

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2024/2025

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
 Hari, Tanggal : Kamis, 17 Oktober 2024
 Waktu : 07.00-08.40 WIB (100 menit)
 Sifat : Tertutup
 Kelas : 5-12, 101

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta mensketsa grafik persamaan	1	20
		2	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	3	20
		4	20
		5	20

SOAL

1. Dapatkan himpunan penyelesaian dari

$$\frac{1}{x+2} < \frac{1}{4-x}.$$

2. Diberikan $f(x) = x^2 + 2$, $x \geq 0$ dan $g(x) = \sqrt{x-3}$.

- (a) Dapatkan domain $f(x)$ dan $g(x)$.
 (b) Dapatkan $(g \circ f)(x)$ dan domain $(g \circ f)(x)$.

3. Diketahui $f(x) = x^3 - 2$.

- (a) Dapatkan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.
 (b) Sketsa grafik dari $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ pada satu bidang koordinat.

4. Hitunglah $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 3}$.

5. Dapatkan persamaan garis singgung kurva $xy^2 + y + \sqrt{x} = x + 3$ di titik $(4, 1)$.

SOLUSI

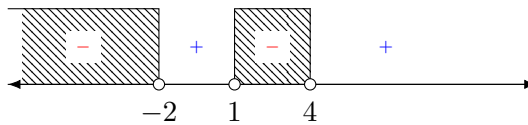
1. Pindahkan semua ruas ke kiri

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{x+2} - \frac{1}{4-x} < 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{4-x-(x+2)}{(x+2)(4-x)} < 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{2-2x}{(x+2)(4-x)} < 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{1-x}{(x+2)(4-x)} < 0
 \end{aligned}$$

Diperoleh pembuat nol-nya adalah $x = 1, -2, 4$. Selanjutnya gunakan uji tanda, didapatkan

- $x = -3 \Rightarrow \frac{1 - (-3)}{(-3 + 2)(4 - (-3))} = \frac{4}{-7} < 0$
- $x = 0 \Rightarrow \frac{1 - 0}{(0 + 2)(4 - 0)} = \frac{1}{8} > 0$
- $x = 2 \Rightarrow \frac{1 - 2}{(2 + 2)(4 - 2)} = \frac{-1}{8} < 0$
- $x = 5 \Rightarrow \frac{1 - 5}{(5 + 2)(4 - 5)} = \frac{-4}{-7} > 0$

Kemudian gambarkan garis bilangan sebagai berikut



Sehingga diperoleh himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut adalah

$$H_p = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2 \vee 1 \geq x < 4\} = (-\infty, -2) \cup (1, 4).$$

2. (a) Karena polinomial selalu terdefinisi di \mathbb{R} , maka domain f adalah $\mathcal{D}_f = [0, \infty)$ (karena dibatasi untuk $x \geq 0$). Sedangkan untuk $g(x) = \sqrt{x-3}$, agar terdefinisi maka $x-3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. Dengan demikian, domain dari g adalah $\mathcal{D}_g = [3, \infty)$.

(b)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 + 2) = \sqrt{(x^2 + 2) - 3} = \sqrt{x^2 - 1}$$

Menurut definisi domain komposisi fungsi, maka

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D}_{g \circ f} &= \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\} \\
 &= \{x \in [0, \infty) \mid x^2 + 2 \in [3, \infty)\} \\
 &= \{x \in [0, \infty) \mid x^2 + 2 \geq 3\} \\
 &= \{x \in [0, \infty) \mid x^2 - 1 \geq 0\} \\
 &= \{x \in [0, \infty) \mid x \geq 1 \text{ atau } x \leq -1\} \\
 &= [1, \infty).
 \end{aligned}$$

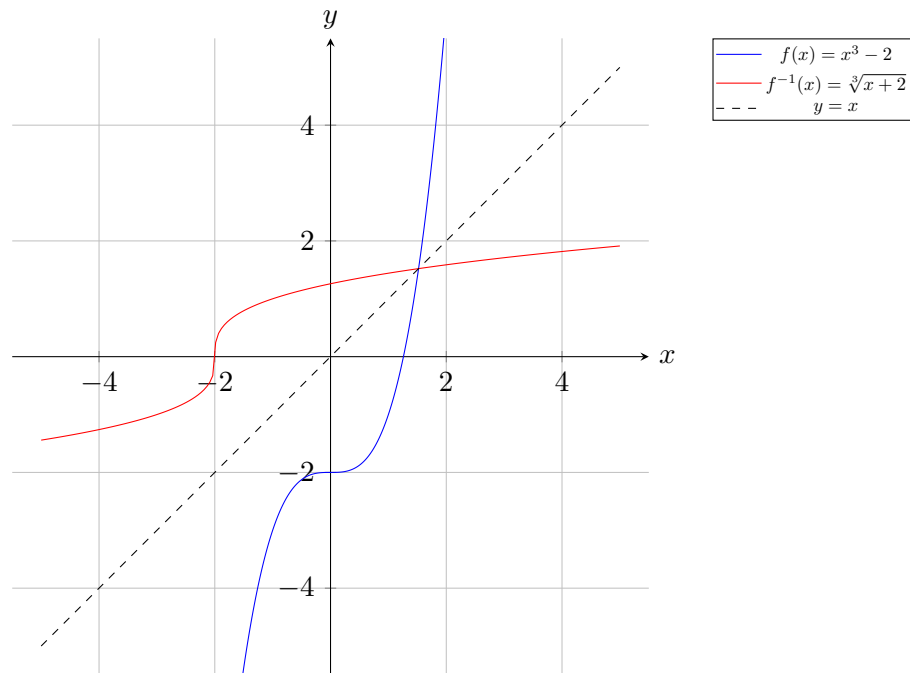
Jadi domain dari $(g \circ f)(x)$ adalah $\mathcal{D}_{g \circ f} = [1, \infty)$.

3. (a) Tukar $y = f(x)$ menjadi $x = f(y)$, sehingga

$$\begin{aligned}x &= y^3 - 2 \\y^3 &= x + 2 \\y &= \sqrt[3]{x+2} = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}.\end{aligned}$$

Selanjutnya kita tahu bahwa $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = \mathbb{R}$ (karena fungsi kubik memiliki range semua bilangan real (\mathbb{R})).

- (b) Grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ dapat digambarkan sebagai berikut



4. Bagi pembilang dan penyebut dengan $|x|$ agar bentuknya menjadi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{|x|}}{\frac{x+3}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{\sqrt{5x^2 - 2}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{x+3}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5 - \frac{2}{x^2}}}{\frac{x+3}{|x|}}.$$

karena $x \rightarrow -\infty$, maka $|x| = -x$. Sehingga

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5 - \frac{2}{x^2}}}{\frac{x+3}{|x|}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5 - \frac{2}{x^2}}}{\frac{x+3}{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{5 - \frac{2}{x^2}}}{-1 - \frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{5 - 0}}{-1 - 0} = -\sqrt{5}.$$

5. Diketahui $xy^2 + y + \sqrt{x} = x + 3$. Turunkan kedua ruas terhadap x ,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) &= \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(3) \\ y^2 + x(2y\frac{dy}{dx}) + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{x}} &= 1 + 0 \\ y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{x}} &= 1 \\ (2xy + 1)\frac{dy}{dx} &= 1 - y^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1 - y^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2xy + 1}.\end{aligned}$$

Selanjutnya, kita substitusi titik $(4, 1)$ ke dalam turunan tersebut,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(4,1)} = \frac{1 - 1^2 - \frac{1}{2\sqrt{4}}}{2(4)(1) + 1} = \frac{0 - \frac{1}{4}}{8 + 1} = -\frac{\frac{1}{4}}{9} = -\frac{1}{36}.$$

Dengan demikian, gradien garis singgung di titik $(4, 1)$ adalah $m = -\frac{1}{36}$. Gunakan persamaan garis

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

dengan $(x_1, y_1) = (4, 1)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}y - 1 &= -\frac{1}{36}(x - 4) \\ y &= -\frac{1}{36}x + \frac{4}{36} + 1 \\ y &= -\frac{1}{36}x + \frac{40}{36} \\ y &= -\frac{1}{36}x + \frac{10}{9}.\end{aligned}$$

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2024/2025

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
 Hari, Tanggal : Kamis, 17 Oktober 2024
 Waktu : 07.00-08.40 WIB (100 menit)
 Sifat : Tertutup
 Kelas : 13-19, 103

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta mensketsa grafik persamaan	1	20
		2	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	3	20
		4	20
		5	20

SOAL

- Diberikan titik $A(2, -1)$, $B(2, 2)$ dan $C(0, 4)$. Dapatkan persamaan garis yang melalui titik A dan sejajar dengan garis yang melalui B dan C .
- Diberikan $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ dan $g(x) = \sqrt{x + 1}$.
 - Dapatkan domain $f(x)$ dan $g(x)$.
 - Dapatkan $(f \circ g)(x)$ dan domain $(f \circ g)(x)$.
- Diberikan $f(x) = x^2 - 4x + 7$.
 - Tentukan domain dari f sehingga f^{-1} ada.
 - Dapatkan f^{-1} beserta domainnya.
- Dapatkan nilai k sedemikian sehingga fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - k, & x < 3 \\ 3x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$$

kontinu di $x = 3$.

- Dapatkan $f'(x)$ dimana $f(x) = \sqrt{\frac{(3x + 1)^3}{2x}}$.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Hitung gradien garis BC dengan $B(2, 2)$ dan $C(0, 4)$,

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 2}{0 - 2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Karena garis yang melalui titik A sejajar dengan garis BC , maka gradiennya juga -1 . Gunakan persamaan garis

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

dengan titik A adalah $(x_1, y_1) = (2, -1)$, sehingga diperoleh

$$y - (-1) = -1(x - 2)$$

$$y + 1 = -x + 2$$

$$y = -x + 1.$$

2. (a) Agar $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$ terdefinisi, maka $x^2 - 4 \neq 0 \implies x^2 \neq 4 \implies x \neq \pm 2$. Dengan demikian, domain dari f adalah $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -2 \vee x \neq 2\}$. Sedangkan untuk $g(x) = \sqrt{x+1}$, agar terdefinisi maka $x+1 \geq 0 \implies x \geq -1$. Dengan demikian, domain dari g adalah $\mathcal{D}_g = [-1, \infty)$.

(b)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{(\sqrt{x+1})^2 - 4} = \frac{1}{x+1-4} = \frac{1}{x-3}.$$

Menurut definisi domain komposisi fungsi, maka

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{f \circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \\ &= \{x \in [-1, \infty) \mid \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}\} \\ &= \{x \geq -1 \mid \sqrt{x+1} \neq 2\} \\ &= \{x \geq -1 \mid x+1 \neq 4\} \\ &= \{x \geq -1 \mid x \neq 3\} \\ &= [-1, 3) \cup (3, \infty).\end{aligned}$$

Jadi domain dari $(f \circ g)(x)$ adalah $\mathcal{D}_{f \circ g} = [-1, 3) \cup (3, \infty)$.

