Fungsi

Teosofi Hidayah Agung

Departemen Matematika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

19 September 2024

Daftar isi

Fungsi Real

Definisi 1

Fungsi adalah pemetaan elemen dari suatu himpunan ke tepat satu elemen dari himpunan lain. Dalam Kalkulus 1, kita batasi pembahasan pada fungsi yang memetakan bilangan real ke bilangan real.

Fungsi Real

Definisi 1

Fungsi adalah pemetaan elemen dari suatu himpunan ke tepat satu elemen dari himpunan lain. Dalam Kalkulus 1, kita batasi pembahasan pada fungsi yang memetakan bilangan real ke bilangan real.

Notasi

- $$\begin{aligned} f : A &\to B \\ a &\mapsto b \end{aligned}$$
- $y = f(x)$

Fungsi Real

Definisi 1

Fungsi adalah pemetaan elemen dari suatu himpunan ke tepat satu elemen dari himpunan lain. Dalam Kalkulus 1, kita batasi pembahasan pada fungsi yang memetakan bilangan real ke bilangan real.

Notasi

- $f : A \to B$
  $a \mapsto b$
- $y = f(x)$

Contoh

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $f : \{1, 2, 3\} \to \{3, 6, 9\}$
- $f(x) = x^2$
- $f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ genap} \\ -1, & n \text{ ganjil} \end{cases}$

Fungsi Real

Definisi 1

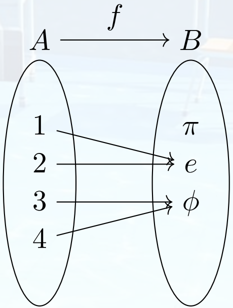
Fungsi adalah pemetaan elemen dari suatu himpunan ke tepat satu elemen dari himpunan lain. Dalam Kalkulus 1, kita batasi pembahasan pada fungsi yang memetakan bilangan real ke bilangan real.

Notasi

- $f : A \to B$
  $\quad a \mapsto b$
- $y = f(x)$

Contoh

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $f : \{1, 2, 3\} \to \{3, 6, 9\}$
- $f(x) = x^2$
- $f(n) = \begin{cases} 1, & n \text{ genap} \\ -1, & n \text{ ganjil} \end{cases}$



Fungsi Real

Fungsi Piecewise

Fungsi piecewise(sepotong-sepotong) adalah fungsi yang didefinisikan dengan beberapa aturan berbeda pada interval yang berbeda. Secara umum dapat ditulis sebagai berikut

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x \in \mathcal{D}_1 \\ f_2(x), & x \in \mathcal{D}_2 \\ & \vdots \\ f_n(x), & x \in \mathcal{D}_n \end{cases}$$

dengan $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \cup \cdots \cup \mathcal{D}_n = \mathcal{D}_f$ dan $\mathcal{D}_i \cap \mathcal{D}_j = \emptyset$ untuk $i \neq j$

Fungsi Real

Contoh

- ✓ $f(x) = |x|$
- ✓ $f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$
- ✓ $f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \geq 2 \\ -x^2 - x + 6, & x < 2 \end{cases}$

Domain dan Range

Definisi 2

Domain fungsi f adalah himpunan semua nilai x yang memenuhi $f(x)$ didefinisikan. Notasi domain fungsi f adalah

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \textit{ terdefinisi}\}$$

Range fungsi f adalah himpunan semua nilai $f(x)$ yang mungkin diperoleh saat x berjalan di domain fungsi f. Notasi range fungsi f adalah

$$\mathcal{R}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}(f)\}$$

Domain dan Range

Fungsi	Domain		Range	
	Himpunan	Interval	Himpunan	Interval
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$
$f(x) = a(x-p)^2 + q$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	$\{f(x) \mid f(x) \geq q\}$	$[q, \infty)$
$f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$	$\{x \mid g(x) \neq 0\}$	$(-\infty, \infty)$	$\{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$\{x \mid g(x) \geq 0\}$	$[0, \infty)$	$\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$	$[0, \infty)$

Table: Domain dan Range beberapa fungsi

Domain dan Range

Latihan

(1) Jika $f(t) = \begin{cases} 2t+1, & t \geq 0 \\ t^2-1, & t < 0 \end{cases}$, tentukan $f(x^2)$

(2) Tulislah dalam fungsi sepotong-sepotong $f(x) = |4 + |x-1||$

(3) Tentukan domain dan range dari fungsi $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$

Operasi pada Fungsi

Definisi 3

Misalkan f dan g adalah dua fungsi. Operasi-operasi pada fungsi adalah sebagai berikut

