

**EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025**

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 ( SM234101 ) / 3 SKS  
 Hari, Tanggal : Rabu, 11 Desember 2024  
 Waktu : 07.00-08.40 WIB (100 menit)  
 Sifat : Tertutup  
 Kelas : 13-19, 103

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

**DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI**  
**DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN**  
 "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

**EAS Mengukur Kemampuan**

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

**SOAL**

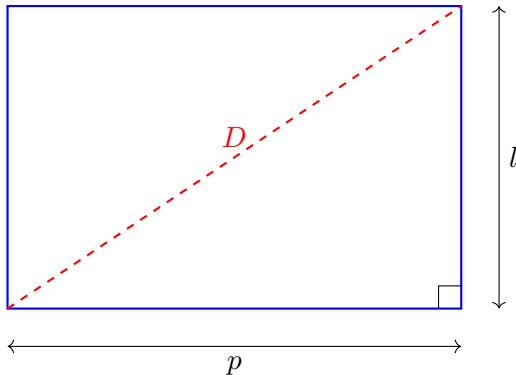
- Suatu persegi panjang memiliki sisi panjang dan lebar yang berubah. Jika sisi panjang bertambah dengan laju 2 cm/menit dan sisi lebar berkurang dengan laju 0.5 cm/menit, dapatkan laju perubahan diagonalnya saat sisi panjangnya mencapai 6 cm dan lebarnya 8 cm.
- Diberikan fungsi  $f(x) = x^3 - 3x - 1$ .
  - Tentukan selang dimana fungsi  $f(x)$  naik atau turun.
  - Tentukan titik ekstrem relatif fungsi tersebut.
  - Tentukan selang kecekungan fungsi  $f(x)$  dan titik belok (jika ada).
  - Sketsa grafiknya.
- Hitung integral  $\int_{\frac{1}{9}}^4 \frac{6 + 9\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ .
- Nyatakan bilangan kompleks  $z = \left(\frac{-\sqrt{3} + i}{2\text{cis}(15^\circ)}\right)^2$  dalam bentuk  $z = a + bi$ .
- Selesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} 3x - z &= 6, \\ x + y + z &= 15, \\ 4x + 2z &= 32, \end{aligned}$$

dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

## SOLUSI

1. Perhatikan ilustrasi berikut:



Diketahui:

$$\frac{dp}{dt} = 2 \text{ cm/menit}, \quad \frac{dl}{dt} = -0.5 \text{ cm/menit}, \quad p = 6 \text{ cm}, \quad l = 8 \text{ cm}.$$

Dengan menggunakan Teorema Pythagoras, diperoleh hubungan:

$$D^2 = p^2 + l^2.$$

Turunkan terhadap waktu  $t$  (menggunakan diferensiasi implisit):

$$2D \frac{dD}{dt} = 2p \frac{dp}{dt} + 2l \frac{dl}{dt}.$$

Substitusi nilai yang diketahui:

$$2D \frac{dD}{dt} = 2(6)(2) + 2(8)(-0.5).$$

Hitung  $D$  saat  $p = 6$  cm dan  $l = 8$  cm:

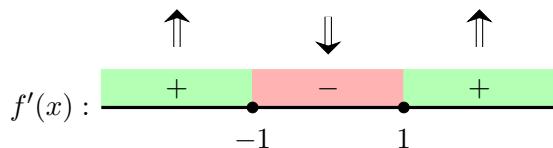
$$D = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}.$$

Maka diperoleh:

$$20 \frac{dD}{dt} = 24 - 8 = 16 \iff \frac{dD}{dt} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Jadi laju perubahan diagonalnya adalah 0.8 cm/menit.

2. (a) Uji tanda turunan pertama:  $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$ .



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi naik pada interval  $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ .
- Fungsi turun pada interval  $(-1, 1)$ .

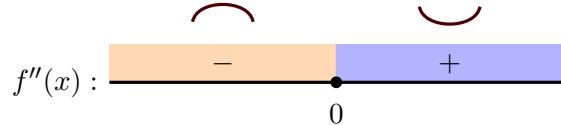
(b) Titik kritis diperoleh dari  $f'(x) = 0$ :

$$3(x-1)(x+1) = 0 \implies x = -1, 1.$$

Gunakan uji tanda untuk menentukan jenis titik kritis:

- Pada  $x = -1$ , fungsi berubah dari naik ke turun, sehingga  $f(-1) = -1 + 3 - 1 = 1$  adalah titik maksimum lokal.
- Pada  $x = 1$ , fungsi berubah dari turun ke naik, sehingga  $f(1) = 1 - 3 - 1 = -3$  adalah titik minimum lokal.

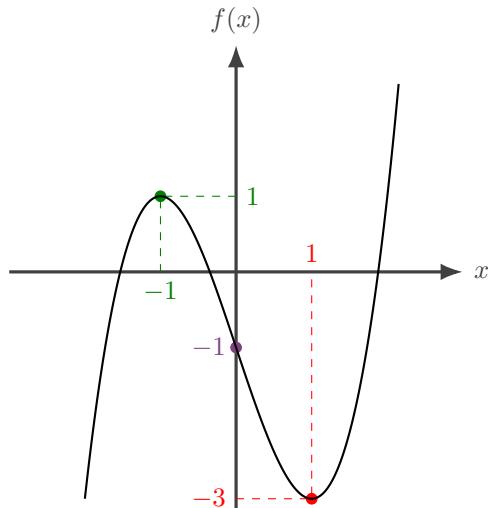
(c) Uji tanda turunan kedua:  $f''(x) = 6x$ .



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke bawah pada interval  $(-\infty, 0)$ .
- Fungsi cekung ke atas pada interval  $(0, \infty)$ .
- Titik belok pada  $x = 0$ , dengan  $f(0) = -1$ .

