

PERSIAPAN SELEKSI WILAYAH ONMIPA-PT 2023
UNIVERSITAS GADJAH MADA

ALJABAR LINEAR
12 April 2023

1. BAGIAN PERTAMA

1. Diketahui U dan W masing-masing merupakan subruang berbeda dari \mathbb{R}^n dengan $\dim(U) = \dim(W) = n - 1$. Nilai dari $\dim(U \cap W)$ adalah ...
2. Diketahui $U = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ Nilai dari $\dim(U)$ adalah ...
3. Diberikan matriks M berukuran $n \times n$ dengan

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Banyaknya nilai eigen tak nol dari M adalah ...

4. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. Contoh matriks $B \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ yang memenuhi $B^2 = A$ adalah

2. BAGIAN KEDUA

1. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F . Misalkan U, W_1 dan W_2 merupakan subruang dari V yang memenuhi

$$V = U \oplus W_1 = U \oplus W_2.$$

Selidiki apakah berlaku $\dim(V) - 2 \dim(U) \leq \dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(V) - \dim(U)$.
Jelaskan jawaban Saudara.

2. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan a, b, c dan d adalah bilangan-bilangan real positif. Buktikan bahwa A mempunyai paling tidak satu nilai eigen yang bernilai positif.

3. Misalkan

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Misalkan juga $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ sebuah vektor tak nol di \mathbb{R}^3 dan diketahui $\mathbf{e}_1, 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ dan $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$ merupakan solusi sistem persamaan linear $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dengan A suatu matriks berukuran 3×3 . Tentukan semua nilai eigen dari A .

4. Diberikan matriks $B \in M_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ dan $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4\}$ basis untuk \mathbb{R}^4 . Misalkan

$$B\mathbf{u}_1 = 2\mathbf{u}_1, B\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}, B\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_4, B\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_3.$$

Apakah B dapat didiagonalkan ? Jelaskan jawaban Saudara.