Aplikasi Turunan

Teosofi Hidayah Agung

Departemen Matematika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

19 September 2024

Daftar isi

Laju-laju yang Berkaitan

Definisi 1

*Laju-laju yang Berkaitan Jika suatu variabel y bergantung pada waktu t, maka turunannya, dy/dt, disebut **laju perubahan sesaat**. Jika y bergantung pada variabel lain, misalnya x, yang juga bergantung pada t, maka laju perubahan y dan x saling berkaitan melalui Aturan Rantai:*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Strategi Penyelesaian

1. Baca masalah dengan cermat dan identifikasi semua kuantitas yang berubah terhadap waktu.
2. Buat sketsa dan beri nama variabel dan konstanta.
3. Tuliskan laju perubahan yang diketahui dan yang ingin dicari.
4. Tuliskan persamaan yang menghubungkan variabel-variabel tersebut.
5. Gunakan Aturan Rantai untuk menurunkan persamaan secara implisit terhadap waktu t.

Contoh: Masalah Tangga

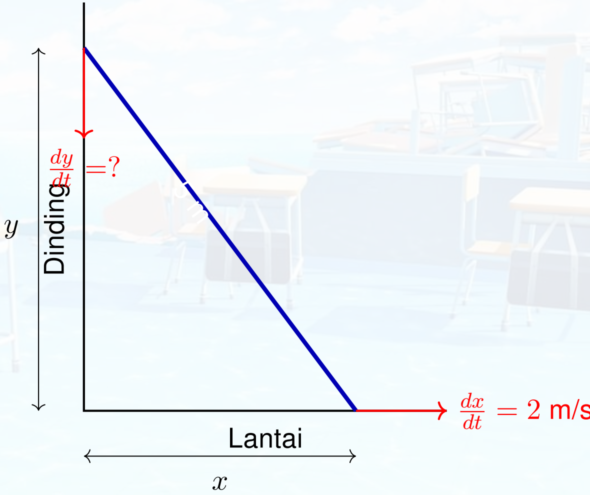
Contoh

Sebuah tangga dengan panjang 5 meter bersandar pada dinding vertikal. Ujung bawah tangga digeser menjauhi dinding dengan laju 2 m/s. Seberapa cepat ujung atas tangga meluncur ke bawah dinding saat ujung bawahnya berjarak 3 meter dari dinding?

Contoh: Masalah Tangga

Contoh

Sebuah tangga dengan panjang 5 meter bersandar pada dinding vertikal. Ujung bawah tangga digeser menjauhi dinding dengan laju 2 m/s. Seberapa cepat ujung atas tangga meluncur ke bawah dinding saat ujung bawahnya berjarak 3 meter dari dinding?



Solusi:

- Misal x adalah jarak ujung bawah tangga dari dinding, dan y adalah ketinggian ujung atas tangga.
- Diketahui: $\frac{dx}{dt} = 2$ m/s.
- Dicari: $\frac{dy}{dt}$ saat $x = 3$ m.

Daftar isi

Interval Naik, Turun, dan Kecekungan Fungsi

Teorema 1

Uji Turunan Pertama untuk Kemonotonan Misalkan f kontinu pada interval $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b).

- *Jika $f'(x) > 0$ untuk semua $x \in (a, b)$, maka f **naik** pada $[a, b]$.*
- *Jika $f'(x) < 0$ untuk semua $x \in (a, b)$, maka f **turun** pada $[a, b]$.*

Interval Naik, Turun, dan Kecekungan Fungsi

Teorema 1

Uji Turunan Pertama untuk Kemonotonan Misalkan f kontinu pada interval $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b).

- *Jika $f'(x) > 0$ untuk semua $x \in (a, b)$, maka f **naik** pada $[a, b]$.*
- *Jika $f'(x) < 0$ untuk semua $x \in (a, b)$, maka f **turun** pada $[a, b]$.*

Teorema 2

Uji Turunan Kedua untuk Kecekungan Misalkan f terdiferensial dua kali pada interval terbuka I.

- *Jika $f''(x) > 0$ untuk semua $x \in I$, maka grafik f **cekung ke atas** pada I.*
- *Jika $f''(x) < 0$ untuk semua $x \in I$, maka grafik f **cekung ke bawah** pada I.*

Interval Naik, Turun, dan Kecekungan Fungsi

Teorema 1

Uji Turunan Pertama untuk Kemonotonan Misalkan f kontinu pada interval $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b).

