 \quad &\vee \quad y = 1 \end{aligned}$$

Ilustrasi daerah yang dibatasi oleh kedua kurva tersebut adalah sebagai berikut:



Perhatikan bahwa perhitungan luas daerah yang diarsir secara umum dapat dilakukan dengan dua cara yang diilustrasikan pada gambar berikut

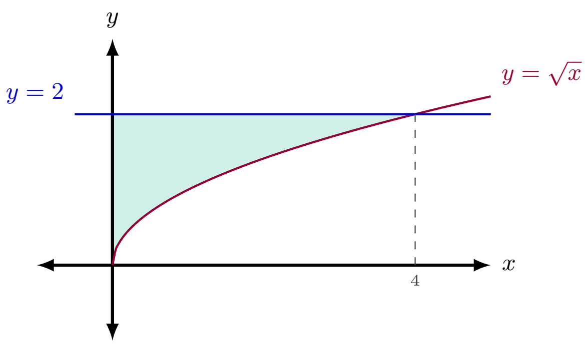


$\int_0^a f(x)\ dx + \int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx$ $\qquad$ $\int_0^d [k(y) - h(y)]\ dy$

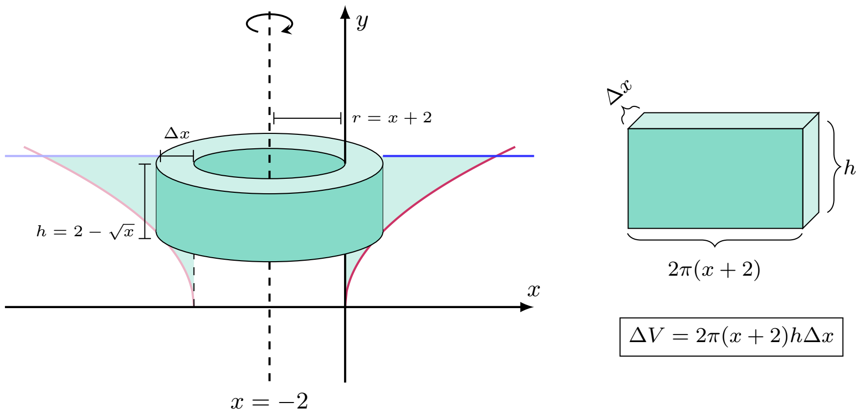
Dari gambar di atas akan lebih mudah untuk mendapatkan luas daerah jika kita menggunakan integral terhadap y. Daerah yang diarsir diperoleh dari pengintegralan kurva kanan ($x = 3 - 2y$) dikurangi kurva kiri ($x = y^2$) dan batas nya mulai dari $y = -3$ hingga $y = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_{-3}^{1} (3 - 2y - y^2)\, dy \\ &= \left[3y - y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_{-3}^{1} \\ &= \left(3(1) - (1)^2 - \frac{(1)^3}{3} \right) - \left(3(-3) - (-3)^2 - \frac{(-3)^3}{3} \right) \\ &= 3 - 1 - \frac{1}{3} + 9 - 9 + 9 = 11 - \frac{1}{3} = \boxed{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

2. Gambar daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva tersebut adalah sebagai berikut:



Kemudian daerah yang diarsir diputar terhadap garis $x = -2$, disini akan digunakan metode cincin silinder.



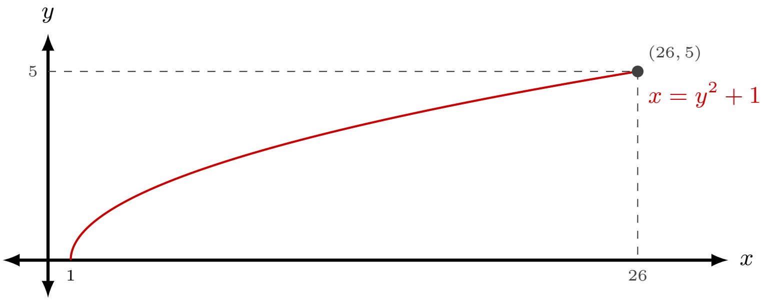
Maka volume benda putar yang dihasilkan jika dilihat dari salah satu potongan silinder diatas adalah

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^4 (x+2)\left(2-\sqrt{x}\right)\, dx \\
&= 2\pi \int_0^4 (2x + 4 - x\sqrt{x} - 2\sqrt{x})\, dx \\
&= 2\pi \left[x^2 + 4x - \frac{2}{5}x^{5/2} - \frac{4}{3}x^{3/2}\right]_0^4 \\
&= 2\pi \left[16 + 16 - \frac{2}{5}(4)^{5/2} - \frac{4}{3}(4)^{3/2}\right] \\
&= 2\pi \left[32 - \frac{2}{5}(32) - \frac{4}{3}(8)\right] \\
&= 2\pi \left[32 - \frac{64}{5} - \frac{32}{3}\right] \\
&= 2\pi \left[\frac{480 - 192 - 160}{15}\right] \\
&= 2\pi \left[\frac{128}{15}\right] = \boxed{\frac{256\pi}{15}}
\end{aligned}
$$

3. (a) Dengan mensubstitusi $y = t$ pada persamaan parametrik, maka didapatkan

$$x = y^2 + 1\,, \quad 0 \le y \le 5$$

Sehingga kurva tersebut dapat digambarkan sebagai berikut:



(b) Dengan menggunakan turunan implisit pada persamaan grafik $x = y^2 + 1$, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x) &= \frac{d}{dx}(y^2 + 1) \\ 1 &= 2y\frac{dy}{dx} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1}{2y} \end{aligned}$$

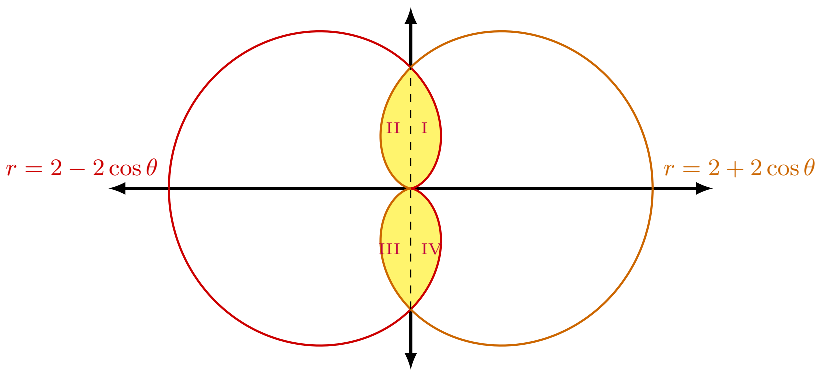
Kemudian, substitusi $y = t = \dfrac{1}{2}$ sehingga didapatkan gradien garis singgung di titik $\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$ adalah

