SKPB - ITS

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Rabu, 11 Desember 2024
Waktu	:	07.00-08.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	13-19, 103

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI

DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

EAS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

SOAL

1. Suatu persegi panjang memiliki sisi panjang dan lebar yang berubah. Jika sisi panjang bertambah dengan laju 2 cm/menit dan sisi lebar berkurang dengan laju 0.5 cm/menit, dapatkan laju perubahan diagonalnya saat sisi panjangnya mencapai 6 cm dan lebarnya 8 cm.

2. Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
   (a) Tentukan selang dimana fungsi $f(x)$ naik atau turun.
   (b) Tentukan titik ekstrem relatif fungsi tersebut.
   (c) Tentukan selang kecekungan fungsi $f(x)$ dan titik belok (jika ada).
   (d) Sketsa grafiknya.

3. Hitung integral
$$\int_{\frac{1}{9}}^{4} \frac{6 + 9\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx.$$

4. Nyatakan bilangan kompleks $z = \left(\dfrac{-\sqrt{3} + i}{2\text{cis}(15^\circ)}\right)^2$ dalam bentuk $z = a + bi$.

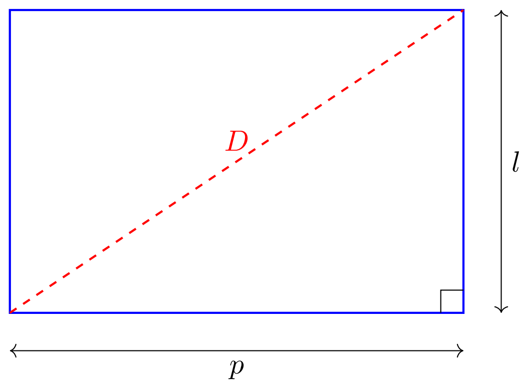
5. Selesaikan sistem persamaan linear berikut:
$$\begin{aligned} 3x - z &= 6, \\ x + y + z &= 15, \\ 4x + 2z &= 32, \end{aligned}$$
   dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Perhatikan ilustrasi berikut:



Diketahui:

$$\frac{dp}{dt} = 2 \text{ cm/menit}, \quad \frac{dl}{dt} = -0.5 \text{ cm/menit}, \quad p = 6 \text{ cm}, \quad l = 8 \text{ cm}.$$

Dengan menggunakan Teorema Pythagoras, diperoleh hubungan:

$$D^2 = p^2 + l^2.$$

Turunkan terhadap waktu t (menggunakan diferensiasi implisit):

$$2D\frac{dD}{dt} = 2p\frac{dp}{dt} + 2l\frac{dl}{dt}.$$

Substitusi nilai yang diketahui:

$$2D\frac{dD}{dt} = 2(6)(2) + 2(8)(-0.5).$$

Hitung D saat $p = 6$ cm dan $l = 8$ cm:

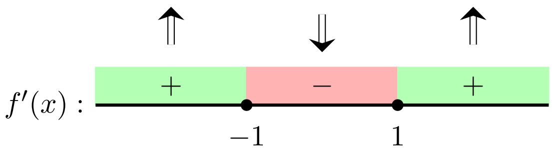
$$D = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}.$$

Maka diperoleh:

$$20\frac{dD}{dt} = 24 - 8 = 16 \iff \frac{dD}{dt} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Jadi laju perubahan diagonalnya adalah 0.8 cm/menit.

2. (a) Uji tanda turunan pertama: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi naik pada interval $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
- Fungsi turun pada interval $(-1, 1)$.

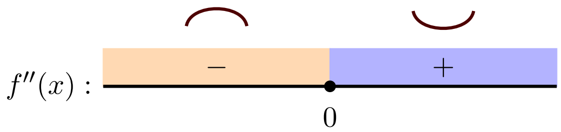
(b) Titik kritis diperoleh dari $f'(x) = 0$:

$$3(x-1)(x+1) = 0 \implies x = -1, 1.$$

Gunakan uji tanda untuk menentukan jenis titik kritis:

- Pada $x = -1$, fungsi berubah dari naik ke turun, sehingga $f(-1) = -1 + 3 - 1 = 1$ adalah titik maksimum lokal.
- Pada $x = 1$, fungsi berubah dari turun ke naik, sehingga $f(1) = 1 - 3 - 1 = -3$ adalah titik minimum lokal.

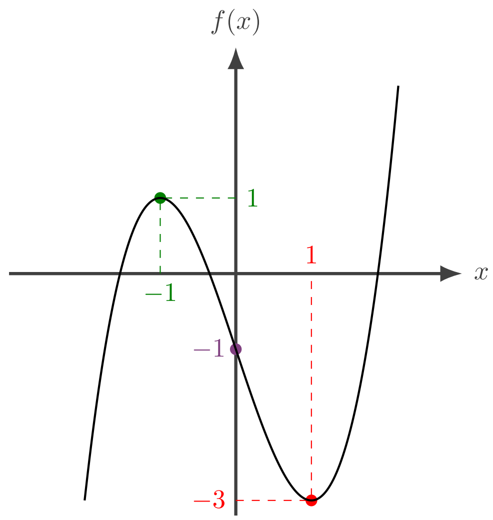
(c) Uji tanda turunan kedua: $f''(x) = 6x$.



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke bawah pada interval $(-\infty, 0)$.
- Fungsi cekung ke atas pada interval $(0, \infty)$.
- Titik belok pada $x = 0$, dengan $f(0) = -1$.

(d) Berdasarkan informasi di atas, sketsa grafiknya adalah sebagai berikut:



3. Sederhanakan ekspresi di dalam integral:

$$\frac{6 + 9\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{9\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 6x^{-\frac{1}{2}} + 9.$$

Maka integralnya menjadi:

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{9}}^{4} \frac{6 + 9\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\, dx &= \int_{\frac{1}{9}}^{4} 6x^{-\frac{1}{2}}\, dx + \int_{\frac{1}{9}}^{4} 9\, dx \\
&= 6\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_{\frac{1}{9}}^{4} + 9[x]_{\frac{1}{9}}^{4} \\
&= 12\left(2 - \frac{1}{3}\right) + 9\left(4 - \frac{1}{9}\right) \\
&= 12 \cdot \frac{5}{3} + 9 \cdot \frac{35}{9} = 20 + 35 = 55.
\end{aligned}$$

4. Ubah bilangan kompleks pada pembilang ke bentuk polar:

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2,$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) = 150^\circ.$$

   Sehingga

$$-\sqrt{3} + i = 2\text{cis}(150^\circ).$$

   Maka

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{\cancel{2}\text{cis}(150^\circ)}{\cancel{2}\text{cis}(15^\circ)}\right)^2 = (\text{cis}(150^\circ - 15^\circ))^2 = (\text{cis}(135^\circ))^2 = \text{cis}(135^\circ \cdot 2) = \text{cis}(270^\circ) \\ &= \cos(270^\circ) + i\sin(270^\circ) = (0) + i(-1) = -i. \end{aligned}$$

   Jadi $a = 0$ dan $b = -1$.

