TES BAGIAN PERTAMA

Bentuk Soal: Isian Singkat

Waktu: 60 menit

SOAL

1. Misalkan $\theta_n = \arctan n$. Nilai dari $\lim\limits_{n\to\infty} (\theta_{n+1} - \theta_n)$ adalah ...
2. Diberikan $\mathbb{Z}_3[x]/I$ dengan I adalah ideal yang dibangun oleh $x^4 + x + 2$, invers dari $x^2 + x + I \in \mathbb{Z}_3[x]/I$ adalah ...
3. Jika K dan L dua subruang dari $\mathbb{R}^{10}$ dan untuk dim K + dim $L = 12$, maka nilai terkecil yang mungkin untuk $\dim(K \cap L)$ adalah ...
4. Misalkan v dan w adalah akar-akar yang berbeda yang dipilih secara acak dari persamaan $z^{2024} - 1 = 0$. Misalkan $\frac{m}{n}$ adalah probabilitas dari $\sqrt{2+\sqrt{3}} \leq |v + w|$, di mana m dan n adalah bilangan bulat positif yang relatif prima, nilai dari $m + n$ adalah ...
5. Enam orang siswa akan duduk pada tiga meja bundar, dimana setiap meja akan diduduki oleh minimal satu siswa. Banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut adalah ...

SOLUSI

1. Karena $\lim\limits_{n\to\infty} \arctan n = \dfrac{\pi}{2}$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} \theta_n = \lim\limits_{n\to\infty} \theta_{n+1}$, maka

$$\lim_{n\to\infty} (\theta_{n+1} - \theta_n) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = \boxed{0}$$

2. Misalkan $\boldsymbol{p}(x) = x^4 + x + 2$ dan $ax^3 + bx^2 + cx + d + I$ (pangkat tertinggi di ring kuasi) adalah invers dari $x^2 + x + I$. Maka

$$\begin{aligned}
(ax^3 + bx^2 + cx + d + I)(x^2 + x + I) &= 1 + I \\
ax^5 + (a+b)x^4 + (b+c)x^3 + (c+d)x^2 + dx &= 1 + I \\
\hline
(a+b)x^4 + (b+c)x^3 + (c+d-a)x^2 + (d-2a)x &= 1 + I \qquad {\color{red}-ax \cdot \boldsymbol{p}(x)} \\
\hline
(b+c)x^3 + (c+d-a)x^2 + (d-b)x - 2(a+b) &= 1 + I \qquad {\color{red}-(a+b) \cdot \boldsymbol{p}(x)}
\end{aligned}$$

Kemudian didapatkan sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} b+c =&0\\ c+d-a =&0\\ d-b =&0\\ a+b =&1 \end{aligned}$$

Dapat dicek bahwa solusinya adalah $a=0$, $b=1, c=2, d=1$. Sehingga invers dari x^2+x+I adalah $\boxed{x^2+2x+1+I}$.

3. Karena K dan L adalah subruang dari $\mathbb{R}^{10}$, maka $K+L$ juga merupakan subruang dari $\mathbb{R}^{10}$. Selanjutnya diketahui hubungan

$$\dim(K+L)=\dim(K)+\dim(L)-\dim(K\cap L)$$

Dan juga karena $K+L$ adalah subruang berakibat $\dim(K+L)\leq 10$ atau

$$\begin{aligned} \dim(K)+\dim(L)-\dim(K\cap L) &\leq 10\\ 12-\dim(K\cap L) &\leq 10\\ \dim(K\cap L) &\geq 2 \end{aligned}$$

Jadi nilai terkecil yang mungkin untuk $\dim(K\cap L)$ adalah $\boxed{2}$.

4. Misalkan $v=\cos\theta_1+i\sin\theta_1$ dan $w=\cos\theta_2+i\sin\theta_2$. Selanjutnya $|v+w|$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} |v+w| &= \sqrt{(\cos\theta_1+\cos\theta_2)^2+(\sin\theta_1+\sin\theta_2)^2}\\ &= \sqrt{\cos^2\theta_1+\cos^2\theta_2+2\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin^2\theta_1+\sin^2\theta_2+2\sin\theta_1\sin\theta_2}\\ &= \sqrt{2+2(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)}\\ &= \sqrt{2+2\cos(\theta_1-\theta_2)} \end{aligned}$$

Ingat bahwa $\theta_1,\theta_2\in\left\{\frac{\pi k}{1012}\,\middle|\, k=\{0,1,\ldots,2023\}\right\}$ yang berakibat $\theta_1-\theta_2$ dapat ditulis sebagai $\frac{\pi k}{1012}$ untuk suatu $k\in\{0,1,\ldots,2023\}$.

$$\begin{aligned} |v+w| &\geq \sqrt{2+\sqrt{3}}\\ \sqrt{2+2\cos(\theta_1-\theta_2)} &\geq \sqrt{2+\sqrt{3}}\\ 2\cos\left(\frac{\pi k}{1012}\right) &\geq \sqrt{3}\\ -\frac{\pi}{6}\leq \frac{\pi k}{1012} &\leq \frac{\pi}{6}\\ -168\frac{2}{3}\leq k &\leq 168\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Karena k bulat maka $k \in \{-168, -167, \ldots, 168\}$ yang dimana memiliki 337 kemungkinan. Dengan demikian probabilitasnya adalah $\frac{337}{2024}$. Selanjutnya dapat dicek bahwa $\gcd(337, 2024) = 1$, sehingga $m + n = 337 + 2024 = \boxed{2361}$.

5. Permasalahan diatas dapat direpresentasikan sebagai banyaknya pasangan (x_1, x_2, x_3) yang memenuhi

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \quad x_1, x_2, x_3 \geq 1$$

misalkan $y_1 = 6 - x_1$, $y_2 = 6 - x_2$, dan $y_3 = 6 - x_3$. Maka permasalahan diatas dapat direpresentasikan sebagai banyaknya pasangan (y_1, y_2, y_3) yang memenuhi

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3 \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Dengan demikian dengan metode *stars and bars* didapatkan banyaknya cara enam siswa duduk adalah $\binom{5}{3} = \boxed{6}$.

TES BAGIAN KEDUA

Bentuk Soal: Uraian

Waktu: 120 menit

SOAL

1. Diberikan barisan bilangan positif $(a_n)_{n\geq 1}$ sedemikian hingga
$$a_{n+1} \leq a_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$
untuk setiap $n \geq 1$. Buktikan bahwa $(a_n)_{n\geq 1}$ merupakan barisan konvergen.

2. Diberikan homomorfisma ring $f : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_2[x]$ dengan
$$f(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) := \overline{a_0} + \overline{a_1}x + \cdots + \overline{a_n}x^n,$$
dan $\overline{a_i} = a_i \mod 2$ untuk setiap $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.
   (a) Tentukan $\ker f$
   (b) Tunjukkan bahwa $\ker f$ adalah ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$

3. Diberikan suatu ruang vektor berdimensi hingga V serta subruang K dan L dari V. Didefinisikan
$$W = K + L = \{k + l \mid k \in K, l \in L\}.$$
Buktikan bahwa
   (a) $K \cap L$ dan W merupakan subruang dari V
   (b) $\dim(W) = \dim(K) + \dim(L) - \dim(K \cap L)$.

4. Diberikan fungsi kompleks $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ merupakan fungsi analitik dan memenuhi $u(x, y) \leq x$ untuk semua $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Tunjukkan bahwa f adalah polinomial kompleks berderajat 2.

5. Diberikan bilangan bulat tak negatif k dan n sehingga $0 \leq k < n$. Berikan bukti kombinatorial bahwa
$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-1-j}{k-j} 2^j$$

SOLUSI

1. Definisikan barisan $b_n = a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. Sehingga
$$b_{n+1} - b_n = \left(a_{n+1} + \sum_{k=n+2}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) - \left(a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right) = a_{n+1} - a_n - \frac{1}{(n+1)^2} \leq 0$$

yang berarti $b_{n+1} \leq b_n$ untuk setiap $n \geq 1$. Dengan demikian barisan b_n adalah barisan monoton tidak naik (turun atau konstan).

Selanjutnya perhatikan bahwa $b_n > 0$ untuk setiap $n \geq 1$ karena a_n adalah bilangan positif. Disisi lain juga

$$b_n \leq a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} + a_0$$

Dengan demikian barisan b_n adalah barisan terbatas. Sehingga dapat disimpulkan bahwa barisan b_n konvergen (misalkan $b_n \to L \in \mathbb{R}$).

Menggunakan sifat limit, maka

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \left(b_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \right) \\ &= L - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = L - 0 = L\end{aligned}$$

Jadi barisan $(a_n)_{n\geq 1}$ juga barisan konvergen.

2. (a) Secara definisi dapat ditulis sebagai

$$\ker f = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(p(x)) = 0\}$$

Sehingga untuk $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ dapat kita tinjau

$$\begin{aligned} f(p(x)) &= 0 \\ f\left(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n\right) &= 0 \mod 2 \\ \overline{a_0} + \overline{a_1}X + \cdots + \overline{a_n}x^n &= 0 \mod 2 \\ \overline{a_0} = \overline{a_1} = \cdots = \overline{a_n} &= 0 \mod 2 \end{aligned}$$

Artinya anggota dari $\ker f$ adalah polinomial dengan koefisien genap semua. Atau dapat juga ditulis

$$\ker f = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid p(x) = 2q(x),\ q(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$$

(b) Misalkan $r(x) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n \in \ker f$ dan $s(x) = b_0 + b_1 + \cdots + b_n \in \ker f$, maka $f(r(x)) = 0$ dan $f(s(x)) = 0$. Sehingga kita punya

- $f(r(x) - s(x)) = f(r(x)) - f(s(x)) = 0 + 0 = 0$ yang berarti $r(x) - s(x) \in \ker f$.
- Misalkan $u(x) = r(x)s(x) = c_0 + c_1 + \cdots + c_n$ dengan $c_k = \sum_{i=0}^{k} a_k b_{k-i}$ untuk $k = 0, 1, \ldots, n$. Karena a_i dan b_i adalah bilangan genap, maka penjumlahan dan perkaliannya yaitu c_k juga bilangan genap untuk setiap $k = 0, 1, \ldots, n$. Sehingga

$$f(u(x)) = f(r(x)s(x)) = \overline{c_0} + \overline{c_1}x + \cdots + \overline{c_n}x^n = 0$$

Jadi $r(x)s(x) \in \ker f$.