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{y=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(\frac{1}{2})} = 1$$

Dengan demikian, persamaan garis singgung pada titik tersebut adalah

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{2} &= 1\left(x - \frac{5}{4}\right) \\ y &= x - \frac{3}{4} \\ &\boxed{4x - 4y - 3 = 0} \end{aligned}$$

4. Ilustrasikan terlebih dahulu daerah yang irisannya



Perhatikan bahwa keempat daerah yang diarsir tersebut memiliki luas yang sama, sehingga total luas daerah yang diarsir adalah empat kali luas salah satu daerah tersebut.

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 - 2\cos\theta)^2 \, d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta\right) \, d\theta \\
&= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) \, d\theta \\
&= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - 2\cos\theta + \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}\right) \, d\theta \\
&= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{2} - 2\cos\theta + \frac{1}{2}\cos(2\theta)\right) \, d\theta \\
&= 8 \left[\frac{3}{2}\theta - 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= 8 \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{\pi}{2} - 2 \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 - \left(\frac{3}{2} \cdot 0 - 2 \cdot 0 + \frac{1}{4} \cdot 0\right)\right] \\
&= 8 \left[\frac{3\pi}{4} - 2\right] = \boxed{6\pi - 16}
\end{aligned}$$

5. Secara umum rumus deret Maclaurin untuk fungsi $f(x)$ adalah

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots$$

Secara berkelanjutan kita tahu bahwa untuk fungsi $f(x) = e^x$, maka $f^{(n)}(0) = 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, sehingga didapatkan deret Maclaurin untuk fungsi tersebut adalah

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Dengan menggantikan x dengan $-x^2$, maka didapatkan deret Maclaurin untuk fungsi $f(x) = e^{-x^2}$ adalah

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + \cdots$$

$$\boxed{P_5(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}}$$

SKPB - ITS

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GENAP 2023/2024

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 2 (SM234201) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Rabu, 26 Juni 2024
Waktu	:	09.00-10.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	15-27, 102

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan.
Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.
DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh $y = x^2 - 4x + 3$ dan $y = x + 3$.
2. Dapatkan volume benda putar jika daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva $y = \frac{1}{x}$, $x = 2$, dan $y = 2$ diputar terhadap sumbu-x. Buatlah sketsa daerah tersebut.
3. Diberikan persamaan parametrik $x = \cos 2t$, $y = 3 - 2\cos 2t$ pada $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
   (a) Dapatkan panjang kurva dari persamaan parametrik.
   (b) Buatlah sketsa kurva tersebut.
4. Dapatkan luas daerah yang berada di dalam $r = 2 - 2\cos\theta$ dan di luar kardioida $r = 2 + 2\cos\theta$.
5. Dapatkan deret Maclaurin untuk fungsi $f(x) = \ln(1 + x)$.

Selamat Mengerjakan

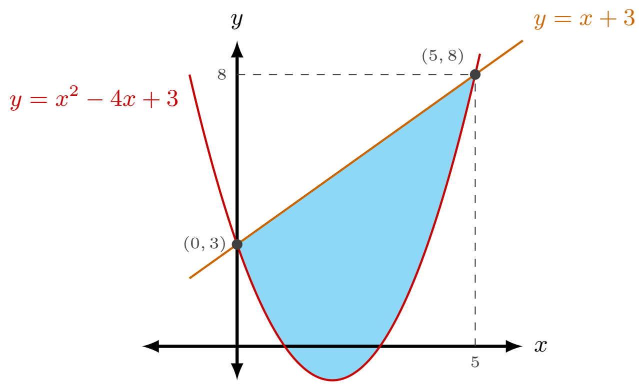
"*Jujur adalah kunci kesuksesan*"

SOLUSI

1. Titik potong kedua kurva didapatkan dengan menyamakan kedua persamaan tersebut:

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= x + 3 \\ x^2 - 5x &= 0 \\ x(x-5) &= 0 \\ x = 0 \quad &\vee \quad x = 5 \end{aligned}$$

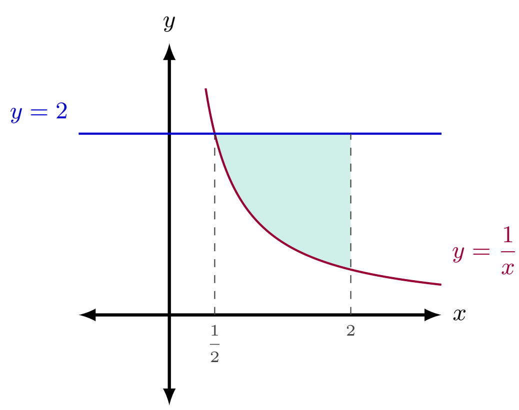
Daerah yang dibatasi diilustrasikan dibawah ini



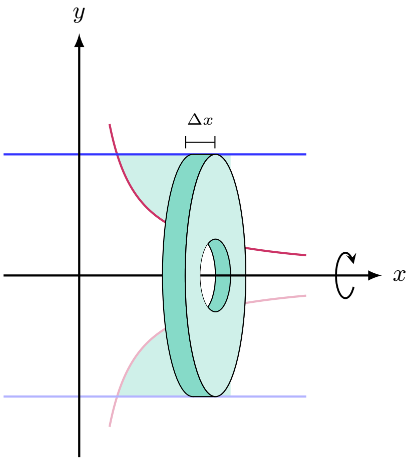
Sehingga luas daerah yang diarsir dapat dihitung dengan integral

