Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Review Materi

1 Nilai Eigen dan Vektor Eigen

Definisi 1. *Misalkan A matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan real.*

1. *Skalar $\lambda \in \mathbb{R}$ disebut* ***nilai eigen*** *matriks A jika terdapat vektor tak nol $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi*

$$\boxed{A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}.}$$

2. *Selanjutnya, jika λ merupakan nilai eigen matriks A, maka vektor tak nol $x \in \mathbb{R}^n$ yang memenuhi*

$$\boxed{A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}}$$

disebut ***vektor eigen*** *matriks A yang berkorespondensi dengan nilai eigen λ.*

Dari Definisi 1, dapat disimpulkan beberapa hal berikut.

- Syarat agar skalar λ merupakan nilai eigen matriks A adalah terdapat vektor tak nol $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ yang memenuhi $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$.
- Skalar λ merupakan nilai eigen matriks A jika ada vektor tak nol $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ yang memenuhi $A\mathbf{x} = \lambda I_{n\times n}\mathbf{x}$.
- Skalar λ merupakan nilai eigen matriks A jika ada vektor tak nol $\mathbf{x}$ di $\mathbb{R}^n$ yang memenuhi $(A - \lambda I_{n\times n})\mathbf{x} = 0$.

Hal ini bermakna bahwa syarat perlu dan cukup agar λ merupakan nilai eigen matriks A adalah Sistem Persamaan Linear Homogen pada persamaan terakhir di atas **mempunyai solusi Non Trivial**. Dari fakta tersebut diperoleh sifat berikut ini.

Sifat 2. *Skalar λ merupakan nilai eigen dari matriks A jika dan hanya jika*

$$\boxed{\det(A - \lambda I_{n\times n}) = 0.}$$

Mengingat $\det(A - \lambda I_{n\times n})$ merupakan polinomial berderajat n maka dapat disimpulkan bahwa λ merupakan nilai eigen matriks A jika dan hanya jika λ merupakan akar dari persamaan $\det(A - \lambda I_{n\times n}) = 0$. Selanjutnya polinomial $\det(A - \lambda I_{n\times n})$ disebut **polinomial karakteristik** matriks A dan dituliskan dengan notasi $c_A(\lambda)$.

Selanjutnya, jika λ merupakan nilai eigen dari matriks A, maka dapat dihimpun semua vektor eigen dari matriks A yang berkorespondensi dengan nilai eigen λ. Himpunan tersebut digabung dengan vektor nol, dinotasikan dengan

$$\boxed{E(\lambda) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}\}}$$

Dengan kata lain, $E(\lambda)$ adalah himpunan semua solusi sistem persamaan linear homogen $(A - \lambda I_{n\times n})\mathbf{x} = 0$ (dengan menggunakan syarat perlu dan cukup suatu subruang, dapat ditunjukan bahwa $E(\lambda)$ merupakan subruang dalam $\mathbb{R}^n$). Lebih lanjut, $E(\lambda)$ disebut **ruang eigen** matriks A yang berkorespondensi dengan dengan λ.

Contoh 3. *Tentukan nilai eigen dan vektor eigen dari matriks* $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

Penyelesaian:
Untuk menghitung nilai eigen dari matriks A dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

(1) Hitung polinomial karakteristik dari matriks A, yakni

$$\begin{aligned} c_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_{n \times n}) \\ &= \left| \left(\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) \right| \\ &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda)(2-\lambda) - 30 = \lambda^2 - 3\lambda - 28 \end{aligned}$$

(2) Hitung akar-akar dari polinomial karakteristik matriks A, yakni λ yang memenuhi $c_A(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda - 28 = (\lambda + 4)(\lambda - 7) = 0$. Diperoleh nilai karakteristik (nilai eigen) dari A yakni $\lambda_1 = -4$ dan $\lambda_2 = 7$.

Selanjutnya, untuk masing-masing nilai eigen akan dihitung vektor-vektor eigennya sebagai berikut:

(a) Untuk $\lambda_1 = -4$, akan diperoleh

$$\begin{aligned} E(\lambda_1) &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -4 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 6x_2 = -4x_1 \text{ dan } 5x_1 + 2x_2 = -4x_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1 + 6x_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1 = -6x_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = 6t, x_2 = -5t, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 6t \\ -5t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Jadi vektor $\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ merupakan salah satu vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_1 = -4$.

(b) Untuk $\lambda_2 = 7$, akan diperoleh

$$\begin{aligned} E(\lambda_2) &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 + 6x_2 = 7x_1 \text{ dan } 5x_1 + 2x_2 = 7x_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + x_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = t, x_2 = t, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Jadi vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ merupakan salah satu vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_2 = 7$.

