Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

1. (a) Perlihatkan bahwa $\boldsymbol{F}(x,y,z) = y^2z^3\boldsymbol{i} + 2xyz^3\boldsymbol{j} + 3xy^2z^2\boldsymbol{k}$ adalah medan konservatif
   Solusi:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix} \\ &= \left[6xyz^2 - 6xyz^2\right]\boldsymbol{i} - \left[3y^2z^2 - 3y^2z^2\right]\boldsymbol{j} + \left[2yz^3 - 2yz^3\right]\boldsymbol{k} \\ &= 0\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = 0\end{aligned}$$

   $\therefore \boldsymbol{F}(x,y,z)$ adalah medan konservatif

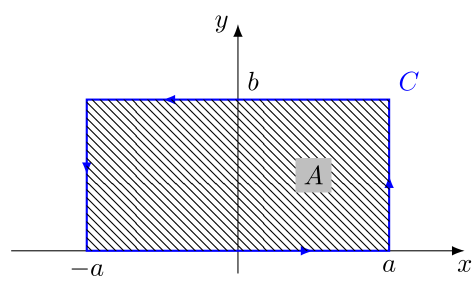
   (b) Carilah fungsi $f(x,y,z)$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \boldsymbol{\nabla}f(x,y,z)$
   Solusi:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(x,y,z) &= \boldsymbol{\nabla}f(x,y,z) \\ y^2z^3\boldsymbol{i} + 2xyz^3\boldsymbol{j} + 3xy^2z^2\boldsymbol{k} &= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} &= y^2z^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} &= 2xyz^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} &= 3xy^2z^2 \end{cases} \implies \begin{cases} f(x,y,z) &= \int y^2z^3\,dx = xy^2z^3 + g(y,z) \\ f(x,y,z) &= \int 2xyz^3\,dy = xy^2z^3 + h(x,z) \\ f(x,y,z) &= \int 3xy^2z^2\,dz = xy^2z^3 + l(x,y) \end{cases}$$

   Ketiga persamaan di atas terpenuhi ketika $g(y,z) = h(x,z) = l(x,y) = C$ dengan C adalah suatu konstanta sembarang.
   $\therefore f(x,y,z) = xy^2z^3 + C$

2. Gunakan kebenaran Teorema Green untuk $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2+y^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$ dimana A adalah daerah empat persegi panjang yang dibatasi oleh: $x = \pm a$; $y = 0$; $y = b$ (hitung dengan Teorema Green dan secara langsung)
   Solusi:



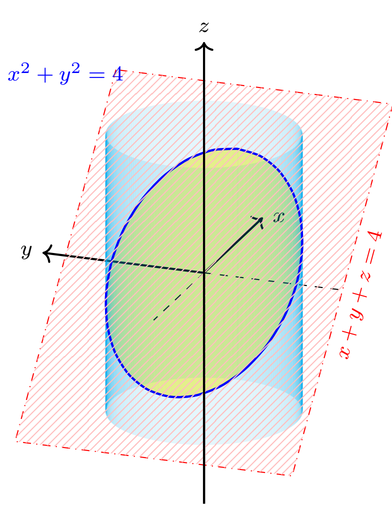
- Dengan Teorema Green

$$\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_A \left(-\frac{\partial}{\partial x}(-2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)\right) dA \\
&= \iint_A (-2y-2y)\, dA \\
&= -4\int_{-a}^{a}\int_0^b y\, dy\, dx \\
&= -4\int_{-a}^{a}\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^b dx \\
&= -2\int_{-a}^{a} b^2\, dx \\
&= -2b^2[a-(-a)] = -4ab^2
\end{aligned}$$

- Secara langsung

$$\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \oint_C (x^2+y^2)\, dx - 2xy\, dy \\
&= \int_{-a}^{a}(x^2+0)\, dx - 2x(0)d(0) + \int_0^b (a^2+y^2)\, d(a) - 2aydy \\
&+ \int_{-a}^{a}((-x)^2+b^2)\, d(-x) - 2xb\, d(b) + \int_0^b (0+(-y)^2)\, d(-a) - 2(-a)(-y)dy \\
&= \cancel{\int_{-a}^{a} x^2\, dx} - \int_0^b 2ay\, dy - \cancel{\int_{-a}^{a} x^2\, dx} - \int_{-a}^{a} b^2\, dx - \int_0^b 2ay\, dy \\
&= -4a\int_0^b y\, dx - [b^2x]_{-a}^{a} \\
&= -2ab^2 - 2ab^2 = -4ab^2
\end{aligned}$$

