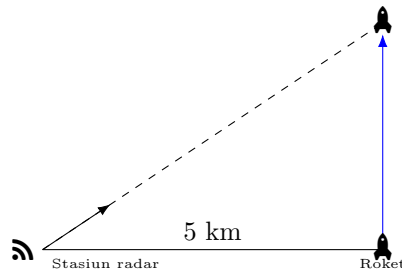


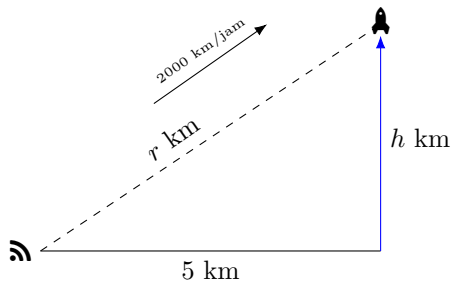
Quis 2 jam 9 Kelas 30

1. Roket naik vertikal dan dipantau oleh stasiun radar yang terletak 5 km dari landasan peluncuran. Berapa cepat roket naik jika tingginya 4 km dan jaraknya dari stasiun radar bertambah dengan laju 2000 km/jam?



Penyelesaian:

Ilustrasi gambar:



Diketahui:

$$h = 4 \text{ km}$$

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{h=4} = 2000 \text{ km/jam}$$

Dari ilustrasi diatas didapatkan persamaan

$$r^2 = 5^2 + h^2$$

$$r^2 = 25 + h^2$$

Substitusi h untuk mendapatkan nilai r ketika $h = 4 \text{ km}$

$$r^2 = 5^2 + 4^2$$

$$r = \sqrt{5^2 + 4^2}$$

$$r = \sqrt{25 + 16}$$

$$r = \sqrt{41}$$

Kemudian turunkan kedua ruas terhadap t . Dilanjutkan dengan substitusi nilai h, r dan $\frac{dr}{dt}$.

$$\frac{d}{dt}(r^2) = \frac{d}{dt}(25 + h^2)$$

$$2r \frac{dr}{dt} = 2h \frac{dh}{dt}$$

$$r \frac{dr}{dt} = h \frac{dh}{dt}$$

$$(\sqrt{41})(2000) = (4) \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = 500\sqrt{41}$$

∴ kecepatan roket saat ketinggiannya 4 km adalah $500\sqrt{41}$ km/jam.

2. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8, & x > 1 \end{cases}$$

Pada $[-1, 4]$

Penyelesaian:

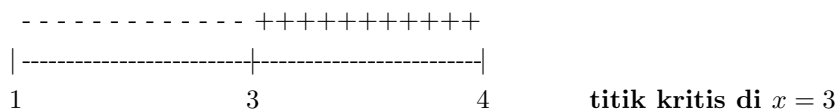
$f(x)$ dapat ditulis kembali dengan mengiriskan domainnya pada interval yang telah diberikan. $[-1, 1] \cup (1, 4]$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

Sebelum menentukan titik ekstrimnya, perlu ditinjau bahwa $f(x)$ kontinu pada selang $[-1, 4]$.

- Untuk $f(x) = 2x + 1, -1 \leq x \leq 1$ jelas bahwa fungsi linear merupakan fungsi kontinu
- Cek kekontinuan di $x = 1$.
 - ① $f(1) = 2(1) + 1 = 3$
 - ② $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2x + 1 = 3$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 6x + 8 = 3$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$
 - ③ $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ fungsi kontinu di $x = 1$
- Untuk $f(x) = x^2 - 6x + 8, 1 < x \leq 4$ jelas bahwa fungsi polinomial merupakan fungsi kontinu. Dapat dicek turunan pertamanya

$$f'(x) = 2x - 6, 1 < x < 4$$



Titik uji:

$$\begin{aligned} \rightarrow f'(2) &= 2(2) - 6 = -2 \text{ (Turun)} \\ \rightarrow f'(\frac{7}{2}) &= 2(\frac{7}{2}) - 6 = 1 \text{ (Naik)} \end{aligned}$$

Step terakhir adalah mencari nilai pada titik-titik ujung dan titik kritis fungsi yang telah dicari

x	-1	1	3	4
$f(x)$	-1	3	-1	0

Setelah itu, bandingkan saja nilai $f(x)$ yang telah didapat.

