Week 6 Assigment

Teosofi H.A & Hafidz M.

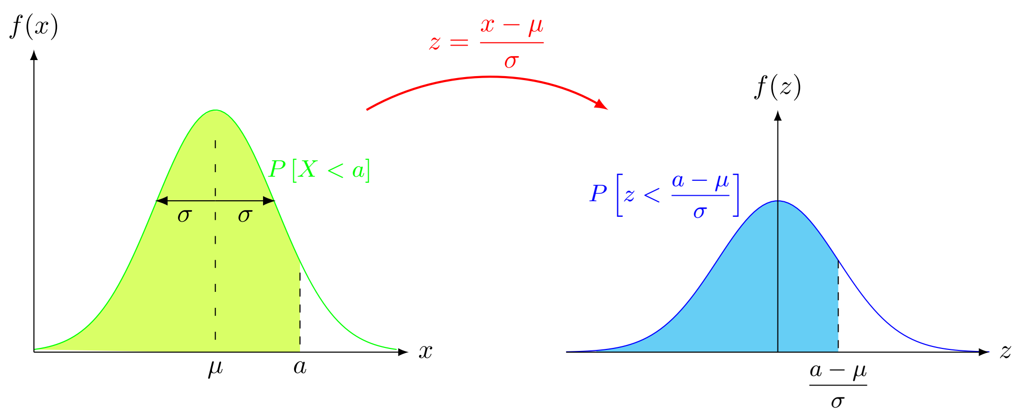
21 Oktober 2024

Tugas Mandiri

(Metode Statistika)
Distribusi normal adalah distribusi probabilitas yang paling penting dalam statistika. Distribusi ini memiliki bentuk kurva lonceng dan simetris terhadap nilai rata-rata μ dan memiliki standar deviasi σ. Distribusi normal memiliki fungsi kepadatan probabilitas sebagai berikut:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

Dalam mata kuliah Metode Statistika, kalian diajarkan untuk mengubah distribusi normal yang umum menjadi distribusi normal standar dengan cara menghitung nilai z-score. Konsep yang digunakan adalah subtitusi nilai $z = \dfrac{x-\mu}{\sigma}$ pada integral distribusi normal umum.



Gambar 1: Distribusi Normal Umum dan Distribusi Normal Standar

Luasan yang diarsir pada dua kurva di atas bernilai sama yang dimana mewakili peluang kumulatif dari distribusi normal. Sebelumnya kita hanya mengethaui nilai distribusi normal berdasarkan dari tabel, namun tahukah bahwa kamu bisa menghitungnya sendiri tanpa harus melihat tabel?

Nilai kumulatif dari distribusi normal standar dapat dihitung menggunakan integral berikut:

$$P[Z < z] = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Integral diatas merupakan salah satu *non-elementary integral*[1] sehingga kita tidak bisa menghitungnya secara analitik.

[1] Integral yang hasilnya bukan merupakan fungsi yang telah kita ketahui pada umumnya

Rumus aproksimasi yang digunakan untuk menghitung integral di atas dapat kita gunakan Deret Taylor[2] dari fungsi distribusi normal standar.

$$P[Z < z] \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1) \cdot k! \cdot 2^k}$$

Jika nilai n semakin besar, maka hasil aproksimasi akan semakin mendekati nilai sebenarnya.

Buatlah program yang dapat menghitung nilai kumulatif dari distribusi normal standar dengan menggunakan rumus aproksimasi di atas dengan mempertimbangkan nilai eror yang diberikan oleh pengguna.

Hint

Buatlah `loop` untuk menghitung $\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1) \cdot k! \cdot 2^k}$ yang akan berjalan hingga nilai eror yang diberikan oleh pengguna terpenuhi. Misalkan ε adalah nilai eror yang diberikan oleh pengguna, maka program akan berhenti ketika nilai

$$\left| \frac{(-1)^n \cdot z^{2n+1}}{(2n+1) \cdot n! \cdot 2^n} \right| < \varepsilon$$

untuk n yang dimana menyatakan banyaknya iterasi pada `loop`.

Input

- z =: Posisi relatif sebuah nilai dalam distribusi normal standar
  $-8 < z \leq 8, \quad z \in \mathbb{R}$
- ε =: Nilai eror yang diberikan oleh pengguna
  $0 < \varepsilon \leq 10^{-1}, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}$

Output

- n =: Banyak iterasi yang dilakukan oleh program setelah toleransi eror yang diberikan oleh pengguna terpenuhi.
  $n \in \mathbb{N}$
- $P[Z < z]$ =: Nilai kumulatif dari distribusi normal standar.[I]
  $0 \leq P[Z < z] \leq 1$

[I]Bisa dibandingkan dengan nilai yang ada pada tabel distribusi normal standar

Ex. Output

```
Masukkan nilai z: 1 ␣
Toleransi error: 10e-5 ␣
Diperlukan iterasi sebanyak 5
P( Z <= 1.0 ) = 0.8413441191604394
```

[2]Akan dipelajari di Kalkulus 2 bab terakhir
[3]`10e-5` dalam bahasa java berarti 10^{-5}