SKPB - ITS

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2024/2025

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Kamis, 17 Oktober 2024
Waktu	:	07.00-08.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	5-12, 101

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI

DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta menssketsa grafik persamaan	1	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	2	20
		3	20
		4	20
		5	20

SOAL

1. Dapatkan himpunan penyelesaian dari

$$\frac{1}{x+2} < \frac{1}{4-x}.$$

2. Diberikan $f(x) = x^2 + 2,\ x \geq 0$ dan $g(x) = \sqrt{x-3}$.
   (a) Dapatkan domain $f(x)$ dan $g(x)$.
   (b) Dapatkan $(g \circ f)(x)$ dan domain $(g \circ f)(x)$.

3. Diketahui $f(x) = x^3 - 2$.
   (a) Dapatkan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.
   (b) Sketsa grafik dari $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ pada satu bidang koordinat.

4. Hitunglah $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{5x^2-2}}{x+3}$.

5. Dapatkan persamaan garis singgung kurva $xy^2 + y + \sqrt{x} = x + 3$ di titik $(4, 1)$.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

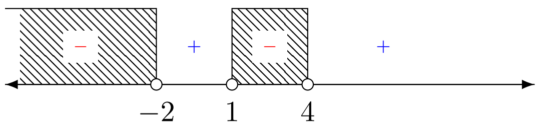
1. Pidahkan semua ruas ke kiri

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{x+2} - \frac{1}{4-x} < 0 \\
\iff &\frac{4-x-(x+2)}{(x+2)(4-x)} < 0 \\
\iff &\frac{2-2x}{(x+2)(4-x)} < 0 \\
\iff &\frac{1-x}{(x+2)(4-x)} < 0
\end{aligned}
$$

Diperoleh pembuat nol-nya adalah $x = 1, -2, 4$. Selanjutnya gunakan uji tanda, didapatkan

- $x = -3 \implies \dfrac{1-(-3)}{(-3+2)(4-(-3))} = \dfrac{4}{-7} < 0$
- $x = 0 \implies \dfrac{1-0}{(0+2)(4-0)} = \dfrac{1}{8} > 0$
- $x = 2 \implies \dfrac{1-2}{(2+2)(4-2)} = \dfrac{-1}{8} < 0$
- $x = 5 \implies \dfrac{1-5}{(5+2)(4-5)} = \dfrac{-4}{-7} > 0$

Kemudian gambarkan garis bilangan sebagai berikut



Sehingga diperoleh himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut adalah

$$H_p = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -2 \vee 1 \geq x < 4\} = (-\infty, -2) \cup (1, 4).$$

2. (a) Karena polinomial selalu terdefinisi di $\mathbb{R}$, maka domain f adalah $\mathcal{D}_f = [0, \infty)$ (karena dibatasi untuk $x \geq 0$). Sedangkan untuk $g(x) = \sqrt{x-3}$, agar terdefinisi maka $x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3$. Dengan demikian, domain dari g adalah $\mathcal{D}_g = [3, \infty)$.

   (b)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+2) = \sqrt{(x^2+2)-3} = \sqrt{x^2-1}$$

Menurut definisi domain komposisi fungsi, maka

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_{g \circ f} &= \{x \in \mathcal{D}_f \,|\, f(x) \in \mathcal{D}_g\} \\
&= \{x \in [0, \infty) \,|\, x^2 + 2 \in [3, \infty)\} \\
&= \{x \in [0, \infty) \,|\, x^2 + 2 \geq 3\} \\
&= \{x \in [0, \infty) \,|\, x^2 - 1 \geq 0\} \\
&= \{x \in [0, \infty) \,|\, x \geq 1 \text{ atau } x \leq -1\} \\
&= [1, \infty).
\end{aligned}
$$

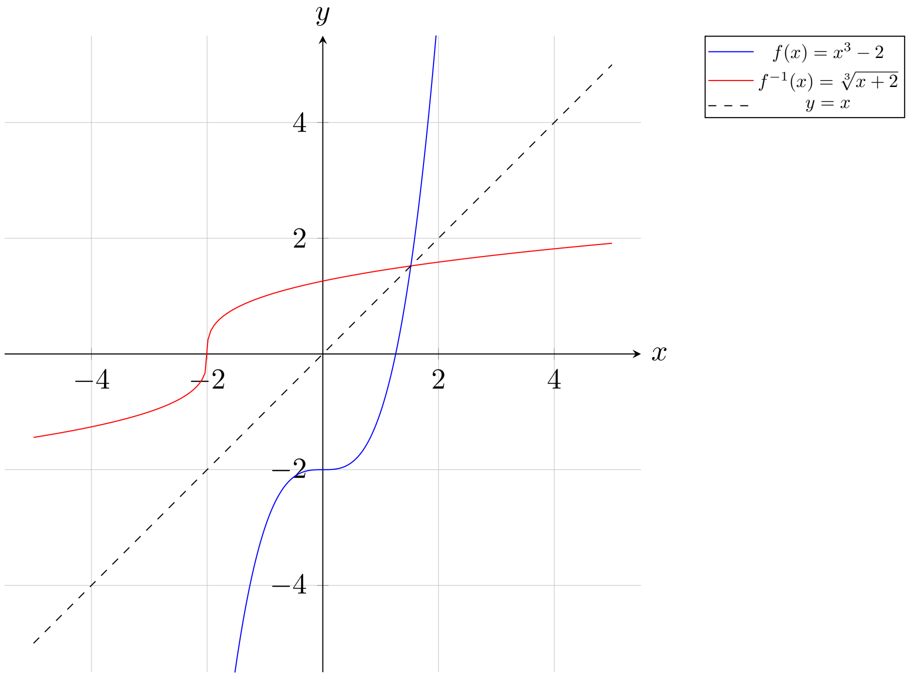
Jadi domain dari $(g \circ f)(x)$ adalah $\mathcal{D}_{g \circ f} = [1, \infty)$.