∴ nilai maksimumnya adalah 3 dan nilai minimumnya adalah -1 .

3. Diberikan fungsi $y = 4x^3 - 3x^2 + 5$

- (a) Tentukan fungsi naik dan fungsi turun (berikan tanda f')

Penyelesaian: Tentukan turunan pertamanya

$$y' = 0$$

$$12x^2 - 6x = 0$$

$$6x(2x - 1) = 0$$

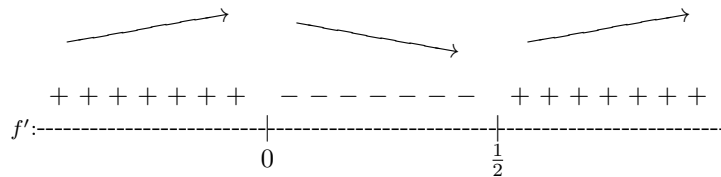
$$x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$$

Titik uji:

$$\rightarrow f'(-1) = 6(-1)(2(-1) - 1) = 18 \text{ (Naik)}$$

$$\rightarrow f'(\frac{1}{4}) = 6(\frac{1}{4})(2(\frac{1}{4}) - 1) = -\frac{3}{4} \text{ (Turun)}$$

$$\rightarrow f'(1) = 6(1)(2(1) - 1) = 18 \text{ (Naik)}$$



- Fungsi naik pada $[-\infty, 0]$ dan $[\frac{1}{2}, +\infty]$.
- Fungsi turun pada $[0, \frac{1}{2}]$.

- (b) Tentukan titik kritis

Penyelesaian: Titik kritis terjadi ketika $x = 0 \vee x = \frac{1}{2}$, Sehingga titik kritisnya adalah $(0, 5)$ dan $(\frac{1}{2}, \frac{19}{4})$

- (c) Tentukan ekstrim relatif

Penyelesaian: Dengan uji turunan kedua ($y'' = 24x - 6$) didapatkan

- Untuk $x = 0$, maka $y''(0) = -6$. ($f''(x_0) < 0$ definisi maksimum relatif)
- Untuk $x = \frac{1}{2}$, maka $y''(\frac{1}{2}) = 6$. ($f''(x_0) > 0$ definisi minimum relatif)

Atau dapat dilihat dari naik turunnya grafik sebelum dan sesudah titik kritis.

\therefore maksimum relatif ketika $x = 0$ dan minimum relatif ketika $x = \frac{1}{2}$. (**Kedua titik tersebut ekstrim relatif**)

- (d) Tentukan interval dimana fungsi cekung ke atas dan fungsi cekung ke bawah (berikan tanda f'')

Penyelesaian: Tentukan turunan pertamanya

$$y'' = 0$$

$$24x - 6 = 0$$

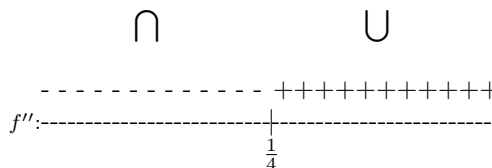
$$24 = 6$$

$$x = \frac{1}{4}$$

Titik uji:

$$\rightarrow f''(0) = 24(0) - 6 = -6 \text{ (Cekung ke bawah)}$$

$$\rightarrow f''(1) = 24(1) - 6 = 18 \text{ (Cekung ke atas)}$$

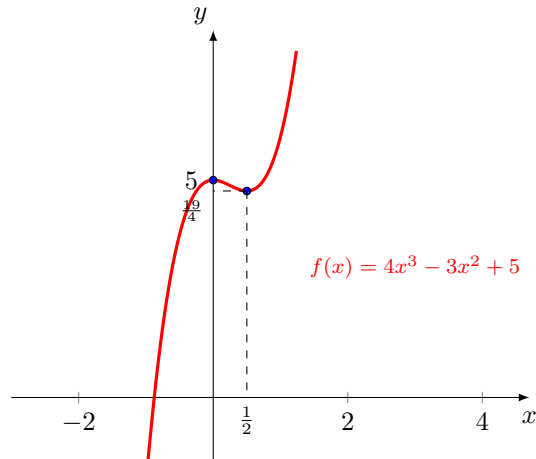


- Fungsi cekung ke atas pada $[\frac{1}{4}, +\infty]$.
- Fungsi cekung ke bawah pada $[-\infty, \frac{1}{4}]$.