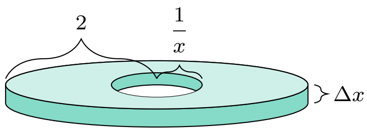
$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_0^5 (x + 3 - (x^2 - 4x + 3))\, dx \\ &= \int_0^5 (5x - x^2)\, dx \\ &= \left[\frac{5}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^5 = \left(\frac{5}{2}(5)^2 - \frac{1}{3}(5)^3\right) - 0 \\ &= \frac{125}{2} - \frac{125}{3} = \frac{375 - 250}{6} = \boxed{\frac{125}{6}} \end{aligned}$$

2. Sketsa daerah dapat dilihat di bawah ini



Selanjutnya daerah yang diarsir diputar terhadap sumbu-x, sehingga akan digunakan metode cakram untuk menghitung volume benda putar.





$$\boxed{\Delta V = \pi\left[2^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2\right]\Delta x}$$

Maka volume benda putar yang dihasilkan jika dilihat dari salah satu potongan silinder diatas adalah

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left[2^2 - \left(\frac{1}{x}\right)^2\right] dx \\ &= \pi \int_{\frac{1}{2}}^{2} \left(4 - \frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= \pi \left[4x + \frac{1}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2} = \pi \left[4(2) + \frac{1}{2} - (2+2)\right] = \boxed{\frac{9}{2}\pi} \end{aligned}$$

3. (a) Cara pertama: Gunakan integral panjang kurva parametrik yaitu

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

Maka, kita perlu menghitung turunan x dan y terhadap t:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2\sin 2t \\ \frac{dy}{dt} &= -4\sin 2t \end{aligned}$$

Sehingga panjang kurva dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(-2\sin 2t)^2 + (-4\sin 2t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{20\sin^2 2t}\, dt \\ &= 2\sqrt{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\, dt \\ &= 2\sqrt{5}\left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 2\sqrt{5}\left[-\frac{1}{2}(-2)\right] = 2\sqrt{5}\cdot 1 = \boxed{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Cara kedua: Substitusi $x = \cos 2t$ pada persamaan $y = 3 - 2\cos 2t$. Kemudian untuk domainnya kita bisa mencari nilai maksimum dan minimum dari x terhadap domain t, yaitu

$$t = 0 \Rightarrow x = \cos 0 = 1$$
$$t = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \cos \pi = -1$$

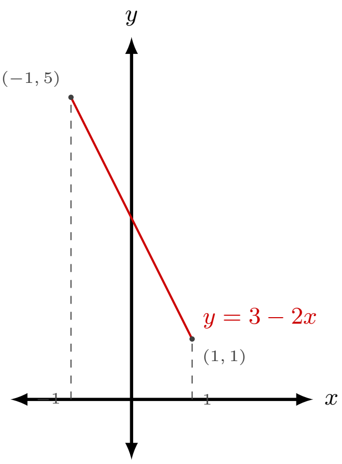
Sehingga didapatkan persamaan kartesiusnya

$$y = 3 - 2x, \quad -1 \leq x \leq 1$$

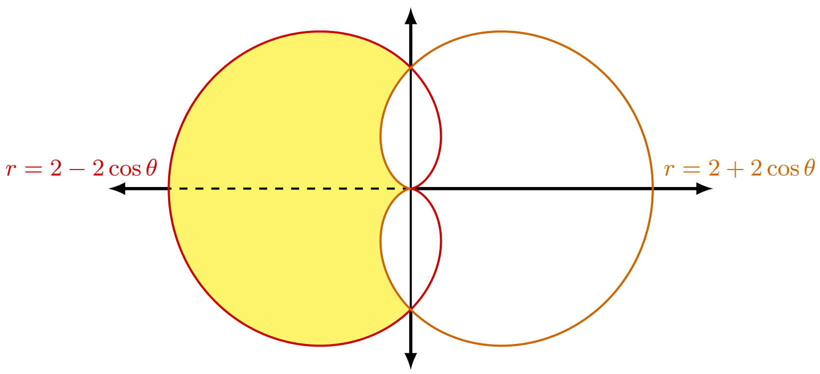
Karena y adalah fungsi linear garis lurus, maka panjang kurva dapat dihitung dengan rumus jarak antara dua titik ujungnya yaitu $(-1, 5)$ dan $(1, 1)$

$$\begin{aligned} S &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - 5)^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}} \end{aligned}$$

(b) Menggunakan cara kedua pada poin (a), kita sudah mendapatkan persamaan kartesiusnya dengan domainnya juga. Sketsa kurva tersebut adalah sebagai berikut:



4. Sketsa daerah yang diarsir dapat dilihat di bawah ini



Perhatikan untuk daerah yang diarsir bisa diperoleh dengan menghitung luas daerah $r = 2 - 2\cos\theta$ dan mengurangkan luas daerah $r = 2 + 2\cos\theta$ dari π sampai $3\pi/2$.

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= \frac{1}{2}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left((2-2\cos\theta)^2 - (2+2\cos\theta)^2\right)\, d\theta \\
&= \int_{\pi/2}^{\pi} \left(4 - 8\cos\theta + 4\cos^2\theta\right) - \left(4 + 8\cos\theta + 4\cos^2\theta\right)\, d\theta \\
&= -16\int_{\pi/2}^{\pi} \cos\theta\, d\theta = -16\left[\sin\theta\right]_{\pi/2}^{\pi} = -16\,(0-1) = 16
\end{aligned}$$

5. Diketahui bahwa untuk setiap fungsi $f(x)$ yang dapat diturunkan, deret Maclaurin dapat dituliskan sebagai

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Cara pertama: Untuk fungsi $f(x) = \ln(1+x)$, kita perlu menghitung turunan-turunan dari $f(x)$ pada $x = 0$:

$$\begin{aligned}
f(0) &= \ln(1+0) = 0, \\
f'(x) &= \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1, \\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1, \\
f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} \Rightarrow f'''(0) = 2, \\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} \Rightarrow f^{(4)}(0) = -6, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Dengan demikian, deret Maclaurin untuk fungsi tersebut adalah

$$f(x) = 0 + 1\cdot x + (-1)\frac{x^2}{2!} + (2)\frac{x^3}{3!} + (-6)\frac{x^4}{4!} + \cdots = \boxed{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots}$$

