Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS

Hari, Tanggal : Kamis, 17 Oktober 2024 Waktu : 07.00-08.40 WIB (100 menit)

Sifat : Tertutup Kelas : 5-12, 101

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta menssketsa grafik persamaan	1	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	2	20
		3	20
		4	20
		5	20

SOAL

1. Dapatkan himpunan penyelesaian dari

$$\frac{1}{x+2} < \frac{1}{4-x}.$$

- 2. Diberikan $f(x) = x^2 + 2$, $x \ge 0$ dan $g(x) = \sqrt{x-3}$.
 - (a) Dapatkan domain f(x) dan g(x).
 - (b) Dapatkan $(g \circ f)(x)$ dan domain $(g \circ f)(x)$.
- 3. Diketahui $f(x) = x^3 2$.
 - (a) Dapatkan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.
 - (b) Sketsa grafik dari f(x) dan $f^{-1}(x)$ pada satu bidang koordinat.
- 4. Hitunglah $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{5x^2 2}}{x + 3}$.
- 5. Dapatkan persamaan garis singgung kurva $xy^2 + y + \sqrt{x} = x + 3$ di titik (4,1).

1. Pidahkan semua ruas ke kiri

$$\frac{1}{x+2} - \frac{1}{4-x} < 0$$

$$\iff \frac{4-x-(x+2)}{(x+2)(4-x)} < 0$$

$$\iff \frac{2-2x}{(x+2)(4-x)} < 0$$

$$\iff \frac{1-x}{(x+2)(4-x)} < 0$$

Diperoleh pembuat nol-nya adalah x = 1, -2, 4. Selanjutnya gunakan uji tanda, didapatkan

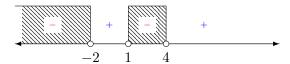
•
$$x = -3 \implies \frac{1 - (-3)}{(-3 + 2)(4 - (-3))} = \frac{4}{-7} < 0$$

•
$$x = 0 \implies \frac{1-0}{(0+2)(4-0)} = \frac{1}{8} > 0$$

•
$$x = 2 \implies \frac{(0+2)(4-6)}{(2+2)(4-2)} = \frac{-1}{8} < 0$$

•
$$x = 5 \implies \frac{1-5}{(5+2)(4-5)} = \frac{-4}{-7} > 0$$

Kemudian gambarkan garis bilangan sebagai berikut



Sehingga diperoleh himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut adalah

$$H_p = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \lor 1 \ge x < 4\} = (-\infty, -2) \cup (1, 4).$$

- 2. (a) Karena polinomial selalu terdefinisi di \mathbb{R} , maka domain f adalah $\mathcal{D}_f = [0, \infty)$ (karena dibatasi untuk $x \geq 0$). Sedangkan untuk $g(x) = \sqrt{x-3}$, agar terdefinisi maka $x-3 \geq 0 \implies x \geq 3$. Dengan demikian, domain dari g adalah $\mathcal{D}_g = [3, \infty)$.
 - (b)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2) = \sqrt{(x^2 + 2) - 3} = \sqrt{x^2 - 1}$$

Menurut definisi domain komposisi fungsi, maka

$$\mathcal{D}_{g \circ f} = \{ x \in \mathcal{D}_f \, | \, f(x) \in \mathcal{D}_g \}$$

$$= \{ x \in [0, \infty) \, | \, x^2 + 2 \in [3, \infty) \}$$

$$= \{ x \in [0, \infty) \, | \, x^2 + 2 \ge 3 \}$$

$$= \{ x \in [0, \infty) \, | \, x^2 - 1 \ge 0 \}$$

$$= \{ x \in [0, \infty) \, | \, x \ge 1 \text{ atau } x \le -1 \}$$

$$= [1, \infty).$$

Jadi domain dari $(g \circ f)(x)$ adalah $\mathcal{D}_{g \circ f} = [1, \infty)$.