(d) Berdasarkan informasi di atas, sketsa grafiknya adalah sebagai berikut:



3. Sederhanakan ekspresi di dalam integral:

$$\frac{6 + 9\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{9\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 6x^{-\frac{1}{2}} + 9.$$

Maka integralnya menjadi:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{9}}^4 \frac{6 + 9\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int_{\frac{1}{9}}^4 6x^{-\frac{1}{2}} dx + \int_{\frac{1}{9}}^4 9 dx \\ &= 6 \left[ 2x^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{1}{9}}^4 + 9[x]_{\frac{1}{9}}^4 \\ &= 12 \left( 2 - \frac{1}{3} \right) + 9 \left( 4 - \frac{1}{9} \right) \\ &= 12 \cdot \frac{5}{3} + 9 \cdot \frac{35}{9} = 20 + 35 = 55. \end{aligned}$$

4. Ubah bilangan kompleks pada pembilang ke bentuk polar:

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right) = 150^\circ.$$

Sehingga

$$-\sqrt{3} + i = 2\text{cis}(150^\circ).$$

Maka

$$z = \left(\frac{2\text{cis}(150^\circ)}{2\text{cis}(15^\circ)}\right)^2 = (\text{cis}(150^\circ - 15^\circ))^2 = (\text{cis}(135^\circ))^2 = \text{cis}(135^\circ \cdot 2) = \text{cis}(270^\circ)$$

$$= \cos(270^\circ) + i \sin(270^\circ) = (0) + i(-1) = -i.$$

Jadi  $a = 0$  dan  $b = -1$ .

5. Lakukan OBE pada matriks augmented hingga diperoleh bentuk eselon baris (matriks segitiga atas):

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 15 \\ 4 & 0 & 2 & 32 \end{array} \right] \xrightarrow{B_1 \leftrightarrow B_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 32 \end{array} \right] \xrightarrow{B_2 - 3B_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -3 & -4 & -39 \\ 4 & 0 & 2 & 32 \end{array} \right] \xrightarrow{B_3 - 4B_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -3 & -4 & -39 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{B_3 - \frac{4}{3}B_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -3 & -4 & -39 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & 24 \end{array} \right] \xrightarrow{3B_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -3 & -4 & -39 \\ 0 & 0 & 10 & 72 \end{array} \right]$$

Dari baris ketiga, diperoleh  $z = \frac{72}{10} = \frac{36}{5}$ . Substitusi ke baris kedua:

$$-3y - 4\left(\frac{36}{5}\right) = -39 \implies -3y - \frac{144}{5} = -39 \implies -3y = -39 + \frac{144}{5} = -\frac{51}{5} \implies y = \frac{17}{5}.$$

Substitusi ke baris pertama:

$$3x + \frac{17}{5} + \frac{36}{5} = 15 \implies 3x + \frac{53}{5} = 15 \implies 3x = 15 - \frac{53}{5} = \frac{22}{5} \implies x = \frac{22}{15}.$$

Jadi, solusi sistem persamaan adalah:

$$x = \frac{22}{15}, \quad y = \frac{17}{5}, \quad z = \frac{36}{5}.$$

**EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025**

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 ( SM234101 ) / 3 SKS  
 Hari, Tanggal : Kamis, 12 Desember 2024  
 Waktu : 07.00-08.40 WIB (100 menit)  
 Sifat : Tertutup  
 Kelas : 5-12, 101

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

**DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI**  
**DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN**  
**"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."**

**EAS Mengukur Kemampuan**

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

**SOAL**

- Kerucut terbalik dengan tinggi 18 cm dan jari-jari 9 cm diisi pasir dengan laju  $4 \text{ cm}^3/\text{menit}$ . Berapa cepat ketinggian pasir dalam kerucut bertambah saat tingginya mencapai 12 cm?
- Diberikan fungsi  $f(x) = 1 + 3x^2 - 2x^3$ .
  - Tentukan selang dimana fungsi  $f(x)$  naik atau turun.
  - Tentukan titik ekstrem relatif fungsi tersebut.
  - Tentukan selang kecekungan fungsi  $f(x)$  dan titik belok (jika ada).
  - Sketsa grafiknya.
- (a) Uraikan  $|3x - 3|$  dalam fungsi sepotong-sepotong.  
 (b) Hitung integral  $\int_0^4 |3x - 3| dt$ .
- Nyatakan bilangan kompleks  $z = \frac{i^{19} - 3i^{30}}{1 - 2i}$  dalam bentuk kutub  $z = r \operatorname{cis} \theta$ .
- Selesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} 3x + 4y + z &= -2, \\ 3x + 2y + z &= 2, \\ x + y + z &= 2, \end{aligned}$$

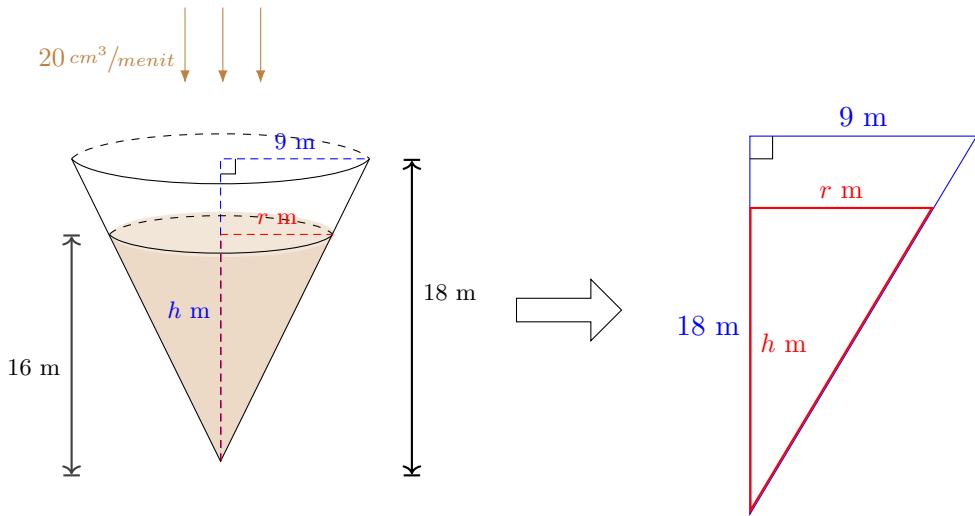
dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.