Selanjutnya, berdasarkan Definisi 1 dan sifat determinan matriks diperoleh sifat berikut ini.

Sifat 4. *Diberikan matriks A berukutan $n \times n$. Nilai eigen dari matriks A identik dengan nilai eigen dari A^T (polinomial karakteristiknya identik)..*

Sifat 5. *Diberikan matriks A dan B masing-masing berukutan $n \times n$. Jika A dan B similar, maka nilai eigen dari matriks A identik dengan nilai eigen dari matriks B (polinomial karakteristiknya identik).*

Sifat 6. *Diberikan matriks $A = [a_{ij}]$ berukutan $n \times n$. Jika polinomial karakteristik dari A adalah*

$$C_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0)$$

maka

(a) $c_0 = (-1)^n \det(A)$

(b) $c_{n-1} = -Tr(A)$

Definisi 7. *Misalkan $p(X) = c_kX^k + c_{k-1}X^{k-1} + \cdots + c_1X + c_0$ merupakan polinomial berderajat k dengan* indeterminate *X dan koefisien-koefisien bilangan real.*

(a) Untuk sebarang matriks A berukuran $n \times n$, didefinisikan

$$p(A) = c_kA^k + c_{k-1}X^{k-1} + \cdots + c_1X + c_0I_n$$

dengan I_n merupakan matriks identitas berukuran $n \times n$.

(b) ***Polinomial minimal*** *dari matriks A, dinotasikan dengan $\mu_A(X)$, merupakan polinomial monik dengan derajat terkecil sedemikian sehingga $\mu_A(A) = 0_n$.*

Teorema 8 (Teorema Cayley-Hamilton)**.** *Diberikan matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$. Jika polinomial karakteristik dari A adalah*

$$C_A(\lambda) = (-1)^n(\lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0)$$

maka $C_A(A) = (-1)^n(A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0I) = 0$

Akibat 9. *Polinomial minimal dari matriks A habis membagi polynomial karakteristik dari matriks A.*

Teorema 10. *Diberikan matriks $A = [a_{ij}]$ berukuran $n \times n$. Bilangan $\lambda \in \mathbb{R}$ merupakan nilai eigen dari A jika dan hanya jika λ merupakan akar dari polinomial minimal dari A. Lebih lanjut, polinomial karakteristik dari A dan polinomial minimal dari A mempunyai akar yang sama.*

Bukti.
Misalkan $\mu_A(X)$ merupakan polinomial minimal dari A dan $\lambda \in \mathbb{R}$ merupakan nilai eigen dari A. Karena λ merupakan nilai eigen, maka terdapat vektor tak nol $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ sehingga $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$. Diperhatikan bahwa

$$\mu_A(\lambda)\mathbf{v} = \mu_A(A)\mathbf{v} = 0_n\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Mengingat $\mathbf{v}$ bukan vektor nol, diperoleh $\mu_A(\lambda) = 0$. Dengan kata lain terbukti bahwa λ merupakan akar dari polinomial karakteristik A.
Sebaliknya, misalkan $\lambda \in \mathbb{R}$ merupakan akar dari polinomial karakteristik dari A, yakni $\mu_A(\lambda) = 0$. Berdasarkan sifat faktorisasi, diperoleh bahwa $\mu_A(X) = (X - \lambda)q(X)$ untuk suatu polinomial $q(X)$ dengan $\deg(q(X)) = \deg(\mu_A(X)) - 1$. Jika λ bukan merupakan nilai eigen dari A, maka matriks $A - \lambda I_n$ invertible. Dengan demikian, $\mu_A(A) = 0_n$ jika dan hanya jika $q(A) = 0_n$. Kontradiksi dengan $\mu_A(X)$ yang merupakan polinomial karakteristik. Jadi haruslah λ merupakan nilai eigen dari matriks A. ■

2 Diagonalisasi

Definisi 11. *Matriks persegi A berukuran $n \times n$ dikatakan dapat **didiagonalkan** jika terdapat matriks invertible P sehingga $P^{-1}AP$ merupakan matriks diagonal. Lebih lanjut, matriks P disebut **mendiagonalisasi** matriks A.*

Berikut ini diberikan teorema terkait dengan diagonalisisi matriks.

