

Persiapan ONMIPA 2024 Tingkat Wilayah
Analisis Kompleks

oleh
Made Tantrawan

Departemen Matematika FMIPA UGM

20 April 2024

Latihan 1: 5 menit $M = 1$ menit



Contoh 1

Diberikan fungsi $f : \mathbb{C} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{C}$ dengan $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$. Tentukan semua nilai z sehingga $f(z) = z$.

Penyelesaian:

$$\pm i$$



Latihan 2: 5 menit 2,5

Contoh 2

Jika P merupakan suku banyak berderajat 2024 dengan koefisien real, maka penyelesaian $P(z) = 0$ dengan $\operatorname{Im}(z) > 0$ paling banyak ada

Penyelesaian: Jika z solusi $P(z) = 0$, maka \bar{z} juga solusi.
(non real)

P berderajat 2023, akar dg $\operatorname{Im}(z) > 0$ ada 101



Contoh 3

Tentukan semua z dengan $|z| \leq 1$ yang memaksimalkan nilai $|z + 20 + 24i|$.

Penyelesaian:

$$|z + 20 + 24i| \leq |z| + |20 + 24i| \leq 1 + |20 + 24i|$$

$|z|=1$
 $z = \text{berapa } ??$

$$|a+bi| = |a| + |b|$$

$$b=0 \vee a=c b \neq 0 \quad c \geq 0$$

$$1. z = k(20+24i) \quad \& \quad |z|=1 \Rightarrow k = \frac{1}{|20+24i|}$$

$$z = \frac{5+6i}{\sqrt{61}}$$

$$2. z \text{ yg meminimumkan } |z + 20 + 24i| \Leftrightarrow |20 + 24i| - |z| \leq 20 + 24i - 1$$

$|z|=1$
 P

Latihan 4: 10 menit 8.35 – 8.45, (6 maut)



Contoh 4

Diketahui fungsi analitik f pada ~~daerah tutup~~ dengan $|f'(z)| \leq 1, \forall z \in \mathbb{C}$. Jika $f'(0) = i, f(0) = 1$, maka $f(1 + i) = \underline{\quad}.$

Penyelesaian:

$$f(z) = 1 + iz$$

f' analitik + terbatas $\Rightarrow f'$ konstan ($f'(z) = a$)

Liauville.

$$\Rightarrow f(z) = az + b.$$

Latihan 5: 10 menit 8:49 - 9.00



Contoh 5

Hasil pemetaan lingkaran $L : |z - 1| = 1$ oleh $w = \frac{i}{z+2i}$ adalah ...

Penyelesaian:

$$\frac{a}{z+b} : z+b \rightarrow \frac{a}{z}$$

$$z = \frac{i}{w} - 2i$$

$$\Rightarrow \left| \frac{i}{w} - 2i - 1 \right| = 1$$

$$\Leftrightarrow \left| 1 - \frac{(2-i)}{i} w \right| = |w|$$

$$\Leftrightarrow \left| 1 - (2-i)w \right|^2 = |w|^2$$

$$\Leftrightarrow (1 - (2-i)w)(1 - (2+i)\bar{w}) = |w|^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\operatorname{Re}((2-i)w) + 5|w|^2 = |w|^2$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2\operatorname{Re}((2-i)w) + 4|w|^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2(2x+y) + 4x^2 + 4y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - 4x + 4x^2 - 2y + 4y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (1-2x)^2 + (\frac{1}{2}-2y)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow (x-\frac{1}{2})^2 + (y-\frac{1}{4})^2 = \frac{1}{16} //$$

$$\Leftrightarrow \left| w - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}i \right| = \frac{1}{4} //$$

$$w = x+iy$$



Latihan 6: 10 menit : 9:15 - 9:25

$$D = \{ z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1 \}.$$

Contoh 6

Diberikan fungsi $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ dengan $f(z) = \frac{(1+i)z-1}{1+i-z}$ untuk setiap $z \in D$ di mana D merupakan cakram satuan tertutup. Nilai maksimal dari $|f(z)|$ adalah ...

Penyelesaian:

$$\begin{aligned} |f(z)|^2 &= \left| \frac{(1+i)z-1}{1+i-z} \right|^2 = \frac{((1+i)z-1)(\overline{(1-i)\bar{z}-1})}{(1+i-\bar{z})(1-i-\bar{z})} \\ |z| &= \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} = e^{i\theta} \quad = \frac{2|z|^2 - 2\operatorname{Re}((1+i)z) + 1}{2 - 2\operatorname{Re}((1-i)\bar{z}) + |\bar{z}|^2} = \frac{3 - 2\operatorname{Re}((1+i)z)}{3 - 2\operatorname{Re}((1-i)\bar{z})}. \\ 1+i &= \sqrt{2} e^{i\pi/4} \quad = \frac{3 - 2\sqrt{2} \cos(\theta + \pi/4)}{3 - 2\sqrt{2} \cos(\theta - \pi/4)} = \frac{3 + 2\sqrt{2} \sin t}{3 - 2\sqrt{2} \cos t} \geq \frac{3+2\sqrt{2}}{3+2\sqrt{2}} = 1 \end{aligned}$$

$$h(t) = \frac{3+2\sqrt{2} \sin t}{3-2\sqrt{2} \cos t}$$

$$0 = h'(t) = 2\sqrt{2} \cos t (3-2\sqrt{2} \cos t) + 2\sqrt{2} \sin t (3+2\sqrt{2} \sin t)$$

$$= 6\sqrt{2} \cos t + 6\sqrt{2} \sin t + 8(\sin^2 t - \cos^2 t).$$

$$= 6\sqrt{2} (\cos t + \sin t) - 8(\sin t + \cos t)(\sin t - \cos t)$$

$$= (\cos t + \sin t) (6\sqrt{2} - 8(\sin t - \cos t)) \Rightarrow \sin t - \cos t = \frac{6\sqrt{2}}{8} = \frac{3}{4}\sqrt{2}$$

$$\stackrel{d=0}{\downarrow}$$

$$|f(z)| = 1 \rightarrow \min$$

$$2\sqrt{2} \sin t = 2\sqrt{2} \sin t + 3$$

$$\Rightarrow \sin(t - \frac{\pi}{4}) = \frac{3}{4}$$



Latihan 7: 10 menit

Contoh 7

Cari semua fungsi utuh f yang memenuhi $|f'(z)| < |f(z)|$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.

Penyelesaian:



Latihan 8: 15 menit

Contoh 8

Diketahui f fungsi utuh. Jika $\operatorname{Re}(f)$ terbatas, tunjukkan bahwa $\operatorname{Im}(f)$ terbatas.

Penyelesaian:



Latihan 9: 15 menit

Contoh 9

Misalkan f fungsi utuh dan $|f'(z)| \leq |z|$ untuk semua z . Perlihatkan bahwa $f(z) = a + bz^2$ dengan $|b| \leq 1$.

Penyelesaian:



Latihan 10: 15 menit

Contoh 10

Diberikan fungsi analitik f dan g pada cakram tertutup satuan D . Tunjukkan bahwa nilai maksimum $|f| + |g|$ tercapai ketika $|z| = 1$.

Penyelesaian: