QUIS 2 SEMESTER GENAP 2023/2024
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS
PROGRAM SARJANA

Matakuliah	:	Aljabar 2
Hari, Tanggal	:	Selasa, 14 - 06 - 2024
Waktu / Sifat	:	90 menit tertutup
Kelas, Dosen	:	Drs. Komar Baihaqi, M.Si.

HARAP DIPERHATIKAN !!!
Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Diberikan $0 \neq f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$, tentukan semua unit di $\mathbb{Z}_3[x]$.
   Jawab:
   Perhatikan kedua teorema berikut:

   Teorema (Akibat 6.3.1)**.** *Himpunan $\mathbb{Z}_p$ adalah lapangan jika dan hanya jika p adalah bilangan prima.*

   Teorema (Teorema 6.3.4)**.** *Setiap lapangan adalah suatu daerah integral*

   Karena 3 adalah bilangan prima, maka $\mathbb{Z}_3$ adalah lapangan. Dan karena $\mathbb{Z}_3$ adalah lapangan maka $\mathbb{Z}_3$ merupakan daerah integral. Sekarang dapat digunakan teorema berikut:

   Teorema (Teorema 8.1.1)**.** *Bila D adalah suatu daerah integral, maka $D[x]$ adalah daerah integral dan hasil perkalian dua polinomial taknol $f(x), g(x) \in D[x]$ memenuhi* $\deg(f(x).g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$.

   Misalkan $f(x)$ sebarang unit di $\mathbb{Z}_3[x]$, maka ada $g(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ sehingga $f(x)g(x) = 1$. Dari teorema 8.1.1, kita punya $\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x)) = 0$. Karena $f(x)g(x) = 1$, maka $\deg(f(x)g(x)) = 0$ berarti $f(x)$ dan $g(x)$ haruslah masing-masing konstanta.
   $\therefore$ Semua unit di $\mathbb{Z}_3[x]$ adalah polinomial konstanta tak nol yaitu $f(x) = 1$ dan $f(x) = 2$.

2. Tinjau polynomial $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ dan $g(x) = x^2 + x + 2$ di $\mathbb{Z}_3[x]$, tentukan $\gcd(f(x), g(x))$ dan tulislah dalam kombinasi linear.
   Jawab:
   Kita gunakan algoritma Euclid untuk mencari $\gcd(f(x), g(x))$.

   (i) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ dan $g(x) = x^2 + x + 2$

$$
\begin{array}{r|lllll}
 & x^2 & -x & +1 & & \\ \cline{2-4}
x^2+x+2 & x^4 & +2x^2 & +1 & & \\
 & x^4 & +x^3 & +2x^2 & & \\ \cline{2-4}
 & & -x^3 & +1 & & \\
 & & -x^3 & -x^2 & -2x & \\ \cline{3-6}
 & & & x^2 & +2x & +1 \\
 & & & x^2 & +x & +2 \\ \cline{4-6}
 & & & & x & -1
\end{array}
$$

   hasil baginya adalah $x^2 + 2x + 1$ dan sisa bagi $x + 2$ di $\mathbb{Z}_3$.

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)g(x) + (x + 2) \tag{1}$$

(ii) $g(x) = x^2 + x + 2$ dan $r_1(x) = x + 2$

$$
\begin{array}{rlll}
 & x & -1 & \\
\cline{2-4}
x+2 \big) & x^2 & +x & +2 \\
 & x^2 & +2x & \\
\cline{2-4}
 & & -x & +2 \\
 & & -x & -2 \\
\cline{3-4}
 & & & 4
\end{array}
$$

hasil baginya adalah $x + 2$ dan sisa bagi 1 di $\mathbb{Z}_3$.

$$g(x) = (x + 2)(x + 2) + 1 \tag{2}$$

(iii) $r_1(x) = x + 2$ dan $r_2(x) = 1$

Perhatikan bahwa $\gcd(x + 2, 1) = 1$. Sehingga $\gcd(f(x), g(x)) = \gcd(r_1(x), r_2(x)) = 1$.

