

Limit dan Kekontinuan

Teosofi Hidayah Agung

Departemen Matematika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

19 September 2024



Daftar isi

- 1 Notasi Limit
- 2 Perhitungan Limit
- 3 Limit di Tak-Hingga
- 4 Kekontinuan

Definisi 1

Notasi limit yang biasanya dibaca “limit $f(x)$ saat x **mendekati** a adalah L ” dituliskan sebagai

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

Artinya jika kita mengambil nilai x yang sangat dekat dengan a , maka $f(x)$ akan sangat dekat dengan L .

Definisi 1

Notasi limit yang biasanya dibaca “limit $f(x)$ saat x **mendekati** a adalah L ” dituliskan sebagai

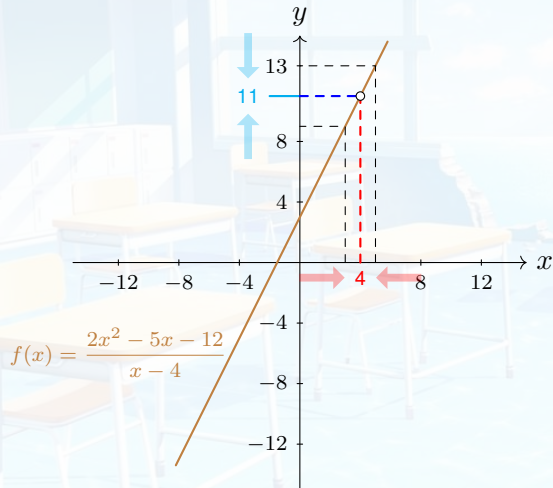
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

Artinya jika kita mengambil nilai x yang sangat dekat dengan a , maka $f(x)$ akan sangat dekat dengan L .

Catatan

- Kata “mendekati” jangan disamakan dengan “menuju”.
- Nilai $f(a)$ tidak harus sama dengan L atau bahkan $f(a)$ tidak terdefinisi.
- Nilai $f(x)$ untuk $x = a$ tidak mempengaruhi nilai limit.

Notasi Limit



x	$f(x)$
3.9	10.8
3.99	10.98
3.999	10.998
\vdots	\vdots
4	11
\vdots	\vdots
4.001	11.002
4.01	11.02
4.1	11.2

Nilai input mendekati 4 dari kiri.

Nilai output mendekati 11 dari kiri.

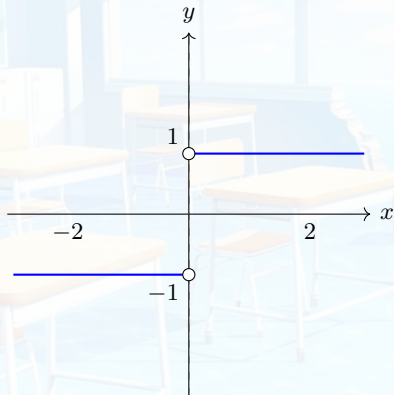
Nilai input mendekati 4 dari kanan.

Nilai output mendekati 11 dari kanan.

Figure: Limit secara numerik

Notasi Limit

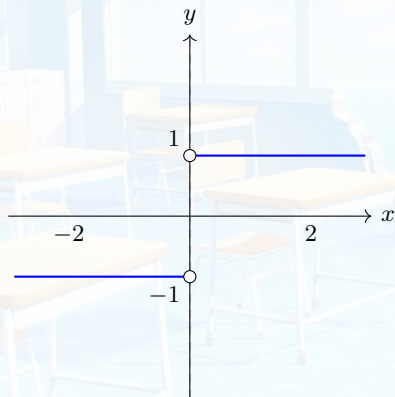
Dalam kasus $f(x) = \frac{|x|}{x}$, fungsi ini tidak memiliki limit saat x mendekati 0. Mengapa?



$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Notasi Limit

Dalam kasus $f(x) = \frac{|x|}{x}$, fungsi ini tidak memiliki limit saat x mendekati 0. Mengapa?



$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Fungsi $f(x) = \frac{|x|}{x}$ tidak memiliki limit saat x mendekati 0 karena nilai limit dari kiri (-1) tidak sama dengan nilai limit dari kanan (1).

Daftar isi

- 1 Notasi Limit
- 2 Perhitungan Limit
- 3 Limit di Tak-Hingga
- 4 Kekontinuan

Teorema 1

Misalkan f dan g adalah dua fungsi dengan $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ dan $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, maka

① $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$

② $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = L - M$

③ $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$

④ Jika $M \neq 0$, maka $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

⑤ $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}$, dengan n bilangan bulat positif

Contoh

- $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6x^2 - x - 1}{2x - 1} = \frac{5}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{12 - x} - 3}{x - 3} = -\frac{1}{6}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

Definisi 2

Domain fungsi f adalah himpunan semua nilai x yang memenuhi $f(x)$ didefinisikan. Notasi domain fungsi f adalah

