2

Deret, Limit dan Fungsi Kontinu

Pada subbab ini akan didiskusikan terkait Deret, Limit fungsi serta Kekontinuan fungsi. Deret yang sering dipakai adalah deret Taylor sebagai aproksimasi fungsi terdiferensial.

2.1 Deret

Konsep deret sendiri merupakan jumlahan suku-suku pada suatu barisan. Sebaliknya pada suatu deret, penjumlahan n suku pertama (jumlahan parsial) dapat dipandang sebagai barisan. Kekonvergenan deret (jumlahannya ada) akan ditentukan dari kekonvergenan barisan jumlahan parsialnya. Pertama-tama akan diberikan definisi deret yang diperoleh dari suatu barisan.

Definisi Deret

Diberikan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan bilangan real. Barisan $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_n$$

disebut **deret** yang dibangun oleh barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ditulis $\sum x_n$ $\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right)$.

Deret $\sum x_n$ dikatakan **konvergen** jika limit barisan $\{S_n\}$ ada, jika tidak, deret $\sum x_n$ dikatakan **divergen**. Deret yang divergen tidak selalu mempunyai nilai tak hingga atau minus tak hingga, namun juga dapat terjadi suatu deret tidak memiliki nilai karena barisan jumlahan parsialnya memiliki dua subbarisan yang konvergen ke dua nilai yang berbeda, contohnya deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$.

Berikut ini beberapa sifat dasar terkait deret. Berikut ini diberikan beberapa uji kekonvergenan deret.

Sifat Dasar Deret

- Jika deret $\sum x_n$ konvergen, maka $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
- Jika deret $\sum |x_n|$ konvergen, maka $\sum x_n$ konvergen.
- Jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan real positif, maka $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ terbatas.

Perhatikan bahwa terdapat beberapa deret yang kekonvergenannya diketahui secara pasti.

Contoh 3. Tentukan nilai dari $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa kita dapat mempartisi jumlahan tersebut kedalam kelompok-kelompok sebagai berikut. Untuk $2^{p-1} + 1 \leq n \leq 2^p$ diperoleh

$$\sum_{n=2^{p-1}+1}^{2^p} \frac{1}{n} \geq \sum_{n=2^{p-1}+1}^{2^p} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{2}.$$

Akibatnya,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{n=2^{p-1}+1}^{2^p} \frac{1}{2^n} \geq 1 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{2} = +\infty.$$

Jadi deret diatas (dikenal dengan sebutan deret Harmonik) divergen. Selanjutnya, terdapat fakta lebih umum dari hasil ini.

Sifat Deret Pangkat

Diberikan bilangan positif p.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{konvergen}, & p > 1 \\ \text{divergen}, & p \leq 1 \end{cases}$$

Selain deret diatas, terdapat juga deret ayun (alternating series) dengan bentuk umum $\sum (-1)^n a_n$ dimana $a_n \geq 0$. Salah satu deret ayun yang konvergen adalah $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Salah satu tes kekonvergenan deret ayun adalah menentukan apakah deret mutlaknya $\sum |(-1)^n a_n|$ konvergen atau tidak. Jika deret mutlaknya konvergen maka deret ayunnya konvergen, namun tidak berlaku sebaliknya secara umum.

Uji Kekonvergenan Deret

Pertama kita punya **tes banding**. Diberikan barisan real $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan sifat

$$0 \leq x_n \leq y_n$$

untuk setiap $n \geq K$ untuk suatu $K \in \mathbb{N}$.

(a) Jika deret $\sum y_n$ konvergen, maka deret $\sum x_n$ konvergen.

(b) Jika deret $\sum x_n$ divergen, maka deret $\sum y_n$ divergen.

Kedua kita punya **Tes Limit Banding**. Diberikan barisan real $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang naik monoton tegas dan terdapat $r \in \mathbb{R}$ dengan

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

(a) Jika $r \neq 0$, maka deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika deret $\sum y_n$ konvergen.

(b) Jika $r = 0$ dan deret $\sum y_n$ konvergen, maka deret $\sum x_n$ konvergen.

Terakhir kita punya **Uji rasio dan uji akar**. Diberikan barisan real $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

(a) Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, maka deret $\sum x_n$ konvergen.

(b) Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$, maka deret $\sum x_n$ divergen.

(c) Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, maka deret $\sum x_n$ konvergen.

(d) Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, maka deret $\sum x_n$ divergen.

Silakan kerjakan latihan di bawah ini untuk memahami lebih dalam terkait sifat-sifat deret. Selain dengan uji kekonvergenan diatas, masih ada beberapa teknik tidak dibahas pada materi ini. Teknik-teknik lainya dapat dilihat melalui literatur yang telah disarankan.

