EVALUASI TENGAH SEMESTER GASAL 2023/2024
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS
PROGRAM SARJANA

Matakuliah	:	Analisis 1	
Hari, Tanggal	:	Kamis, 19 Oktober 2023	
Waktu / Sifat	:	100 menit / *Closed Book*	
Kelas, Dosen	:	A.	Dr. Sunarsini, M.Si.
		B,F	Dr. mont. Kistosil Fahim, M.Si.
		C.	Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
		D,G	Drs. Sadjidon, M.Si.
		E.	Dr. Rinurwati, M.Si.

HARAP DIPERHATIKAN !!!
Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Diberikan bilangan real a. Tunjukkan bahwa :
   (a) Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $0 \leq a < \varepsilon$ maka $a = 0$.
   (b) jika $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$.

2. Misal S himpunan bagian tak-kosong dari $\mathbb{R}$. Jika S terbatas diatas, tunjukkan bahwa
$$\sup(S) = -\inf\{-s : s \in S\}.$$

3. Diberikan himpunan $B \subset \mathbb{R}$ yang tidak kosong dan terbatas dibawah. Jika $v \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku:
   (i) $v + \frac{1}{n}$ bukan batas bawah dari B;
   (ii) $v - \frac{1}{n}$ batas bawah dari B,

   tunjukkan bahwa $\inf(B) = v$.

4. Dengan menggunakan definisi konvergensi barisan, tunjukkan bahwa $\lim(\frac{1}{3^n}) = 0$.

5. Misal (x_n) suatu barisan konvergen, dan diketahui (y_n) suatu barisan dengan sifat bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat M sehingga $|x_n - y_n| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq M$. Apakah hal tersebut berakibat bahwa (y_n) barisan yang konvergen? Berikan penjelasan untuk jawaban Anda.

—–o0o—–

Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

1. Diketahui $a \in \mathbb{R}$, sehingga akan memenuhi sifat-sifat pada bilangan real.

   (a) Asumsikan $a \neq 0$. Maka didapat

   $$0 < a < \varepsilon$$
   $$a < \varepsilon\ ,\ a > 0$$

   Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dipilih $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}a$ sehingga

   $$a < \varepsilon_0\ ,\ a > 0$$
   $$a < \frac{1}{2}a\ ,\ a > 0 \quad \text{(Kontradiksi)}$$

   Akibatnya asumsi $a \neq 0$ salah. Jadi haruslah $a = 0$.

   (b) Akan dibagi menjadi 2 kasus:

   (i) untuk $a > 0$, maka $a \in \mathbb{P}$ dan jelas bahwa $a \cdot a = a^2 \in \mathbb{P}$ (sifat keterurutan)

   (ii) untuk $a < 0$, maka $-a \in \mathbb{P}$ sehingga $(-a) \cdot (-a) \in \mathbb{P}$. Secara Pembuktian sifat aljabar di $\mathbb{R}$, didapatkan $(-a) \cdot (-a) = a^2 \in \mathbb{P}$.

   Jadi untuk $a \neq 0$ berlaku $a^2 > 0$.

2. S terbatas diatas berakibat S mempunyai supremum, yaitu $\sup(S)$. Dengan sifat supremum maka $s \leq \sup(S)$, untuk setiap $s \in S$. Akibatnya dapat diperoleh $-\sup(S) \leq -s,\ \forall s \in S\,(1)$

   Perhatikan bahwa dari (1) dapat disimpulkan $-\sup(S)$ merupakan batas bawah dari $\{-s : s \in S\}$ yang berakibat himpunan tersebut memiliki infimum, yaitu $\inf\{-s : s \in S\}$. Dengan memanfaatkan sifat infimum didapatkan $-\sup(S) \leq \inf\{-s : s \in S\}$ atau dapat ditulis sebagai $\sup(S) \geq -\inf\{-s : s \in S\}$ . . . . (2)

   Ingat kembali bahwa $\inf\{-s : s \in S\} \leq -s, \forall s \in S$ atau $s \leq -\inf\{-s : s \in S\}, \forall s \in S$. Didapatkan fakta bahwa $\inf\{-s : s \in S\}$ merupakan batas atas dari S. Akibatnya diperoleh $\sup(S) \leq -\inf\{-s : s \in S\}$ . . . . (3)

   $\therefore$ Dari (2) dan (3) dapat disimpulkan $\sup(S) = -\inf\{-s : s \in S\}$

3. Dengan menggunakan sifat infimum, dari (i) diperoleh $\inf(B) < v + \frac{1}{n}$ dan dari (ii) diperoleh $v - \frac{1}{n} \leq \inf(B)$. Sehingga didapatkan pertidaksamaan

   $$v - \frac{1}{n} \leq \inf(B) < v + \frac{1}{n}$$
   $$-\frac{1}{n} \leq \inf(B) - v < \frac{1}{n}$$
   $$0 \leq |\inf(B) - v| < \frac{1}{n}$$

   Dengan sifat archimedes, didapatkan fakta bahwa $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Dengan demikian didapatkan

   $$0 \leq |\inf(B) - v| < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$$
   $$0 \leq |\inf(B) - v| < \varepsilon$$

—–o0o—–

Dengan menggunakan teorema pada soal 1.(a) dapat disimpulkan bahwa $\inf(B) - v = 0$ atau $\inf(B) = v$. **(Terbukti)**

4. Menggunakan definisi $\lim(\frac{1}{3^n}) = 0$ didapatkan untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga $\forall n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|\frac{1}{3^n} - 0| < \varepsilon \Rightarrow |\frac{1}{3^n}| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{3^n} < \varepsilon$.

   Perhatikan bahwa dengan induksi matematika, dapat dibuktikan bahwa $3^n > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ atau ekuivalen dengan $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{n}$. Dilanjutkan dengan sifat archimedes didapatkan $\frac{1}{3^{n_\varepsilon}} < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{3^{n_\varepsilon}} < \varepsilon$.

   Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\lim(\frac{1}{3^n}) = 0$ terbukti.

5. Perhatikan bahwa $0 \leq |x_n - y_n| < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$. Dengan menggunakan teorema yang sudah dibuktikan pada soal 1.(a) didapatkan $x_n - y_n = 0$ atau $x_n = y_n$. Hal ini berakibat barisan (x_n) dan barisan (y_n) adalah barisan yang sama, sehingga karena (x_n) barisan konvergen maka (y_n) haruslah barisan yang konvergen juga.

—o0o—