3. untuk menghitung $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ dengan $\boldsymbol{F} = 2z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 3y\boldsymbol{k}$ dan C adalah batas luasan elips bidang $z = x$ yang berada dalam silinder $x^2+y^2 = 4$ yang berorientasi searah dengan putaran jarum jam seperti yang digambarkan jika dilihat dari atas
Solusi:
Ilustrasi gambar sebagai berikut



Pertama-tama kita perlu mencari vektor normal dari permukaan elips bidang $z = x$. Didapat $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}}{\|\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})$. Sehingga dengan Teorema Stokes kita dapatkan

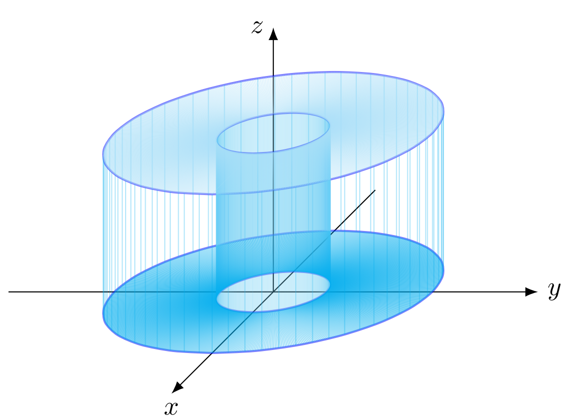
$$\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})\cdot n\; d\boldsymbol{S} \\
&= \iint_S \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2z & x & 3y \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})\; dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S [(3-0)\boldsymbol{i}-(0-2)\boldsymbol{j}+(1-0)\boldsymbol{k}]\cdot(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})\; dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S (3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})\, dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S (3-1)\, dS \\
&= \sqrt{2}\iint_S dS
\end{aligned}$$

$\iint_S dS$ adalah luas permukaan elips bidang. Dengan rumus luas elips $A = \pi ab$ dengan a dan b masing-masing adalah sumbu minor dan sumbu mayor elips. Pada gambar sebelumnya dapat dilihat bahwa sumbu minor $a = 2$ dan untuk sumbu mayor dapat dihitung menggunkan Teorema Pythagoras yaitu $b = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$. Sehingga

$$\iint_S dS = \pi(2)(2\sqrt{2}) = 4\pi\sqrt{2}$$

$$\therefore \boxed{\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \sqrt{2}(4\pi\sqrt{2}) = 8\pi}$$

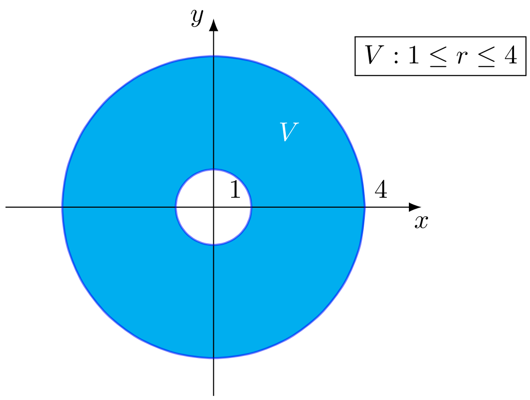
4. Diketahui medan vektor $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 27\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$. Dengan Teorema Gauss, hitung $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$ dengan S adalah permukaan benda padat berupa shell silinder (lihat gambar), $1 \le x^2+y^2 \le 16$, $0 \le z \le 2$.



Solusi:

$$\begin{aligned}
\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} \, dV \\
&= \iiint_V \partial_x(27) + \partial_y(x) + \partial_z(z^2) \, dV \\
&= \iiint_V 0 + 0 + 2z \, dV \\
&= 2 \iiint_V z \, dV
\end{aligned}$$

Daerah V adalah sebagai berikut



Dengan menggunakan koordinat silinder, didapatkan $dV = |r| \, dr \, d\theta \, dz$ dengan $|r|$ adalah jacobian dari koordinat silinder.

$$\begin{aligned}
2 \iiint_V z \, dV &= 2 \int_0^{2\pi} \int_1^4 \int_0^2 z \, |r| \, dz \, dr \, d\theta \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \int_1^4 \left[\frac{1}{2} z^2 \right]_0^2 r \, dr \, d\theta \\
&= 4 \int_0^{2\pi} \int_1^4 r \, dr \, d\theta \\
&= 4 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_1^4 d\theta \\
&= 4 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} (4^2 - 1^2) \right] d\theta \\
&= 2 \int_0^{2\pi} 15 \, d\theta \\
&= 2 \cdot 15 \cdot 2\pi = \boxed{60\pi}
\end{aligned}$$