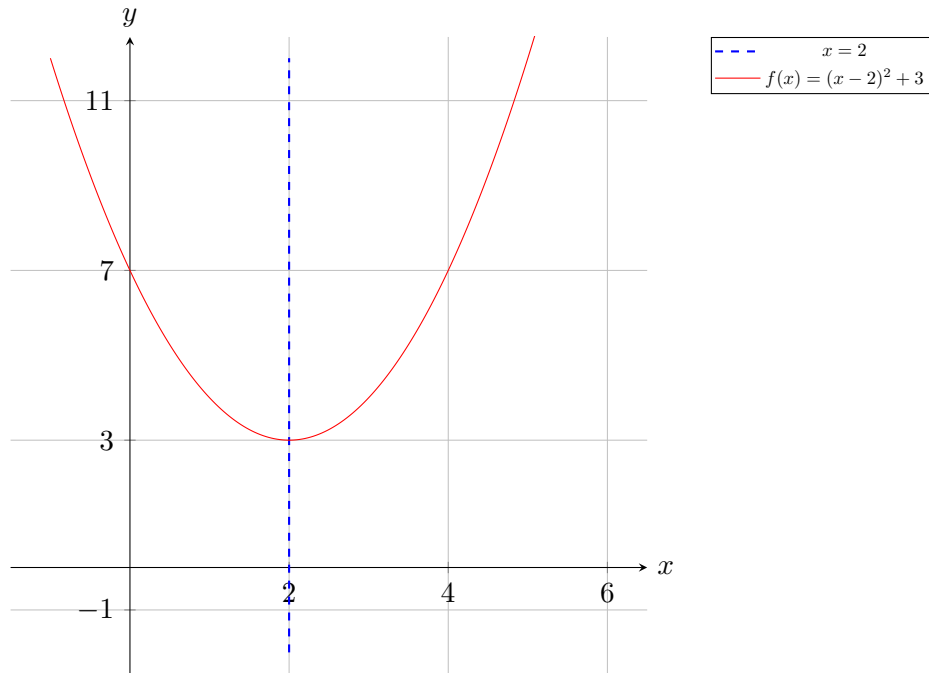
3. (a) Ubah ekspresi fungsi tersebut dalam bentuk seperti berikut:

$$f(x) = x^2 - 4x + 7$$

$$f(x) = (x^2 - 4x + 4) + 3$$

$$f(x) = (x - 2)^2 + 3.$$

Selanjutnya kita akan coba gambarkan grafiknya dimana merupakan grafik $y = x^2$ yang digeser 2 satuan ke kanan dan 3 satuan ke atas.

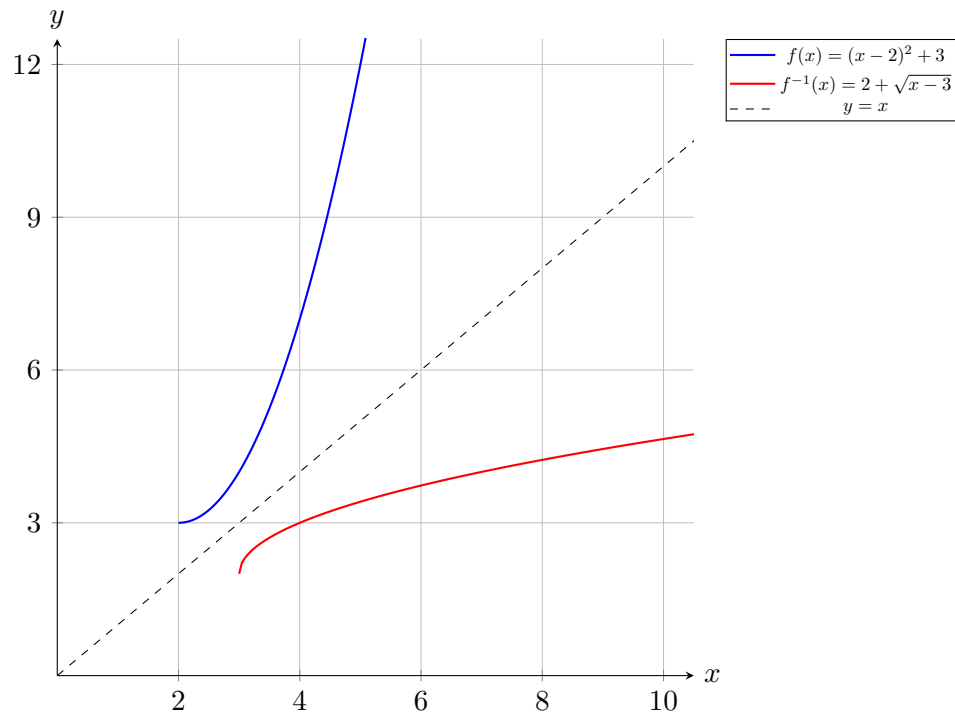


dapat di analisis bahwa $f(x)$ mempunya invers jika dibatasi pada sumbu simetri nya yaitu $x = 2$. Sehingga domain f agar f^{-1} ada adalah $\mathcal{D}_f = [2, \infty)$ atau $\mathcal{D}_f = (-\infty, 2]$.

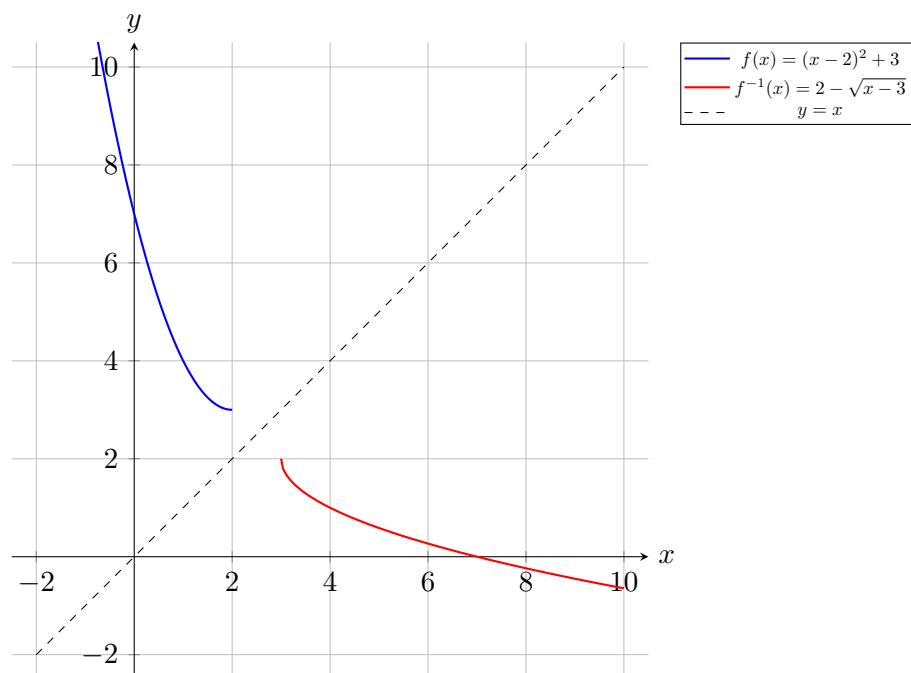
(b) Tukar $y = f(x)$ menjadi $x = f(y)$, sehingga

