SKPB - ITS

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GENAP 2024/2025

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Kamis, 12 Desember 2024
Waktu	:	13.30-15.10 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	34-46, 107, 108

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

EAS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

SOAL

1. Diberikan kurva $y = \sqrt{x}$ untuk $0 \leq x \leq 3$. Dapatkan titik pada kurva yang memiliki jarak terdekat dengan titik $(2, 0)$.

2. Diberikan fungsi $f(x) = \dfrac{x}{x - 2024}$.

   (a) Tentukan asimtot datar dan tegaknya (jika ada).

   (b) Tentukan selang dimana fungsi $f(x)$ naik atau turun.

   (c) Tentukan titik ekstrim relatif fungsi tersebut.

   (d) Tentukan selang kecekungan fungsi $f(x)$ dan titik belok (jika ada).

   (e) Sketsa grafiknya.

3. Misalkan $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{1 + t^3}{1 + t^2}\, dt$. Dapatkan $F(-1)$, $F'(-1)$, dan $F''(-1)$.

4. Nyatakan bilangan kompleks $z = \left(\dfrac{(1+i)^{12} \left(1 + i\sqrt{3}\right)^{16}}{(-1+i)^{32}} \right)$ dalam bentuk $z = a + bi$.

5. Carilah nilai x_3 dari sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 + x_4 &= 11, \\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 12, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 20, \\ 4x_1 + 6x_3 + x_4 &= 24, \end{aligned}$$

   dengan menggunakan metode Cramer.

Selamat Mengerjakan

SOLUSI

1. Pertama-tama dari soal kita tahu bahwa titik yang berada pada kurva memiliki koordinat $(x, \sqrt{x})$. Kemudian jarak antara titik $(x, \sqrt{x})$ dengan titik $(2, 0)$ dapat didefinsikan dengan

$$D(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

Dapat dilihat bahwa $D(x)$ merupakan fungsi yang bergantung pada x dengan interval $0 \le x \le 3$. Untuk mencari nilai minimum dari $D(x)$, kita cari titik stasioner dari $D(x)$ dengan mencari turunan pertama dari $D(x)$, yaitu

$$D'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}} = 0 \implies x = \frac{3}{2}.$$

Karena kita bekerja pada interval yang terbatas, maka kita juga perlu mengecek nilai $D(x)$ pada titik-titik ujung interval, sehingga dapat dibandingkan nilainya pada tabal dibawah ini

x	0	3/2	3
$D(x)$	2	7/4	2

Sehingga titik yang memiliki jarak terdekat dengan titik $(2, 0)$ adalah ketika $x = 3/2$. Yang terakhir subtitusikan nilai $x = 3/2$ ke dalam $y = \sqrt{x}$.

$\therefore$ Titik yang memiliki jarak terdekat dengan titik $(2, 0)$ adalah $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

2. KIta dapat rubah fungsi $f(x)$ agar lebih sederhana saat diturunkan

$$f(x) = \frac{x}{x-2024} = \frac{(x-2024)+2024}{x-2024} = 1 + \frac{2024}{x-2024}$$

(a) Asimtot datar terjadi ketika $f(x)$ mendekati nilai konstan ketika x mendekati $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{2024}{x-2024} = 1$$

$\therefore$ Asimtot datar terjadi pada $y = 1$.

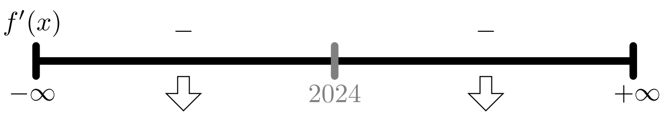
Asimtot tegak terjadi ketika $f(x)$ mendekati nilai tak hingga ketika x mendekati suatu nilai tertentu. Dalam hal ini, asimtot tegak terjadi ketika penyebut dari $f(x)$ adalah nol, yaitu ketika $x = 2024$.

