Permutasi & Kombinasi

Teosofi Hidayah Agung
Hafidz Mulia

Sabtu, 8 Maret 2025

Apa itu Kombinatorika?

Kombinatorika adalah cabang matematika yang mempelajari sifat serta metode perhitungan (*counting*) berbagai struktur berhingga (*finite*). Cabang ini dapat dijelaskan melalui beberapa jenis permasalahan yang biasanya dikaji, yaitu:

- Menghitung jumlah kemungkinan struktur atau susunan dalam suatu sistem hingga.
- Menentukan apakah terdapat struktur yang memenuhi syarat tertentu.
- Mengonstruksi struktur-struktur tersebut dengan berbagai cara.
- Mengoptimalkan struktur atau solusi agar memenuhi kriteria tertentu.

Daftar Isi

Aturan Penjumlahan

Definisi 1

Jika ada sebanyak m pilihan pada kejadian pertama dan ada sebanyak n pilihan pada kejadian kedua, dan kedua kejadian itu **tidak dapat dilakukan dalam waktu yang sama**, maka ada

$$m + n \tag{1}$$

cara untuk memilih satu dari kejadian tersebut. Biasanya pada soal terdapat kata **"atau"**.

Untuk kasus umum, jika ada sebanyak n kejadian yang tidak dapat dilakukan dalam waktu yang sama, maka ada

$$n_1 + n_2 + ... + n_k \tag{2}$$

kemungkinan.

Aturan Penjumlahan

Contoh 1

Berapa banyak cara untuk memilih untuk membaca antara 3 buku matematika, 4 buku fisika, dan 2 buku kimia?

Jawab: $3 + 4 + 2 = 9$.

Contoh 2

Banyak cara membeli sebuah piring dari 6 piring plastik atau 4 piring kaca

Jawab: $6 + 4 + 2 = 10$.

Aturan Perkalian

Definisi 2

Jika ada sebanyak m pilihan pada kejadian pertama dan ada sebanyak n pilihan pada kejadian kedua, dan kedua kejadian itu **dilakukan dalam waktu yang sama**, maka ada

$$m \times n \tag{3}$$

cara untuk memilih satu dari kejadian tersebut. Biasanya pada soal terdapat kata **"dan"**.

Untuk kasus umum, jika ada sebanyak n kejadian yang dilakukan dalam waktu yang sama, maka ada

$$n_1 \times n_2 \times ... \times n_k \tag{4}$$

kemungkinan.

Aturan Perkalian

Contoh 3

Misalkan terdapat 2 buah baju dan 3 buah celana. Berapa banyak seseorang dapat memilih baju dan celana yang akan Ia pakai?

Jawab: $2 \times 3 = 6$.

Contoh 4

Terdapat empat jalan yang menghubungkan kota P dan kota Q, tiga jalan yang menghubungkan kota Q dan kota R serta tiga jalan dari kota R ke kota S. Tentukanlah banyaknya rute perjalanan seseorang dari koa P ke kota S !

Jawab: $4 \times 3 \times 3 = 36$.

Aturan Perkalian

Filling Slot

Aturan perkalian sering kali disebut dengan aturan pengisian tempat (*filling slot*). Dibawah ini merupakan **POV** lain dari aturan perkalian.

Definisi 3

Misalkan ada n tempat yang tersedia, dengan tempat ke-1 memiliki cara sebanyak k_1, tempat ke-2 memiliki cara sebanyak k_2, dan seterusnya sampai tempat ke-n memiliki cara sebanyak k_n. Dengan demikian, banyaknya cara mengisi tempat adalah

$$\underline{k_1}\ \underline{k_2}\ \underline{k_3}\ \ldots\ \underline{k_n} = k_1 \times k_2 \times k_3 \times \ldots \times k_n. \tag{5}$$

Contoh 5

Banyaknya cara membuat string 8 karakter yang terdiri dari huruf ‘W’ dan ‘K’.

Contoh 6

Banyaknya menyusun angka $1, 2, 5, 7, 8, 0$ menjadi sebuah bilangan ratusan.

Contoh 7

Berapa string yang dapat dibuat dari karakter ‘I’, ‘T’, ‘S’?

Contoh 5

Banyaknya cara membuat string 8 karakter yang terdiri dari huruf 'W' dan 'K'.

Jawab: $\underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2}\ \underline{2} = 2^8$.

Contoh 6

Banyaknya menyusun angka $1, 2, 5, 7, 8, 0$ menjadi sebuah bilangan ratusan.

Jawab: $\underline{5}\ \underline{5}\ \underline{4} = 100$.

Contoh 7

Berapa string yang dapat dibuat dari karakter 'I', 'T', 'S'?

Jawab: $\underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 6$.

Sebelum masuk pada permutasi dan kombinasi, akan diperkenalkan terlebih dahulu definisi dan notasi faktorial.

Definisi 4

Notasi $n!$ dibaca n **faktorial** yang didefinisikan sebagai

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1 \tag{6}$$

untuk setiap n bilangan asli.

Contoh :

$$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$
$$8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320$$

Definisi 5

Permutasi (**susunan**) r objek yang diambil dari n objek berbeda adalah P_r^n yang didefinisikan dengan

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!} \tag{7}$$

dibaca "n permutasi r".

Permutasi biasanya jarang digunakan karena terkesan tidak fleksibel seperti *filling slot*. Namun permutasi menjadi cikal bakal dari **kombinasi** yang akan kita bahas selanjutnya.

Contoh 8

Berapa banyak cara menyusun 3 huruf berbeda dari 4 huruf K, L, M, N ?

Penyelesaian :

Jika menggunakan *filling slot* yang sebelumnya kita ketahui, maka banyak caranya adalah

$$\underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2} = 4 \times 3 \times 2 = 24$$

Atau, karena kita mengambil 3 dari 4 objek berbeda, akibatnya kita dapat menggunakan permutasi dari unsur-unsur yang berbeda, dengan $r = 3$ dan $n = 4$.

$$P_3^4 = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{1} = 24.$$

Teorema 1

Banyak permutasi n unsur yang memuat k_1 unsur yang sama, k_2 unsur yang sama, dan seterusnya sampai dengan k_i unsur yang sama, dengan $k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_i = n$ ditentukan dengan rumus

$$P^n_{k_1, k_2, ..., k_i} = \frac{n!}{k_1! k_2! ... k_i!} \tag{8}$$

Contoh 9

Tentukan banyak susunan yang dapat dibentuk dari huruf-huruf berikut:

1. 'M','O','J','O','K','E','R','T','O'
2. 'M','A','T','E','M','A','T','I','K','A'
3. 'P','U', 'L', 'L', 'U', 'P'

Contoh 9

Tentukan banyak susunan yang dapat dibentuk dari huruf-huruf berikut:

1. 'M','O','J','O','K','E','R','T','O'
2. 'M','A','T','E','M','A','T','I','K','A'
3. 'P','U', 'L', 'L', 'U', 'P'

Jawab:

1. $P_3^9 = \dfrac{9!}{3!}$
2. $P_{2,3,2}^{10} = \dfrac{10!}{2!3!2!}$
3. $P_{2,2,2}^{6} = \dfrac{6!}{2!2!2!}$

Kombinasi

Definisi 6

Suatu kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur berbeda yang tersedia adalah suatu pilihan dari r unsur tadi **tanpa memperhatikan urutannya**. Banyaknya kombinasi r unsur yang diambil dari n unsur yang tersedia dengan $r \leq n$ dirumuskan dengan

$$C_r^n = \frac{n!}{(n-r)!r!} \tag{9}$$

atau dapat juga ditulis sebagai $\binom{n}{r}$ dan biasanya dibaca sebagai "n kombinasi r" atau "n dipilih r".

Pada dasarnya ini adalah permutasi dengan menganggap r objek sejenis, sehingga aturan penyusunan tidak berlaku untuk objek yang sama.

Kombinasi

Contoh 10

Berapa banyak cara memilih 2 perwakilan lomba dari 5 siswa yang ada?

Contoh 11

Berapa banyak cara memilih 3 buah kartu dari 52 kartu poker?

Contoh 12

Tim sepak bola memiliki 14 pemain dan pelatih ingin memilih 11 pemain untuk diturunkan.

Kombinasi

Contoh 10

Berapa banyak cara memilih 2 perwakilan lomba dari 5 siswa yang ada?

Jawaban: $C_2^5 = \dfrac{5!}{(5-2)!2!} = \dfrac{5!}{3!2!} = 10.$

Contoh 11

Berapa banyak cara memilih 3 buah kartu dari 52 kartu poker?

Jawaban: $C_3^{52} = \dfrac{52!}{(52-3)!3!} = \dfrac{52!}{49!3!} = 22100.$

Contoh 12

Tim sepak bola memiliki 14 pemain dan pelatih ingin memilih 11 pemain untuk diturunkan.

Jawaban: $C_{11}^{14} = \dfrac{14!}{(14-11)!11!} = \dfrac{14!}{3!11!} = 364.$

Kombinasi

Teorema 2

Untuk setiap bilangan bulat non-negatif n dan r dengan $r \leq n$, berlaku

$$C_r^n = C_{n-r}^n \tag{10}$$

Bukti kombinatorial dari teorema ini adalah dengan menganggap jika kita memilih r objek dari n objek yang tersedia, maka banyaknya cara memilih r objek adalah sama dengan banyaknya cara memilih $n - r$ objek yang tidak dipilih.