SKPB - ITS

EVALUASI TENGAH SEMESTER BERSAMA GENAP 2021/2022

Mata kuliah/SKS	:	Matematika 2 (KM18 4 201) / 3 SKS
Hari, Tanggal	:	Rabu, 8 Juni 2022
Waktu	:	13.30-15.10 WIB (100 menit)
Sifat	:	Tertutup
Kelas	:	48-63

Diberikan 5 soal, dengan bobot nilai masing-masing soal sama dan boleh dikerjakan tidak berurutan.
Tuliskan: Nama, NRP, dan Nomor Kelas pada lembar jawaban Anda.

TIDAK BOLEH MENGGUNAKAN KALKULATOR DAN ALAT KOMUNIKASI
DILARANG MEMBERIKAN/MENERIMA JAWABAN SELAMA UJIAN
"Setiap tindak kecurangan akan mendapat sanksi akademik."

1. Tentukan semua nilai x yang memenuhi

$$1 < \frac{1}{|x-2|} \leq 4$$

2. diketahui $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ dan $g(x) = \frac{x}{1-x}$,
   (a) Dapatkan domain f dan g.
   (b) Dapatkan $(f \circ g)(x)$ beserta domainnya.

3. Diberikan fungsi $f(x) = x^2 - 2x + 1$
   (a) Tentukan nilai k terbesar sehingga $f(x)$ memiliki invers pada $[-\infty, k]$.
   (b) Tentukan $f^{-1}(x)$.
   (c) Sketsa grafik $f(x)$ dan $f^{-1}(x)$ dalam satu bidang koordinat.

4. Diberikan fungsi $f(x) = \begin{cases} 2|x+1| & x < -1 \\ \\ x^2 & x \geq 1 \end{cases}$
   (a) hitunglah $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.
   (b) Berapa nilai $f(-1)$?
   (c) Apakah $f(x)$ kontinu? jelaskan!

   Apakah $f(x)$ kontinu di $x = -1$? jelaskan!

5. Diketahui garis singgung pada kurva $y^3 = 2x^2$ di titik (a, b) sejajar dengan garis $2x + 3y - 5 = 0$. Tentukan titik (a, b).

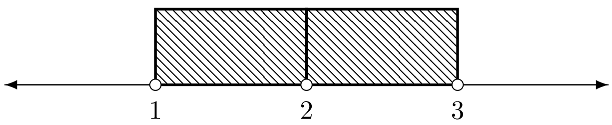
Selamat Mengerjakan

"*Jujur adalah kunci kesuksesan*"

1. Bagi kasus pada pertidaksamaan.

    (1) Untuk $1 < \frac{1}{|x-2|}$ diperoleh:
    *(*Catatan: Hasil nilai mutlak selalu positif, sehingga jika kedua ruas dikali $|x-2|$ tidak akan mengubah tanda pertidaksamaan)*

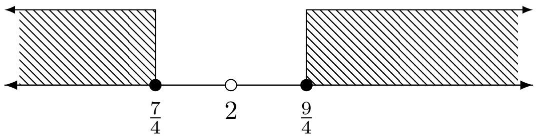
$$
\begin{aligned}
1 &< \frac{1}{|x-2|} \\
1|x-2| &< 1, \quad x \neq 2 \ \textbf{(Penyebut tak nol)} \\
|x-2| &< 1, \quad x \neq 2 \\
-1 < x-2 &< 1, \quad x \neq 2 \ \textbf{(Definisi jarak)} \\
1 < x &< 3, \quad x \neq 2
\end{aligned}
$$



$HP_1 = \{x \mid 1 < x < 2 \ \vee \ 2 < x < 3\} = (1,2) \cup (2,3)$

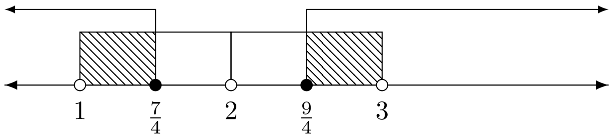
    (2) Untuk $\frac{1}{|x-2|} \leq 4$ diperoleh:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{|x-2|} &\leq 4 \\
1 &\leq 4|x-2|, \quad x \neq 2 \ \textbf{(Penyebut tak nol)} \\
\frac{1}{4} &\leq |x-2|, \quad x \neq 2 \\
\frac{1}{4} \leq x-2 \bigvee -\frac{1}{4} &\geq x-2, \quad x \neq 2 \ \textbf{(Definisi jarak)} \\
\frac{1}{4}+2 \leq x \bigvee -\frac{1}{4}+2 &\geq x, \quad x \neq 2 \\
\frac{9}{4} \leq x \bigvee \frac{7}{4} &\geq x, \quad x \neq 2
\end{aligned}
$$



$HP_2 = \left\{x \mid x \leq \frac{7}{4} \ \vee \ x \geq \frac{9}{4}\right\} = \left(-\infty, \frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{9}{4}, +\infty\right)$

Sehingga irisan kedua himpunan penyelasaian



$HP = HP_1 \cap HP_2 = \left\{x \mid 1 < x \leq \frac{7}{4} \ \vee \ \frac{9}{4} \leq x < 3\right\} = \left(1, \frac{7}{4}\right] \cup \left[\frac{9}{4}, 3\right).$

2. (a) Karena fungsi berbentuk pecahan, maka penyebutnya tidak boleh nol.

$D_f = \{x \mid x \neq 1\}$
$D_g = \{x \mid x \neq 1\}$

(b) Ingat bahwa $(f \circ g)(x) = f(g(x))$, sehingga

$$\begin{aligned}
f(g(x)) &= \frac{1+g(x)}{1-g(x)} \\
&= \frac{1+(\frac{x}{1-x})}{1-(\frac{x}{1-x})} \qquad \left(\textbf{Subtitusi } g(x) = \frac{x}{1-x}\right) \\
&= \frac{(\frac{1-x+x}{1-x})}{(\frac{1-x-x}{1-x})} \\
&= \frac{\frac{1-x+x}{\cancel{1-x}}}{\frac{1-x-x}{\cancel{1-x}}}, \quad x \neq 1 \\
&= \frac{1}{1-2x}, \quad x \neq 1
\end{aligned}$$

Definisi domain fungsi komposisi $f \circ g$ adalah $D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$.

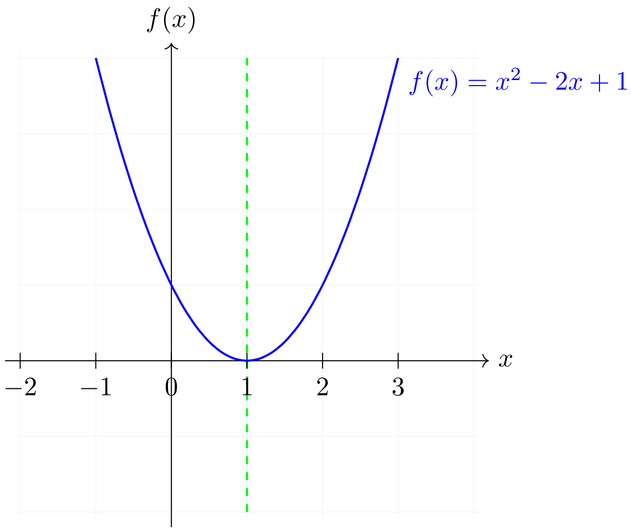
$$\begin{aligned}
D_{f \circ g} &= \{x \in \mathbb{R}/\{1\} \mid g(x) \in \mathbb{R}/\{1\}\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}/\{1\} \;\middle|\; \underbrace{\frac{x}{1-x} \in \mathbb{R}/\{1\}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{x}{1-x} \neq 1} \Rightarrow \boxed{x \neq 1-x} \Rightarrow \boxed{2x \neq 1} \Rightarrow \boxed{x \neq \frac{1}{2}}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ x \in \mathbb{R}/\{1\} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\Big/\left\{\frac{1}{2}\right\} \right\} \\
&= \left\{ x \in \mathbb{R}\Big/\left\{1, \frac{1}{2}\right\} \right\}
\end{aligned}$$