(b) Tinjau turunan pertama dari $f(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(1 + \frac{2024}{x-2024}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-2024+2024}{x-2024}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(1 + \frac{2024}{x-2024}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2024}{x-2024}\right) = -\frac{2024}{(x-2024)^2} \end{aligned}$$

Karena $f'(x) \neq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, maka titik kritis dari $f(x)$ hanya terjadi ketika $x = 2024$. Uji titik:

- $x = 0 \implies f'(0) = -\frac{1}{2024} < 0$.
- $x = 2025 \implies f'(2025) = -2024 < 0$.



$\therefore$ Fungsi $f(x)$ selalu turun pada selang $(-\infty, 2024) \cup (2024, +\infty)$.

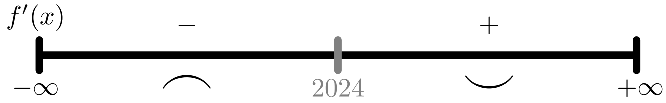
(c) Karena $f'(x)$ tidak akan pernah nol, maka fungsi $f(x)$ tidak memiliki titik ekstrim.

(d) Tinjau turunan kedua dari $f(x)$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{2024}{(x-2024)^2}\right) = \frac{4048}{(x-2024)^3}$$

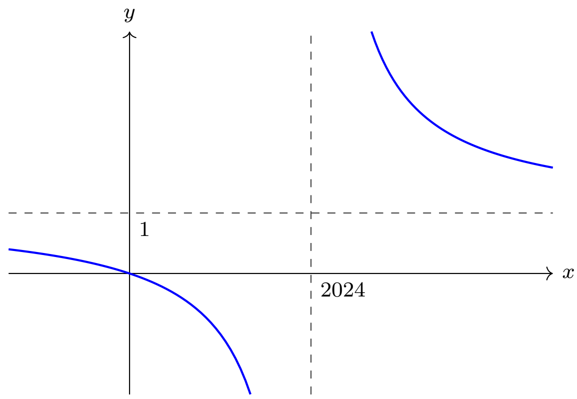
Karena $f''(x) \neq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, maka fungsi $f(x)$ tidak memiliki titik belok.
Uji titik:

- $x = 0 \implies f''(0) = -\frac{2}{2024^2} < 0.$
- $x = 2025 \implies f''(2025) = 4048 > 0.$



$\therefore$ Fungsi $f(x)$ cekung ke bawah pada selang $(-\infty, 2024)$ dan cekung ke atas pada selang $(2024, +\infty)$.

(e) Dapat kita sketsa menggunakan informasi pergeseran grafik dari $f(x) = \dfrac{1}{x}$. (2024 satuan ke kanan dan 1 satuan ke atas)



3. Untuk $F(-1)$, dapat dilihat karena nilai batas bawah dan batas atas sama, maka nilai integralnya adalah nol.

$$F(-1) = \int_{-1}^{-1} \frac{1+t^3}{1+t^2}\,dt = 0$$

Selanjutnya untuk $F'(-1)$, dapat kita gunakan Teorema Fundamental Kalkulus II untuk mencari turunan dari $F(x)$.

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-1}^{x} \frac{1+t^3}{1+t^2}\,dt\right) = \frac{1+x^3}{1+x^2}$$
$$F'(-1) = \frac{1+(-1)^3}{1+(-1)^2} = 0$$

Terakhir untuk $F''(-1)$, kita turunkan $F'(x)$.

$$F''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x^3}{1+x^2}\right) = \frac{3x^2(1+x^2) - 2x(1+x^3)}{(1+x^2)^2}$$
$$F''(-1) = \frac{3(-1)^2(1+(-1)^2) - 2(-1)(1+(-1)^3)}{(1+(-1)^2)^2} = \frac{3(2)-0}{4} = \frac{3}{2}$$

4. Agar lebih mudah dihitung, jadikan ketiga masing-masing bilangan kompleks diatas menjadi bentuk polar.

- Untuk $1+i$, didapatkan $a = 1$ dan $b = 1$ sehingga $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ dan $\theta = \arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ (Kuadran I).[1]

[1] Boleh dijadikan dalam bentuk derajat

- Untuk $1+i\sqrt{3}$, didapatkan $a=1$ dan $b=\sqrt{3}$ sehingga $r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ dan $\theta=\arctan\left(\sqrt{3}\right)=\frac{\pi}{3}$ (Kuadran I).
- Untuk $-1+i$, didapatkan $a=-1$ dan $b=1$ sehingga $r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ dan $\theta=\arctan(-1)=\frac{3\pi}{4}$ (Kuadran II).

