SKPB - ITS

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2023/2024

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 2 (SM234201) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Rabu, 24 April 2024
Waktu	:	07.00-08.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	1-13, 101

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan.
Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Jika $\frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} u\right) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$ untuk u fungsi x, maka dapatkan $\frac{dy}{dx}$ jika $y = \sec^{-1}\left(e^{-3x}\right)$.
2. Hitung integral
$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^p}{x^2}\, dx$$
dengan $p = \frac{1}{2x}$
3. Hitung integral
$$\int \sin^2(2x)\, \cos^3(2x)\, dx.$$
4. Hitung integral
$$\int \frac{x^3}{x^2-5x-6}\, dx.$$
5. Dapatkan
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right).$$

Selamat Mengerjakan

"*Jujur adalah kunci kesuksesan*"

SOLUSI

1. Dari informasi yang diberikan, dapat dimisalkan bahwa

$$u = e^{-3x} \implies \frac{du}{dx} = -3e^{-3x}$$

Sehingga, kita dapatkan

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sec^{-1} u\right) = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx} = \frac{1}{\cancel{e^{-3x}}\sqrt{e^{-6x}-1}} \cdot (-3\cancel{e^{-3x}}) = \boxed{-\frac{3}{\sqrt{e^{-6x}-1}}}.$$

2. Soal tersebut telah dipermudahkan dengan memberikan clue yaitu menggunakan substitusi

$$p = \frac{1}{2x} \implies 2dp = -\frac{1}{x^2}dx$$

dan untuk batas integralnya, kita dapatkan

$$x = \frac{1}{4} \implies p = \frac{1}{2(\frac{1}{4})} = 2$$
$$x = \frac{1}{2} \implies p = \frac{1}{2(\frac{1}{2})} = 1$$

Sehingga integral tersebut dapat ditulis ulang menjadi

$$\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\frac{1}{2x}}}{x^2}\,dx = \int_2^1 e^p(-2dp) = 2\int_1^2 e^p\,dp = 2\left[e^p\right]_1^2 = \boxed{2\left(e^2-e\right)}$$

3. Ingat bahwa $\cos^2(\theta) = 1-\sin^2(\theta)$, sehingga integral tersebut dapat ditulis ulang menjadi[1]

$$\begin{aligned}\int \sin^2(2x)\,\cos^3(2x)\,dx &= \int \sin^2(2x)\,\cos^2(2x)\cos(2x)\,dx\\ &= \int \sin^2(2x)\left(1-\sin^2(2x)\right)\cos(2x)\,dx\\ &= \int \left[\sin^2(2x)-\sin^4(2x)\right]\cos(2x)\,dx\end{aligned}$$

Dengan menggunakan substitusi $u = \sin(2x) \implies \frac{1}{2}du = \cos(2x)\,dx$, diperoleh

$$\begin{aligned}\int \left[\sin^2(2x)-\sin^4(2x)\right]\cos(2x)\,dx &= \frac{1}{2}\int \left[u^2-u^4\right]\,du\\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^5}{5}\right]+C\\ &= \boxed{\frac{1}{6}\sin^3(2x)-\frac{1}{10}\sin^5(2x)+C}\end{aligned}$$

4. Karena bentuk pecahan rasional tersebut memiliki pembilang yang derajatnya lebih besar dari penyebutnya, maka kita harus menyederhanakannya terlebih dahulu.

   Disini akan digunakan metode pembagian porogapit untuk menyederhanakan bentuk rasional tersebut.

[1] Anda juga dapat menggunakan rumus yang ada pada buku diktat Kalkulus II

$$
\begin{array}{r}
x \quad + 5 \\
x^2 - 5x - 6 \overline{) \; x^3 \qquad\qquad\qquad} \\
\underline{- x^3 + 5x^2 \quad + 6x} \\
5x^2 \quad + 6x \\
\underline{- 5x^2 + 25x + 30} \\
31x + 30
\end{array}
$$

Fungsi rasional tersebut dapat ditulis ulang menjadi

$$\frac{x^3}{x^2-5x-6} = x + 5 + \frac{31x+30}{x^2-5x-6}$$

Sekarang kita tinjau pecahan rasional

$$\frac{31x+30}{x^2-5x-6} = \frac{31x+30}{(x-6)(x+1)} = \frac{A}{x-6} + \frac{B}{x+1} = \frac{A(x+1)+B(x-6)}{(x-6)(x+1)}$$

