EVALUASI TENGAH SEMESTER GENAP 2022/2023
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS
PROGRAM SARJANA

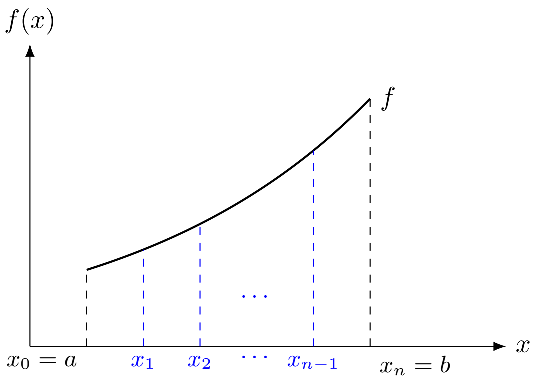
Matakuliah	:	Analisis 2
Hari, Tanggal	:	Rabu, 29 Maret 2023
Waktu / Sifat	:	11:00-12:10 (100 menit) / *Closed Book*
Kelas, Dosen	:	A. Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
		B Dr. Rinurwati, M.Si. & Sunarsini, S.Si, M.Si.
		C Drs. Sadjidon, M.Si.

HARAP DIPERHATIKAN !!!
Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Diketahui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ suatu fungsi *monotone* pada $[a, b]$. Apakah f terintegral pada $[a, b]$? Jika "ya", buktikan; jika "tidak", berikan satu contoh penyangkalnya.
Jawab:
~~Jelas Hal ini sesuai teorema di buku~~:v
Asumsikan f naik pada $I = [a, b]$ (boleh juga diasumsikan f turun). Partisi interval menjadi n subinterval yang panjangnya yaitu $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ dengan $||I_k|| = x_k - x_{k-1} = \dfrac{b-a}{n}$ untuk $k = 1, 2, ..., n$. Lalu kontruksikan sebuah partisi $\mathcal{P}_n$ yang dimana

$$\mathcal{P}_n := \{I_1, I_2, ..., I_n\}$$

Ilustrasikan agar mempermudah bayangan kita



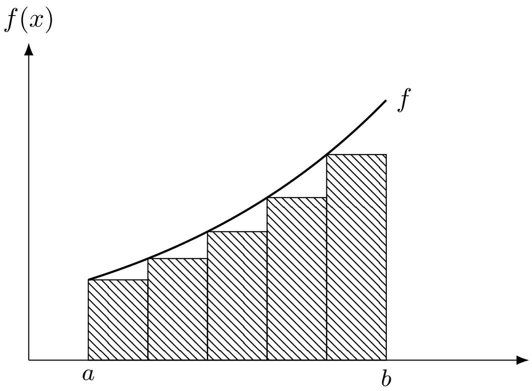
Karena f monoton, maka $f(x_k) \leq f(x_{k+1})$ untuk $x_k < x_{k+1}$. Sehingga bisa didefinisikan komponen darbouxnya sebagai berikut

$$m_k = \inf\{f(x) \,|\, x \in I_k\} = f(x_{k-1})$$
$$M_k = \sup\{f(x) \,|\, x \in I_k\} = f(x_k)$$

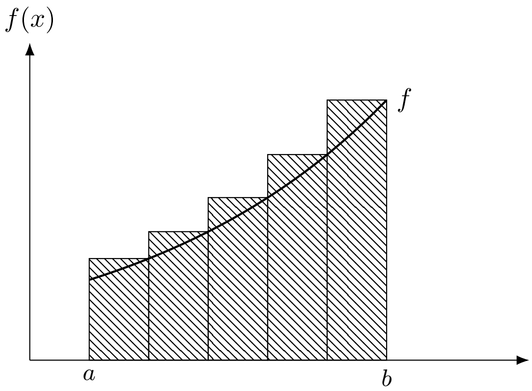
Kemudian didapatkan jumlahan atas dan jumlahan bawah

$$L(f; \mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\frac{b-a}{n}$$
$$U(f; \mathcal{P}_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n}$$

—o0o—



$L(f;\mathcal{P}_n)$



$U(f;\mathcal{P}_n)$

Kurangkan kedua persamaan diatas sehingga menjadi

$$\begin{aligned}
U(f;\mathcal{P}_n) - L(f;\mathcal{P}_n) &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\frac{b-a}{n} - \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\frac{b-a}{n} \\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) \\
&= \frac{b-a}{n}\left((\cancel{f(x_1)} - f(x_0)) + (\cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)}) + \cancel{\dots} + (f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})})\right) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) \\
&= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))
\end{aligned}$$

Sekarang untuk setiap $\varepsilon > 0$, pilih n dimana $n > \dfrac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$. sehingga didapatkan

$$U(f;\mathcal{P}_n) - L(f;\mathcal{P}_n) < \varepsilon$$

$\therefore$ Dengan kriteria keintegralan dapat disimpulkan bahwa f terintegral Darboux pada $[a,b]$.

2. Diberikan barisan fungsi (f_n) yang didefinisikan dengan $f_n(x) := \dfrac{x^n}{1+x^n}$ untuk $x \in [1,2]$ dan $n \in \mathbb{N}$. Selidiki konvergensi barisan fungsi (f_n) tersebut pada $[1,2]$, apakah konvergen titik-demi-titik ataukah seragam.
Jawab:
LEMMA. *Barisan $(f_n(x))$ di $A \subseteq \mathbb{R}$ dikatakan konvergen ke $f(x)$ pada A jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan $x \in A$ terdapat $N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga jika $n \geq N(\varepsilon, x)$, maka.*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Perbedaan konvergen titik demi titik dan seragam

$N(...)$	N	$N(\varepsilon)$	$N(\varepsilon, x)$
Konvergen T-D-T	✓	✓	✓
Konvergen seragam	✓	✓	×

AKIBAT. *Barisan (f_n) terbatas pada $A \subseteq \mathbb{R}$ konvergen seragam di A, maka (f_n) juga konvergen titik-demi-titik pada A_0.*

Sehingga kita sebaiknya mengecek apakah (f_n) konvergen seragam di $[1,2]$.

