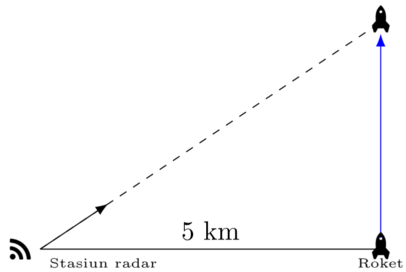
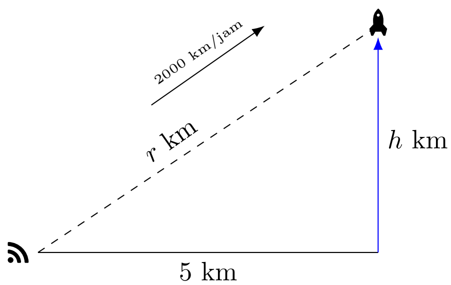
Quis 2 jam 9
Kelas 30

1. Roket naik vertikal dan dipantau oleh stasiun radar yang terletak 5 km dari landasan peluncuran. Berapa cepat roket naik jika tingginya 4 km dan jaraknya dari stasiun radar bertambah dengan laju 2000 km/jam?



Penyelesaian:

Ilustrasi gambar:



Diketahui:

$$h = 4 \text{ km}$$
$$\left.\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right|_{h=4} = 2000 \text{ km/jam}$$

Dari Ilustrasi diatas didapatkan persamaan

$r^2 = 5^2 + h^2$
$r^2 = 25 + h^2$

Subtitusi h untuk mendapatkan nilai r ketika $h = 4$ km

$r^2 = 5^2 + 4^2$
$r = \sqrt{5^2 + 4^2}$
$r = \sqrt{25 + 16}$
$r = \sqrt{41}$

Kemudian turunkan kedua ruas terhadap t. Dilanjutkan dengan subtitusi nilai h, r dan $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(25 + h^2) \\
2r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= 2h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \\
r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= h\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \\
(\sqrt{41})(2000) &= (4)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= 500\sqrt{41}
\end{aligned}$$

By: Teosofi Hidayah Agung (5002221132)

$\therefore$ kecepatan roket saat ketinggiannya 4 km adalah $500\sqrt{41}$ km/jam.

2. Tentukan nilai maksimum dan minimum dari

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8, & x > 1 \end{cases}$$

Pada $[-1, 4]$

Penyelesaian:
$f(x)$ dapat ditulis kembali dengan mengiriskan domainnya pada interval yang telah diberikan. $[-1, 1] \cup (1, 4]$

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1, & -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 8, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

Sebelum menentukan titik ekstrimnya, perlu ditinjau bahwa $f(x)$ kontinu pada selang $[-1, 4]$.

- Untuk $f(x) = 2x + 1, -1 \leq x \leq 1$ jelas bahwa fungsi linear merupakan fungsi kontinu
- Cek kekontinuan di $x = 1$.
  1 $f(1) = 2(1) + 1 = 3$
  2 $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x + 1 = 3$
  $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^2 - 6x + 8 = 3$
  $\therefore \lim_{x \to 1} f(x) = 3$
  3 $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$ fungsi kontinu di $x = 1$
- Untuk $f(x) = x^2 - 6x + 8, 1 < x \leq 4$ jelas bahwa fungsi polinomial merupakan fungsi kontinu. Dapat dicek turunan pertamanya

  $f'(x) = 2x - 6, 1 < x < 4$

  ```
  - - - - - - - - - - - - -  +++++++++++
  |------------------------|------------------------|
  1                        3                        4
  ```
  titik kritis di $x = 3$

  Titik uji:
  $\rightarrow f'(2) = 2(2) - 6 = -2$ **(Turun)**
  $\rightarrow f'(\frac{7}{2}) = 2(\frac{7}{2}) - 6 = 1$ **(Naik)**

Step terakhir adalah mencari nilai pada titik-titik ujung dan titik kritis fungsi yang telah dicari

x	-1	1	3	4
$f(x)$	-1	3	-1	0

Setelah itu, bandingkan saja nilai $f(x)$ yang telah didapat.

$\therefore$ nilai maksimumnya adalah 3 dan nilai minimumnya adalah -1.