LATIHAN: Deret

1. Jika $\sum x_n$ dan $\sum y_n$ konvergen, apakah $\sum(x_n + y_n)$ konvergen?
2. Tunjukkan bahwa jika $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = k$ dengan $k \neq 0$, maka $\sum x_n$ divergen. Apa yang terjadi jika $k = 0$? konvergen atau divergen?
3. Jika $\sum x_n$ merupakan deret ayun, tunjukkan bahwa deret $\sum x_n$ konvergen jika $|x_{n+1}| \leq |x_n|$ untuk setiap n dan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
4. Tunjukkan bahwa deret $\sum \cos n$ divergen.
5. Tunjukkan bahwa deret $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ konvergen.
6. Jika $\sum x_n$ konvergen dengan $x_n > 0$, apakah
   (a) $\sum x_n^2$ konvergen?
   (b) $\sum \sqrt{x_n}$ konvergen?
   (c) $\sum \sqrt{x_n x_{n+1}}$ konvergen?

7. Tentukan nilai dari
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
8. Jika $\sum a_n$ konvergen dengan $a_n > 0$, maka tunjukkan bahwa
$$\sum \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$
divergen.
9. Misalkan $\{a_n\}$ adalah barisan bilangan-bilangan real positif dan misalkan $b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Misalkan $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$. Jika $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan real yang konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = x$$
.

2.2 Limit dan Fungsi Kontinu

Seperti halnya pada barisan, suatu fungsi pada titik tertentu juga mempunyai limit. Berikut diberikan definisi limit pada suatu fungsi di titik tertentu.

Definisi Limit Fungsi

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, c titik limit A dan $f : A \to \mathbb{R}$ fungsi. Bilangan L disebut **limit** dari f di c, ditulis
$$\lim_{x\to c} f(x) = L,$$
jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \epsilon$.

Perhatikan bahwa nilai fungsi di titik c pada definisi diatas tidak harus terdefinisi. Jika terdefinisi, nilainya belum tentu sama dengan L. Ketika nilai $f(c) = L$ maka munculah konsep fungsi kontinu seperti di bawah ini.

Definisi Kekontinuan Fungsi

Diberikan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$. Fungsi f **kontinu** di titik $c \in A$ jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in A$ dengan $|x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - f(c)| < \epsilon$. Lebih lanjut ditulis $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$.

Selanjutnya, fungsi f dikatakan kontinu di A jika f kontinu disetiap titik $x \in A$. Jika fungsi f kontinu pada $\mathbb{R}$, cukup disebutkan f fungsi kontinu. Selain konsep kekontinuan, juga terdapat konsep kontinu seragam di bawah ini.

Definisi Kontinu Seragam

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$. Fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dikatakan **kontinu seragam** pada A, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x, y \in A$ dengan $|x - y| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Perbedaan konsep kontinu dan kontinu seragam terletak pada eksistensi bilangan δ. Pada konsep kontinu, bilangan δ dapat bergantung pada nilai ϵ dan nilai x, sedangkan pada konsep kontinu seragam, nilai δ hanya dapat bergantung pada ϵ sehingga setiap fungsi yang kontinu seragam maka fungsi tersebut pasti kontinu, namun belum berlaku sebaliknya secara umum. Berikut ini beberapa sifat terkait limit fungsi dan fungsi kontinu.

Sifat Limit Fungsi dan Fungsi Kontinu

- $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika untuk setiap barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di A yang konvergen ke c berakibat $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke L.
- f kontinu di c jika dan hanya jika untuk setiap barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di A yang konvergen ke c berakibat $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $f(c)$.
- f tidak kontinu seragam pada $[a, b]$ jika dan hanya jika terdapat $\epsilon_0 > 0$ dan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ di A dengan $\lim\limits_{n \to \infty} x_n - y_n = 0$ tetapi $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon_0$.
- Diketahui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi. Jika f kontinu, maka
  1. f terbatas pada $[a, b]$.
  2. nilai maksimal dan minimal dari f tercapai pada $[a, b]$.
  3. f kontinu seragam pada $[a, b]$.
  4. peta dari f pada $[a, b]$ merupakan interval.
- (**Teorema Nilai Antara**) Diketahui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu. Jika $k \in \mathbb{R}$ dan $x, y \in [a, b]$ memenuhi $f(x) < k < f(y)$, maka terdapat c diantara x dan y sehingga $f(c) = k$.
- Jika $I \subseteq \mathbb{R}$ tertutup dan terbatas serta $f : I \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada I, maka f kontinu seragam pada I.