3. (a) Tukar $y = f(x)$ menjadi $x = f(y)$, sehingga

$$\begin{aligned} x &= y^3 - 2 \\ y^3 &= x + 2 \\ y &= \sqrt[3]{x+2}. f^{-1}(x) & &= \sqrt[3]{x+2}. \end{aligned}$$

Selanjutnya kita tahu bahwa $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = \mathbb{R}$ (karena fungsi kubik memiliki range semua bilangan real ($\mathbb{R}$)).

(b) Grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ dapat digambarkan sebagai berikut



4. Bagi pembilang dan penyebut dengan $|x|$ agar bentuknya menjadi

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{5x^2-2}}{x+3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{5x^2-2}}{|x|}}{\frac{x+3}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{\sqrt{5x^2-2}}{\sqrt{x^2}}}{\frac{x+3}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{5-\frac{2}{x^2}}}{\frac{x+3}{|x|}}.$$

karena $x \to -\infty$, maka $|x| = -x$. Sehingga

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{5-\frac{2}{x^2}}}{\frac{x+3}{|x|}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{5-\frac{2}{x^2}}}{\frac{x+3}{-x}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{5-\frac{2}{x^2}}}{-1-\frac{3}{x}} = \frac{\sqrt{5-0}}{-1-0} = -\sqrt{5}.$$

5. Diketahui $xy^2 + y + \sqrt{x} = x + 3$. Turunkan kedua ruas terhadap x,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(xy^2) + \frac{d}{dx}(y) + \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) &= \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(3) \\ y^2 + x(2y\frac{dy}{dx}) + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{x}} &= 1 + 0 \\ y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{2\sqrt{x}} &= 1 \\ (2xy+1)\frac{dy}{dx} &= 1 - y^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{1 - y^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{2xy+1}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, kita substitusi titik $(4,1)$ ke dalam turunan tersebut,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,1)} = \frac{1 - 1^2 - \frac{1}{2\sqrt{4}}}{2(4)(1)+1} = \frac{0 - \frac{1}{4}}{8+1} = -\frac{\frac{1}{4}}{9} = -\frac{1}{36}.$$

Dengan demikian, gradien garis singgung di titik $(4,1)$ adalah $m = -\frac{1}{36}$. Gunakan persamaan garis

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

dengan $(x_1, y_1) = (4,1)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} y - 1 &= -\frac{1}{36}(x-4) \\ y &= -\frac{1}{36}x + \frac{4}{36} + 1 \\ y &= -\frac{1}{36}x + \frac{40}{36} \\ y &= -\frac{1}{36}x + \frac{10}{9}. \end{aligned}$$

SKPB - ITS

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2024/2025

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Kamis, 17 Oktober 2024
Waktu	:	07.00-08.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	13-19, 103

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI

DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta menssketsa grafik persamaan	1	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	2	20
		3	20
		4	20
		5	20

SOAL

1. Diberikan titik $A(2,-1)$, $B(2,2)$ dan $C(0,4)$. Dapatkan persamaan garis yang melalui titik A dan sejajar dengan garis yang melalui B dan C.

2. Diberikan $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ dan $g(x) = \sqrt{x+1}$.

   (a) Dapatkan domain $f(x)$ dan $g(x)$.

   (b) Dapatkan $(f \circ g)(x)$ dan domain $(f \circ g)(x)$.

3. Diberikan $f(x) = x^2 - 4x + 7$.

   (a) Tentukan domain dari f sehingga f^{-1} ada.

   (b) Dapatkan f^{-1} beserta domainnya.

4. Dapatkan nilai k sedemikian sehingga fungsi

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - k, & x < 3 \\ 3x - 3, & x \geq 3 \end{cases}$$

   kontinu di $x = 3$.

5. Dapatkan $f'(x)$ dimana $f(x) = \sqrt{\dfrac{(3x+1)^3}{2x}}$.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Hitung gradien garis BC dengan $B(2,2)$ dan $C(0,4)$,

$$m_{BC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4-2}{0-2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Karena garis yang melalui titik A sejajar dengan garis BC, maka gradiennya juga -1. Gunakan persamaan garis

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

dengan titik A adalah $(x_1, y_1) = (2, -1)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} y - (-1) &= -1(x-2) \\ y + 1 &= -x + 2 \\ y &= -x + 1. \end{aligned}$$

2. (a) Agar $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$ terdefinisi, maka $x^2 - 4 \neq 0 \implies x^2 \neq 4 \implies x \neq \pm 2$. Dengan demikian, domain dari f adalah $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -2 \vee x \neq 2\}$. Sedangkan untuk $g(x) = \sqrt{x+1}$, agar terdefinisi maka $x + 1 \geq 0 \implies x \geq -1$. Dengan demikian, domain dari g adalah $\mathcal{D}_g = [-1, \infty)$.

(b)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x+1}) = \frac{1}{(\sqrt{x+1})^2 - 4} = \frac{1}{x+1-4} = \frac{1}{x-3}.$$

Menurut definisi domain komposisi fungsi, maka

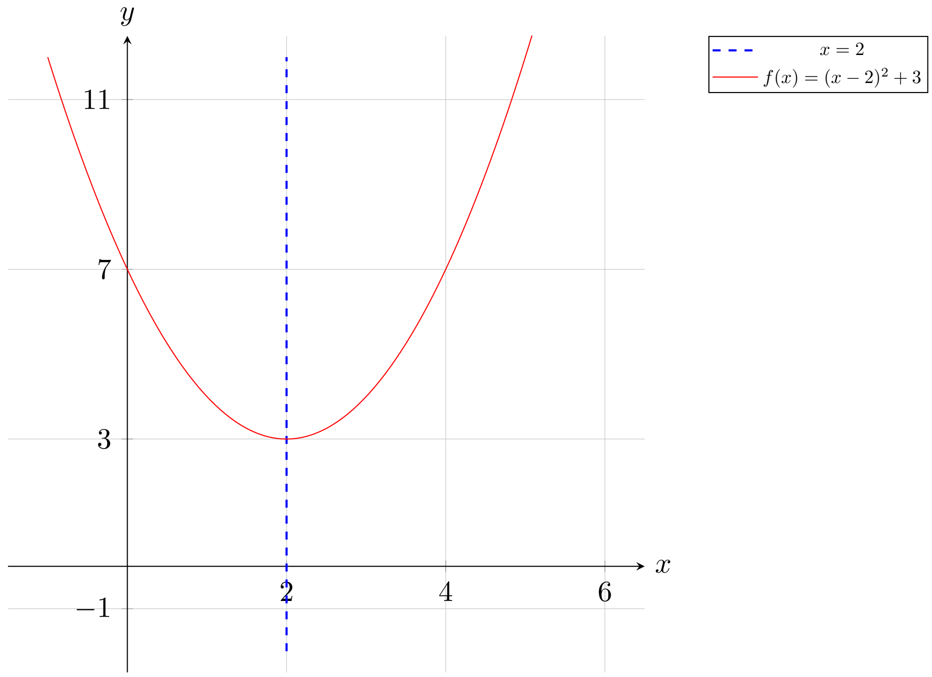
$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{f \circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g \,|\, g(x) \in \mathcal{D}_f\} \\ &= \{x \in [-1, \infty) \,|\, \sqrt{x+1} \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}\} \\ &= \{x \geq -1 \,|\, \sqrt{x+1} \neq 2\} \\ &= \{x \geq -1 \,|\, x + 1 \neq 4\} \\ &= \{x \geq -1 \,|\, x \neq 3\} \\ &= [-1, 3) \cup (3, \infty). \end{aligned}$$

Jadi domain dari $(f \circ g)(x)$ adalah $\mathcal{D}_{f \circ g} = [-1, 3) \cup (3, \infty)$.

3. (a) Ubah ekspresi fungsi tersebut dalam bentuk seperti berikut:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - 4x + 7 \\ f(x) &= (x^2 - 4x + 4) + 3 \\ f(x) &= (x-2)^2 + 3. \end{aligned}$$

Selanjutnya kita akan coba gambarkan grafiknya dimana merupakan grafik $y = x^2$ yang digeser 2 satuan ke kanan dan 3 satuan ke atas.

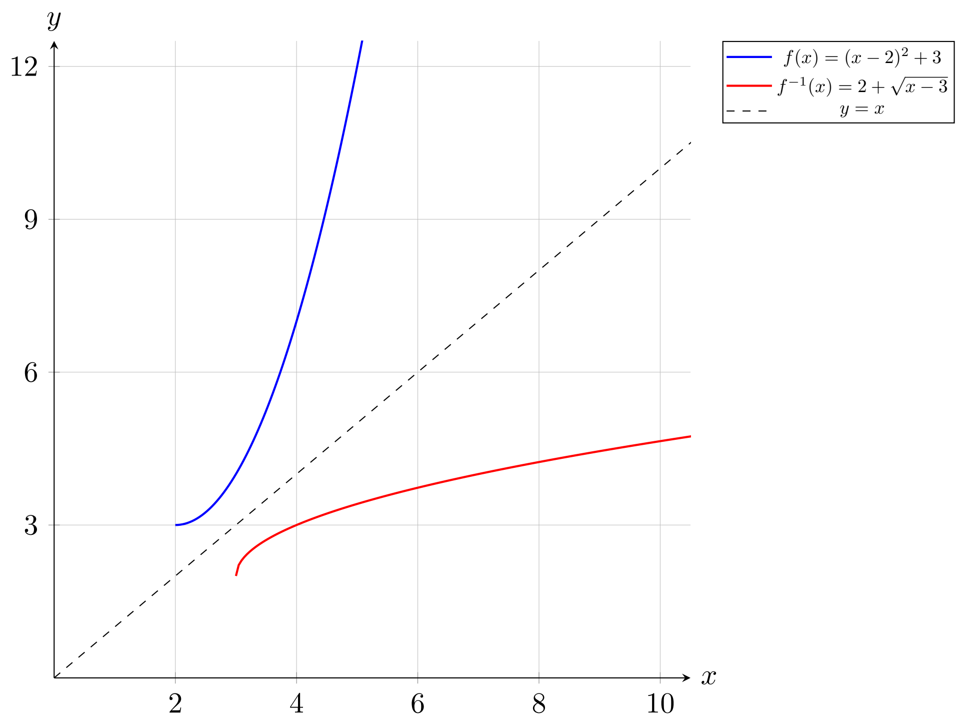


dapat di analisis bahwa $f(x)$ mempunya invers jika dibatasi pada sumbu simetri nya yaitu $x = 2$. Sehingga domain f agar f^{-1} ada adalah $\mathcal{D}_f = [2, \infty)$ atau $\mathcal{D}_f = (-\infty, 2]$.

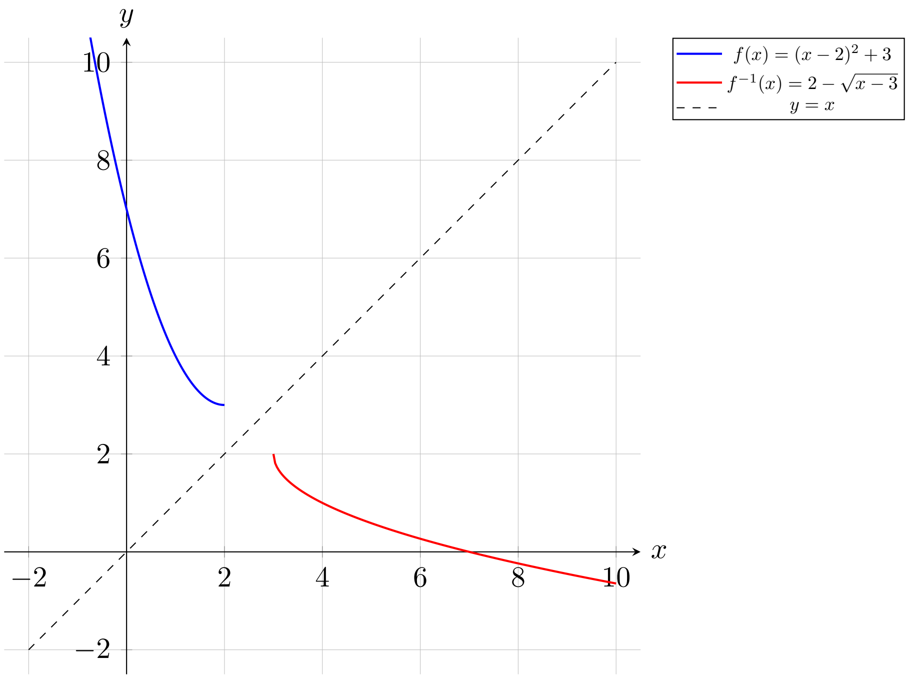
(b) Tukar $y = f(x)$ menjadi $x = f(y)$, sehingga