Kemudian untuk mencari kombinasi linearnya, diperlukan sedikit manipulasi pada kedua persamaan. Persamaan (1) dapat ditulis ulang sebagai berikut

$(x + 2) = f(x) - (x^2 + 2x + 1)g(x)$

Subtitusi (1) ke (2), sehingga kita punya

$$
\begin{aligned}
\left[f(x) - (x^2 + 2x + 1)g(x)\right](x + 2) + 1 &= g(x) \\
g(x) - \left[f(x) - (x^2 + 2x + 1)g(x)\right](x + 2) &= 1 \\
g(x) - f(x)(x + 2) + g(x)(x^2 + 2x + 1)(x + 2) &= 1 \\
f(x)(-x - 2) + (x^3 + 4x^2 + x + 5x + 3)g(x) &= 1 \\
\boxed{(2x + 1)f(x) + (x^3 + x^2 + 2x)g(x) = 1}
\end{aligned}
$$

3. Misalkan $f(x)$ adalah suatu polynomial di $\mathbb{Q}[x]$. Bila $\alpha = a + b\sqrt{c}$ adalah suatu akar dari $f(x)$, dimana $a, b \in \mathbb{Q}$ dan $\sqrt{c} \notin \mathbb{Q}$, Tunjukkan bahwa $\overline{\alpha} = a - b\sqrt{c}$ juga akar dari $f(x)$.
Jawab:
Karena $f(x)$ adalah polynomial di $\mathbb{Q}[x]$, maka $f(x)$ dapat ditulis sebagai

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dimana $a_i \in \mathbb{Q}$ untuk $i = 0, 1, \ldots, n$. Karena α adalah akar dari $f(x)$, maka

$$f(\alpha) = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0 = 0$$

Kita konjugatkan kedua ruas persamaan tersebut, sehingga kita punya

$$\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0} = \overline{0} \tag{3}$$

Disini kita gunakan sifat konjugat, dimana misalkan $\alpha_1 = a_1 + b_1\sqrt{c}$ dan $\alpha_2 = a_2 + b_2\sqrt{c}$, maka akan memenuhi

$$
\begin{aligned}
\overline{\alpha_1 + \alpha_2} &= \overline{\alpha_1} + \overline{\alpha_2} \\
\overline{\alpha_1\alpha_2} &= \overline{\alpha_1} \cdot \overline{\alpha_2} \\
\overline{\alpha_1^n} &= (\overline{\alpha_1})^n
\end{aligned}
$$

Dari persamaan (3), didapatkan

$$
\begin{aligned}
\overline{a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + a_0} &= \overline{0} \\
\overline{a_n}\,\overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0} &= 0 \\
\overline{a_n}\,(\overline{\alpha})^n + \overline{a_{n-1}}\,(\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{\alpha} + \overline{a_0} &= 0
\end{aligned}
$$

—o0o—

Sekarang perhatikan karena $a_i \in \mathbb{Q}$ untuk $i = 0, 1, \ldots, n$, maka $\overline{a_i} = a_i$. Pada akhirnya diperoleh

$$a_n(\overline{\alpha})^n + a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1} + \cdots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = 0$$

$$\boxed{f(\overline{\alpha}) = 0}$$

$\therefore$ terbukti bahwa $\overline{\alpha}$ juga akar dari $f(x)$.

4. Tunjukkan bahwa polinomial $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ adalah tak tereduksi
Jawab:
Untuk menunjukkan bahwa polinomial $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x + 1$ adalah tak tereduksi dalam $\mathbb{Q}[x]$, kita bisa menggunakan Kriteria Eisenstein.

Kriteria Eisenstein menyatakan bahwa suatu polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$ dalam $\mathbb{Q}[x]$ adalah tak tereduksi jika terdapat bilangan prima p sedemikian rupa sehingga:

(1) p tidak membagi a_n

(2) p membagi a_i untuk semua $i < n$

(3) p^2 tidak membagi a_0

Mari kita coba beberapa bilangan prima.

- $p = 2$,$a_0 = 1$ tidak habis dibagi 2, tidak memenuhi kondisi kedua.
- $p = 3$,$a_0 = 1$ tidak habis dibagi 3, tidak memenuhi kondisi kedua.
- $p = 5$,$a_0 = 1$ tidak habis dibagi 5, tidak memenuhi kondisi kedua.

Tidak ada bilangan prima p yang memenuhi Kriteria Eisenstein. Karena itu, kita harus mencari metode lain untuk menunjukkan bahwa $f(x)$ tak tereduksi.

