

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
 Hari, Tanggal : Rabu, 11 Desember 2024
 Waktu : 07.00-08.40 WIB (100 menit)
 Sifat : Tertutup
 Kelas : 13-19, 103

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

EAS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

SOAL

- Suatu persegi panjang memiliki sisi panjang dan lebar yang berubah. Jika sisi panjang bertambah dengan laju 2 cm/menit dan sisi lebar berkurang dengan laju 0.5 cm/menit, dapatkan laju perubahan diagonalnya saat sisi panjangnya mencapai 6 cm dan lebarnya 8 cm.
- Diberikan fungsi $f(x) = x^3 - 3x - 1$.
 - Tentukan selang dimana fungsi $f(x)$ naik atau turun.
 - Tentukan titik ekstrem relatif fungsi tersebut.
 - Tentukan selang kecekungan fungsi $f(x)$ dan titik belok (jika ada).
 - Sketsa grafiknya.

- Hitung integral

$$\int_{\frac{1}{9}}^4 \frac{6 + 9\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$$

- Nyatakan bilangan kompleks $z = \left(\frac{-\sqrt{3} + i}{2\text{cis}(15^\circ)} \right)^2$ dalam bentuk $z = a + bi$.

- Selesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned}
 3x - z &= 6, \\
 x + y + z &= 15, \\
 4x + 2z &= 32,
 \end{aligned}$$

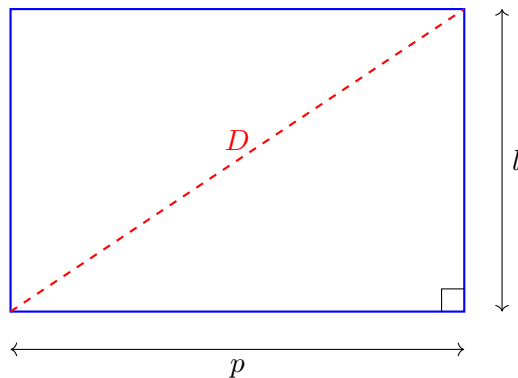
dengan menggunakan metode eliminasi Gauss.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Perhatikan ilustrasi berikut:



Diketahui:

$$\frac{dp}{dt} = 2 \text{ cm/menit}, \quad \frac{dl}{dt} = -0.5 \text{ cm/menit}, \quad p = 6 \text{ cm}, \quad l = 8 \text{ cm}.$$

Dengan menggunakan Teorema Pythagoras, diperoleh hubungan:

$$D^2 = p^2 + l^2.$$

Turunkan terhadap waktu t (menggunakan diferensiasi implisit):

$$2D \frac{dD}{dt} = 2p \frac{dp}{dt} + 2l \frac{dl}{dt}.$$

Substitusi nilai yang diketahui:

$$2D \frac{dD}{dt} = 2(6)(2) + 2(8)(-0.5).$$

Hitung D saat $p = 6 \text{ cm}$ dan $l = 8 \text{ cm}$:

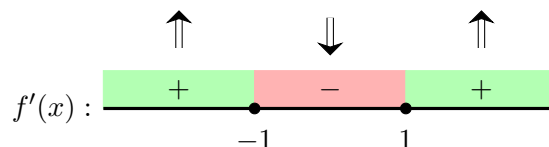
$$D = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ cm}.$$

Maka diperoleh:

$$20 \frac{dD}{dt} = 24 - 8 = 16 \iff \frac{dD}{dt} = \frac{4}{5} = 0.8$$

Jadi laju perubahan diagonalnya adalah 0.8 cm/menit.

2. (a) Uji tanda turunan pertama: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$.



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi naik pada interval $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.
- Fungsi turun pada interval $(-1, 1)$.

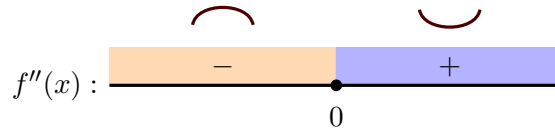
(b) Titik kritis diperoleh dari $f'(x) = 0$:

$$3(x-1)(x+1) = 0 \implies x = -1, 1.$$

Gunakan uji tanda untuk menentukan jenis titik kritis:

- Pada $x = -1$, fungsi berubah dari naik ke turun, sehingga $f(-1) = -1 + 3 - 1 = 1$ adalah titik maksimum lokal.
- Pada $x = 1$, fungsi berubah dari turun ke naik, sehingga $f(1) = 1 - 3 - 1 = -3$ adalah titik minimum lokal.

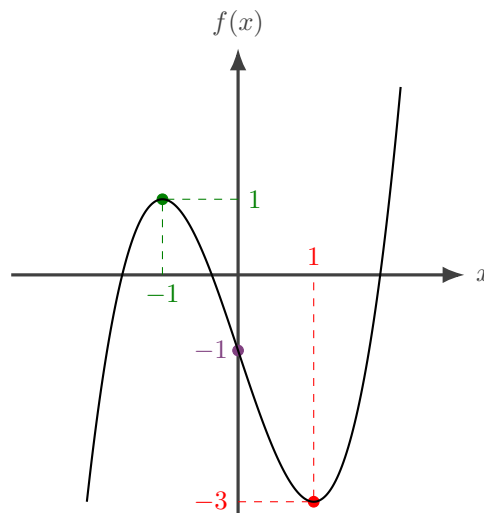
(c) Uji tanda turunan kedua: $f''(x) = 6x$.



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke bawah pada interval $(-\infty, 0)$.
- Fungsi cekung ke atas pada interval $(0, \infty)$.
- Titik belok pada $x = 0$, dengan $f(0) = -1$.

(d) Berdasarkan informasi di atas, sketsa grafiknya adalah sebagai berikut:



3. Sederhanakan ekspresi di dalam integral:

$$\frac{6 + 9\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{9\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 6x^{-\frac{1}{2}} + 9.$$

Maka integralnya menjadi:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{9}}^4 \frac{6 + 9\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx &= \int_{\frac{1}{9}}^4 6x^{-\frac{1}{2}} dx + \int_{\frac{1}{9}}^4 9 dx \\ &= 6 \left[2x^{\frac{1}{2}} \right]_{\frac{1}{9}}^4 + 9[x]_{\frac{1}{9}}^4 \\ &= 12 \left(2 - \frac{1}{3} \right) + 9 \left(4 - \frac{1}{9} \right) \\ &= 12 \cdot \frac{5}{3} + 9 \cdot \frac{35}{9} = 20 + 35 = 55. \end{aligned}$$

4. Ubah bilangan kompleks pada pembilang ke bentuk polar:

$$r = \sqrt{(-\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\theta = \tan^{-1} \left(\frac{1}{-\sqrt{3}} \right) = 150^\circ.$$

Sehingga

$$-\sqrt{3} + i = 2\text{cis}(150^\circ).$$

Maka

$$z = \left(\frac{2\text{cis}(150^\circ)}{2\text{cis}(15^\circ)} \right)^2 = (\text{cis}(150^\circ - 15^\circ))^2 = (\text{cis}(135^\circ))^2 = \text{cis}(135^\circ \cdot 2) = \text{cis}(270^\circ)$$

$$= \cos(270^\circ) + i \sin(270^\circ) = (0) + i(-1) = -i.$$

Jadi $a = 0$ dan $b = -1$.

5. Lakukan OBE pada matriks augmented hingga diperoleh bentuk eselon baris (matriks segitiga atas):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 15 \\ 4 & 0 & 2 & 32 \end{array} \right] \xrightarrow{B_1 \leftrightarrow B_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 3 & 0 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 2 & 32 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} B_2 - 3B_1 \\ B_3 - 4B_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -3 & -4 & -39 \\ 0 & -4 & -2 & -28 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{B_3 - \frac{4}{3}B_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -3 & -4 & -39 \\ 0 & 0 & \frac{10}{3} & 24 \end{array} \right] \xrightarrow{3B_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 15 \\ 0 & -3 & -4 & -39 \\ 0 & 0 & 10 & 72 \end{array} \right]$$

Dari baris ketiga, diperoleh $z = \frac{72}{10} = \frac{36}{5}$. Substitusi ke baris kedua:

$$-3y - 4 \left(\frac{36}{5} \right) = -39 \implies -3y - \frac{144}{5} = -39 \implies -3y = -39 + \frac{144}{5} = -\frac{51}{5} \implies y = \frac{17}{5}.$$

Substitusi ke baris pertama:

$$3x + \frac{17}{5} + \frac{36}{5} = 15 \implies 3x + \frac{53}{5} = 15 \implies 3x = 15 - \frac{53}{5} = \frac{22}{5} \implies x = \frac{22}{15}.$$

Jadi, solusi sistem persamaan adalah:

$$x = \frac{22}{15}, \quad y = \frac{17}{5}, \quad z = \frac{36}{5}.$$

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
 Hari, Tanggal : Kamis, 12 Desember 2024
 Waktu : 07.00-08.40 WIB (100 menit)
 Sifat : Tertutup
 Kelas : 5-12, 101

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

EAS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

SOAL

- Kerucut terbalik dengan tinggi 18 cm dan jari-jari 9 cm diisi pasir dengan laju $4 \text{ cm}^3/\text{menit}$. Berapa cepat ketinggian pasir dalam kerucut bertambah saat tingginya mencapai 12 cm?
- Diberikan fungsi $f(x) = 1 + 3x^2 - 2x^3$.
 - Tentukan selang dimana fungsi $f(x)$ naik atau turun.
 - Tentukan titik ekstrem relatif fungsi tersebut.
 - Tentukan selang kecekungan fungsi $f(x)$ dan titik belok (jika ada).
 - Sketsa grafiknya.
- Uraikan $|3x - 3|$ dalam fungsi sepotong-sepotong.
 - Hitung integral $\int_0^4 |3x - 3| dt$.
- Nyatakan bilangan kompleks $z = \frac{i^{19} - 3i^{30}}{1 - 2i}$ dalam bentuk kutub $z = r \text{ cis } \theta$.
- Selesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned}
 3x + 4y + z &= -2, \\
 3x + 2y + z &= 2, \\
 x + y + z &= 2,
 \end{aligned}$$

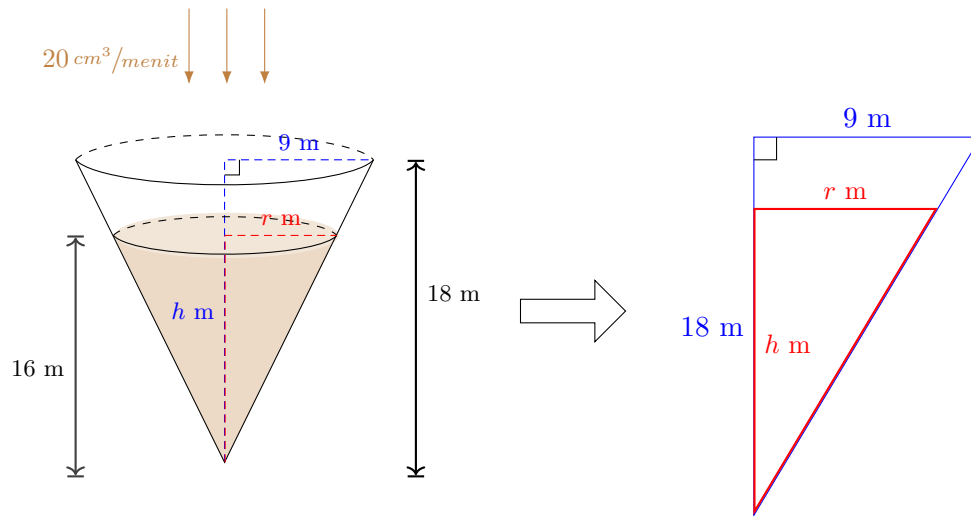
dengan menggunakan eliminasi Gauss-Jordan.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Perhatikan ilustrasi berikut:



Menggunakan konsep kesebangunan segitiga, diperoleh persamaan berikut:

$$\frac{r}{h} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2} \implies r = \frac{h}{2}.$$

Sedangkan volume kerucut diberikan oleh rumus

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{h}{2}\right)^2 h = \frac{\pi h^3}{12}.$$

Turunkan terhadap waktu t :

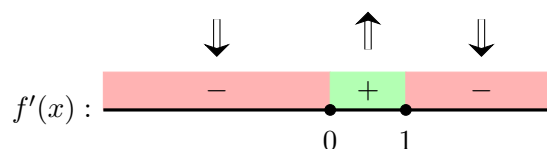
$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\pi h^3}{12} \right) \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt} \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{4}{\pi h^2} \frac{dV}{dt}. \end{aligned}$$

Diketahui $\frac{dV}{dt} = 4 \text{ cm}^3/\text{menit}$ dan $h = 12 \text{ cm}$, maka

$$\left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=12} = \frac{4}{\pi h^2} \left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=12} = \frac{4}{\pi (12)^2} \cdot 4 = \frac{16}{144\pi} = \frac{1}{9\pi} \text{ cm/menit}.$$

Jadi, ketinggian pasir bertambah dengan laju $\frac{1}{9\pi} \text{ cm/menit}$ saat tingginya mencapai 12 cm.

2. (a) Uji tanda turunan pertama: $f'(x) = 6x - 6x^2 = 6x(1 - x)$.



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi naik pada interval $(0, 1)$.
- Fungsi turun pada interval $(-\infty, 0) \cup (1, \infty)$.

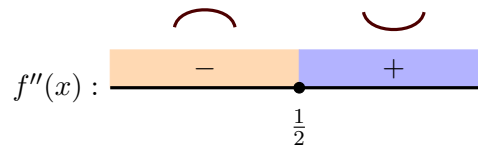
(b) Titik kritis diperoleh dari $f'(x) = 0$:

$$6x(1 - x) = 0 \implies x = 0, 1.$$

Gunakan uji tanda untuk menentukan jenis titik kritis:

- Pada $x = 0$, fungsi berubah dari turun ke naik, sehingga $f(0) = 1$ adalah titik minimum lokal.
- Pada $x = 1$, fungsi berubah dari naik ke turun, sehingga $f(1) = 1 + 3 - 2 = 2$ adalah titik maksimum lokal.

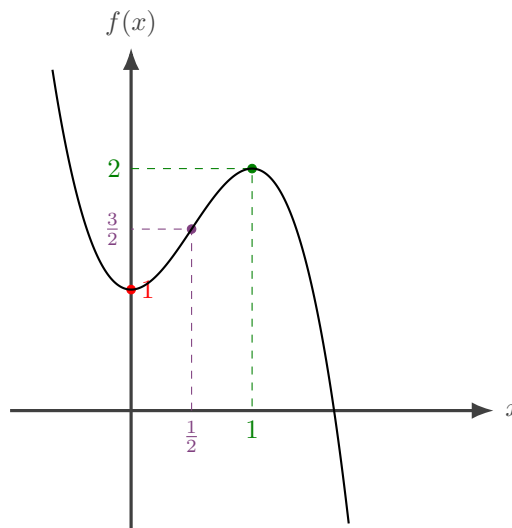
(c) Uji tanda turunan kedua: $f''(x) = 6 - 12x$.



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke atas pada interval $(-\infty, \frac{1}{2})$.
- Fungsi cekung ke bawah pada interval $(\frac{1}{2}, \infty)$.
- Titik belok pada $x = \frac{1}{2}$, dengan $f(\frac{1}{2}) = 1 + \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$.

(d) Berdasarkan informasi di atas, sketsa grafiknya adalah sebagai berikut:



3. (a) Uraikan $|3x - 3|$:

$$|3x - 3| = \begin{cases} 3x - 3, & 3x - 3 \geq 0 \\ -(3x - 3), & 3x - 3 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 3x - 3, & x \geq 1 \\ -3x + 3, & x < 1 \end{cases}$$

(b) Hitung integral:

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 |3x - 3| dx &= \int_0^1 |3x - 3| dx + \int_1^4 |3x - 3| dx \\
 &= \int_0^1 (-3x + 3) dx + \int_1^4 (3x - 3) dx \\
 &= \left[-\frac{3}{2}x^2 + 3x \right]_0^1 + \left[\frac{3}{2}x^2 - 3x \right]_1^4 \\
 &= \left(-\frac{3}{2}(1)^2 + 3(1) - 0 \right) + \left(\left(\frac{3}{2}(4)^2 - 3(4) \right) - \left(\frac{3}{2}(1)^2 - 3(1) \right) \right) \\
 &= \left(-\frac{3}{2} + 3 \right) + \left((24 - 12) - \left(\frac{3}{2} - 3 \right) \right) \\
 &= \frac{3}{2} + \left(12 + \frac{3}{2} \right) = \frac{3}{2} + \frac{27}{2} = \frac{30}{2} = 15.
 \end{aligned}$$

4. Untuk perpangkatan i^n , gunakan pola berikut:

$$i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad \dots$$

Sehingga

$$\begin{aligned}
 i^{19} &= i^{16} \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i, \\
 i^{30} &= i^{28} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1.
 \end{aligned}$$

Maka

$$\begin{aligned}
 z &= \frac{-i - 3(-1)}{1 - 2i} = \frac{-i + 3}{1 - 2i} = \frac{3 - i}{1 - 2i} \cdot \frac{1 + 2i}{1 + 2i} = \frac{(3 - i)(1 + 2i)}{(1 - 2i)(1 + 2i)} \\
 &= \frac{3 + 6i - i - 2i^2}{1 + 4} = \frac{5 + 5i}{5} = 1 + i.
 \end{aligned}$$

Ubah ke bentuk kutub:

$$\begin{aligned}
 r &= |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \\
 \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{1}{1} \right) = 45^\circ.
 \end{aligned}$$

Jadi, bentuk kutubnya adalah $z = \sqrt{2} \text{ cis } 45^\circ$.

5. Lakukan OBE pada matriks augmented hingga diperoleh bentuk eselon baris tereduksi:

$$\begin{aligned}
 &\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{B_1 \leftrightarrow B_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{B_2 - 3B_1 \\ B_3 - 3B_1}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{B_3 + B_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -12 \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}B_3 \rightarrow -B_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \xrightarrow{\substack{B_1 - B_3 \\ B_2 - 2B_3}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \\
 &\xrightarrow{B_1 - B_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right] \implies \begin{aligned} x &= 1, \\ y &= -2, \\ z &= 3. \end{aligned}
 \end{aligned}$$

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
 Hari, Tanggal : Kamis, 12 Desember 2024
 Waktu : 09.00-10.40 WIB (100 menit)
 Sifat : Tertutup
 Kelas : 47-59, 111

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

EAS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

SOAL

- Suatu pasir dituangkan dari wadah tertentu sedemikian rupa sehingga tumpukan pasir tersebut membentuk kerucut dengan ketinggiannya sama dengan $\frac{1}{3}$ dari diameternya setiap saat. Jika ketinggiannya bertambah dengan laju 4 m/menit, dapatkan laju pertambahan volume tumpukan pasir tersebut saat ketinggiannya mencapai 10 meter.
- Diberikan fungsi $f(x) = 1 + (1 - 2x)^3$.
 - Tentukan selang dimana fungsi $f(x)$ naik atau turun.
 - Tentukan titik ekstrem relatif fungsi tersebut.
 - Tentukan selang kecekungan fungsi $f(x)$ dan titik belok (jika ada).
 - Sketsa grafiknya.
- Misalkan $F(x) = \int_0^x \frac{t+1}{t^2+1} dt$, untuk $-\infty < x < \infty$.
 - Dapatkan selang dimana fungsi $F(x)$ naik atau turun.
 - Dapatkan selang kecekungan fungsi $F(x)$.
- Dapatkan semua bilangan kompleks z yang memenuhi $z^3 = \sqrt{3} + i$.
- Selesaikan sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned}
 2x + 4y + z &= 7, \\
 3x + 2y + 2z &= 1, \\
 x + y + z &= 0,
 \end{aligned}$$

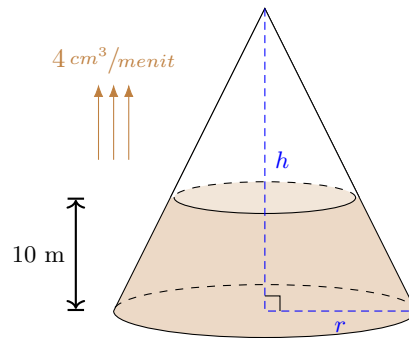
dengan menggunakan metode invers.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Perhatikan ilustrasi berikut:



Selanjutnya berdasarkan informasi pada soal, diperoleh bahwa $h = \frac{1}{3} \cdot 2r \implies r = \frac{3h}{2}$. Volume kerucut diberikan oleh rumus

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{3h}{2}\right)^2 h = \frac{3\pi h^3}{4}.$$

Turunkan terhadap waktu t :

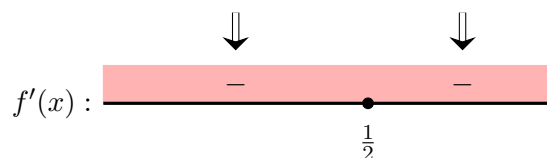
$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{3\pi h^3}{4} \right) \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{3\pi}{4} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt} \\ \frac{dV}{dt} &= \frac{9\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt} \\ \frac{dh}{dt} &= \frac{4}{9\pi h^2} \frac{dV}{dt}.\end{aligned}$$

Diketahui $\frac{dh}{dt} = 4$ m/menit dan $h = 10$ m, maka

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{h=10} = \frac{9\pi h^2}{4} \left. \frac{dh}{dt} \right|_{h=10} = \frac{9\pi(10)^2}{4} \cdot 4 = 900\pi \text{ m}^3/\text{menit}.$$

Jadi, volume tumpukan pasir bertambah dengan laju $900\pi \text{ m}^3/\text{menit}$ saat ketinggiannya mencapai 10 meter.

2. (a) Uji tanda turunan pertama: $f'(x) = -6(1 - 2x)^2$.



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi turun pada interval $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.
- Fungsi tidak pernah naik.

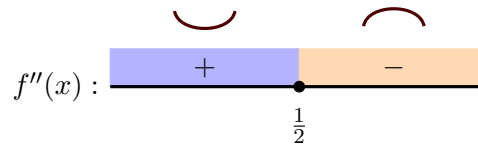
(b) Titik kritis diperoleh dari $f'(x) = 0$:

$$-6(1 - 2x)^2 = 0 \implies x = \frac{1}{2}.$$

Gunakan uji tanda untuk menentukan jenis titik kritis:

- Pada $x = \frac{1}{2}$, fungsi tetap turun di kedua sisi, sehingga tidak ada titik ekstrem relatif (baik maksimum maupun minimum).

(c) Uji tanda turunan kedua: $f''(x) = 24(1 - 2x)$.



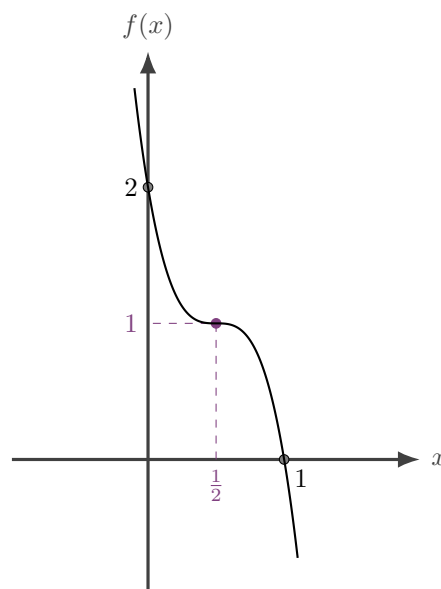
Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke atas pada interval $(-\infty, \frac{1}{2})$.
- Fungsi cekung ke bawah pada interval $(\frac{1}{2}, \infty)$.
- Titik belok pada $x = \frac{1}{2}$, dengan $f(\frac{1}{2}) = 1 + (1 - 1)^3 = 1$.