- *Jika $f'(x) > 0$ untuk semua $x \in (a, b)$, maka f* ***naik*** *pada $[a, b]$.*
- *Jika $f'(x) < 0$ untuk semua $x \in (a, b)$, maka f* ***turun*** *pada $[a, b]$.*

Teorema 2

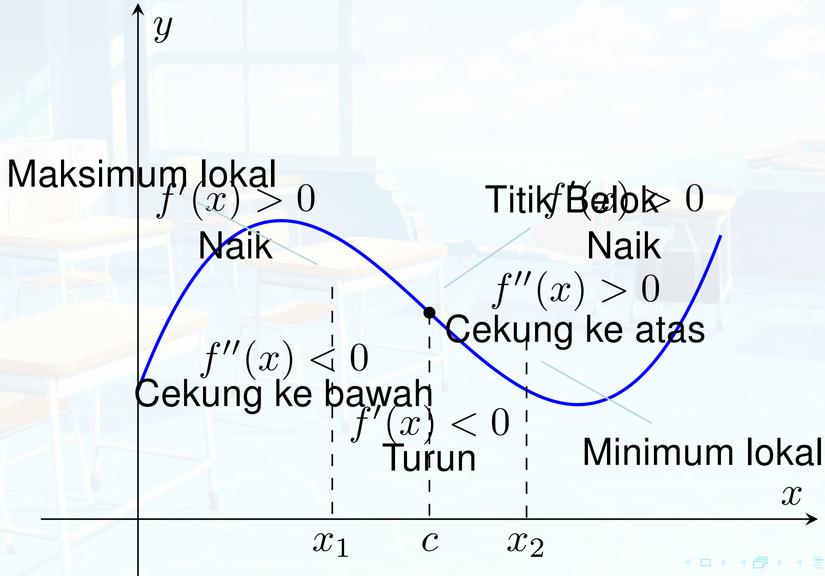
Uji Turunan Kedua untuk Kecekungan Misalkan f terdiferensial dua kali pada interval terbuka I.

- *Jika $f''(x) > 0$ untuk semua $x \in I$, maka grafik f* ***cekung ke atas*** *pada I.*
- *Jika $f''(x) < 0$ untuk semua $x \in I$, maka grafik f* ***cekung ke bawah*** *pada I.*

Definisi 2

Titik Belok (Inflection Point) Misalkan f kontinu pada suatu interval yang memuat c. Titik

Ilustrasi Kemonotonan dan Kecekungan



Daftar isi

Ekstrim Relatif, Uji Turunan Pertama dan Kedua

Definisi 3

*Titik Kritis Misalkan f terdefinisi pada interval I yang memuat titik c. Titik c disebut **titik kritis** dari f jika:*

1. *$f'(c) = 0$ (titik stasioner), atau*
2. *$f'(c)$ tidak ada (titik singular).*

Jika f memiliki ekstrim lokal (relatif) di c, maka c haruslah sebuah titik kritis.

Ekstrim Relatif, Uji Turunan Pertama dan Kedua

Definisi 3

*Titik Kritis Misalkan f terdefinisi pada interval I yang memuat titik c. Titik c disebut **titik kritis** dari f jika:*

1. *$f'(c) = 0$ (titik stasioner), atau*
2. *$f'(c)$ tidak ada (titik singular).*

Jika f memiliki ekstrim lokal (relatif) di c, maka c haruslah sebuah titik kritis.

Ekstrim Relatif (Lokal)

- $f(c)$ adalah **maksimum relatif** jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua x di sekitar c.
- $f(c)$ adalah **minimum relatif** jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua x di sekitar c.

Uji Ekstrim Relatif

Uji Turunan Pertama

Misalkan c adalah titik kritis dari f.

- Jika tanda f' berubah dari $(+)$ menjadi $(-)$ di c, maka $f(c)$ adalah **maksimum relatif**.
- Jika tanda f' berubah dari $(-)$ menjadi $(+)$ di c, maka $f(c)$ adalah **minimum relatif**.
- Jika tanda f' tidak berubah di c, maka $f(c)$ bukan ekstrim relatif.

Uji Ekstrim Relatif

Uji Turunan Pertama

Misalkan c adalah titik kritis dari f.

- Jika tanda f' berubah dari $(+)$ menjadi $(-)$ di c, maka $f(c)$ adalah **maksimum relatif**.
- Jika tanda f' berubah dari $(-)$ menjadi $(+)$ di c, maka $f(c)$ adalah **minimum relatif**.
- Jika tanda f' tidak berubah di c, maka $f(c)$ bukan ekstrim relatif.