Cara kedua: ingat bahwa untuk $|x| < 1$, kita memiliki deret geometri

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$$

Kemudian ganti x dengan $-x$ sehingga didapatkan

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Dengan mengintegrasikan kedua sisi, kita mendapatkan

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{1+x}\, dx &= \int (1 - x + x^2 - x^3 + \cdots)\, dx \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + C
\end{aligned}$$

Dengan $C = 0$ karena $\ln(1+0) = 0$, maka didapatkan deret Maclaurin untuk fungsi tersebut adalah

$$f(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}}$$

SKPB - ITS

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GENAP 2023/2024

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 2 (SM234201) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Rabu, 26 Juni 2024
Waktu	:	11.00-12.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	31-38, 104

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan.
Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh $y = -x^2 + 2x + 3$ dan $y + 2x = 3$.
2. Gambarkan daerah yang dibatasi oleh kurva-kurva $y = 2x - x^2$ dan $y = x^2 - 2x$. Menggunakan Dalil Guldin I, dapatkan volume benda padat jika daerah tersebut diputar terhadap garis $y = 2$.
3. Diberikan persamaan parametrik $x = \sin t$, $y = 1 + 2\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.
   (a) Dapatkan panjang kurva dari persamaan parametrik.
   (b) Buatlah sketsa kurva tersebut.
4. Dapatkan luas daerah yang berada di dalam lingkaran $r = 4\sin\theta$ dan di luar lingkaran $r = 4\cos\theta$.
5. Dapatkan deret Taylor untuk fungsi $f(x) = \dfrac{1}{5-4x}$ di sekitar $x = 1$.

Selamat Mengerjakan

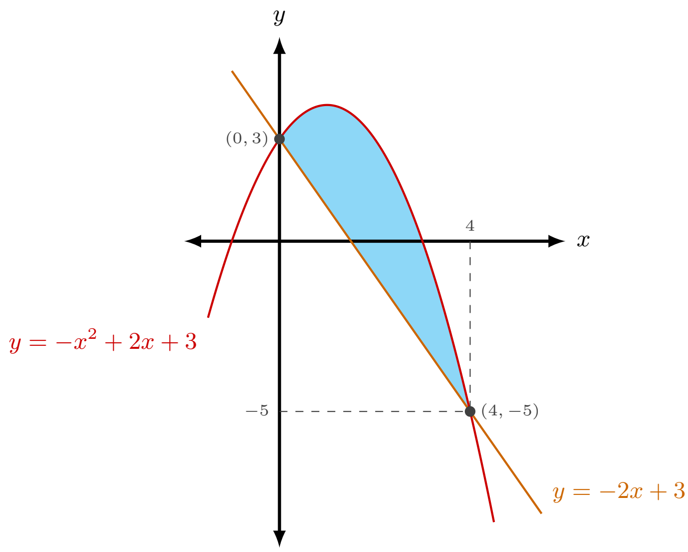
"*Jujur adalah kunci kesuksesan*"

SOLUSI

1. Titik potong kedua kurva didapatkan dengan menyamakan kedua persamaan tersebut:

$$\begin{aligned} -x^2+2x+3 &= -2x+3 \\ -x^2+4x &= 0 \\ x(x-4) &= 0 \\ x=0 \quad \vee &\quad x=4 \end{aligned}$$

   Daerah yang dibatasi diilustrasikan dibawah ini



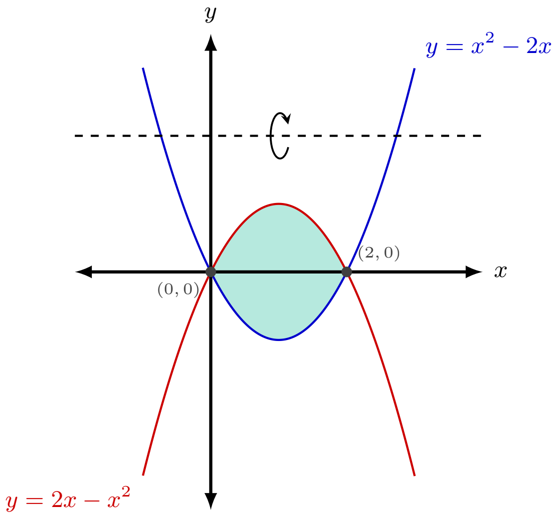
   Sehingga luas daerah yang diarsir dapat dihitung dengan integral berikut

$$\begin{aligned} \text{Area} &= \int_0^4 -x^2+2x+3-(-2x+3)\,dx \\ &= \int_0^4 -x^2+4x\,dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3+2x^2\right]_0^4 = \left(-\frac{1}{3}(4)^3+2(4)^2\right)-0 \\ &= -\frac{64}{3}+32 = \boxed{\frac{32}{3}} \end{aligned}$$

2. Titik potong kedua kurva didapatkan dengan menyamakan kedua persamaan tersebut:

$$\begin{aligned} 2x-x^2 &= x^2-2x \\ 4x &= 2x^2 \\ 0 &= 2x^2-4x \\ 0 &= 2x(x-2) \\ x=0 \quad \vee &\quad x=2 \end{aligned}$$

   Daerah yang dibatasi diilustrasikan dibawah ini



Karena diputar terhadap garis $y = 2$, maka kita perlu menghitung jarak titik berat dari garis tersebut yang dimana komponen yang dibutuhkan hanyalah $\bar{y}$.[1]

$$
\begin{aligned}
M &= \int_0^2 (2x - x^2) - (x^2 - 2x)\, dx = \int_0^2 (4x - 2x^2)\, dx \\
&= \left[2x^2 - \frac{2}{3}x^3\right]_0^2 = \left(2(2)^2 - \frac{2}{3}(2)^3\right) - 0 = 8 - \frac{16}{3} = \frac{24-16}{3} = \frac{8}{3} \\
M_x &= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(2x - x^2\right)^2 - \left(x^2 - 2x\right)^2\, dx = \int_0^2 \left(2x - x^2 + x^2 - 2x\right)\left(2x - x^2 - x^2 + 2x\right)\, dx \\
&= \int_0^2 (0)(4x - 2x^2)\, dx = 0 \\
\bar{y} &= \frac{M_x}{M} = \frac{0}{\frac{8}{3}} = 0
\end{aligned}
$$