(d) Tambahkan beberapa informasi seperti titik potong terhadap sumbu x dan y , yaitu:

$$f(x) = 0 \implies 1 + (1 - 2x)^3 = 0 \implies (1 - 2x)^3 = -1 \implies 1 - 2x = -1 \implies x = 1,$$

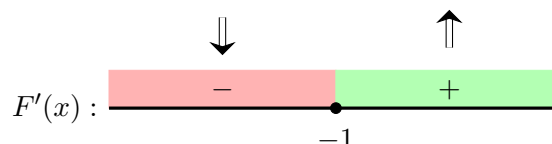
$$f(0) = 1 + (1 - 0)^3 = 1 + 1 = 2.$$



3. (a) Untuk menentukan selang naik/turun, maka diperlukan informasi mengenai tanda dari $F'(x)$. Berdasarkan Teorema Fundamental Kalkulus, diperoleh

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x \frac{t+1}{t^2+1} dt \right) = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Selanjutnya, tinjau tanda $F'(x)$:

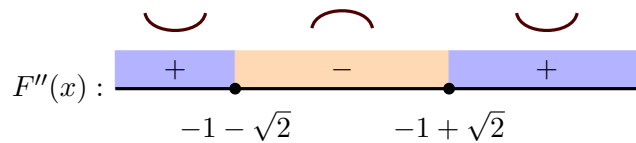


Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi turun pada interval $(-\infty, -1)$.
 - Fungsi naik pada interval $(-1, \infty)$.
- (b) Untuk menentukan selang kecekungan, maka diperlukan informasi mengenai tanda dari $F''(x)$. Turunkan $F'(x)$:

$$\begin{aligned} F''(x) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{x+1}{x^2+1} \right) = \frac{(1)(x^2+1) - (x+1)(2x)}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{x^2+1-2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x^2+2x-1)}{(x^2+1)^2}. \end{aligned}$$

Selanjutnya, tinjau tanda $F''(x)$:



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke atas pada interval $(-\infty, -1 - \sqrt{2}) \cup (-1 + \sqrt{2}, \infty)$.
 - Fungsi cekung ke bawah pada interval $(-1 - \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2})$.
4. Misalkan $z = r \operatorname{cis} \theta$. Pertama, ubah $\sqrt{3} + i$ ke dalam bentuk kutub:

$$\begin{aligned} r &= \left| \sqrt{3} + i \right| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2, \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = 30^\circ. \end{aligned}$$

Jadi, bentuk kutubnya adalah $z = 2 \operatorname{cis} 30^\circ$. Selanjutnya, gunakan rumus De Moivre untuk mencari akar-akar dari bilangan kompleks tersebut:

$$\begin{aligned} z_k &= r^{1/3} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 360^\circ k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2. \\ &= 2^{1/3} \operatorname{cis} \left(\frac{30^\circ + 360^\circ k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2. \end{aligned}$$

Sehingga, akar-akarnya adalah:

$$\begin{aligned} z_0 &= 2^{1/3} \operatorname{cis} 10^\circ, \\ z_1 &= 2^{1/3} \operatorname{cis} 130^\circ, \\ z_2 &= 2^{1/3} \operatorname{cis} 250^\circ. \end{aligned}$$

5. Pertama-tama definisikan matriks A yang merupakan matriks koefisien dari sistem persamaan linear, matriks kolom \mathbf{x} yang merupakan variabel yang akan dicari, dan matriks kolom \mathbf{b} yang merupakan hasil dari sistem persamaan linear tersebut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Langkah-langkah untuk menyelesaikan sistem persamaan linear menggunakan metode invers adalah sebagai berikut:

- Hitung invers dari matriks koefisien A^{-1} .
- Kalikan matriks invers A^{-1} dengan matriks kolom \mathbf{b} untuk mendapatkan solusi vektor \mathbf{x} .

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}.$$

Konstruksikan matriks dan matriks identitas secara bersebelahan. Tujuannya agar dapat mencari invers dari matriks koefisien.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

Lakukan OBE untuk mengubah matriks A menjadi matriks identitas.

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{B_1 \leftrightarrow B_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} B_2 - 3B_1 \\ B_3 - 2B_1 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-B_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{B_3 - 2B_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & 1 & 2 & -8 \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{-\frac{1}{3}B_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} B_2 - B_3 \\ B_1 - B_3 \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{5}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array} \right] \\ & \xrightarrow{B_1 - B_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{array} \right] \end{aligned}$$

Jadi, matriks invers A^{-1} adalah

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, kalikan matriks invers A^{-1} dengan matriks kolom \mathbf{b} untuk mendapatkan solusi vektor \mathbf{x} .

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{8}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 2 \cdot 0 \\ \frac{1}{3} \cdot 7 - \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 \\ -\frac{1}{3} \cdot 7 - \frac{2}{3} \cdot 1 + \frac{8}{3} \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Hasil terakhir menunjukkan bahwa $x = 1$, $y = 2$, dan $z = -3$.

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
 Hari, Tanggal : Kamis, 12 Desember 2024
 Waktu : 11.00-12.40 WIB (100 menit)
 Sifat : Tertutup
 Kelas : 20-33, 105, 106

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

EAS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

SOAL

- Kotak persegi panjang dengan alas dan penutup memiliki volume 2000 cm^3 . Biaya bagian alas kotak dua kali lebih mahal daripada sisi-sisinya. Tentukan ukuran kotak tersebut dengan biaya paling minimum.
- Diberikan fungsi $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2 + 1$.
 - Tentukan selang dimana fungsi $f(x)$ naik atau turun.
 - Tentukan titik ekstrem relatif fungsi tersebut.
 - Tentukan selang kecekungan fungsi $f(x)$ dan titik belok (jika ada).
 - Sketsa grafiknya.

- Hitung integral

$$\int_0^{\sqrt{3}} (4x^3 + 4x)\sqrt{x^2 + 1} dx.$$

- Dapatkan bagian real dan imajiner dari bilangan kompleks $z = (-\sqrt{3} + i)^{-6}$.
- Carilah nilai x_4 dari sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned}
 2x_1 + x_2 - 2x_4 &= 2 \\
 -2x_1 + 4x_4 &= 0 \\
 x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= -9 \\
 x_1 - 3x_2 + 2x_4 &= -16
 \end{aligned}$$

dengan menggunakan metode Cramer.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

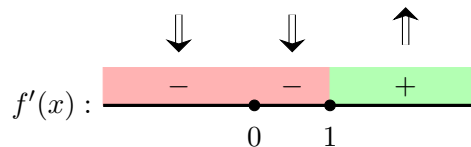
SOLUSI

1. ,

2. (a) Untuk menentukan selang naik/turun, maka diperlukan informasi mengenai tanda dari $f'(x)$. Diperoleh

$$f'(x) = 12x^3 - 24x^2 + 12x = 12x(x^2 - 2x + 1) = 12x(1 - x)^2.$$

Selanjutnya, tinjau tanda $f'(x)$:



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi turun pada interval $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.
 - Fungsi naik pada interval $(1, \infty)$.
- (b) Titik ekstrem relatif terjadi pada titik kritis $f'(x)$, yaitu $x = 0$ dan $x = 1$. Namun karena $f'(x)$ tidak berganti tanda di sekitar $x = 0$, maka titik tersebut bukan titik ekstrem. Sedangkan pada $x = 1$, fungsi berganti dari turun ke naik, sehingga terdapat titik minimum relatif pada $x = 1$. Nilai fungsi pada titik tersebut adalah

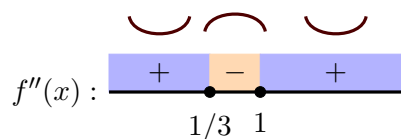
$$f(1) = 3(1)^4 - 8(1)^3 + 6(1)^2 + 1 = 3 - 8 + 6 + 1 = 2.$$

Jadi, titik minimum relatifnya adalah $(1, 2)$.

- (c) Untuk menentukan selang kecekungan, maka diperlukan informasi mengenai tanda dari $f''(x)$. Turunkan $f'(x)$:

$$f''(x) = 36x^2 - 48x + 12 = 12(3x^2 - 4x + 1) = 12(3x - 1)(x - 1).$$

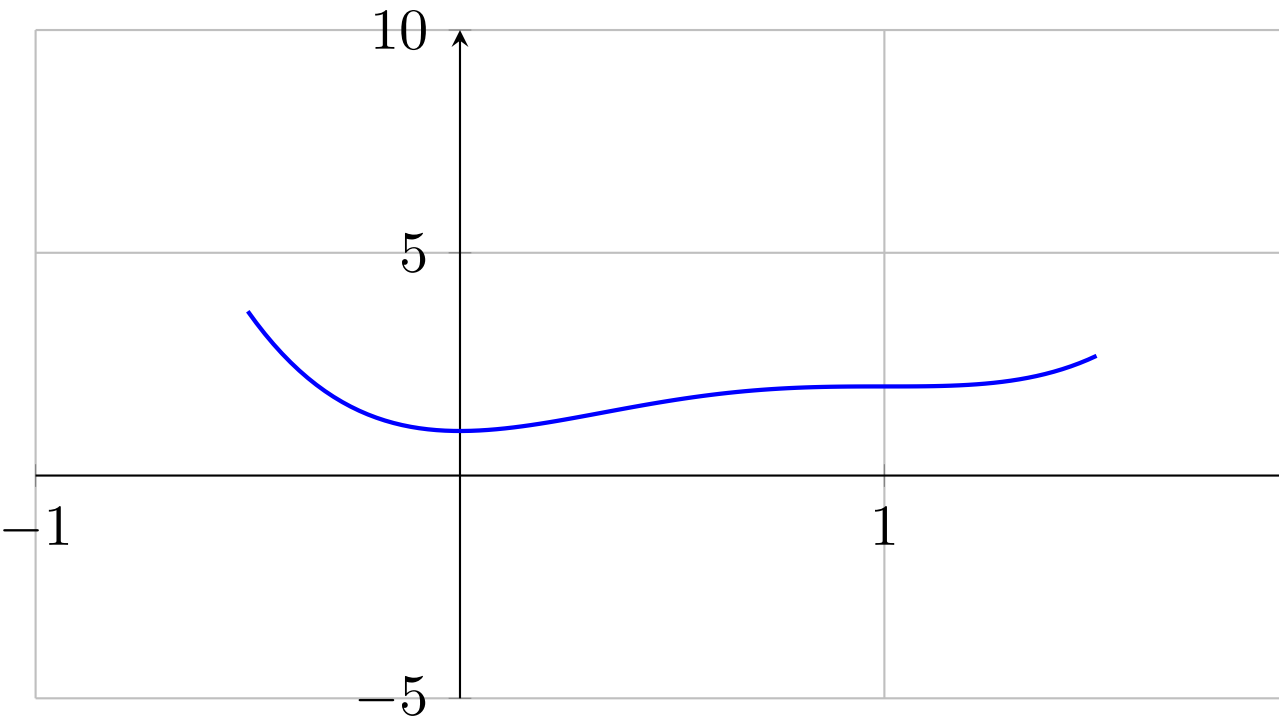
Selanjutnya, tinjau tanda $f''(x)$:



Dari gambar di atas, diperoleh:

- Fungsi cekung ke atas pada interval $(-\infty, \frac{1}{3}) \cup (1, \infty)$.
 - Fungsi cekung ke bawah pada interval $(\frac{1}{3}, 1)$.
 - Titik belok terjadi pada titik kritis $f''(x)$, yaitu $x = \frac{1}{3}$ dan $x = 1$.
- (d) Sketsa grafiknya adalah sebagai berikut:

$f(x)$



3. ,

4. ,

EVALUASI AKHIR SEMESTER BERSAMA GANJIL 2024/2025

Mata kuliah/SKS : Kalkulus 1 (SM234101) / 3 SKS
 Hari, Tanggal : Kamis, 12 Desember 2024
 Waktu : 13.30-15.10 WIB (100 menit)
 Sifat : Tertutup
 Kelas : 34-46, 107, 108

Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

DILARANG MEMBAWA/MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

EAS Mengukur Kemampuan

CPL	CPMK	SOAL	BOBOT (%)
2	CPMK-2 Mampu menentukan kekontinuan fungsi dan turunannya	1	20
		2	20
	CPMK-3 Mampu menghitung integral melalui teorema fundamental kalkulus	3	20
	CPMK-4 Mampu mengaplikasikan bentuk peubah kompleks dalam bentuk polar serta mencari akar-akar persamaannya	4	20
	CPMK-5 Mampu menerapkan konsep matriks untuk menyelesaikan sistem persamaan linier dan menentukan nilai eigen	5	20

SOAL

- Diberikan kurva $y = \sqrt{x}$ untuk $0 \leq x \leq 3$. Dapatkan titik pada kurva yang memiliki jarak terdekat dengan titik $(2, 0)$.
- Diberikan fungsi $f(x) = \frac{x}{x - 2024}$.
 - Tentukan asimtot datar dan tegaknya (jika ada).
 - Tentukan selang dimana fungsi $f(x)$ naik atau turun.
 - Tentukan titik ekstrim relatif fungsi tersebut.
 - Tentukan selang kecekungan fungsi $f(x)$ dan titik belok (jika ada).
 - Sketsa grafiknya.
- Misalkan $F(x) = \int_{-1}^x \frac{1+t^3}{1+t^2} dt$. Dapatkan $F(-1)$, $F'(-1)$, dan $F''(-1)$.
- Nyatakan bilangan kompleks $z = \left(\frac{(1+i)^{12} (1+i\sqrt{3})^{16}}{(-1+i)^{32}} \right)$ dalam bentuk $z = a + bi$.
- Carilah nilai x_3 dari sistem persamaan linear berikut:

$$\begin{aligned}
 x_1 + 4x_3 + x_4 &= 11, \\
 2x_1 + 3x_3 + 2x_4 &= 12, \\
 5x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= 20, \\
 4x_1 + 6x_3 + x_4 &= 24,
 \end{aligned}$$

dengan menggunakan metode Cramer.

Selamat Mengerjakan

"Jujur adalah kunci kesuksesan"

SOLUSI

1. Pertama-tama dari soal kita tahu bahwa titik yang berada pada kurva memiliki koordinat (x, \sqrt{x}) . Kemudian jarak antara titik (x, \sqrt{x}) dengan titik $(2, 0)$ dapat didefinisikan dengan

$$D(x) = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}.$$

Dapat dilihat bahwa $D(x)$ merupakan fungsi yang bergantung pada x dengan interval $0 \leq x \leq 3$. Untuk mencari nilai minimum dari $D(x)$, kita cari titik stasioner dari $D(x)$ dengan mencari turunan pertama dari $D(x)$, yaitu

$$D'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+4}} = 0 \implies x = \frac{3}{2}.$$

Karena kita bekerja pada interval yang terbatas, maka kita juga perlu mengecek nilai $D(x)$ pada titik-titik ujung interval, sehingga dapat dibandingkan nilainya pada tabel dibawah ini

x	0	$3/2$	3
$D(x)$	2	$7/4$	2

Sehingga titik yang memiliki jarak terdekat dengan titik $(2, 0)$ adalah ketika $x = 3/2$. Yang terakhir substitusikan nilai $x = 3/2$ ke dalam $y = \sqrt{x}$.

\therefore Titik yang memiliki jarak terdekat dengan titik $(2, 0)$ adalah $\left(\frac{3}{2}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$.

2. Kita dapat rubah fungsi $f(x)$ agar lebih sederhana saat diturunkan

$$f(x) = \frac{x}{x-2024} = \frac{(x-2024) + 2024}{x-2024} = 1 + \frac{2024}{x-2024}$$

- (a) Asimtot datar terjadi ketika $f(x)$ mendekati nilai konstan ketika x mendekati $\pm\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \frac{2024}{x-2024} = 1$$

\therefore Asimtot datar terjadi pada $y = 1$.

Asimtot tegak terjadi ketika $f(x)$ mendekati nilai tak hingga ketika x mendekati suatu nilai tertentu. Dalam hal ini, asimtot tegak terjadi ketika penyebut dari $f(x)$ adalah nol, yaitu ketika $x = 2024$.

- (b) Tinjau turunan pertama dari $f(x)$

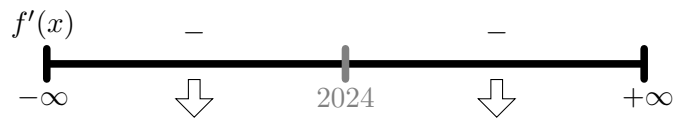
$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{2024}{x-2024} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x-2024+2024}{x-2024} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(1 + \frac{2024}{x-2024} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{2024}{x-2024} \right) = -\frac{2024}{(x-2024)^2} \end{aligned}$$

Karena $f'(x) \neq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, maka titik kritis dari $f(x)$ hanya terjadi ketika $x = 2024$.

Uji titik:

$$\bullet \quad x = 0 \implies f'(0) = -\frac{1}{2024} < 0.$$

- $x = 2025 \implies f'(2025) = -2024 < 0$.



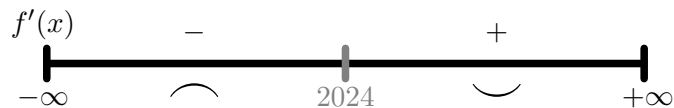
\therefore Fungsi $f(x)$ selalu turun pada selang $(-\infty, 2024) \cup (2024, +\infty)$.

- (c) Karena $f'(x)$ tidak akan pernah nol, maka fungsi $f(x)$ tidak memiliki titik ekstrim.
 (d) Tinjau turunan kedua dari $f(x)$

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{2024}{(x-2024)^2} \right) = \frac{4048}{(x-2024)^3}$$

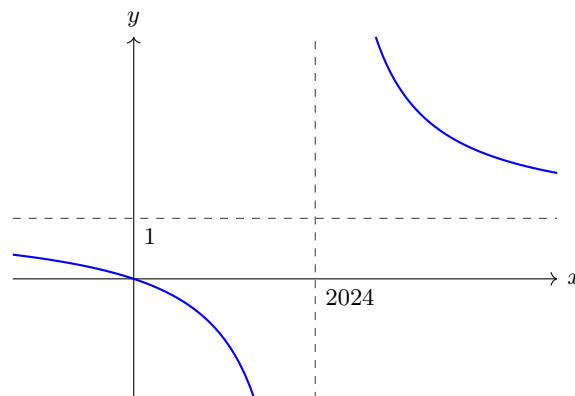
Karena $f''(x) \neq 0$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, maka fungsi $f(x)$ tidak memiliki titik belok.
 Uji titik:

- $x = 0 \implies f''(0) = -\frac{2}{2024^2} < 0$.
- $x = 2025 \implies f''(2025) = 4048 > 0$.



