Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

1. (a) Perlihatkan bahwa $\boldsymbol{F}(x,y,z) = y^2z^3\boldsymbol{i} + 2xyz^3\boldsymbol{j} + 3xy^2z^2\boldsymbol{k}$ adalah medan konservatif
Solusi:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y^2z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2z^2 \end{vmatrix} \\ &= \left[6xyz^2 - 6xyz^2\right]\boldsymbol{i} - \left[3y^2z^2 - 3y^2z^2\right]\boldsymbol{j} + \left[2yz^3 - 2yz^3\right]\boldsymbol{k} \\ &= 0\boldsymbol{i} - 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = 0\end{aligned}$$

$\therefore \boldsymbol{F}(x,y,z)$ adalah medan konservatif

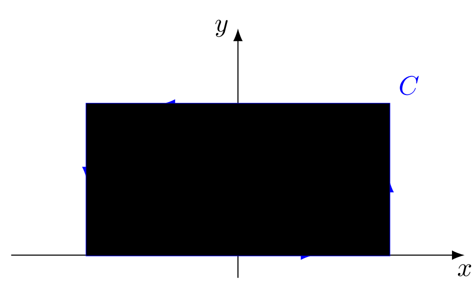
(b) Carilah fungsi $f(x,y,z)$ sedemikian sehingga $\boldsymbol{F}(x,y,z) = \boldsymbol{\nabla}f(x,y,z)$
Solusi:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(x,y,z) &= \boldsymbol{\nabla}f(x,y,z) \\ y^2z^3\boldsymbol{i} + 2xyz^3\boldsymbol{j} + 3xy^2z^2\boldsymbol{k} &= \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} & = y^2z^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} & = 2xyz^3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} & = 3xy^2z^2 \end{cases} \implies \begin{cases} f(x,y,z) & = \displaystyle\int y^2z^3\,dx = xy^2z^3 + g(y,z) \\ f(x,y,z) & = \displaystyle\int 2xyz^3\,dy = xy^2z^3 + h(x,z) \\ f(x,y,z) & = \displaystyle\int 3xy^2z^2\,dz = xy^2z^3 + l(x,y) \end{cases}$$

Ketiga persamaan di atas terpenuhi ketika $g(y,z) = h(x,z) = l(x,y) = C$ dengan C adalah suatu konstanta sembarang.
$\therefore f(x,y,z) = xy^2z^3 + C$

2. Gunakan kebenaran Teorema Green untuk $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^2+y^2)\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$ dimana A adalah daerah empat persegi panjang yang dibatasi oleh: $x = \pm a$; $y = 0$; $y = b$ (hitung dengan Teorema Green dan secara langsung)
Solusi:



A

3. untuk menghitung $\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}$ dengan $\boldsymbol{F} = 2z\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 3y\boldsymbol{k}$ dan C adalah batas luasan elips bidang $z = x$ yang berada dalam silinder $x^2 + y^2 = 4$ yang berorientasi searah dengan putaran jarum jam seperti yang digambarkan jika dilihat dari atas

   Solusi:

   Pertama-tama kita perlu mencari vektor normal dari permukaan elips bidang $z = x$. Didapat $\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}}{\|\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})$. Sehingga dengan Teorema Stokes kita dapatkan

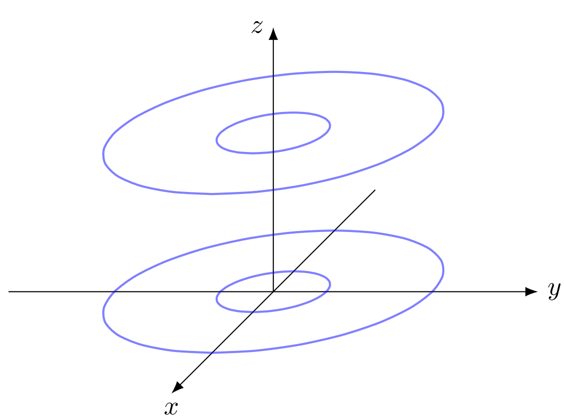
$$
\begin{aligned}
\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} &= \iint_S (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{F})\cdot n\; d\boldsymbol{S} \\
&= \iint_S \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 2z & x & 3y \end{vmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})\; dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S [(3-0)\boldsymbol{i} - (0-2)\boldsymbol{j} + (1-0)\boldsymbol{k}]\cdot(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})\; dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S (3\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})\cdot(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k})\, dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S (3-1)\, dS \\
&= \sqrt{2}\iint_S dS
\end{aligned}
$$

   $\iint_S dS$ adalah luas permukaan elips bidang. Dengan rumus luas elips $A = \pi ab$ dengan a dan b masing-masing adalah sumbu mayor dan sumbu minor elips. Pada gambar dapat dilihat bahwa sumbu minor $a = 2$ dan untuk sumbu mayor dapat dihitung menggunkan Teorema Pythagoras yaitu $b = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$. Sehingga

$$\iint_S dS = \pi(2)(2\sqrt{2}) = 4\pi\sqrt{2}$$

$$\therefore \boxed{\oint_C \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} = \sqrt{2}(4\pi\sqrt{2}) = 8\pi}$$

4. Diketahui medan vektor $\boldsymbol{F}(x,y,z) = 27\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$. Dengan Teorema Gauss, hitung $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{S}$ dengan S adalah permukaan benda padat berupa shell silinder (lihat gambar), $1 \leq x^2 + y^2 \leq 16$, $0 \leq z \leq 2$.



Solusi:

$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{S} &= \iiint_V \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{F} \, dV \\ &= \iiint_V \partial_x(27) + \partial_y(x) + \partial_z(z^2) \, dV \\ &= \iiint_V 0 + 0 + 2z \, dV \\ &= 2 \iiint_V z \, dV\end{aligned}$$

Dengan menggunakan koordinat silinder, didapatkan $dV = |r| \, dr \, d\theta \, dz$ dengan $|r|$ adalah jacobian dari koordinat silinder.

$$\begin{aligned}2 \iiint_V z \, dV &= 2 \int_0^{2\pi} \int_1^4 \int_0^2 z \, |r| \, dz \, dr \, d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} \int_1^4 \left[\frac{1}{2} z^2\right]_0^2 r \, dr \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \int_1^4 r \, dr \, d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_1^4 d\theta \\ &= 4 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2}(4^2 - 1^2)\right] d\theta \\ &= 2 \int_0^{2\pi} 15 \, d\theta \\ &= 2 \cdot 15 \cdot 2\pi = \boxed{60\pi}\end{aligned}$$