(1) *Penjumlahan:* $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

(2) *Pengurangan:* $(f-g)(x) = f(x) - g(x)$

(3) *Perkalian:* $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

(4) *Pembagian:* $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

Kemudian untuk domain dari fungsi hasil operasi adalah

$$\mathcal{D}(f \pm g) = \mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$$

Sedangkan untuk kasus pembagian harus memenuhi $g(x) \neq 0$, sehingga

$$\mathcal{D}\left(f/g\right) = \left(\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)\right) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

Operasi pada Fungsi

Definisi 4

Komposisi fungsi f dan g adalah fungsi baru yang didefinisikan sebagai

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Domain dari fungsi komposisi adalah

$$\mathcal{D}(f \circ g) = \{x \in \mathcal{D}(g) \mid g(x) \in \mathcal{D}(f)\}$$

Latihan

(1) Domain dari fungsi $f(x) = \dfrac{1}{x} + \sqrt{4 - x^2}$ adalah

(2) Jika $f(g(x)) = x^2 + 1$ dan $f(x) = \sqrt{x - 1}$, tentukan $g(x)$

(3) Tentukan domain dari $g \circ f$ jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ dan $g(x) = \dfrac{2}{x - 3}$

Grafik Fungsi

Definisi 5

Grafik fungsi f *adalah himpunan semua titik* (x, y) *dalam koordinat kartesius yang memenuhi persamaan* $y = f(x)$.

Grafik Fungsi

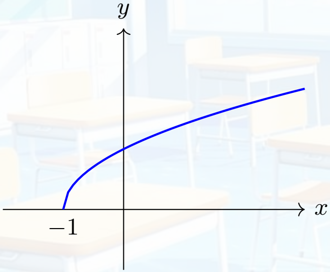
Definisi 5

Grafik fungsi f adalah himpunan semua titik (x, y) dalam koordinat kartesius yang memenuhi persamaan $y = f(x)$.

Teorema 1

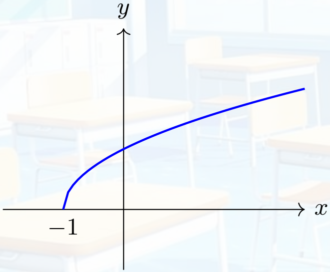
Misalkan $y = f(x)$ adalah fungsi real, maka grafik $f(-x)$ adalah refleksi terhadap sumbu y dari grafik $f(x)$ dan grafik $-f(x)$ adalah refleksi terhadap sumbu x dari grafik $f(x)$.