**Selamat Mengerjakan**

*"Jujur adalah kunci kesuksesan"*

## SOLUSI

1. Perhatikan ilustrasi berikut:



Menggunakan konsep kesebangunan segitiga, diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{r}{h} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \implies r = \frac{h}{2}.$$

Sedangkan volume kerucut diberikan oleh rumus

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}.$$

Turunkan terhadap waktu  $t$ :

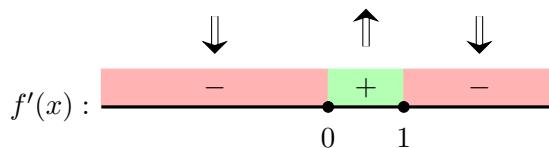
$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{\pi h^3}{12} \right) \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt} \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}. \end{aligned}$$

Diketahui  $\frac{dV}{dt} = 4 \text{ cm}^3/\text{menit}$  dan  $h = 12 \text{ cm}$ , maka

$$\frac{dh}{dt} \Big|_{h=12} = \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt} \Big|_{h=12} = \frac{4}{\pi(12)^2} \cdot 4 = \frac{16}{144\pi} = \frac{1}{9\pi} \text{ cm/menit.}$$

Jadi, ketinggian pasir bertambah dengan laju  $\frac{1}{9\pi} \text{ cm/menit}$  saat tingginya mencapai 12 cm.

2. (a) Uji tanda turunan pertama:  $f'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1-x)$ .



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi naik pada interval  $(0, 1)$ .
- Fungsi turun pada interval  $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$ .

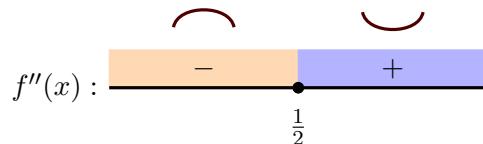
(b) Titik kritis diperoleh dari  $f'(x) = 0$ :

$$6x(1-x) = 0 \implies x = 0, 1.$$

Gunakan uji tanda untuk menentukan jenis titik kritis:

- Pada  $x = 0$ , fungsi berubah dari turun ke naik, sehingga  $f(0) = 1$  adalah titik minimum lokal.
- Pada  $x = 1$ , fungsi berubah dari naik ke turun, sehingga  $f(1) = 1 + 3 - 2 = 2$  adalah titik maksimum lokal.

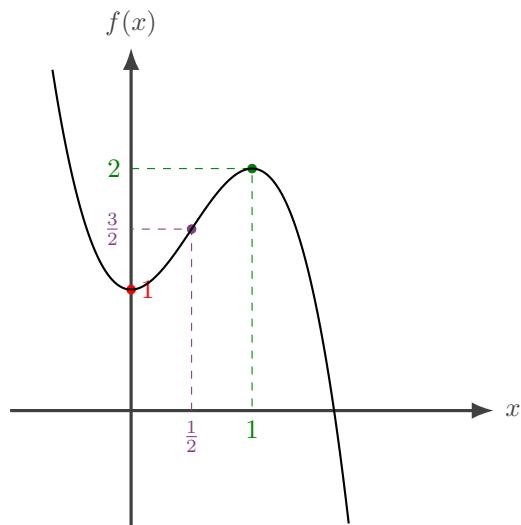
(c) Uji tanda turunan kedua:  $f''(x) = 6 - 12x$ .



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke atas pada interval  $(-\infty, \frac{1}{2})$ .
- Fungsi cekung ke bawah pada interval  $(\frac{1}{2}, \infty)$ .
- Titik belok pada  $x = \frac{1}{2}$ , dengan  $f(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$ .

(d) Berdasarkan informasi di atas, sketsa grafiknya adalah sebagai berikut:



3. (a) Uraikan  $|3x - 3|$ :

$$|3x - 3| = \begin{cases} 3x - 3, & 3x - 3 \geq 0 \\ -(3x - 3), & 3x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 3, & x \geq 1 \\ -3x + 3, & x < 1 \end{cases}$$

(b) Hitung integral:

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 |3x - 3| dx &= \int_0^1 |3x - 3| dx + \int_1^4 |3x - 3| dx \\
 &= \int_0^1 (-3x + 3) dx + \int_1^4 (3x - 3) dx \\
 &= \left[ -\frac{3}{2}x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[ \frac{3}{2}x^2 - 3x \right]_1^4 \\
 &= \left( -\frac{3}{2}(1)^2 + 3(1) - 0 \right) + \left( \left( \frac{3}{2}(4)^2 - 3(4) \right) - \left( \frac{3}{2}(1)^2 - 3(1) \right) \right) \\
 &= \left( -\frac{3}{2} + 3 \right) + \left( (24 - 12) - \left( \frac{3}{2} - 3 \right) \right) \\
 &= \frac{3}{2} + (12 + \frac{3}{2}) = \frac{3}{2} + \frac{27}{2} = \frac{30}{2} = 15.
 \end{aligned}$$

4. Untuk perpangkatan  $i^n$ , gunakan pola berikut:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \dots$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 i^{19} &= i^{16} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i, \\
 i^{30} &= i^{28} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1.
 \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{-i - 3(-1)}{1 - 2i} = \frac{-i + 3}{1 - 2i} = \frac{3 - i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{(3 - i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} \\
 &= \frac{3 + 6i - i - 2i^2}{1 + 4} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i.
 \end{aligned}$$

Ubah ke bentuk kutub:

$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

$$\theta = \tan^{-1} \left( \frac{1}{1} \right) = 45^\circ.$$

Jadi, bentuk kutubnya adalah  $z = \sqrt{2} \text{ cis } 45^\circ$ .