$$\begin{aligned} x &= y^2 - 4y + 7 \\ x - 7 &= y^2 - 4y \\ y^2 - 4y &= x - 7 \\ y^2 - 4y + 4 &= x - 7 + 4 \\ (y-2)^2 &= x - 3 \\ y - 2 &= \pm\sqrt{x-3} \\ y &= 2 \pm \sqrt{x-3}. \\ f^{-1}(x) &= 2 + \sqrt{x-3} \text{ atau } f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-3}. \end{aligned}$$

Selanjutnya kita tahu bahwa $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$. Jika kita ambil $\mathcal{D}_f = [2, \infty)$, maka $\mathcal{R}_f = [3, \infty)$ sehingga $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [3, \infty)$ dan $f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x-3}$. Grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ untuk $\mathcal{D}_f = [2, \infty)$ dan $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [3, \infty)$ dapat digambarkan sebagai berikut:



Namun jika kita ambil $\mathcal{D}_f = (-\infty, 2]$, maka $\mathcal{R}_f = (-\infty, 3]$ sehingga $\mathcal{D}_{f^{-1}} = (-\infty, 3]$ dan $f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x-3}$. Grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ untuk $\mathcal{D}_f = (-\infty, 2]$ dan $\mathcal{D}_{f^{-1}} = (-\infty, 3]$ dapat digambarkan sebagai berikut:



4. Pada soal ini, kita cukup untuk menyamakan limit kiri dan limit kanan di $x = 3$. Pada dasarnya kekontinuan di $x = 3$ akan terpenuhi jika
   - $f(3)$ terdefinisi,
   - $\lim_{x\to 3} f(x)$ ada,
   - $\lim_{x\to 3} f(x) = f(3)$.

Kita tahu bahwa $f(3) = 3(3) - 3 = 6$, sehingga $f(3)$ terdefinisi. Selanjutnya kita hitung limit kiri dan limit kanan di $x = 3$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 3^-} f(x) &= \lim_{x\to 3^-} (x^2 - k) = 3^2 - k = 9 - k,\\ \lim_{x\to 3^+} f(x) &= \lim_{x\to 3^+} (3x - 3) = 3(3) - 3 = 6.\end{aligned}$$

Agar limit kiri dan limit kanan sama, maka

$$\begin{aligned}9 - k &= 6\\ k &= 3.\end{aligned}$$

Dengan demikian, nilai k agar $f(x)$ kontinu di $x = 3$ adalah $k = 3$.

5. Fungsi tersebut dapat kita sederhanakan bentuknya menjadi

$$f(x) = \sqrt{\frac{(3x+1)^3}{2x}} = \frac{(3x+1)^{3/2}}{(2x)^{1/2}} = \frac{(3x+1)^{3/2}}{\sqrt{2}\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(3x+1)^{3/2}x^{-1/2}.$$

Untuk turunannya dapat kita gunakan aturan perkalian dan aturan rantai,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{3}{2}(3x+1)^{1/2}\cdot 3\cdot x^{-1/2} + (3x+1)^{3/2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-3/2}\right]\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{9}{2}(3x+1)^{1/2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}(3x+1)^{3/2}x^{-3/2}\right]\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[9(3x+1)^{1/2}x^{-1/2} - (3x+1)^{3/2}x^{-3/2}\right]\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(3x+1)^{1/2}x^{-3/2}[9x - (3x+1)]\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}(3x+1)^{1/2}x^{-3/2}(6x-1).\end{aligned}$$

Dengan demikian, turunan dari $f(x)$ adalah

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3x+1}\,(6x-1)}{2x\sqrt{2x}}.$$

SKPB - ITS

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2024/2025

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Kamis, 17 Oktober 2024
Waktu	:	11.00-12.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	20-33, 105, 106

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI

DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta menssketsa grafik persamaan	1	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	2	20
		3	20
		4	20
		5	20

SOAL

1. Dapatkan himpunan penyelesaian dari

$$-1 \leq |2-x| < 3.$$

2. Diberikan $f(x) = \sqrt{25-x^2}$ dan $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

   (a) Dapatkan domain $f(x)$ dan $g(x)$.

   (b) Dapatkan $(g \circ f)(x)$ dan domain $(g \circ f)(x)$.

3. Diberikan $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

   (a) Tentukan domain dari $f(x)$ sehingga inversnya ada.

   (b) Dapatkan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.

4. Diberikan fungsi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4-x}{2-\sqrt{x}}, & x \neq 4, \\ 6, & x = 4, \end{cases}$$

   selidiki kekontinuan $f(x)$ di $x = 4$.

5. Dapatkan $f''(x)$ dimana $f(x) = 2x + \left(2\sqrt{x} - 3\right)^{-2}$.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Karena nilai mutlak selalu bernilai positif, maka tidak perlu kita tinjau untuk kasus $-1 \leq |2-x|$. Sehingga kita hanya perlu menyelesaikan pertidaksamaan $|2-x| < 3$. Berdasarkan definisi nilai mutlak, maka

$$\begin{aligned} |2-x| < 3 &\iff -3 < 2 - x < 3 \\ &\iff -3 - 2 < -x < 3 - 2 \\ &\iff -5 < -x < 1 \\ &\iff 5 > x > -1 \\ &\iff -1 < x < 5. \end{aligned}$$

Dengan demikian, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut adalah $(-1, 5)$.

2. (a) Agar $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ terdefinisi, maka $25 - x^2 \geq 0 \implies x^2 \leq 25 \implies -5 \leq x \leq 5$. Dengan demikian, domain dari f adalah $\mathcal{D}_f = [-5, 5]$. Sedangkan untuk $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$, agar terdefinisi maka $x^2 \neq 0 \implies x \neq 0$. Dengan demikian, domain dari g adalah $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\}$.

   (b)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{25 - x^2}) = \frac{1}{(\sqrt{25 - x^2})^2} = \frac{1}{25 - x^2}.$$

Menurut definisi domain komposisi fungsi, maka

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{g \circ f} &= \{x \in \mathcal{D}_f \,|\, f(x) \in \mathcal{D}_g\} \\ &= \{x \in [-5, 5] \,|\, \sqrt{25 - x^2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\} \\ &= \{x \in [-5, 5] \,|\, 25 - x^2 \neq 0\} \\ &= \{x \in [-5, 5] \,|\, x^2 \neq 25\} \\ &= \{x \in [-5, 5] \,|\, x \neq 5 \text{ dan } x \neq -5\} \\ &= (-5, 5). \end{aligned}$$

Jadi domain dari $(g \circ f)(x)$ adalah $\mathcal{D}_{g \circ f} = (-5, 5)$.

3. (a) Agar $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ mempunyai invers, maka kita perlu membatasi domainnya pada salah satu sisi sumbu simetri yaitu $x = 0$. Sehingga domain f agar f^{-1} ada adalah $\mathcal{D}_f = [0, 2]$ atau $\mathcal{D}_f = [-2, 0]$.

   (b) Tukar $y = f(x)$ menjadi $x = f(y)$, sehingga

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{4 - y^2} \\ x^2 &= 4 - y^2 \\ y^2 &= 4 - x^2 \\ y &= \pm\sqrt{4 - x^2} \\ f^{-1}(x) &= \sqrt{4 - x^2} \text{ atau } f^{-1}(x) = -\sqrt{4 - x^2}. \end{aligned}$$

Selanjutnya kita tahu bahwa $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$. Jika kita ambil $\mathcal{D}_f = [0, 2]$, maka $\mathcal{R}_f = [0, 2]$ sehingga $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [0, 2]$ dan $f^{-1}(x) = \sqrt{4 - x^2}$. Namun jika kita ambil $\mathcal{D}_f = [-2, 0]$, maka $\mathcal{R}_f = [0, 2]$ sehingga $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [0, 2]$ dan $f^{-1}(x) = -\sqrt{4 - x^2}$.

4. Pada soal ini, kita cukup untuk menyamakan limit kiri dan limit kanan di $x = 4$. Pada dasarnya kekontinuan di $x = 4$ akan terpenuhi jika

   - $f(4)$ terdefinisi,
   - $\lim_{x\to 4} f(x)$ ada,
   - $\lim_{x\to 4} f(x) = f(4)$.

   Kita tahu bahwa $f(4) = 6$, sehingga $f(4)$ terdefinisi. Selanjutnya kita hitung limit kiri dan limit kanan di $x = 4$,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4^-} f(x) &= \lim_{x\to 4^-} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}} = \frac{4-4}{2-\sqrt{4}} = \frac{0}{0},\\ \lim_{x\to 4^+} f(x) &= \lim_{x\to 4^+} 6 = 6.\end{aligned}$$

   Karena limit kiri menghasilkan bentuk tak tentu $\frac{0}{0}$, maka kita perlu menyederhanakannya terlebih dahulu. Kita lakukan dengan cara mengalikan dengan bentuk sekawan dari penyebutnya, sehingga

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 4^-} f(x) &= \lim_{x\to 4^-} \frac{4-x}{2-\sqrt{x}} \cdot \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}\\ &= \lim_{x\to 4^-} \frac{(4-x)(2+\sqrt{x})}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{x\to 4^-} \frac{(4-x)(2+\sqrt{x})}{4-x}\\ &= \lim_{x\to 4^-} (2+\sqrt{x})\\ &= 2+\sqrt{4} = 4.\end{aligned}$$

   Karena limit kiri dan limit kanan tidak sama, maka fungsi tersebut tidak kontinu di $x = 4$.

5. Dengan aturan rantai dapat diperoleh

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(2x + (2\sqrt{x}-3)^{-2}\right)\\ &= \frac{d}{dx}(2x) + \frac{d}{dx}((2\sqrt{x}-3)^{-2})\\ &= 2 + (-2)(2\sqrt{x}-3)^{-3} \cdot \frac{d}{dx}(2\sqrt{x}-3)\\ &= 2 + (-2)(2\sqrt{x}-3)^{-3} \cdot \left(2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\\ &= 2 - \frac{2}{\sqrt{x}(2\sqrt{x}-3)^3}.\end{aligned}$$

SKPB - ITS

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2024/2025

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Kamis, 17 Oktober 2024
Waktu	:	13.30-15.10 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	34-46, 107, 108

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI

DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta menssketsa grafik persamaan	1	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	2	20
		3	20
		4	20
		5	20

SOAL

1. Diberikan titik $A(1,1)$, $B(4,2)$ dan $C(2,6)$. Tentukan jarak dari titik C ke garis yang melalui titik A dan B.
2. Diberikan $f(x) = x - 4$, untuk $x \geq 4$ dan $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$.
   (a) Dapatkan domain $f(x)$ dan $g(x)$.
   (b) Tentukan $(g \circ f)(x)$ dan domain $(g \circ f)(x)$.
3. Diberikan fungsi $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $0 \leq x \leq 1$.
   (a) Tentukan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.
   (b) Gambarkan grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ dalam satu bidang koordinat.
4. Hitunglah $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x - 2}$.
5. Diketahui persamaan garis singgung kurva $y^2 - xy = -2$ di titik (a, b) sejajar dengan kurva $y = -x$. Dapatkan titik (a, b).

