Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

1. Diberikan $F = 2xy^2\hat{i} + xyz\hat{j} + yz^2\hat{k}$

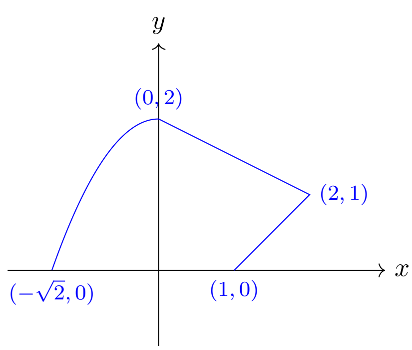
   (a) $\nabla \times F$ di titik $P(0,1,2)$
   Jawab:

$$\begin{aligned}
\nabla \times F &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2xy^2 & xyz & yz^2 \end{vmatrix} \\
&= \left(\partial_y(yz^2) - \partial_z(xyz)\right)\hat{i} - \left(\partial_x(yz^2) - \partial_z(2xy^2)\right)\hat{j} + \left(\partial_x(xyz) - \partial_y(2xy^2)\right)\hat{k} \\
&= (z^2 - xy)\hat{i} + (yz - 4xz)\hat{k} \\
\nabla \times F_{(0,1,2)} &= (4-0)\hat{i} + (2-0)\hat{k} = 4\hat{i} + 2\hat{k}
\end{aligned}$$

   (b) $\nabla \times (\nabla \times F)$ di titik $P(0,1,2)$
   Jawab:

$$\begin{aligned}
\nabla \times (\nabla \times F) &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ z^2 - xy & 0 & yz - 4xz \end{vmatrix} \\
&= \partial_y(yz - 4xz)\hat{i} - \left(\partial_x(yz - 4xz) - \partial_z(z^2 - xy)\right)\hat{j} + (-\partial_y(z^2 - xy))\hat{k} \\
&= z\hat{i} - (-4z - 2z)\,\hat{j} - (-x)\hat{k} \\
&= z\hat{i} + 6z\hat{j} + x\hat{k} \\
\nabla \times (\nabla \times F)_{(0,1,2)} &= 2\hat{i} + 12\hat{j}
\end{aligned}$$

2. Hitung $\int_C F \cdot dr$ dimana $F = 3x^2y\hat{i} - y\sqrt{x}\hat{j}$ dan C adalah Lintasan yang melalui garis lurus dari $(1,0)$ ke $(2,1)$, kemudian garis lurus dari $(2,1)$ ke $(0,2)$, dan kemudian parabola $y = 2 - x^2$ dari $(0,2)$ ke $(-\sqrt{2},0)$. Gambarkan juga lintasan C nya
   Jawab:
   Lintasan C dapat digambarkan sebagai berikut



   Kita pecah lintasan C menjadi 3 bagian, yaitu garis lurus dari $(1,0)$ ke $(2,1)$, garis lurus dari $(2,1)$ ke $(0,2)$, dan parabola $y = 2 - x^2$ dari $(0,2)$ ke $(-\sqrt{2},0)$.

- C_1 adalah garis lurus dari $(1,0)$ ke $(2,1)$ dengan persamaan parametrik $x = t$ dan $y = t-1$ untuk $1 \leq t \leq 2$.

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} F \cdot dr &= \int_1^2 F \cdot dr = \int_1^2 (3t^2(t-1)\hat{i} - (t-1)\sqrt{t}\hat{j}) \cdot (dt\hat{i} + dt\hat{j}) \\
&= \int_1^2 3t^3(t-1) - (t-1)\sqrt{t}\, dt \\
&= \int_1^2 3t^4 - 3t^3 - t\sqrt{t} + \sqrt{t}\, dt \\
&= \left[\frac{3}{5}t^5 - \frac{3}{4}t^4 - \frac{2}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 \\
&= \frac{3}{5}(32) - \frac{3}{4}(16) - \frac{2}{5}(4\sqrt{2}) + \frac{2}{3}(2\sqrt{2}) - \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{4} - \frac{2}{5} + \frac{2}{3}\right) \\
&= \frac{96}{5} - 12 - \frac{8}{5}\sqrt{2} + \frac{4}{3}\sqrt{2} - \frac{3}{5} + \frac{3}{4} + \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \\
&= \frac{425 - 16\sqrt{2}}{60}
\end{aligned}$$

- C_2 adalah garis lurus dari $(2,1)$ ke $(0,2)$ dengan persamaan parametrik $x = 2-t$ dan $y = 1+t$ untuk $0 \leq t \leq 2$.