Teorema 12. *Suatu matriks A berukuran $n \times n$ dapat **didiagonalkan** jika dan hanya jika A memiliki n vektor eigen yang bebas linear.*

Bukti.
($\Leftarrow$) Diketahui A memiliki n vektor eigen yang bebas linear, misalkan n vektor eigen tersebut adalah $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Selanjutnya dibentuk matriks P yang kolom-kolomnya adalah $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ berturut-turut merupakan nilai eigen dari A yang berkorespondensi dengan vektor eigen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_n$. Dibentuk matriks diagonal D dengan entri-entri diagonal utamanya adalah $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$. Selanjutnya diperhatikan

$$AP = A\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & \cdots & A\mathbf{v}_n\end{bmatrix}$$

Selanjutnya diperhatikan matriks diagonal

$$D = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}$$

Perkalian matriks P dengan matriks D

$$\begin{aligned}PD &= \begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \cdots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\lambda_1\mathbf{v}_1 & \lambda_2\mathbf{v}_2 & \cdots & \lambda_n\mathbf{v}_n\end{bmatrix} = AP\end{aligned}$$

Karena terpenuhi $PD = AP \iff P^{-1}AP = D$ maka disimpulkan matriks $P^{-1}AP$ merupakan matriks diagonal atau A dapat didiagonalkan. ($\Rightarrow$) Diketahui matriks A dapat didiagonalkan. Berarti terdapat matriks invertible P sedemikian sehingga $P^{-1}AP$ adalah matriks diagonal, misalkan $P^{-1}AP = D$. Selanjutnya, nyatakan matriks P dalam vektor-vektor kolom, yakni $P = \begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{bmatrix}$ sehingga diperoleh

$$AP = A\begin{bmatrix}p_1 & p_2 & \cdots & p_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}Ap_1 & Ap_2 & \cdots & Ap_n\end{bmatrix}$$

Di lain pihak,

$$PD = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda_1 p_1 & \lambda_2 p_2 & \cdots & \lambda_n p_n \end{bmatrix}$$

Karena diketahui $P^{-1}AP = D \iff AP = PD$ maka diperoleh

$$\begin{bmatrix} Ap_1 & Ap_2 & \cdots & Ap_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 p_1 & \lambda_2 p_2 & \cdots & \lambda_n p_n \end{bmatrix}$$

Karena P merupakan matriks invertibel, maka diperoleh bahwa vektor-vektor kolom dari P, yakni $p_1, p_2, \cdots, p_n$ bebas linear. Lebih lanjut, karena vektor-vektor kolom tersebut bebas linear, maka vektor-vektor kolom tersebut tidak ada yang merupakan vektor nol sehingga p_i merupakan vektor eigen dari A yang berkorespondensi dengan nilai eigen λ_i untuk setiap $i = 1, 2, \cdots n$. ■

Akibat 13. *Suatu matriks A berukuran $n \times n$ dapat* ***didiagonalkan*** *jika dan hanya jika terdapat basis di $\mathbb{R}^n$ yang terdiri dari vektor-vektor eigen dari A.*

Contoh 14. *Selidiki apakah matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ dapat didiaginolkan atau tidak. Jika ya, tentukan matriks invertible P dan hitung $P^{-1}AP$.*

Penyelesaian:

1. **Ditentukan nilai eigen dari matriks A**
   Polinomial karakteristik dari A, adalah

$$C_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 6 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(2-\lambda) - 30 = \lambda^2 - 3\lambda - 28$$
$$= (\lambda + 4)(\lambda - 7)$$

   Sehingga diperoleh nilai eigen dari A yakni $\lambda_1 = -4$ dan $\lambda_2 = 7$.

2. **Ditentukan vektor-vektor eigen dari matriks A.**
   Vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_1 = -4$, yakni vektor $\mathbf{x}$ yang merupakan penyelesaian SPLH $(A + 4I)\mathbf{x} = 0$.

$$E(\lambda_1) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid 5x_1 + 6x_2 = 0 \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = -5t, x_1 = 6t, t \in \mathbb{R} \right\}$$
$$= \left\{ \begin{bmatrix} 6t \\ -5t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ t \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\}$$

Jadi vektor $\begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_1 = -4$.

Vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_2 = 7$, yakni vektor $\mathbf{x}$ yang merupakan penyelesaian SPLH $(A - 7I)\mathbf{x} = 0$.

$$\begin{aligned} E(\lambda_2) &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{bmatrix} -6 & 6 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid -x_1 + x_2 = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = t, x_1 = t, t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Jadi vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ merupakan vektor eigen yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_2 = 7$.

