Script Pembahasan Soal Matematika - Deret Tak Hingga

2. Tentukan apakah deret-deret berikut konvergen atau divergen. Jika konvergen, dapatkan nilainya.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2^k}$

   Jawab:
   Kita tahu bahwa $\ln 2^k = k \ln 2$. Maka, deret tersebut dapat ditulis ulang sebagai

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

   Deret $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ adalah deret harmonik merupakan deret yang divergen. Maka, deret diatas divergen.

   (h) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^{k+2}}{7^{k-1}}$

   Jawab:
   Kita tahu bahwa $4^{k+2} = 4^2 \cdot 4^k = 16 \cdot 4^k$ dan $7^{k-1} = \dfrac{1}{7} \cdot 7^k$. Maka, deret tersebut dapat ditulis ulang sebagai

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{16 \cdot 4^k}{7 \cdot 7^k} = \frac{16}{7} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^k$$

   Deret $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^k$ adalah deret geometri dengan $a = 4/7$ dan $r = 4/7$. Karena $|r| < 1$, maka deret tersebut konvergen. Maka, deret diatas konvergen dan nilainya adalah

   $$\frac{16}{7} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{7}\right)^k = \frac{16}{7} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{7}} = \frac{16}{7} \cdot \frac{7}{3} = \frac{16}{3}$$

   (m) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (e/\pi)^{k-1}$

   Jawab:
   Kita tahu bahwa $(e/\pi)^{k-1} = \dfrac{e^{k-1}}{\pi^{k-1}} = \dfrac{\pi}{e} \cdot \dfrac{e^k}{\pi^k}$. Maka, deret tersebut dapat ditulis ulang sebagai

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{e} \cdot \left(\frac{e}{\pi}\right)^k = \frac{\pi}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^k$$

   Deret $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^k$ adalah deret geometri dengan $a = e/\pi$ dan $r = e/\pi$. Perhatikan bahwa $e = 2,78...$ dan $\pi = 3,14...$, maka $e < \pi \implies \dfrac{e}{\pi} < 1$. Karena $|r| < 1$, maka deret tersebut konvergen dan nilainya adalah

   $$\frac{\pi}{e} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^k = \frac{\pi}{e} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e}{\pi}} = \frac{\pi}{e} \cdot \frac{\pi}{\pi - e} = \frac{\pi^2}{e\pi - e^2}$$

4. Dapatkan bentuk tertutup untuk jumlahan parsial ke-n dari deret.

   $$\ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} + ... + \ln \frac{n}{n+1} + ...$$

By: Teosofi Hidayah Agung (5002221132)

Dan tentukan apakah deret tersebut konvergen.
Jawab:
Kita tahu bahwa $\ln \dfrac{k}{k+1} = \ln k - \ln(k+1)$. Maka, deret tersebut dapat ditulis ulang sebagai

$$\ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 + ... + \ln n - \ln(n+1) + ...$$

Dengan mengelompokkan suku-suku yang sama, kita dapatkan

$$\ln 1 - \ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + \ln 3 - \ln 4 + ... + \ln n - \ln(n+1) = \ln 1 - \ln(n+1)$$

Sehingga, jumlahan parsial ke-n dari deret tersebut adalah

$$S_n = \ln 1 - \ln(n+1) = -\ln(n+1)$$

Dari informasi diatas, kita dapatkan untuk $n \to \infty$ adalah

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} -\ln(n+1) = -\infty$$

Sehingga, deret tersebut divergen.

6. Tunjukkan bahwa:

(a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 - 1/k^2) = -\ln 2$

Jawab:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{\infty} \ln(1 - 1/k^2) &= \sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \ln(k^2-1) - \ln k^2 \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \ln((k-1)(k+1)) - 2\ln k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \ln(k-1) + \ln(k+1) - 2\ln k \\
&= \sum_{k=2}^{\infty} \ln(k-1) - \ln k + \sum_{k=2}^{\infty} \ln(k+1) - \ln k \\
&= (\ln 1 - \cancel{\ln 2 + \ln 2 - \ln 3 + ...}) + (\cancel{\ln 3} - \ln 2 + \cancel{\ln 4 - \ln 3 ...}) \\
&= -\ln 2 \blacksquare
\end{aligned}$$

(f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{k(k+1)} = 1$

Jawab:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2k+1}{k(k+1)} &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k+1} \\
&= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \pm ...\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \mp\right) \\
&= 1 \blacksquare
\end{aligned}$$

11. Dapatkan semua nilai x yang menyebabkan deret konvergen, dan untuk nilai-nilai x ini dapatkan jumlahannya.

(b) $e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + e^{-5x} + ...$

Jawab:

Deret tersebut dapat ditulis ulang menjadi

$$e^{-x} + (e^{-x})^2 + (e^{-x})^3 + (e^{-x})^4 + (e^{-x})^5 + ...$$

yang dimana merupakan deret geometri dengan $r = e^{-x}$. Deret diatas akan konvergen jika $|r| < 1$, Sehingga

$$|e^{-x}| < 1 \implies e^{-x} < 1 \implies -x < 0 \implies x > 0$$

Sehingga, deret tersebut konvergen untuk $x > 0$. Jumlahannya adalah ($a = r = e^{-x}$)

$$e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + e^{-4x} + e^{-5x} + ... = \frac{e^{-x}}{1 - e^{-x}}$$

(f) $\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^3 x - \frac{1}{8}\sin^4 x + ...$

Jawab:

Deret tersebut dapat ditulis ulang menjadi

$$2\left(\frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin x)^2 + \frac{1}{8}(\sin x)^3 - \frac{1}{16}(\sin x)^4 + ...\right)$$

yang dimana merupakan deret geometri dengan $r = \frac{1}{2}\sin x$. Deret diatas akan konvergen jika $|r| < 1$, Sehingga

$$\left|\frac{1}{2}\sin x\right| < 1 \implies |\sin x| < 2 \implies -2 < \sin x < 2$$

Namun mengingat $\sin x$ memiliki nilai maksimum dan minimum yaitu -1 dan 1, maka untuk $x \in \mathbb{R}$, deret tersebut konvergen. Jumlahannya adalah ($a = \sin x, r = \frac{1}{2}\sin x$)

$$\sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^3 x - \frac{1}{8}\sin^4 x + ... = \frac{2\sin x}{2 - \sin x}$$