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Diketahui titik $A(1,1)$, $B(4,2)$ dan $C(2,6)$. Pertama kita cari persamaan garis yang melalui titik A dan B. Gradien garis tersebut adalah

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}.$$

Dengan menggunakan titik $A(1,1)$, maka persamaan garisnya adalah

$$\begin{aligned} y - y_1 &= m(x - x_1) \\ y - 1 &= \frac{1}{3}(x-1) \\ 3y - 3 &= x - 1 \\ x - 3y &= -2. \end{aligned}$$

Dengan demikian, persamaan garis yang melalui titik A dan B adalah $x - 3y + 2 = 0$. Selanjutnya kita cari jarak dari titik $C(2,6)$ ke garis tersebut dengan rumus jarak titik ke garis,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|1(2) + (-3)(6) + 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} = \frac{|-16|}{\sqrt{1+9}} = \frac{16}{\sqrt{10}} = \frac{16\sqrt{10}}{10} = \frac{8\sqrt{10}}{5}.$$

Dengan demikian, jarak dari titik C ke garis yang melalui titik A dan B adalah $\dfrac{8\sqrt{10}}{5}$ satuan.

2. (a) Ingat bahwa fungsi polinomial terdefinisi di semua bilangan real, namun jika dalam soal diberikan batasan domain, maka kita ikuti batasan tersebut. Sehingga domain dari $f(x) = x - 4$ adalah $\mathcal{D}_f = [4, \infty)$. Sedangkan agar $g(x) = \sqrt{4 - x^2}$ terdefinisi, maka

$$4 - x^2 \geq 0 \implies x^2 \leq 4 \implies -2 \leq x \leq 2.$$

Dengan demikian, domain dari g adalah $\mathcal{D}_g = [-2, 2]$.

(b)

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-4) = \sqrt{4 - (x-4)^2} = \sqrt{4 - (x^2 - 8x + 16)} = \sqrt{-x^2 + 8x - 12}.$$

Menurut definisi domain komposisi fungsi, maka

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{g \circ f} &= \{x \in \mathcal{D}_f \,|\, f(x) \in \mathcal{D}_g\} \\ &= \{x \in [4, \infty) \,|\, x - 4 \in [-2, 2]\} \\ &= \{x \geq 4 \,|\, -2 \leq x - 4 \leq 2\} \\ &= \{x \geq 4 \,|\, 2 \leq x \leq 6\} \\ &= [4, 6]. \end{aligned}$$

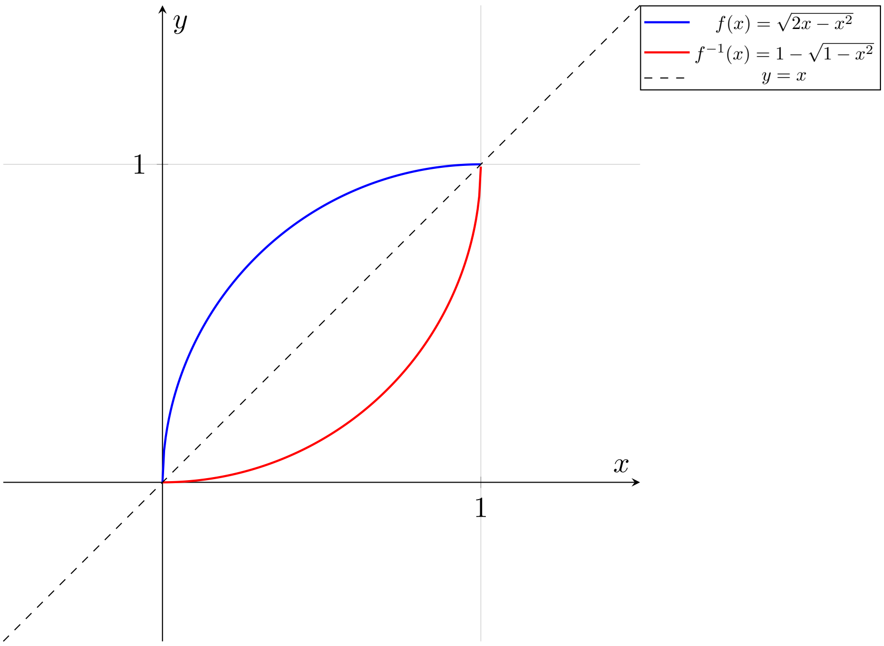
Jadi domain dari $(g \circ f)(x)$ adalah $\mathcal{D}_{g \circ f} = [4, 6]$.

3. (a) Sebelum mencari ekspresi fungsi inversnya dapat kita tinjau bahwa domain f adalah $\mathcal{D}_f = [0, 1]$ dan range f adalah $\mathcal{R}_f = [0, 1]$. Sehingga domain dari f^{-1} adalah $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = [0, 1]$.

Tukar $y = f(x)$ menjadi $x = f(y)$, sehingga

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2y - y^2} \\ x^2 &= 2y - y^2 \\ y^2 - 2y &= -x^2 \\ y^2 - 2y + 1 &= -x^2 + 1 \\ (y-1)^2 &= 1 - x^2 \\ y - 1 &= \pm\sqrt{1 - x^2} \\ y &= 1 \pm \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}$$

Karena $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f = [0, 1]$, maka haruslah kita ambil $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1 - x^2}$.

(b) 

4. Untuk menghitung limit tersebut, kita kalikan dengan bentuk sekawan dari pembilangnya, sehingga

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x^2+5)-9}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)} \\ &= \lim_{x\to 2} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} \\ &= \frac{2+2}{\sqrt{2^2+5}+3} = \frac{4}{\sqrt{9}+3} = \frac{4}{3+3} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, nilai limit tersebut adalah $\dfrac{2}{3}$.

