QUIS 2

1. Diberikan $f(x), g(x) \in \mathbb{Z}_7[x]$ dimana $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x$ dan $g(x) = x^3 + 1$.

   (a) Tentukan $\gcd(f(x), g(x))$.
   Solusi:
   Dengan menggunakan algoritma Euclid

   - Cari hasil dan sisa bagi $f(x)$ dengan $g(x)$

$$
\begin{array}{rllll}
 & x & +1 & & \\ \cline{2-5}
x^3+1 \big) & x^4 & +x^3 & +x^2 & +x \\
 & x^4 & & +x & \\ \cline{2-4}
 & & x^3 & +x^2 & \\
 & & x^3 & & +1 \\ \cline{3-5}
 & & & x^2 & -1
\end{array}
$$

     Hasil bagi adalah $x + 1$ dan sisa bagi adalah $r_1(x) = x^2 + 6$.

$$f(x) = (x+1)g(x) + (x^2 + 6) \tag{1}$$

   - Kemudian hasil dan sisa bagi $g(x)$ dengan $r_1(x)$

$$
\begin{array}{rlll}
 & x & & \\ \cline{2-3}
x^2+6 \big) & x^3 & +1 & \\
 & x^3 & +6x & \\ \cline{2-4}
 & & -6x & +1
\end{array}
$$

     Hasil bagi adalah x dan sisa bagi adalah $r_2(x) = x + 1$.

$$g(x) = (x)r_1(x) + (x+1) \tag{2}$$

   - Selanjutnya hasil dan sisa bagi $r_1(x)$ dengan $r_2(x)$

$$
\begin{array}{rlll}
 & x & -1 & \\ \cline{2-3}
x+1 \big) & x^2 & +6 & \\
 & x^2 & +x & \\ \cline{2-3}
 & -x & +6 & \\
 & -x & -1 & \\ \cline{2-3}
 & & 7 & = 0
\end{array}
$$

Hasil bagi adalah $x + 6$ dan sisa bagi adalah 0.

$$r_1(x) = (x + 6)r_2(x) + 0 \tag{3}$$

Ketika sisa bagi adalah 0 maka proses algoritma Euclid selesai.

Hal diatas menyatakan bahwa $\gcd(r_1(x), r_2(x)) = r_2(x) = x + 1$.
Jadi $\gcd(f(x), g(x)) = \gcd(g(x), r_1(x)) = \gcd(r_1(x), r_2(x)) = \boxed{x + 1}$.

(b) Nyatakan $\gcd(f(x), g(x))$ sebagai kombinasi linear dari $f(x)$ dan $g(x)$.
Solusi:
Dari persamaan (1) dapat diubah

$$f(x) - (x + 1)g(x) = r_1(x)$$

subtistusi persamaan diatas ke persamaan (2)

$$\begin{aligned} g(x) = x\,[f(x) - (x + 1)g(x)] + (x + 1) \\ g(x) - x\,[f(x) - (x + 1)g(x)] = x + 1 \\ g(x) - xf(x) + x(x + 1)g(x) = x + 1 \\ (-x)f(x) + (x^2 + x + 1)g(x) = x + 1 \\ \boxed{(6x)f(x) + (x^2 + x + 1)g(x) = x + 1} \end{aligned}$$

2. Tunjukkan bahwa $f(x) = 7x^3 + 9x^2 + 4x + 11$ tak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.
Catatan: Terapkan Teorema berikut:

Teorema. *Misalkan* $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *dengan* $\deg(f(x)) \leq 1$. *Untuk suatu bilangan prima* p, *polinomial* $\mathcal{F}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ *diperoleh dari* $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ *dengan melakukan semua koefisien menjadi modulo* p. *Bila* $\deg(f(x)) = \deg(\mathcal{F}(x))$ *dan* $\mathcal{F}(x)$ *tak-tereduksi di* $\mathbb{Z}_p[x]$, *maka* $f(x)$ *tak-tereduksi di* $\mathbb{Z}[x]$.

Solusi:
Kalimat "Untuk suatu bilangan prima p" berarti cukup pilih satu nilai p.
Disini kita pilih $p = 2$.
CATAT*:Jika nilai p nantinya membuat polinomial $\mathcal{F}(x)$ tereduksi, maka kita harus memilih nilai p yang lain. Dikarenakan Teorema tersebut berbunyi **"Jika Maka"** yang nantinya kita tak dapat menarik kesimpulan jika $\mathcal{F}(x)$ tereduksi

Kita dapatkan $\mathcal{F}(x) = x^3 + x^2 + 1$ dengan melakukan semua koefisien dari $f(x)$ menjadi modulo 2. Jelas bahwa $\deg(f(x)) = \deg(\mathcal{F}(x)) = 3$, kemudian kita cek apakah $\mathcal{F}(x)$ tereduksi di $\mathbb{Z}_2[x]$ atau tidak.