Dengan demikian $\ker f$ merupakan subring dari $\mathbb{Z}[x]$.

Selanjutnya kita misalkan ulang $r(x)s(x) \in \ker f$ namun $r(x) \notin \ker f$ dan $s(x) \notin \ker f$, artinya terdapat koefisien a_i dan b_j yang ganjil. Hal ini berakibat bahwa $c_k \not\equiv 0 \mod 2$ untuk suatu $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Hal ini berarti $f(u(x)) = f(r(x)s(x)) \neq 0$, yang bertentangan dengan asumsi bahwa $r(x)s(x) \in \ker f$. Dengan demikian haruslah $r(x) \in \ker f$ atau $s(x) \in \ker f$.

$\therefore$ Terbukti bahwa $\ker f$ adalah ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$.

3. (a)

4. Fungsi f analitik di $\mathbb{C}$ berarti f dapat diekspansi sebagai deret berikut

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

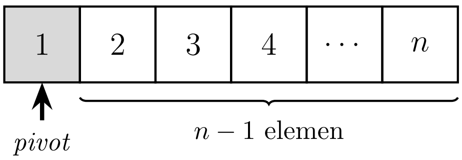
5. Misalkan S adalah himpunan yang mempunyai n elemen yaitu $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Bagaimana total cara memilih maksimal k elemen dari S?

LHS: Untuk memilih $j = 0, 1, \ldots$ elemen dari S dapat dilakukan dengan $\binom{n}{j}$ cara. Selanjutnya total cara untuk memilih minimal 0 elemen dan maksimal k elemen adalah

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}$$

RHS: Andaikan kita memilih suatu elemen berurutan, sebut saja *pivot* yang dimana elemen tersebut tidak akan dipilih.

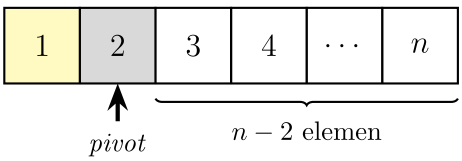
- Untuk $j = 0$, maka kita pilih elemen 1 sebagai *pivot*



Karena tersisa $n-1$ elemen, maka cara memilih k elemen adalah

$$\binom{n-1}{k}$$

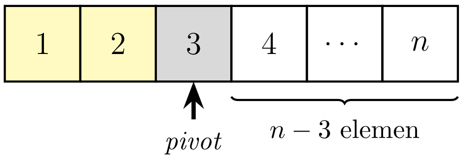
- Untuk $j = 1$, maka kita pilih elemen 2 sebagai *pivot*



Selanjutnya kita akan memilih $k-1$ elemen dari $n-2$ elemen terlebih dahulu. Kemudian karena maksimal adalah k elemen, maka kita punya pilihan untuk memilih elemen 1 sebagai elemen ke-k atau tidak (2 kemungkinan). Sehingga total cara adalah

$$\binom{n-2}{k-1} \cdot 2$$

- Untuk $j = 2$, maka kita pilih elemen 3 sebagai *pivot*

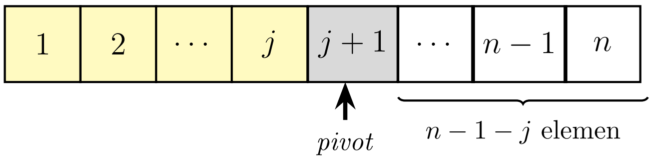


Analog kita memilih $k-2$ elemen dari $n-3$ dan mempertimbangkan masing-masing elemen 1 dan 2 sebagai elemen ke-$(k-1)$ dan ke-k atau tidak (2^2 kemungkinan). Sehingga total cara adalah

$$\binom{n-3}{k-2} \cdot 2^2$$

$$\vdots$$

- Secara umum untuk elemen ke-j, maka elemen *pivot*-nya adalah $j+1$



Terdapat $k-j$ elemen yang harus dipilih dari $n-1-j$ elemen dan masing-masing j elemen memiliki 2 kemungkinan untuk dipilih atau tidak (2^j kemungkinan). Sehingga total cara adalah

$$\binom{n-1-j}{k-j} \cdot 2^j$$

Dengan cara diatas, maka total cara untuk memilih maksimal k elemen dari S adalah

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n-1-j}{k-j} \cdot 2^j$$

$\therefore$ **LHS** $=$ **RHS** sehingga pernyataan tersebut benar.