



QUIS 2 SEMESTER GENAP 2023/2024
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS
PROGRAM SARJANA



Matakuliah : Aljabar 2
Hari, Tanggal : Selasa, 14 - 06 - 2024
Waktu / Sifat : 90 menit tertutup
Kelas, Dosen : Drs. Komar Baihaqi, M.Si.

HARAP DIPERHATIKAN !!!

Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Diberikan $0 \neq f(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$, tentukan semua unit di $\mathbb{Z}_3[x]$.

Jawab:

Perhatikan kedua teorema berikut:

Teorema (Akibat 6.3.1). *Himpunan \mathbb{Z}_p adalah lapangan jika dan hanya jika p adalah bilangan prima.*

Teorema (Teorema 6.3.4). *Setiap lapangan adalah suatu daerah integral*

Karena 3 adalah bilangan prima, maka \mathbb{Z}_3 adalah lapangan. Dan karena \mathbb{Z}_3 adalah lapangan maka \mathbb{Z}_3 merupakan daerah integral. Sekarang dapat digunakan teorema berikut:

Teorema (Teorema 8.1.1). *Bila D adalah suatu daerah integral, maka $D[x]$ adalah daerah integral dan hasil perkalian dua polinomial tak nol $f(x), g(x) \in D[x]$ memenuhi $\deg(f(x) \cdot g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x))$.*

Misalkan $f(x)$ sebarang unit di $\mathbb{Z}_3[x]$, maka ada $g(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$ sehingga $f(x)g(x) = 1$. Dari teorema 8.1.1, kita punya $\deg(f(x)g(x)) = \deg(f(x)) + \deg(g(x)) = 0$. Karena $f(x)g(x) = 1$, maka $\deg(f(x)g(x)) = 0$ berarti $f(x)$ dan $g(x)$ haruslah masing-masing konstanta.
 \therefore Semua unit di $\mathbb{Z}_3[x]$ adalah polinomial konstanta tak nol yaitu $f(x) = 1$ dan $f(x) = 2$.

2. Tinjau polynomial $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ dan $g(x) = x^2 + x + 2$ di $\mathbb{Z}_3[x]$, tentukan $\gcd(f(x), g(x))$ dan tulislah dalam kombinasi linear.

Jawab:

Kita gunakan algoritma Euclid untuk mencari $\gcd(f(x), g(x))$.

- (i) $f(x) = x^4 + 2x^2 + 1$ dan $g(x) = x^2 + x + 2$

$$\begin{array}{r} x^2 \quad -x \quad +1 \\ x^2 + x + 1 \overline{) x^4 + 2x^2 + 1} \\ \underline{x^4 + x^3 + 2x^2} \\ -x^3 \\ \underline{-x^3 - x^2 - 2x} \\ x^2 + 2x + 1 \\ \underline{x^2 + x + 2} \\ x - 1 \end{array}$$

hasil baginya adalah $x^2 + 2x + 1$ dan sisa bagi $x + 2$ di \mathbb{Z}_3 .

$$f(x) = (x^2 + 2x + 1)g(x) + (x + 2) \quad (1)$$

(ii) $g(x) = x^2 + x + 2$ dan $r_1(x) = x + 2$

$$\begin{array}{r} x \quad -1 \\ x+2 \overline{) x^2 + x + 2} \\ \underline{x^2 + 2x} \\ -x + 2 \\ \underline{-x - 2} \\ 4 \end{array}$$

hasil baginya adalah $x + 2$ dan sisa bagi 1 di \mathbb{Z}_3 .

$$g(x) = (x + 2)(x + 2) + 1 \quad (2)$$

(iii) $r_1(x) = x + 2$ dan $r_2(x) = 1$

Perhatikan bahwa $\gcd(x + 2, 1) = 1$. Sehingga $\gcd(f(x), g(x)) = \gcd(r_1(x), r_2(x)) = 1$.

