

-
1. Diketahui R merupakan suatu ring dengan identitas perkalian 1_R dan $(x + y)^2 = x^2 + y^2$ untuk setiap $x, y \in R$. Apakah R merupakan ring komutatif?

Untuk setiap $x, y \in R$, kita punya

$$(x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x^2 + y^2$$

dan didapat $xy + yx = 0$ atau $xy = -yx$. Kemudian karena $1_R \in R$ didapat pula untuk setiap $a \in R$

$$(a + 1)^2 = a^2 + 1.a + a.1 + 1^2 = a^2 + 1^2$$

$$a^2 + 2a + 1 = a^2 + 1$$

$$2a = 0$$

$$a = -a$$

Karena $a = -a$ untuk setiap $a \in R$, didapat $xy = yx$

2. Jika a, b, c, d merupakan bilangan bulat sehingga $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ mempunyai akar $\sqrt{3} - \sqrt{5}$, maka nilai $a + b + c + d$ adalah ...
3. Diketahui $\mathcal{R} = \mathbb{Z}_{1013} \times \mathbb{Z}_{1013}$ merupakan ring terhadap operasi penjumlahan dan perkalian berikut:

$$(a, b) + (c, d) = ((a + c) \bmod 1013, (b + d) \bmod 1013),$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac \bmod 1013, (ad + bc + bd) \bmod 1013),$$

untuk setiap $(a, b), (c, d) \in \mathcal{R}$. Buktikan terdapat tepat sebanyak 2024 elemen tak nol di \mathcal{R} yang merupakan pembagi nol.

4. Diberikan G suatu grup siklis dengan order 2024. Banyak elemen G yang berorde ganjil adalah ...
5. Diketahui $\mathbb{R}[x]$ adalah ring polinom atas \mathbb{R} . Untuk setiap $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, ideal di $\mathbb{R}[x]$ yang dibangun oleh $p(x)$ dinotasikan sebagai $\langle p(x) \rangle$.

(a) Buktikan $\langle x - 2024 \rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.

(b) Tentukan bilangan asli a terbesar sehingga $\langle x^2 + ax + 2024 \rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.