5. Diketahui persamaan garis singgung kurva $y^2 - xy = -2$ di titik (a, b) sejajar dengan kurva $y = -x$. Pertama kita cari turunan implisit dari persamaan kurva tersebut,

$$\begin{aligned} y^2 - xy &= -2 \\ 2y\frac{dy}{dx} - \left(x\frac{dy}{dx} + y\right) &= 0 \\ 2y\frac{dy}{dx} - x\frac{dy}{dx} &= y \\ (2y - x)\frac{dy}{dx} &= y \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{2y - x}. \end{aligned}$$

Karena garis singgung di titik (a, b) sejajar dengan kurva $y = -x$, maka gradien garis singgung tersebut adalah -1. Sehingga

$$\begin{aligned} \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(a,b)} &= -1 \\ \frac{b}{2b - a} &= -1 \\ b &= -2b + a \\ 3b &= a \\ a &= 3b. \end{aligned}$$

Selanjutnya kita substitusi $a = 3b$ ke dalam persamaan kurva, sehingga

$$\begin{aligned} b^2 - (3b)b &= -2 \\ b^2 - 3b^2 &= -2 \\ -2b^2 &= -2 \\ b^2 &= 1 \\ b &= \pm 1. \end{aligned}$$

Jika $b = 1$, maka $a = 3(1) = 3$. Jika $b = -1$, maka $a = 3(-1) = -3$. Dengan demikian, titik (a, b) yang dimaksud adalah $(3, 1)$ dan $(-3, -1)$.

SKPB - ITS

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2024/2025

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Kamis, 17 Oktober 2024
Waktu	:	09.00-10.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	47-59, 111

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI

DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

ETS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-1 Mampu menyelesaikan persamaan dan pertidaksamaan serta menssketsa grafik persamaan	1	20
	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	2	20
		3	20
		4	20
		5	20

SOAL

1. Dapatkan himpunan penyelesaian dari $\dfrac{x}{|2x-5|} > 5$.

2. Diberikan $f(x) = \sqrt{x-3}$ dan $g(x) = 1 + \sqrt{x-5}$.
   (a) Dapatkan domain $f(x)$ dan $g(x)$.
   (b) Dapatkan $(f \circ g)(x)$ dan domain $(f \circ g)(x)$.

3. Diberikan $f(x) = \sqrt[3]{x} - 1,\ x \geq 1$.
   (a) Dapatkan $f^{-1}(x)$ beserta domainnya.
   (b) Sketsa $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ pada satu bidang koordinat.

4. Hitunglah $\lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{2-y}{\sqrt{7+4y^2}}$.

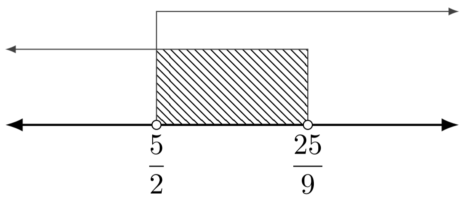
5. Dapatkan persamaan garis singgung kurva $x^2 + y + \frac{y}{x} = \sqrt{x} + 2$ di titik $(1,1)$.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

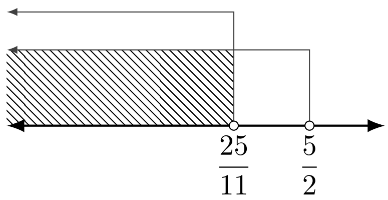
SOLUSI

1. Sebelum membagi kasus, perhatikan bahwa untuk $x = \frac{5}{2}$ akan menyebabkan penyebut menjadi nol. Sehingga dapat kita hiraukan nilai $x = \frac{5}{2}$ dari himpunan penyelesaian, maka yang perlu kita tinjau hanyalah
$$x > 5|2x-5|.$$[1]
Bagi kasus yaitu ketika $2x - 5 > 0$ dan $2x - 5 < 0$.[2]
   - Kasus $2x - 5 > 0 \implies x > \frac{5}{2}$. Diperoleh
$$\begin{aligned} x > 5|2x-5| &\iff x > 5(2x-5) \\ &\iff x > 10x - 25 \\ &\iff -9x > -25 \\ &\iff 9x < 25 \\ &\iff x < \frac{25}{9}. \end{aligned}$$
     Secara garis bilangan dapat diilustrasikan sebagai berikut,



$$\left(\frac{5}{2}, \infty\right) \cap \left(-\infty, \frac{25}{9}\right) = \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{9}\right)$$

   - Kasus $2x - 5 < 0 \implies x < \frac{5}{2}$. Maka
$$\begin{aligned} x > 5|2x-5| &\iff x < -5(2x-5) \\ &\iff x < -10x + 25 \\ &\iff 11x < 25 \\ &\iff x < \frac{25}{11}. \end{aligned}$$



$$\left(-\infty, \frac{5}{2}\right) \cap \left(-\infty, \frac{25}{11}\right) = \left(-\infty, \frac{25}{11}\right)$$

Dengan demikian, himpunan penyelesaian dari pertidaksamaan tersebut adalah
$$\left(-\infty, \frac{25}{11}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \frac{25}{9}\right).$$

2. (a) Agar $f(x) = \sqrt{x-3}$ terdefinisi, maka $x - 3 \geq 0 \implies x \geq 3$. Dengan demikian, domain dari f adalah $\mathcal{D}_f = [3, \infty)$. Sedangkan untuk $g(x) = 1 + \sqrt{x-5}$, agar terdefinisi maka $x - 5 \geq 0 \implies x \geq 5$. Dengan demikian, domain dari g adalah $\mathcal{D}_g = [5, \infty)$.

[1] karena kita yakin bahwa $|2x-5| \neq 0$, maka kita boleh mengalikan kedua ruas dengan $|2x-5|$ tanpa mengubah arah pertidaksamaan.

[2] Kasus $2x - 5 = 0$ tidak perlu ditinjau karena akan menyebabkan penyebut menjadi nol.