$$\begin{aligned}
 x &= y^2 - 4y + 7 \\
 x - 7 &= y^2 - 4y \\
 y^2 - 4y &= x - 7 \\
 y^2 - 4y + 4 &= x - 7 + 4 \\
 (y - 2)^2 &= x - 3 \\
 y - 2 &= \pm\sqrt{x - 3} \\
 y &= 2 \pm \sqrt{x - 3}. \\
 f^{-1}(x) &= 2 + \sqrt{x - 3} \text{ atau } f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x - 3}.
 \end{aligned}$$

Selanjutnya kita tahu bahwa $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$. Jika kita ambil $\mathcal{D}_f = [2, \infty)$, maka $\mathcal{R}_f = [3, \infty)$ sehingga $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [3, \infty)$ dan $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x - 3}$. Grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ untuk $\mathcal{D}_f = [2, \infty)$ dan $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [3, \infty)$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Namun jika kita ambil $\mathcal{D}_f = (-\infty, 2]$, maka $\mathcal{R}_f = (-\infty, 3]$ sehingga $\mathcal{D}_{f^{-1}} = (-\infty, 3]$ dan $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-3}$. Grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ untuk $\mathcal{D}_f = (-\infty, 2]$ dan $\mathcal{D}_{f^{-1}} = (-\infty, 3]$ dapat digambarkan sebagai berikut:



4. Pada soal ini, kita cukup untuk menyamakan limit kiri dan limit kanan di $x = 3$. Pada dasarnya kekontinuan di $x = 3$ akan terpenuhi jika

- $f(3)$ terdefinisi,
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ ada,
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3)$.

Kita tahu bahwa $f(3) = 3(3) - 3 = 6$, sehingga $f(3)$ terdefinisi. Selanjutnya kita hitung limit kiri dan limit kanan di $x = 3$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - k) = 3^2 - k = 9 - k, \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (3x - 3) = 3(3) - 3 = 6.\end{aligned}$$

Agar limit kiri dan limit kanan sama, maka

$$\begin{aligned}9 - k &= 6 \\ k &= 3.\end{aligned}$$

Dengan demikian, nilai k agar $f(x)$ kontinu di $x = 3$ adalah $k = 3$.

5. Fungsi tersebut dapat kita sederhanakan bentuknya menjadi

$$f(x) = \sqrt{\frac{(3x+1)^3}{2x}} = \frac{(3x+1)^{3/2}}{(2x)^{1/2}} = \frac{(3x+1)^{3/2}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3x+1)^{3/2}x^{-1/2}.$$

Untuk turunannya dapat kita gunakan aturan perkalian dan aturan rantai,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{3}{2}(3x+1)^{1/2} \cdot 3 \cdot x^{-1/2} + (3x+1)^{3/2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) x^{-3/2} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\frac{9}{2}(3x+1)^{1/2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}(3x+1)^{3/2}x^{-3/2} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[9(3x+1)^{1/2}x^{-1/2} - (3x+1)^{3/2}x^{-3/2} \right] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (3x+1)^{1/2}x^{-3/2} [9x - (3x+1)] \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} (3x+1)^{1/2}x^{-3/2} (6x-1).\end{aligned}$$

Dengan demikian, turunan dari $f(x)$ adalah

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3x+1} (6x-1)}{2x\sqrt{2x}}.$$

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2024/2025

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
 Hari, Tanggal : Kamis, 17 Oktober 2024
 Waktu : 11.00-12.40 WIB (100 menit)
 Sifat : Tertutup
 Kelas : 20-33, 105, 106

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta mensketsa grafik persamaan	1	20
		2	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	3	20
		4	20
		5	20

SOAL

1. Dapatkan himpunan penyelesaian dari

$$-1 \leq |2 - x| < 3.$$

2. Diberikan $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ dan $g(x) = \frac{1}{x^2}$.

- (a) Dapatkan domain $f(x)$ dan $g(x)$.
 (b) Dapatkan $(g \circ f)(x)$ dan domain $(g \circ f)(x)$.

3. Diberikan $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

- (a) Tentukan domain dari $f(x)$ sehingga inversnya ada.
 (b) Dapatkan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.

4. Diberikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}}, & x \neq 4, \\ 6, & x = 4, \end{cases}$$

selidiki kekontinuan $f(x)$ di $x = 4$.

5. Dapatkan $f''(x)$ dimana $f(x) = 2x + (2\sqrt{x} - 3)^{-2}$.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Karena nilai mutlak selalu bernilai positif, maka tidak perlu kita tinjau untuk kasus $-1 \leq |2-x|$. Sehingga kita hanya perlu menyelesaikan pertidaksamaan $|2-x| < 3$. Berdasarkan definisi nilai mutlak, maka

$$\begin{aligned}|2-x| < 3 &\iff -3 < 2-x < 3 \\ &\iff -3-2 < -x < 3-2 \\ &\iff -5 < -x < 1 \\ &\iff 5 > x > -1 \\ &\iff -1 < x < 5.\end{aligned}$$

Dengan demikian, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut adalah $(-1, 5)$.