Kasus $f(x) \implies f(-x)$

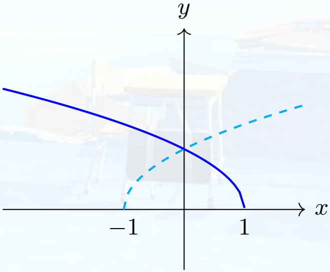


$$\boxed{y = \sqrt{x+1}}$$

Kasus $f(x) \implies f(-x)$



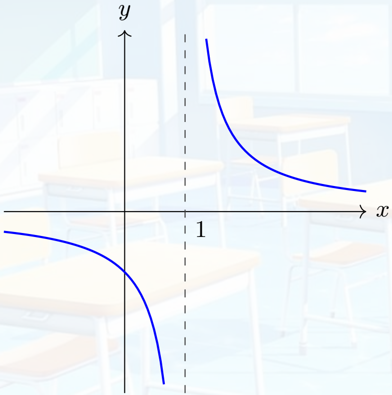
$\boxed{y = \sqrt{x+1}}$



$\boxed{y = \sqrt{-x+1}}$

Grafik Fungsi

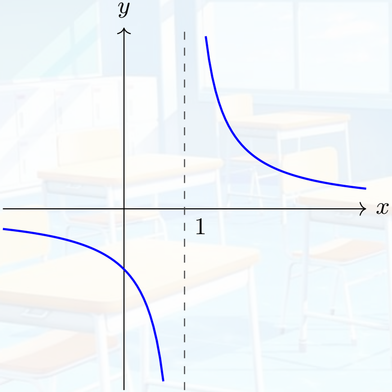
Kasus $f(x) \implies -f(x)$



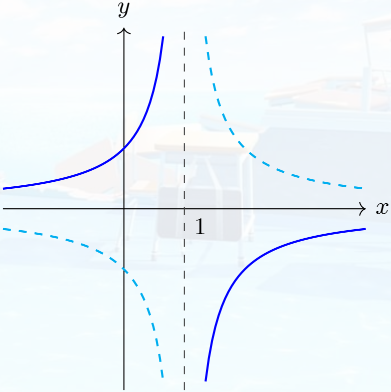
$$\boxed{y = \frac{1}{x-1}}$$

Grafik Fungsi

Kasus $f(x) \implies -f(x)$



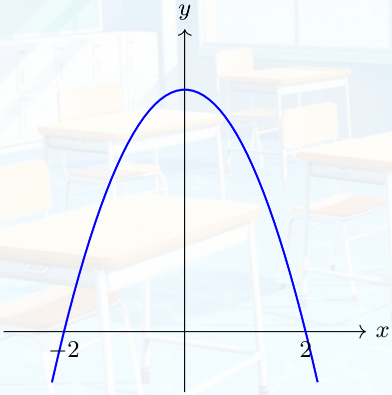
$$\boxed{y = \frac{1}{x-1}}$$



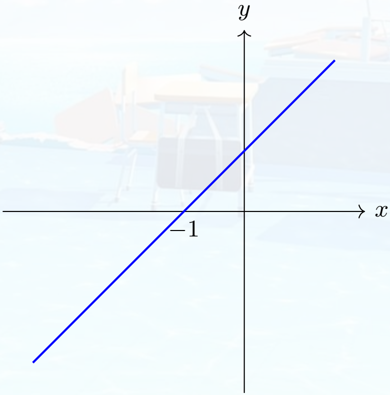
$$\boxed{y = \frac{1}{1-x}}$$

Grafik Fungsi

Gambarkan grafik fungsi $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \geq 1 \\ x + 1, & x < 1 \end{cases}$

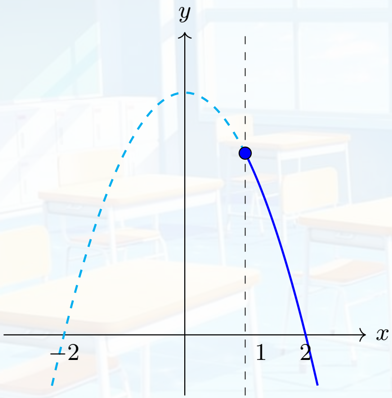


$\boxed{y = -x^2 + 4}$

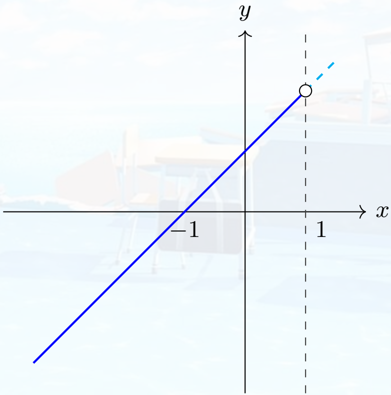


$\boxed{y = x + 1}$

Grafik Fungsi



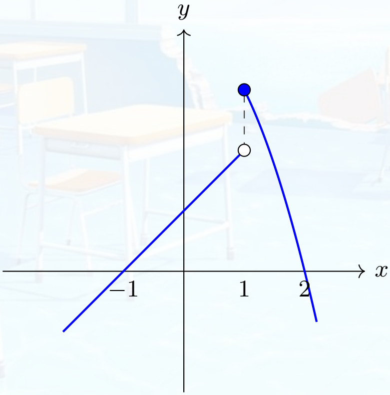
$$y = -x^2 + 4,\ x \geq 1$$



$$y = x + 1,\ x < 1$$

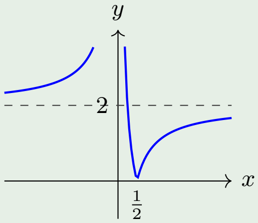
Grafik Fungsi

Jadi, grafik fungsi $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \geq 1 \\ x + 1, & x < 1 \end{cases}$ adalah



Latihan

(1) Tentukan persamaan dari grafik fungsi berikut



(2) Gambarkan fungsi $f(x) = |4 + |x - 1||$

Fungsi Invers

Teorema 2

Fungsi dikatakan mempunyai invers jika dan hanya jika fungsi tersebut bersifat satu-satu.

Teorema 3

Grafik fungsi invers adalah refleksi terhadap garis $y = x$ dari grafik fungsi aslinya.

Sifat-sifat

Sifat fungsi invers antara lain

(1) $f(f^{-1}(x)) = x$

(2) $f^{-1}(f(x)) = x$

(3) $(f^{-1})^{-1}(x) = f(x)$

Quest

(1) Tentukan domain dari $g \circ f$ jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$ dan $g(x) = \dfrac{x}{x+4}$

(2) Tentukan persamaan grafik fungsi berikut