—o0o—

LEMMA. *Barisan* $(f_n(x))$ *di* $A \subseteq \mathbb{R}$ *dikatakan konvergen seragam ke* $f(x)$ *pada* A *jika dan hanya jika* $\sup_{x\in A}|f_n(x) - f(x)| = 0$.

Karena $f_n(1) = \dfrac{1^n}{1+1^n} = \dfrac{1}{2}$, maka dapat diasumsikan barisan (f_n) akan konvergen ke $f(x) = \dfrac{1}{2}$ untuk setiap $x \in [1,2]$. Sehingga diperoleh

$$\sup_{x\in[1,2]}\left|\frac{x^n}{1+x^n} - f(x)\right| = \left|\frac{2^n}{1+2^n} - \frac{1}{2}\right| \to \left|1 - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

Karena tidak menuju 0, maka (f_n) tidak konvergen seragam.

Selanjutnya untuk konvergen TDT, step-step pembuktiannya sebagai berikut:

(1) Pada soal sudah diketahui $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x^n} = 1 - \dfrac{1}{1+x^n}$ untuk $x \in [1,2]$, Lalu Asumsikan

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1 \\ 1, & x \in (1,2] \end{cases}$$

(Untuk $f(x)$ bisa dicari dibelakang layar).

(2) Untuk $x = 1$ jelas konvergen, sekarang tinjau untuk $x \in (1,2]$.

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f(x)| &= \left|1 - \frac{1}{1+x^n} - 1\right| \\ &= \left|\frac{1}{1+x^n}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{x^n}\right| \\ &\leq \left|\frac{1}{n}\right| \end{aligned}$$

(3) Pilih $N(\varepsilon) = \dfrac{1}{\varepsilon}$, sehingga untuk $n \geq N(\varepsilon)$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

$\therefore$ (f_n) di $[1,2]$ konvergen titik demi titik, namun tidak dengan konvergen seragam.

3. Diberikan barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) := \dfrac{nx}{1+nx}$ untuk $x \in [0,1]$ dan $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa barisan (f_n) tersebut konvergen ke suatu fungsi yang terintegral pada $[0,1]$ dan

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,dx$$

Jawab:
TEOREMA. *Misalkan* (f_n) *suatu barisan fungsi di* $\mathcal{R}[a,b]$ *yang konvergen pada* $[a,b]$ *ke suatu fungsi* $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Jika Terdapat* $B > 0$ *sehingga* $|f_n(x)| \leq B$ *untuk semua* $x \in [a,b]$ *dan* $n \in \mathbb{N}$, *maka berlaku.*

$$\int_a^b f = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n$$

Untuk menggunakan teorema diatas, kita perlu membuktikan bahwa $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx} = 1 - \dfrac{1}{1+nx}$ terintegral di $[0,1]$. Dapat dicek dengan mudah bahwa $f_n(x)$ monoton naik untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $x \in [0,1]$, sehingga menurut salah satu teroema mengatakan jika $f_n(x)$

monoton maka $f_n(x)$ terintegral di $[0,1]$.

Selanjutnya diketahui bahwa $f_n(x)$ konvergen ke $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$ yang dimana jelas bahwa $f \in \mathcal{R}[0,1]$ seperti yang sudah diketahui sebelumnya.

Karena $f_n(x)$ konvergen, maka $f_n(x)$ juga terbatas lebih tepatnya di $f(x) = 1$ yang dapat ditulis $|f_n(x)| \leq 1$ untuk semua $x \in [0,1]$ dan $n \in \mathbb{N}$. Hal tersebut mengindikasikan bahwa terdapat $B = 1$ dimana $|f_n(x)| \leq B$ untuk setiap $x \in [0,1]$ dan $n \in \mathbb{N}$ yang mengimplikasikan bahwa

$$\int_0^1 f = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$$

Karena (f_n) konvergen ke f, maka dapat ditulis $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Oleh karena itu, persamaan sebelumnya bida diubah menjadi

$$\int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n$$

4. Tunjukkan bahwa $\lim((\sin \pi x)^{2n})$ ada untuk semua $x \in \mathbb{R}$, dan dapatkan nilai limit tersebut.
Jawab:
"nilai limit" yang dimaksud di soal adalah sebuah fungsi, sebab barisan diatas merupakan barisan fungsi. Oleh karena itu perlu kita cari konvergen kemana barisan fungsi $(\sin \pi x)^{2n}$.
Misalkan $I := \left\{ \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, ..., \frac{2k-1}{2} \,\middle|\, k \in \mathbb{N} \right\}$, Sehingga untuk $x \in I$ didapatkan

$$\lim((\sin \pi x)^{2n}) = \lim((\pm 1)^{2n}) = \lim(1^n) = 1$$

Sedangkan untuk $x \in \mathbb{R} \setminus I$ didapatkan fakta bahwa $0 \leq \sin^2 \pi x < 1$, Akibatnya

$$\lim((\sin \pi x)^{2n}) = 0$$

Dari dua hasil perhitungan diatas, didapatkan bahwa barisan fungsi tersebut konvergen ke suatu fungsi $f(x)$ yaitu

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus I \\ 1, & x \in I \end{cases}$$

—o0o—