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ terdefinisi}\}$$

Range fungsi f adalah himpunan semua nilai $f(x)$ yang mungkin diperoleh saat x berjalan di domain fungsi f . Notasi range fungsi f adalah

$$\mathcal{R}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}(f)\}$$

Perhitungan Limit

Fungsi	Domain		Range	
	Himpunan	Interval	Himpunan	Interval
$f(x) = ax + b$	\mathbb{R}	$(-\infty, \infty)$	\mathbb{R}	$(-\infty, \infty)$
$f(x) = a(x - p)^2 + q$	\mathbb{R}	$(-\infty, \infty)$	$\{f(x) \mid f(x) \geq q\}$	$[q, \infty)$
$f(x) = \frac{1}{g(x)}$	$\{x \mid g(x) \neq 0\}$	$(-\infty, \infty)$	$\{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$\{x \mid g(x) \geq 0\}$	$[0, \infty)$	$\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$	$[0, \infty)$

Table: Domain dan Range beberapa fungsi

Latihan

- 1 Jika $f(t) = \begin{cases} 2t + 1, & t \geq 0 \\ t^2 - 1, & t < 0 \end{cases}$, tentukan $f(x^2)$
- 2 Tulislah dalam fungsi sepotong-sepotong $f(x) = |4 + |x - 1||$
- 3 Tentukan domain dan range dari fungsi $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

Daftar isi

- 
- 1 Notasi Limit
 - 2 Perhitungan Limit
 - 3 Limit di Tak-Hingga
 - 4 Kekontinuan

Definisi 3

Misalkan f dan g adalah dua fungsi. Operasi-operasi pada fungsi adalah sebagai berikut

① Penjumlahan: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

② Pengurangan: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

③ Perkalian: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

④ Pembagian: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Kemudian untuk domain dari fungsi hasil operasi adalah

$$\mathcal{D}(f \pm g) = \mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$$

Sedangkan untuk kasus pembagian harus memenuhi $g(x) \neq 0$, sehingga

$$\mathcal{D}(f/g) = (\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

Definisi 4

Komposisi fungsi f dan g adalah fungsi baru yang didefinisikan sebagai

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Domain dari fungsi komposisi adalah

$$\mathcal{D}(f \circ g) = \{x \in \mathcal{D}(g) \mid g(x) \in \mathcal{D}(f)\}$$

Latihan

- 1 Domain dari fungsi $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{4 - x^2}$ adalah
- 2 Jika $f(g(x)) = x^2 + 1$ dan $f(x) = \sqrt{x - 1}$, tentukan $g(x)$
- 3 Tentukan domain dari $g \circ f$ jika $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$ dan $g(x) = \frac{2}{x - 3}$

Daftar isi

- 
- 1 Notasi Limit
 - 2 Perhitungan Limit
 - 3 Limit di Tak-Hingga
 - 4 **Kekontinuan**

Definisi 5

Grafik fungsi f adalah himpunan semua titik (x, y) dalam koordinat kartesius yang memenuhi persamaan $y = f(x)$.

Definisi 5

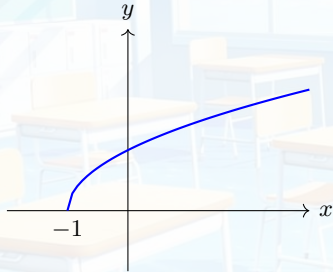
Grafik fungsi f adalah himpunan semua titik (x, y) dalam koordinat kartesius yang memenuhi persamaan $y = f(x)$.

Teorema 2

Misalkan $y = f(x)$ adalah fungsi real, maka grafik $f(-x)$ adalah refleksi terhadap sumbu y dari grafik $f(x)$ dan grafik $-f(x)$ adalah refleksi terhadap sumbu x dari grafik $f(x)$.

Kekontinuan

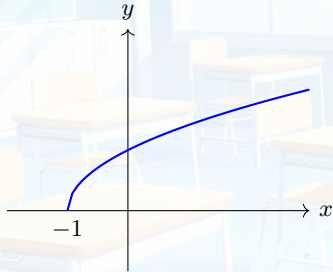
Kasus $f(x) \implies f(-x)$



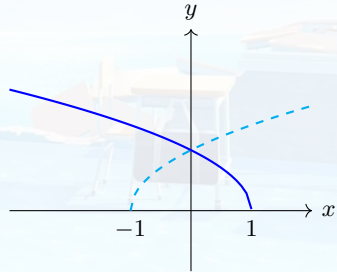
$$y = \sqrt{x+1}$$

Kekontinuan

Kasus $f(x) \implies f(-x)$



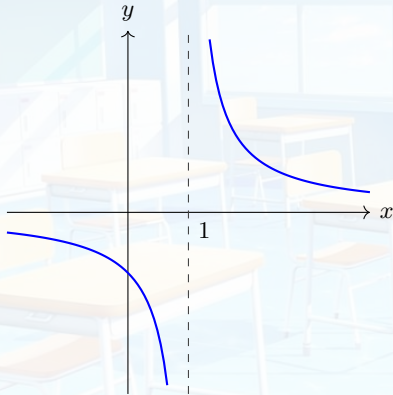
$$y = \sqrt{x + 1}$$



$$y = \sqrt{-x + 1}$$

Kekontinuan

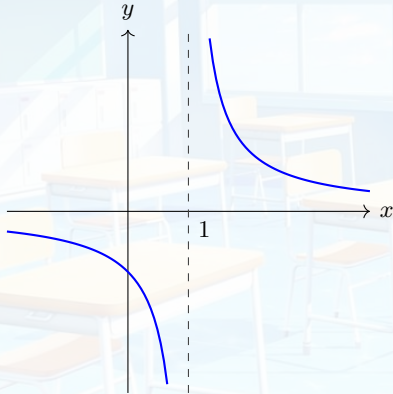
Kasus $f(x) \implies -f(x)$



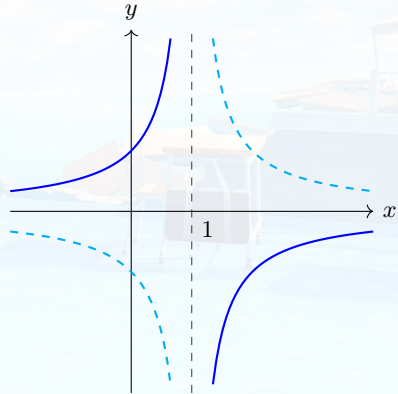
$$y = \frac{1}{x-1}$$

Kekontinuan

Kasus $f(x) \implies -f(x)$



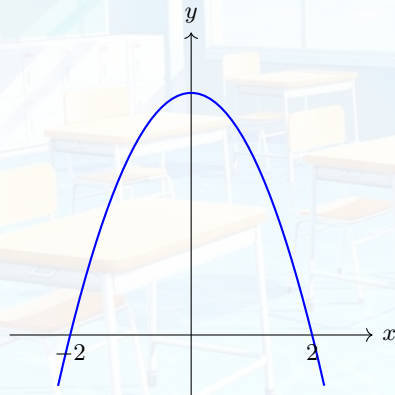
$$y = \frac{1}{x-1}$$



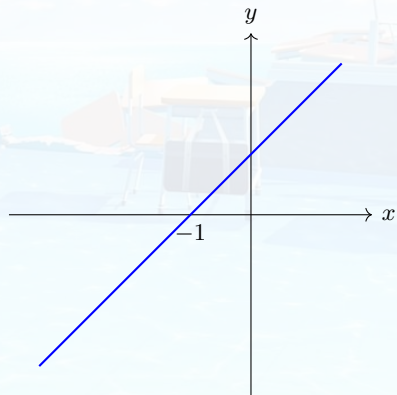
$$y = \frac{1}{1-x}$$

Kekontinuan

Gambarkan grafik fungsi $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \geq 1 \\ x + 1, & x < 1 \end{cases}$

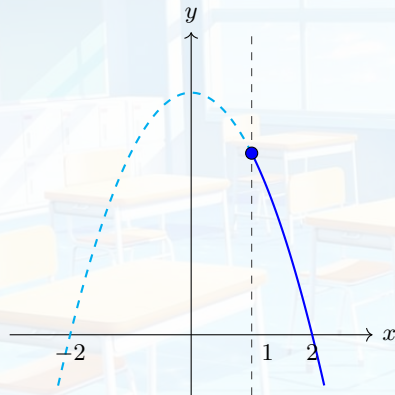


$$y = -x^2 + 4$$

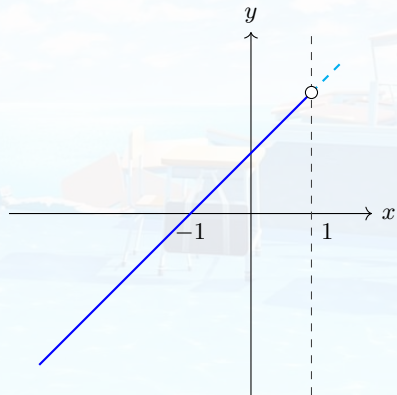


$$y = x + 1$$

Kekontinuan



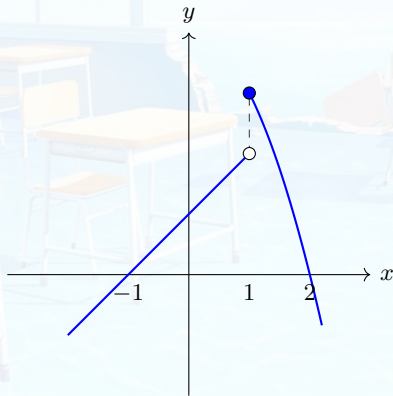
$$y = -x^2 + 4, x \geq 1$$



$$y = x + 1, x < 1$$

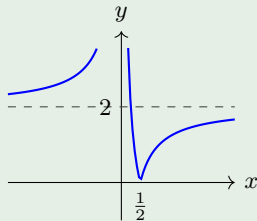
Kekontinuan

Jadi, grafik fungsi $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \geq 1 \\ x + 1, & x < 1 \end{cases}$ adalah



Latihan

- 1 Tentukan persamaan dari grafik fungsi berikut



- 2 Gambarkan fungsi $f(x) = |4 + |x - 1||$