PERSIAPAN SELEKSI WILAYAH ONMIPA-PT 2023
UNIVERSITAS GADJAH MADA

ALJABAR LINEAR
22 MARET 2023

1. BAGIAN PERTAMA

1. Dikethui U dan W masing-masing merupakan subruang dari $\mathbb{R}^n$ dengan $\dim(U) = 2$. Jika berlaku $U \nsubseteq W$, $\dim(U \cap W)$ yang mungkin adalah ...

2. Diberikan ruang vektor V berdimensi hingga atas lapangan F. Diketahui bahwa untuk setiap subruang T, S, U dari V berlaku

$$T \cap (S + U) = T \cap S + T \cap U.$$

   Dimensi dari V yang mungkin adalah ...

3. Di rung vektor $\mathbb{R}^4$, subruang X dibangun oleh $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ dan subruang Y dibangun oleh $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$. Nilai $\dim(X + Y)$ adalah ....

4. Diketahui $U = \text{Span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \\ b \end{bmatrix} \right\}$. Jika $\dim(U) = 2$, maka nilai ab yang mungkin adalah ...

5. Misalkan $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} \mathbf{v} & \mathbf{v} \end{bmatrix}$ dan $K = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathbf{2}} \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{v}\}$. Nilai minimum dari $\|\mathbf{x}\|$ adalah ....

2. BAGIAN KEDUA

1. Diketahui $U = \text{Span}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ dan $V = \text{Span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ merupakan subruang-subruang dari $\mathbb{R}^5$ yang memenuhi $\dim(U \cap V) = 2$. Misalkan $W = \langle U, V \rangle$. Tentukan dimensi W yang mungkin. Jelaskan jawaban Saudara.

2. Diketahui V_1, V_2, V_3 masing masing merupakan subruang dari V yang memenuhi $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ merupakan subruang dari V.Apakah pasti terdapat $i \in \{1, 2, 3\}$ yang memenuhi $V_i \supseteq V_j$ untuk setiap $j \in \{1, 2, 3\}$. Jelaskan jawaban Saudara.

3. Misalkan juga $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ yang memenuhi $T(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{T}(\mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ untuk setiap $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^\mathbf{3}$. Apakah T merupakan transformasi linear? Jelaskan jawaban Saudara.

4. Misalkan
$$\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
Misalkan juga $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ sebuah vektor tak nol di $\mathbb{R}^3$ dan diketahui $\mathbf{e_1}, \mathbf{2e_1} + \mathbf{e_2}$ dan $\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3}$ merupakan solusi sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dengan A suatu matriks berukuran 3×3. Tentukan semua nilai eigen dari A.