Dengan menyamakan pembilang, kita dapatkan

$$31x + 30 = A(x+1) + B(x-6)$$

Subtitusikan $x = 6$ dan $x = -1$ untuk mendapatkan nilai A dan B[2]

$$
\begin{aligned}
x = 6 &\implies 31(6) + 30 = A(6+1) + B(0) \\
&\implies 216 = 7A \implies A = \frac{216}{7} \\
x = -1 &\implies 31(-1) + 30 = A(0) + B(-1-6) \\
&\implies -1 = -7B \implies B = \frac{1}{7}
\end{aligned}
$$

Sehingga integral pada soal dapat dituliskan sebagai

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{x^2-5x-6}\,dx &= \int x + 5 + \frac{216}{7(x-6)} + \frac{1}{7(x+1)}\,dx \\
&= \int (x+5)\,dx + \frac{216}{7}\int \frac{1}{x-6}\,dx + \frac{1}{7}\int \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \boxed{\frac{x^2}{2} + 5x + \frac{216}{7}\ln|x-6| + \frac{1}{7}\ln|x+1| + C}
\end{aligned}
$$

5. Ketika $x \to 0$ ekspresi diatas menjadi bentuk tak tentu $\infty - \infty$, sehingga kita perlu mengubah ekspresi fungsinya agar mendapatkan bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$.[3]

   Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right) = \frac{0}{0}$$

   oleh karena itu kita dapat menggunakan L'Hôpital untuk menyelesaikan limit tersebut.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}\right) \overset{\text{Ⓛ}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\right) \overset{\text{Ⓛ}}{=} \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x}{2e^x+xe^x}\right) = \frac{1}{2\cdot 1 + 0\cdot 1} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

[2] x yang dipilih boleh saja sembarang bilangan, namun akan lebih mudah jika kita memilih x yang membuat salah satu ekspresi menjadi nol.

[3] L'Hôpital hanya bisa digunakan pada bentuk $\frac{0}{0}$ atau $\frac{\infty}{\infty}$

SKPB - ITS

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2023/2024

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 2 (SM234201) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Rabu, 24 April 2024
Waktu	:	09.00-10.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	15-27, 102

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan.
Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.
DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Dapatkan turunan dari $f(x) = e^x \tan^{-1} x$.
2. Hitung integral
$$\int \frac{e^x}{e^x + 1}\, dx.$$
3. Hitung integral
$$\int \ln(t^2 + 1)\, dt.$$
4. Hitung integral
$$\int \frac{2x^2 - 2x - 1}{x^2 + x^3}\, dx.$$
5. Selesaikan integral tak wajar
$$\int_0^{\pi/6} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - 2\sin x}}\, dx.$$

Selamat Mengerjakan

"*Jujur adalah kunci kesuksesan*"

SOLUSI

1. Ingat bahwa $\frac{d}{dx}\tan^{-1} x = \frac{1}{1+x^2}$. Kemudian dengan memisalkan $u = e^x$ dan $v = \tan^{-1} x$, maka dengan aturan perkalian pada diferensiasi didapatkan

$$\begin{aligned} f'(x) &= u'v + uv' \\ &= e^x \tan^{-1} x + e^x \cdot \frac{1}{1+x^2} \\ &= \boxed{e^x \left(\tan^{-1} x + \frac{1}{1+x^2}\right)} \end{aligned}$$

2. Gunakan teknik substitusi, yaitu $u = e^x + 1$, sehingga $du = e^x dx$. Akhirnya diperoleh

$$\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|e^x+1| + C = \boxed{\ln(e^x+1) + C}$$

3. Gunakan teknik integral parsial dengan memisalkan

$$\begin{aligned} u = \ln(t^2+1) &\implies du = \frac{2t}{t^2+1}dt \\ dv = dt &\implies v = t \end{aligned}$$

Selanjutnya didapatkan ekspresi

$$\int \ln(t^2+1)\,dt = uv - \int v\,du = t\ln(t^2+1) - \int \frac{2t^2}{t^2+1}dt = t\ln(t^2+1) - 2\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt$$

Langkah terakhir adalah menyelesaikan integral yang tersisa, yaitu

$$\int \left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt = t - \tan^{-1} t + C$$

Jadi didapatkan kesimpulan[4]

$$\int \ln(t^2+1)\,dt = \boxed{t\ln(t^2+1) - 2t - 2\tan^{-1} t + C}$$

4. Akan digunakan metode pecahan parsial untuk menyelesaikan integral tersebut.

$$\frac{2x^2-2x-1}{x^2+x^3} = \frac{2x^2-2x-1}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} = \frac{Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2}{x^2(x+1)}$$

Dengan menyamakan pembilang, kita dapatkan

$$2x^2 - 2x - 1 = Ax(x+1) + B(x+1) + Cx^2$$

- Subtitusi $x = 0$

$$\begin{aligned} 2(0)^2 - 2(0) - 1 &= A(0)(0+1) + B(0+1) + C(0)^2 \\ -1 = B &\implies B = -1 \end{aligned}$$

[4] Jika ragu dengan hasil akhir yang sekarang, anda dapat melakukan diferensiasi pada hasil akhir dan cocokkan dengan fungsi awal.

- Subtitusi $x = -1$

$$\begin{aligned} 2(-1)^2 - 2(-1) - 1 &= A(-1)(-1+1) + B(-1+1) + C(-1)^2 \\ 2 + 2 - 1 &= C \implies C = 3 \end{aligned}$$

- Subtitusi $x = 1$ dan nilai variabel B dan C yang telah didapatkan sebelumnya

$$\begin{aligned} 2(1)^2 - 2(1) - 1 &= A(1)(1+1) + B(1+1) + C(1)^2 \\ 2 - 2 - 1 &= A(2) + B(2) + C \\ -1 &= 2A - 2 + 3 \implies A = -1 \end{aligned}$$

Sehingga kita hanya perlu menyelesaikan integral

$$\int \left(\frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{3}{x+1} \right) dx = \boxed{-\ln|x| + \frac{1}{x} + 3\ln|x+1| + C}$$

5. Lakukan subtitusi $u = 1 - 2\sin x$, sehingga $-\frac{1}{2}du = \cos x\, dx$. Untuk batas integralnya berubah sebagaimana berikut

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies u = 1 - 2\sin(0) = 1 \\ x = \frac{\pi}{6} &\implies u = 1 - 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0 \end{aligned}$$

Sehingga integral tersebut dapat ditulis ulang menjadi

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - 2\sin x}}\, dx = -\frac{1}{2}\int_1^0 \frac{1}{\sqrt{u}}\, du = \frac{1}{2}\int_0^1 u^{-1/2}\, du = \frac{1}{2}\left[2u^{1/2}\right]_0^1 = \boxed{1}$$

SKPB - ITS

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2023/2024

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 2 (SM234201) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Rabu, 24 April 2024
Waktu	:	11.00-12.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	31-38, 104

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan.
Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Dapatkan $\dfrac{dy}{dx}$ dari
$$y = \frac{\left(\sqrt[3]{x^2-8}\right)\left(\sqrt{x^3+1}\right)}{x^6-7x+5}$$
menggunakan diferensiasi logaritmik.

2. Hitung integral
$$\int x\,2^{x^2}\,dx.$$

3. Hitung integral
$$\int \sin(\ln x)\,dx.$$

4. Hitung integral
$$\int \frac{x-4}{x^3-x^2+2x}\,dx.$$

5. Selesaikan integral tak wajar
$$\int_0^2 \frac{e^x}{1-e^x}\,dx.$$

Selamat Mengerjakan

"*Jujur adalah kunci kesuksesan*"

SOLUSI

1. Logaritma-kan kedua ruas

$$\ln y = \ln\left(\frac{\left(\sqrt[3]{x^2-8}\right)\left(\sqrt{x^3+1}\right)}{x^6-7x+5}\right)$$
$$\ln y = \ln\left(\sqrt[3]{x^2-8}\right) + \ln\left(\sqrt{x^3+1}\right) - \ln(x^6-7x+5)$$
$$\ln y = \frac{1}{3}\ln(x^2-8) + \frac{1}{2}\ln(x^3+1) - \ln(x^6-7x+5)$$

Kemudian gunakan turunan implisit pada kedua ruas terhadap x.

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x^2-8}\cdot\frac{d}{dx}(x^2-8) + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3+1}\cdot\frac{d}{dx}(x^3+1) - \frac{1}{x^6-7x+5}\cdot\frac{d}{dx}(x^6-7x+5)$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3(x^2-8)}(2x) + \frac{1}{2(x^3+1)}(3x^2) - \frac{1}{(x^6-7x+5)}(6x^5-7)$$
$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3(x^2-8)} + \frac{3x^2}{2(x^3+1)} - \frac{6x^5-7}{(x^6-7x+5)}$$
$$\frac{dy}{dx} = \left[\frac{2x}{3x^2-24} + \frac{3x^2}{2x^3+2} - \frac{6x^5-7}{x^6-7x+5}\right]\cdot y$$

Subtitusikan kembali $y = \dfrac{\left(\sqrt[3]{x^2-8}\right)\left(\sqrt{x^3+1}\right)}{x^6-7x+5}$ ke dalam ekspresi diatas, sehingga didapatkan

$$\frac{dy}{dx} = \boxed{\left[\frac{2x}{3x^2-24} + \frac{3x^2}{2x^3+2} - \frac{6x^5-7}{x^6-7x+5}\right]\cdot\frac{\left(\sqrt[3]{x^2-8}\right)\left(\sqrt{x^3+1}\right)}{x^6-7x+5}}$$

2. Subtitusikan $u = x^2$, sehingga $\frac{1}{2}du = x\,dx$.

$$\int x\,2^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int 2^u\,du$$

Ingat bentuk eksponensial $a^x = e^{x\ln a}$ yang akibatnya

$$\frac{1}{2}\int 2^u\,du = \frac{1}{2}\int e^{u\ln 2}\,du = \frac{1}{2\ln 2}e^{u\ln 2} + C = \frac{2^{u-1}}{\ln 2} + C = \boxed{\frac{2^{x^2-1}}{\ln 2} + C}$$

3. Untuk soal ini dapat kita tinjau subtitusi berikut ini:

$$p = \ln x \implies x = e^p \implies dx = e^p\,dp$$

Sehingga integralnya menjadi

$$\int \sin(\ln x)\,dx = \int \sin(p)e^p\,dp$$

Disini kita gunakan integrasi parsial

$$\begin{aligned} u = \sin(p) &\implies du = \cos(p)\,dp \\ dv = e^p\,dp &\implies v = e^p \end{aligned}$$

Sehingga kita dapatkan

$$\begin{aligned} \int \sin(p)e^p\,dp &= uv - \int v\,du \\ \int \sin(p)e^p\,dp &= e^p\sin(p) - \int e^p\cos(p)\,dp \end{aligned} \tag{1}$$

Dengan cara yang sama, parsialkan kembali integral yang tersisa

$$\begin{aligned} u = \cos(p) &\implies du = -\sin(p)\,dp \\ dv = e^p\,dp &\implies v = e^p \end{aligned}$$

Sehingga kita dapatkan

$$\begin{aligned} e^p\sin(p) - \int e^p\cos(p)\,dp &= e^p\sin(p) - \left[uv - \int v\,du\right] \\ e^p\sin(p) - \int e^p\cos(p)\,dp &= e^p\sin(p) - \left[e^p\cos(p) + \int e^p\sin(p)\,dp\right] \\ e^p\sin(p) - \int e^p\cos(p)\,dp &= e^p\sin(p) - e^p\cos(p) - \int e^p\sin(p)\,dp \end{aligned} \tag{2}$$

Dengan menyamakan (1) dan (2), kita dapatkan

$$\begin{aligned} \int e^p\sin(p)\,dp &= e^p\sin(p) - e^p\cos(p) - \int e^p\sin(p)\,dp \\ \int e^p\sin(p)\,dp + \int e^p\sin(p)\,dp &= e^p\sin(p) - e^p\cos(p) \\ 2\int e^p\sin(p)\,dp &= e^p\left[\sin(p) - \cos(p)\right] \\ \int e^p\sin(p)\,dp &= \frac{1}{2}e^p\left[\sin(p) - \cos(p)\right] + C \end{aligned}$$

Substitusi kembali $p = \ln x$, sehingga jawaban akhirnya adalah

$$\begin{aligned} \int \sin(\ln x)\,dx &= \frac{1}{2}e^{\ln x}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C \\ &= \boxed{\frac{x}{2}\left[\sin(\ln x) - \cos(\ln x)\right] + C} \end{aligned}$$

4. Perhatikan bahwa

$$\int \frac{x-4}{x^3 - x^2 + 2x}\,dx = \int \frac{x-4}{x(x^2 - x + 2)}\,dx$$

[5] Kemudian gunakan metode pecahan parsial.

$$\begin{aligned} \frac{x-4}{x(x^2-x+2)} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2-x+2} = \frac{A(x^2-x+2) + (Bx+C)x}{x(x^2-x+2)} \\ x - 4 &= A(x^2-x+2) + (Bx+C)x \end{aligned}$$

[5] Anda dapat menggunakan diskriminan untuk menentukan apakah $x^2 - x + 2$ memiliki akar real atau tidak.

- Subtitusi $x = 0$

$$\begin{aligned} 0 - 4 &= A(0^2 - 0 + 2) + (B(0) + C)(0) \\ -4 &= 2A \implies A = -2 \end{aligned}$$

- Subtitusi $x = 1$

$$\begin{aligned} 1 - 4 &= A(1^2 - 1 + 2) + (B(1) + C)(1) \\ -3 &= A(2) + (B + C) \\ -3 &= -2(2) + (B + C) \\ B + C &= 1 \end{aligned} \tag{3}$$

- Subtitusi $x = -1$

$$\begin{aligned} -1 - 4 &= A(-1^2 - (-1) + 2) + (B(-1) + C)(-1) \\ -5 &= A(4) + (B - C) \\ -5 &= -2(4) + B - C \\ -5 &= -8 + B - C \\ B - C &= 3 \end{aligned} \tag{4}$$

Dengan menyelesaikan sistem persamaan (3) dan (4), kita dapatkan

$$\begin{aligned} B + C &= 1 \\ B - C &= 3 \\ \implies 2B &= 4 \implies B = 2 \\ \implies C &= -1 \end{aligned}$$

Sehingga kita dapatkan

$$\begin{aligned} \int \frac{x-4}{x^3 - x^2 + 2x}\,dx &= \int \left(\frac{-2}{x} + \frac{2x-1}{x^2 - x + 2} \right) dx \\ &= -2\ln|x| + \int \frac{2x-1}{x^2 - x + 2} dx \\ &= \boxed{-2\ln|x| + \ln|x^2 - x + 2| + C} \end{aligned}$$

5. Perlu diperhatikan terlebih dahulu bahwa batas bawah integral adalah $x = 0$ yang dimana membuat fungsi menjadi tak terdefinisi. Oleh karena itu perlu digunakan limit untuk menyelesaikan integral ini.

$$\int_0^2 \frac{e^x}{1 - e^x}\,dx = \lim_{a \to 0} \int_a^2 \frac{e^x}{1 - e^x}\,dx$$

Lakukan subtitusi $u = 1 - e^x$, sehingga $du = -e^x\,dx$ dan batas integralnya berubah menjadi

$$x = 2 \implies u = 1 - e^2$$

Sehingga integral tersebut dapat ditulis ulang menjadi

$$\begin{aligned}
\lim_{a\to 0^+}\int_a^2 \frac{e^x}{1-e^x}\,dx &= -\lim_{a\to 0^+}\int_{1-e^a}^{1-e^2}\frac{1}{u}\,du \\
&= -\lim_{a\to 0^+}\left[\ln|u|\right]_{1-e^a}^{1-e^2} \\
&= -\lim_{a\to 0^+}\left[\ln|1-e^2| - \ln|1-e^a|\right] \\
&= -\left[\ln|1-e^2| - \lim_{a\to 0^+}\ln|1-e^a|\right] \\
&= -\left[\ln|1-e^2| - \ln|0^+|\right] = \boxed{-\infty}
\end{aligned}$$

Dengan kata lain, integral tersebut divergen.

SKPB - ITS

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2023/2024

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 2 (SM234201) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Rabu, 24 April 2024
Waktu	:	13.30-15.10 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	40-63

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan.
Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Dapatkan turunan dari
$$y = x^3 \ln(2x^2 - x)$$
2. Hitung integral
$$\int e^{2x}\sqrt{1+e^x}\,dx.$$
3. Hitung integral
$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx.$$
4. Hitung integral
$$\int \frac{3x+1}{(x-2)(x+3)(3-2x)}\,dx.$$
5. Selesaikan integral tak wajar
$$\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx.$$

Selamat Mengerjakan

"*Jujur adalah kunci kesuksesan*"

SOLUSI

1. Gunakan aturan perkalian yaitu misalkan $u = x^3$ dan $v = \ln(2x^2 - x)$, sehingga

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= u'v + uv' \\ &= 3x^2 \ln(2x^2 - x) + x^3 \cdot \frac{1}{2x^2 - x} \cdot (4x - 1) \\ &= 3x^2 \ln(2x^2 - x) + \frac{x^3(4x - 1)}{2x^2 - x} \\ &= \boxed{3x^2 \ln(2x^2 - x) + \frac{x^2(4x - 1)}{2x - 1}}\end{aligned}$$

2. Gunakan substitusi $u = 1 + e^x$, sehingga $du = e^x\, dx$ dan ingat bahwa $e^{2x} = (e^x)^2 = (u - 1)^2$.

$$\begin{aligned}\int e^{2x}\sqrt{1 + e^x}\, dx &= \int (u - 1)^2 \sqrt{u}\, du \\ &= \int (u^2 - 2u + 1)u^{1/2}\, du \\ &= \int (u^{5/2} - 2u^{3/2} + u^{1/2})\, du \\ &= \frac{2}{7}u^{7/2} - \frac{4}{5}u^{5/2} + \frac{2}{3}u^{3/2} + C \\ &= \boxed{\frac{2}{7}(1 + e^x)^{7/2} - \frac{4}{5}(1 + e^x)^{5/2} + \frac{2}{3}(1 + e^x)^{3/2} + C}\end{aligned}$$

3. Gunakan substitusi trigonometri $x = 2\sin\theta$, sehingga $dx = 2\cos\theta\, d\theta$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx &= \int \frac{(2\sin\theta)^2}{\sqrt{4 - (2\sin\theta)^2}} \cdot 2\cos\theta\, d\theta = 2\int \frac{4\sin^2\theta}{\sqrt{4(1 - \sin^2\theta)}} \cdot 2\cos\theta\, d\theta \\ &= 8\int \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{4(1 - \sin^2\theta)}} \cdot \cos\theta\, d\theta = 4\int \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{4\cos^2\theta}} \cdot \cos\theta\, d\theta = 4\int \frac{\sin^2\theta}{\cos\theta} \cdot \cos\theta\, d\theta \\ &= 4\int \sin^2\theta\, d\theta = 4\int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2\theta)}{2}\right) d\theta = 4\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin(2\theta)}{4}\right] + C \\ &= 2\theta - \sin(2\theta) + C\end{aligned}$$

Dari subtitusi awal, bisa kita dapatkan berbagai informasi tentang θ.

$$\begin{aligned}\sin\theta &= \frac{x}{2} \implies \theta = \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) \\ \cos\theta &= \sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2} \\ \sin(2\theta) &= 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{4 - x^2}}{2}\right) = \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2}\end{aligned}$$

Dengan demikian kita dapatkan

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}\, dx &= 2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + C \\ &= \boxed{2\sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{2} + C}\end{aligned}$$

4. Langsung saja gunakan metode pecahan parsial

$$\begin{aligned}\frac{3x+1}{(x-2)(x+3)(3-2x)} &= \frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{3-2x}\\ &= \frac{A(3-2x)(x+3)+B(3-2x)(x-2)+C(x-2)(x+3)}{(x-2)(x+3)(3-2x)}\\ 3x+1 &= A(3-2x)(x+3)+B(3-2x)(x-2)+C(x-2)(x+3)\end{aligned}$$

Subtitusikan masing-masing pembuat nol dari penyebut untuk mendapatkan nilai A, B, dan C.

- Subtitusi $x=2$

$$\begin{aligned}3(2)+1 &= A(3-2(2))(2+3)+B(3-2(2))(2-2)+C(2-2)(2+3)\\ 7 &= A(-1)(5)+B(0)+C(0)\\ A &= -\frac{7}{5}\end{aligned}$$

- Subtitusi $x=-3$

$$\begin{aligned}3(-3)+1 &= A(3-2(-3))(-3+3)+B(3-2(-3))(-3-2)+C(-3-2)(-3+3)\\ -8 &= A(9)(0)+B(9)(-5)+C(0)\\ B &= \frac{8}{45}\end{aligned}$$

- Subtitusi $x=\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned}3\left(\frac{3}{2}\right)+1 &= A\left(3-2\left(\frac{3}{2}\right)\right)\left(\frac{3}{2}+3\right)+B\left(3-2\left(\frac{3}{2}\right)\right)\left(\frac{3}{2}-2\right)+C\left(\frac{3}{2}-2\right)\left(\frac{3}{2}+3\right)\\ \frac{9}{2}+1 &= A(0)\left(\frac{9}{2}\right)+B(0)\left(-\frac{1}{2}\right)+C\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{2}\right)\\ \frac{11}{2} &= -C\cdot\frac{9}{4}\\ C &= -\frac{22}{9}\end{aligned}$$

Dengan demikian kita dapatkan

$$\begin{aligned}\int\frac{3x+1}{(x-2)(x+3)(3-2x)}\,dx &= \int\left(\frac{-\frac{7}{5}}{x-2}+\frac{\frac{8}{45}}{x+3}-\frac{\frac{22}{9}}{3-2x}\right)dx\\ &= -\frac{7}{5}\ln|x-2|+\frac{8}{45}\ln|x+3|-\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{22}{9}\ln|3-2x|+C\\ &= \boxed{-\frac{7}{5}\ln|x-2|+\frac{8}{45}\ln|x+3|+\frac{11}{9}\ln|3-2x|+C}\end{aligned}$$

5. Subtitusi $u=x-3$, sehingga $du=dx$ dan batas integralnya berubah menjadi

$$\begin{aligned}x=3 &\implies u=0\\ x=4 &\implies u=1\end{aligned}$$

Sehingga integral tersebut dapat ditulis ulang menjadi

$$\int_3^4 \frac{1}{(x-3)^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{u^2}\,du$$

Perhatikan bahwa $\frac{1}{u^2}$ menuju tak hingga ketika $u \to 0$, sehingga kita perlu menggunakan limit untuk menyelesaikan integral ini.

$$\int_0^1 \frac{1}{u^2}\,du = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{u^2}\,du = \lim_{a\to 0^+} \left[-\frac{1}{u}\right]_a^1 = \lim_{a\to 0^+} \left[-1-\left(-\frac{1}{a}\right)\right] = [-1+\infty] = \boxed{\infty}$$

Jadi, integral tersebut divergen.

SKPB - ITS

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2023/2024

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 2 (SM234201) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Kamis, 25 April 2024
Waktu	:	11.00-12.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	48-60, 107

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan.
Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Dapatkan turunan dari $f(x) = \dfrac{e^x + \ln x}{\sinh 3x}$
2. Hitung integral
$$\int \frac{x + e^x}{x^2 + 2e^x}\, dx$$
3. Hitung integral
$$\int \frac{1}{t^{1/2} - t^{1/3}}\, dt$$
4. Hitung integral
$$\int \frac{t^3 + 4t^2 - t + 1}{t^3 + t^2}\, dt$$
5. Dapatkan
$$\lim_{x\to\infty} \left[x \left(e^{\sin(1/x)} - 1 \right) \right]$$

Selamat Mengerjakan

"*Jujur adalah kunci kesuksesan*"

SOLUSI

1. Misalkan $u = e^x + \ln x$ dan $v = \sinh 3x$, sehingga

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ &= \frac{\left(e^x + \frac{1}{x}\right)\sinh 3x - (e^x + \ln x)(3\cosh 3x)}{\sinh^2 3x} \\ &= \boxed{\frac{e^x \sinh 3x + \frac{1}{x}\sinh 3x - 3e^x \cosh 3x - 3\ln x \cosh 3x}{\sinh^2 3x}}\end{aligned}$$

2. Subtitusi $u = x^2 + 2e^x$, sehingga $\frac{1}{2}du = (x + e^x)\, dx$.

$$\begin{aligned}\int \frac{x + e^x}{x^2 + 2e^x}\, dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\, du \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C = \boxed{\frac{1}{2}\ln|x^2 + 2e^x| + C}\end{aligned}$$

3. Karena bentuk pangkatnya rasional, maka akan digunakan substitusi agar pangkat dari variabelnya menjadi bulat.

   Perhatikan bahwa kpk$\{2, 3\} = 6$, sehingga kita gunakan substitusi $t = u^6$, sehingga $dt = 6u^5\, du$.

$$\int \frac{1}{t^{1/2} - t^{1/3}}\, dt = \int \frac{1}{u^3 - u^2} \cdot 6u^5\, du = 6\int \frac{u^5}{u^3 - u^2}\, du = 6\int \frac{u^5}{u^2(u-1)}\, du = 6\int \frac{u^3}{u-1}\, du$$

   Selanjutnya lakukan pembagian polinomial

$$\begin{array}{r|l} & u^2 + u + 1 \\ u - 1 & u^3 \\ & -u^3 + u^2 \\ \hline & u^2 \\ & -u^2 + u \\ \hline & u \\ & -u + 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

