Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

1. Buktikan jarak titik $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ke bidang $ax + by + cz + d = 0$ adalah

$$\text{d} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Hitung jarak antara bidang $x + 2y - 2z = 3$ dan bidang $2x + 4y - 4z = 7$.

Jawab:

Misalkan $P_1(x_1, y_1, z_1)$ adalah titik yang terdapat pada bidang $ax+by+cz+d = 0$, maka didapat

$$ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \tag{1}$$

Kemudian kita bisa paksa titik P_0 terhadap bidang tersebut sehingga menjadi

$$ax_0 + by_0 + cz_0 + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d \tag{2}$$

Eliminasi persamaan (1) dan (2)

$$\begin{array}{l} ax_0 + by_0 + cz_0 + d = ax_0 + by_0 + cz_0 + d \\ ax_1 + by_1 + cz_1 + d = 0 \\ \hline a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) + c(z_0 - z_1) = ax_0 + by_0 + cz_0 + d \end{array} -$$

Menggunakan definisi perkalian titik, didapatkan

$$\begin{aligned} (a, b, c) \cdot (x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1) &= ax_0 + by_0 + cz_0 + d \\ ||a, b, c|| \cdot ||x_0 - x_1, y_0 - y_1, z_0 - z_1|| \cdot \cos(\theta) &= ax_0 + by_0 + cz_0 + d \\ \left(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)\left(\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}\right)\cos(\theta) &= ax_0 + by_0 + cz_0 + d \\ \left(\sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2}\cos(\theta)\right) &= \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

Ingat bahwa vektor normal bidang $ax + by + cz + d = 0$ adalah $N = (a, b, c)$. Perhatikan juga bahwa vektor normal sejajar dengan vektor yang melewati titik P_0 dan P_1 sehingga sudut yang terbentuk $\theta = \{0, \pi\}$. Sehingga jika kita nilai mutlak kedua ruas, maka terbukti rumus diatas

$$\text{d} = \sqrt{(x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2} = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Sekarang untuk menghitung jarak antar bidang $x + 2y - 2z = 3$ dan bidang $2x + 4x - 4z = 7$, hanya cukup perlukan sebuah titik disalah satu bidang kemudian tinjau jarak antar titik tersebut ke bidang lain.

Ambil titik $(3, 0, 0)$ yang terdapat pada $x + 2y - 2z = 3$ kemudian tinjau jaraknya ke bidang $2x + 4x - 4z - 7 = 0$. Kemudian subtitusikan kedalam rumus sebelumnya

$$\text{d} = \frac{|2x_0 + 4y_0 - 4z_0 - 7|}{\sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2}} = \frac{|2(3) + 4(0) - 4(0) - 7|}{\sqrt{36}} = \frac{|-1|}{6} = \frac{1}{6}$$

2. Suatu partikel bergerak mengikuti kurva dengan persamaan parametrik $x = 2t^2$, $y = t^2 - 4t$, $z = 3t - 5$. Pada waktu $t = 1$, partikel bergerak searah dengan vektor $\vec{u} = \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$. Tentukan laju (besarnya kecepatan) partikel pada waktu $t = 1$ (searah vektor $\vec{u}$).

Jawab:

$$\begin{aligned} r(t) &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \\ &= 2t^2\,\vec{i} + (t^2 - 4t)\,\vec{j} + (3t - 5)\,\vec{k} \\ r'(t) &= 4t\,\vec{i} + (2t - 4)\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \\ r'(1) &= 4\,\vec{i} - 2\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \end{aligned}$$

Untuk mencari laju vektor singgung terhadap vektor $\vec{u}$ diperlukan panjang proyeksi $r'(1)$ terhadap $\vec{u}$.

$$\begin{aligned}
\text{Laju} &= \frac{r'(1)\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|} \\
&= \frac{(4)(1)+(-2)(-3)+(3)(2)}{\sqrt{1^2+(-3)^2+2^2}} \\
&= \frac{4+6+6}{\sqrt{1+9+4}} \\
&= \frac{16}{\sqrt{14}}
\end{aligned}$$

3. Dapatkan kelengkungan dari kurva $x = t$, $y = 4t^{\frac{3}{2}}$, $z = -t^2$ di titik $(1, 4, -1)$.
   Jawab:
   Rumus kelengkungan salah satunya adalah

   $$\kappa = \frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$$

   Kita perlu mendapatkan turunan pertama dan kedua dari $r(t)$.