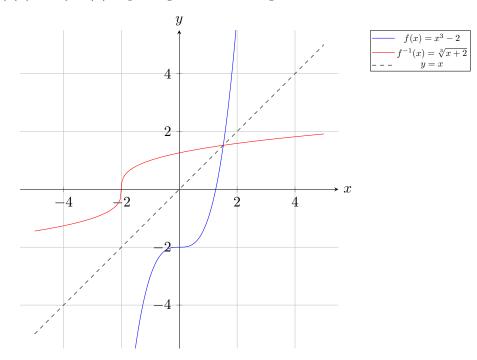
3. (a) Tukar y = f(x) menjadi x = f(y), sehingga

$$x = y^{3} - 2$$

 $y^{3} = x + 2$
 $y = \sqrt[3]{x + 2} \cdot f^{-1}(x)$ $= \sqrt[3]{x + 2} \cdot f^{-1}(x)$

Selanjutnya kita tahu bahwa $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = \mathbb{R}$ (karena fungsi kubik memiliki range semua bilangan real (\mathbb{R})).

(b) Grafik f(x) dan $f^{-1}(x)$ dapat digambarkan sebagai berikut



4. Bagi pembilang dan penyebut dengan |x| agar bentuknya menjadi

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 3} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{|x|}}{\frac{x + 3}{|x|}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{x + 3}{|x|}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{5 - \frac{2}{x^2}}}{\frac{x + 3}{|x|}}.$$

karena $x \to -\infty,$ maka |x| = -x. Sehingga

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{5 - \frac{2}{x^2}}}{\frac{x + 3}{|x|}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{5 - \frac{2}{x^2}}}{\frac{x + 3}{-x}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{5 - \frac{2}{x^2}}}{-1 - \frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{5 - 0}}{-1 - 0} = -\sqrt{5}.$$

5. Diketahu
i $xy^2+y+\sqrt{x}=x+3.$ Turunkan kedua ruas terhadap x,

$$\frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(3)$$

$$y^2 + x(2y\frac{dy}{dx}) + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1 + 0$$

$$y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = 1$$

$$(2xy + 1)\frac{dy}{dx} = 1 - y^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2xy + 1}.$$

Selanjutnya, kita substitusi titik (4,1) ke dalam turunan tersebut,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(4,1)} = \frac{1 - 1^2 - \frac{1}{2\sqrt{4}}}{2(4)(1) + 1} = \frac{0 - \frac{1}{4}}{8 + 1} = -\frac{\frac{1}{4}}{9} = -\frac{1}{36}.$$

Dengan demikian, gradien garis singgung di titik (4,1) adalah $m=-\frac{1}{36}$. Gunakan persamaan garis

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

dengan $(x_1, y_1) = (4, 1)$, sehingga diperoleh

$$y - 1 = -\frac{1}{36}(x - 4)$$

$$y = -\frac{1}{36}x + \frac{4}{36} + 1$$

$$y = -\frac{1}{36}x + \frac{40}{36}$$

$$y = -\frac{1}{36}x + \frac{10}{9}.$$

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS

Hari, Tanggal : Kamis, 17 Oktober 2024 Waktu : 07.00-08.40 WIB (100 menit)

Sifat : Tertutup Kelas : 13-19, 103

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	СРМК	SOAL	BOBOT (%)
	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta menssketsa grafik persamaan	1	20
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	2	20
		3	20
		4	20
		5	20

SOAL

- 1. Diberikan titik A(2,-1), B(2,2) dan C(0,4). Dapatkan persamaan garis yang melalui titik A dan sejajar dengan garis yang melalui B dan C.
- 2. Diberikan $f(x) = \frac{1}{x^2 4}$ dan $g(x) = \sqrt{x + 1}$.
 - (a) Dapatkan domain f(x) dan g(x).
 - (b) Dapatkan $(f \circ g)(x)$ dan domain $(f \circ g)(x)$.
- 3. Diberikan $f(x) = x^2 4x + 7$.
 - (a) Tentukan domain dari f sehingga f^{-1} ada.
 - (b) Dapatkan f^{-1} beserta domainnya.
- 4. Dapatkan nilai k sedemikian sehingga fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - k, & x < 3\\ 3x - 3, & x \ge 3 \end{cases}$$

kontinu di x = 3.