Kemudian untuk mencari kombinasi linearnya, diperlukan sedikit manipulasi pada kedua persamaan. Persamaan (1) dapat ditulis ulang sebagai berikut

$$(x + 2) = f(x) - (x^2 + 2x + 1)g(x)$$

Substitusi (1) ke (2), sehingga kita punya

$$\begin{aligned} [f(x) - (x^2 + 2x + 1)g(x)](x + 2) + 1 &= g(x) \\ g(x) - [f(x) - (x^2 + 2x + 1)g(x)](x + 2) &= 1 \\ g(x) - f(x)(x + 2) + g(x)(x^2 + 2x + 1)(x + 2) &= 1 \\ f(x)(-x - 2) + (x^3 + 4x^2 + x + 5x + 3)g(x) &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{(2x + 1)f(x) + (x^3 + x^2 + 2x)g(x) = 1}$$

3. Misalkan $f(x)$ adalah suatu polynomial di $\mathbb{Q}[x]$. Bila $\alpha = a + b\sqrt{c}$ adalah suatu akar dari $f(x)$, dimana $a, b \in \mathbb{Q}$ dan $\sqrt{c} \notin \mathbb{Q}$, Tunjukkan bahwa $\bar{\alpha} = a - b\sqrt{c}$ juga akar dari $f(x)$.

Jawab:

Karena $f(x)$ adalah polynomial di $\mathbb{Q}[x]$, maka $f(x)$ dapat ditulis sebagai

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

dimana $a_i \in \mathbb{Q}$ untuk $i = 0, 1, \dots, n$. Karena α adalah akar dari $f(x)$, maka

$$f(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0 = 0$$

Kita konjugatkan kedua ruas persamaan tersebut, sehingga kita punya

$$\overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0} = \bar{0} \quad (3)$$

Disini kita gunakan sifat konjugat, dimana misalkan $\alpha_1 = a_1 + b_1 \sqrt{c}$ dan $\alpha_2 = a_2 + b_2 \sqrt{c}$, maka akan memenuhi

$$\overline{\alpha_1 + \alpha_2} = \bar{\alpha}_1 + \bar{\alpha}_2$$

$$\overline{\alpha_1 \alpha_2} = \bar{\alpha}_1 \cdot \bar{\alpha}_2$$

$$\overline{\alpha_1^n} = (\bar{\alpha}_1)^n$$

Dari persamaan (3), didapatkan

$$\begin{aligned} \overline{a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_1 \alpha + a_0} &= \bar{0} \\ \overline{a_n} \overline{\alpha^n} + \overline{a_{n-1}} \overline{\alpha^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1} \bar{\alpha} + \overline{a_0} &= 0 \\ \overline{a_n} (\bar{\alpha})^n + \overline{a_{n-1}} (\bar{\alpha})^{n-1} + \cdots + \overline{a_1} \bar{\alpha} + \overline{a_0} &= 0 \end{aligned}$$

Sekarang perhatikan karena $a_i \in \mathbb{Q}$ untuk $i = 0, 1, \dots, n$, maka $\overline{a_i} = a_i$. Pada akhirnya diperoleh

$$a_n(\overline{\alpha})^n + a_{n-1}(\overline{\alpha})^{n-1} + \dots + a_1\overline{\alpha} + a_0 = 0$$

$$\boxed{f(\overline{\alpha}) = 0}$$

\therefore terbukti bahwa $\overline{\alpha}$ juga akar dari $f(x)$.

4. Tunjukkan bahwa polinomial $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$ adalah tak tereduksi

Jawab:

Untuk menunjukkan bahwa polinomial $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x + 1$ adalah tak tereduksi dalam $\mathbb{Q}[x]$, kita bisa menggunakan Kriteria Eisenstein.

Kriteria Eisenstein menyatakan bahwa suatu polinomial $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ dalam $\mathbb{Q}[x]$ adalah tak tereduksi jika terdapat bilangan prima p sedemikian rupa sehingga:

- (1) p tidak membagi a_n
- (2) p membagi a_i untuk semua $i < n$
- (3) p^2 tidak membagi a_0

Mari kita coba beberapa bilangan prima.

- $p = 2, a_4 = 1$ tidak habis dibagi 2, tidak memenuhi kondisi kedua.
- $p = 3, a_4 = 1$ tidak habis dibagi 3, tidak memenuhi kondisi kedua.
- $p = 5, a_4 = 1$ tidak habis dibagi 5, tidak memenuhi kondisi kedua.

Tidak ada bilangan prima p yang memenuhi Kriteria Eisenstein. Karena itu, kita harus mencari metode lain untuk menunjukkan bahwa $f(x)$ tak tereduksi.