(b)

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 + \sqrt{x-5}) = \sqrt{(1 + \sqrt{x-5}) - 3} = \sqrt{\sqrt{x-5} - 2}.$$

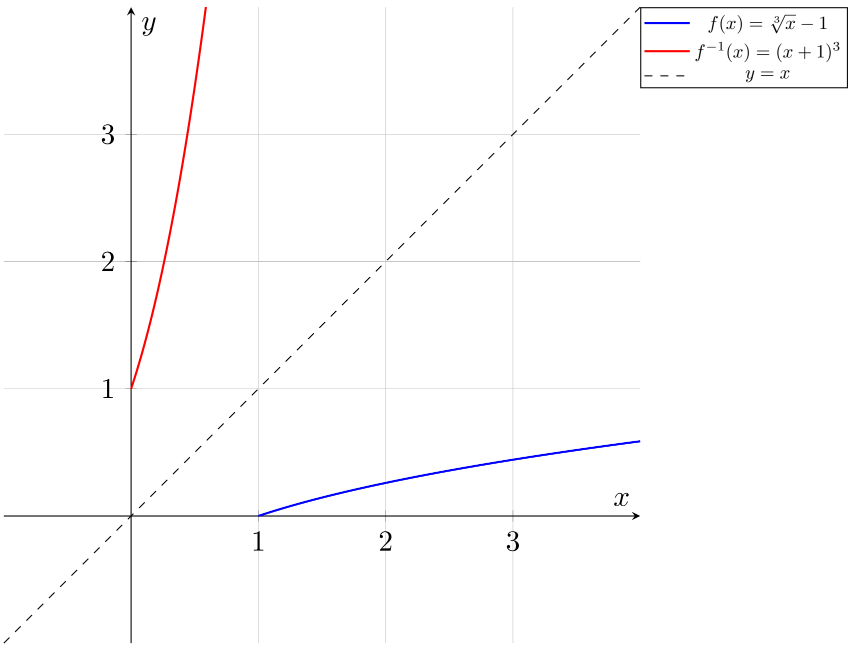
Menurut definisi domain komposisi fungsi, maka

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{f \circ g} &= \{x \in \mathcal{D}_g \,|\, g(x) \in \mathcal{D}_f\} \\
&= \{x \in [5, \infty) \,|\, 1 + \sqrt{x-5} \in [3, \infty)\} \\
&= \{x \geq 5 \,|\, 1 + \sqrt{x-5} \geq 3\} \\
&= \{x \geq 5 \,|\, \sqrt{x-5} \geq 2\} \\
&= \{x \geq 5 \,|\, x - 5 \geq 4\} \\
&= \{x \geq 5 \,|\, x \geq 9\} \\
&= [9, \infty).
\end{aligned}$$

Jadi domain dari $(f \circ g)(x)$ adalah $\mathcal{D}_{f \circ g} = [9, \infty)$.

3. (a) Sebelum mencari ekspresi fungsi inversnya dapat kita tinjau bahwa domain f adalah $\mathcal{D}_f = [1, \infty)$ dan range f adalah $\mathcal{R}_f = [0, \infty)$. Sehingga domain dari f^{-1} adalah $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = [0, \infty)$. Tukar $y = f(x)$ menjadi $x = f(y)$, sehingga

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{y} - 1 \\
x + 1 &= \sqrt[3]{y} \\
(x+1)^3 &= y \\
f^{-1}(x) &= (x+1)^3.
\end{aligned}$$



(b)

4. Untuk menghitung limit tersebut, kita bagi pembilang dan penyebut dengan $|y|$, sehingga

$$\lim_{y \to \infty} \frac{2 - y}{\sqrt{7 + 4y^2}} = \lim_{y \to \infty} \frac{\frac{2-y}{|y|}}{\frac{\sqrt{7+4y^2}}{|y|}} = \lim_{y \to \infty} \frac{\frac{2}{|y|} - \frac{y}{|y|}}{\sqrt{\frac{7}{y^2} + 4}}$$

Karena $y \to \infty$, maka $y > 0$ sehingga $|y| = y$. Oleh karena itu,

$$\lim_{y\to\infty} \frac{2-y}{\sqrt{7+4y^2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{\frac{2}{y}-1}{\sqrt{\frac{7}{y^2}+4}} = \frac{\lim_{y\to\infty}\left(\frac{2}{y}-1\right)}{\lim_{y\to\infty}\sqrt{\frac{7}{y^2}+4}} = \frac{0-1}{\sqrt{0+4}} = \frac{-1}{\sqrt{4}} = \frac{-1}{2}.$$

Dengan demikian, nilai limit tersebut adalah $-\frac{1}{2}$.

5. Pertama kita cari turunan implisit dari persamaan kurva tersebut,

$$\begin{aligned}
x^2 + y + \frac{y}{x} &= \sqrt{x} + 2 \\
2x + \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{dy}{dx}\cdot x - y\cdot 1}{x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 \\
2x + \frac{dy}{dx} + \frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
2x + \frac{dy}{dx} + \frac{\frac{dy}{dx}}{x} - \frac{y}{x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\
2x - \frac{y}{x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(1+\frac{1}{x}\right)\frac{dy}{dx} \\
2x - \frac{y}{x^2} &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \left(\frac{x+1}{x}\right)\frac{dy}{dx} \\
2x - \frac{y}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} &= -\left(\frac{x+1}{x}\right)\frac{dy}{dx} \\
-\left(2x - \frac{y}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) &= \left(\frac{x+1}{x}\right)\frac{dy}{dx} \\
-\left(2x - \frac{y}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\frac{x}{x+1}\right) &= \frac{dy}{dx}.
\end{aligned}$$

Selanjutnya kita substitusi titik $(1, 1)$ ke dalam turunan tersebut, sehingga

$$\begin{aligned}
\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,1)} &= -\left(2(1) - \frac{1}{1^2} - \frac{1}{2\sqrt{1}}\right)\cdot\left(\frac{1}{1+1}\right) \\
&= -\left(2 - 1 - \frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= -\left(\frac{3}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= -\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, gradien garis singgung di titik $(1, 1)$ adalah $-\frac{3}{4}$. Sehingga persamaan garis singgungnya adalah

$$\begin{aligned}
y - y_1 &= m(x - x_1) \\
y - 1 &= -\frac{3}{4}(x-1) \\
4y - 4 &= -3x + 3 \\
3x + 4y &= 7.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, persamaan garis singgung kurva di titik $(1, 1)$ adalah $3x + 4y = 7$.