# Tugas Aljabar I

Teosofi Hidayah Agung
5002221132

1. Buatlah contoh grup.

   **Jawab**:
   Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ terhadap operasi perkalian $(\cdot)$.

   (1) Sifat **asosiatif**.
   jelas karena $\mathbb{Q} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}$ yang dimana bilangan real $\mathbb{R}$ sudah terbukti sifat asosiatifnya.

   (2) Eksistensi **identitas**
   Terdapat identitas $e \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ yaitu $1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, sedemikian sehingga untuk sembarang $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ berlaku $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

   (3) Eksistensi **invers**
   Untuk setiap $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ terdapat $a^{-1} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ yaitu $\frac{1}{a} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ yang saling invers, sehingga $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = e = 1$

   $\therefore$ Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ termasuk grup terhadap operasi perkalian $(\cdot)$.

2. Buatlah contoh bukan grup.

   **Jawab**:
   Didefinisikan $G = \{a, b \in \mathbb{R} | a \heartsuit b = ab + a + b\}$.
   Mempunyai identitas yaitu $0 \in G$ sebab
   $a \heartsuit 0 = 0 \heartsuit a = a(0) + a + 0 = (0)a + 0 + a = a$.
   Sekarang perhatikan untuk $-1 \in G$. Asumsikan $-1 \in G$ mempunyai invers yaitu $p \in G$, Sehingga nilai $b$:

$$
\begin{aligned}
-1 \heartsuit p \Longleftrightarrow (-1)p + (-1) + p &= 0 \\
-p - 1 + p &= 0 \\
p - p - 1 + p &= p + 0 \\
0 - 1 + p &= p \\
-1 + p - p &= p - p \\
-1 &= 0 \quad \textbf{(Kontradiksi)}
\end{aligned}
$$

Karena pembuktian mendapati kontradiksi, maka kesimpulannya adalah bahwa asumsi awalnya salah. Oleh karena itu, haruslah $-1 \in G$ tidak mempunyai invers.

$\therefore G$ bukan termasuk grup

3. Tunjukkan bahwa bila $G$ adalah grup komutatif, maka untuk semua $a, b \in G$ dan untuk semua bilangan bulat $n$, $(ab)^n = a^n b^n$.

   **Jawab**:

$$(ab)^n \overset{\text{def}}{=} \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \cdot ... \cdot (ab)}_{n}$$

   Perhatikan untuk $n = 0$, diperoleh $a^0 = b^0 = (ab)^0 = a^0 b^0 = e \in G$. Selanjutnya akan digunakan induksi matematika untuk membuktikan setiap $n \in \mathbb{N}$ memenuhi.
   Untuk setiap $a, b \in G$, misalkan $P(k) : (ab)^n = a^n b^n$.Untuk $P(1)$ terbukti benar karena $(ab)^1 = ab = a^1 b^1$. Selanjutnya anggap benar untuk $P(k) : (ab)^k = a^k b^k$ dan akan dibuktikan benar pula untuk $P(k + 1)$.

$$\begin{aligned}
(ab)^{k+1} &= (ab)^k (ab) \quad \textbf{(Definisi)} \\
&= (a^k b^k)(ab) \quad \textbf{(Asumsi } P(k) \textbf{ benar)} \\
&= (a^k b^k)(ba) \quad \textbf{(Komutatif)} \\
&= a^k (b^k (ba)) \quad \textbf{(Asosiatif)} \\
&= a^k ((b^k b) a) \quad \textbf{(Asosiatif)} \\
&= a^k (b^{k+1} a) \quad \textbf{(Definisi)} \\
&= a^k (a b^{k+1}) \quad \textbf{(Komutatif)} \\
&= (a^k a) b^{k+1} \quad \textbf{(Asosiatif)} \\
&= a^{k+1} b^{k+1} \quad \textbf{(Definisi)}
\end{aligned}$$

   Oleh karena itu, $P(n)$ terbukti benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

   Sekarang akan dibuktikan $P(n)$ benar untuk $n$ bilangan bulat negatif. Selanjutnya ambil sembarang $a, b \in G$ yang berakibat $(ab)^{-k}$ merupakan invers dari $(ab)^k$, Sehingga notasi $(-k)$ dapat mempresentasikan bilangan bulat negatif untuk $k \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
(ab)^{-k} &= b^{-k} a^{-k} \quad \textbf{(Invers } a^k b^k \textbf{)} \\
&= a^{-k} b^{-k} \quad \textbf{(Komutatif)}
\end{aligned}$$

   Juga $P(n)$ terbukti benar untuk setiap $n$ bilangan bulat negatif.