Sifat terakhir diatas merupakan salah satu syarat suatu fungsi kontinu bersifat kontinu seragam. Namun tak berlaku sebaliknya.

Contoh 4. Tentukan nilai limit dari $\lim\limits_{x \to 0} x \cos \dfrac{1}{x}$ ada atau tidak.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa kita dapat menggunakan Teorema Apit (Squeeze Theorem) pada barisan. Jelas bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R},\ x \neq 0$ berlaku

$$-1 \leq \cos \frac{1}{x} \leq 1.$$

Akibatnya,

$$-|x| \leq x \cos \frac{1}{x} \leq |x|.$$

Dengan menarik limit $x \to 0$ diperoleh

$$0 \leq \lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} \leq 0$$

sehingga $\lim_{x \to 0} x \cos \frac{1}{x} = 0$.

Contoh 5. Diberikan fungsi $f : (-a, a) \backslash \{0\} \to (0, \infty)$ memenuhi

$$\lim_{x \to 0} \left(f(x) + \frac{1}{f(x)} \right) = 2.$$

Tunjukkan bahwa $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

Penyelesaian:

Karena fungsi f bernilai positif, jelas bahwa $f(x) + \frac{1}{f(x)} \geq 2$. Selanjutnya, berdasarkan asumsi awal, untuk sebarang $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga

$$0 \leq f(x) + \frac{1}{f(x)} - 2 < \epsilon \quad \text{untuk } 0 < |x| < \delta.$$

Bentuk diatas ekuivalen dengan bentuk berikut ini jika disusun ulang.

$$0 \leq (f(x) - 1) + \left(\frac{1}{f(x)} - 1 \right) < \epsilon \qquad (1)$$

dan

$$0 \leq (f(x) - 1) \left(\frac{1}{f(x)} - 1 \right) < \epsilon \qquad (2).$$

Dengan mengkuadratkan (1) dan menggunakan (2) diperoleh

$$(f(x) - 1)^2 + \left(\frac{1}{f(x)} - 1 \right)^2 < \epsilon^2 + 2\epsilon.$$

Akibatnya, $(f(x) - 1)^2 \leq \epsilon^2 + 2\epsilon$ dan saat $\epsilon \to 0$ diperoleh

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1.$$

Contoh 6. Tentukan himpunan semua titik sehingga f kontinu dengan

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{jika } x \text{ irasional,} \\ 0 & \text{jika } x \text{ rasional.} \end{cases}$$

Penyelesaian:

Ambil sebarang $c \in \mathbb{R}$ dimana f kontinu. Untuk sebarang barisan bilangan rasional $\{x_n\}$ yang konvergen ke c berlaku $\{f(x_n)\} \to f(c)$ yaitu

$$f(x_n) = 0 \to f(c)$$

sehingga $f(c) = 0$. Selanjutnya, diambil sebarang barisan irasional $\{y_n\}$ yang konvergen ke c. Akibatnya,

$$f(y_n) = y_n^2 - 1 \to c^2 - 1.$$

Karena f kontinu di c maka haruslah $0 = f(c) = c^2 - 1 \;\Leftrightarrow\; c = \pm 1$. Jadi f kontinu di $\{-1, 1\}$.

Contoh 7. Diketahui $f : [0,1] \to [0,1]$ adalah fungsi kontinu. Tunjukkan bahwa terdapat $c \in [0,1]$ sehingga $f(c) = c^{2020}$.

Penyelesaian:

Pertama-tama dibentuk fungsi $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = f(x) - x^{2020}$. Jelas bahwa g fungsi kontinu. Perhatikan bahwa

$$g(0) = f(0) \geq 0 \qquad \text{dan} \qquad g(1) = f(1) - 1 \leq 0.$$

Karena g kontinu dan

$$g(0) \geq 0 \geq g(1)$$

maka menurut Teorema Nilai Antara, terdapat $c \in [0,1]$ sehingga $g(c) = 0$. Dengan kata lain, terdapat c sehingga

$$f(c) = c^{2020}.$$

Contoh 8. Tunjukkan bahwa sebarang fungsi kontinu dan periodik pada $\mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu seragam.

