Tugas Aljabar I

Teosofi Hidayah Agung
5002221132

1. Misalkan $G = \{a + b\sqrt{2}i \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Tunjukkan bahwa G adalah subgrup dari $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan.

   Jawab:
   Dapat dilihat bahwa $a + b\sqrt{2}i \notin \mathbb{R}$ yang akibatnya $G \not\subset \mathbb{R}$.

   $\therefore G$ bukan subgrup dari $\mathbb{R}$

2. Misalkan $G = \{n + mi \mid m, n \in \mathbb{Z},\ i^2 = -1\}$. Tunjukkan bahwa G adalah subgrup dari $\mathbb{C}$ terhadap operasi penjumlahan.

   Jawab:
   Perhatikan bahwa pada $m, n \in \mathbb{Z}$ pada G, Sedangkan pada $\mathbb{C}$ didefinisikan $m, n \in \mathbb{R}$. Dari informasi yang sudah diketahui bahwa $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, Sehingga dapat disimpulkan bahwa $G \subset \mathbb{C}$.
   Seperti yang sudah diketahui juga bahwa himpunan bilangan kompleks $\mathbb{C}$ merupakan grup terhadap operasi penjumlahan. Sekarang akan dibuktikan bahwa G memenuhi definisi grup.

   (1) Sifat **tertutup**.
   Ambil sembarang $z = n + mi \in G$ yaitu $z_1 = n_1 + m_1 i \in G$ dan $z_2 = n_2 + m_2 i \in G$, maka

   $$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (n_1 + m_1 i) + (n_2 + m_2 i) \\ &= n_1 + n_2 + m_1 i + m_2 i \\ &= (n_1 + n_2) + (m_1 + m_2)i \in G \end{aligned}$$

   Jadi G bersifat tertutup.

   (2) Sifat **asosiatif**.
   Asosiatif diwariskan dari $\mathbb{C}$ yang merupakan grup.

   (3) Eksistensi **identitas**
   Terdapat identitas $e \in G$ yaitu $\theta = 0 + 0i \in G$, sedemikian sehingga $\forall z \in G$ memenuhi $z + \theta = \theta + z = z$. Bukti

   $$\begin{aligned} z + \theta &= (n + mi) + (0 + 0i) \\ &= (n + 0) + (m + 0)i \\ &= n + mi = z \quad \textbf{(Identitas kanan)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\theta + z &= (0 + 0i) + (n + mi)\\ &= (0 + n) + (0 + m)i\\ &= n + mi = z \quad (\textbf{Identitas kiri})\end{aligned}$$

Jadi θ adalah elemen identitas dari G

(4) Eksistensi **invers**

Untuk setiap $z \in G$ terdapat $-z \in G$ yang saling invers. Bukti:

$$\begin{aligned}z + (-z) &= (n + mi) + (-n - mi)\\ &= (n + (-n)) + (m + (-m))i\\ &= 0 + 0i = \theta \quad (\textbf{Invers kanan})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-z) + z &= (-n - mi) + (n + mi)\\ &= ((-n) + n) + ((-m) + m)i\\ &= 0 + 0i = \theta \quad (\textbf{Invers kiri})\end{aligned}$$

Jadi $\forall z \in G$ memiliki invers yaitu $-z \in G$.

$\therefore$ G merupakan subgrup dari $\mathbb{C}$, karena $G \subset \mathbb{C}$ dan G memenuhi definisi sebagai grup.

3. Dalam $SL(3, \mathbb{R})$, untuk sebarang $a, b \in \mathbb{R}$, misalkan

$$D(a, b, c) = \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Tunjukkan bahwa $H = \{D(a, b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ adalah subgrup dari $SL(3, \mathbb{R})$.

Jawab:

Perhatikan bahwa $M \in H$ merupakan matriks segitiga atas, yang dimana determinannya diperoleh dari mengalikan semua elemen diagonal utamanya. Sehingga untuk setiap $M \in H$ berakibat $\det(M) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$. Jadi $H \subseteq SL(3, \mathbb{R})$.

Selanjutnya ambil sembarang $A, B \in H$ dan akan dibuktikan $AB^{-1} \in H$. Cek determinan matriks AB^{-1}:

$$\begin{aligned}\det(AB^{-1}) &= \det(A) \cdot \det(B^{-1})\\ &= \det(A) \cdot \frac{1}{\det(B)} \quad (\textbf{Sifat Determinan})\\ &= 1 \cdot \frac{1}{1} = 1\end{aligned}$$

Dapat disimpulkan bahwa $AB^{-1} \in H$.

$\therefore$ H merupakan subgrup dari $SL(3, \mathbb{R})$.

4. Tunjukkan bahwa bila H dan K adalah subgrup dari G, maka $H \cap K$ adalah subgrup dari G.

Jawab:
Diketahui bahwa $H \subseteq G$ dan $K \subseteq G$. H dan K bersama-sama subgrup dari G yang berarti memiliki elemen identitas yang sama anggap saja e.
Perhatikan bahwa

$$\left.\begin{array}{l} H \cap K \subseteq H \subseteq G \\ H \cap K \subseteq K \subseteq G \end{array}\right\} H \cap K \subseteq G$$

Selanjutnya perhatikan bahwa $H \cap K \neq \varnothing$, sebab $H \cap K$ sedikitnya memiliki satu anggota yaitu e.
Anggota $H \cap K$ lebih dari satu anggota bila dan hanya bila $\forall x, x^{-1} \in H$ dan $\forall x, x^{-1} \in K$, yang dimana berakibat $\forall x, x^{-1} \in H \cap K$.

$\therefore H \cap K$ juga merupakan subgrup dari G.