   $\therefore (ab)^n = a^n b^n$ terbukti benar $\forall n \in \mathbb{Z}$

4. Dapatkan invers masing-masing elemen dari $\mathbb{U}(10)$ dan $\mathbb{U}(15)$.
   *Catatan*: $\mathbb{U}(n) = \{[u]_n \in \mathbb{Z} \mid \text{fpb}(u, n) = 1\} \subset \mathbb{Z}_n$

**Jawab**:
Identitas masing-masing adalah $[1]_{10} \in \mathbb{U}(10)$ dan $[1]_{15} \in \mathbb{U}(15)$.

$\mathbb{U}(10) = \{[1]_{10}, [3]_{10}, [7]_{10}, [9]_{10}\}$

| $\times$ | $[1]_{10}$ | $[3]_{10}$ | $[7]_{10}$ | $[9]_{10}$ |
|---|---|---|---|---|
| $[1]_{10}$ | $[1]_{10}$ | $[3]_{10}$ | $[7]_{10}$ | $[9]_{10}$ |
| $[3]_{10}$ | $[3]_{10}$ | $[9]_{10}$ | $[1]_{10}$ | $[7]_{10}$ |
| $[7]_{10}$ | $[7]_{10}$ | $[1]_{10}$ | $[9]_{10}$ | $[3]_{10}$ |
| $[9]_{10}$ | $[9]_{10}$ | $[7]_{10}$ | $[3]_{10}$ | $[1]_{10}$ |

- $[1]_{10}^{-1} = [1]_{10}$
- $[3]_{10}^{-1} = [7]_{10}$
- $[7]_{10}^{-1} = [3]_{10}$
- $[9]_{10}^{-1} = [9]_{10}$

$\mathbb{U}(15) = \{[1]_{15}, [2]_{15}, [4]_{15}, [7]_{15}, [8]_{15}, [11]_{15}, [13]_{15}, [14]_{15}\}$

| $\times$ | $[1]_{15}$ | $[2]_{15}$ | $[4]_{15}$ | $[7]_{15}$ | $[8]_{15}$ | $[11]_{15}$ | $[13]_{15}$ | $[14]_{15}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $[1]_{15}$ | $[1]_{15}$ | $[2]_{15}$ | $[4]_{15}$ | $[7]_{15}$ | $[8]_{15}$ | $[11]_{15}$ | $[13]_{15}$ | $[14]_{15}$ |
| $[2]_{15}$ | $[2]_{15}$ | $[4]_{15}$ | $[8]_{15}$ | $[14]_{15}$ | $[1]_{15}$ | $[7]_{15}$ | $[11]_{15}$ | $[13]_{15}$ |
| $[4]_{15}$ | $[4]_{15}$ | $[8]_{15}$ | $[1]_{15}$ | $[13]_{15}$ | $[2]_{15}$ | $[14]_{15}$ | $[7]_{15}$ | $[11]_{15}$ |
| $[7]_{15}$ | $[7]_{15}$ | $[14]_{15}$ | $[13]_{15}$ | $[4]_{15}$ | $[11]_{15}$ | $[2]_{15}$ | $[1]_{15}$ | $[8]_{15}$ |
| $[8]_{15}$ | $[8]_{15}$ | $[1]_{15}$ | $[2]_{15}$ | $[11]_{15}$ | $[4]_{15}$ | $[13]_{15}$ | $[14]_{15}$ | $[7]_{15}$ |
| $[11]_{15}$ | $[11]_{15}$ | $[7]_{15}$ | $[14]_{15}$ | $[2]_{15}$ | $[13]_{15}$ | $[1]_{15}$ | $[8]_{15}$ | $[4]_{15}$ |
| $[13]_{15}$ | $[13]_{15}$ | $[11]_{15}$ | $[7]_{15}$ | $[1]_{15}$ | $[14]_{15}$ | $[8]_{15}$ | $[4]_{15}$ | $[2]_{15}$ |
| $[14]_{15}$ | $[14]_{15}$ | $[13]_{15}$ | $[11]_{15}$ | $[8]_{15}$ | $[7]_{15}$ | $[4]_{15}$ | $[2]_{15}$ | $[1]_{15}$ |

- $[1]_{15}^{-1} = [1]_{15}$
- $[2]_{15}^{-1} = [8]_{15}$
- $[4]_{15}^{-1} = [4]_{15}$
- $[7]_{15}^{-1} = [13]_{15}$
- $[8]_{15}^{-1} = [2]_{15}$
- $[11]_{15}^{-1} = [11]_{15}$
- $[13]_{15}^{-1} = [7]_{15}$
- $[14]_{15}^{-1} = [14]_{15}$

5. Apakah $H_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, \det(A) = 2 \text{ dan } a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ merupakan grup?

   **Jawab**:

$H_{2\times 2}(\mathbb{R})$ bukan merupakan grup karena elemen identitas $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \notin H_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dikarenakan $\det(I) = 1 \neq 2$, sehingga $H_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tidak mempunyai elemen identitas.

$\therefore H_{2\times 2}(\mathbb{R})$ bukan merupakan grup.