Dalam kasus ini, disebabkan $\mathcal{F}(x)$ polinom derajat 3, maka kemungkinan tereduksinya adalah menjadi polinom derajat 1 dan 2. Dapat ditulis

$$\mathcal{F}(x) = (x - a)(x^2 + bx + c)$$

Disini kita cukup mencari nilai akarnya yaitu a yang memenuhi $\mathcal{F}(a) = 0$. Subtistusi semua $x \in \mathbb{Z}_2$ ke $\mathcal{F}(x)$

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies \mathcal{F}(0) = 0^3 + 0^2 + 1 = 1 \\ x = 1 &\implies \mathcal{F}(1) = 1^3 + 1^2 + 1 = 3 = 1 \end{aligned}$$

Dari hasil diatas, kita tidak dapat menemukan nilai a yang memenuhi $\mathcal{F}(a) = 0$. Sehingga $\mathcal{F}(x)$ tidak tereduksi di $\mathbb{Z}_2[x]$.

Dengan demikian, berdasarkan Teorema diatas, $f(x)$ tidak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.

3. (a) Tunjukkan bahwa $I = \langle x^3 + x + 1 \rangle$ bukan merupakan ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_3[x]$.
   Solusi:

   Teorema (Teorema 8.6.2)**.** *Misalkan $\mathbb{F}$ adalah suatu lapangan. Suatu ideal nontrivial $I = \langle p(x) \rangle$ adalah suatu ideal maksimal dalam $\mathbb{F}[x]$ jika dan hanya jika $p(x)$ tak-tereduksi atas $\mathbb{F}$.*

   Dengan cara yang sama seperti soal nomor 2, derajat dari $x^3 + x + 1$ adalah 3. Kita cek apakah $x^3 + x + 1$ tereduksi di $\mathbb{Z}_3[x]$.

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies 0^3 + 0 + 1 = 1 \\ x = 1 &\implies 1^3 + 1 + 1 = 3 = 0 \\ x = 2 &\implies 2^3 + 2 + 1 = 11 = 2 \end{aligned}$$

   Ternyata terdapat akar dari $x^3 + x + 1$ yaitu $x = 1$. Sehingga $x^3 + x + 1$ tereduksi di $\mathbb{Z}_3[x]$.

   $\therefore$ Berdasarkan Teorema diatas, $I = \langle x^3 + x + 1 \rangle$ bukan merupakan ideal maksimal dari $\mathbb{Z}_3[x]$.

(b) Tentukan ideal J dari $\mathbb{Z}_3[x]$ sehingga $I \subset J$ dan $J \neq \mathbb{Z}_3[x]$. Jelaskan jawaban anda

Solusi:

Polinomial $x^3 + x + 1$ dapat difaktorkan menjadi

$$x^3 + x + 1 = (x + 2)(x^2 + x + 2)$$

Perhatikan bahwa $x^2 + x + 2$ dan $x + 2$ masing masing sudah tidak dapat difaktorkan. Dari sini kita dapat memilih $J = \langle x + 2 \rangle$ atau $J = \langle x^2 + x + 2 \rangle$, mengapa?

- Untuk $J = \langle x + 2 \rangle$ jika ditulis secara definisi adalah sebagai berikut

  $$J = \{f(x)(x + 2) \mid f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]\}$$

  Ketika kita memilih $g(x) = (x^2+x+2)h(x)$ untuk suatu $h(x) \in J$, maka berakibat $\langle g(x) \rangle \subset J$. Atau

  $$\langle g(x) \rangle = \{(x^2 + x + 2)(x + 2)f(x) \mid f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]\} = I$$

  Sehingga $I \subset J$.

- Dengan cara yang sama untuk $J = \langle x^2 + x + 2 \rangle$, pilih $g(x) = (x + 2)h(x)$ untuk suatu $h(x) \in J$, maka berakibat $\langle g(x) \rangle \subset J$. Atau

  $$\langle g(x) \rangle = \{(x + 2)(x^2 + x + 2)f(x) \mid f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]\} = I$$

  Pada akhirnya $I \subset J$ juga.