\therefore Fungsi $f(x)$ cekung ke bawah pada selang $(-\infty, 2024)$ dan cekung ke atas pada selang $(2024, +\infty)$.

- (e) Dapat kita sketsa menggunakan informasi pergeseran grafik dari $f(x) = \frac{1}{x}$. (2024 satuan ke kanan dan 1 satuan ke atas)



3. Untuk $F(-1)$, dapat dilihat karena nilai batas bawah dan batas atas sama, maka nilai integralnya adalah nol.

$$F(-1) = \int_{-1}^{-1} \frac{1+t^3}{1+t^2} dt = 0$$

Selanjutnya untuk $F'(-1)$, dapat kita gunakan Teorema Fundamental Kalkulus II untuk mencari turunan dari $F(x)$.

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_{-1}^x \frac{1+t^3}{1+t^2} dt \right) = \frac{1+x^3}{1+x^2}$$

$$F'(-1) = \frac{1+(-1)^3}{1+(-1)^2} = 0$$

Terakhir untuk $F''(-1)$, kita turunkan $F'(x)$.

$$F''(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1+x^3}{1+x^2} \right) = \frac{3x^2(1+x^2) - 2x(1+x^3)}{(1+x^2)^2}$$

$$F''(-1) = \frac{3(-1)^2(1+(-1)^2) - 2(-1)(1+(-1)^3)}{(1+(-1)^2)^2} = \frac{3(2) - 0}{4} = \frac{3}{2}$$

4. Agar lebih mudah dihitung, jadikan ketiga masing-masing bilangan kompleks diatas menjadi bentuk polar.

- Untuk $1+i$, didapatkan $a = 1$ dan $b = 1$ sehingga $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ dan $\theta = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ (Kuadran I).¹
- Untuk $1+i\sqrt{3}$, didapatkan $a = 1$ dan $b = \sqrt{3}$ sehingga $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ dan $\theta = \arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$ (Kuadran I).
- Untuk $-1+i$, didapatkan $a = -1$ dan $b = 1$ sehingga $r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ dan $\theta = \arctan(-1) = \frac{3\pi}{4}$ (Kuadran II).

Jadi bentuk polar dari z adalah

$$z = \left(\frac{(1+i)^{12} (1+i\sqrt{3})^{16}}{(-1+i)^{32}} \right) = \frac{\left[\sqrt{2} \text{cis} \left(\frac{\pi}{4} \right) \right]^{12} \left[2 \text{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right) \right]^{16}}{\left[\sqrt{2} \text{cis} \left(\frac{3\pi}{4} \right) \right]^{32}} = \frac{[2^6 \text{cis}(3\pi)] [2^{16} \text{cis} \left(\frac{16\pi}{3} \right)]}{2^{16} \text{cis}(24\pi)}$$

$$= \frac{[2^6 \text{cis}(\pi)] \left[\text{cis} \left(\frac{4\pi}{3} \right) \right]}{\text{cis}(0)} = 2^6 \text{cis} \left(\pi + \frac{4\pi}{3} - 0 \right) = 2^6 \text{cis} \left(\frac{7\pi}{3} \right) = 2^6 \text{cis} \left(\frac{\pi}{3} \right)$$

$$= 64 \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) = 64 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \boxed{32 + 32\sqrt{3}i}$$

5. Metode Cramer secara umum untuk mencari nilai x_n dapat dirumuskan sebagai

$$x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

dengan A_n adalah matriks yang diperoleh dari matriks A yang kolom ke- n -nya diganti dengan vektor kolom b . (Dalam hal ini $n = 3$)

SPL diatas dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}}_x = \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ 12 \\ 20 \\ 24 \end{pmatrix}}_b$$

¹Boleh dijadikan dalam bentuk derajat

Kemudian kita tulis matriks A_3 dengan mengganti kolom ke-3 dari matriks A dengan vektor kolom b .

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 11 & 1 \\ 2 & 0 & 12 & 2 \\ 5 & 1 & 20 & 1 \\ 4 & 0 & 24 & 1 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya kita hitung nilai determinan dari matriks A dan A_3 . Ada banyak metode untuk menghitung determinan, seperti OBE, ekspansi kofaktor, dsb. Disini saya akan menggunakan metode ekspansi kofaktor dan OBE.²

- Untuk $\det(A)$, pertama akan kita ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua karena memiliki banyak nol.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 6 & 1 \end{vmatrix} = -0... + 0... - (1) \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} + 0... = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

Untuk matrix 3×3 kita bisa menggunakan aturan Sarrus, namun disini saya akan menggunakan OBE yaitu $B_2 - 2B_1$ dan $B_3 - 4B_1$.³

$$- \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -10 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -5 & 0 \\ -10 & -3 \end{vmatrix} = -[(-5)(-3) - (-10)0] = -15$$

- Untuk $\det(A_3)$, dengan langkah yang sama kita ekspansi kofaktor sepanjang kolom kedua.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 11 & 1 \\ 2 & 0 & 12 & 2 \\ 5 & 1 & 20 & 1 \\ 4 & 0 & 24 & 1 \end{vmatrix} = -0... + 0... - (1) \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix} + 0... = - \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix}$$

Dan kita gunakan OBE yang sama yaitu $B_2 - 2B_1$ dan $B_3 - 4B_1$.

$$- \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 2 & 12 & 2 \\ 4 & 24 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 11 & 1 \\ 0 & -10 & 0 \\ 0 & -20 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -10 & 0 \\ -20 & -3 \end{vmatrix} = -[(-10)(-3) - (-20)0] = -30$$

Terakhir kita gunakan rumus Cramer untuk mencari nilai x_3 .

$$x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = \frac{-30}{-15} = 2$$

²OBE dan ekspansi kofaktor memang bisa di-combine untuk mempercepat perhitungan

³OBE tipe ini tidak mengubah nilai determinan matriks awal