

Persiapan Seleksi Nasional

1. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dan $T \in \mathcal{L}(V)$ dengan $T^2 = I$. Jika -1 bukan merupakan nilai eigen dari T , buktikan bahwa $T = I$.
2. Diberikan ruang hasil kali dalam atas lapangan \mathbb{C} dengan hasil kali dalam $\langle -, - \rangle$. Diketahui $T \in \mathcal{L}(V)$ yang memenuhi
$$\langle T(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle$$
untuk setiap $u, v \in V$.
 - (a) Buktikan bahwa nilai eigen dari T merupakan bilangan real.
 - (b) Buktikan bahwa setiap dua vektor eigen yang berkorespondensi dengan dua nilai eigen berbeda saling ortogonal.
3. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dan diketahui $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ merupakan himpunan bebas linear di V . Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$ dan $u = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$. Buktikan bahwa $\{u_i \mid u_i = u + b_i \text{ untuk setiap } i = 1, 2, \dots, n\}$ himpunan tidak bebas linear jika dan hanya jika $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -1$.
4. Diketahui U, V, W merupakan tiga ruang vektor atas lapangan yang sama. Misalkan $f \in \mathcal{L}(U, V)$ dan $g \in \mathcal{L}(V, W)$. Buktikan bahwa

$$\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g) \iff \ker(g) + \text{Im}(f) = V$$

5. Diberikan matriks A dan B berukuran $n \times n$. Matriks A dan B dikatakan *simultaneously diagonalizable* jika terdapat matriks invertible P sehingga $P^{-1}AP$ dan $P^{-1}BP$ keduanya merupakan matriks diagonal.
 - (a) Jika A dan B *simultaneously diagonalizable*, buktikan bahwa $AB = BA$.
 - (b) Jika $AB = BA$ dan A mempunyai n nilai eigen yang berbeda, buktikan bahwa A dan B *simultaneously diagonalizable*.
6. Diberikan ruang vektor berdimensi hingga V atas lapangan F . Jika $S, T \in \mathcal{L}$, buktikan bahwa ST dan TS mempunyai nilai eigen yang sama.