3. Selanjutnya, dapat dicek bahwa $\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ bebas linear (**bukti sebagai latihan**). Berdarsarkan SPC untuk diagonalisasi matriks, diperoleh **matriks A dapat didiagonalkan** dan terdapat matriks $P = \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$ sedemikian sehingga

$$P^{-1}AP = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Teorema 15. *Diberikan matriks persegi A berukuran $n \times n$ dan bilangan bulat bulat positif k dengan $k \leq n$. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ merupakan nilai-nilai eigen berbeda dari A. Jika $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k$ berturut-turut merupakan vektor-vektor eigen dari matriks A yang berkorespondensi dengan nilai eigen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$, maka $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ merupakan himpunan bebas linear.*

Bukti.
Akan dibuktikan dengan bukti tidak langsung (*reductio adabsurdum*). Andaikan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ merupakan himpunan bergantung linear. Misalkan vv_i merupakan vektor pertama yang dapat dinyatakan kedalam bentuk

$$\mathbf{v}_i = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} \tag{1}$$

dengan $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_{i-1}\}$ merupakan himpunan bebas linear dan $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ tidak semuanya bernilai 0.
Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_i &= A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{i-1} \mathbf{v}_{i-1}) \\ A\mathbf{v}_i &= \alpha_1 (A\mathbf{v}_1) + \alpha_2 (A\mathbf{v}_2) + \cdots + \alpha_{i-1} (A\mathbf{v}_{i-1}) \qquad (2) \\ \lambda_i \mathbf{v}_i &= \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{i-1} \lambda_{i-1} \mathbf{v}_{i-1} \end{aligned}$$

Berdasarkan Persamaan 1 dan Persamaan 2 diperoleh

$$\begin{aligned}\lambda_i\mathbf{v}_i &= \alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}\\ \lambda_i(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}) &= \alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{i-1}\lambda_{i-1}\mathbf{v}_{i-1}\\ \mathbf{0} &= \alpha_1(\lambda_1-\lambda_i)\mathbf{v}_1 + \alpha_2(\lambda_2-\lambda_i)\mathbf{v}_2 + \cdots + \alpha_{i-1}(\lambda_{i-1}-\lambda_i)\mathbf{v}_{i-1}\end{aligned}$$

Mengingat $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_{i-1}\}$ merupakan himpunan bebas linear maka diperoleh

$$\alpha_1(\lambda_1-\lambda_i) = \alpha_2(\lambda_2-\lambda_i) = \cdots = \alpha_{i-1}(\lambda_{i-1}-\lambda_i) = 0$$

Selanjutnya, berdasarkan asumsi tidak semua $\alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ bernilai nol, maka terdapat a_t tak nol (dengan $1 \leq t \leq i-1$) sehingga $a_t(\lambda_t - \lambda_i) = 0$. Diperoleh bahwa $\lambda_t = \lambda_i$. Kontradiksi dengan $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ berbeda. Dengan demikian, tidak ada vektor v_i yang dapat dinyatakan kedalam kombinasi linear vektor-vektor yang lain. Dengan demikian, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \cdots, \mathbf{v}_k\}$ himpunan bebas linear. ■

Dari Teorema 15 dan Teorema 12 diperoleh akibat berikut ini.

Akibat 16. *Diberikan matriks persegi A berukuran $n \times n$. Jika A mempunyai n nilai eigen yang berbeda, maka A dapat didiagonalkan.*

3 Tambahan

Definisi 17. *Vektor tak nol $\mathbf{v} \in V$ disebut vektor eigen transformasi linear $T : V \longrightarrow V$ jika memenuhi $T(v) = \alpha\mathbf{v}$ untuk skalar $\alpha \in F$. Selanjutnya α disebut nilai eigen transformasi linear T.*

Sifat 18. *Tranformasi linear T mempunyai nilai eigen $\alpha = 0$ jika dan hanya jika $Ker(T) \neq \{0_V\}$.*

Teorema 19. *Diberikan rung vektor V dengan $\dim(V) = n$ dan transformasi linear $T : V \longrightarrow V$. Jika A merupakan matriks standar dari T, maka nilai eigen dari T identik dengan nilai eigen dari A.*

Latihan Soal

1. Diberikan matriks A dan B masing-masing berukuran $n \times n$. Buktikan bahwa setiap nilai eigen dari AB merupakan nilai eigen dari BA.

2. (KN MIPA 2020 Wilayah) Misalkan A sebuah matriks ukuran 9×9 yang memenuhi sifat:

   (a) Semua komponen baris pertama matriks A berbeda. Komponen yang dimaksud adalah bilangan asli $\{n_1, n_2, \cdots, n_9\}$.

   (b) Komponen baris lainnya adalah suatu permutasi dari komponen pada baris pertama.

   Nilai eigen yang senantiasa dimiliki oleh matriks A dengan sifat tersebut adalah ...