Ingat rumus Dalil Guldin I untuk volume benda putar yaitu

$$V = 2\pi L \Delta\bar{y}$$

dengan $\Delta\bar{y}$ adalah jarak antara garis rotasi dengan titik berat daerah yang diarsir yaitu $\Delta\bar{y} = |2 - \bar{y}| = 2 - 0 = 2$. L adalah luas daerah yang diarsir yang sudah kita hitung sebelumnya yaitu $L = M = \frac{8}{3}$. Maka volume benda putar yang dihasilkan adalah

$$V = 2\pi(2)\left(\frac{8}{3}\right) = \boxed{\frac{32\pi}{3}}$$

3. (a) Turunkan x dan y terhadap t:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= \cos t \\
\frac{dy}{dt} &= 2\cos t
\end{aligned}
$$

[1] Ilustrasi pada gambar sebenarnya cukup menunjukkan bahwa daerah tersebut simetris terhadap sumbu-x, sehingga dapat ditarik kesimpulan $\bar{y} = 0$.

Maka panjang kurva dapat dihitung dengan rumus integral panjang kurva parametrik yaitu

$$S = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

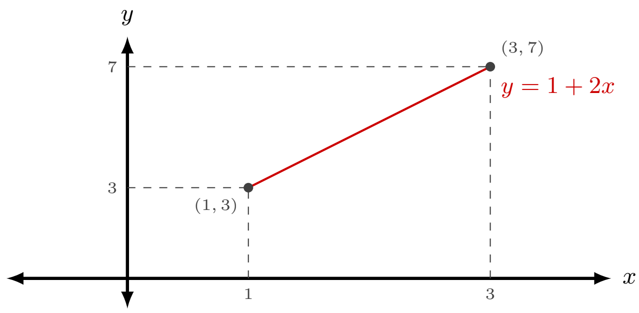
Sehingga panjang kurva dari $t = 0$ sampai $t = \frac{\pi}{2}$ adalah

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos t)^2 + (2\cos t)^2}\, dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{5\cos^2 t}\, dt \\ &= \sqrt{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\, dt = \sqrt{5}\,[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sqrt{5}(1-0) = \boxed{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

(b) Dengan melakukan substitusi $x = \sin t$, maka didapatkan

$$y = 1 + 2x, \quad 1 \le x \le 3$$

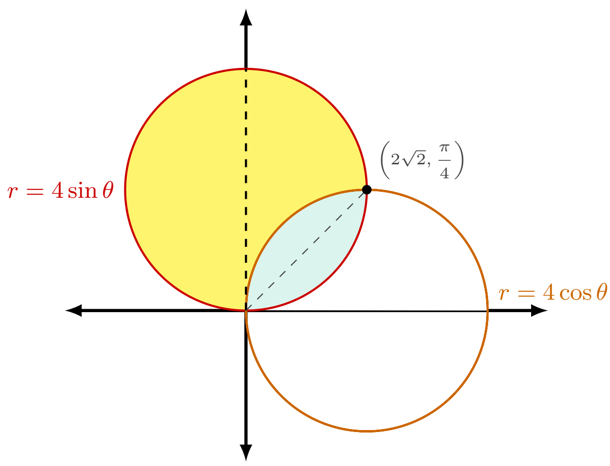
Sehingga sketsa kurva tersebut adalah sebagai berikut:



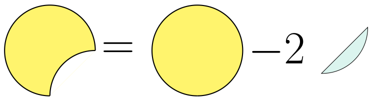
4. Titik potong kedua kurva polar didapatkan dengan menyamakan kedua persamaan tersebut:

$$\begin{aligned} 4\sin\theta &= 4\cos\theta \\ \tan\theta &= 1 \\ \theta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Sketsa daerah yang diarsir dapat dilihat di bawah ini



Luas daerah yang dimaksud pada soal adalah



Sehingga perhitungan integral yang benar adalah

$$
\begin{aligned}
\text{Area} &= 4\pi - 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} 4\sin^2\theta \, d\theta\right] \\
&= 4\pi - 2\left[\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)\, d\theta\right] \\
&= 4\pi - 2\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 4\pi - 2\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right] \\
&= 4\pi - 2\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] \\
&= 4\pi - \frac{\pi}{2} + 1 = \boxed{\frac{7\pi}{2} + 1}
\end{aligned}
$$

5. Diketahui bahwa untuk setiap fungsi $f(x)$ yang dapat diturunkan, deret Taylor disekitar $x = a$ dapat dituliskan sebagai

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Cara pertama: Hitung turunan-turunan dari $f(x) = \dfrac{1}{5-4x}$ pada $x = 1$:

$$
\begin{aligned}
f(1) &= \frac{1}{5-4\cdot 1} = \frac{1}{1} = 1, \\
f'(x) &= \frac{4}{(5-4x)^2} \Rightarrow f'(1) = 4, \\
f''(x) &= -\frac{32}{(5-4x)^3} \Rightarrow f''(1) = -32, \\
f'''(x) &= \frac{384}{(5-4x)^4} \Rightarrow f'''(1) = 384, \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Dengan demikian, deret Taylor untuk fungsi tersebut adalah

$$
\begin{aligned}
f(x) &= 1 + 4(x-1) - \frac{32}{2!}(x-1)^2 + \frac{384}{3!}(x-1)^3 + \cdots \\
&= 1 + 4(x-1) - 16(x-1)^2 + 64(x-1)^3 + \cdots \\
&= \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} 4^{n-1} (x-1)^n}
\end{aligned}
$$

<u>Cara kedua:</u> Perhatikan bahwa kita dapat menulis fungsi tersebut sebagai

$$f(x) = \frac{1}{1 + (4 - 4x)} = \frac{1}{1 + 4(1 - x)}$$

Dengan jari-jari konvergensi $|x - 1| < \frac{1}{4}$, dapat kita substitusikan $y = x - 1$ sehingga didapatkan

$$f(x) = \frac{1}{1 - (-4y)} = \frac{1}{1 + 4y}$$

Terakhir menggunakan deret geometri dapat diperoleh

$$f(x) = \frac{1}{1 + 4y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-4y)^n = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} 4^{n-1} (x - 1)^n}$$

SKPB - ITS

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GENAP 2023/2024

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 2 (SM234201) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Rabu, 26 Juni 2024
Waktu	:	13.30-15.10 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	40-63

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan.
Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh $y = \sqrt{x+2}$, $y = x$, dan $y = 0$.
2. Gambarkan luas daerah yang dibatasi oleh kurva $y = -x^2 + x$ dan sumbu-x. Menggunakan Dalil Guldin I, dapatkan volume benda padat jika daerah tersebut diputar pada garis $x = 4$.
3. Dapatkan persamaan garis singgung kurva $x = t + \cos t$, $y = 2 + \sin t$ saat $t = 0$.
4. Dapatkan luas daerah dari irisan lingkaran $r = 4\sin\theta$ dan lingkaran $r = 4\cos\theta$.
5. Dapatkan deret Maclaurin untuk fungsi $f(x) = xe^x$.