5. Lakukan OBE pada matriks augmented hingga diperoleh bentuk eselon baris (matriks segitiga atas):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 15 \\ 4 & 0 & 2 & 32 \end{array}\right] \xrightarrow{B_1 \Leftrightarrow B_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 32 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{B_2 - 3B_1} \\ \xrightarrow{B_3 - 4B_1} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -3 & -4 & -39 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{B_3 - \frac{4}{3}B_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -3 & -4 & -39 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & 24 \end{array}\right] \xrightarrow{3B_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -3 & -4 & -39 \\ 0 & 0 & 10 & 72 \end{array}\right]$$

   Dari baris ketiga, diperoleh $z = \frac{72}{10} = \frac{36}{5}$. Substitusi ke baris kedua:

$$-3y - 4\left(\frac{36}{5}\right) = -39 \implies -3y - \frac{144}{5} = -39 \implies -3y = -39 + \frac{144}{5} = -\frac{51}{5} \implies y = \frac{17}{5}.$$

   Substitusi ke baris pertama:

$$3x + \frac{17}{5} + \frac{36}{5} = 15 \implies 3x + \frac{53}{5} = 15 \implies 3x = 15 - \frac{53}{5} = \frac{22}{5} \implies x = \frac{22}{15}.$$

   Jadi, solusi sistem persamaan adalah:

$$x = \frac{22}{15}, \quad y = \frac{17}{5}, \quad z = \frac{36}{5}.$$

SKPB - ITS

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Kamis, 12 Desember 2024
Waktu	:	07.00-08.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	5-12, 101

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.
DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

EAS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

SOAL

1. Kerucut terbalik dengan tinggi 18 cm dan jari-jari 9 cm diisi pasir dengan laju 4 cm^3/menit. Berapa cepat ketinggian pasir dalam kerucut bertambah saat tingginya mencapai 12 cm?

2. Diberikan fungsi $f(x) = 1 + 3x^2 - 2x^3$.

   (a) Tentukan selang dimana fungsi $f(x)$ naik atau turun.

   (b) Tentukan titik ekstrem relatif fungsi tersebut.

   (c) Tentukan selang kecekungan fungsi $f(x)$ dan titik belok (jika ada).

   (d) Sketsa grafiknya.

3. (a) Uraikan $|3x - 3|$ dalam fungsi sepotong-sepotong.

   (b) Hitung integral $\displaystyle\int_0^4 |3x - 3|\, dt$.

4. Nyatakan bilangan kompleks $z = \dfrac{i^{19} - 3i^{30}}{1 - 2i}$ dalam bentuk kutub $z = r \operatorname{cis} \theta$.

5. Selesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} 3x + 4y + z &= -2, \\ 3x + 2y + z &= 2, \\ x + y + z &= 2, \end{aligned}$$

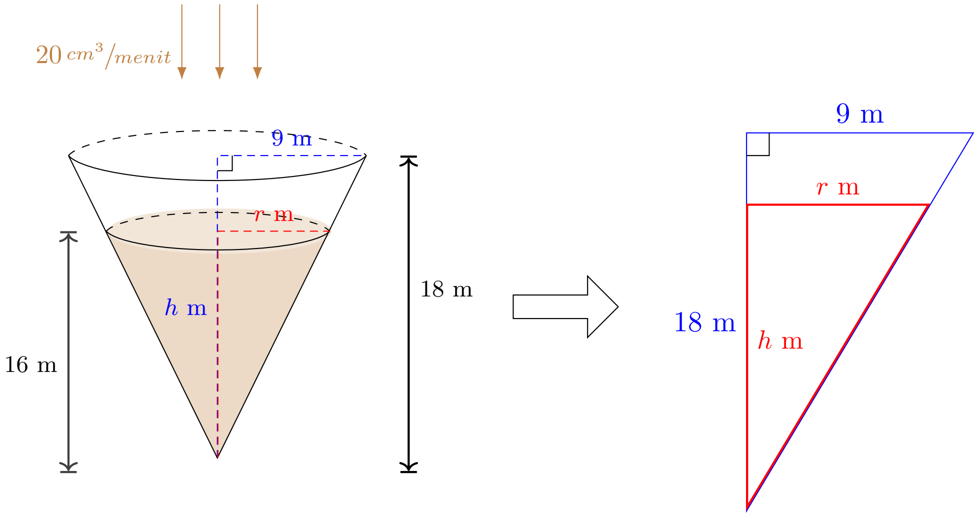
   dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Perhatikan ilustrasi berikut:



Menggunakan konsep kesebangunan segitiga, diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{r}{h} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \implies r = \frac{h}{2}.$$

Sedangkan volume kerucut diberikan oleh rumus

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}.$$

Turunkan terhadap waktu t:

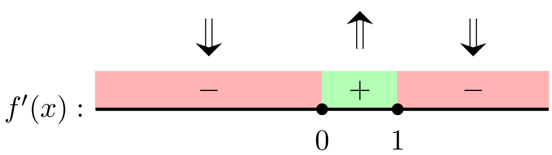
$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{\pi h^3}{12}\right) \\
\frac{dV}{dt} &= \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt} \\
\frac{dV}{dt} &= \frac{\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt} \\
\frac{dh}{dt} &= \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}.
\end{aligned}$$

Diketahui $\dfrac{dV}{dt} = 4$ cm^3/menit dan $h = 12$ cm, maka

$$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=12} = \frac{4}{\pi h^2} \left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=12} = \frac{4}{\pi (12)^2} \cdot 4 = \frac{16}{144\pi} = \frac{1}{9\pi} \text{ cm/menit.}$$

Jadi, ketinggian pasir bertambah dengan laju $\frac{1}{9\pi}$ cm/menit saat tingginya mencapai 12 cm.