NOTE*: Kriteria Eisenstein bersifat "**jika maka**" bukan "**jika dan hanya jika**". Artinya, jika kita tidak menemukan bilangan prima yang memenuhi kriteria Eisenstein, kita tidak bisa menyimpulkan bahwa polinomial tersebut tereduksi.

Teorema (Teorema 8.4.5)**.** *Misalkan $f(x)$ suatu polinomial taknol di $\mathbb{Z}[x]$. Maka $f(x)$ dapat difaktorkan menjadi perkalian dua polinomial berderajad r dan s di $\mathbb{Q}[x]$ bila dan hanya bila $f(x)$ juga bisa difaktorkan kedalam hasil kali dua polinomial yang mempunyai derajad sama r dan s di $\mathbb{Z}[x]$.*

Sekarang kita periksa apakah $f(x)$ bisa difaktorkan menjadi dua polinomial dengan derajat yang lebih rendah. Misalnya, jika $f(x)$ bisa difaktorkan menjadi dua polinomial kuadrat, maka kita dapat menulis:

$$f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Mengalikan kedua polinomial kuadrat tersebut dan menyamakan koefisien dengan $f(x)$:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$$

Bandingkan dengan $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x + 1$

(i) $a + c = 0$

(ii) $ac + b + d = -5$

(iii) $ad + bc = 6$

(iv) $bd = 1$.

Menurut teorema jika $f(x)$ bisa difaktorkan di $\mathbb{Z}[x]$, maka $f(x)$ juga bisa difaktorkan di $\mathbb{Q}[x]$. Sekarang pandang $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, maka $bd = 1$ berakibat $b = d = \pm 1$. Kemudia subtitusi pada (iii) sehingga kita punya $a+c = \pm 6$. Hal ini kontradiksi dengan (i) yang menyatakan $a+c = 0$.

$\therefore$ $f(x)$ adalah tak tereduksi di $\mathbb{Q}[x]$.

—–o0o—–

5. Misalkan $f(x) = 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 5x + 9 \in \mathbb{Z}[x]$. Tunjukkan $f(x)$ tak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$
Jawab:

Teorema (Teorema 8.4.7)**.** *Misalkan $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dengan* $\deg(f(x)) \leq 1$. *Untuk suatu bilangan prima p, polinomial $\mathcal{F}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ diperoleh dari $f(x) \in Z[x]$ dengan melakukan semua koefisien menjadi modulo p. Bila* $\deg(f(x)) = \deg(\mathcal{F}(x))$ *dan $\mathcal{F}(x)$ tak-tereduksi di $Z_p[x]$, maka $f(x)$ tak-tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.*

Hal yang pertama dilakukan adalah memilih bilangan prima p. Kita pilih p sehingga dia tak tereduksi di $\mathbb{Z}_p[x]$, karena jika tidak kita tidak dapat menarik kesimpulan.
Disini dengan mudahnya bisa kita pilih $p = 2$, sehingga polinomial $\mathcal{F}(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ adalah

$$\mathcal{F}(x) = x^4 + x + 1$$

Subtitusi semua anggota Z_2

$$x = 0 \implies \mathcal{F}(0) = 0 + 0 + 1 = 1 \in \mathbb{Z}_2$$
$$x = 1 \implies \mathcal{F}(1) = 1 + 1 + 1 = 1 \in \mathbb{Z}_2$$

Namun hal ini kurang tepat sebab cara ini menunjukkan bahwa $\mathcal{F}(x)$ tidak bisa dibentuk menjadi $\mathcal{F}(x) = (x-\alpha)(x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta)$. Seharusnya kita cukup perlu menunjukkan bahwa $\mathcal{F}(x)$ tidak bisa difaktorkan menjadi dua polinomial kuadrat. (karena polinom kuadrat bisa difaktorkan kembali jika memang punya akar)

$$x^4 + x + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Dengan cara yang sama seperti nomor 4 kita dapatkan $bd = 1$ akibatnya $b = d = 1$. Namun $1 = bc + ad = a + c$ yang bertentangan dengan $a + c = 0$. Oleh sebab itu, $\mathcal{F}(x)$ tak tereduksi di $\mathbb{Z}_2[x]$.
$\therefore f(x)$ tak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.

—o0o—