Selamat Mengerjakan

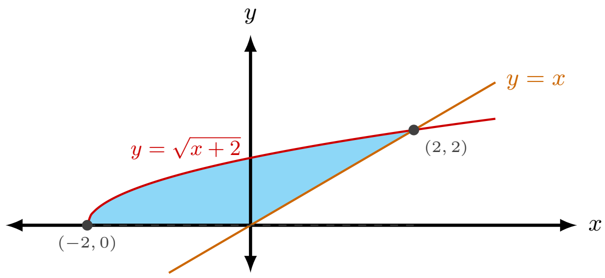
"*Jujur adalah kunci kesuksesan*"

SOLUSI

1. Titik potong kedua kurva didapatkan dengan menyamakan kedua persamaan tersebut:

$$\begin{aligned}\sqrt{x+2} &= x\\ x^2 - x + 2 &= 0\\ x &= 2 \quad \vee \quad x = -1\end{aligned}$$

Ilustrasi daerah yang diarsir dapat dilihat di bawah ini



Agar lebih mudah, gunakan integrasi terhadap y dengan mengubah fungsinya menjadi

$$\begin{aligned}&y = \sqrt{x+2} \Rightarrow x = y^2 - 2\\ &y = x \Rightarrow x = y\end{aligned}$$

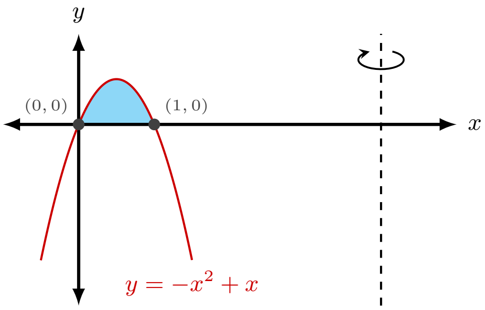
dan batas integrasi dari $y = 0$ sampai $y = 2$. Maka luas daerah yang diarsir dapat dihitung dengan integral berikut

$$\begin{aligned}\text{Area} &= \int_0^2 \big(y - (y^2 - 2)\big)\ dy\\ &= \int_0^2 (2 + y - y^2)\, dy = \left[2y + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3\right]_0^2\\ &= \left(2(2) + \frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{3}(2)^3\right) - 0 = 4 + 2 - \frac{8}{3} = 6 - \frac{8}{3} = \boxed{\frac{10}{3}}\end{aligned}$$

2. Titik potong kurva dengan sumbu-x terjadi ketika $y = 0$:

$$\begin{aligned}-x^2 + x &= 0\\ x(-x+1) &= 0\\ x &= 0 \quad \vee \quad x = 1\end{aligned}$$

Ilustrasi daerah yang diarsir dapat dilihat di bawah ini



Karena diputar terhadap garis $x = 4$, maka kita perlu menghitung jarak titik berat dari garis tersebut yang dimana komponen yang dibutuhkan hanyalah $\bar{x}$.[2]

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 (-x^2 + x)\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{3}(1)^3 + \frac{1}{2}(1)^2\right) - 0 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{-2+3}{6} = \frac{1}{6} \\ M_y &= \int_0^1 x(-x^2 + x)\,dx = \int_0^1 (-x^3 + x^2)\,dx = \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{4}(1)^4 + \frac{1}{3}(1)^3\right) - 0 \\ &= -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{-3+4}{12} = \frac{1}{12} \\ \bar{x} &= \frac{M_y}{M} = \frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Jadi $\Delta\bar{x} = |4 - \bar{x}| = 4 - \frac{1}{2} = \frac{8-1}{2} = \frac{7}{2}$. Kemudian gunakan rumus Dalil Guldin I untuk volume benda putar yaitu

$$V = 2\pi L \Delta\bar{x} = 2\pi\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{7}{2}\right) = \boxed{\frac{7\pi}{6}}$$

3. Dapatkan turunan x dan y terhadap t:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 1 - \sin t \\ \frac{dy}{dt} &= \cos t \end{aligned}$$

Kemudian gradien garis singgung pada $t = 0$ adalah

$$m = \left.\frac{dy/dt}{dx/dt}\right|_{t=0} = \frac{\cos 0}{1 - \sin 0} = \frac{1}{1} = 1$$

Untuk $t = 0$ juga diperoleh $x = 1$ dan $y = 2$. Sehingga persamaan garis singgung pada kurva tersebut adalah

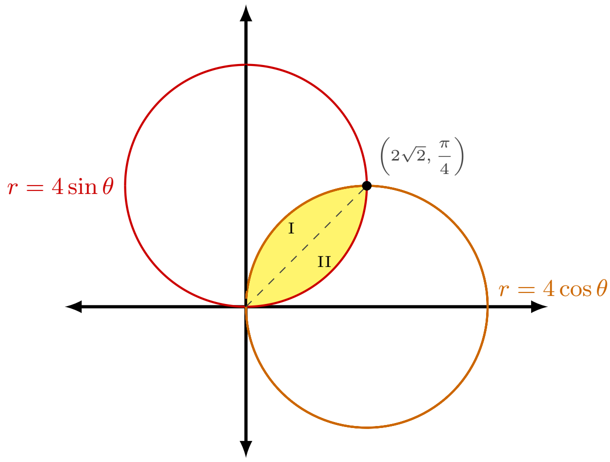
$$\begin{aligned} y - 2 &= 1 \cdot (x - 1) \\ y &= x + 1 \end{aligned}$$

4. Titik potong kedua kurva polar didapatkan dengan menyamakan kedua persamaan tersebut:

$$\begin{aligned} 4\sin\theta &= 4\cos\theta \\ \tan\theta &= 1 \\ \theta &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

Sketsa daerah yang diarsir dapat dilihat di bawah ini

[2] Ilustrasi pada gambar sebenarnya cukup menunjukkan bahwa daerah tersebut simetris terhadap $x = 1/2$, sehingga dapat ditarik kesimpulan $\bar{x} = 1/2$.