Fun Fact

Uji Turunan Kedua Misalkan f' dan f'' ada di sekitar c dan $f'(c) = 0$.

- *Jika $f''(c) < 0$, maka $f(c)$ adalah **maksimum relatif**. (Cekung ke bawah $\implies$ puncak)*
- *Jika $f''(c) > 0$, maka $f(c)$ adalah **minimum relatif**. (Cekung ke atas $\implies$ lembah)*
- *Jika $f''(c) = 0$, uji ini gagal. Gunakan Uji Turunan Pertama.*

Daftar isi

Grafik Polinomial dan Fungsi Rasional

Langkah-langkah Menggambar Grafik Fungsi $y = f(x)$

1. **Analisis Pra-Kalkulus**:
   - Tentukan domain (daerah asal) fungsi.
   - Cari titik potong dengan sumbu-x (akar) dan sumbu-y.
   - Uji kesimetrian (fungsi ganjil/genap).
   - Tentukan asimtot (tegak, datar, miring) untuk fungsi rasional.
2. **Analisis dengan Turunan Pertama**:
   - Cari $f'(x)$. Tentukan titik kritis.
   - Tentukan interval di mana fungsi naik ($f'(x) > 0$) dan turun ($f'(x) < 0$).
   - Identifikasi ekstrim lokal menggunakan Uji Turunan Pertama.
3. **Analisis dengan Turunan Kedua**:
   - Cari $f''(x)$.
   - Tentukan interval di mana grafik cekung ke atas ($f''(x) > 0$) dan cekung ke bawah ($f''(x) < 0$).
   - Cari titik belok.
4. **Sketsa Grafik**: Gabungkan semua informasi di atas untuk membuat sketsa grafik

Daftar isi

Nilai Maksimum dan Minimum pada Suatu Fungsi

Definisi 4

Ekstrim Absolut (Global) Misalkan f terdefinisi pada interval I.

- *$f(c)$ adalah **maksimum absolut** pada I jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua $x \in I$.*
- *$f(c)$ adalah **minimum absolut** pada I jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua $x \in I$.*

Nilai Maksimum dan Minimum pada Suatu Fungsi

Definisi 4

Ekstrim Absolut (Global) Misalkan f terdefinisi pada interval I.

- *$f(c)$ adalah **maksimum absolut** pada I jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua $x \in I$.*
- *$f(c)$ adalah **minimum absolut** pada I jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua $x \in I$.*

Teorema 3

Teorema Nilai Ekstrim Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, maka f pasti memiliki nilai maksimum absolut dan minimum absolut pada interval tersebut.

Nilai Maksimum dan Minimum pada Suatu Fungsi

Definisi 4

Ekstrim Absolut (Global) Misalkan f terdefinisi pada interval I.

- *$f(c)$ adalah **maksimum absolut** pada I jika $f(c) \geq f(x)$ untuk semua $x \in I$.*
- *$f(c)$ adalah **minimum absolut** pada I jika $f(c) \leq f(x)$ untuk semua $x \in I$.*

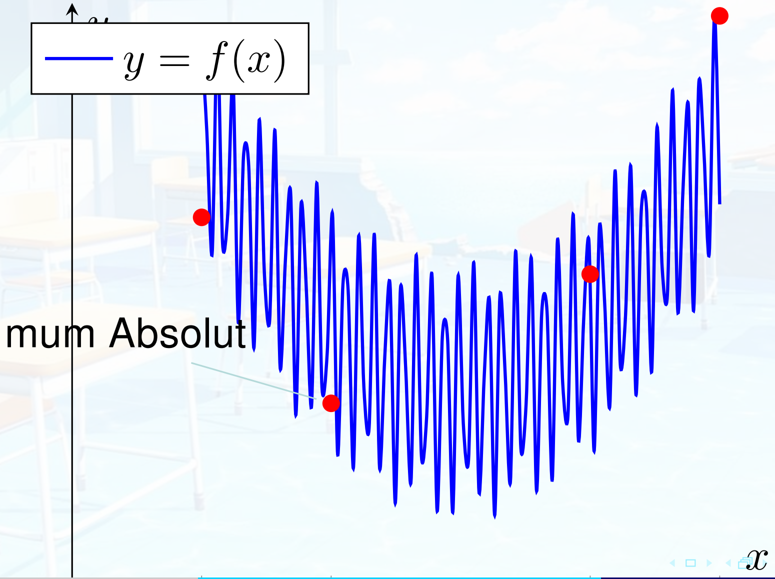
Teorema 3

Teorema Nilai Ekstrim Jika f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$, maka f pasti memiliki nilai maksimum absolut dan minimum absolut pada interval tersebut.