   $$\begin{aligned}
   r(t) &= x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \\
   &= t\,\vec{i} + 4t^{\frac{3}{2}}\,\vec{j} - t^2\,\vec{k} \\
   r'(t) &= \vec{i} + 6t^{\frac{1}{2}}\,\vec{j} - 2t\,\vec{k} \\
   r''(t) &= 3t^{-\frac{1}{2}}\,\vec{j} - 2\,\vec{k}
   \end{aligned}$$

   Subtitusi $t = 1$.

   $$\begin{aligned}
   r'(1) &= \vec{i} + 6\,\vec{j} - 2t\,\vec{k} \\
   r''(1) &= 3\,\vec{j} - 2\,\vec{k}
   \end{aligned}$$

   Kemudian hitung $|r'(1)\times r''(1)|$ dan $|r'(1)|$.

   $$\begin{aligned}
   |r'(1)| &= \sqrt{1^2+6^2+(-2)^2} = \sqrt{41} \\
   |r'(1)\times r''(1)| &= \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 6 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} \right\| \\
   &= |6i - 2j + 3k| \\
   &= \sqrt{6^2+(-2)^2+3^2} = 7
   \end{aligned}$$

   $\therefore$ Kelengkungannya adalah $\kappa = \dfrac{|r'(1)\times r''(1)|}{|r'(1)|^3} = \dfrac{7}{\sqrt{41^3}}$

4. Diketahui permukaan benda $z = f(x, y)$ yang diberikan oleh persamaan parametrik:

   $$\begin{cases} x &= u\cos(v) \\ y &= u\sin(v) \\ z &= 2u \end{cases}$$

(a) Tunjukkan bahwa permukaan $z = f(x, y)$ adalah kerucut.
Jawab:

$$\begin{cases} x^2 &= u^2 \cos^2(v) \\ y^2 &= u^2 \sin^2(v) \\ z^2 &= 4u^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + y^2 &= u^2 \\ z^2 &= 4u^2 \end{cases} \implies z^2 = 4x^2 + 4y^2$$

$\therefore$ Terbukti bahwa $z = f(x, y)$ adalah kerucut.

(b) Nyatakan permukaan benda tersebut sebagai fungsi vektor $r(u, v)$.
Jawab:

$$\begin{aligned} r(u, v) &= x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k} \\ &= u\cos(v)\,\vec{i} + u\sin(v)\,\vec{j} - 2u\,\vec{k} \end{aligned}$$

(c) Dapatkan vektor normal permukaan $z = f(x, y)$ pada saat $(u, v) = (2, \frac{\pi}{4})$.
Jawab:
Misalkan $\phi = z^2 - 4x^2 - 4y^2$ lalu dengan menggunakan rumus operator gradien didapatkan

$$\begin{aligned} \nabla\phi &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\phi \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right)(z^2 - 4x^2 - 4y^2) \\ &= -8x\ \vec{i} - 8y\ \vec{j} + 2z\ \vec{k} \\ &= -8u\cos(v)\ \vec{i} - 8u\sin(v)\ \vec{j} + 4u\ \vec{k} \\ |\nabla\phi| &= \sqrt{(-8x)^2 + (-8y)^2 + (2z)^2} \\ &= \sqrt{64x^2 + 64y^2 + 4z^2} \\ &= 2\sqrt{16u^2\cos^2(v) + 16u^2\sin^2(v) + 4u^2} \\ &= 2\sqrt{20u^2} = 4\sqrt{5u^2} \end{aligned}$$

Subtitusi ke rumus vektor normal

$$N = \left.\frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|}\right|_{\substack{u=2 \\ v=\frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{8\sqrt{5}}(-8\sqrt{2}\ \vec{i} - 8\sqrt{2}\ \vec{j} + 8\ \vec{k}) = -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\ \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\ \vec{j} + \frac{1}{\sqrt{5}}\ \vec{k}$$

(d) Dapatkan persamaan garis normal dan bidang singgung permukaan benda tersebut pada saat $(u, v) = \left(2, \frac{\pi}{4}\right)$.
Jawab:
Rumus persamaan garis normal

$$(R - r) = kN$$

Sehingga persamaan garis normalnya

$$\frac{-\sqrt{5}(x-2)}{\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{5}(y-2)}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}(z-4)}{\sqrt{1}}$$

Sedangkan rumus persamaan bidang singgung

$$(R - r) \cdot N = 0$$

Akibatnya didapatkan persamaan bidangnya

$$\left(x-\sqrt{2}, y-\sqrt{2}, z-4\right) \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 0$$
$$x\sqrt{2} + y\sqrt{2} - z = 0$$