

## Persiapan Seleksi Nasional

1. Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  dan  $T \in \mathcal{L}(V)$  dengan  $T^2 = I$ . Jika  $-1$  bukan merupakan nilai eigen dari  $T$ , buktikan bahwa  $T = I$ .
2. Diberikan ruang hasil kali dalam atas lapangan  $\mathbb{C}$  dengan hasil kali dalam  $\langle -, - \rangle$ . Diketahui  $T \in \mathcal{L}(V)$  yang memenuhi

$$\langle T(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle$$

untuk setiap  $u, v \in V$ .

- (a) Buktikan bahwa nilai eigen dari  $T$  merupakan bilangan real.
  - (b) Buktikan bahwa setiap dua vektor eigen yang berkorespondensi dengan dua nilai eigen berbeda saling ortogonal.
3. Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  dan diketahui  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  merupakan himpunan bebas linear di  $V$ . Misalkan  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$  dan  $u = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$ . Buktikan bahwa  $\{u_i \mid u_i = u + b_i \text{ untuk setiap } i = 1, 2, \dots, n\}$  himpunan tidak bebas linear jika dan hanya jika  $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -1$ .
  4. Diketahui  $U, V, W$  merupakan tiga ruang vektor atas lapangan yang sama. Misalkan  $f \in \mathcal{L}(U, V)$  dan  $g \in \mathcal{L}(V, W)$ . Buktikan bahwa

$$\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g) \iff \ker(g) + \text{Im}(f) = V$$

5. Diberikan matriks  $A$  dan  $B$  berukuran  $n \times n$ . Matriks  $A$  dan  $B$  dikatakan *simultaneously diagonalizable* jika terdapat matriks invertible  $P$  sehingga  $P^{-1}AP$  dan  $P^{-1}BP$  keduanya merupakan matriks diagonal.
  - (a) Jika  $A$  dan  $B$  *simultaneously diagonalizable*, buktikan bahwa  $AB = BA$ .
  - (b) Jika  $AB = BA$  dan  $A$  mempunyai  $n$  nilai eigen yang berbeda, buktikan bahwa  $A$  dan  $B$  *simultaneously diagonalizable*.
6. Diberikan ruang vektor berdimensi hingga  $V$  atas lapangan  $F$ . Jika  $S, T \in \mathcal{L}$ , buktikan bahwa  $ST$  dan  $TS$  mempunyai nilai eigen yang sama.