NOTE*: Kriteria Eisenstein bersifat "**jika maka**" bukan "**jika dan hanya jika**". Artinya, jika kita tidak menemukan bilangan prima yang memenuhi kriteria Eisenstein, kita tidak bisa menyimpulkan bahwa polinomial tersebut tereduksi.

Teorema (Teorema 8.4.5). Misalkan $f(x)$ suatu polinomial tak nol di $\mathbb{Z}[x]$. Maka $f(x)$ dapat difaktorkan menjadi perkalian dua polinomial berderajat r dan s di $\mathbb{Q}[x]$ bila dan hanya bila $f(x)$ juga bisa difaktorkan kedalam hasil kali dua polinomial yang mempunyai derajat sama r dan s di $\mathbb{Z}[x]$.

Sekarang kita periksa apakah $f(x)$ bisa difaktorkan menjadi dua polinomial dengan derajat yang lebih rendah. Misalnya, jika $f(x)$ bisa difaktorkan menjadi dua polinomial kuadrat, maka kita dapat menulis:

$$f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Mengalikan kedua polinomial kuadrat tersebut dan menyamakan koefisien dengan $f(x)$:

$$(x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a+c)x^3 + (ac+b+d)x^2 + (ad+bc)x + bd$$

Bandingkan dengan $f(x) = x^4 - 5x^2 + 6x + 1$

- (i) $a + c = 0$
- (ii) $ac + b + d = -5$
- (iii) $ad + bc = 6$
- (iv) $bd = 1$.

Menurut teorema jika $f(x)$ bisa difaktorkan di $\mathbb{Z}[x]$, maka $f(x)$ juga bisa difaktorkan di $\mathbb{Q}[x]$. Sekarang pandang $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, maka $bd = 1$ berakibat $b = d = \pm 1$. Kemudian substitusi pada (iii) sehingga kita punya $a + c = \pm 6$. Hal ini kontradiksi dengan (i) yang menyatakan $a + c = 0$.

$\therefore f(x)$ adalah tak tereduksi di $\mathbb{Q}[x]$.

5. Misalkan $f(x) = 3x^4 - 6x^3 + 10x^2 - 5x + 9 \in \mathbb{Z}[x]$. Tunjukkan $f(x)$ tak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$

Jawab:

Teorema (Teorema 8.4.7). *Misalkan $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dengan $\deg(f(x)) \leq 1$. Untuk suatu bilangan prima p , polinomial $\mathcal{F}(x) \in \mathbb{Z}_p[x]$ diperoleh dari $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ dengan melakukan semua koefisien menjadi modulo p . Bila $\deg(f(x)) = \deg(\mathcal{F}(x))$ dan $\mathcal{F}(x)$ tak-tereduksi di $\mathbb{Z}_p[x]$, maka $f(x)$ tak-tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.*

Hal yang pertama dilakukan adalah memilih bilangan prima p . Kita pilih p sehingga dia tak tereduksi di $\mathbb{Z}_p[x]$, karena jika tidak kita tidak dapat menarik kesimpulan.

Disini dengan mudahnya bisa kita pilih $p = 2$, sehingga polinomial $\mathcal{F}(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ adalah

$$\mathcal{F}(x) = x^4 + x + 1$$

Substitusi semua anggota \mathbb{Z}_2

$$x = 0 \implies \mathcal{F}(0) = 0 + 0 + 1 = 1 \in \mathbb{Z}_2$$

$$x = 1 \implies \mathcal{F}(1) = 1 + 1 + 1 = 1 \in \mathbb{Z}_2$$

Namun hal ini kurang tepat sebab cara ini menunjukkan bahwa $\mathcal{F}(x)$ tidak bisa dibentuk menjadi $\mathcal{F}(x) = (x - \alpha)(x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta)$. Seharusnya kita cukup perlu menunjukkan bahwa $\mathcal{F}(x)$ tidak bisa difaktorkan menjadi dua polinomial kuadrat. (karena polinom kuadrat bisa difaktorkan kembali jika memang punya akar)

$$x^4 + x + 1 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

Dengan cara yang sama seperti nomor 4 kita dapatkan $bd = 1$ akibatnya $b = d = 1$. Namun $1 = bc + ad = a + c$ yang bertentangan dengan $a + c = 0$. Oleh sebab itu, $\mathcal{F}(x)$ tak tereduksi di $\mathbb{Z}_2[x]$.

$\therefore f(x)$ tak tereduksi di $\mathbb{Z}[x]$.