2. (a) Agar $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ terdefinisi, maka $25-x^2 \geq 0 \implies x^2 \leq 25 \implies -5 \leq x \leq 5$. Dengan demikian, domain dari f adalah $\mathcal{D}_f = [-5, 5]$. Sedangkan untuk $g(x) = \frac{1}{x^2}$, agar terdefinisi maka $x^2 \neq 0 \implies x \neq 0$. Dengan demikian, domain dari g adalah $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$.
- (b)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{25-x^2}) = \frac{1}{(\sqrt{25-x^2})^2} = \frac{1}{25-x^2}.$$

Menurut definisi domain komposisi fungsi, maka

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{g \circ f} &= \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\} \\ &= \{x \in [-5, 5] \mid \sqrt{25-x^2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \\ &= \{x \in [-5, 5] \mid 25-x^2 \neq 0\} \\ &= \{x \in [-5, 5] \mid x^2 \neq 25\} \\ &= \{x \in [-5, 5] \mid x \neq 5 \text{ dan } x \neq -5\} \\ &= (-5, 5).\end{aligned}$$

Jadi domain dari $(g \circ f)(x)$ adalah $\mathcal{D}_{g \circ f} = (-5, 5)$.

3. (a) Agar $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ mempunyai invers, maka kita perlu membatasi domainnya pada salah satu sisi sumbu simetri yaitu $x = 0$. Sehingga domain f agar f^{-1} ada adalah $\mathcal{D}_f = [0, 2]$ atau $\mathcal{D}_f = [-2, 0]$.
- (b) Tukar $y = f(x)$ menjadi $x = f(y)$, sehingga

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{4-y^2} \\ x^2 &= 4-y^2 \\ y^2 &= 4-x^2 \\ y &= \pm\sqrt{4-x^2} \\ f^{-1}(x) &= \sqrt{4-x^2} \text{ atau } f^{-1}(x) = -\sqrt{4-x^2}.\end{aligned}$$

Selanjutnya kita tahu bahwa $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$. Jika kita ambil $\mathcal{D}_f = [0, 2]$, maka $\mathcal{R}_f = [0, 2]$ sehingga $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [0, 2]$ dan $f^{-1}(x) = \sqrt{4-x^2}$. Namun jika kita ambil $\mathcal{D}_f = [-2, 0]$, maka $\mathcal{R}_f = [0, 2]$ sehingga $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [0, 2]$ dan $f^{-1}(x) = -\sqrt{4-x^2}$.

4. Pada soal ini, kita cukup untuk menyamakan limit kiri dan limit kanan di $x = 4$. Pada dasarnya kekontinuan di $x = 4$ akan terpenuhi jika

- $f(4)$ terdefinisi,
- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ ada,
- $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4)$.

Kita tahu bahwa $f(4) = 6$, sehingga $f(4)$ terdefinisi. Selanjutnya kita hitung limit kiri dan limit kanan di $x = 4$,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}} = \frac{4-4}{2-\sqrt{4}} = \frac{0}{0}, \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} 6 = 6.\end{aligned}$$

Karena limit kiri menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$, maka kita perlu menyederhanakannya terlebih dahulu. Kita lakukan dengan cara mengalikan dengan bentuk sekawan dari penyebutnya, sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}} \cdot \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(4-x)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{(4-x)(2+\sqrt{x})}{4-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} (2+\sqrt{x}) \\ &= 2 + \sqrt{4} = 4.\end{aligned}$$

Karena limit kiri dan limit kanan tidak sama, maka fungsi tersebut tidak kontinu di $x = 4$.

5. Dengan aturan rantai dapat diperoleh

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx} (2x + (2\sqrt{x} - 3)^{-2}) \\ &= \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}((2\sqrt{x} - 3)^{-2}) \\ &= 2 + (-2)(2\sqrt{x} - 3)^{-3} \cdot \frac{d}{dx}(2\sqrt{x} - 3) \\ &= 2 + (-2)(2\sqrt{x} - 3)^{-3} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= 2 - 2(2\sqrt{x} - 3)^{-3} \cdot x^{-1/2}\end{aligned}$$

Selanjutnya, kita hitung turunan kedua $f''(x)$ dengan aturan perkalian. Misalkan

$$\begin{aligned}u &= -2(2\sqrt{x} - 3)^{-3} \implies u' = 6(2\sqrt{x} - 3)^{-4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}, \\ v &= x^{-1/2} \implies v' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}.\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{d}{dx} \left(2 - 2(2\sqrt{x} - 3)^{-3} \cdot x^{-1/2} \right) \\ &= 0 + \frac{d}{dx} (u \cdot v) \\ &= u'v + uv' \\ &= 6(2\sqrt{x} - 3)^{-4} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot x^{-1/2} + -2(2\sqrt{x} - 3)^{-3} \cdot \left(-\frac{1}{2}x^{-3/2} \right) \\ &= 6(2\sqrt{x} - 3)^{-4}x^{-1} + (2\sqrt{x} - 3)^{-3}x^{-3/2}. \end{aligned}$$

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2024/2025

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
 Hari, Tanggal : Kamis, 17 Oktober 2024
 Waktu : 13.30-15.10 WIB (100 menit)
 Sifat : Tertutup
 Kelas : 34-46, 107, 108

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

**DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN**

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta mensketsa grafik persamaan	1	20
		2	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	3	20
		4	20
		5	20

SOAL

- Diberikan titik $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ dan $C(2, 6)$. Tentukan jarak dari titik C ke garis yang melalui titik A dan B .
- Diberikan $f(x) = x - 4$, untuk $x \geq 4$ dan $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
 - Dapatkan domain $f(x)$ dan $g(x)$.
 - Tentukan $(g \circ f)(x)$ dan domain $(g \circ f)(x)$.
- Diberikan fungsi $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$.
 - Tentukan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.
 - Gambarkan grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ dalam satu bidang koordinat.
- Hitunglah $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2}$.
- Diketahui persamaan garis singgung kurva $y^2 - xy = -2$ di titik (a, b) sejajar dengan kurva $y = -x$. Dapatkan titik (a, b) .