5. Lakukan OBE pada matriks augmented hingga diperoleh bentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{array}{c}
 \left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{B_1 \leftrightarrow B_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{B_2 - 3B_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{B_3 - 3B_1} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}B_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{B_1 - B_3} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \\
 \xrightarrow{B_1 - B_2} \left[ \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \Rightarrow \begin{array}{lcl} x & = & 1, \\ 0 & & \\ 0 & & \end{array} \end{array}$$

**EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025**

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 ( SM234101 ) / 3 SKS  
 Hari, Tanggal : Kamis, 12 Desember 2024  
 Waktu : 09.00-10.40 WIB (100 menit)  
 Sifat : Tertutup  
 Kelas : 47-59, 111

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

**DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI**  
**DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN**  
 "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

**EAS Mengukur Kemampuan**

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

**SOAL**

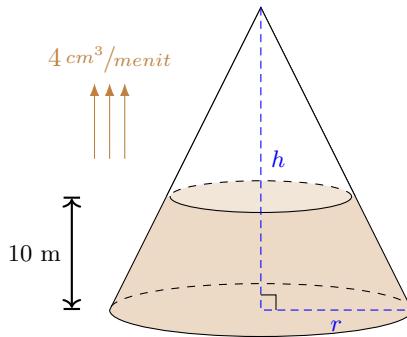
1. Suatu pasir dituangkan dari wadah tertentu sedemikian rupa sehingga tumpukan pasir tersebut membentuk kerucut dengan ketinggiannya sama dengan  $\frac{1}{3}$  dari diameternya setiap saat. Jika ketinggiannya bertambah dengan laju 4 m/menit, dapatkan laju pertambahan volume tumpukan pasir tersebut saat ketinggiannya mencapai 10 meter.
2. Diberikan fungsi  $f(x) = 1 + (1 - 2x)^3$ .
  - (a) Tentukan selang dimana fungsi  $f(x)$  naik atau turun.
  - (b) Tentukan titik ekstrem relatif fungsi tersebut.
  - (c) Tentukan selang kecekungan fungsi  $f(x)$  dan titik belok (jika ada).
  - (d) Sketsa grafiknya.
3. Misalkan  $F(x) = \int_0^x \frac{t+1}{t^2+1} dt$ , untuk  $-\infty < x < \infty$ .
  - (a) Dapatkan selang dimana fungsi  $F(x)$  naik atau turun.
  - (b) Dapatkan selang kecekungan fungsi  $F(x)$ .
4. Dapatkan semua bilangan kompleks  $z$  yang memenuhi  $z^3 = \sqrt{3} + i$ .
5. Selesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} 2x + 4y + z &= 7, \\ 3x + 2y + 2z &= 1, \\ x + y + z &= 0, \end{aligned}$$

dengan menggunakan metode invers.

## SOLUSI

1. Perhatikan ilustrasi berikut:



Selanjutnya berdasarkan informasi pada soal, diperoleh bahwa  $h = \frac{1}{3} \cdot 2r \implies r = \frac{3h}{2}$ . Volume kerucut diberikan oleh rumus

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{3h}{2}\right)^2 h = \frac{3\pi h^3}{4}.$$

Turunkan terhadap waktu  $t$ :

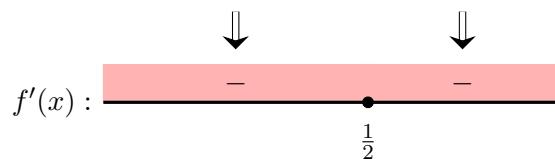
$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{3\pi h^3}{4} \right) \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{3\pi}{4} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{9\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt} \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{4}{9\pi h^2} \frac{dV}{dt}. \end{aligned}$$

Diketahui  $\frac{dh}{dt} = 4$  m/menit dan  $h = 10$  m, maka

$$\frac{dV}{dt} \Big|_{h=10} = \frac{9\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt} \Big|_{h=10} = \frac{9\pi(10)^2}{4} \cdot 4 = 900\pi \text{ m}^3/\text{menit}.$$

Jadi, volume tumpukan pasir bertambah dengan laju  $900\pi \text{ m}^3/\text{menit}$  saat ketinggiannya mencapai 10 meter.

2. (a) Uji tanda turunan pertama:  $f'(x) = -6(1 - 2x)^2$ .



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi turun pada interval  $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \infty)$ .
- Fungsi tidak pernah naik.

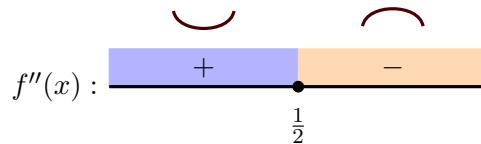
(b) Titik kritis diperoleh dari  $f'(x) = 0$ :

$$-6(1 - 2x)^2 = 0 \implies x = \frac{1}{2}.$$

Gunakan uji tanda untuk menentukan jenis titik kritis:

- Pada  $x = \frac{1}{2}$ , fungsi tetap turun di kedua sisi, sehingga tidak ada titik ekstrem relatif (baik maksimum maupun minimum).

(c) Uji tanda turunan kedua:  $f''(x) = 24(1 - 2x)$ .



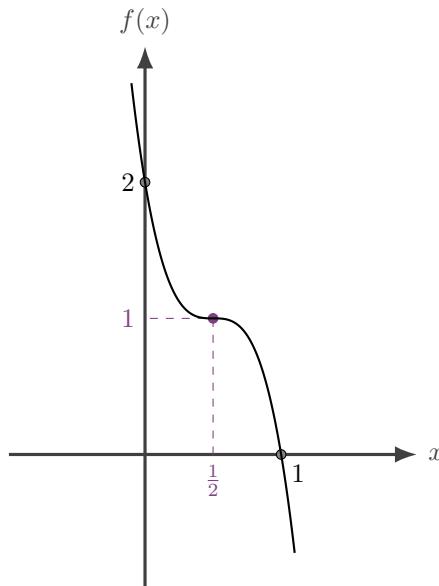
Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke atas pada interval  $(-\infty, \frac{1}{2})$ .
- Fungsi cekung ke bawah pada interval  $(\frac{1}{2}, \infty)$ .
- Titik belok pada  $x = \frac{1}{2}$ , dengan  $f(\frac{1}{2}) = 1 + (1 - 1)^3 = 1$ .

(d) Tambahkan beberapa informasi seperti titik potong terhadap sumbu  $x$  dan  $y$ , yaitu:

$$f(x) = 0 \implies 1 + (1 - 2x)^3 = 0 \implies (1 - 2x)^3 = -1 \implies 1 - 2x = -1 \implies x = 1,$$

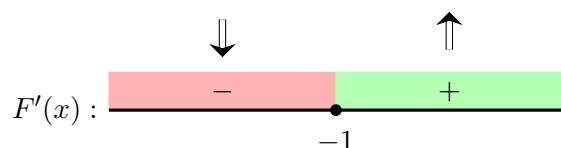
$$f(0) = 1 + (1 - 0)^3 = 1 + 1 = 2.$$



3. (a) Untuk menentukan selang naik/turun, maka diperlukan informasi mengenai tanda dari  $F'(x)$ . Berdasarkan Teorema Fundamental Kalkulus, diperoleh

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_0^x \frac{t+1}{t^2+1} dt \right) = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Selanjutnya, tinjau tanda  $F'(x)$ :



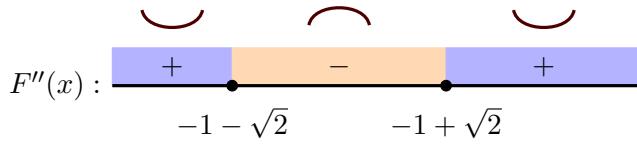
Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi turun pada interval  $(-\infty, -1)$ .
- Fungsi naik pada interval  $(-1, \infty)$ .

(b) Untuk menentukan selang kecekungan, maka diperlukan informasi mengenai tanda dari  $F''(x)$ . Turunkan  $F'(x)$ :

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{d}{dx} \left( \frac{x+1}{x^2+1} \right) = \frac{(1)(x^2+1) - (x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 1 - 2x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 1}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x^2 + 2x - 1)}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, tinjau tanda  $F''(x)$ :



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke atas pada interval  $(-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, \infty)$ .
- Fungsi cekung ke bawah pada interval  $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$ .

4. Misalkan  $z = rcis\theta$ . Pertama, ubah  $\sqrt{3} + i$  ke dalam bentuk kutub:

$$\begin{aligned} r &= |\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2, \\ \theta &= \tan^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 30^\circ. \end{aligned}$$

Jadi, bentuk kutubnya adalah  $z = 2cis30^\circ$ . Selanjutnya, gunakan rumus De Moivre untuk mencari akar-akar dari bilangan kompleks tersebut:

$$\begin{aligned} z_k &= r^{1/3} cis \left( \frac{\theta + 360^\circ k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2. \\ &= 2^{1/3} cis \left( \frac{30^\circ + 360^\circ k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Sehingga, akar-akarnya adalah:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{1/3} cis 10^\circ, \\ z_1 &= 2^{1/3} cis 130^\circ, \\ z_2 &= 2^{1/3} cis 250^\circ. \end{aligned}$$

5. Pertama-tama definisikan matriks  $A$  yang merupakan matriks koefisien dari sistem persamaan linear, matriks kolom  $\mathbf{x}$  yang merupakan variabel yang akan dicari, dan matriks kolom  $\mathbf{b}$  yang merupakan hasil dari sistem persamaan linear tersebut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear menggunakan metode invers adalah sebagai berikut:

- Hitung invers dari matriks koefisien  $A^{-1}$ .
- Kalikan matriks invers  $A^{-1}$  dengan matriks kolom  $\mathbf{b}$  untuk mendapatkan solusi vektor  $\mathbf{x}$ .

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Konstruksikan matriks dan matriks identitas secara bersebelahan. Tujuannya agar dapat mencari invers dari matriks koefisien.

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Lakukan OBE untuk mengubah matriks  $A$  menjadi matriks identitas.

$$\begin{aligned} &\xrightarrow{B_1 \leftrightarrow B_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{B_2 - 3B_1} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{-B_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{B_3 - 2B_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & -8 \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{-\frac{1}{3}B_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{B_2 - B_3} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array} \right] \\ &\xrightarrow{B_1 - B_2} \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Jadi, matriks invers  $A^{-1}$  adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, kalikan matriks invers  $A^{-1}$  dengan matriks kolom  $\mathbf{b}$  untuk mendapatkan solusi vektor  $\mathbf{x}$ .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2 \cdot 0 \\ \frac{1}{3} \cdot 7 - \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 \\ -\frac{1}{3} \cdot 7 - \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{8}{3} \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Hasil terakhir menunjukkan bahwa  $x = 1$ ,  $y = 2$ , dan  $z = -3$ .

**EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025**

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 ( SM234101 ) / 3 SKS  
 Hari, Tanggal : Kamis, 12 Desember 2024  
 Waktu : 11.00-12.40 WIB (100 menit)  
 Sifat : Tertutup  
 Kelas : 20-33, 105, 106

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

**DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI**  
**DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN**  
 "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

**EAS Mengukur Kemampuan**

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

**SOAL**

- Kotak persegi panjang dengan alas dan penutup memiliki volume  $2000 \text{ cm}^3$ . Biaya bagian alas kotak dua kali lebih mahal daripada sisi-sisinya. Tentukan ukuran kotak tersebut dengan biaya paling minimum.
- Diberikan fungsi  $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$ .
  - Tentukan selang dimana fungsi  $f(x)$  naik atau turun.
  - Tentukan titik ekstrem relatif fungsi tersebut.
  - Tentukan selang kecekungan fungsi  $f(x)$  dan titik belok (jika ada).
  - Sketsa grafiknya.
- Hitung integral
 
$$\int_0^{\sqrt{3}} (4x^3 + 4x)\sqrt{x^2 + 1} dx.$$
- Dapatkan bagian real dan imajiner dari bilangan kompleks  $z = (-\sqrt{3} + i)^{-6}$ .
- Carilah nilai  $x_4$  dari sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned}
 2x_1 + x_2 - 2x_4 &= 2 \\
 -2x_1 + 4x_4 &= 0 \\
 x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= -9 \\
 x_1 - 3x_2 + 2x_4 &= -16
 \end{aligned}$$

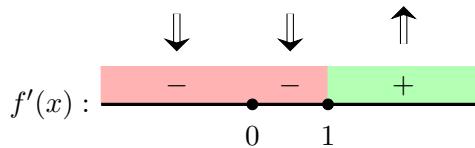
dengan menggunakan metode Cramer.