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} F \cdot dr &= \int_0^2 F \cdot dr = \int_0^2 (3(2-t)^2(1+t)\hat{i} - (1+t)\sqrt{2-t}\hat{j}) \cdot (-dt\hat{i} + dt\hat{j}) \\
&= \int_0^2 3(2-t)^2(1+t) + (1+t)\sqrt{2-t}\, dt \\
&= \int_0^2 3(4-4t+t^2)(1+t) + (1+t)\sqrt{2-t}\, dt \\
&= \int_0^2 3(4-4t+t^2+4t-4t^2+t^3) + (1+t)\sqrt{2-t}\, dt \\
&= \int_0^2 12t - 3t^2 + 3t^3 + (1+t)\sqrt{2-t}\, dt \\
&= \left[6t^2 - t^3 + \frac{3}{4}t^4 - 2(2-x)\sqrt{2-x} + \frac{2\sqrt{2-x}}{5}(4-4x+x^2)\right]_0^2 \\
&= 12 + \frac{12\sqrt{2}}{5}
\end{aligned}$$

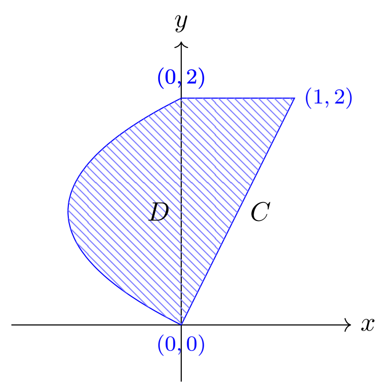
- C_3 adalah parabola $y = 2 - x^2$ dari $(0,2)$ ke $(-\sqrt{2}, 0)$ dengan persamaan parametrik $x = -t$

dan $y = 2 - t^2$ untuk $0 \leq t \leq \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
\int_{C_3} F \cdot dr = \int_0^{\sqrt{2}} F \cdot dr &= \int_0^{\sqrt{2}} (3(-t)^2(2-t^2)\hat{\imath} - (2-t^2)\sqrt{-t}\hat{\jmath}) \cdot (-dt\hat{\imath} - 2t\,dt\hat{\jmath}) \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} 3t^2(2-t^2) - 2t(2-t^2)\sqrt{t}\,dt \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} 6t^2 - 3t^4 - 4t\sqrt{t} + 2t^3\sqrt{t}\,dt \\
&= \left[2t^3 - t^5 - \frac{8}{5}t^{\frac{5}{2}} + \frac{4}{3}t^{\frac{7}{2}}\right]_0^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{5} + \frac{16\sqrt[4]{8}}{21}
\end{aligned}$$

Sehingga, $\displaystyle\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr + \int_{C_3} F \cdot dr = \frac{425 + 4\sqrt{2}}{60} + 12 + \frac{16\sqrt[4]{8}}{21}$.

3. Dengan Teorema Green, hitung $\displaystyle\int_C F \cdot dr$ dimana $F = (x^2y + 3y^2)\hat{\imath} + (x - y^3)\hat{\jmath}$ dan C adalah lintasan yang melalui garis lurus dari $(0,0)$ ke $(1,2)$, kemudian garis lurus dari $(1,2)$ ke $(0,2)$, dan selanjutnya melewati parabola $x = y^2 - 2y$ dari $(0,2)$ ke $(0,0)$.
Jawab:
Lintasan C dapat digambarkan sebagai berikut



Dengan menggunakan Teorema Green, kita dapat menghitung

$$\int_C M\,dx + N\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) dA$$

dimana D adalah daerah yang dibatasi oleh lintasan C.

$$
\begin{aligned}
\int_C (x^2y + 3y^2)\,dx + (x - y^3)\,dy &= \iint_D \left(\frac{\partial(x - y^3)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2y + 3y^2)}{\partial y} \right) dA \\
&= \iint_D (1 - x^2 - 6y)\,dA \\
&= \int_0^2 \int_{y^2-2y}^{y/2} (1 - x^2 - 6y)\,dx\,dy \\
&= \int_0^2 \left[x - \frac{1}{3}x^3 - 6xy \right]_{y^2-2y}^{y/2} dy \\
&= \int_0^2 \left[\frac{y}{2} - \frac{y^3}{24} - 3y^2 - (y^2 - 2y) + \frac{1}{3}(y^2 - 2y) + 6(y^2 - 2y)y \right] dy \\
&= \int_0^2 \frac{143}{24}y^3 - \frac{47}{3}y^2 + \frac{11}{6}y\,dy \\
&= \left[\frac{143}{96}y^4 - \frac{47}{9}y^3 + \frac{11}{12}y^2 \right]_0^2 \\
&= -\frac{257}{18}
\end{aligned}
$$