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Diketahui titik $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ dan $C(2, 6)$. Pertama kita cari persamaan garis yang melalui titik A dan B . Gradien garis tersebut adalah

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - 1}{4 - 1} = \frac{1}{3}.$$

Dengan menggunakan titik $A(1, 1)$, maka persamaan garisnya adalah

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{1}{3}(x - 1)$$

$$3y - 3 = x - 1$$

$$x - 3y = -2.$$

Dengan demikian, persamaan garis yang melalui titik A dan B adalah $x - 3y + 2 = 0$. Selanjutnya kita cari jarak dari titik $C(2, 6)$ ke garis tersebut dengan rumus jarak titik ke garis,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1(2) + (-3)(6) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|-16|}{\sqrt{1+9}} = \frac{16}{\sqrt{10}} = \frac{16\sqrt{10}}{10} = \frac{8\sqrt{10}}{5}.$$

Dengan demikian, jarak dari titik C ke garis yang melalui titik A dan B adalah $\frac{8\sqrt{10}}{5}$ satuan.

2. (a) Ingat bahwa fungsi polinomial terdefinisi di semua bilangan real, namun jika dalam soal diberikan batasan domain, maka kita ikuti batasan tersebut. Sehingga domain dari $f(x) = x - 4$ adalah $\mathcal{D}_f = [4, \infty)$. Sedangkan agar $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ terdefinisi, maka

$$4 - x^2 \geq 0 \implies x^2 \leq 4 \implies -2 \leq x \leq 2.$$

Dengan demikian, domain dari g adalah $\mathcal{D}_g = [-2, 2]$.

(b)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x - 4) = \sqrt{4 - (x - 4)^2} = \sqrt{4 - (x^2 - 8x + 16)} = \sqrt{-x^2 + 8x - 12}.$$

Menurut definisi domain komposisi fungsi, maka

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{g \circ f} &= \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\} \\ &= \{x \in [4, \infty) \mid x - 4 \in [-2, 2]\} \\ &= \{x \geq 4 \mid -2 \leq x - 4 \leq 2\} \\ &= \{x \geq 4 \mid 2 \leq x \leq 6\} \\ &= [4, 6].\end{aligned}$$

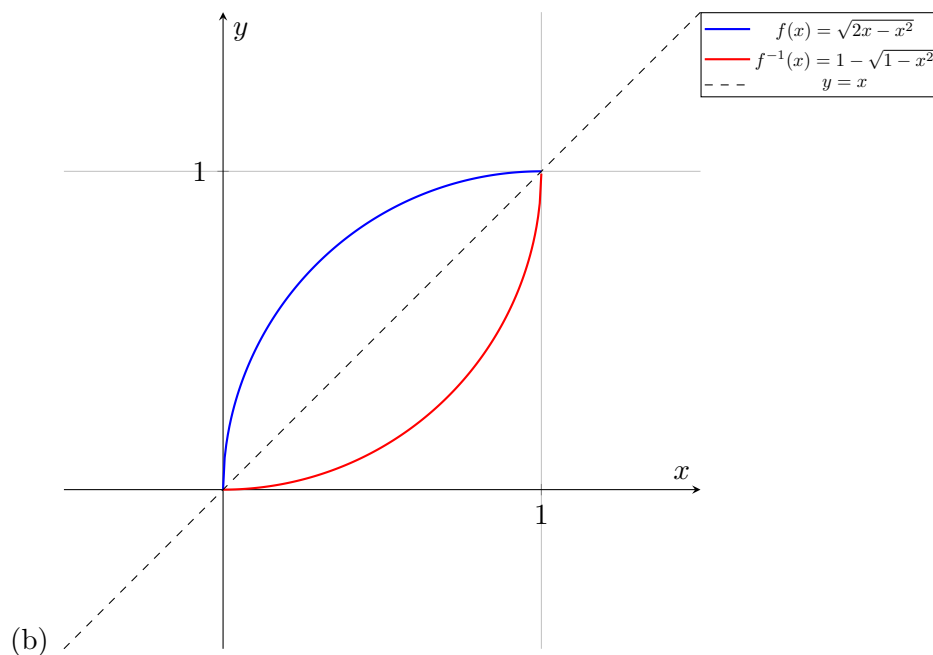
Jadi domain dari $(g \circ f)(x)$ adalah $\mathcal{D}_{g \circ f} = [4, 6]$.

3. (a) Sebelum mencari ekspresi fungsi inversnya dapat kita tinjau bahwa domain f adalah $\mathcal{D}_f = [0, 1]$ dan range f adalah $\mathcal{R}_f = [0, 1]$. Sehingga domain dari f^{-1} adalah $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = [0, 1]$.

Tukar $y = f(x)$ menjadi $x = f(y)$, sehingga

$$\begin{aligned}x &= \sqrt{2y - y^2} \\x^2 &= 2y - y^2 \\y^2 - 2y &= -x^2 \\y^2 - 2y + 1 &= -x^2 + 1 \\(y - 1)^2 &= 1 - x^2 \\y - 1 &= \pm\sqrt{1 - x^2} \\y &= 1 \pm \sqrt{1 - x^2}\end{aligned}$$

Karena $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f = [0, 1]$, maka haruslah kita ambil $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.



4. Untuk menghitung limit tersebut, kita kalikan dengan bentuk sekawan dari pembilangnya, sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x - 2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 5} + 3}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 5) - 9}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} \\&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} + 3} \\&= \frac{2 + 2}{\sqrt{2^2 + 5} + 3} = \frac{4}{\sqrt{9} + 3} = \frac{4}{3 + 3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Dengan demikian, nilai limit tersebut adalah $\frac{2}{3}$.