2. (a) Uji tanda turunan pertama: $f'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1 - x)$.



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi naik pada interval $(0, 1)$.
- Fungsi turun pada interval $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

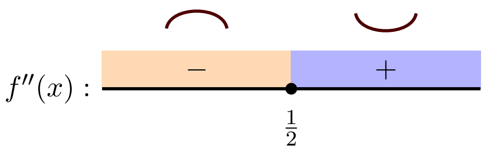
(b) Titik kritis diperoleh dari $f'(x) = 0$:

$$6x(1 - x) = 0 \implies x = 0, 1.$$

Gunakan uji tanda untuk menentukan jenis titik kritis:

- Pada $x = 0$, fungsi berubah dari turun ke naik, sehingga $f(0) = 1$ adalah titik minimum lokal.
- Pada $x = 1$, fungsi berubah dari naik ke turun, sehingga $f(1) = 1 + 3 - 2 = 2$ adalah titik maksimum lokal.

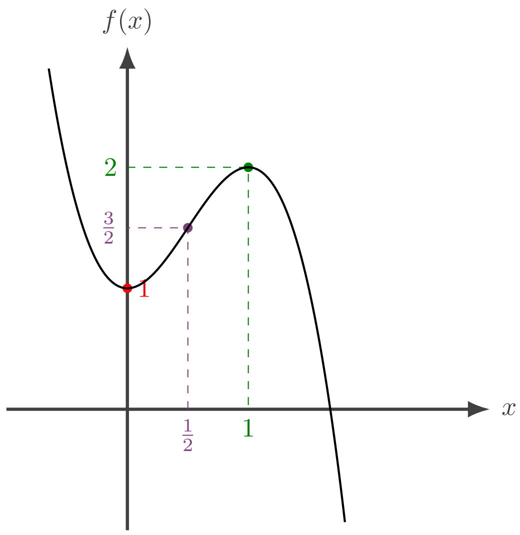
(c) Uji tanda turunan kedua: $f''(x) = 6 - 12x$.



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke atas pada interval $(-\infty, \frac{1}{2})$.
- Fungsi cekung ke bawah pada interval $(\frac{1}{2}, \infty)$.
- Titik belok pada $x = \frac{1}{2}$, dengan $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$.

(d) Berdasarkan informasi di atas, sketsa grafiknya adalah sebagai berikut:



3. (a) Uraikan $|3x - 3|$:

$$|3x-3| = \begin{cases} 3x-3, & 3x-3 \geq 0 \\ -(3x-3), & 3x-3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x-3, & x \geq 1 \\ -3x+3, & x < 1 \end{cases}$$

(b) Hitung integral:

$$\begin{aligned}
\int_0^4 |3x-3|\,dx &= \int_0^1 |3x-3|\,dx + \int_1^4 |3x-3|\,dx \\
&= \int_0^1 (-3x+3)\,dx + \int_1^4 (3x-3)\,dx \\
&= \left[-\frac{3}{2}x^2+3x\right]_0^1 + \left[\frac{3}{2}x^2-3x\right]_1^4 \\
&= \left(-\frac{3}{2}(1)^2+3(1)-0\right) + \left(\left(\frac{3}{2}(4)^2-3(4)\right) - \left(\frac{3}{2}(1)^2-3(1)\right)\right) \\
&= \left(-\frac{3}{2}+3\right) + \left((24-12) - \left(\frac{3}{2}-3\right)\right) \\
&= \frac{3}{2} + (12+\frac{3}{2}) = \frac{3}{2}+\frac{27}{2} = \frac{30}{2} = 15.
\end{aligned}$$

4. Untuk perpangkatan i^n, gunakan pola berikut:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \dots$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
i^{19} &= i^{16}\cdot i^3 = 1\cdot(-i) = -i, \\
i^{30} &= i^{28}\cdot i^2 = 1\cdot(-1) = -1.
\end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
z &= \frac{-i-3(-1)}{1-2i} = \frac{-i+3}{1-2i} = \frac{3-i}{1-2i}\cdot\frac{1+2i}{1+2i} = \frac{(3-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} \\
&= \frac{3+6i-i-2i^2}{1+4} = \frac{5+5i}{5} = 1+i.
\end{aligned}$$

Ubah ke bentuk kutub:

$$\begin{aligned}
r &= |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}, \\
\theta &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{1}\right) = 45^\circ.
\end{aligned}$$

Jadi, bentuk kutubnya adalah $z = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,45^\circ$.

5. Lakukan OBE pada matriks augmented hingga diperoleh bentuk eselon baris tereduksi:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{B_1 \Leftrightarrow B_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{c}\xrightarrow{B_2-3B_1} \\ \xrightarrow{B_3-3B_1}\end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{B_3+B_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array}\right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}B_3} \xrightarrow{-B_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c}\xrightarrow{B_1-B_3} \\ \xrightarrow{B_2-2B_3}\end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{B_1-B_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{array}{rcl} x & = & 1, \\ y & = & -2, \\ z & = & 3. \end{array}$$

SKPB - ITS

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Kamis, 12 Desember 2024
Waktu	:	09.00-10.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	47-59, 111

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI

DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

EAS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

SOAL

1. Suatu pasir dituangkan dari wadah tertentu sedemikian rupa sehingga tumpukan pasir tersebut membentuk kerucut dengan ketinggiannya sama dengan $\frac{1}{3}$ dari diameternya setiap saat. Jika ketinggiannya bertambah dengan laju 4 m/menit, dapatkan laju pertambahan volume tumpukan pasir tersebut saat ketinggiannya mencapai 10 meter.

2. Diberikan fungsi $f(x) = 1 + (1 - 2x)^3$.
   (a) Tentukan selang dimana fungsi $f(x)$ naik atau turun.
   (b) Tentukan titik ekstrem relatif fungsi tersebut.
   (c) Tentukan selang kecekungan fungsi $f(x)$ dan titik belok (jika ada).
   (d) Sketsa grafiknya.

3. Misalkan $F(x) = \int_0^x \frac{t+1}{t^2+1}\,dt$, untuk $-\infty < x < \infty$.
   (a) Dapatkan selang dimana fungsi $F(x)$ naik atau turun.
   (b) Dapatkan selang kecekungan fungsi $F(x)$.