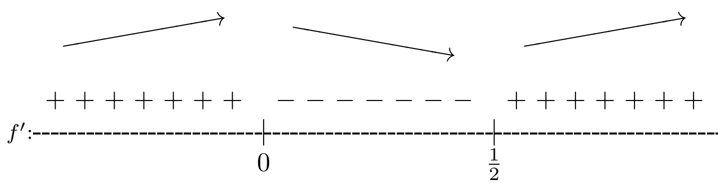
3. Diberikan fungsi $y = 4x^3 - 3x^2 + 5$

(a) Tentukan fungsi naik dan fungsi turun (berikan tanda f')
Penyelesaian: Tentukan turunan pertamanya

$$
\begin{aligned}
y' &= 0 \\
12x^2 - 6x &= 0 \\
6x(2x-1) &= 0 \\
x = 0 \ \vee \ x &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Titik uji:

$\rightarrow$ $f'(-1) = 6(-1)(2(-1)-1) = 18$ **(Naik)**
$\rightarrow$ $f'(\frac{1}{4}) = 6(\frac{1}{4})(2(\frac{1}{4})-1) = -\frac{3}{4}$ **(Turun)**
$\rightarrow$ $f'(1) = 6(1)(2(1)-1) = 18$ **(Naik)**



- Fungsi naik pada $[-\infty, 0]$ dan $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right]$.
- Fungsi turun pada $\left[0, \frac{1}{2}\right]$.

(b) Tentukan titik kritis
Penyelesaian: Titik kritis terjadi ketika $x = 0 \ \vee \ x = \frac{1}{2}$, Sehingga titik kritisnya adalah $(0, 5)$ dan $\left(\frac{1}{2}, \frac{19}{4}\right)$

(c) Tentukan ekstrim relatif
Penyelesaian: Dengan uji turunan kedua ($y'' = 24x - 6$) didapatkan

- Untuk $x = 0$, maka $y''(0) = -6$. ($f''(x_0) < 0$ definisi maksimum relatif)
- Untuk $x = 0$, maka $y''(\frac{1}{2}) = 6$. ($f''(x_0) > 0$ definisi minimum relatif)

Atau dapat dilihat dari naik turunnya grafik sebelum dan sesudah titik kritis.

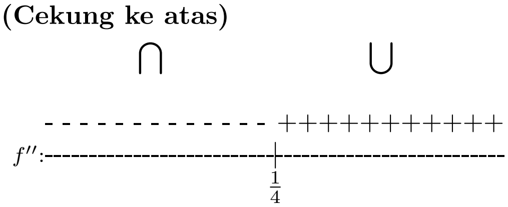
$\therefore$ maksimum relatif ketika $x = 0$ dan minimum relatif ketika $x = \frac{1}{2}$. (**Kedua titik tersebut ekstrim relatif**)

(d) Tentukan interval dimana fungsi cekung ke atas dan fungsi cekung ke bawah (berikan tanda f'')
Penyelesaian: Tentukan turunan pertamanya

$$
\begin{aligned}
y'' &= 0 \\
24x - 6 &= 0 \\
24 &= 6 \\
x &= \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

Titik uji:

$\rightarrow$ $f''(0) = 24(0) - 6 = -6$ **(Cekung ke bawah)**
$\rightarrow$ $f''(1) = 24(1) - 6 = 18$ **(Cekung ke atas)**

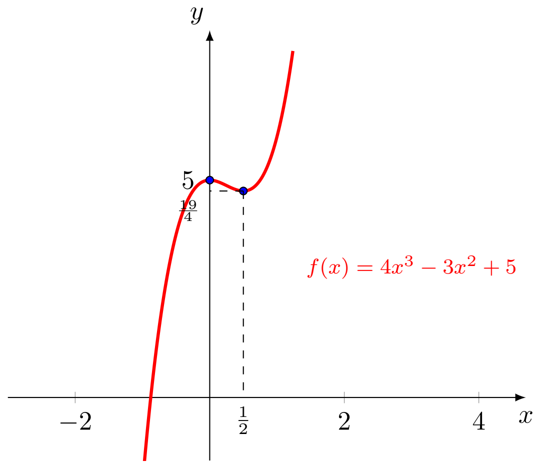


By: Teosofi Hidayah Agung (5002221132)

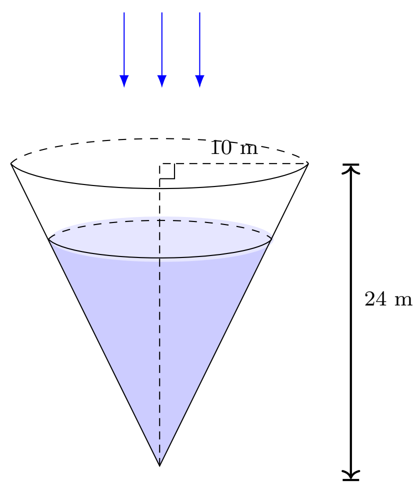
- Fungsi cekung ke atas pada $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right]$.
- Fungsi cekung ke bawah pada $\left[-\infty, \frac{1}{4}\right]$.

(e) Tentukan titik belok
Penyelesaian: Karena arah kecekungan berubah pada $x = \frac{1}{4}$, maka titik beloknya adalah $\left(\frac{1}{4}, \frac{39}{8}\right)$.

(f) Sketsalah grafiknya



4. Tangki air berbentuk kerucut dengan jari-jari alasnya 10 m dan tinggi kerucut 24 m. Jika air mengalir ke dalam tangki dengan laju 20 m^3/menit, Berapa cepat kedalaman air bertambah pada saat kedalaman air 16 m?



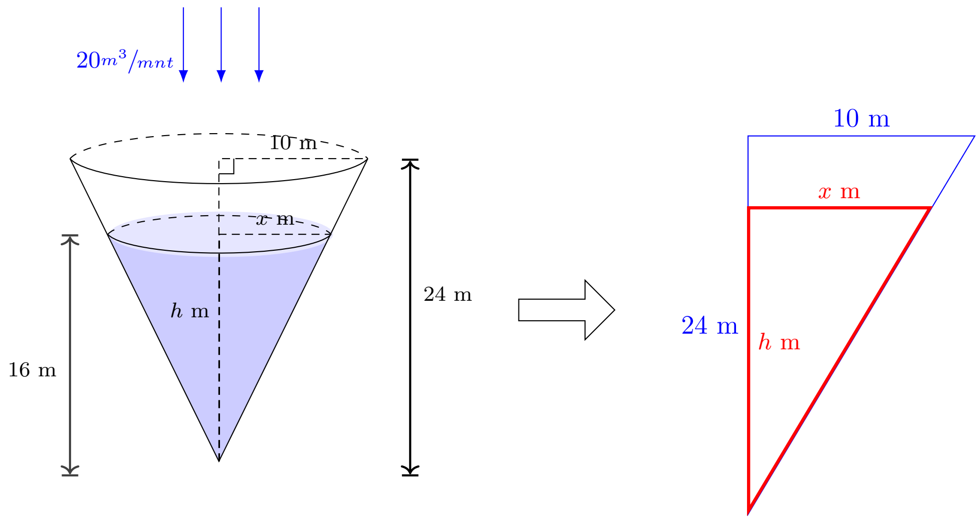
Penyelesaian:
Diketahui:

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 20$$

Ditanya:

$$\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=16} = \ldots$$

Perhatikan kesebangunan pada segitiga yang terbentuk



$$\frac{x}{h} = \frac{10}{24}$$
$$x = \frac{5}{12}h$$

Selanjutnya rumuskan volume kerucut

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$
$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{5}{12}h\right)^2 h \qquad (\textbf{Subtitusi } x = \frac{5}{12}h)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{25}{144}h^2\right) h$$
$$V = \frac{25}{432}\pi h^3$$

Turunkan persamaannya terhadap waktu dilanjutkan dengan mensubtitusi nilai-nilai yang diketahui

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{25}{432}\pi h^3\right) \\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{25}{432}\pi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h^3) \\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{25}{432}\pi \cdot 3h^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} &= \frac{25}{144}\pi h^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \\
20 &= \frac{25}{12^2}\pi(16)^2 \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \qquad \left(\textbf{Subtitusi } \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = 20 \textbf{ dan } h = 16\right) \\
20 &= \frac{25}{\cancelto{3}{12}} \frac{1}{\cancelto{3}{12}} \cdot \cancelto{4}{16} \cdot \cancelto{4}{16}\pi \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \\
20 &= \frac{400}{9}\pi \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{20}{\frac{400}{9}\pi} \\
\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} &= \frac{9}{20\pi}
\end{aligned}
$$

$\therefore$ Kedalaman air bertambah dengan laju $\frac{9}{20\pi}$ m^3/menit .

By: Teosofi Hidayah Agung (5002221132)