Tugas Aljabar I

Teosofi Hidayah Agung 5002221132

1. Buatlah relasi ekivalensi pada $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan jelaskan!

Pembahasan:

```
Didefinisikan R = \{(a, a) \mid a \in A\} \subset A \times A.
Misalkan R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (2, 5), (5, 2), (3, 4), (4, 3), (1, 5), (5, 1), (1, 2), (2, 1)\}.
```

Cek 3 syarat relasi ekivalen:

(1) Apakah R refleksif?

Rrefleksif bila $\forall x\in A$ berlaku $(x,x)\in R.$ Sekarang perhatikan bahwa $(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\in R$

 $\therefore R$ bersifat **refleksif**.

(2) Apakah R simetri?

R simetri jika $(x, y) \in R$ maka $(y, x) \in R$, $\forall x, y \in A$. Perhatikan:

$$(2,5) \in R \Rightarrow (5,2) \in R$$

$$(3,4) \in R \Rightarrow (4,3) \in R$$

$$(1,5) \in R \Rightarrow (5,1) \in R$$

$$(1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \in R$$

 $\therefore R$ bersifat **simetri**.

(3) Apakah R transitif?

R transitif jika $\forall x, y \in A$ sedemikian sehingga $(x, y), (y, z) \in R$ berakibat $(x, z) \in R$. Perhatikan untuk setiap anggota R:

$$(2,5), (5,2) \in R \Rightarrow (2,2) \in R$$

$$(2,5),(5,1) \in R \Rightarrow (2,1) \in R$$

$$(5,2),(2,5) \in R \Rightarrow (5,5) \in R$$

$$(5,2),(2,1) \in R \Rightarrow (5,1) \in R$$

$$(3,4), (4,3) \in R \Rightarrow (3,3) \in R$$

$$(4,3), (3,4) \in R \Rightarrow (4,4) \in R$$

$$(1,5), (5,1) \in R \Rightarrow (1,1) \in R$$

$$(1,5), (5,2) \in R \Rightarrow (1,2) \in R$$

$$(5,1),(1,5) \in R \Rightarrow (5,5) \in R$$

$$(5,1),(1,2) \in R \Rightarrow (5,2) \in R$$

$$(1,2),(2,1) \in R \Rightarrow (1,1) \in R$$

$$(1,2),(2,5) \in R \Rightarrow (1,5) \in R$$

$$(2,1),(1,2) \in R \Rightarrow (2,2) \in R$$

$$(2,1),(1,5) \in R \Rightarrow (2,5) \in R$$

 $\therefore R$ bersifat **transitif**.

Karena R memenuhi ketiga syarat, maka R termasuk relasi ekivalensi.

2. Buatlah relasi yang bukan relasi ekivalensi pada $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan jelaskan!

Pembahasan:

Didefinisikan $R = \{(a, a) \mid a \in A\} \subset A \times A$.

Misalkan $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)\}.$

Apakah R merupakan relasi ekivalensi? Tidak, karena salah satu syarat tidak terpenuhi. contohnya yaitu sifat refleksif $((5,5) \notin R)$.

3. Buatlah relasi ekivalensi pada suatu himpunan dan jelaskan!

Pembahasan:

Misalkan R adalah relasi pada himpunan bilangan bulat \mathbb{Z} yang didefinisikan: $\forall x,y \in \mathbb{Z}$ berlaku $R = \{(x,y) \mid x+y \in \mathbb{Z}\}.$

Cek 3 syarat relasi ekivalen:

- (1) Apakah R refleksif? Iya, karena $x + x = 2x \in \mathbb{Z}$.
- (2) Apakah R simetri?

Perhatikan bahwa penjumlahan dua bilangan bulat bersifat komutatif, sehingga $\forall x,y\in\mathbb{Z}$ berlaku $x+y=y+x\in\mathbb{Z}$. Dapat disimpulkan bahwa R bersifat simetri.

(3) Apakah R transitif?

Ambil sebarang $x, y, z \in \mathbb{Z}$. Perhatikan bahwa $x+y \in \mathbb{Z}$ dan $y+z \in \mathbb{Z}$, sehingga $(x+y)+(y+z)=x+(y+y)+z=x+2y+z\in \mathbb{Z}$.

Misalkan x+2y+z=k lalu jumlahkan kedua ruas dengan -2y sehingga x+z=k+(-2y). Ingat bahwa k merupakan hasil penjumlahan bilangan bulat sehingga $k \in \mathbb{Z}$ dan -2y merupakan invers penjumlahan dari 2y yang juga bilangan bulat sehingga $-2y \in \mathbb{Z}$.

Karena keduanya bilangan bulat maka $k+(-2y)=x+z\in\mathbb{Z}.$ R bersifat transitif.

- \therefore Radalah relasi ekivalensi.
- 4. Buatlah relasi yang bukan relasi ekivalen pada suatu himpunan dan jelaskan!

Pembahasan:

Misalkan R adalah relasi pada himpunan bilangan asli $\mathbb N$ yang didefinisikan: $\forall x,y\in\mathbb N$ berlaku $R=\{(x,y)\mid x-y\in\mathbb N\}.$

Relasi diatas bukan merupakan relasi ekivalensi, sebab melanggar syarat sifat refleksif $x-x=0\notin\mathbb{N}.$