$\therefore (f \circ g)(x) = \frac{1}{1-2x}$ dan $D_{f \circ g} = \{x \mid x \neq 1 \ \vee \ x \neq \frac{1}{2}\}$

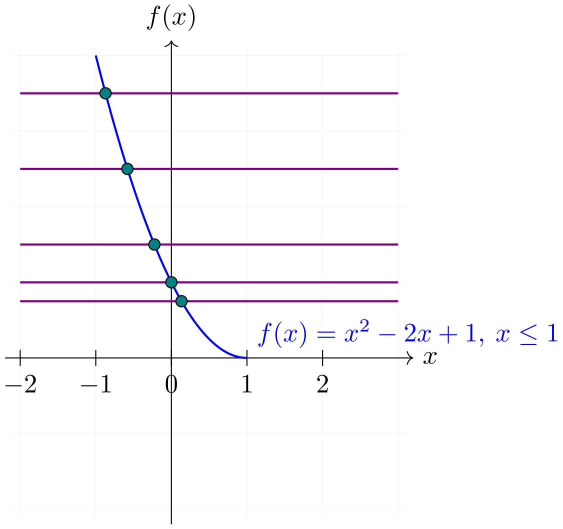
3. (a) Perhatikan bahwa $f(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$. agar $f(x)$ mempunyai invers maka haruslah $f(x)$ fungsi satu-satu. Gambar grafiknya sebagai berikut:



Perhatikan bahwa $f(x)$ simetri terhadap garis $x = 1$. Ketika ingin mengambil k terbesar agar $f(x)$ punya invers, haruslah pilih $k = 1$ sehingga interval domainnya menjadi $[-\infty, 1]$.

*(*Catatan: Secara geometris suatu fungsi dikatakan punya invers ketika kita menggambar sebarang garis horizontal yang melewati grafik fungsi tersebut sedemikian sehingga hanya terdapat maksimal*

satu titik potong antara garis horizontal dan grafik fungsi tersebut. lebih jelasnya perhatikan gambar berikut)

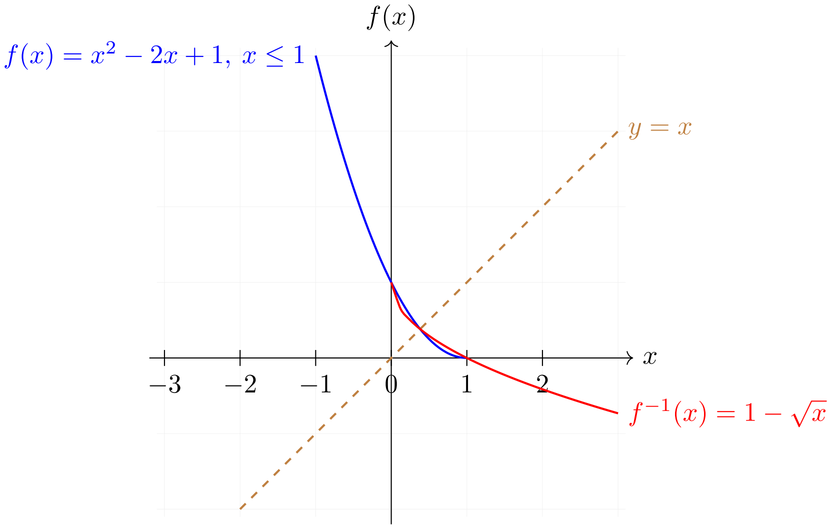


(b) Gantikan y dengan x dan juga sebaliknya.

$$
\begin{aligned}
x &= (y-1)^2 \\
x &= (y-1)^2 \\
\sqrt{x} &= \sqrt{y-1)^2} \\
\sqrt{x} &= |y-1| \\
\pm\sqrt{x} &= y-1 \\
y &= 1 \pm \sqrt{x} \\
f^{-1}(x) &= 1 \pm \sqrt{x}
\end{aligned}
$$

Karena range $R_{f^{-1}} = D_f = [-\infty, 1]$, maka $f^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$.

(c) Salah satu cara menggambar grafik $f^{-1}(x)$ adalah dengan mencerminkan $f(x)$ terhadap garis $y = x$, sehingga akan didapat grafik $f^{-1}(x)$.



