

Graf dan Pohon

Teosofi Hidayah Agung
Hafidz Mulia

Sabtu, 26 April 2025

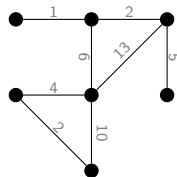
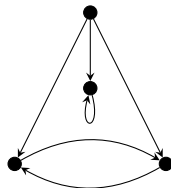
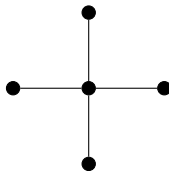
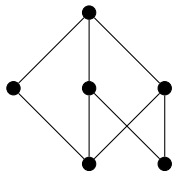
1 Graf

- Terminologi
- Graf Hamiltonian
- Graf Euler

2 Pohon

Definisi 1

Graf adalah himpunan pasangan terurut dari dua himpunan, yaitu himpunan titik dan himpunan sisi. Graf dinyatakan dengan $G = (V, E)$, di mana V adalah himpunan titik dan E adalah himpunan sisi yang menghubungkan antara 2 titik (tidak harus berbeda).



Gambar: Contoh-contoh graf

- 1 **Simpul (Vertex)** adalah titik pada graf yang dihubungkan oleh sisi.
- 2 **Sisi (Edge)** adalah garis yang menghubungkan dua simpul pada graf.
- 3 **Derajat (Degree)** adalah banyaknya sisi yang terhubung pada suatu simpul. Derajat dari simpul v dinyatakan dengan $d(v)$.
- 4 **Bertetangga (Adjacent)**, dua simpul u dan v dikatakan bertetangga jika terdapat sisi yang menghubungkan keduanya.
- 5 **Bersisian (Incident)**, sisi e dikatakan bersisian dengan simpul v jika u adalah salah satu ujung dari sisi e .
- 6 **Lintasan (Path)** adalah urutan simpul yang dihubungkan oleh sisi.
- 7 **Sirkuit (Circuit)** adalah lintasan yang dimulai dan diakhiri pada simpul yang sama.
- 8 **Siklus (Cycle)** sama seperti sirkuit, namun dengan syarat tidak boleh mengunjungi simpul yang sama lebih dari sekali (dalam konteks graf berarah).

Graf banyak macamnya dan dibedakan menjadi beberapa jenis, antara lain:

Tipe-tipe Graf

- **Graf sederhana** adalah graf yang tidak memiliki sisi ganda dan tidak memiliki loop.
- **Graf berarah** adalah graf yang memiliki sisi yang menghubungkan dua titik dengan arah tertentu.
- **Graf berbobot** adalah graf yang memiliki bobot pada setiap sisi.
- **Graf terhubung** adalah graf yang memiliki jalur antara setiap pasangan titik.

Contoh nama-nama graf yang umum:

- 1 **Graf lengkap** adalah graf yang memiliki sisi antara setiap pasangan simpul. Dinotasikan K_n , di mana n adalah jumlah simpul.
- 2 **Graf bipartit** adalah graf yang simpul-simpulnya dapat dibagi menjadi dua himpunan sehingga setiap sisi menghubungkan simpul dari himpunan yang berbeda.
- 3 **Graf planar** adalah graf yang dapat digambar di bidang tanpa sisi yang saling berpotongan.
- 4 **Graf Hamiltonian**
- 5 **Graf Euler**

Teorema 1 (Lemma Jabat Tangan)

Misalkan $G = (V, E)$ adalah graf tak berarah hingga. Maka

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

atau bisa dibilang jumlah derajat semua simpul sama dengan dua kali banyak sisi (genap).

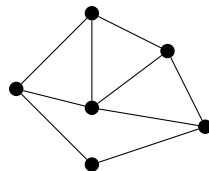
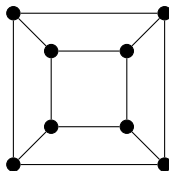
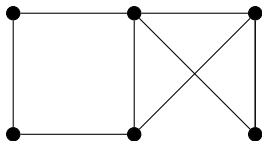
Mungkinkah dibuat **graf sederhana dan terhubung** dengan 5 simpul dengan derajat masing-masing simpul adalah:

- ① 2, 3, 1, 1, 2
- ② 2, 3, 3, 4, 4
- ③ 5, 2, 3, 2, 4
- ④ 4, 4, 3, 2, 3
- ⑤ 3, 3, 2, 3, 2
- ⑥ 4, 4, 1, 3, 2

Definisi 2

Lintasan Hamiltonian adalah lintasan yang mengunjungi setiap simpul tepat satu kali.

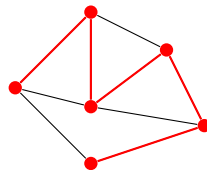
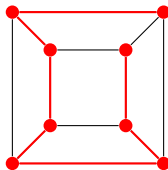
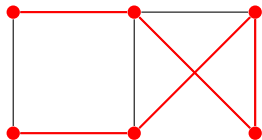
Carilah lintasan Hamiltonian pada graf berikut:



Definisi 2

Lintasan Hamiltonian adalah lintasan yang mengunjungi setiap simpul tepat satu kali.

Carilah lintasan Hamiltonian pada graf berikut:



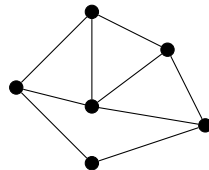
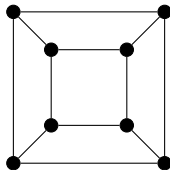
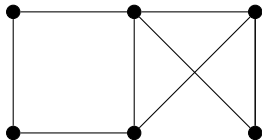
Graf

Graf Hamiltonian

Definisi 3

Sirkuit Hamiltonian adalah sirkuit yang mengunjungi setiap simpul tepat satu kali (kecuali titik awal dan akhir).

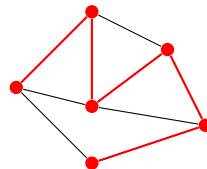
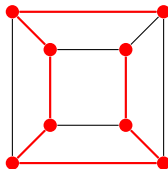
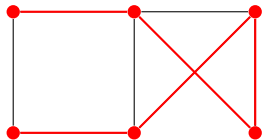
Carilah sirkuit Hamiltonian pada graf berikut:



Definisi 3

Sirkuit Hamiltonian adalah sirkuit yang mengunjungi setiap simpul tepat satu kali (kecuali titik awal dan akhir).

Carilah sirkuit Hamiltonian pada graf berikut:



Secara umum dapat disimpulkan bahwa graf Hamiltonian haruslah terhubung.

Teorema 2 (Dirac's)

Untuk graf terhubung G dengan n simpul dan jika graf tersebut sederhana dan setiap simpul memiliki derajat lebih besar dari atau sama dengan $\frac{n}{2}$, maka G memiliki lintasan dan sirkuit Hamiltonian.

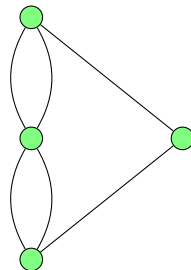
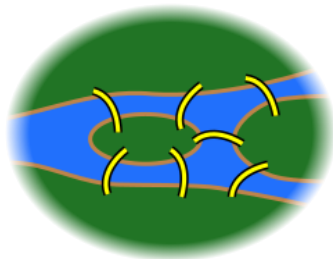
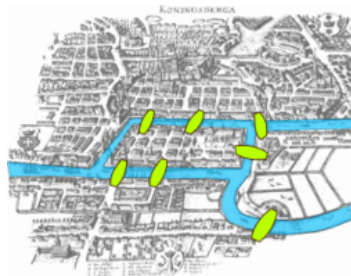
Graf

Graf Euler

Ada sebuah kota bernama Königsberg di Prusia (sekarang Kaliningrad di Rusia). Kota ini dipisahkan oleh sungai dan memiliki 4 daratan yang dihubungkan oleh 7 jembatan.

Pertanyaannya adalah:

Apakah mungkin berjalan mengelilingi kota dengan melewati setiap jembatan tepat satu kali tanpa mengulang, dan kembali ke titik awal?



Definisi 4

Lintasan Eulerian adalah lintasan yang mengunjungi setiap sisi tepat satu kali.

Definisi 5

Sirkuit Eulerian adalah sirkuit yang mengunjungi setiap sisi tepat satu kali (kecuali titik awal dan akhir).

Teorema 3 (Euler)

Suatu graf terhubung G memiliki lintasan Eulerian jika dan hanya jika paling banyak dua simpul memiliki derajat ganjil.

Teorema 4 (Euler)

Suatu graf terhubung G memiliki Sirkuit Eulerian jika dan hanya jika semua simpul memiliki derajat genap.

Definisi 6

Pohon (Tree) adalah graf terhubung yang tidak memiliki siklus.

Teorema 5

Jika G adalah pohon dengan n simpul, maka G memiliki $n - 1$ sisi.