

*Persiapan ONMIPA 2024 Tingkat Wilayah*  
**Analisis Kompleks**

oleh  
**Made Tantrawan**

**Departemen Matematika FMIPA UGM**

**20 April 2024**



# Latihan 1: 5 menit

*M = 1 menit*

## Contoh 1

Diberikan fungsi  $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}$  dengan  $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ . Tentukan semua nilai  $z$  sehingga  $f(z) = z$ .

Penyelesaian:

*$\pm i$*



## Latihan 2: 5 menit 2,5

### Contoh 2

Jika  $P$  merupakan suku banyak berderajat 2024 dengan koefisien real, maka penyelesaian  $P(z) = 0$  dengan  $\text{Im}(z) > 0$  paling banyak ada . . .

Penyelesaian: Jika  $z$  solusi  $P(z) = 0$ , maka  $\bar{z}$  juga solusi.  
(non real)

$P$  berderajat 2023, akar dg  $\text{Im}(z) > 0$  ada 1011



# Latihan 3: 5 menit 8.18 - 8.23

## Contoh 3

Tentukan semua  $z$  dengan  $|z| \leq 1$  yang memaksimalkan nilai  $|z + 20 + 24i|$ .

### Penyelesaian:

$$|z + 20 + 24i| \leq |z| + |20 + 24i| \leq 1 + |20 + 24i|$$

$z = \text{berapa} ??$

$$\begin{aligned} |a+b| &= |a|+|b| \\ b=0 \vee a &= cb \end{aligned}$$

$c \geq 0$

$$1. \quad z = k(20+24i) \text{ \& } |z|=1 \Rightarrow k = \frac{1}{|20+24i|}$$

$$z = \frac{5+6i}{\sqrt{61}}$$

$$2. \quad z \text{ yg meminimumkan } |z+20+24i| \geq |20+24i| - |z| \geq |20+24i| - 1$$



# Latihan 4: 10 menit

8.35 - 8.45,

(6 menit)

## Contoh 4

Diketahui fungsi analitik  $f$  pada cakram satuan  $\mathbb{D}$  dengan  $|f'(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{D}$ . Jika  $f'(0) = i, f(0) = 1$ , maka  $f(1+i) = \dots$

### Penyelesaian:

$f'$  analitik + terbatas  $\Rightarrow f'$  konstan ( $f'(z) = a$ )

Liouville.

$\Rightarrow f(z) = az + b.$

$$f(z) = 1 + iz$$



# Latihan 5: 10 menit 8:49 - 9.00

## Contoh 5

Hasil pemetaan lingkaran  $L : |z - 1| = 1$  oleh  $w = \frac{i}{z+2i}$  adalah ...

Penyelesaian:

$$\frac{a}{z+b} : z+b \rightarrow \frac{a}{z}$$

$$z = \frac{i}{w} - 2i$$

$$\left| \frac{i}{w} - 2i - 1 \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| 1 - \frac{(2i+1)w}{i} \right| = |w|$$

$$\Leftrightarrow |1 - (2-i)w| = |w|^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - (2-i)w)(1 - (2+i)\bar{w}) = |w|^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\operatorname{Re}((2-i)w) + 5|w|^2 = |w|^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\operatorname{Re}((2-i)w) + 4|w|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2(2x+y) + 4x^2 + 4y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4x + 4x^2 - 2y + 4y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)^2 + (\frac{1}{2}-2y)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16} //$$

$$\Leftrightarrow |w - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}i| = \frac{1}{4} //$$

$$w = x+iy$$



# Latihan 6: 10 menit : 9:15 - 9:25

$$D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}.$$

## Contoh 6

Diberikan fungsi  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  dengan  $f(z) = \frac{(1+i)z-1}{1+i-z}$  untuk setiap  $z \in D$  di mana  $D$  merupakan cakram satuan tertutup. Nilai maksimal dari  $|f(z)|$  adalah ...  $|z|=1$ .

### Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
 |f(z)|^2 &= \left| \frac{(1+i)z-1}{1+i-z} \right|^2 = \frac{((1+i)z-1)((-1-i)\bar{z}-1)}{(1+i-z)(1-i-\bar{z})} \\
 |z| &= \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \\
 1+i &= \sqrt{2} e^{i\pi/4} \\
 &= \frac{2|z|^2 - 2\operatorname{Re}((1+i)z) + 1}{2 - 2\operatorname{Re}((1-i)z) + |z|^2} = \frac{3 - 2\operatorname{Re}((1+i)z)}{3 - 2\operatorname{Re}((1-i)z)} \\
 &= \frac{3 - 2\sqrt{2}\cos(\theta + \pi/4)}{3 - 2\sqrt{2}\cos(\theta - \pi/4)} = \frac{3 + 2\sqrt{2}\sin t}{3 - 2\sqrt{2}\cos t} \geq \frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}} = 1
 \end{aligned}$$

$$h(t) = \frac{3 + 2\sqrt{2}\sin t}{3 - 2\sqrt{2}\cos t}$$

$$0 = h'(t) = 2\sqrt{2}\cos t (3 - 2\sqrt{2}\cos t) + 2\sqrt{2}\sin t (3 + 2\sqrt{2}\sin t)$$

$$= 6\sqrt{2}\cos t + 6\sqrt{2}\sin t + 8(\sin^2 t - \cos^2 t).$$

$$= 6\sqrt{2}(\cos t + \sin t) - 8(\sin t + \cos t)(\sin t - \cos t)$$

$$= \underbrace{(\cos t + \sin t)}_{=0} (\underbrace{6\sqrt{2} - 8(\sin t - \cos t)}_{=0}) \Rightarrow \sin t - \cos t = \frac{6\sqrt{2}}{8} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \sin(t - \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4}$$

$$|f(z)| = 1 \rightarrow \min$$

$$2\sqrt{2}\sin t = 2\sqrt{2}\cos t + 3$$



## Latihan 7: 10 menit

### Contoh 7

Cari semua fungsi utuh  $f$  yang memenuhi  $|f'(z)| < |f(z)|$  untuk setiap  $z \in \mathbb{C}$ .

**Penyelesaian:**



## Latihan 8: 15 menit

### Contoh 8

Diketahui  $f$  fungsi utuh. Jika  $\operatorname{Re}(f)$  terbatas, tunjukkan bahwa  $\operatorname{Im}(f)$  terbatas.

**Penyelesaian:**



## Latihan 9: 15 menit

### Contoh 9

Misalkan  $f$  fungsi utuh dan  $|f'(z)| \leq |z|$  untuk semua  $z$ . Perhatikan bahwa  $f(z) = a + bz^2$  dengan  $|b| \leq 1$ .

### Penyelesaian:



## Latihan 10: 15 menit

### Contoh 10

Diberikan fungsi analitik  $f$  dan  $g$  pada cakram tertutup satuan  $D$ . Tunjukkan bahwa nilai maksimum  $|f| + |g|$  tercapai ketika  $|z| = 1$ .

Penyelesaian: