

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2024/2025

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
 Hari, Tanggal : Kamis, 12 Desember 2024
 Waktu : 13.30-15.10 WIB (100 menit)
 Sifat : Tertutup
 Kelas : 34-46, 107, 108

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

**DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN**

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

EAS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

SOAL

- Diberikan kurva $y = \sqrt{x}$ untuk $0 \leq x \leq 3$. Dapatkan titik pada kurva yang memiliki jarak terdekat dengan titik $(2, 0)$.
- Diberikan fungsi $f(x) = \frac{x}{x - 2024}$.
 - Tentukan asimtot datar dan tegaknya (jika ada).
 - Tentukan selang dimana fungsi $f(x)$ naik atau turun.
 - Tentukan titik ekstrim relatif fungsi tersebut.
 - Tentukan selang kecekungan fungsi $f(x)$ dan titik belok (jika ada).
 - Sketsa grafiknya.
- Misalkan $F(x) = \int_{-1}^x \frac{1+t^3}{1+t^2} dt$. Dapatkan $F(-1)$, $F'(-1)$, dan $F''(-1)$.
- Nyatakan bilangan kompleks $z = \left(\frac{(1+i)^{12} (1+i\sqrt{3})^{16}}{(-1+i)^{32}} \right)$ dalam bentuk $z = a + bi$.
- Carilah nilai x_3 dari sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned}
 x_1 + 4x_3 + x_4 &= 11, \\
 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 12, \\
 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 20, \\
 4x_1 + 6x_3 + x_4 &= 24,
 \end{aligned}$$

dengan menggunakan metode Cramer.

Selamat Mengerjakan

SOLUSI

1. Pertama-tama dari soal kita tahu bahwa titik yang berada pada kurva memiliki koordinat (x, \sqrt{x}) . Kemudian jarak antara titik (x, \sqrt{x}) dengan titik $(2, 0)$ dapat didefinisikan dengan

$$D(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

Dapat dilihat bahwa $D(x)$ merupakan fungsi yang bergantung pada x dengan interval $0 \leq x \leq 3$. Untuk mencari nilai minimum dari $D(x)$, kita cari titik stasioner dari $D(x)$ dengan mencari turunan pertama dari $D(x)$, yaitu

$$D'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}} = 0 \implies x = \frac{3}{2}.$$

Karena kita bekerja pada interval yang terbatas, maka kita juga perlu mengecek nilai $D(x)$ pada titik-titik ujung interval, sehingga dapat dibandingkan nilainya pada tabel dibawah ini

x	0	$3/2$	3
$D(x)$	2	$7/4$	2

Sehingga titik yang memiliki jarak terdekat dengan titik $(2, 0)$ adalah ketika $x = 3/2$. Yang terakhir substitusikan nilai $x = 3/2$ ke dalam $y = \sqrt{x}$.

\therefore Titik yang memiliki jarak terdekat dengan titik $(2, 0)$ adalah $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

2. Kita dapat rubah fungsi $f(x)$ agar lebih sederhana saat diturunkan

$$f(x) = \frac{x}{x-2024} = \frac{(x-2024) + 2024}{x-2024} = 1 + \frac{2024}{x-2024}$$

- (a) Asimtot datar terjadi ketika $f(x)$ mendekati nilai konstan ketika x mendekati $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{2024}{x-2024} = 1$$

\therefore Asimtot datar terjadi pada $y = 1$.

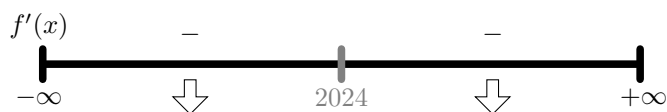
Asimtot tegak terjadi ketika $f(x)$ mendekati nilai tak hingga ketika x mendekati suatu nilai tertentu. Dalam hal ini, asimtot tegak terjadi ketika penyebut dari $f(x)$ adalah nol, yaitu ketika $x = 2024$.

- (b) Tinjau turunan pertama dari $f(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{2024}{x-2024} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x-2024+2024}{x-2024} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{2024}{x-2024} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2024}{x-2024} \right) = -\frac{2024}{(x-2024)^2} \end{aligned}$$

Karena $f'(x) \neq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, maka titik kritis dari $f(x)$ hanya terjadi ketika $x = 2024$. Uji titik:

- $x = 0 \implies f'(0) = -\frac{1}{2024} < 0$.
- $x = 2025 \implies f'(2025) = -2024 < 0$.



\therefore Fungsi $f(x)$ selalu turun pada selang $(-\infty, 2024) \cup (2024, +\infty)$.

- (c) Karena $f'(x)$ tidak akan pernah nol, maka fungsi $f(x)$ tidak memiliki titik ekstrim.

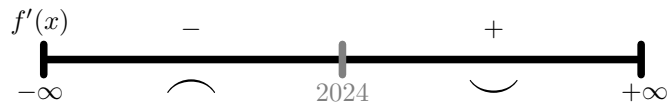
(d) Tinjau turunan kedua dari $f(x)$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{2024}{(x-2024)^2} \right) = \frac{4048}{(x-2024)^3}$$

Karena $f''(x) \neq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, maka fungsi $f(x)$ tidak memiliki titik belok.

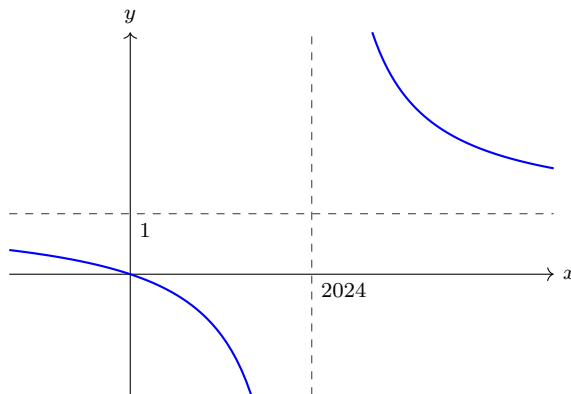
Uji titik:

- $x = 0 \implies f''(0) = -\frac{2}{2024^2} < 0$.
- $x = 2025 \implies f''(2025) = 4048 > 0$.



\therefore Fungsi $f(x)$ cekung ke bawah pada selang $(-\infty, 2024)$ dan cekung ke atas pada selang $(2024, +\infty)$.

(e) Dapat kita sketsa menggunakan informasi pergeseran grafik dari $f(x) = \frac{1}{x}$. (2024 satuan ke kanan dan 1 satuan ke atas)



3. Untuk $F(-1)$, dapat dilihat karena nilai batas bawah dan batas atas sama, maka nilai integralnya adalah nol.

$$F(-1) = \int_{-1}^{-1} \frac{1+t^3}{1+t^2} dt = 0$$

Selanjutnya untuk $F'(-1)$, dapat kita gunakan Teorema Fundamental Kalkulus II untuk mencari turunan dari $F(x)$.

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{-1}^x \frac{1+t^3}{1+t^2} dt \right) = \frac{1+x^3}{1+x^2}$$

$$F'(-1) = \frac{1+(-1)^3}{1+(-1)^2} = 0$$

Terakhir untuk $F''(-1)$, kita turunkan $F'(x)$.

$$F''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1+x^3}{1+x^2} \right) = \frac{3x^2(1+x^2) - 2x(1+x^3)}{(1+x^2)^2}$$

$$F''(-1) = \frac{3(-1)^2(1+(-1)^2) - 2(-1)(1+(-1)^3)}{(1+(-1)^2)^2} = \frac{3(2) - 0}{4} = \frac{3}{2}$$

4. Agar lebih mudah dihitung, jadikan ketiga masing-masing bilangan kompleks diatas menjadi bentuk polar.

- Untuk $1+i$, didapatkan $a = 1$ dan $b = 1$ sehingga $r = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ dan $\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ (Kuadran I).¹

¹Boleh dijadikan dalam bentuk derajat

- Untuk $1 + i\sqrt{3}$, didapatkan $a = 1$ dan $b = \sqrt{3}$ sehingga $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ dan $\theta = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ (Kuadran I).
- Untuk $-1 + i$, didapatkan $a = -1$ dan $b = 1$ sehingga $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ dan $\theta = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4}$ (Kuadran II).

Jadi bentuk polar dari z adalah

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{(1+i)^{12} (1+i\sqrt{3})^{16}}{(-1+i)^{32}} \right) = \frac{\left[\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right]^{12} \left[2 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right]^{16}}{\left[\sqrt{2} \operatorname{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right]^{32}} = \frac{\left[2^6 \operatorname{cis} (3\pi) \right] \left[2^{16} \operatorname{cis} \left(\frac{16\pi}{3} \right) \right]}{2^{16} \operatorname{cis} (24\pi)} \\ &= \frac{\left[2^6 \operatorname{cis} (\pi) \right] \left[\operatorname{cis} \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right]}{\operatorname{cis} (0)} = 2^6 \operatorname{cis} \left(\pi + \frac{4\pi}{3} - 0 \right) = 2^6 \operatorname{cis} \left(\frac{7\pi}{3} \right) = 2^6 \operatorname{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right) \\ &= 64 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) = 64 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \boxed{32 + 32\sqrt{3}i} \end{aligned}$$

5. Metode Cramer secara umum untuk mencari nilai x_n dapat dirumuskan sebagai

$$x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dengan A_n adalah matriks yang diperoleh dari matriks A yang kolom ke- n -nya diganti dengan vektor kolom b . (Dalam hal ini $n = 3$)

SPL diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}}_b$$

Kemudian kita tulis matriks A_3 dengan mengganti kolom ke-3 dari matriks A dengan vektor kolom b .

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 1 \\ 2 & 0 & 12 & 2 \\ 5 & 1 & 20 & 1 \\ 4 & 0 & 24 & 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya kita hitung nilai determinan dari matriks A dan A_3 . Ada banyak metode untuk menghitung determinan, seperti OBE, ekspansi kofaktor, dsb. Disini saya akan menggunakan metode ekspansi kofaktor dan OBE.²

- Untuk $\det(A)$, pertama akan kita ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua karena memiliki banyak nol.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -0... + 0... - (1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 0... = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

²OBE dan ekspansi kofaktor memang bisa di-*combine* untuk mempercepat perhitungan

Untuk matrix 3×3 kita bisa menggunakan aturan Sarrus, namun disini saya akan menggunakan OBE yaitu $B_2 - 2B_1$ dan $B_3 - 4B_1$.³

$$-\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} = -[(-5)(-3) - (-10)0] = -15$$

- Untuk $\det(A_3)$, dengan langkah yang sama kita ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 11 & 1 \\ 2 & 0 & 12 & 2 \\ 5 & 1 & 20 & 1 \\ 4 & 0 & 24 & 1 \end{vmatrix} = -0... + 0... - (1) \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix} + 0... = -\begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix}$$

Dan kita gunakan OBE yang sama yaitu $B_2 - 2B_1$ dan $B_3 - 4B_1$.

$$-\begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ -20 & -3 \end{vmatrix} = -[(-10)(-3) - (-20)0] = -30$$

Terakhir kita gunakan rumus Cramer untuk mencari nilai x_3 .

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-30}{-15} = 2$$

³OBE tipe ini tidak mengubah nilai determinan matriks awal