Isian singkat

1. Diberikan matriks A berukuran 2025×2025 dengan

$$\det(A - \lambda I_{2025\times 2025}) = (\lambda - 2)^k (\lambda - 1)^{2025-k}$$

untuk suatu bilangan asli[1] k dengan $0 \le k \le 2025$. Jika $A^2 = A$, maka banyaknya nilai k yang mungkin adalah ...

***Solusi*:**

Bentuk determinan yang diberikan menunjukkan bahwa nilai eigen 2 muncul sebanyak k kali, dan nilai eigen 1 muncul sebanyak $2025 - k$ kali. Sedangkan diketahui bahwa A adalah matriks idempotent, sehingga nilai eigen dari A hanya bisa $\lambda = 0$ atau $\lambda = 1$.

Dengan demikian, k harus sama dengan 0, karena jika $k > 0$, maka akan ada nilai eigen 2 yang tidak sesuai dengan sifat idempotent. Oleh karena itu, satu-satunya nilai yang mungkin untuk k adalah $\boxed{1}$ saja yaitu $k = 0$.

2. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F, dengan $\dim(V) = 7$, serta transformasi linear $T_1 : V \to V$ dan $T_2 : V \to V$, dengan $\dim(\mathrm{Im}(T_1)) = 3$ dan $\dim(\mathrm{Im}(T_2)) = 4$. Jika M dan m berturut-turut menyatakan nilai terbesar dan terkecil yang mungkin dari $\dim(\mathrm{Im}(T_2 \circ T_1))$, maka nilai $M + m = \ldots$

***Solusi*:**

Dengan menggunakan Teorema Rank-Nullity, kita tau bahwa

$$\dim(\mathrm{Im}(T_2 \circ T_1)) \le \min\{\dim(\mathrm{Im}(T_1)), \dim(\mathrm{Im}(T_2))\}$$

Sehingga dengan jelas kita peroleh

$$\dim(\mathrm{Im}(T_2 \circ T_1)) \le \min\{3, 4\} = 3 = M$$

3. Jika setiap $z \in \mathbb{C}$ yang memenuhi

$$\left|\frac{z+1}{z+4}\right| = 2$$

terletak pada suatu lingkaran, maka radius dan titik pusat lingkaran tersebut berturut-turut adalah ...

4. Bentuk sederhana dari

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

adalah ...

[1] Agak rancu disini karena didefinisikan bilangan asli namun nilai $k = 0$ disebutkan di kalimat setelahnya.

5. Nilai
$$\sup\left\{\inf\left\{5(-1)^n-\left(\frac{m+1}{n}\right)^2 : n\geq m\right\} : m\in\mathbb{N}\right\}$$
adalah ...

6. Diberikan fungsi kontinu $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dengan $|f(x)|\leq x$ untuk setiap $x\in[0,1]$. Nilai terbesar yang mungkin dari
$$\int_0^1 \left((f(x))^2-x^4f(x)\right)\,dx$$
adalah ...

7. Banyaknya bilangan asli $x\in\{1,2,3,\ldots,2025\}$ yang bukan kelipatan 2 dan bukan kelipatan 5 adalah ...

8. Tiga siswa a_1, a_2, a_3 dari Sekolah A dan 4 siswa b_1, b_2, b_3, b_4 dari Sekolah B berkumpul dalam sebuah pertemuan. Banyaknya cara menyusun ketujuh siswa tersebut dalam satu baris dengan syarat tidak terdapat satu blok yang berisikan semua siswa dari sekolah yang sama adalah ... (Contoh: $b_3b_2a_1a_3b_1b_4a_2$ diperbolehkan, tetapi $b_1b_4a_1a_2a_3b_3b_2$ dan $a_1b_4b_3b_1b_2a_3a_2$ tidak diperbolehkan)

9. Jika S_5 menyatakan grup semua fungsi bijektif pada $\{1,2,...,5\}$ terhadap operasi komposisi fungsi, maka banyaknya elemen berorder 2 pada S_5 adalah ...

10. Jika z, p, dan m berturut-turut menyatakan banyaknya ideal di $\mathbb{Z}_{2025}$, banyaknya ideal prima di $\mathbb{Z}_{2025}$, dan banyaknya ideal maksimal di $\mathbb{Z}_{2025}$, maka nilai $z+p+m$ adalah ...

Uraian

1. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dengan $\dim(V)=n$. Misalkan U dan W merupakan dua ruang bagian dari V dengan $\dim(U)+\dim(W)=n$. Buktikan bahwa terdapat transformasi linear $T:V\longrightarrow V$ yang memenuhi $\ker(T)=U$ dan $\mathrm{Im}(T)=W$.

2. Diketahui $A_1,A_2,...,A_n$ merupakan titik-titik sudut sebuah poligon n sisi beraturan yang termuat pada sebuah lingkaran dengan radius r dan titik pusat $O(0,0)$. Jika P merupakan titik di luar lingkaran yang terletak pada garis perpanjangan OA_1, buktikan bahwa
$$\prod_{k=1}^{n}|PA_k|=|OP|^n-r^n,$$
dengan $|AB|$ menyatakan panjang ruang garis yang menghubungkan titik A dan B.

3. Diberikan fungsi kontinu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial pada (a, b) dengan $f(a) = f(b)$. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli n, terdapat n bilangan real berbeda, $c_1, c_2, ..., c_n \in (a, b)$, yang memenuhi

$$f'(c_1) + f'(c_2) + \cdots + f'(c_n) = 0.$$

4. Untuk suatu bilangan bulat tak negatif n dan m, misalkan $D(m, n)$ menyatakan banyaknya solusi persamaan

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

dengan $x_i \in \mathbb{N}$, untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., m\}$ dan $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Tunjukkan bahwa

$$D(m, n) = D(m, n - m) + D(m - 1, n - m).$$

5. (a) Diketahui A, B, C merupakan subgrup dari sebuah grup G. Jika $A \subseteq B$, $A \cap C = B \cap C$, dan $AC = BC$, buktikan bahwa $A = B$.

   (b) Carilah contoh grup G dan subgrup A, B, C dari G yang memenuhi $A \cap C = B \cap C$, dan $AC = BC$ tetapi $A \neq B$.

   Catatan: Jika P dan Q adalah subgrup dari $(G, *)$, maka PQ didefinisikan sebagai

$$PQ = \{p * q : p \in P, q \in Q\}.$$

6.