Aritmatika Modular

Teosofi Hidayah Agung
Hafidz Mulia

Sabtu, 8 Februari 2025

Daftar Isi

Definisi 1

Diberikan bilangan bulat a dan b serta bilangan bulat positif m. Kita katakan bahwa a kongruen dengan b modulo m jika m membagi $a - b$. Notasi untuk menyatakan hal ini adalah

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Modulo

Definisi 1

Diberikan bilangan bulat a dan b serta bilangan bulat positif m. Kita katakan bahwa a kongruen dengan b modulo m jika m membagi $a - b$. Notasi untuk menyatakan hal ini adalah

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Definisi diatas menunjukkan bahwa jika kita menetapkan suatu nilai a maka ada tak terhingga kemungkinan nilai b agar berlaku hal diatas.

Modulo

Contoh 1

Misalkan $a = 5$ dan $m = 3$. Maka kita dapat menyatakan bahwa

$$5 \equiv 2 \pmod 3 \equiv 8 \pmod 3 \equiv -1 \pmod 3 \equiv \dots$$

Karena

$$\begin{aligned} 5 - 2 &= 3 \\ 5 - 8 &= -3 \\ 5 - (-1) &= 6 \\ &\vdots \end{aligned}$$

yang berarti 3 membagi selisih antara $a - b$ dengan $b = ..., -3, 3, 6, ...$

Modulo

Sifat dari kongruensi modulo adalah sebagai berikut:

1. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $b \equiv c \pmod{m}$ maka $a \equiv c \pmod{m}$.
2. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ maka $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$
3. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ dan $c \equiv d \pmod{m}$ maka $a \cdot c \equiv b \cdot d \pmod{m}$.
4. Jika $a \equiv b \pmod{m}$ maka $a^n \equiv b^n \pmod{m}$ untuk setiap bilangan bulat positif n.

Pembagian Bilangan Bulat

Definisi 2

untuk setiap pasangan bilangan bulat a dan b $(b > 0)$, ada dua bilangan bulat tunggal q dan r sehingga

$$a = bq + r, \ 0 \leq r < b$$

dengan q disebut sebagai hasil bagi dan r disebut sebagai sisa pembagian.

Dalam pemograman, sisa pembagian biasanya dilambangkan dengan operator modulo (%). Misal `int a` dan `int b`, maka `a%b=r` berarti sisa pembagian `a` dengan `b` adalah `r`.

Latihan 1

Berapakah sisa jika 7^{2019} dibagi 8?

Latihan 1

Berapakah sisa jika 7^{2019} dibagi 8?

Jawab:

$$7^{2019} \mod 8 \equiv (-1)^{2019} \mod 8 \equiv (-1) \mod 8 = 7$$

Jadi, 7^{2019} jika dibagi 8 maka akan bersisa 7.

Latihan 2

Berapakah sisa $(54^{54} + 55^{55})$ jika dibagi 7?

Latihan 2

Berapakah sisa $(54^{54} + 55^{55})$ jika dibagi 7?

Jawab: Jawab:

$$\begin{aligned}(54^{54} + 55^{55}) \mod 7 &= (8 \cdot 7 - 2)^{54} \mod 7 + (8 \cdot 7 - 1)^{55} \mod 7 \\ &= (-2)^{54} \mod 7 + (-1)^{55} \mod 7 \\ &= (-8)^{18} \mod 7 + (-1) \mod 7 \\ &= (-1)^{18} \mod 7 + 6 \mod 7 \\ &= 1 \mod 7 + 6 \mod 7 \\ &= (1 + 6) \mod 7 = 0\end{aligned}$$

Jadi, sisa pembagian $54^{54} + 55^{55}$ dengan 7 adalah 0.