Tugas Aljabar I

Teosofi Hidayah Agung
5002221132

1. Buatlah contoh subgrup dari $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$.

$$M_1 = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbb{Z}_{10} \right\}$$

Jelas bahwa $\mathbb{Z}_{10}$ subgrup dari $\mathbb{R}$ akibatnya $M_1 \subset M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +$ dan M_1 himpunan tak kosong karena $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in M_1$. Selanjutnya akan dibuktikan untuk sembarang $A, B \in M_1$ berlaku $A + (-B) \in M_1$.

$$\begin{aligned} A + B^{-1} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -b_1 & -b_2 \\ -b_3 & -b_4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 & a_4 - b_4 \end{bmatrix} \in M_1 \end{aligned}$$

$\therefore$ M_1 merupakan subgrup dari $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

2. Buatlah contoh bukan subgrup dari $(M_{2\times 2}(\mathbb{R}), +)$.

$$M_2 = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & d \end{bmatrix} \middle| a, d \in 3\mathbb{Z}, \right\}$$

Perhatikan bahwa M_2 bukan merupakan grup karena $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \in M_2$ namun inversnya $\begin{bmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -6 \end{bmatrix} \notin M_2$.

$\therefore$ M_2 bukan subgrup dari $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

2.2.1 Dapatkan order elemen dari grup yang berikut ini.

$$a^k = e \Rightarrow |a| = k$$

$\boxed{1}$ $2 \in \mathbb{Z}_3$

Jawab:

- $2^1 = 2$
- $2^2 = 4 = 1$

$\therefore$ $|2| = 2$

$\boxed{8}$ $-i \in \mathbb{C}^*$

- $(-i)^1 = -i$

- $(-i)^2 = -1$
- $(-i)^3 = i$
- $(-i)^4 = 1$

$\therefore\ |-i| = 4$

2.2.2 Dapatkan setidaknya dua subgrup sejati taktrivial dari grup berikut.

$\boxed{4}$ $\mathbb{Z}_8 = \{[0]_8, [1]_8, [2]_8, [3]_8, [4]_8, [5]_8, [6]_8, [7]_8\}$

- $H = \{[0]_8, [2]_8, [4]_8, [6]_8\}$

$+$	$[0]_8$	$[2]_8$	$[4]_8$	$[6]_8$
$[0]_8$	$[0]_8$	$[2]_8$	$[4]_8$	$[6]_8$
$[2]_8$	$[2]_8$	$[4]_8$	$[6]_8$	$[0]_8$
$[4]_8$	$[4]_8$	$[6]_8$	$[0]_8$	$[2]_8$
$[6]_8$	$[6]_8$	$[0]_8$	$[2]_8$	$[4]_8$

$\therefore\ H$ subgrup dari $\mathbb{Z}_8$

- $H' = \{[0]_8, [4]_8\}$

$+$	$[0]_8$	$[4]_8$
$[0]_8$	$[0]_8$	$[4]_8$
$[4]_8$	$[4]_8$	$[0]_8$

$\therefore\ H'$ juga subgrup dari $\mathbb{Z}_8$

$\boxed{7}$ $8\mathbb{Z} = \{..., -8, 0, 8, 16, 24, ...\}$

- $16\mathbb{Z} = \{..., -16, 0, 16, 32, 48, ...\}$ (Jelas $16\mathbb{Z}$ subgrup dari $8\mathbb{Z}$)
- $32\mathbb{Z} = \{..., -32, 0, 32, 64, 96, ...\}$ (Jelas $32\mathbb{Z}$ subgrup dari $8\mathbb{Z}$)

$\boxed{8}$ $GL(2,\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, \det(A) \neq 0 \text{ dan } a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\}$

- $SL(2,\mathbb{Q}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, \det(A) = 1 \text{ dan } a, b, c, d \in \mathbb{Q} \right\}$

  Bukti:
  Jelas $SL(2,\mathbb{Q}) \subseteq GL(2,\mathbb{Q})$. Selanjutnya cek untuk setiap $A, B \in SL(2,\mathbb{Q})$ mengakibatkan $AB^{-1} \in SL(2,\mathbb{Q})$.

$$\begin{aligned} AB^{-1} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \frac{1}{\det(B)} \begin{bmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \frac{1}{1} \begin{bmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_1b_4 - a_2b_3 & a_2b_1 - a_1b_2 \\ a_3b_4 - a_4b_3 & a_4b_1 - a_3b_2 \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Q}) \end{aligned}$$

  $\therefore\ SL(2,\mathbb{Q})$ subgrup dari $GL(2,\mathbb{Q})$.

- $SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \,\middle|\, \det(A) = 1 \text{ dan } a,b,c,d \in \mathbb{Z} \right\}$ **Bukti**:
  Karena $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, maka $SL(2,\mathbb{Z}) \subseteq GL(2,\mathbb{Z}) \subseteq GL(2,\mathbb{Q})$. Selanjutnya cek untuk setiap $A, B \in SL(2,\mathbb{Z})$ mengakibatkan $AB^{-1} \in SL(2,\mathbb{Z})$.

$$\begin{aligned}
AB^{-1} &= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \frac{1}{\det(B)} \begin{bmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \frac{1}{1} \begin{bmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_4 & -b_2 \\ -b_3 & b_1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_1b_4 - a_2b_3 & a_2b_1 - a_1b_2 \\ a_3b_4 - a_4b_3 & a_4b_1 - a_3b_2 \end{bmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})
\end{aligned}$$

  $\therefore$ $SL(2,\mathbb{Z})$ juga subgrup dari $GL(2,\mathbb{Q})$.

2.2.9 Dalam $SL(2,\mathbb{Z}_{10})$, misalkan

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(a) Hitung A^3 dan A^{11}.

$$\begin{aligned}
A^3 &= A \cdot A \cdot A \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1+0 & 2+2 \\ 0+0 & 0+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^{11} &= A^3 \cdot A^3 \cdot A^3 \cdot A^2 \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 18 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 22 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Dapatkan order dari A.

Perhatikan bahwa dilihat dari pola perpangkatan pada matriks A, dapat disimpulkan

$$A^k = \begin{bmatrix} 1 & 2k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, k \in \mathbb{N}$$

Akibatnya $A^5 = \begin{bmatrix} 1 & 2(5) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Sehingga dapat disimpulkan order dari A adalah 5.

2.2.10 Dalam $SL(3,\mathbb{R})$, untuk sebarang $a, b \in \mathbb{R}$, misalkan

$$D(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa $H = \{D(a,b,c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ adalah subgrup dari $SL(3,\mathbb{R})$.

Jawab:

Perhatikan bahwa $M \in H$ merupakan matriks segitiga atas, yang dimana determinannya diperoleh dari mengalikan semua elemen diagonal utamanya. Sehingga untuk setiap $M \in H$ berakibat $\det(M) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Jadi $H \subseteq SL(3,\mathbb{R})$.

Selanjutnya ambil sembarang $A, B \in H$ dan akan dibuktikan $AB^{-1} \in H$.

$$\begin{aligned} AB^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & b_1 & b_2 \\ 0 & 1 & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & a_1 & a_2 \\ 0 & 1 & a_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -b_1 & b_1b_3 - b_2 \\ 0 & 1 & -b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & a_1 - b_1 & -a_1b_3 + a_2 - b_2 + b_1b_3 \\ 0 & 1 & a_3 - b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in H \end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa $AB^{-1} \in H$.

$\therefore$ H merupakan subgrup dari $SL(3,\mathbb{R})$.