

Nama	: Teosofi Hidayah Agung
NRP	: 5002221132

1. (a) Perlihatkan bahwa  $\mathbf{F}(x, y, z) = y^2 z^3 \mathbf{i} + 2xyz^3 \mathbf{j} + 3xy^2 z^2 \mathbf{k}$  adalah medan konservatif

**Solusi:**

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2 z^2 \end{vmatrix} \\ &= [6xyz^2 - 6xyz^2] \mathbf{i} - [3y^2 z^2 - 3y^2 z^2] \mathbf{j} + [2yz^3 - 2yz^3] \mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} - 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 0\end{aligned}$$

$\therefore \mathbf{F}(x, y, z)$  adalah medan konservatif

- (b) Carilah fungsi  $f(x, y, z)$  sedemikian sehingga  $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$

**Solusi:**

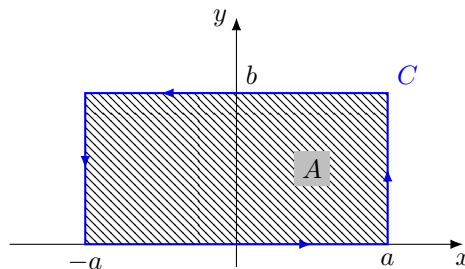
$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x, y, z) &= \nabla f(x, y, z) \\ y^2 z^3 \mathbf{i} + 2xyz^3 \mathbf{j} + 3xy^2 z^2 \mathbf{k} &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2 z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2xyz^3 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3xy^2 z^2 \end{cases} &\implies \begin{cases} f(x, y, z) = \int y^2 z^3 dx = xy^2 z^3 + g(y, z) \\ f(x, y, z) = \int 2xyz^3 dy = xy^2 z^3 + h(x, z) \\ f(x, y, z) = \int 3xy^2 z^2 dz = xy^2 z^3 + l(x, y) \end{cases}\end{aligned}$$

Ketiga persamaan di atas terpenuhi ketika  $g(y, z) = h(x, z) = l(x, y) = C$  dengan  $C$  adalah suatu konstanta sembarang.

$$\therefore f(x, y, z) = xy^2 z^3 + C$$

2. Gunakan kebenaran Teorema Green untuk  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xy\mathbf{j}$  dimana  $A$  adalah daerah empat persegi panjang yang dibatasi oleh:  $x = \pm a$ ;  $y = 0$ ;  $y = b$  (hitung dengan Teorema Green dan secara langsung)

**Solusi:**



- Dengan Teorema Green

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_A \left( -\frac{\partial}{\partial x}(-2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2) \right) dA \\
 &= \iint_A (-2y - 2y) dA \\
 &= -4 \int_{-a}^a \int_0^b y dy dx \\
 &= -4 \int_{-a}^a \left[ \frac{1}{2} y^2 \right]_0^b dx \\
 &= -2 \int_{-a}^a b^2 dx \\
 &= -2b^2[a - (-a)] = -4ab^2
 \end{aligned}$$

- Secara langsung

$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_C (x^2 + y^2) dx - 2xy dy \\
 &= \int_{-a}^a (x^2 + 0) dx - 2x(0)d(0) + \int_0^b (0 + y^2) d(0) - 2ay dy \\
 &\quad + \int_{-a}^a ((-x)^2 + b^2) d(-x) - 2xb d(0) + \int_0^b (0 + (-y)^2) d(0) - 2(-a)(-y) dy \\
 &= \cancel{\int_{-a}^a x^2 dx} - \int_0^b 2ay dy - \cancel{\int_{-a}^a x^2 dx} - \int_{-a}^a b^2 dx - \int_0^b 2ay dy \\
 &= -4a \int_0^b y dx - [b^2 x]_{-a}^a \\
 &= -2ab^2 - 2ab^2 = -4ab^2
 \end{aligned}$$

3. untuk menghitung  $\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  dengan  $\mathbf{F} = 2z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 3y\mathbf{k}$  dan  $C$  adalah batas luasan elips bidang  $z = x$  yang berada dalam silinder  $x^2 + y^2 = 4$  yang berorientasi searah dengan putaran jarum jam seperti yang digambarkan jika dilihat dari atas

**Solusi:**

Pertama-tama kita perlu mencari vektor normal dari permukaan elips bidang  $z = x$ . Didapat

$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{i} - \mathbf{k}}{\|\mathbf{i} - \mathbf{k}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k})$ . Sehingga dengan Teorema Stokes kita dapatkan

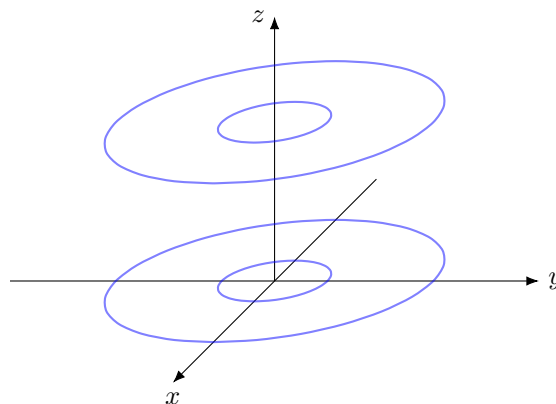
$$\begin{aligned}
 \oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \iint_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS \\
 &= \iint_S \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2z & x & 3y \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k}) \, dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S [(3-0)\mathbf{i} - (0-2)\mathbf{j} + (1-0)\mathbf{k}] \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{k}) \, dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i} - \mathbf{k}) \, dS \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S (3-1) \, dS \\
 &= \sqrt{2} \iint_S dS
 \end{aligned}$$

$\iint_S dS$  adalah luas permukaan elips bidang. Dengan rumus luas elips  $A = \pi ab$  dengan  $a$  dan  $b$  masing-masing adalah sumbu minor dan sumbu mayor elips. Pada gambar sebelumnya dapat dilihat bahwa sumbu minor  $a = 2$  dan untuk sumbu mayor dapat dihitung menggunakan Teorema Pythagoras yaitu  $b = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ . Sehingga

$$\iint_S dS = \pi(2)(2\sqrt{2}) = 4\pi\sqrt{2}$$

$$\therefore \boxed{\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sqrt{2}(4\pi\sqrt{2}) = 8\pi}$$

4. Diketahui medan vektor  $\mathbf{F}(x, y, z) = 27\mathbf{i} + x\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ . Dengan Teorema Gauss, hitung  $\iiint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$  dengan  $S$  adalah permukaan benda padat berupa shell silinder (lihat gambar),  $1 \leq x^2 + y^2 \leq 16$ ,  $0 \leq z \leq 2$ .



**Solusi:**

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV \\&= \iiint_V \partial_x(27) + \partial_y(x) + \partial_z(z^2) \, dV \\&= \iiint_V 0 + 0 + 2z \, dV \\&= 2 \iiint_V z \, dV\end{aligned}$$

Dengan menggunakan koordinat silinder, didapatkan  $dV = |r| \, dr \, d\theta \, dz$  dengan  $|r|$  adalah jacobian dari koordinat silinder.

$$\begin{aligned}2 \iiint_V z \, dV &= 2 \int_0^{2\pi} \int_1^4 \int_0^2 z |r| \, dz \, dr \, d\theta \\&= 2 \int_0^{2\pi} \int_1^4 \left[ \frac{1}{2} z^2 \right]_0^2 r \, dr \, d\theta \\&= 4 \int_0^{2\pi} \int_1^4 r \, dr \, d\theta \\&= 4 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} r^2 \right]_1^4 d\theta \\&= 4 \int_0^{2\pi} \left[ \frac{1}{2} (4^2 - 1^2) \right] d\theta \\&= 2 \int_0^{2\pi} 15 \, d\theta \\&= 2 \cdot 15 \cdot 2\pi = \boxed{60\pi}\end{aligned}$$