Prosedur Menemukan Ekstrim Absolut pada $[a, b]$

1. Cari semua titik kritis f pada interval terbuka (a, b).
2. Hitung nilai f di setiap titik kritis yang ditemukan.
3. Hitung nilai f di titik ujung interval, yaitu $f(a)$ dan $f(b)$.
4. Bandingkan semua nilai dari langkah 2 dan 3. Nilai terbesar adalah maksimum absolut,

Ilustrasi Ekstrim Absolut



Daftar isi

Aplikasi Masalah Maksimum dan Minimum

Contoh

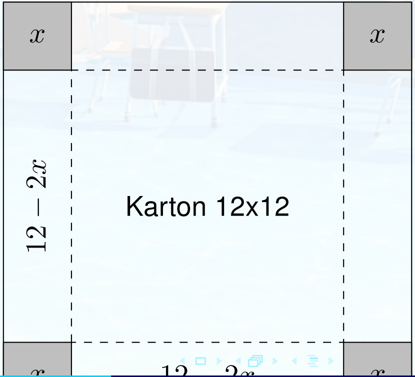
Sebuah kotak tanpa tutup akan dibuat dari selembar karton berbentuk persegi dengan panjang sisi 12 cm. Kotak dibuat dengan memotong empat persegi identik di setiap sudutnya, lalu melipat sisinya ke atas. Tentukan ukuran potongan agar volume kotak maksimum.

Contoh

Sebuah kotak tanpa tutup akan dibuat dari selembar karton berbentuk persegi dengan panjang sisi 12 cm. Kotak dibuat dengan memotong empat persegi identik di setiap sudutnya, lalu melipat sisinya ke atas. Tentukan ukuran potongan agar volume kotak maksimum.

Solusi:

- Misal x adalah panjang sisi persegi yang dipotong. Domain x adalah $(0, 6)$.
- Dimensi kotak:
  - Panjang: $p = 12 - 2x$
  - Lebar: $l = 12 - 2x$
  - Tinggi: $t = x$
- Volume: $V(x) = (12 - 2x)(12 - 2x)x = 4x(6 - x)^2 = 4(x^3 - 12x^2 + 36x)$.
- Cari maksimum $V(x)$. Turunkan:



Daftar isi

Teorema 4

Teorema Rolle Misalkan f *adalah fungsi yang memenuhi:*

1. f *kontinu pada interval tertutup* $[a, b]$.
2. f *terdiferensial pada interval terbuka* (a, b).
3. $f(a) = f(b)$.

Maka, ada setidaknya satu bilangan $c \in (a, b)$ *sedemikian sehingga* $f'(c) = 0$.

Teorema Rolle, Teorema Nilai Rata-rata

Teorema 4

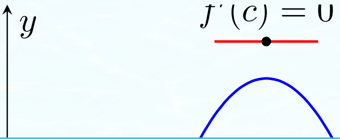
Teorema Rolle Misalkan f adalah fungsi yang memenuhi:

1. *f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$.*
2. *f terdiferensial pada interval terbuka (a, b).*
3. *$f(a) = f(b)$.*

Maka, ada setidaknya satu bilangan $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga $f'(c) = 0$.

Interpretasi Geometris

Jika sebuah kurva mulus memiliki ketinggian yang sama di dua titik, maka pasti ada setidaknya satu titik di antaranya di mana garis singgungnya horizontal.



Teorema Nilai Rata-rata (TNR)

Teorema 5

Misalkan f *adalah fungsi yang memenuhi:*

1. f *kontinu pada interval tertutup* $[a, b]$.
2. f *terdiferensial pada interval terbuka* (a, b).

Maka, ada setidaknya satu bilangan $c \in (a, b)$ *sedemikian sehingga*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Teorema Nilai Rata-rata (TNR)

Teorema 5

Misalkan f adalah fungsi yang memenuhi:

1. *f kontinu pada interval tertutup $[a, b]$.*
2. *f terdiferensial pada interval terbuka (a, b).*

Maka, ada setidaknya satu bilangan $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Interpretasi Geometris

Pada kurva mulus antara dua titik, pasti ada setidaknya satu titik di mana garis singgungnya sejajar dengan garis sekan (tali busur) yang menghubungkan kedua titik tersebut.