5. Diketahui persamaan garis singgung kurva $y^2 - xy = -2$ di titik (a, b) sejajar dengan kurva $y = -x$. Pertama kita cari turunan implisit dari persamaan kurva tersebut,

$$\begin{aligned}y^2 - xy &= -2 \\2y \frac{dy}{dx} - \left(x \frac{dy}{dx} + y \right) &= 0 \\2y \frac{dy}{dx} - x \frac{dy}{dx} &= y \\(2y - x) \frac{dy}{dx} &= y \\\frac{dy}{dx} &= \frac{y}{2y - x}.\end{aligned}$$

Karena garis singgung di titik (a, b) sejajar dengan kurva $y = -x$, maka gradien garis singgung tersebut adalah -1 . Sehingga

$$\begin{aligned}\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(a,b)} &= -1 \\\frac{b}{2b - a} &= -1 \\b &= -2b + a \\3b &= a \\a &= 3b.\end{aligned}$$

Selanjutnya kita substitusi $a = 3b$ ke dalam persamaan kurva, sehingga

$$\begin{aligned}b^2 - (3b)b &= -2 \\b^2 - 3b^2 &= -2 \\-2b^2 &= -2 \\b^2 &= 1 \\b &= \pm 1.\end{aligned}$$

Jika $b = 1$, maka $a = 3(1) = 3$. Jika $b = -1$, maka $a = 3(-1) = -3$. Dengan demikian, titik (a, b) yang dimaksud adalah $(3, 1)$ dan $(-3, -1)$.

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2024/2025

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
 Hari, Tanggal : Kamis, 17 Oktober 2024
 Waktu : 09.00-10.40 WIB (100 menit)
 Sifat : Tertutup
 Kelas : 47-59, 111

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta mensketsa grafik persamaan	1	20
		2	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	3	20
		4	20
		5	20

SOAL

- Dapatkan himpunan penyelesaian dari $\frac{x}{|2x-5|} > 5$.
- Diberikan $f(x) = \sqrt{x-3}$ dan $g(x) = 1 + \sqrt{x-5}$.
 - Dapatkan domain $f(x)$ dan $g(x)$.
 - Dapatkan $(f \circ g)(x)$ dan domain $(f \circ g)(x)$.
- Diberikan $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1$, $x \geq 1$.
 - Dapatkan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.
 - Sketsa $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ pada satu bidang koordinat.
- Hitunglah $\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2-y}{\sqrt{7+4y^2}}$.
- Dapatkan persamaan garis singgung kurva $x^2 + y + \frac{y}{x} = \sqrt{x} + 2$ di titik $(1, 1)$.

SOLUSI

1. Sebelum membagi kasus, perhatikan bahwa untuk $x = \frac{5}{2}$ akan menyebabkan penyebut menjadi nol. Sehingga dapat kita hiraukan nilai $x = \frac{5}{2}$ dari himpunan penyelesaian, maka yang perlu kita tinjau hanyalah

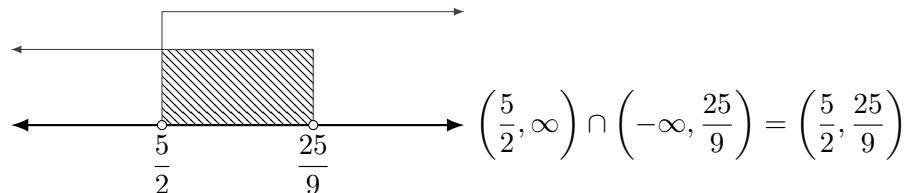
$$x > 5|2x - 5|.^1$$

Bagi kasus yaitu ketika $2x - 5 > 0$ dan $2x - 5 < 0$.²

- Kasus $2x - 5 > 0 \implies x > \frac{5}{2}$. Diperoleh

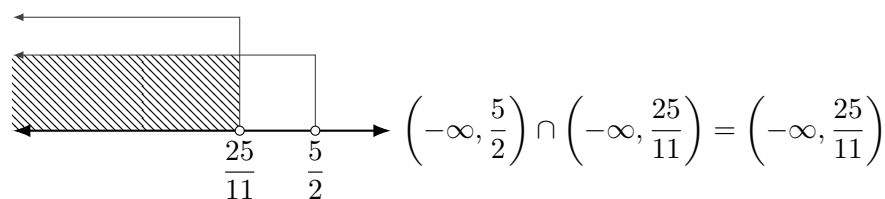
$$\begin{aligned} x > 5|2x - 5| &\iff x > 5(2x - 5) \\ &\iff x > 10x - 25 \\ &\iff -9x > -25 \\ &\iff 9x < 25 \\ &\iff x < \frac{25}{9}. \end{aligned}$$

Secara garis bilangan dapat diilustrasikan sebagai berikut,



- Kasus $2x - 5 < 0 \implies x < \frac{5}{2}$. Maka

$$\begin{aligned} x > 5|2x - 5| &\iff x < -5(2x - 5) \\ &\iff x < -10x + 25 \\ &\iff 11x < 25 \\ &\iff x < \frac{25}{11}. \end{aligned}$$



Dengan demikian, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut adalah

$$\left(-\infty, \frac{25}{11}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{9}\right).$$

2. (a) Agar $f(x) = \sqrt{x-3}$ terdefinisi, maka $x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3$. Dengan demikian, domain dari f adalah $\mathcal{D}_f = [3, \infty)$. Sedangkan untuk $g(x) = 1 + \sqrt{x-5}$, agar terdefinisi maka $x - 5 \geq 0 \implies x \geq 5$. Dengan demikian, domain dari g adalah $\mathcal{D}_g = [5, \infty)$.

¹karena kita yakin bahwa $|2x - 5| \neq 0$, maka kita boleh mengalikan kedua ruas dengan $|2x - 5|$ tanpa mengubah arah pertidaksamaan.