3. (KN MIPA 2020 Wilayah) Misalkan

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Misalkan juga $\mathbf{b}$ sebuah vektor di $\mathbb{R}^3$ dan diketahui bahwa tiga vektor $\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, e_1 + e_2 + e_3$ merupakan solusi sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dengan A suatu matriks berukuran 3×3.

   (a) Buktikan bahwa kombinasi linear $a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$, dengan a_1, a_2, a_3 skalar, juga merupakan solusi sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ jika dan hanya jika $a_1 + a_3 = a_2$.

   (b) Jika

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

   tentukan semua nilai eigen real dari A.

4. (ON MIPA 2019 Wilayah) Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dan I adalah matriks identitas berukuran $n \times n$. Misalkan pula B adalah matriks berukuran $2n \times 2n$ dengan $B = \begin{bmatrix} A + I & A + 2I \\ 0 & A + 3I \end{bmatrix}$. Jika 2 adalah salah satu nilai eigen dari A, maka nilai-nilai eigen dari B yang dapat diketahui adalah ....

5. (ON MIPA 2018 Wilayah) Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ memenuhi $A^T A = AA^T = 4I$. Himpunan semua nilai eigen dari A adalah ....

6. (ON MIPA 2018 Wilayah) Misalkan $D : P_2 :\longrightarrow P_2$ dengan $D(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2 + a_1$, untuk semua $a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$. Nilai eigen pemetaan $D^2 + D + I$ mempunyai multiplisitas geometri ...

7. (ON MIPA 2018 Wilayah) Misalkan $x \in \mathbb{C}^n$ dengan $\|x\| = 1$. Tentukan semua nilai eigen matriks $A = \begin{bmatrix} 0 & x^* \\ x & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{(n+1)\times(n+1)}$ serta vektor-vektor eigennya.

8. (ON MIPA 2018 Nsional) Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dengan $k_1, k_2, \cdots, k_n \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor-vektor kolom dari A. Vektor-vektor kolom tersebut memenuhi hubungan

$$k_i = (i + 2)k_{i+2}$$

   dengan $i = 1, 2, \cdots, n - 2$
   Untuk $n > 3$, pilih satu nilai eigen dari A kemudian tentukan dimensi terkecil yang mungkin untuk ruang eigen dari nilai eigen yang dipilih.

9. (ON MIPA 2017 Wilayah) Matriks $\begin{bmatrix} w & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ memiliki dua nilai eigen yang sama jika dan hanya jika $w \in S$. Maka $S = \ldots$

10. (ON MIPA 2016 Wilayah) Diketahui $\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ untuk nilai eigen λ. Maka nilai eigen selain λ adalah ....

11. (ON MIPA 2015 Wilayah) Diketahui bahwa $u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ adalah vektor eigen matriks $\begin{bmatrix} a & a-1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Maka nilai eigen untuk u adalah ....

12. (ON MIPA 2015 Wilayah) Misalkan $A = M_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$ memenuhi $A^2 = I$.
    (a) Tunjukkan bahwa 1 dan -1 adalah semua nilai eigen A.
    (b) Jika $E(1)$ dan $E(-1)$ adalah ruang-ruang eigen A, buktikan bahwa $R^n = E(1) \oplus E(-1)$.

13. Misalkan $A = M_{n\times n}(\mathbb{R}^n)$ memenuhi $A^2 = 2I$. Apakah A dapat didiagonalkan ?

14. (ON MIPA 2014 Nasional) Dikaetahui $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dengan $\mathrm{rk}(A) = 1$. Buktikan bahwa A dapat didiagonalkan jika dan hanya jika $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

15. (ON MIPA 2013 Wilayah) Misalkan A adalah matriks berukuran 5×5 yang memenuhi $A^{2013} = 0$. Banyaknya nilai karakteristik (nilai eigen) yang berbeda adalah ....

16. (ON MIPA 2013 Wilayah) Jika vektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ adalah vektor karakteristik (vektor eigen) matriks $\begin{bmatrix} 3 & 2-a \\ a & -3 \end{bmatrix}$, maka nilai karakteristik yang bersesuaian adalah ...

17. Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$ yang semua entri-entrinya bernilai 1. Tentukan semua nilai eigen dari A.

18. Diberikan matriks A berukuran $n \times n$ dengan n eigen berbeda. Jika $AB = BA$ untuk suatu matriks B berukuran $n \times n$, buktikan bahwa B dapat didiagonalkan.

19. Diberikan matriks A berukuran $n \times n$ dengan n eigen berbeda. Buktikan bahwa terdapat matriks invertible X yang memenuhi $A^T X = XA$.