Perhatikan bahwa daerah I dan II adalah simetri, sehingga kita hanya perlu menghitung luas salah satu daerah saja kemudian mengalikan dengan 2.

$$\begin{aligned}
\text{Area} &= 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} (4\sin\theta)^2\, d\theta\right] \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16\sin^2\theta\, d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\, d\theta \\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1-\cos 2\theta)\, d\theta \\
&= 8\left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= 8\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}\right] = \frac{8\pi}{4} - 4 = \boxed{2\pi - 4}
\end{aligned}$$

5. Cukup kita tinjau fungsi $f(x) = xe^x$ dalam bentuk perkalian dari fungsi x dan e^x.[3] Dapat kita gunakan deret Maclaurin untuk fungsi e^x yaitu[4]

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Selanjutnya kalikan dengan x kedua fungsi tersebut:

$$xe^x = x\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}$$

Dengan demikian, deret Maclaurin untuk $f(x) = xe^x$ adalah

$$f(x) = \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n!}} = x + x^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^4}{6} + \cdots$$

[3] Fungsi xe^x cukup sulit untuk diturunkan karena kita akan berhadapan dengan aturan perkalian.
[4] Untuk mencari deret Maclaurin dari fungsi e^x, dapat kita gunakan turunan fungsi tersebut pada $x = 0$

SKPB - ITS

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GENAP 2023/2024

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 2 (SM234201) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Kamis, 27 Juni 2024
Waktu	:	11.00-12.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	48-60, 107

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan.
Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Dapatkan luas daerah yang dibatasi oleh $x = y^3 - y$ dan $x = 0$.
2. Gambarkan daerah di kuadran I yang dibatasi oleh kurva-kurva $y = x^2$, $y = 8 - 2x$, dan sumbu-y. Dapatkan volume benda putar jika daerah tersebut diputar pada sumbu-x.
3. Hitung panjang busur kurva $x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t)$ pada $0 \leq t \leq 2\pi$.
Petunjuk: gunakan identitas trigonometri $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$.
4. Dapatkan luas daerah yang diperoleh dari irisan kurva $r = 3\cos\theta$ dan $r = 1 + \cos\theta$.
5. Dapatkan polinomial Taylor untuk fungsi $f(x) = x\cos x$ di sekitar $x = \pi$ hingga suku keempat.

Selamat Mengerjakan

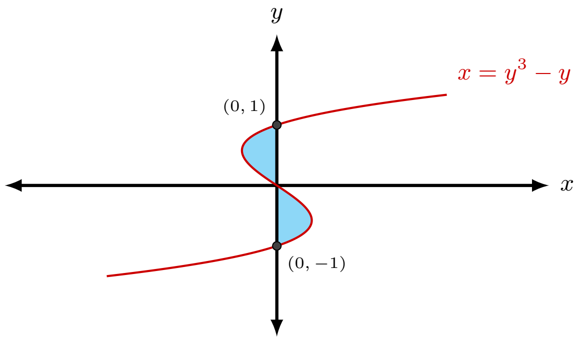
"*Jujur adalah kunci kesuksesan*"

SOLUSI

1. Titik potong kedua kurva diperoleh dari

$$\begin{aligned} y^3 - y &= 0 \\ y(y^2-1) &= 0 \\ y(y-1)(y+1) &= 0 \\ y = 0 \quad \vee \quad y &= 1 \quad \vee \quad y = -1 \end{aligned}$$

Ilustrasi daerah dapat dilihat di bawah ini.



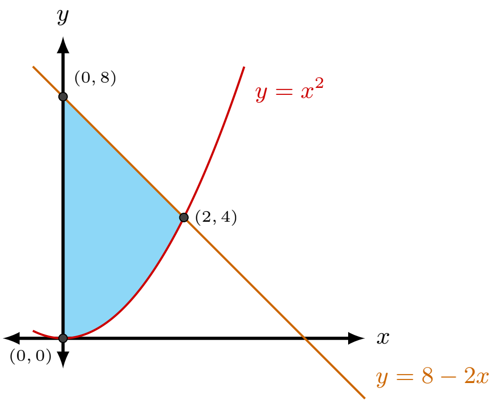
Karena soal nya cukup ambigu, maka disini saya asumsikan bahwa daerah yang diarsir adalah daerah atas dan bawah seperti gambar di atas. Disebabkan kedua daerah simetris, maka cukup kita menghitung luas salah satu daerah saja kemudian mengalikan dengan 2.

$$\text{Area} = 2\int_0^1 -(y^3-y)\,dy = 2\int_0^1 (y-y^3)\,dy = 2\left[\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{4}y^4\right]_0^1 = 2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) = 2\left(\frac{1}{4}\right) = \boxed{\frac{1}{2}}$$

2. Titik potong kedua kurva didapatkan dengan menyamakan kedua persamaan tersebut:

$$\begin{aligned} x^2 &= 8 - 2x \\ x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ (x-2)(x+4) &= 0 \\ x = 2 \quad &\vee \quad x = -4 \end{aligned}$$

Ilustrasi daerah yang diarsir dapat dilihat di bawah ini



Selanjutnya, kita mencari $\bar{y}$ saja.

$$\begin{aligned}
M &= \int_0^2 (8 - 2x - x^2)\,dx = \left[8x - x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \left(8(2) - (2)^2 - \frac{1}{3}(2)^3\right) - 0 \\
&= 16 - 4 - \frac{8}{3} = 12 - \frac{8}{3} = \frac{36 - 8}{3} = \frac{28}{3} \\
M_x &= \frac{1}{2}\int_0^2 (8 - 2x)^2 - (x^2)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 (64 - 32x + 4x^2 - x^4)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[64x - 16x^2 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5\right]_0^2 = \frac{1}{2}\left(128 - 64 + \frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(64 + \frac{32}{3} - \frac{32}{5}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{960}{15} + \frac{160}{15} - \frac{96}{15}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1024}{15}\right) = \frac{512}{15} \\
\bar{y} &= \frac{M_x}{M} = \frac{\frac{512}{15}}{\frac{28}{3}} = \frac{512}{15} \cdot \frac{3}{28} = \frac{1536}{420} = \frac{256}{70} = \frac{128}{35}
\end{aligned}$$

Terakhir menggunakan rumus Dalil Guldin I untuk volume benda putar yaitu

$$V = 2\pi L\bar{y} = 2\pi\left(\frac{\cancelto{5}{28}}{3}\right)\left(\frac{128}{\cancelto{5}{35}}\right) = \boxed{\frac{512\pi}{15}}$$

3. Turunkan x dan y terhadap t:

$$\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= a(1 - \cos t) \\
\frac{dy}{dt} &= a\sin t
\end{aligned}$$

Kemudian panjang busur kurva pada interval $0 \leq t \leq 2\pi$ adalah

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{(1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2}\,dt \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt \\
&= a\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,dt = a\int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 - \cos t)}\,dt \\
&= a\int_0^{2\pi} 4\sqrt{\sin^2(t/2)}\,dt = 4a\int_0^{2\pi} |\sin(t/2)|\,dt
\end{aligned}$$

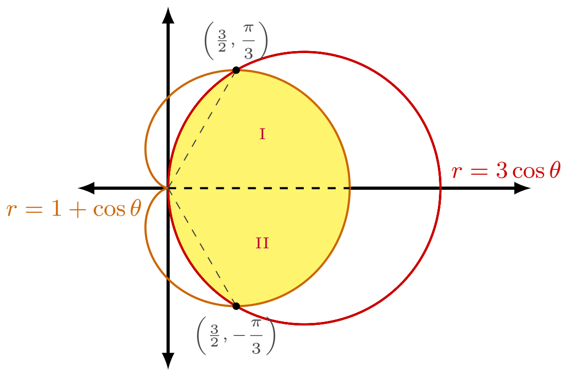
Karena $|\sin(t/2)| = -\sin(t/2)$ pada interval $[0, \pi]$ dan $|\sin(t/2)| = \sin(t/2)$ pada interval $[\pi, 2\pi]$, maka kita dapat memecah integral menjadi dua bagian:

$$\begin{aligned}
S &= 4a\left(\int_0^{\pi} -\sin(t/2)\,dt + \int_{\pi}^{2\pi} \sin(t/2)\,dt\right) \\
&= 4a\left(-2[\cos(t/2)]_0^{\pi} + 2[\cos(t/2)]_{\pi}^{2\pi}\right) \\
&= 4a(-2[\cos(\pi/2) - 1] + 2[1 - \cos(3\pi/2)]) \\
&= 4a(-2[0 - 1] + 2[1 - 0]) \\
&= 4a(-2(-1) + 2(1)) = 4a(2 + 2) = \boxed{8a}
\end{aligned}$$

4. Titik potong kedua kurva polar didapatkan dengan menyamakan kedua persamaan tersebut:

$$\begin{aligned} 3\cos\theta &= 1 + \cos\theta \\ 2\cos\theta &= 1 \\ \cos\theta &= \frac{1}{2} \\ \theta = \frac{\pi}{3} \quad &\vee \quad \theta = -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

Sketsa daerah yang diarsir dapat dilihat di bawah ini



Perhatikan bahwa daerah I dan II adalah simetri, sehingga kita hanya perlu menghitung luas salah satu daerah saja kemudian mengalikan dengan 2.

Tinjau juga bahwa salah satu daerah dapat dihitung sebagai 2 integral polar terpisah, yaitu

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos\theta)^2 \; d\theta \quad \text{dan} \quad \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta)^2 \; d\theta$$

Maka luas daerah yang diarsir dapat dihitung dengan integral berikut

$$\begin{aligned} \text{Area} &= 2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos\theta)^2 \; d\theta + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (3\cos\theta)^2 \, d\theta\right] \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+\cos\theta)^2 \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} 9\cos^2\theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1+2\cos\theta+\cos^2\theta) \, d\theta + 9\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) \, d\theta \\ &= \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + 9\left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \left[\frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{\cancel{3}} + 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] - 9\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\cdot 0 - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)\right] \\ &= \left[\frac{\pi}{2} + \frac{7\sqrt{3}}{8}\right] + 9\left[\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{8}\right] \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{9\sqrt{3}}{8} + \frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8} = \boxed{\frac{5\pi}{4}} \end{aligned}$$

5. Mencari turunan fungsi pertama sampai keempat dari fungsi $f(x) = x\cos x$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos x - x\sin x \\ f''(x) &= -\sin x - \sin x - x\cos x = -2\sin x - x\cos x \\ f'''(x) &= -2\cos x - \cos x + x\sin x = -3\cos x + x\sin x \\ f^{(4)}(x) &= 3\sin x + \sin x + x\cos x = 4\sin x + x\cos x \end{aligned}$$

Kemudian substitusi $x = \pi$:

$$\begin{aligned} f(\pi) &= \pi(-1) = -\pi \\ f'(\pi) &= -1 - \pi(0) = -1 \\ f''(\pi) &= -2(0) - \pi(-1) = \pi \\ f'''(\pi) &= -3(-1) + \pi(0) = 3 \\ f^{(4)}(\pi) &= 4(0) + \pi(-1) = -\pi \end{aligned}$$

Maka polinomial Taylor untuk $f(x)$ di sekitar $x = \pi$ hingga suku keempat adalah

$$P_4(x) = f(\pi) + f'(\pi)(x-\pi) + \frac{f''(\pi)}{2!}(x-\pi)^2 + \frac{f'''(\pi)}{3!}(x-\pi)^3 + \frac{f^{(4)}(\pi)}{4!}(x-\pi)^4$$

$$\boxed{P_4(x) = -\pi - (x-\pi) + \frac{\pi}{2}(x-\pi)^2 + \frac{1}{2}(x-\pi)^3 - \frac{\pi}{24}(x-\pi)^4}$$