4. Dapatkan semua bilangan kompleks z yang memenuhi $z^3 = \sqrt{3} + i$.

5. Selesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 7, \\ 3x + 2y + 2z &= 1, \\ x + y + z &= 0, \end{aligned}$$

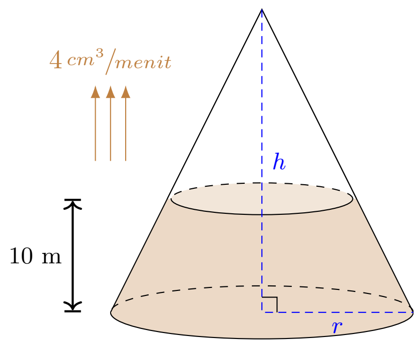
   dengan menggunakan metode invers.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Perhatikan ilustrasi berikut:



Selanjutnya berdasarkan informasi pada soal, diperoleh bahwa $h = \frac{1}{3} \cdot 2r \implies r = \frac{3h}{2}$. Volume kerucut diberikan oleh rumus

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{3h}{2}\right)^2 h = \frac{3\pi h^3}{4}.$$

Turunkan terhadap waktu t:

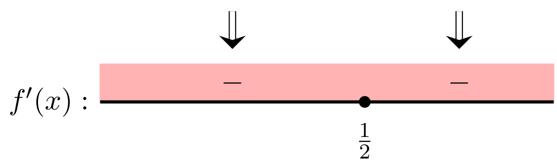
$$\begin{aligned}
\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt}\left(\frac{3\pi h^3}{4}\right) \\
\frac{dV}{dt} &= \frac{3\pi}{4} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt} \\
\frac{dV}{dt} &= \frac{9\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt} \\
\frac{dh}{dt} &= \frac{4}{9\pi h^2} \frac{dV}{dt}.
\end{aligned}$$

Diketahui $\frac{dh}{dt} = 4$ m/menit dan $h = 10$ m, maka

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{h=10} = \frac{9\pi h^2}{4} \left.\frac{dh}{dt}\right|_{h=10} = \frac{9\pi(10)^2}{4} \cdot 4 = 900\pi \text{ m}^3/\text{menit}.$$

Jadi, volume tumpukan pasir bertambah dengan laju 900π m^3/menit saat ketinggiannya mencapai 10 meter.

2. (a) Uji tanda turunan pertama: $f'(x) = -6(1 - 2x)^2$.



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi turun pada interval $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.
- Fungsi tidak pernah naik.

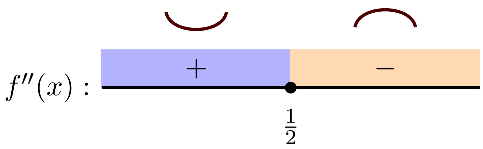
(b) Titik kritis diperoleh dari $f'(x) = 0$:

$$-6(1-2x)^2 = 0 \implies x = \frac{1}{2}.$$

Gunakan uji tanda untuk menentukan jenis titik kritis:

- Pada $x = \frac{1}{2}$, fungsi tetap turun di kedua sisi, sehingga tidak ada titik ekstrem relatif (baik maksimum maupun minimum).

(c) Uji tanda turunan kedua: $f''(x) = 24(1-2x)$.

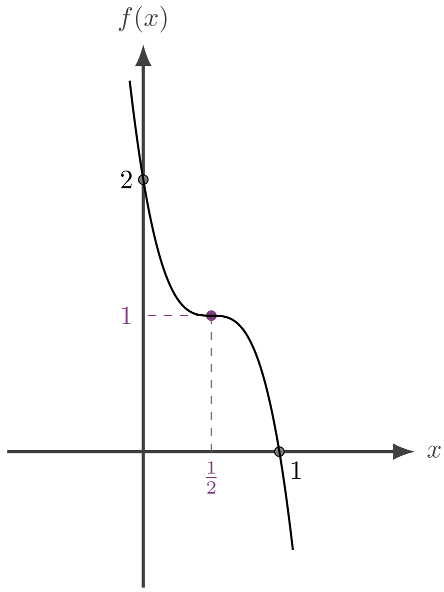


Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke atas pada interval $(-\infty, \frac{1}{2})$.
- Fungsi cekung ke bawah pada interval $(\frac{1}{2}, \infty)$.
- Titik belok pada $x = \frac{1}{2}$, dengan $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 + (1-1)^3 = 1$.

(d) Tambahkan beberapa informasi seperti titik potong terhadap sumbu x dan y, yaitu:

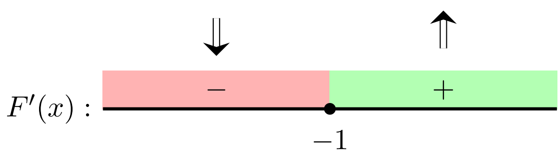
$$f(x) = 0 \implies 1 + (1-2x)^3 = 0 \implies (1-2x)^3 = -1 \implies 1 - 2x = -1 \implies x = 1,$$
$$f(0) = 1 + (1-0)^3 = 1 + 1 = 2.$$



3. (a) Untuk menentukan selang naik/turun, maka diperlukan informasi mengenai tanda dari $F'(x)$. Berdasarkan Teorema Fundamental Kalkulus, diperoleh

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{t+1}{t^2+1}\,dt\right) = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Selanjutnya, tinjau tanda $F'(x)$:



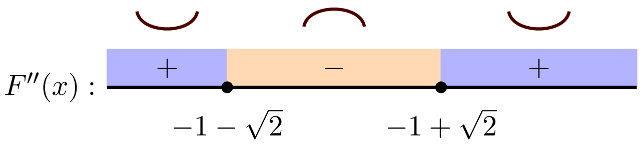
Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi turun pada interval $(-\infty, -1)$.
- Fungsi naik pada interval $(-1, \infty)$.

(b) Untuk menentukan selang kecekungan, maka diperlukan informasi mengenai tanda dari $F''(x)$. Turunkan $F'(x)$:

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x^2+1}\right) = \frac{(1)(x^2+1)-(x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x^2+2x-1)}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, tinjau tanda $F''(x)$:



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke atas pada interval $(-\infty, -1-\sqrt{2}) \cup (-1+\sqrt{2}, \infty)$.
- Fungsi cekung ke bawah pada interval $(-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2})$.

4. Misalkan $z = r\text{cis}\theta$. Pertama, ubah $\sqrt{3}+i$ ke dalam bentuk kutub:

$$\begin{aligned} r &= \left|\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2, \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30^\circ. \end{aligned}$$

Jadi, bentuk kutubnya adalah $z = 2\text{cis}30^\circ$. Selanjutnya, gunakan rumus De Moivre untuk mencari akar-akar dari bilangan kompleks tersebut:

$$\begin{aligned} z_k &= r^{1/3}\text{cis}\left(\frac{\theta+360^\circ k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2. \\ &= 2^{1/3}\text{cis}\left(\frac{30^\circ+360^\circ k}{3}\right), \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Sehingga, akar-akarnya adalah:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{1/3}\text{cis}10^\circ, \\ z_1 &= 2^{1/3}\text{cis}130^\circ, \\ z_2 &= 2^{1/3}\text{cis}250^\circ. \end{aligned}$$

5. Pertama-tama definisikan matriks A yang merupakan matriks koefisien dari sistem persamaan linear, matriks kolom $\mathbf{x}$ yang merupakan variabel yang akan dicari, dan matriks kolom $\mathbf{b}$ yang merupakan hasil dari sistem persamaan linear tersebut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear menggunakan metode invers adalah sebagai berikut:

a. Hitung invers dari matriks koefisien A^{-1}.
b. Kalikan matriks invers A^{-1} dengan matriks kolom $\mathbf{b}$ untuk mendapatkan solusi vektor $\mathbf{x}$.

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Konstruksikan matriks dan matriks identitas secara bersebelahan. Tujuannya agar dapat mencari invers dari matriks koefisien.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Lakukan OBE untuk mengubah matriks A menjadi matriks identitas.

$$\xrightarrow{B_1 \Leftrightarrow B_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{B_2 - 3B_1} \\ \xrightarrow{B_3 - 2B_1} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-B_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow{B_3 - 2B_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & -8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{3}B_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array}\right] \begin{array}{c} \xrightarrow{B_2 - B_3} \\ \xrightarrow{B_1 - B_3} \end{array} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{B_1 - B_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array}\right]$$

Jadi, matriks invers A^{-1} adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, kalikan matriks invers A^{-1} dengan matriks kolom $\mathbf{b}$ untuk mendapatkan solusi vektor $\mathbf{x}$.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2 \cdot 0 \\ \frac{1}{3} \cdot 7 - \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 \\ -\frac{1}{3} \cdot 7 - \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{8}{3} \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Hasil terakhir menunjukkan bahwa $x = 1$, $y = 2$, dan $z = -3$.

SKPB - ITS

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Kamis, 12 Desember 2024
Waktu	:	11.00-12.40 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	20-33, 105, 106

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI

DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

EAS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

SOAL

1. Kotak persegi panjang dengan alas dan penutup memiliki volume 2000 cm^3. Biaya bagian alas kotak dua kali lebih mahal daripada sisi-sisinya. Tentukan ukuran kotak tersebut dengan biaya paling minimum.
2. Diberikan fungsi $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$.
   (a) Tentukan selang dimana fungsi $f(x)$ naik atau turun.
   (b) Tentukan titik ekstrem relatif fungsi tersebut.
   (c) Tentukan selang kecekungan fungsi $f(x)$ dan titik belok (jika ada).
   (d) Sketsa grafiknya.
3. Hitung integral
$$\int_0^{\sqrt{3}} (4x^3 + 4x)\sqrt{x^2+1}\,dx.$$
4. Dapatkan bagian real dan imajiner dari bilangan kompleks $z = (-\sqrt{3} + i)^{-6}$.
5. Carilah nilai x_4 dari sistem persamaan linear berikut:
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 2x_4 &= 2 \\ -2x_1 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= -9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 &= -16 \end{aligned}$$
   dengan menggunakan metode Cramer.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Misalkan panjang, lebar, dan tinggi kotak berturut-turut adalah p, l, dan t. Maka, volume kotak dapat dituliskan sebagai

$$V = p \cdot l \cdot t \implies plt = 2000 \implies t = \frac{2000}{pl}.$$

Biaya total pembuatan kotak dapat dihitung berdasarkan luas permukaan dan biaya per satuan luas. Luas permukaan kotak terdiri dari satu alas, satu penutup, dan empat sisi tegak. Dengan biaya alas dan penutup dua kali lebih mahal daripada sisi-sisinya, maka biaya total C dapat dituliskan sebagai

$$C = 2(pl) + 2(pl) + 4(lt) = 4pl + 4lt.$$

Dengan menggunakan persamaan untuk t, biaya total dapat dituliskan sebagai fungsi dari p dan l:

$$C(p, l) = 4pl + 4l\left(\frac{2000}{pl}\right) = 4pl + \frac{8000}{p}.$$

Untuk meminimalkan biaya, kita dapat mengambil turunan parsial dari C terhadap p dan l, kemudian menyamakannya dengan nol:

$$\frac{\partial C}{\partial p} = 4l - \frac{8000}{p^2} = 0,$$
$$\frac{\partial C}{\partial l} = 4p = 0.$$

Dari persamaan kedua, diperoleh $p = 0$, yang tidak mungkin untuk dimensi kotak. Oleh karena itu, kita hanya perlu menyelesaikan persamaan pertama:

$$4l = \frac{8000}{p^2} \implies l = \frac{2000}{p^2}.$$

Substitusikan l ke dalam persamaan volume untuk mendapatkan t:

$$t = \frac{2000}{p \cdot \left(\frac{2000}{p^2}\right)} = \frac{p^2}{p} = p.$$

Jadi, $t = p$. Substitusikan l dan t ke dalam persamaan biaya:

$$C(p) = 4p\left(\frac{2000}{p^2}\right) + \frac{8000}{p} = \frac{8000}{p} + \frac{8000}{p} = \frac{16000}{p}.$$

Ambil turunan dari $C(p)$ dan samakan dengan nol untuk menemukan nilai p yang meminimalkan biaya:

$$\frac{dC}{dp} = -\frac{16000}{p^2} = 0.$$

Turunan ini tidak pernah nol, tetapi kita dapat melihat bahwa $C(p)$ menurun saat p bertambah. Namun, kita harus memastikan bahwa dimensi kotak tetap memenuhi volume 2000 cm^3. Dengan substitusi $l = \frac{2000}{p^2}$ dan $t = p$, kita dapat mencari nilai p yang masuk akal. Misalkan $p = 10$ cm:

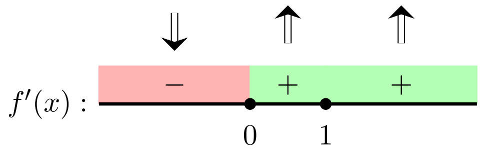
$$l = \frac{2000}{10^2} = 20 \text{ cm}, \quad t = 10 \text{ cm}.$$

Jadi, dimensi kotak yang meminimalkan biaya adalah $p = 10$ cm, $l = 20$ cm, dan $t = 10$ cm.

2. (a) Untuk menentukan selang naik/turun, maka diperlukan informasi mengenai tanda dari $f'(x)$. Diperoleh

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(1-x)^2.$$

Selanjutnya, tinjau tanda $f'(x)$:



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi turun pada interval $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.
- Fungsi naik pada interval $(1, \infty)$.

(b) Titik ekstrem relatif terjadi pada titik kritis $f'(x)$, yaitu $x = 0$ dan $x = 1$. Namun karena $f'(x)$ tidak berganti tanda di sekitar $x = 1$, maka titik tersebut bukan titik ekstrem. Sedangkan pada $x = 0$, fungsi berganti dari turun ke naik, sehingga terdapat titik minimum relatif pada $x = 0$. Nilai fungsi pada titik tersebut adalah

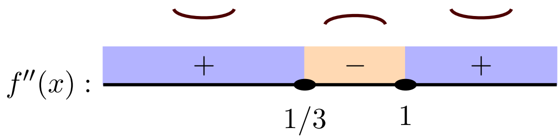
$$f(0) = 3(0)^4 - 8(0)^3 + 6(0)^2 + 1 = 1.$$

Jadi, titik minimum relatifnya adalah $(0, 1)$.

(c) Untuk menentukan selang kecekungan, maka diperlukan informasi mengenai tanda dari $f''(x)$. Turunkan $f'(x)$:

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1) = 12(3x-1)(x-1).$$

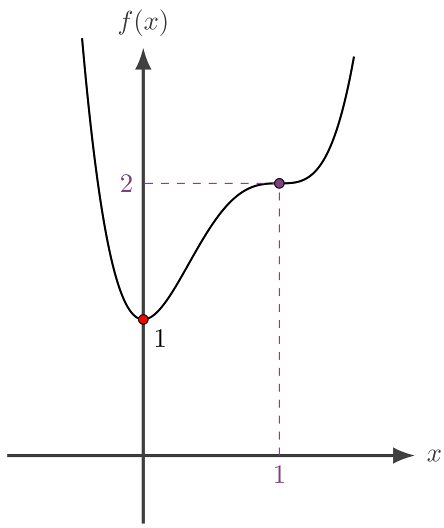
Selanjutnya, tinjau tanda $f''(x)$:



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke atas pada interval $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$.
- Fungsi cekung ke bawah pada interval $(\frac{1}{3}, 1)$.
- Titik belok terjadi pada titik kritis $f''(x)$, yaitu $x = \frac{1}{3}$ dan $x = 1$.

(d) Sketsa grafiknya adalah sebagai berikut:



3. Lakukan subtitusi berikut yaitu

$$\begin{aligned} u &= x^2+1 \\ x^2 &= u-1 \end{aligned} \implies \begin{aligned} du &= 2x\,dx \\ x\,dx &= \tfrac{du}{2} \end{aligned}$$

Kemudian, ubah batas integralnya:

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies u = 0^2+1 = 1, \\ x = \sqrt{3} &\implies u = (\sqrt{3})^2+1 = 4. \end{aligned}$$

Sehingga, integralnya menjadi

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} (4x^3+4x)\sqrt{x^2+1}\,dx &= \int_1^4 (4(u-1)+4)\sqrt{u}\cdot\frac{du}{2} = \int_1^4 (2u+2)\sqrt{u}\,du \\ &= \int_1^4 2u^{3/2}+2u^{1/2}\,du = 2\left[\frac{2}{5}u^{5/2}+\frac{2}{3}u^{3/2}\right]_1^4 \\ &= 2\left(\frac{2}{5}(4)^{5/2}+\frac{2}{3}(4)^{3/2}-\frac{2}{5}(1)^{5/2}-\frac{2}{3}(1)^{3/2}\right) \\ &= 2\left(\frac{64}{5}+\frac{16}{3}-\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\right) \\ &= 2\left(\frac{62}{5}+\frac{14}{3}\right) = 2\cdot\frac{256}{15} = \frac{512}{15}. \end{aligned}$$

4. Pertama, ubah bilangan kompleks ke dalam bentuk kutub:

$$\begin{aligned} r &= \left|-\sqrt{3}+i\right| = \sqrt{(-\sqrt{3})^2+1^2} = \sqrt{4} = 2, \\ \theta &= \tan^{-1}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)+180^\circ = 150^\circ. \end{aligned}$$

Jadi, bentuk kutubnya adalah $z = 2\operatorname{cis}150^\circ$. Selanjutnya, gunakan rumus De Moivre untuk mencari pangkat dari bilangan kompleks tersebut:

$$\begin{aligned} z^n = r^n\text{cis}(n\theta) &= 2^{-6}\text{cis}(-6\cdot 150^\circ) = \frac{1}{64}\text{cis}(-900^\circ) = \frac{1}{64}\text{cis}(-900^\circ+2\cdot 360^\circ) \\ &= \frac{1}{64}\text{cis}(-180^\circ) = \frac{1}{64}(\cos -180^\circ + i\sin -180^\circ) = \frac{1}{64}(-1+0i) = -\frac{1}{64}+0i. \end{aligned}$$

Jadi, bagian realnya adalah $-\dfrac{1}{64}$ dan bagian imajinernya adalah 0.

5. Metode Cramer secara umum untuk mencari nilai x_n dapat dirumuskan sebagai

$$x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dengan A_n adalah matriks yang diperoleh dari matriks A yang kolom ke-n-nya diganti dengan vektor kolom b. (Dalam hal ini $n = 4$)

Pada soal ini, diperoleh

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -9 \\ -16 \end{pmatrix}}_{b}$$

Hitung determinan dari matriks A menggunakan ekspansi kofaktor pada kolom ke-3:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0... - 0... + (-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} - 0 \cdots = -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix}$$

Selanjutnya dari matriks 3×3 di atas, hitung lagi determinannya dengan ekspansi kofaktor pada baris ke-2:

$$\begin{aligned} -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} &= -3 \left(-(-2) \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} + 0... - 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \right) \\ &= -3\left(2(2-6) - 4(-6-1)\right) = -3(-8+28) = -3(20) = -60. \end{aligned}$$

Selanjutnya, hitung determinan dari matriks A_4:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & -9 \\ 1 & -3 & 0 & -16 \end{vmatrix} = 0... - 0... + (-3) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -16 \end{vmatrix} - 0 \cdots = -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -16 \end{vmatrix}$$

Hitung determinan matriks 3×3 di atas dengan ekspansi kofaktor pada baris ke-2:

$$\begin{aligned} -3 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -16 \end{vmatrix} &= -3 \left(-(-2) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -16 \end{vmatrix} + 0... - 0 \right) \\ &= -3\left(2(-16+6)\right) = -3(-20) = 60. \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh nilai x_4 adalah

$$x_4 = \frac{\det(A_4)}{\det(A)} = \frac{60}{-60} = -1.$$

SKPB - ITS

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025

Mata kuliah/SKS	:	Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Kamis, 12 Desember 2024
Waktu	:	13.30-15.10 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	34-46, 107, 108

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI

DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN

"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

EAS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

SOAL

1. Diberikan kurva $y = \sqrt{x}$ untuk $0 \leq x \leq 3$. Dapatkan titik pada kurva yang memiliki jarak terdekat dengan titik $(2, 0)$.
2. Diberikan fungsi $f(x) = \dfrac{x}{x - 2024}$.
   (a) Tentukan asimtot datar dan tegaknya (jika ada).
   (b) Tentukan selang dimana fungsi $f(x)$ naik atau turun.
   (c) Tentukan titik ekstrim relatif fungsi tersebut.
   (d) Tentukan selang kecekungan fungsi $f(x)$ dan titik belok (jika ada).
   (e) Sketsa grafiknya.
3. Misalkan $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \frac{1+t^3}{1+t^2}\,dt$. Dapatkan $F(-1)$, $F'(-1)$, dan $F''(-1)$.
4. Nyatakan bilangan kompleks $z = \left(\dfrac{(1+i)^{12}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{16}}{(-1+i)^{32}}\right)$ dalam bentuk $z = a + bi$.
5. Carilah nilai x_3 dari sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 + x_4 &= 11, \\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 12, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 20, \\ 4x_1 + 6x_3 + x_4 &= 24, \end{aligned}$$

dengan menggunakan metode Cramer.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Pertama-tama dari soal kita tahu bahwa titik yang berada pada kurva memiliki koordinat $(x, \sqrt{x})$. Kemudian jarak antara titik $(x, \sqrt{x})$ dengan titik $(2, 0)$ dapat didefinsikan dengan

$$D(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

Dapat dilihat bahwa $D(x)$ merupakan fungsi yang bergantung pada x dengan interval $0 \leq x \leq 3$. Untuk mencari nilai minimum dari $D(x)$, kita cari titik stasioner dari $D(x)$ dengan mencari turunan pertama dari $D(x)$, yaitu

$$D'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}} = 0 \implies x = \frac{3}{2}.$$

Karena kita bekerja pada interval yang terbatas, maka kita juga perlu mengecek nilai $D(x)$ pada titik-titik ujung interval, sehingga dapat dibandingkan nilainya pada tabal dibawah ini

x	0	3/2	3
$D(x)$	2	7/4	2

Sehingga titik yang memiliki jarak terdekat dengan titik $(2, 0)$ adalah ketika $x = 3/2$. Yang terakhir subtitusikan nilai $x = 3/2$ ke dalam $y = \sqrt{x}$.

$\therefore$ Titik yang memiliki jarak terdekat dengan titik $(2, 0)$ adalah $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

2. KIta dapat rubah fungsi $f(x)$ agar lebih sederhana saat diturunkan

$$f(x) = \frac{x}{x-2024} = \frac{(x-2024)+2024}{x-2024} = 1 + \frac{2024}{x-2024}$$

(a) Asimtot datar terjadi ketika $f(x)$ mendekati nilai konstan ketika x mendekati $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 1 + \frac{2024}{x-2024} = 1$$

$\therefore$ Asimtot datar terjadi pada $y = 1$.

Asimtot tegak terjadi ketika $f(x)$ mendekati nilai tak hingga ketika x mendekati suatu nilai tertentu. Dalam hal ini, asimtot tegak terjadi ketika penyebut dari $f(x)$ adalah nol, yaitu ketika $x = 2024$.

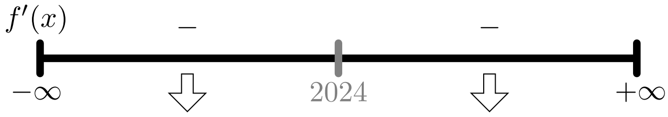
(b) Tinjau turunan pertama dari $f(x)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}\left(1 + \frac{2024}{x-2024}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x-2024+2024}{x-2024}\right) \\ &= \frac{d}{dx}\left(1 + \frac{2024}{x-2024}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2024}{x-2024}\right) = -\frac{2024}{(x-2024)^2} \end{aligned}$$

Karena $f'(x) \neq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, maka titik kritis dari $f(x)$ hanya terjadi ketika $x = 2024$.
Uji titik:

- $x = 0 \implies f'(0) = -\frac{1}{2024} < 0$.

- $x = 2025 \implies f'(2025) = -2024 < 0.$



$\therefore$ Fungsi $f(x)$ selalu turun pada selang $(-\infty, 2024) \cup (2024, +\infty)$.

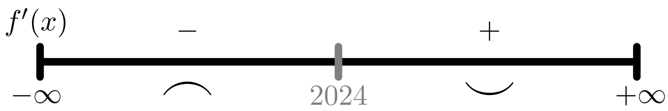
(c) Karena $f'(x)$ tidak akan pernah nol, maka fungsi $f(x)$ tidak memiliki titik ekstrim.