Jadi bentuk polar dari z adalah

$$\begin{aligned}
z &= \left(\frac{(1+i)^{12}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{16}}{(-1+i)^{32}}\right) = \frac{\left[\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{12}\left[2\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{16}}{\left[\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{32}} = \frac{\left[2^6\operatorname{cis}(3\pi)\right]\left[\cancel{2^{16}}\operatorname{cis}\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right]}{\cancel{2^{16}}\operatorname{cis}(24\pi)} \\
&= \frac{\left[2^6\operatorname{cis}(\pi)\right]\left[\operatorname{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]}{\operatorname{cis}(0)} = 2^6\operatorname{cis}\left(\pi+\frac{4\pi}{3}-0\right) = 2^6\operatorname{cis}\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 2^6\operatorname{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \\
&= 64\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 64\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{32+32\sqrt{3}i}
\end{aligned}$$

5. Metode Cramer secara umum untuk mencari nilai x_n dapat dirumuskan sebagai

$$x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dengan A_n adalah matriks yang diperoleh dari matriks A yang kolom ke-n-nya diganti dengan vektor kolom b. (Dalam hal ini $n=3$)

SPL diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&4&1\\2&0&3&2\\5&1&2&1\\4&0&6&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}11\\12\\20\\24\end{pmatrix}}_{b}$$

Kemudian kita tulis matriks A_3 dengan mengganti kolom ke-3 dari matriks A dengan vektor kolom b.

$$A_3=\begin{pmatrix}1&0&11&1\\2&0&12&2\\5&1&20&1\\4&0&24&1\end{pmatrix}$$

Selanjutnya kita hitung nilai determinan dari matriks A dan A_3. Ada banyak metode untuk menghitung determinan, seperti OBE, ekspansi kofaktor, dsb. Disini saya akan menggunakan metode ekspansi kofaktor dan OBE.[2]

- Untuk $\det(A)$, pertama akan kita ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua karena memiliki banyak nol.

$$\begin{vmatrix}1&0&4&1\\2&0&3&2\\5&1&2&1\\4&0&6&1\end{vmatrix} = -0\ldots+0\ldots-(1)\begin{vmatrix}1&4&1\\2&3&2\\4&6&1\end{vmatrix}+0\ldots = -\begin{vmatrix}1&4&1\\2&3&2\\4&6&1\end{vmatrix}$$

[2]OBE dan ekspansi kofaktor memang bisa di-*combine* untuk mempercepat perhitungan

Untuk matrix 3×3 kita bisa menggunakan aturan Sarrus, namun disini saya akan menggunakan OBE yaitu $B_2 - 2B_1$ dan $B_3 - 4B_1$.[3]

$$-\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} = -[(-5)(-3) - (-10)0] = -15$$

- Untuk $\det(A_3)$, dengan langkah yang sama kita ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 11 & 1 \\ 2 & 0 & 12 & 2 \\ 5 & 1 & 20 & 1 \\ 4 & 0 & 24 & 1 \end{vmatrix} = -0... + 0... - (1)\begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix} + 0... = -\begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix}$$

Dan kita gunakan OBE yang sama yaitu $B_2 - 2B_1$ dan $B_3 - 4B_1$.

$$-\begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ -20 & -3 \end{vmatrix} = -[(-10)(-3) - (-20)0] = -30$$

Terakhir kita gunakan rumus Cramer untuk mencari nilai x_3.

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-30}{-15} = 2$$

[3] OBE tipe ini tidak mengubah nilai determinan matriks awal