Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

7.1

10. Misalkan $g(x) := 0$ jika $x \in [0,1]$ adalah rasional dan $g(x) := 1/x$ jika $x \in [0,1]$ adalah irasional. Jelaskan mengapa $g \notin \mathcal{R}[a,b]$. Namun, tunjukkan bahwa terdapat sebuah barisan $(\dot{\mathcal{P}}_n)$ dari partisi bertanda di $[a,b]$ sedemikian sehingga $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| \to 0$ dan $\lim_n S(g;\dot{\mathcal{P}}_n)$ ada.
Jawab:
Asumsikan g terbatas di $M \geq 1$ $(g(x) \leq M, \forall x \in [0,1])$. Ambil $x_0 = t/M$ dimana $t \in [0,1]$ dan irasional, sehingga $g(x_0) = 1/x_0 = M/t$. Sebab $M \geq 1$ dan $0 \leq t \leq 1$, maka $g(x_0) = M/t > M$. Hal ini kontradiksi dengan mengasumsikan g terbatas, Sehingga didapatkan kesimpulan bahwa g tidak terbatas di $[0,1]$.

Teorema: *Jika $f \in \mathcal{R}[a,b]$, maka f terbatas di $[a,b]$*

$\therefore g \notin \mathcal{R}[0,1]$.
Misalkan $(\dot{\mathcal{P}}_n)$ adalah barisan dimana $\dot{\mathcal{P}}_n$ merupakan partisi bertanda di $[c,d] \subseteq [0,1]$ dengan n sub-interval yang panjangnya sama, setiap partisi ditandai dengan bilangan irasional (kepadatan bilangan real). Sehingga dapat ditulis $\|\dot{\mathcal{P}}_n\| = (d-c)/n$, dari hal tersebut didapatkan $\lim \|\dot{\mathcal{P}}_n\| = 0$. Di sisi lain untuk bilangan rasional, $S(g;\dot{\mathcal{P}}_n) = \sum_{i=1}^{n} g(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) = 0$.
$\therefore \lim S(g;\dot{\mathcal{P}}_n) = 0$.

13. Andaikan $c \leq d$ sebuah titik di $[a.b]$. Jika $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ memenuhi $\varphi(x) = \alpha > 0$ untuk $x \in [c,d]$ dan $\varphi(x) = 0$ untuk yang lain di [a,b], tunjukkan bahwa $\varphi \in \mathcal{R}[a,b]$ dan $\int_a^b \varphi = \alpha(d-c)$. [*Petunjuk*: Diberikan $\varepsilon > 0$ misalkan $\delta_\varepsilon := \varepsilon/4\alpha$ dan tunjukkan bahwa jika $\|\dot{\mathcal{P}}\| < \delta_\varepsilon$ maka didapatkan $\alpha(d-c-2\delta_\varepsilon) \leq S(\varphi;\dot{\mathcal{P}}) \leq \alpha(d-c+2\delta_\varepsilon)$] **Jawab**:
Andaikan $\dot{\mathcal{P}}$ adalah sembarang partisi bertanda di $[a,b]$. Asumsikan:
   - $\dot{\mathcal{P}}_1 \subseteq \dot{\mathcal{P}}$ partisi bertanda di $[a,c)$
   - $\dot{\mathcal{P}}_2 \subseteq \dot{\mathcal{P}}$ partisi bertanda di $[c,d]$
   - $\dot{\mathcal{P}}_3 \subseteq \dot{\mathcal{P}}$ partisi bertanda di $(d,b]$

   Sehingga $S(\varphi;\dot{\mathcal{P}}) = S(\varphi;\dot{\mathcal{P}}_1) + S(\varphi;\dot{\mathcal{P}}_2) + S(\varphi;\dot{\mathcal{P}}_3)$. Sebab $\varphi(t_i) = 0$ untuk setiap titik di $\dot{\mathcal{P}}_1$ dan $\dot{\mathcal{P}}_3$ maka integral riemann-nya adalah 0. Sekarang

akan dibuktikan integral riemann menggunakan definisi $\varepsilon - \delta$.
Untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta_\varepsilon > 0$ Sehingga jika $\dot{\mathcal{P}}_2$ sebarang partisi bertanda dari $[c, d]$ dengan $\dot{\mathcal{P}} < \delta_\varepsilon$, maka $|S(\varphi; \dot{\mathcal{P}}) - \alpha(d - c)| < \varepsilon$.
Sekarang asumsikan karena $\varphi(t_i) = \alpha$ di $[c, d]$, sehingga dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned}
[c + \delta_\varepsilon, d - \delta_\varepsilon] \subseteq [c, d] &\subseteq [c - \delta_\varepsilon, d + \delta_\varepsilon] \\
\alpha(d - \delta_\varepsilon - (c + \delta_\varepsilon)) \leq S(\varphi; \dot{\mathcal{P}}_2) &\leq \alpha(d + \delta_\varepsilon - (c - \delta_\varepsilon)) \\
\alpha(d - c - 2\delta_\varepsilon) \leq S(\varphi; \dot{\mathcal{P}}_2) &\leq \alpha(d - c + 2\delta_\varepsilon) \\
-2\alpha\delta_\varepsilon \leq S(\varphi; \dot{\mathcal{P}}_2) - \alpha(d - c) &\leq 2\alpha\delta_\varepsilon \\
|S(\varphi; \dot{\mathcal{P}}_2) - \alpha(d - c)| = |S(\varphi; \dot{\mathcal{P}}) - \alpha(d - c)| &\leq 2\alpha\delta_\varepsilon
\end{aligned}$$

Dari asumsi diatas, dapat dipilih $\delta_\varepsilon < \varepsilon/2\alpha$. Akhirnya didapatkan $|S(\varphi; \dot{\mathcal{P}}) - \alpha(d - c)| \leq 2\alpha\delta_\varepsilon < 2\alpha(\varepsilon/2\alpha) = \varepsilon$.
$\therefore \varphi \in \mathcal{R}[a, b]$ dan $\int_a^b \varphi = \alpha(d - c)$.

7.2

12. Tunjukkan bahwa $g(x) := \sin(1/x)$ untuk $x \in (0, 1]$ dan $g(0) := 0$ berada di $\mathcal{R}[0, 1]$.
Jawab:
Dengan teorema apit didapatkan $-1 \leq \sin(1/x) \leq< 1$

15. Jika f terbatas dan suatu himpunan E yang elemennya berhingga sedemikian sehingga f kontinu di setiap titik pada $[a, b] \backslash E$, tunjukkan bahwa $f \in \mathcal{R}[a, b]$.
Jawab:
Karena f kontinu di setiap titik pada $[a, b] \backslash E$, dapat disimpulkan bahwa $E \cap [a, b] = \emptyset$. Karena f terbatas maka $|f(x)| \leq M$ untuk suatu $M > 0$, sehingga didapatkan

$$\int_a^b f \leq \int_a^b |f| \leq \int_a^b M = M(a - b)$$

$\therefore f \in \mathcal{R}[a, b]$