4. Secara definisi $f(x) = \begin{cases} 2|x+1| & x < -1 \begin{cases} 2x+2 & x >= -1, x < -1 \\ -2x-2 & x < -1, x < -1 \end{cases} \\ \\ x^2 & x \geq -1 \end{cases}$

   Perhatikan bahwa $(-\infty, -1) \cap [-1, +\infty) = \varnothing$, sehingga

   $$f(x) = \begin{cases} 2|x+1| & x < -1 \begin{cases} 2x+2 & \varnothing \\ -2x-2 & x < -1 \end{cases} \\ \\ x^2 & x \geq -1 \end{cases}$$

   Dan dapat disederhanakan menjadi

   $$f(x) = \begin{cases} -2x-2 & x < -1 \\ \\ x^2 & x \geq -1 \end{cases}$$

   (a) $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = \begin{cases} \lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} -2x-2 = 0 \\ \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^-} x^2 = 1 \end{cases}$

   Karena $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$, maka $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ tidak ada.

   (b) $f(-1) = (-1)^2 = 1$

   (c) $f(x)$ kontinu di titik $x = a$, jika memenuhi ketiga syarat:
   - $f(a)$ terdefinisi.
   - $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ ada.
   - $f(a) = \lim\limits_{x \to a} f(x)$

   $f(x)$ tidak kontinu dimana-mana karena ada titik dimana $f(x)$ tidak kontinu, yaitu di $x = -1$.

   $f(x)$ tidak kontinu di $x = -1$, karena pada soal (a) sudah disebutkan bahwa $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$ tidak ada. Hal tersebut mengakibatkan syarat kedua dari $f(x)$ kontinu tidak terpenuhi.

5. Ingat bahwa $m_s = \frac{dy}{dx}$ dengan m_s adalah garis singgung fungsi $y = f(x)$. Dengan turunan implisit akan didapatkan:

   $$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y^3) &= \frac{d}{dx}(2x^2) \\ 3y^2 \frac{dy}{dx} &= 4x \\ m_s = \frac{dy}{dx} &= \frac{4x}{3y^2}, \quad y \neq 0 \end{aligned}$$

   Karena garis singgung melewati (a, b), maka $m_s = \frac{dy}{dx}\Big|_{\substack{x\,=\,a \\ y\,=\,b}} = \frac{4a}{3b^2}$. Diketahui bahwa garis singgung sejajar dengan garis $l := 2x + 3y - 5 = 0$.

   $$\begin{aligned} &2x + 3y - 5 = 0 \\ &3y = -2x + 5 \\ &y = \underbrace{-\frac{2}{3}}_{m_l} x + \underbrace{\frac{5}{3}}_{c} \quad \left(\text{Bentuk } \boxed{y = m_l x + c}\right) \end{aligned}$$

Karena garis saling sejajar, maka

$$
\begin{aligned}
m_s &= m_l \\
\frac{4a}{\cancel{3}b^2} &= -\frac{2}{\cancel{3}} \\
4a &= -2b^2 \\
a &= -\frac{1}{2}b^2 ....(1)
\end{aligned}
$$

Ingat bahwa titik (a, b) juga terletak pada $y^3 = 2x^2$, sehingga

$$
\begin{aligned}
(b)^3 &= 2(a)^2 \\
b^3 &= 2a^2 ....(2)
\end{aligned}
$$

Subtitusi persamaan (1) ke persamaan (2).

$$
\begin{aligned}
b^3 &= 2(-\frac{1}{2}b^2)^2 \\
b^3 &= \frac{1}{2}b^4 \\
b^3 - \frac{1}{2}b^4 &= 0 \\
b^3(1 - \frac{1}{2}b) &= 0
\end{aligned}
$$

Didapatkan $b = 0 \vee b = 2$. Subtitusi hasil tersebut ke persamaan (1) atau (2), sehingga didapat titik (a, b) adalah $(0, 0)$ dan $(-2, 2)$. Namun karena $y \neq 0$ maka satu-satunya (a, b) yang memenuhi adalah $(-2, 2)$.