

# Limit dan Kekontinuan

Teosofi Hidayah Agung

Departemen Matematika  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

19 September 2024



# Daftar isi

- 1 Notasi Limit
- 2 Perhitungan Limit
- 3 Limit di Tak-Hingga
- 4 Kekontinuan

## Definisi 1

Notasi limit yang biasanya dibaca “limit  $f(x)$  saat  $x$  **mendekati**  $a$  adalah  $L$ ” dituliskan sebagai

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

Artinya jika kita mengambil nilai  $x$  yang sangat dekat dengan  $a$ , maka  $f(x)$  akan sangat dekat dengan  $L$ .

## Definisi 1

Notasi limit yang biasanya dibaca “limit  $f(x)$  saat  $x$  **mendekati**  $a$  adalah  $L$ ” dituliskan sebagai

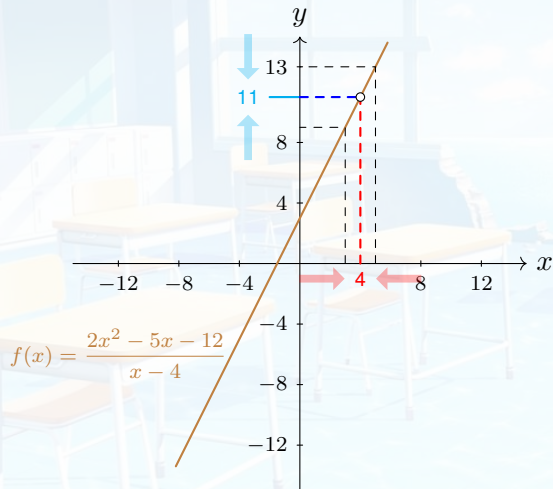
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L,$$

Artinya jika kita mengambil nilai  $x$  yang sangat dekat dengan  $a$ , maka  $f(x)$  akan sangat dekat dengan  $L$ .

## Catatan

- Kata “mendekati” jangan disamakan dengan “menuju”.
- Nilai  $f(a)$  tidak harus sama dengan  $L$  atau bahkan  $f(a)$  tidak terdefinisi.
- Nilai  $f(x)$  untuk  $x = a$  tidak mempengaruhi nilai limit.

# Notasi Limit



$x$	$f(x)$
3.9	10.8
3.99	10.98
3.999	10.998
$\vdots$	$\vdots$
4	11
$\vdots$	$\vdots$
4.001	11.002
4.01	11.02
4.1	11.2

Nilai input mendekati 4 dari kiri.

Nilai output mendekati 11 dari kiri.

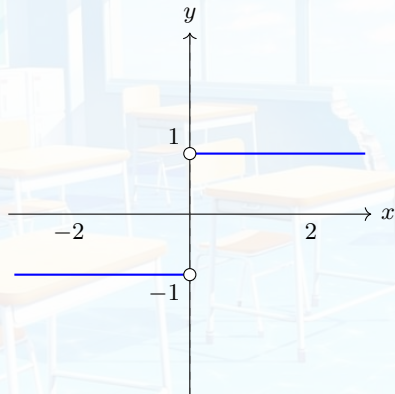
Nilai input mendekati 4 dari kanan.

Nilai output mendekati 11 dari kanan.

Figure: Limit secara numerik

# Notasi Limit

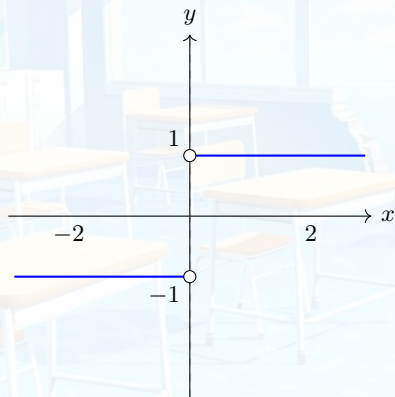
Dalam kasus  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ , fungsi ini tidak memiliki limit saat  $x$  mendekati 0. Mengapa?



