

Nama	: Teosofi Hidayah Agung
NRP	: 5002221132

3.2

4. Tunjukkan jika X dan Y suatu barisan yang sedemikian sehingga X konvergen ke $x \neq 0$ dan XY konvergen, maka Y juga konvergen.

Jawab:

Karena $XY = (x_n y_n)$ barisan konvergen, maka dapat diandaikan $\lim(x_n y_n) = z$ dan $\lim(x_n) = x \neq 0$.

Selanjutnya perhatikan bahwa bahwa limit barisan Y adalah $\lim(y_n) = \lim(\frac{x_n y_n}{x_n})$. Dapat disimpulkan bahwa barisan Y konvergen ke $\frac{z}{x}$.

3.3

7. Misal $x_1 := a > 0$ dan $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tentukan apakah (x_n) konvergen atau divergen.

Jawab:

Andaikan bahwa (x_n) konvergen ke L , sehingga $\lim(x_n) = L$. Menurut teorema ketunggalan limit diperoleh

$$\lim(x_n) = \lim(x_{n+1})$$

$$\lim(x_n) = \lim(x_n + 1/x_n)$$

$$\lim(x_n) = \lim(x_n) + \lim(1/x_n)$$

$$L = L + 1/L$$

$$0 = 1/L \quad \textbf{(Kontradiksi)}$$

Jadi haruslah (x_n) divergen.

3.4

9. Misalkan untuk setiap subbarisan dari $X = (x_n)$ memiliki subbarisan yang konvergen ke 0. Tunjukkan bahwa $\lim X = 0$.

Jawab:

Andaikan $\lim(x_n) = L \neq 0$, sehingga untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $K(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n \geq K(\epsilon) \in \mathbb{N}$ berlaku $|x_n - L| < \epsilon$.

Menurut sebuah teorema, Jika $X = (x_n)$ konvergen ke L maka sebarang barisan bagian dari X juga konvergen ke $L \neq 0$. Namun hal ini kontradiksi bahwa setiap subbarisan dari $X = (x_n)$ memiliki subbarisan yang konvergen ke 0.

\therefore dapat disimpulkan barisan $X = (x_n)$ konvergen ke 0 atau $\lim X = 0$

3.5

4. Tunjukkan menurut definisi bahwa jika (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy, maka $(x_n + y_n)$ dan $(x_n y_n)$ juga merupakan barisan Cauchy.

Jawab:

Menurut definisi, barisan $A = (a_n)$ dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\epsilon > 0$, $\exists H(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n, m \geq H(\epsilon)$ berlaku $|a_n - a_m| < \epsilon$.

(i) Untuk $(x_n + y_n)$ diberikan $\forall n, m \geq H(\epsilon)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| &= |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)| \\ &\leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m| \end{aligned}$$

Karena (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy, maka

$$\forall n, m \geq H(\epsilon)_x \implies |x_n - x_m| < \epsilon/2$$

dan

$$\forall n, m \geq H(\epsilon)_y \implies |y_n - y_m| < \epsilon/2$$

Sehingga untuk $H(\epsilon) = \sup\{H(\epsilon)_x, H(\epsilon)_y\}$ diperoleh

$$|x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Maka didapat $|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| < \epsilon$ yang dimana merupakan definisi bahwa $(x_n + y_n)$ adalah barisan Cauchy

(ii) Untuk $(x_n y_n)$ diberikan $\forall n, m \geq H(\epsilon)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} |x_n y_n - x_m y_m| &= |x_n y_n - x_m y_n + x_m y_n - x_m y_m| \\ &\leq |x_n y_n - x_m y_n| + |x_m y_n - x_m y_m| \\ &\leq |y_n| |x_n - x_m| + |x_m| |y_n - y_m| \end{aligned}$$

Sebuah teorema mengatakan "*jika barisan (a_n) konvergen maka barisan itu terbatas*". Karena (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy, maka sudah tentu barisan itu konvergen juga terbatas. Sehingga didapat $|x_m| \leq M_x$ dan $|y_n| \leq M_y$, lalu dapat diambil $M = \sup\{M_x, M_y\}$ yang berakibat

$$|y_n| |x_n - x_m| + |x_m| |y_n - y_m| \leq M |x_n - x_m| + M |y_n - y_m|$$

Kembali lagi bahwa (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy, maka

$$\forall n, m \geq H(\epsilon)_x \implies |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2M}$$

dan

$$\forall n, m \geq H(\epsilon)_y \implies |y_n - y_m| < \frac{\epsilon}{2M}$$

Sehingga untuk $H(\epsilon) = \sup\{H(\epsilon)_x, H(\epsilon)_y\}$ diperoleh

$$M |x_n - x_m| + M |y_n - y_m| < M \left(\frac{\epsilon}{2M} \right) + M \left(\frac{\epsilon}{2M} \right) = \epsilon$$

Maka didapat $|(x_n y_n) - (x_m y_m)| < \epsilon$ yang dimana merupakan definisi bahwa $(x_n y_n)$ adalah barisan Cauchy