5. Dapatkan f'(x) dimana $f(x) = \sqrt{\frac{(3x+1)^3}{2x}}$.

1. Hitung gradien garis BC dengan B(2,2) dan C(0,4),

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 2}{0 - 2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Karena garis yang melalui titik A sejajar dengan garis BC, maka gradiennya juga -1. Gunakan persamaan garis

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

dengan titik A adalah $(x_1, y_1) = (2, -1)$, sehingga diperoleh

$$y - (-1) = -1(x - 2)$$

 $y + 1 = -x + 2$
 $y = -x + 1$.

- 2. (a) Agar $f(x) = \frac{1}{x^2 4}$ terdefinisi, maka $x^2 4 \neq 0 \implies x^2 \neq 4 \implies x \neq \pm 2$. Dengan demikian, domain dari f adalah $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \lor x \neq 2\}$. Sedangkan untuk $g(x) = \sqrt{x+1}$, agar terdefinisi maka $x+1 \geq 0 \implies x \geq -1$. Dengan demikian, domain dari g adalah $\mathcal{D}_g = [-1, \infty)$.
 - (b)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{(\sqrt{x+1})^2 - 4} = \frac{1}{x+1-4} = \frac{1}{x-3}.$$

Menurut definisi domain komposisi fungsi, maka

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = \{ x \in \mathcal{D}_g \, | \, g(x) \in \mathcal{D}_f \}$$

$$= \{ x \in [-1, \infty) \, | \, \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} \}$$

$$= \{ x \ge -1 \, | \, \sqrt{x+1} \ne 2 \}$$

$$= \{ x \ge -1 \, | \, x+1 \ne 4 \}$$

$$= \{ x \ge -1 \, | \, x \ne 3 \}$$

$$= [-1, 3) \cup (3, \infty).$$

Jadi domain dari $(f \circ g)(x)$ adalah $\mathcal{D}_{f \circ g} = [-1, 3) \cup (3, \infty)$.

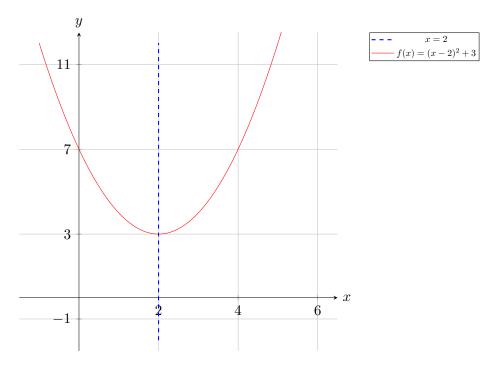
3. (a) Ubah ekspresi fungsi tersebut dalam bentuk seperti berikut:

$$f(x) = x^{2} - 4x + 7$$

$$f(x) = (x^{2} - 4x + 4) + 3$$

$$f(x) = (x - 2)^{2} + 3.$$

Selanjutnya kita akan coba gambarkan grafiknya dimana merupakan grafik $y=x^2$ yang digeser 2 satuan ke kanan dan 3 satuan ke atas.



dapat di analisis bahwa f(x) mempunya invers jika dibatasi pada sumbu simetri nya yaitu x=2. Sehingga domain f agar f^{-1} ada adalah $\mathcal{D}_f=[2,\infty)$ atau $\mathcal{D}_f=(-\infty,2]$.

(b) Tukar y = f(x) menjadi x = f(y), sehingga

$$x = y^{2} - 4y + 7$$

$$x - 7 = y^{2} - 4y$$

$$y^{2} - 4y = x - 7$$

$$y^{2} - 4y + 4 = x - 7 + 4$$

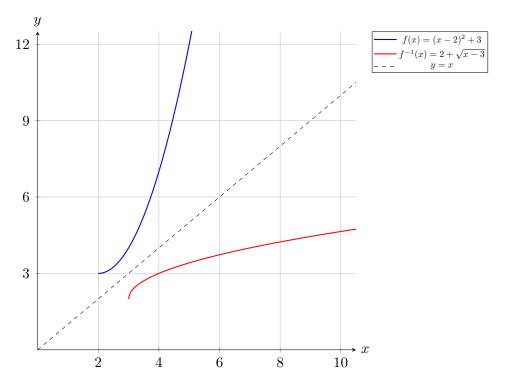
$$(y - 2)^{2} = x - 3$$

$$y - 2 = \pm \sqrt{x - 3}$$

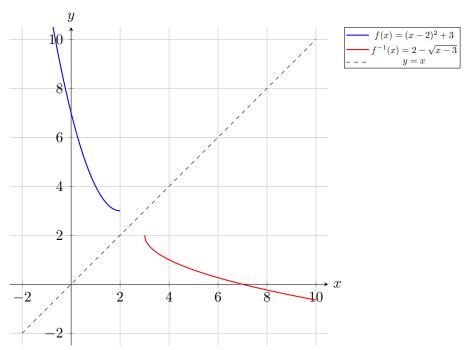
$$y = 2 \pm \sqrt{x - 3}$$

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 3} \text{ atau } f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x - 3}.$$

Selanjutnya kita tahu bahwa $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$. Jika kita ambil $\mathcal{D}_f = [2, \infty)$, maka $\mathcal{R}_f = [3, \infty)$ sehingga $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [3, \infty)$ dan $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 3}$. Grafik f(x) dan $f^{-1}(x)$ untuk $\mathcal{D}_f = [2, \infty)$ dan $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [3, \infty)$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Namun jika kita ambil $\mathcal{D}_f = (-\infty, 2]$, maka $\mathcal{R}_f = (-\infty, 3]$ sehingga $\mathcal{D}_{f^{-1}} = (-\infty, 3]$ dan $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x - 3}$. Grafik f(x) dan $f^{-1}(x)$ untuk $\mathcal{D}_f = (-\infty, 2]$ dan $\mathcal{D}_{f^{-1}} = (-\infty, 3]$ dapat digambarkan sebagai berikut:



- 4. Pada soal ini, kita cukup untuk menyamakan limit kiri dan limit kanan di x=3. Pada dasarnya kekontinuan di x=3 akan terpenuhi jika
 - f(3) terdefinisi,
 - $\lim_{x\to 3} f(x)$ ada,
 - $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

Kita tahu bahwa f(3) = 3(3) - 3 = 6, sehingga f(3) terdefinisi. Selanjutnya kita hitung limit kiri dan limit kanan di x = 3,

$$\lim_{x \to 3^{-}} f(x) = \lim_{x \to 3^{-}} (x^{2} - k) = 3^{2} - k = 9 - k,$$

$$\lim_{x \to 3^{+}} f(x) = \lim_{x \to 3^{+}} (3x - 3) = 3(3) - 3 = 6.$$

Agar limit kiri dan limit kanan sama, maka

$$9 - k = 6$$
$$k = 3$$

Dengan demikian, nilai k agar f(x) kontinu di x = 3 adalah k = 3.

5. Fungsi tersebut dapat kita sederhanakan bentuknya menjadi

$$f(x) = \sqrt{\frac{(3x+1)^3}{2x}} = \frac{(3x+1)^{3/2}}{(2x)^{1/2}} = \frac{(3x+1)^{3/2}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3x+1)^{3/2}x^{-1/2}.$$

Untuk turunannya dapat kita gunakan aturan perkalian dan aturan rantai,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{3}{2} (3x+1)^{1/2} \cdot 3 \cdot x^{-1/2} + (3x+1)^{3/2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) x^{-3/2} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{9}{2} (3x+1)^{1/2} x^{-1/2} - \frac{1}{2} (3x+1)^{3/2} x^{-3/2} \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[9(3x+1)^{1/2} x^{-1/2} - (3x+1)^{3/2} x^{-3/2} \right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (3x+1)^{1/2} x^{-3/2} [9x - (3x+1)]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} (3x+1)^{1/2} x^{-3/2} (6x-1).$$

