| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | Teosofi Hidayah Agung |
| NRP | : | 5002221132 |

1. Perhatikan barisan fungsi $(f_n)$ yang didefinisikan dengan $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$ untuk $x \in A := [0,\infty)$.

   (a) Tunjukkan bahwa $(f_n)$ terbatas pada $A$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.
   **Jawab**:
   Kita perhatikan bahwa $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$. Karena $x \geq 0$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka $nx \geq 0$ dan $1 + nx^2 \geq 1$. Sehingga $f_n(x) \leq \dfrac{nx}{1}$. Dengan demikian, $f_n(x)$ terbatas pada $A$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Tunjukkan bahwa $(f_n)$ konvergen titik-demi-titik ke suatu fungsi $f$, tetapi tidak terbatas.
   **Jawab**:
   - Untuk $x = 0$, kita punya $f_n(0) = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga $f_n(x)$ konvergen ke 0.
   - Untuk $x > 0$, kita punya $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2} = \dfrac{1}{1/nx + x} \implies \dfrac{1}{x}$. Sehingga $f_n(x)$ konvergen ke $1/x$.

   Jadi, $(f_n)$ konvergen titik-demi-titik ke suatu fungsi $f$ yaitu $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = 0 \\ 1/x & \text{jika } x > 0 \end{cases}$.
   Sekarang untuk menujukkan bahwa $f$ tidak terbatas, kita gunakan kontradiksi. Asumsikan $f$ terbatas, maka ada $M > 0$ sehingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A$. Kita ambil $x = 1/(2M)$, maka $f(1/(2M)) = 2M$ yang mana bertentangan dengan asumsi bahwa $f$ terbatas.

   $\therefore f$ tidak terbatas.

   (c) Apakah $(f_n)$ konvergen seragam pada $A$? Jelaskan!
   **Jawab**:
   Tidak konvergen seragam, karena $f$ tidak kontinu pada $A$, padahal $(f_n)$ kontinu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

2. Jika $\sum a_n$ konvergen mutlak dan $(b_n)$ barisan terbatas, tunjukkan bahwa $\sum a_n b_n$ konvergen mutlak.
   **Jawab**:
   Karena $\sum a_n$ konvergen mutlak, maka $\sum |a_n|$ konvergen. Karena $(b_n)$ terbatas, maka ada $M > 0$ sehingga $|b_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian, kita punya $|a_n b_n| \leq M|a_n|$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Karena $\sum |a_n|$ konvergen, maka $\sum M|a_n|$ juga konvergen. Dengan demikian, $\sum a_n b_n$ konvergen mutlak.

3. Tunjukkan bahwa deret $\dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^3} + \dots$ adalah konvergen,tetapi uji rasio dan uji akar gagal diterapkan untuk memeriksa konvergensi deret tersebut.

   **Jawab**:
   Kita perhatikan bahwa deret tersebut adalah deret dapat ditulis sebagai berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \frac{1}{(2n)^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3}$$

Kita perhatikan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n-1)^2}$ adalah deret $p$-harmonik dengan $p = 2 > 1$ yang konvergen. Demikian pula dengan deret $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2n)^3}$ adalah deret $p$-harmonik dengan $p = 3 > 1$ yang konvergen juga. Sehingga deret tersebut konvergen.

4. Diberikan $\sum a_n$ deret yang konvergen mutlak. Tunjukkan bahwa $\sum a_n \sin(nx)$ adalah deret yang konvergen mutlak dan seragam.
**Jawab**:
Karena $\sum a_n$ konvergen mutlak, maka $\sum |a_n|$ konvergen. Karena $\sin(nx)$ terbatas sehingga $|\sin(nx)| \leq 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan demikian, kita punya $|a_n \sin(nx)| \leq |a_n|$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga didapatkan $\sum |a_n \sin(nx)| \leq \sum |a_n|$. Dengan kriteria uji banding, maka $\sum a_n \sin(nx)$ konvergen mutlak.
Untuk menunjukkan bahwa $\sum a_n \sin(nx)$ konvergen seragam terutama pada interval $[0, 2\pi]$, kita gunakan kriteria Weierstrass M. Dalam kasus ini, kita dapat mengambil $f_n(x) = a_n \sin(nx)$ dan $M_n = |a_n|$. Kita sudah tahu bahwa $\sum |a_n|$ konvergen, maka sesuai Kriteria Weierstrass M, $\sum a_n \sin(nx)$ konvergen seragam pada interval $x \in [0, 2\pi]$.