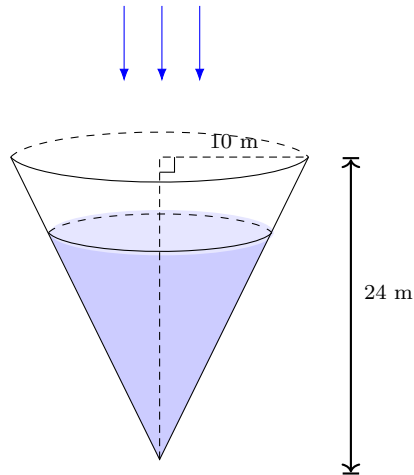
(e) Tentukan titik belok

Penyelesaian: Karena arah kecekungan berubah pada $x = \frac{1}{4}$, maka titik beloknya adalah $(\frac{1}{4}, \frac{39}{8})$.

(f) Sketsalah grafiknya



4. Tangki air berbentuk kerucut dengan jari-jari alasnya 10 m dan tinggi kerucut 24 m. Jika air mengalir ke dalam tangki dengan laju $20 \text{ m}^3/\text{menit}$, Berapa cepat kedalaman air bertambah pada saat kedalaman air 16 m?



Penyelesaian:

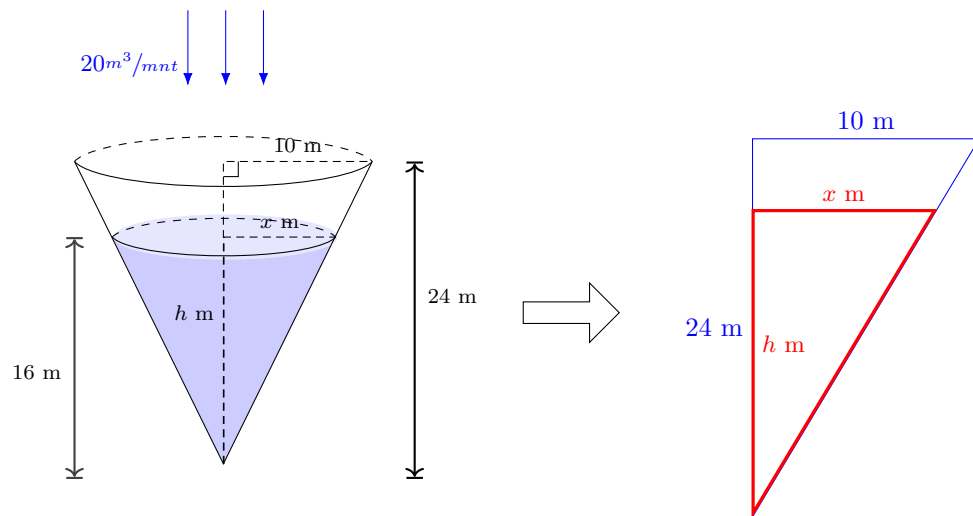
Diketahui:

$$\frac{dV}{dt} = 20$$

Ditanya:

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=16} = \dots$$

Perhatikan kesebangunan pada segitiga yang terbentuk



$$\frac{x}{h} = \frac{10}{24}$$

$$x = \frac{5}{12}h$$

Selanjutnya rumuskan volume kerucut

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{5}{12}h\right)^2 h \quad (\text{Substitusi } x = \frac{5}{12}h)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{25}{144}h^2\right) h$$

$$V = \frac{25}{432}\pi h^3$$

Turunkan persamaannya terhadap waktu dilanjutkan dengan mensubstitusi nilai-nilai yang diketahui

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{25}{432} \pi h^3 \right)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{25}{432} \pi \frac{d}{dt} (h^3)$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{25}{432} \pi \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{25}{144} \pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

$$20 = \frac{25}{12^2} \pi (16)^2 \frac{dh}{dt} \quad (\text{Substitusi } \frac{dV}{dt} = 20 \text{ dan } h = 16)$$

$$20 = \frac{25}{12^3} \cdot 16^4 \cdot \pi \frac{dh}{dt}$$

$$20 = \frac{400}{9} \pi \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{20}{\frac{400}{9} \pi}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{9}{20\pi}$$

\therefore Kedalaman air bertambah dengan laju $\frac{9}{20\pi}$ m³/menit .