(d) Tinjau turunan kedua dari $f(x)$

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{2024}{(x-2024)^2}\right) = \frac{4048}{(x-2024)^3}$$

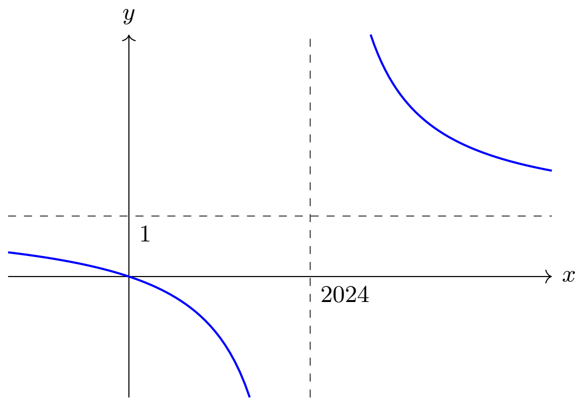
Karena $f''(x) \neq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, maka fungsi $f(x)$ tidak memiliki titik belok.
Uji titik:

- $x = 0 \implies f''(0) = -\frac{2}{2024^2} < 0.$
- $x = 2025 \implies f''(2025) = 4048 > 0.$



$\therefore$ Fungsi $f(x)$ cekung ke bawah pada selang $(-\infty, 2024)$ dan cekung ke atas pada selang $(2024, +\infty)$.

(e) Dapat kita sketsa menggunakan informasi pergeseran grafik dari $f(x) = \dfrac{1}{x}$. (2024 satuan ke kanan dan 1 satuan ke atas)



3. Untuk $F(-1)$, dapat dilihat karena nilai batas bawah dan batas atas sama, maka nilai integralnya adalah nol.

$$F(-1) = \int_{-1}^{-1} \frac{1+t^3}{1+t^2}\, dt = 0$$

Selanjutnya untuk $F'(-1)$, dapat kita gunakan Teorema Fundamental Kalkulus II untuk mencari turunan dari $F(x)$.

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_{-1}^{x} \frac{1+t^3}{1+t^2}\, dt\right) = \frac{1+x^3}{1+x^2}$$

$$F'(-1) = \frac{1+(-1)^3}{1+(-1)^2} = 0$$

Terakhir untuk $F''(-1)$, kita turunkan $F'(x)$.

$$F''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+x^3}{1+x^2}\right) = \frac{3x^2(1+x^2)-2x(1+x^3)}{(1+x^2)^2}$$
$$F''(-1) = \frac{3(-1)^2(1+(-1)^2)-2(-1)(1+(-1)^3)}{(1+(-1)^2)^2} = \frac{3(2)-0}{4} = \frac{3}{2}$$

4. Agar lebih mudah dihitung, jadikan ketiga masing-masing bilangan kompleks diatas menjadi bentuk polar.

   - Untuk $1+i$, didapatkan $a=1$ dan $b=1$ sehingga $r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$ dan $\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ (Kuadran I).[1]
   - Untuk $1+i\sqrt{3}$, didapatkan $a=1$ dan $b=\sqrt{3}$ sehingga $r=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$ dan $\theta = \arctan\left(\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ (Kuadran I).
   - Untuk $-1+i$, didapatkan $a=-1$ dan $b=1$ sehingga $r=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{2}$ dan $\theta = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4}$ (Kuadran II).

   Jadi bentuk polar dari z adalah

$$z = \left(\frac{(1+i)^{12}\left(1+i\sqrt{3}\right)^{16}}{(-1+i)^{32}}\right) = \frac{\left[\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]^{12}\left[2\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]^{16}}{\left[\sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{32}} = \frac{\left[2^6\text{cis}\,(3\pi)\right]\left[\cancel{2^{16}}\text{cis}\left(\frac{16\pi}{3}\right)\right]}{\cancel{2^{16}}\text{cis}\,(24\pi)}$$
$$= \frac{\left[2^6\text{cis}\,(\pi)\right]\left[\text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right]}{\text{cis}\,(0)} = 2^6\text{cis}\left(\pi+\frac{4\pi}{3}-0\right) = 2^6\text{cis}\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 2^6\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 64\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = 64\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boxed{32+32\sqrt{3}i}$$

5. SPL diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&4&1\\2&0&3&2\\5&1&2&1\\4&0&6&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}11\\12\\20\\24\end{pmatrix}}_{b}$$

   Kemudian kita tulis matriks A_3 dengan mengganti kolom ke-3 dari matriks A dengan vektor kolom b.

$$A_3 = \begin{pmatrix}1&0&11&1\\2&0&12&2\\5&1&20&1\\4&0&24&1\end{pmatrix}$$

[1] Boleh dijadikan dalam bentuk derajat

Selanjutnya kita hitung nilai determinan dari matriks A dan A_3. Ada banyak metode untuk menghitung determinan, seperti OBE, ekspansi kofaktor, dsb. Disini saya akan menggunakan metode ekspansi kofaktor dan OBE.[2]

- Untuk $\det(A)$, pertama akan kita ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua karena memiliki banyak nol.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -0 \ldots + 0 \ldots - (1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 0 \ldots = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

  Untuk matrix 3×3 kita bisa menggunakan aturan Sarrus, namun disini saya akan menggunakan OBE yaitu $B_2 - 2B_1$ dan $B_3 - 4B_1$.[3]

$$- \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} = -[(-5)(-3) - (-10)0] = -15$$

- Untuk $\det(A_3)$, dengan langkah yang sama kita ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 11 & 1 \\ 2 & 0 & 12 & 2 \\ 5 & 1 & 20 & 1 \\ 4 & 0 & 24 & 1 \end{vmatrix} = -0 \ldots + 0 \ldots - (1) \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix} + 0 \ldots = - \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix}$$

  Dan kita gunakan OBE yang sama yaitu $B_2 - 2B_1$ dan $B_3 - 4B_1$.

$$- \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ -20 & -3 \end{vmatrix} = -[(-10)(-3) - (-20)0] = -30$$

Terakhir kita gunakan rumus Cramer untuk mencari nilai x_3.

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-30}{-15} = 2$$

[2] OBE dan ekspansi kofaktor memang bisa di-*combine* untuk mempercepat perhitungan

[3] OBE tipe ini tidak mengubah nilai determinan matriks awal