Tugas Aljabar I

Teosofi Hidayah Agung
5002221132

Latihan 3.2.1 Pada latihan berikut tentukan apakah pemetaan ϕ adalah homomorpisma atau tidak. Bila ϕ homomorpisma maka tentukan $\ker(\phi)$.

2. $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, dimana $\phi(n) = 3n, \forall n \in \mathbb{Z}$.
   Jawab:
   Ambil sebarang $a, b \in \mathbb{Z}$, sehingga
   $$\phi(a+b) = 3(a+b) = 3a + 3b = \phi(a) + \phi(b),\ \forall a, b \in \mathbb{Z}$$
   Maka ϕ adalah homomorpisma. Untuk $\ker(\phi)$ didapatkan
   $$\bullet \ker(\phi) = \{n \in \mathbb{Z} \mid \phi(n) = 0\}$$
   $$= \{n \in \mathbb{Z} \mid 3n = 0\}$$
   $$= \{n \in \mathbb{Z} \mid n = 0\}$$
   $\therefore \ker(\phi) = \{0\}$

4. $\phi : GL(2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$, dimana $GL(2, \mathbb{R})$ adalah grup linier umum matriks ukuran (2×2) yang mempunyai invers dan $\phi(A) = \det(A), \forall A \in GL(2, \mathbb{R})$.
   Jawab:
   Ambil sebarang $A, B \in GL(2, \mathbb{R})$, sehingga
   $$\phi(AB) = \det(AB) = \det(A)\det(B) = \phi(A)\phi(B),\ \forall A, B \in GL(2, \mathbb{R})$$
   Maka ϕ adalah homomorpisma. Untuk $\ker(\phi)$ didapatkan
   $$\bullet \ker(\phi) = \{A' \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \phi(A') = 1\}$$
   $$= \{A' \in GL(2, \mathbb{R}) \mid \det(A') = 1\}$$
   $\therefore \ker(\phi) = \{A \in SL(2, \mathbb{R})\}$

5. $\phi : S_3 \to \mathbb{Z}_2$, dimana
   $$\phi(\sigma) = \begin{cases} [0]_2, & \text{bila } \sigma \text{ permutasi genap} \\ [1]_2, & \text{bila } \sigma \text{ permutasi ganjil} \end{cases}$$

Jawab:

① bila σ_1 dan σ_2 bersama-sama permutasi genap atau ganjil, maka $\sigma_1\sigma_2 \in S_3$ adalah permutasi genap. Sehingga

$$\phi(\sigma_1\sigma_2) = [0]_2 = [0]_2 + [0]_2 = [1]_2 + [1]_2 = \phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2)$$

② bila σ_1 permutasi ganjil dan σ_2 permutasi genap ataupun sebaliknya, maka $\sigma_1\sigma_2 \in S_3$ adalah permutasi ganjil. Sehingga

$$\phi(\sigma_1\sigma_2) = [1]_2 = [1]_2 + [0]_2 = [0]_2 + [1]_2 = \phi(\sigma_1) + \phi(\sigma_2)$$

Jadi ϕ adalah homomorpisma. Untuk $\ker(\phi)$ didapatkan

$$\bullet \ker(\phi) = \{\sigma \in S_3 \mid \phi(\sigma) = [0]_2\}$$
$$= \{\sigma \in S_3 \mid \sigma \text{ permutasi genap}\}$$

$\therefore \ker(\phi) = \{\sigma \in A_3\}$

6. $\phi : D_4 \to \mathbb{Z}_4$, dimana

$$D_4 = \{\rho_0, \rho, \rho^2, \rho^3, \tau, \rho\tau, \rho^2\tau, \rho^3\tau\}$$

adalah dihedral grup dan $\phi(\rho^i) = [0]_4$, $\phi(\rho^i\tau) = [1]_4$, untuk semua i, $0 \leq i \leq 3$.
Jawab:
Perhatikan bahwa

$$\phi(\tau\tau) = \phi(\rho_0) = [0]_4 \neq [1]_4 + [1]_4 = \phi(\tau) + \phi(\tau)$$

Karena $\phi(\tau\tau) \neq \phi(\tau) + \phi(\tau)$, maka ϕ bukanlah homomorpisma.

7. $\phi : \mathbb{R} \to GL(2, \mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ adalah grup himpunan bilangan riil dengan operasi penjumlahan dan

$$\phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Jawab:
Ambil sebarang $x, y \in \mathbb{R}$, sehingga

$$\phi(x + y) = \begin{bmatrix} 1 & x + y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \phi(x)\phi(y)$$

Maka ϕ adalah homomorpisma. Untuk $\ker(\phi)$ didapatkan

$$\bullet \ker(\phi) = \{x \in \mathbb{R} \mid \phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}$$
$$= \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0\}$$

$\therefore \ker(\phi) = \{0\}$

8. $\phi : G \to G$, dimana G adalah sebarang grup dan $\phi(x) = x^{-1}, \forall x \in G$.
Jawab:
Ambil sebarang $a, b \in G$, sehingga

$$\phi(ab) = (ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} = \phi(b)\phi(a)$$

Karena G adalah sebarang grup maka $\phi(b)\phi(a) \neq \phi(a)\phi(b)$ yang berakibat $\phi(ab) \neq \phi(a)\phi(b)$.
$\therefore \phi$ bukanlah homomorpisma.