Barisan Fungsi

Hari, 00 Juni 2023

0.1 Barisan Fungsi

Definisi 1.1

Diketahui $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ barisan fungsi bernilai real pada $[a,b]$.

1. Barisan fungsi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dikatakan konvergen titik-demi-titik ke fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pada $[a,b]$ jika untuk setiap $x\in[a,b]$ dan $\epsilon>0$, terdapat bilangan asli n_0 dengan sifat untuk setiap bilangan asli $n\geq n_0$ berlaku $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$.

2. Barisan fungsi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dikatakan konvergen seragam ke fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pada $[a,b]$ jika untuk setiap $\epsilon>0$, terdapat bilangan asli n_0 dengan sifat untuk setiap bilangan asli $n\geq n_0$ dan $x\in[a,b]$ berlaku $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$.

Sifat 1.2

Beberapa sifat berkaitan dengan barisan fungsi diberikan sebagai berikut:

- Barisan fungsi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tidak konvergen seragam ke f pada $[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat $\epsilon_0>0$ sehingga terdapat subbarisan $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ dari $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dan barisan $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di dalam $[a,b]$ sehingga
$$|f_{n_k}(x_k)-f(x_k)|\geq\epsilon>0.$$

- Jika $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ merupakan barisan fungsi kontinu pada $[a,b]$ yang konvergen seragam ke f pada $[a,b]$, maka f kontinu pada $[a,b]$.

- Jika $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ merupakan barisan fungsi terdiferensial pada $[a,b]$ dengan $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen seragam ke suatu fungsu g pada $[a,b]$ dan terdapat $x_0\in[a,b]$ dengan $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen, maka $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen seragam ke fungsi f pada $[a,b]$ yang mempunyai turunan pada $[a,b]$ dan $f'(x)=g(x)$ untuk setiap $x\in[a,b]$.

- Jika $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ merupakan barisan terintegral Riemann pada $[a,b]$ dan konvergen seragam ke f pada $[a,b]$, maka f terintegral Riemann pada $[a,b]$ dan berlaku
$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

- (Pendekatan Stone-Weierstrass) Diberikan f fungsi kontinu pada $[a,b]$. Terdapat barisan polinomial $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ yang konvergen seragam ke f pada $[a,b]$

Problems :

1. Diberikan $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ barisan fungsi dengan $f_n(x)=\dfrac{1}{(1+x)^n}$ untuk $x\in[0,1]$. Tentukan limit titik demi titik dari barisan $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pada $[0,1]$. Apakah barisan fungsi tersebut konvergen seragam?

2. Diberikan f fungsi kontinu seragam pada $\mathbb{R}$ dan $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ barisan fungsi dengan $f_n(x)=f\left(x+\dfrac{1}{n}\right)$ untuk $x\in\mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen seragam ke f pada $\mathbb{R}$.

3. Diketahui barisan fungsi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen seragam ke fungsi f pada $[a,b]$. Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, fungsi f_n terbatas, tunjukkan bahwa fungsi f juga terbatas.

4. Diketahui barisan fungsi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dan f fungsi pada $\mathbb{R}$. Jika untuk setiap barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ yang konvergen ke x berlaku $f_n(x_n)$ konvergen ke $f(x)$. Tunjukkan bahwa f kontinu pada $\mathbb{R}$.

5. (ONMIPA 2011) Beri contoh suatu barisan dari fungsi-fungsi kontinu (f_n) yang terdefinisi pada $[0,1]$, sedemikian sehingga $0 \le f_n(x) \le 1$, dan $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$, tetapi barisan itu tidak konvergen pada $[0,1]$.

6. (ONMIPA 2014) Misalkan barisan fungsi (f_n) konvergen ke fungsi f pada selang $[a,b]$. Jika f_n' kontinu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ pada $[a,b]$ dan barisan (f_n') konvergen seragam ke fungsi g pada $[a,b]$, maka nilai $\int_a^x g(t)\, dx = \ldots.$

7. (ONMIPA 2015) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n x^n$, untuk setiap $-1 < x < 1$. Jika fungsi $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, dengan $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, pada $(-1,1)$, maka nilai $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\, dx = \ldots.$

8. (ONMIPA 2016) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, untuk setiap $x \in [0,1]$, dan $a_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$. Jika $s_n = \sin(\pi a_n)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \ldots.$

9. Diketahui $b > a > 0$. Tentukan nilai dari
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b e^{-nx^2} dx.$$

10. Diberikan f fungsi kontinu pada $[0,1]$. Tentukan nilai dari
$$\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx.$$

11. (ONMIPA 2006) Diberikan barisan fungsi real (f_n), $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$, dengan
$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \quad n = 1,2,3,\ldots.$$
   (a) Buktikan (f_n) tidak konvergen seragam pada $[0,2]$.
   (b) Tentukan $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in [0,2]$.

12. (ONMIPA 2008) Diketahui fungsi $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1,2,3,\ldots$. Untuk sebarang barisan (x_n) konvergen ke x berakibat $(f_n(x_n))$ konvergen ke $f(x)$. Tunjukkan bahwa f kontinu.

13. (ONMIPA 2012) Diketahui fungsi $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ kontinu, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dan $f_1 \ge f_2 \ge f_3 \ge \cdots$. Jika $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$, buktikan bahwa barisan (f_n) konvergen seragam ke fungsi nol pada $[0,1]$.

14. (ONMIPA 2016) Diketahui fungsi f kontinu pada $[0,1]$. Didefinisikan $f_0 = f$ pada $[0,1]$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,
$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt, \qquad \text{untuk setiap } x \in [0,1].$$
Buktikan bahwa barisan fungsi f_n konvergen seragam pada $[0,1]$ ke fungsi nol.

15. (ONMIPA 2018) Buktikan pernyataan berikut. Jika untuk setiap n, f_n merupakan fungsi naik dan (f_n) konvergen seragam ke f pada $[a,b]$, maka
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx.$$