

Nama	: Teosofi Hidayah Agung
NRP	: 5002221132

1. Diketahui θ adalah sudut antara dua vektor \vec{a}, \vec{b} , dengan $\vec{a} \cdot \vec{b} \neq 0$.

Tunjukkan bahwa $\tan \theta = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\vec{a} \cdot \vec{b}}$

Jawab:

Diketahui bahwa

$$\begin{aligned} \bullet \sin \theta &= \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \\ \bullet \cos \theta &= \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|} \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}}{\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \|\vec{b}\|}} = \frac{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}{\vec{a} \cdot \vec{b}} \quad \blacksquare$$

2. Hitung luas segitga dengan titik-titik sudutnya $P(1, 5, -2), Q(0, 0, 0), R(3, 5, 1)$.

Jawab:

$$\overrightarrow{QP} = (1, 5, -2)^T, \quad \overrightarrow{QR} = (3, 5, 1)^T$$

$$\begin{aligned} L_{\triangle} &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{QP}\| \|\overrightarrow{QR}\| \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{QP} \times \overrightarrow{QR}\| \\ &= \frac{1}{2} \left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix} \right\| \\ &= \frac{1}{2} \|15i - 7j - 10k\| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{15^2 + (-7)^2 + (-10)^2} = \boxed{\frac{\sqrt{374}}{2}} \end{aligned}$$

3. Hitung luas jajaran genjang yang dibangun oleh vektor-vektor:

$$\vec{u} = i - j + 2k, \quad \vec{v} = 3j + k$$

Jawab:

$$\begin{aligned} L &= ||\vec{u} \times \vec{v}|| \\ &= \left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \right| \\ &= ||-7i - j + 3k|| \\ &= \sqrt{(-7)^2 + (-1)^2 + 3^2} = \boxed{\sqrt{59}} \end{aligned}$$

4. Tentukan persamaan segmen garis dalam bentuk persamaan simetrik melalui dua titik $P(2, 3, -1)$ dan $Q(5, 0, 7)$.

Jawab:

Segmen garis sejajar dengan vektor $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = 3i - 3j + 8k$, sehingga garis tersebut mempunyai bilangan arah $a_1 = 3, a_2 = -3, a_3 = 8$. Rumus umum persamaan simetrik $\frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$.

Dapat kita pilih titik P sebagai (x_0, y_0, z_0) , maka persamaan simetriknya adalah

$$\boxed{\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z+1}{8}}$$

5. Selidiki apakah tiga vektor berikut sebidang:

$$\vec{a} = (1, -2, 1), \quad \vec{b} = (3, 0, -2), \quad \vec{c} = (2, 2, -4)$$

Jawab:

Untuk mengecek apakah ketiga vektor sebidang adalah menunjukkan bahwa salah satu vektor merupakan kombinasi linear dari dua vektor lainnya. Atau bisa dibilang ketiga vektor tersebut haruslah **tidak bebas linear**. Dapat kita cek syarat untuk tidak bebas linear adalah $\det(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = 0$

$$\det(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = -3 \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -3(6) + 2(6) = -6$$

Karena $\det(\vec{a} \ \vec{b} \ \vec{c}) \neq 0$, maka dapat disimpulkan bahwa ketiga vektor tidak sebidang

6. Tentukan persamaan bidang dalam \mathbb{R}^3 yang melalui titik pangkal koordinat dan sejajar dengan bidang $4x - 2y + 7z + 12 = 0$

Jawab:

Titik pangkal koordinat adalah $(0, 0, 0)$. persamaan bidang yang melalui titik $(0, 0, 0)$ dan mempunyai vektor normal $\vec{n} = \langle 4, -2, 7 \rangle$ adalah

$$4x - 2y + 7z = 0$$