   Artinya integral dapat ditulis

$$\begin{aligned}6\int \frac{u^3}{u-1}\, du &= 6\int \left[u^2 + u + +1 + \frac{1}{u-1}\right] du \\ &= 6\left[\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u + \ln|u-1|\right] + C \\ &= 2u^3 + 3u^2 + 6u + 6\ln|u-1| + C\end{aligned}$$

Substitusi kembali $u = t^{1/6}$, sehingga kita dapatkan

$$\begin{aligned}2u^3 + 3u^2 + 6u - 6\ln|u-1| + C &= 2(t^{1/6})^3 + 3(t^{1/6})^2 + 6(t^{1/6}) - +6\ln|t^{1/6} - 1| + C \\ &= \boxed{2t^{1/2} + 3t^{1/3} + 6t^{1/6} + 6\ln|t^{1/6} - 1| + C}\end{aligned}$$

4. Dari pembagian polinomial, kita dapatkan

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad\quad\quad 1 \\ t^3 + t^2 & \ t^3 + 4t^2 - t + 1 \\ & -t^3 \ \ - t^2 \\ \hline & \quad\quad 3t^2 - t + 1 \end{array}$$

Sehingga integral dapat ditulis

$$\int \frac{t^3 + 4t^2 - t + 1}{t^3 + t^2}\, dt = \int \left[1 + \frac{3t^2 - t + 1}{t^3 + t^2}\right] dt$$

Selanjutnya gunakan metode pecahan parsial

$$\begin{aligned}\frac{3t^2 - t + 1}{t^2(t+1)} &= \frac{A}{t} + \frac{B}{t^2} + \frac{C}{t+1} \\ &= \frac{A(t)(t+1) + B(t+1) + C(t^2)}{t^2(t+1)} \\ 3t^2 - t + 1 &= A(t)(t+1) + B(t+1) + C(t^2)\end{aligned}$$

- Subtitusi $t = 0$

$$\begin{aligned}3(0)^2 - (0) + 1 &= A(0)(0+1) + B(0+1) + C(0^2) \\ 1 &= B \implies B = 1\end{aligned}$$

- Subtitusi $t = -1$

$$\begin{aligned}3(-1)^2 - (-1) + 1 &= A(-1)(-1+1) + B(-1+1) + C(-1^2) \\ 3 + 1 + 1 &= A(0) + B(0) + C(1) \\ 5 &= C \implies C = 5\end{aligned}$$

- Subtitusi $t = 1$

$$\begin{aligned}3(1)^2 - (1) + 1 &= A(1)(1+1) + B(1+1) + C(1^2) \\ 3 - 1 + 1 &= A(2) + B(2) + C(1) \\ 3 &= 2A + 2B + C \\ 3 &= 2A + 2(1) + 5 \\ 3 &= 2A + 7 \implies A = -2\end{aligned}$$

Dengan demikian kita dapatkan

$$\begin{aligned}\int \frac{t^3+4t^2-t+1}{t^3+t^2}\,dt &= \int \left[1+\frac{-2}{t}+\frac{1}{t^2}+\frac{5}{t+1}\right] dt \\ &= t-2\ln|t|-\frac{1}{t}+5\ln|t+1|+C \\ &= \boxed{t-2\ln|t|-\frac{1}{t}+5\ln|t+1|+C}\end{aligned}$$

5. Perhatikan bahwa

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\sin(1/x)}-1\right)\right]=\infty\cdot 0 \quad \text{(bentuk tak tentu)}$$

Agar tidak membingungkan, kita boleh mengubah bentuknya menjadi $y=1/x$ sehingga ketika $x\to\infty$, maka $y\to 0$. Dari perubahan variabel tersebut diperoleh

$$\lim_{x\to\infty}\left[x\left(e^{\sin(1/x)}-1\right)\right]=\lim_{y\to 0}\left[\frac{1}{y}\left(e^{\sin y}-1\right)\right]=\lim_{y\to 0}\frac{e^{\sin y}-1}{y}=\frac{0}{0}$$

Gunakan aturan L'Hospital

$$\lim_{y\to 0}\frac{e^{\sin y}-1}{y}\overset{\text{L}}{=}\lim_{y\to 0}\frac{\cos y\cdot e^{\sin y}}{1}=\cos(0)\cdot e^{\sin(0)}=1\cdot 1=\boxed{1}$$