Penyelesaian:

Diberikan fungsi f kontinu dan periodik. Misalkan periode f adalah $a > 0$ sehingga $f(x + a) = f(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Perhatikan bahwa pada interval $[0, a]$ fungsi f kontinu seragam. Diberikan $\epsilon > 0$. Terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $|c - d| < \delta$, $c, d \in [0, a]$ berlaku

$$|f(c) - f(d)| < \epsilon/2.$$

Selanjutnya, dipilih $\delta' = \delta$ dan sebarang $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $|x - y| < \delta$ dan $x > y$. Terdapat $x', y' \in [0, a]$ sehingga $f(x') = f(x)$ dan $f(y') = f(y)$. Ada dua kasus yang terjadi yaitu $|x' - y'| = |x - y|$ (jika $x' > y'$) dan $|(x' + a) - y'| = |x - y|$ (jika $x' < y'$). Untuk kasus pertama diperoleh

$$|f(x) - f(y)| = |f(x') - f(y')| < \epsilon/2.$$

Untuk kasus kedua diperoleh

$$|(x' + a) - a| + |a - y'| = |x - y| < \delta$$

dan

$$|f(x) - f(y)| = |f(x' + a) - f(y')| \leq |f(x' + a) - f(a)| + |f(a) - f(y')| < \epsilon.$$

Jadi f kontinu seragam.

LATIHAN: Limit Fungsi dan Fungsi Kontinu

1. Tunjukkan bahwa

$$\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$$

tidak ada.

2. Contoh fungsi f dan g yang kontinu seragam pada interval I, tetapi hasil kali keduanya tidak kontinu seragam pada I adalah ...
3. Tunjukkan bahwa
$$\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$
tidak ada.
4. Diketahui fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ kontinu. Jika $f(x)$ rasional untuk setiap $x \in [0,1]$ dan $f(0) = 0$, maka nilai $f\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right) = \ldots$
5. Jika $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0,$$
tunjukkan bahwa
$$\lim_{x\to 0} f(2015x) = 0,$$
6. Tunjukkan bahwa $f(x) = x^2$ pada $\mathbb{R}$ tidak kontinu seragam.
7. Contoh fungsi f yang memenuhi $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ adalah ...
8. Tunjukkan bahwa $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pada $\mathbb{R}^+$ tidak kontinu seragam.
9. Jika $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu yang bernilai konstan untuk setiap bilangan rasional, maka tunjukkan bahwa f fungsi konstan pada $\mathbb{R}$.
10. Diberikan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi dengan $f(x) = 3x$ jika $x \in \mathbb{Q}$ dan $f(x) = 2x+1$ jika $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Tentukan titik kontinuitas dari f.
11. Misalkan $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu sedemikian sehingga $(f(x))^2 = x^2$ untuk setiap $x \in (0,1)$. Banyaknya fungsi yang f yang mungkin adalah ...
12. Diberikan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu dan untuk setiap $x \in [a,b]$ dapat ditemukan $y \in [a,b]$ dengan sifat $3|f(y)| \leq |f(x)|$. Tunjukkan bahwa terdapat $c \in [a,b]$ dengan $f(c) = 0$.
13. Diberikan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu dengan $f(a) < 0 < f(b)$. Misalkan $W = \{x \in [a,b] : f(x) < 0\}$ dan $w = \sup W$. Tunjukkan bahwa $f(w) = 0$.
14. Tunjukkan bahwa jika $f \in C([a,b])$, maka $|f| \in C([a,b])$. Berikan contoh kalau arah sebaliknya tidak berlaku. $C([a,b])$ merupakan himpunan semua fungsi kontinu pada $[a,b]$.
15. Diketahui $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu. Jika $f(0) = f(1) = 0$, maka
    (a) tunjukkan bahwa terdapat $c \in [0, \frac{1}{2}]$ sehingga $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$.
    (b) apakah terdapat $c \in [0, \frac{2}{3}]$ sehingga $f(c + \frac{1}{3}) = f(c)$?
    (c) untuk sebarang bilangan asli $n \geq 4$, apakah terdapat $c \in [0, \frac{n-1}{n}]$ sehingga $f(c + \frac{1}{n}) = f(c)$?
16. Fungsi $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ dengan $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ dan $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 0$. Nilai $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = \ldots$

17. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu yang memenuhi

$$f\left(r + \frac{1}{n}\right) = f(r)$$

untuk sebarang bilangan rasional r dan bilangan positif n. Tunjukan bahwa f merupakan fungsi konstan.

18. Misalkan $\lim_{x\to 0} f(x) = 1, \lim_{x\to 0} g(x) = \infty, \lim_{x\to 0} g(x)(f(x) - 1) = c$. Nilai dari $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}$ adalah ...

19. Jika fungsi $f : [0,1] \to [0,1]$ memenuhi $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$, untuk setiap $x, y \in [0,1]$, buktikan bahwa $F = \{x \in [0,1] : f(x) = x\}$ merupakan singleton atau interval.

20. Diketahui $a \in \mathbb{R}$ dan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi $|xf(x) + a| < \sin^2(x - a)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Nilai $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ldots$