## SOLUSI

1. ,
2. (a) Untuk menentukan selang naik/turun, maka diperlukan informasi mengenai tanda dari  $f'(x)$ . Diperoleh

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(1-x)^2.$$

Selanjutnya, tinjau tanda  $f'(x)$ :



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi turun pada interval  $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$ .
- Fungsi naik pada interval  $(1, \infty)$ .

- (b) Titik ekstrem relatif terjadi pada titik kritis  $f'(x)$ , yaitu  $x = 0$  dan  $x = 1$ . Namun karena  $f'(x)$  tidak berganti tanda di sekitar  $x = 0$ , maka titik tersebut bukan titik ekstrem. Sedangkan pada  $x = 1$ , fungsi berganti dari turun ke naik, sehingga terdapat titik minimum relatif pada  $x = 1$ . Nilai fungsi pada titik tersebut adalah

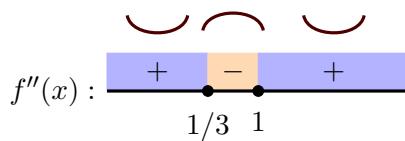
$$f(1) = 3(1)^4 - 8(1)^3 + 6(1)^2 + 1 = 3 - 8 + 6 + 1 = 2.$$

Jadi, titik minimum relatifnya adalah  $(1, 2)$ .

- (c) Untuk menentukan selang kecekungan, maka diperlukan informasi mengenai tanda dari  $f''(x)$ . Turunkan  $f'(x)$ :

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1) = 12(3x - 1)(x - 1).$$

Selanjutnya, tinjau tanda  $f''(x)$ :



Dari gambar di atas, diperoleh:

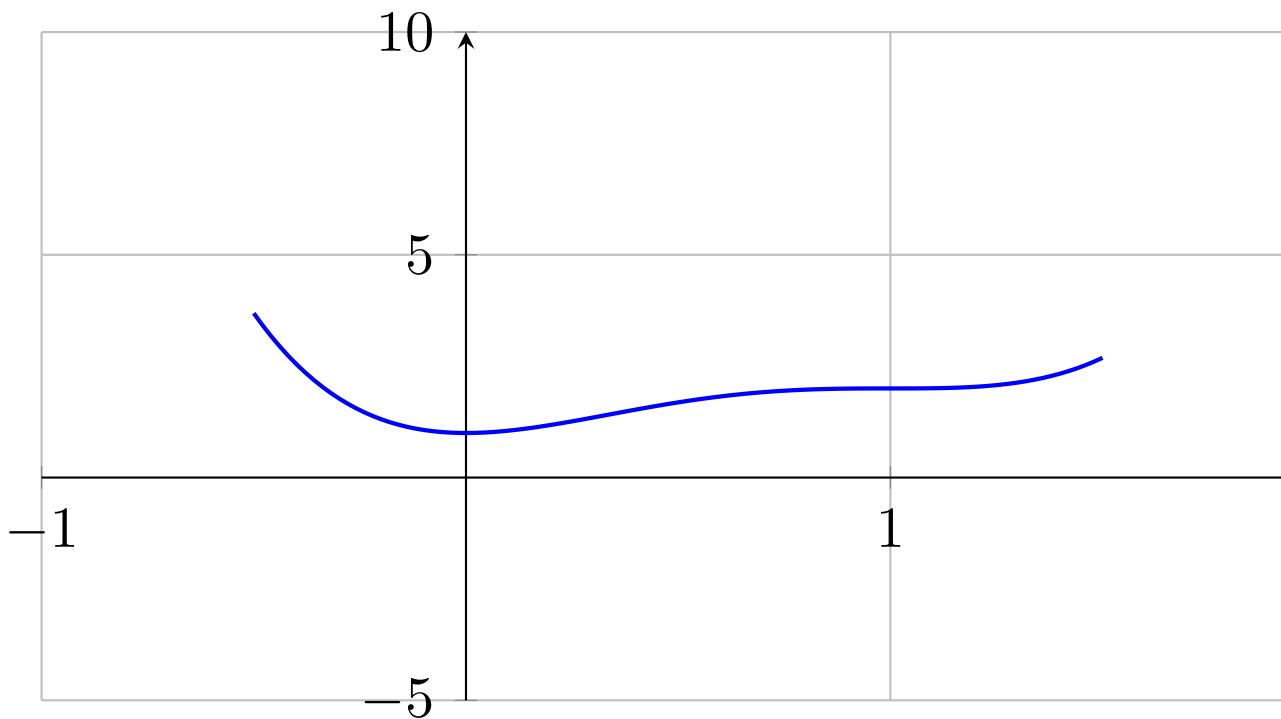
- Fungsi cekung ke atas pada interval  $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$ .
- Fungsi cekung ke bawah pada interval  $(\frac{1}{3}, 1)$ .
- Titik belok terjadi pada titik kritis  $f''(x)$ , yaitu  $x = \frac{1}{3}$  dan  $x = 1$ .

- (d) Sketsa grafiknya adalah sebagai berikut:

*Solution By: Tetew*

---

$$f(x)$$



3. ,

4. ,

**EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025**

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 ( SM234101 ) / 3 SKS  
 Hari, Tanggal : Kamis, 12 Desember 2024  
 Waktu : 13.30-15.10 WIB (100 menit)  
 Sifat : Tertutup  
 Kelas : 34-46, 107, 108

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

**DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI**  
**DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN**  
 "Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

**EAS Mengukur Kemampuan**

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

**SOAL**

1. Diberikan kurva  $y = \sqrt{x}$  untuk  $0 \leq x \leq 3$ . Dapatkan titik pada kurva yang memiliki jarak terdekat dengan titik  $(2, 0)$ .
2. Diberikan fungsi  $f(x) = \frac{x}{x - 2024}$ .
  - (a) Tentukan asimtot datar dan tegaknya (jika ada).
  - (b) Tentukan selang dimana fungsi  $f(x)$  naik atau turun.
  - (c) Tentukan titik ekstrim relatif fungsi tersebut.
  - (d) Tentukan selang kecekungan fungsi  $f(x)$  dan titik belok (jika ada).
  - (e) Sketsa grafiknya.
3. Misalkan  $F(x) = \int_{-1}^x \frac{1+t^3}{1+t^2} dt$ . Dapatkan  $F(-1)$ ,  $F'(-1)$ , dan  $F''(-1)$ .
4. Nyatakan bilangan kompleks  $z = \left( \frac{(1+i)^{12} (1+i\sqrt{3})^{16}}{(-1+i)^{32}} \right)$  dalam bentuk  $z = a + bi$ .
5. Carilah nilai  $x_3$  dari sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_3 + x_4 &= 11, \\ 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 12, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 20, \\ 4x_1 + 6x_3 + x_4 &= 24, \end{aligned}$$

dengan menggunakan metode Cramer.

## SOLUSI

1. Pertama-tama dari soal kita tahu bahwa titik yang berada pada kurva memiliki koordinat  $(x, \sqrt{x})$ . Kemudian jarak antara titik  $(x, \sqrt{x})$  dengan titik  $(2, 0)$  dapat didefinisikan dengan

$$D(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

Dapat dilihat bahwa  $D(x)$  merupakan fungsi yang bergantung pada  $x$  dengan interval  $0 \leq x \leq 3$ . Untuk mencari nilai minimum dari  $D(x)$ , kita cari titik stasioner dari  $D(x)$  dengan mencari turunan pertama dari  $D(x)$ , yaitu

$$D'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}} = 0 \implies x = \frac{3}{2}.$$

Karena kita bekerja pada interval yang terbatas, maka kita juga perlu mengecek nilai  $D(x)$  pada titik-titik ujung interval, sehingga dapat dibandingkan nilainya pada tabel dibawah ini

$x$	0	$3/2$	3
$D(x)$	2	$7/4$	2

Sehingga titik yang memiliki jarak terdekat dengan titik  $(2, 0)$  adalah ketika  $x = 3/2$ . Yang terakhir substitusikan nilai  $x = 3/2$  ke dalam  $y = \sqrt{x}$ .

∴ Titik yang memiliki jarak terdekat dengan titik  $(2, 0)$  adalah  $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ .

2. Kita dapat rubah fungsi  $f(x)$  agar lebih sederhana saat diturunkan

$$f(x) = \frac{x}{x-2024} = \frac{(x-2024)+2024}{x-2024} = 1 + \frac{2024}{x-2024}$$

- (a) Asimtot datar terjadi ketika  $f(x)$  mendekati nilai konstan ketika  $x$  mendekati  $\pm\infty$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{2024}{x-2024} = 1$$

∴ Asimtot datar terjadi pada  $y = 1$ .

Asimtot tegak terjadi ketika  $f(x)$  mendekati nilai tak hingga ketika  $x$  mendekati suatu nilai tertentu. Dalam hal ini, asimtot tegak terjadi ketika penyebut dari  $f(x)$  adalah nol, yaitu ketika  $x = 2024$ .

- (b) Tinjau turunan pertama dari  $f(x)$

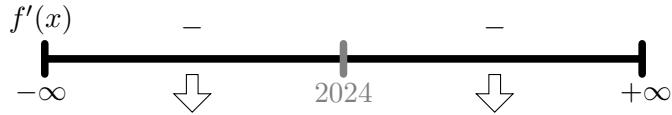
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left( 1 + \frac{2024}{x-2024} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{x-2024+2024}{x-2024} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left( 1 + \frac{2024}{x-2024} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{2024}{x-2024} \right) = -\frac{2024}{(x-2024)^2} \end{aligned}$$

Karena  $f'(x) \neq 0$  untuk semua  $x \in \mathbb{R}$ , maka titik kritis dari  $f(x)$  hanya terjadi ketika  $x = 2024$ .

Uji titik:

- $x = 0 \implies f'(0) = -\frac{1}{2024} < 0$ .

- $x = 2025 \implies f'(2025) = -2024 < 0.$



$\therefore$  Fungsi  $f(x)$  selalu turun pada selang  $(-\infty, 2024) \cup (2024, +\infty)$ .

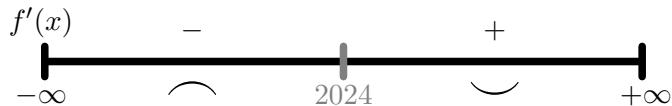
- (c) Karena  $f'(x)$  tidak akan pernah nol, maka fungsi  $f(x)$  tidak memiliki titik ekstrim.
- (d) Tinjau turunan kedua dari  $f(x)$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left( -\frac{2024}{(x-2024)^2} \right) = \frac{4048}{(x-2024)^3}$$

Karena  $f''(x) \neq 0$  untuk semua  $x \in \mathbb{R}$ , maka fungsi  $f(x)$  tidak memiliki titik belok.

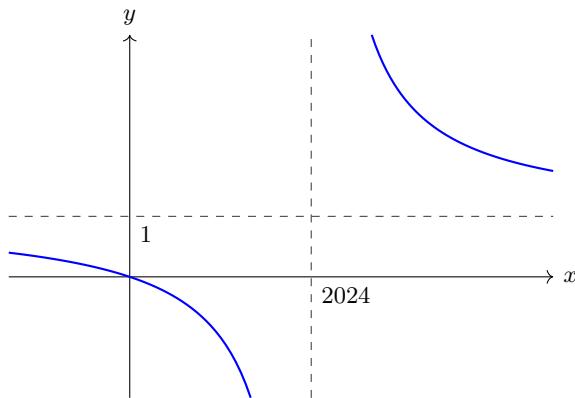
Uji titik:

- $x = 0 \implies f''(0) = -\frac{2}{2024^2} < 0.$
- $x = 2025 \implies f''(2025) = 4048 > 0.$



$\therefore$  Fungsi  $f(x)$  cekung ke bawah pada selang  $(-\infty, 2024)$  dan cekung ke atas pada selang  $(2024, +\infty)$ .

- (e) Dapat kita sketsa menggunakan informasi pergeseran grafik dari  $f(x) = \frac{1}{x}$ . (2024 satuan ke kanan dan 1 satuan ke atas)



3. Untuk  $F(-1)$ , dapat dilihat karena nilai batas bawah dan batas atas sama, maka nilai integralnya adalah nol.

$$F(-1) = \int_{-1}^{-1} \frac{1+t^3}{1+t^2} dt = 0$$

Selanjutnya untuk  $F'(-1)$ , dapat kita gunakan Teorema Fundamental Kalkulus II untuk mencari turunan dari  $F(x)$ .

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left( \int_{-1}^x \frac{1+t^3}{1+t^2} dt \right) = \frac{1+x^3}{1+x^2}$$

$$F'(-1) = \frac{1+(-1)^3}{1+(-1)^2} = 0$$

Terakhir untuk  $F''(-1)$ , kita turunkan  $F'(x)$ .

$$F''(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1+x^3}{1+x^2} \right) = \frac{3x^2(1+x^2) - 2x(1+x^3)}{(1+x^2)^2}$$

$$F''(-1) = \frac{3(-1)^2(1+(-1)^2) - 2(-1)(1+(-1)^3)}{(1+(-1)^2)^2} = \frac{3(2)-0}{4} = \frac{3}{2}$$

4. Agar lebih mudah dihitung, jadikan ketiga masing-masing bilangan kompleks diatas menjadi bentuk polar.

- Untuk  $1+i$ , didapatkan  $a = 1$  dan  $b = 1$  sehingga  $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  dan  $\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$  (Kuadran I).<sup>1</sup>
- Untuk  $1+i\sqrt{3}$ , didapatkan  $a = 1$  dan  $b = \sqrt{3}$  sehingga  $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$  dan  $\theta = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$  (Kuadran I).
- Untuk  $-1+i$ , didapatkan  $a = -1$  dan  $b = 1$  sehingga  $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  dan  $\theta = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4}$  (Kuadran II).

Jadi bentuk polar dari  $z$  adalah

$$z = \left( \frac{(1+i)^{12} (1+i\sqrt{3})^{16}}{(-1+i)^{32}} \right) = \frac{\left[ \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]^{12} \left[ 2\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]^{16}}{\left[ \sqrt{2}\text{cis}\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]^{32}} = \frac{[2^6\text{cis}(3\pi)] [2^{16}\text{cis}\left(\frac{16\pi}{3}\right)]}{2^{16}\text{cis}(24\pi)}$$

$$= \frac{[2^6\text{cis}(\pi)] \left[ \text{cis}\left(\frac{4\pi}{3}\right) \right]}{\text{cis}(0)} = 2^6\text{cis}\left(\pi + \frac{4\pi}{3} - 0\right) = 2^6\text{cis}\left(\frac{7\pi}{3}\right) = 2^6\text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 64 \left( \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right) = 64 \left( \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \boxed{32 + 32\sqrt{3}i}$$

5. Metode Cramer secara umum untuk mencari nilai  $x_n$  dapat dirumuskan sebagai

$$x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dengan  $A_n$  adalah matriks yang diperoleh dari matriks  $A$  yang kolom ke- $n$ -nya diganti dengan vektor kolom  $b$ . (Dalam hal ini  $n = 3$ )

SPL diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}}_b$$

---

<sup>1</sup>Boleh dijadikan dalam bentuk derajat

Kemudian kita tulis matriks  $A_3$  dengan mengganti kolom ke-3 dari matriks  $A$  dengan vektor kolom  $b$ .

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 1 \\ 2 & 0 & 12 & 2 \\ 5 & 1 & 20 & 1 \\ 4 & 0 & 24 & 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya kita hitung nilai determinan dari matriks  $A$  dan  $A_3$ . Ada banyak metode untuk menghitung determinan, seperti OBE, ekspansi kofaktor, dsb. Disini saya akan menggunakan metode ekspansi kofaktor dan OBE.<sup>2</sup>

- Untuk  $\det(A)$ , pertama akan kita ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua karena memiliki banyak nol.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -0\dots + 0\dots - (1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 0\dots = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Untuk matrix  $3 \times 3$  kita bisa menggunakan aturan Sarrus, namun disini saya akan menggunakan OBE yaitu  $B_2 - 2B_1$  dan  $B_3 - 4B_1$ .<sup>3</sup>

$$-\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} = -[(-5)(-3) - (-10)0] = -15$$

- Untuk  $\det(A_3)$ , dengan langkah yang sama kita ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 11 & 1 \\ 2 & 0 & 12 & 2 \\ 5 & 1 & 20 & 1 \\ 4 & 0 & 24 & 1 \end{vmatrix} = -0\dots + 0\dots - (1) \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix} + 0\dots = - \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix}$$

Dan kita gunakan OBE yang sama yaitu  $B_2 - 2B_1$  dan  $B_3 - 4B_1$ .

$$-\begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & -3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -10 & 0 \\ -20 & -3 \end{vmatrix} = -[(-10)(-3) - (-20)0] = -30$$

Terakhir kita gunakan rumus Cramer untuk mencari nilai  $x_3$ .

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-30}{-15} = 2$$

---

<sup>2</sup>OBE dan ekspansi kofaktor memang bisa di-combine untuk mempercepat perhitungan

<sup>3</sup>OBE tipe ini tidak mengubah nilai determinan matriks awal