²Kasus $2x - 5 = 0$ tidak perlu ditinjau karena akan menyebabkan penyebut menjadi nol.

(b)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 + \sqrt{x-5}) = \sqrt{(1 + \sqrt{x-5}) - 3} = \sqrt{\sqrt{x-5} - 2}.$$

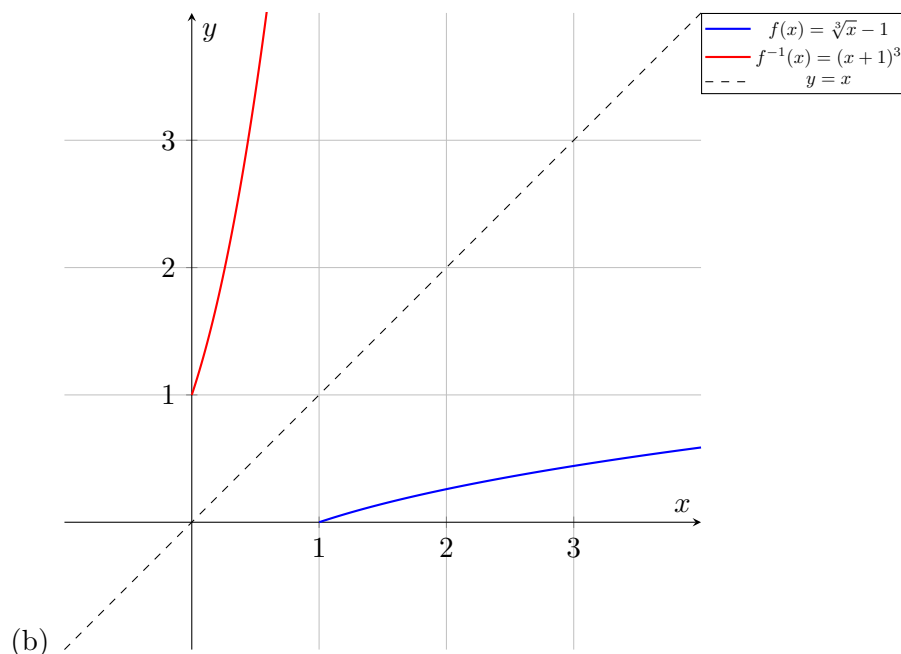
Menurut definisi domain komposisi fungsi, maka

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{f \circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \\ &= \{x \in [5, \infty) \mid 1 + \sqrt{x-5} \in [3, \infty)\} \\ &= \{x \geq 5 \mid 1 + \sqrt{x-5} \geq 3\} \\ &= \{x \geq 5 \mid \sqrt{x-5} \geq 2\} \\ &= \{x \geq 5 \mid x-5 \geq 4\} \\ &= \{x \geq 5 \mid x \geq 9\} \\ &= [9, \infty). \end{aligned}$$

Jadi domain dari $(f \circ g)(x)$ adalah $\mathcal{D}_{f \circ g} = [9, \infty)$.

3. (a) Sebelum mencari ekspresi fungsi inversnya dapat kita tinjau bahwa domain f adalah $\mathcal{D}_f = [1, \infty)$ dan range f adalah $\mathcal{R}_f = [0, \infty)$. Sehingga domain dari f^{-1} adalah $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = [0, \infty)$. Tukar $y = f(x)$ menjadi $x = f(y)$, sehingga

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{y} - 1 \\ x + 1 &= \sqrt[3]{y} \\ (x + 1)^3 &= y \\ f^{-1}(x) &= (x + 1)^3. \end{aligned}$$



4. Untuk menghitung limit tersebut, kita bagi pembilang dan penyebut dengan $|y|$, sehingga

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2-y}{\sqrt{7+4y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{2-y}{|y|}}{\frac{\sqrt{7+4y^2}}{|y|}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{|y|} - \frac{y}{|y|}}{\sqrt{\frac{7}{y^2} + 4}}$$

Karena $y \rightarrow \infty$, maka $y > 0$ sehingga $|y| = y$. Oleh karena itu,

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{2-y}{\sqrt{7+4y^2}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{y} - 1}{\sqrt{\frac{7}{y^2} + 4}} = \frac{\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{y} - 1 \right)}{\lim_{y \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{7}{y^2} + 4}} = \frac{0-1}{\sqrt{0+4}} = \frac{-1}{\sqrt{4}} = \frac{-1}{2}.$$

Dengan demikian, nilai limit tersebut adalah $-\frac{1}{2}$.

5. Pertama kita cari turunan implisit dari persamaan kurva tersebut,

$$\begin{aligned} x^2 + y + \frac{y}{x} &= \sqrt{x} + 2 \\ 2x + \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{dy}{dx} \cdot x - y \cdot 1}{x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 \\ 2x + \frac{dy}{dx} + \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ 2x + \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{dy}{dx}}{x} - \frac{y}{x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Selanjutnya kita substitusi titik $(1, 1)$ ke dalam turunan tersebut, sehingga

$$\begin{aligned} 2(1) + \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,1)} + \frac{\frac{dy}{dx} \Big|_{(1,1)}}{1} - \frac{1}{1^2} &= \frac{1}{2\sqrt{1}} \\ 2 + \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,1)} + \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,1)} - 1 &= \frac{1}{2} \\ 1 + 2 \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,1)} &= \frac{1}{2} \\ 2 \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,1)} &= -\frac{1}{2} \\ \frac{dy}{dx} \Big|_{(1,1)} &= -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, gradien garis singgung di titik $(1, 1)$ adalah $-\frac{1}{4}$. Sehingga persamaan garis singgungnya adalah

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= -\frac{1}{4}(x - 1) \\ 4y - 4 &= -x + 1 \\ x + 4y &= 5. \end{aligned}$$

Dengan demikian, persamaan garis singgung kurva di titik $(1, 1)$ adalah $x + 4y = 5$.