Dengan demikian, turunan dari f(x) adalah

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3x+1}(6x-1)}{2x\sqrt{2x}}.$$

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS

Hari, Tanggal : Kamis, 17 Oktober 2024 Waktu : 11.00-12.40 WIB (100 menit)

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta menssketsa grafik persamaan	1	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	2	20
		3	20
		4	20
		5	20

SOAL

1. Dapatkan himpunan penyelesaian dari

$$-1 \le |2 - x| < 3.$$

- 2. Diberikan $f(x) = \sqrt{25 x^2}$ dan $g(x) = \frac{1}{x^2}$.
 - (a) Dapatkan domain f(x) dan g(x).
 - (b) Dapatkan $(g \circ f)(x)$ dan domain $(g \circ f)(x)$.
- 3. Diberikan $f(x) = \sqrt{4 x^2}$.
 - (a) Tentukan domain dari f(x) sehingga inversnya ada.
 - (b) Dapatkan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.
- 4. Diberikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}}, & x \neq 4, \\ 6, & x = 4, \end{cases}$$

selidiki kekontinuan f(x) di x = 4.

5. Dapatkan f''(x) dimana $f(x) = 2x + (2\sqrt{x} - 3)^{-2}$.

Solution	By:	Tetew
	<i>Dy</i> .	10000

1.

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS

Hari, Tanggal : Kamis, 17 Oktober 2024 Waktu : 13.30-15.10 WIB (100 menit)

Sifat : Tertutup Kelas : 34-46, 107, 108

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta menssketsa grafik persamaan	1	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	2	20
		3	20
		4	20
		5	20

SOAL

- 1. Diberikan titik A(1,1), B(4,2) dan C(2,6). Tentukan jarak dari titik C ke garis yang melalui titik A dan B.
- 2. Diberikan f(x) = x 4, untuk $x \ge 4$ dan $g(x) = \sqrt{4 x^2}$.
 - (a) Dapatkan domain f(x) dan g(x).
 - (b) Tentukan $(g \circ f)(x)$ dan domain $(g \circ f)(x)$.
- 3. Diberikan fungsi $f(x) = \sqrt{2x x^2}$, $0 \le x \le 1$.
 - (a) Tentukan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.
 - (b) Gambarkan grafik f(x) dan $f^{-1}(x)$ dalam satu bidang koordinat.
- 4. Hitunglah $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2}$.
- 5. Diketahui persamaan garis singgung kurva $y^2 xy = -2$ di titik (a, b) sejajar dengan kurva y = -x. Dapatkan titik (a, b).

Solution	Bu	Tetem
	Dy.	1666

1.

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS

Hari, Tanggal : Kamis, 17 Oktober 2024 Waktu : 09.00-10.40 WIB (100 menit)

Sifat : Tertutup Kelas : 47-59, 111

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta menssketsa grafik persamaan	1	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	2	20
		3	20
		4	20
		5	20

SOAL

- 1. Dapatkan himpunan penyelesaian dari $\frac{x}{|2x-5|}>5.$
- 2. Diberikan $f(x) = \sqrt{x-3}$ dan $g(x) = 1 + \sqrt{x-5}$.
 - (a) Dapatkan domain f(x) dan g(x).
 - (b) Dapatkan $(f \circ g)(x)$ dan domain $(f \circ g)(x)$.
- 3. Diberikan $f(x) = \sqrt[3]{x} 1$, $x \ge 1$.
 - (a) Dapatkan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.
 - (b) Sketsa f(x) dan $f^{-1}(x)$ pada satu bidang koordinat.
- 4. Hitunglah $\lim_{y \to \infty} \frac{2-y}{\sqrt{7+4y^2}}$.
- 5. Dapatkan persamaan garis singgung kurva $x^2 + y + \frac{y}{x} = \sqrt{x} + 2$ di titik (1,1).

Solution	Bu	Tetem
	Dy.	1666

1.