$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

# Notasi Limit

Dalam kasus  $f(x) = \frac{|x|}{x}$ , fungsi ini tidak memiliki limit saat  $x$  mendekati 0. Mengapa?



$$f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Fungsi  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  tidak memiliki limit saat  $x$  mendekati 0 karena nilai limit dari kiri ( $-1$ ) tidak sama dengan nilai limit dari kanan ( $1$ ).

# Daftar isi

- 
- 1 Notasi Limit
  - 2 Perhitungan Limit
  - 3 Limit di Tak-Hingga
  - 4 Kekontinuan



## Contoh

- $\lim_{x \rightarrow 2} x = 2$
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{6x^2 - x - 1}{2x - 1} = \frac{5}{2}$
- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{12 - x} - 3}{x - 3} = -\frac{1}{6}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

## Definisi 2

*Domain fungsi  $f$  adalah himpunan semua nilai  $x$  yang memenuhi  $f(x)$  didefinisikan. Notasi domain fungsi  $f$  adalah*

$$\mathcal{D}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \text{ terdefinisi}\}$$

*Range fungsi  $f$  adalah himpunan semua nilai  $f(x)$  yang mungkin diperoleh saat  $x$  berjalan di domain fungsi  $f$ . Notasi range fungsi  $f$  adalah*

$$\mathcal{R}(f) = \{f(x) \mid x \in \mathcal{D}(f)\}$$

# Perhitungan Limit


Fungsi	Domain		Range	
	Himpunan	Interval	Himpunan	Interval
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$
$f(x) = a(x - p)^2 + q$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty)$	$\{f(x) \mid f(x) \geq q\}$	$[q, \infty)$
$f(x) = \frac{1}{g(x)}$	$\{x \mid g(x) \neq 0\}$	$(-\infty, \infty)$	$\{f(x) \mid f(x) \neq 0\}$	$(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$\{x \mid g(x) \geq 0\}$	$[0, \infty)$	$\{f(x) \mid f(x) \geq 0\}$	$[0, \infty)$

Table: Domain dan Range beberapa fungsi

## Latihan

- 1 Jika  $f(t) = \begin{cases} 2t + 1, & t \geq 0 \\ t^2 - 1, & t < 0 \end{cases}$ , tentukan  $f(x^2)$
- 2 Tulislah dalam fungsi sepotong-sepotong  $f(x) = |4 + |x - 1||$
- 3 Tentukan domain dan range dari fungsi  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$

# Daftar isi

- 
- 1 Notasi Limit
  - 2 Perhitungan Limit
  - 3 Limit di Tak-Hingga
  - 4 Kekontinuan

## Definisi 3

Misalkan  $f$  dan  $g$  adalah dua fungsi. Operasi-operasi pada fungsi adalah sebagai berikut

① Penjumlahan:  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

② Pengurangan:  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

③ Perkalian:  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

④ Pembagian:  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

Kemudian untuk domain dari fungsi hasil operasi adalah

$$\mathcal{D}(f \pm g) = \mathcal{D}(f \cdot g) = \mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)$$

Sedangkan untuk kasus pembagian harus memenuhi  $g(x) \neq 0$ , sehingga

$$\mathcal{D}(f/g) = (\mathcal{D}(f) \cap \mathcal{D}(g)) - \{x \mid g(x) = 0\}$$

## Definisi 4

*Komposisi fungsi  $f$  dan  $g$  adalah fungsi baru yang didefinisikan sebagai*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

*Domain dari fungsi komposisi adalah*

$$\mathcal{D}(f \circ g) = \{x \in \mathcal{D}(g) \mid g(x) \in \mathcal{D}(f)\}$$

## Latihan

- 1 Domain dari fungsi  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{4 - x^2}$  adalah
- 2 Jika  $f(g(x)) = x^2 + 1$  dan  $f(x) = \sqrt{x - 1}$ , tentukan  $g(x)$
- 3 Tentukan domain dari  $g \circ f$  jika  $f(x) = \sqrt{x^2 - 9}$  dan  $g(x) = \frac{2}{x - 3}$



# Daftar isi

- 
- 1 Notasi Limit
  - 2 Perhitungan Limit
  - 3 Limit di Tak-Hingga
  - 4 **Kekontinuan**

## Definisi 5

*Grafik fungsi  $f$  adalah himpunan semua titik  $(x, y)$  dalam koordinat kartesius yang memenuhi persamaan  $y = f(x)$ .*

## Definisi 5

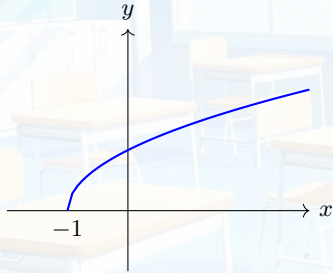
*Grafik fungsi  $f$  adalah himpunan semua titik  $(x, y)$  dalam koordinat kartesius yang memenuhi persamaan  $y = f(x)$ .*

## Teorema 1

*Misalkan  $y = f(x)$  adalah fungsi real, maka grafik  $f(-x)$  adalah refleksi terhadap sumbu  $y$  dari grafik  $f(x)$  dan grafik  $-f(x)$  adalah refleksi terhadap sumbu  $x$  dari grafik  $f(x)$ .*

# Kekontinuan

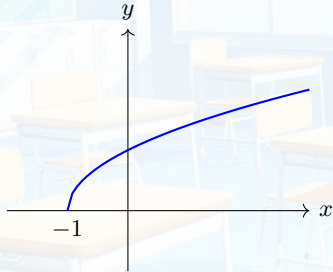
Kasus  $f(x) \implies f(-x)$



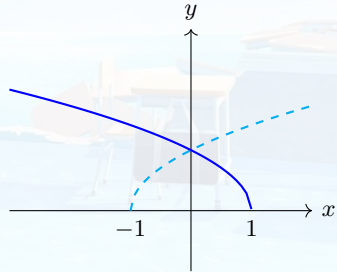
$$y = \sqrt{x + 1}$$

# Kekontinuan

Kasus  $f(x) \implies f(-x)$



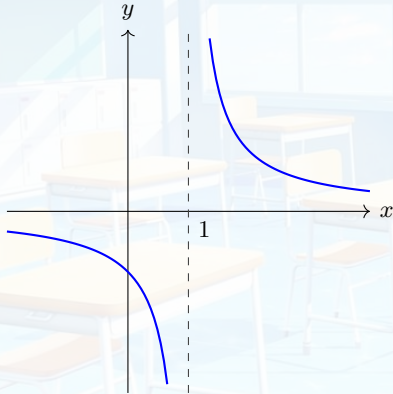
$$y = \sqrt{x + 1}$$



$$y = \sqrt{-x + 1}$$

# Kekontinuan

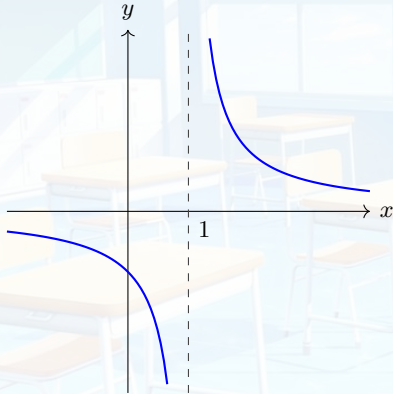
Kasus  $f(x) \Rightarrow -f(x)$



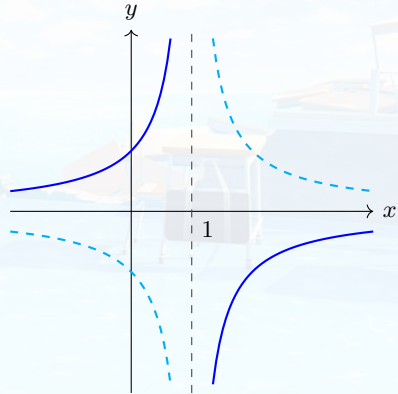
$$y = \frac{1}{x-1}$$

# Kekontinuan

Kasus  $f(x) \implies -f(x)$



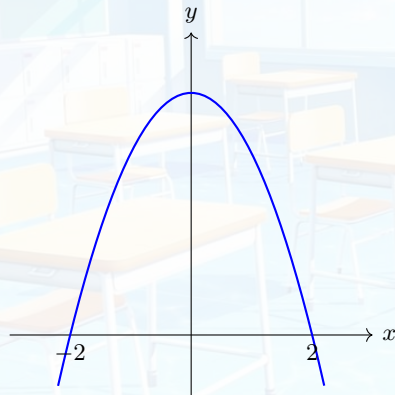
$$y = \frac{1}{x-1}$$



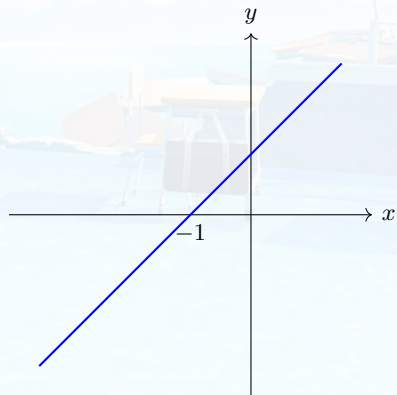
$$y = \frac{1}{1-x}$$

# Kekontinuan

Gambarkan grafik fungsi  $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \geq 1 \\ x + 1, & x < 1 \end{cases}$



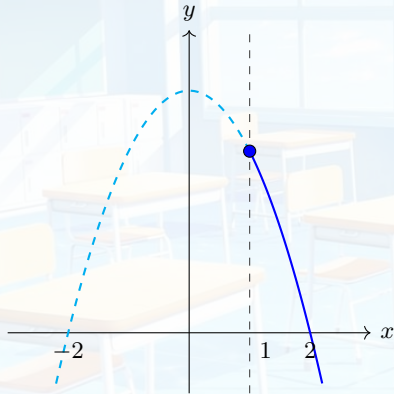
$$y = -x^2 + 4$$



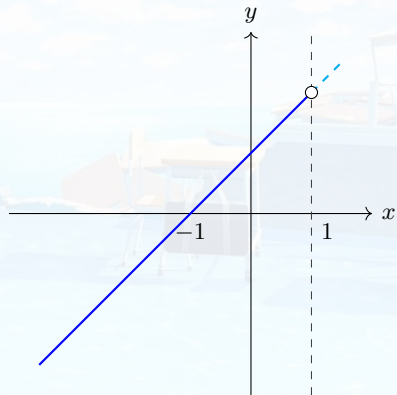
$$y = x + 1$$



# Kekontinuan



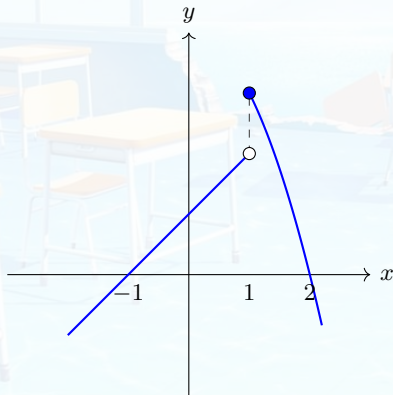
$$y = -x^2 + 4, x \geq 1$$



$$y = x + 1, x < 1$$

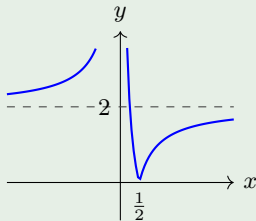
# Kekontinuan

Jadi, grafik fungsi  $y = f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4, & x \geq 1 \\ x + 1, & x < 1 \end{cases}$  adalah



## Latihan

- 1 Tentukan persamaan dari grafik fungsi berikut



- 2 Gambarkan fungsi  $f(x) = |4 + |x - 1||$