Persiapan Seleksi Wilayah

Bagian I

1. Di rung vektor $\mathbb{R}^4$, subruang X dibangun oleh $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$ dan subruang Y dibangun oleh $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$. Nilai dari $\dim(X+Y)$ adalah ...

2. Diketahui $U = \text{Span}\{\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \mathbf{u_3}\}$ dan $V = \text{Span}\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}\}$ merupakan subruang-subruang dari $\mathbb{R}^5$ yang memenuhi $\dim(U \cap V) = 2$. Misalkan $W = \langle U, V \rangle$. Dimensi dari W yang mungkin adalah ...

3. Diketahui $U = \{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(A) = 0\}$ Nilai dari $\dim(U)$ adalah ...

4. Diberikan vektor $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ dan subruang $U = \{A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R}) \mid A\mathbf{v} = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Dimensi dari U adalah ...

5. Diberikan transformasi linear $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dengan $f\left((a,b)^T\right) = (a,0)^T$ untuk setiap $(a,b)^T \in \mathbb{R}^3$. Jika matriks representasi dari f relatif terhadap $\left\{(1,1)^T, (2,1)^T\right\}$ adalah $M = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, maka nilai dari $ad + bc$ adalah ...

6. Diberikan ruang hasil kali dalam $\mathbb{R}_2[x] = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$ dengan hasil kali dalam
$$\langle p(x), q(x) = \int_0^1 p(x)q(x)\ dx, \quad \forall p(x), q(x) \in \mathbb{R}_2[x].$$
Nilai a sehingga $S = \{x, x^2 - a\}$ merupakan himpunan ortogonal adalah ...

7. Misalkan P_2 merupakan himpunan semua polinom atas lapangan real berderajat paling tinggi 2. Diketahui $T : P_2 \to P_2$ dengan $T(a_2x^2 + a_1x + a_0) = 2a_2 + a_1$ merupakan transformasi linear. Nilai dari $\dim(\ker(T)) - \dim(\ker(T^2 + T))$ adalah ...

8. Misalkan $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ merupakan transformasi linear dengan
$$f(x) = 2(\mathbf{x}^T\mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 - (\mathbf{x}^T\mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 + (\mathbf{x}^T\mathbf{u}_3)\mathbf{u}_3$$
dengan $\mathbf{u}_1 = (0,1,0)^T, \mathbf{u}_2(1,0,1)^T, \mathbf{u}_3 = (1,2,1)^T$. Jika M merupakan matriks representasi dari f relatif terhadap basis standar dari $\mathbb{R}^3$, maka $\det(M)$ adalah ...

Bagian II

1. Diketahui V_1, V_2, V_3 masing masing merupakan subruang dari V atas lapangan $\mathbb{R}$ yang memenuhi $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ merupakan subruang dari V. Apakah pasti terdapat $i \in \{1, 2, 3\}$ yang memenuhi $V_i \supseteq V_j$ untuk setiap $j \in \{1, 2, 3\}$. Jelaskan jawaban Saudara.

2. Misalkan V merupakan ruang hasil kali dalam atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ berdimensi n dengan hasil kali dalam $\langle \_, \_ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Buktikan bahwa jika $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$ merupakan basis untuk V, dan $c_1, c_2, \cdots, c_n$ merupakan elemen-elemen di V dengan sifat

$$\langle c_i, b_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

   maka $C = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}$ merupakan basis untuk V.

3. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dengan $\dim(V) = 8$. Misalkan $T \in \mathcal{L}(V, V)$ dengan $\dim(\ker(T^4)) = 8$. Jika $\dim(\ker(T^3)) = 6$, buktikan bahwa terdapat himpunan bebas linear $\{u, v\} \subseteq V$ sedemikian sehingga himpunan $B = \{v, T(v), T^2(v), u, T(u), T^2(u)\}$ merupakan himpunan bebas linear.

4. Diberikan operator linear T, S pada ruang vektor V dengan $T^2 = T$ dan $S^2 = S$. Jika $\ker(T) \subseteq \operatorname{Im}(S)$ dan $\operatorname{Im}(T) \subseteq \ker(S)$, buktikan bahwa $T + S = I$.

5. Diberikan ruang hasil kali dalam $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ atas $\mathbb{R}$ dengan basis orthonormal $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Buktikan bahwa untuk setiap $x, y \in V$ berlaku

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \langle y, e_i \rangle.$$

6. Suatu matriks A berukuran 3×3 atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ dikatakan *ajaib* jika jumlah entri-entri setiap baris, setiap kolom, setiap diagonal dari matriks A semuanya bernilai sama. Jika A invertibel, A^{-1} juga *ajaib*.

7. Misalkan V merupakan ruang hasil kali dalam atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ hingga dengan hasil kali dalam $\langle \_, \_ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$. Jika himpunan $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\} \subseteq V$ merupakan himpunan orthonormal dan untuk setiap $v \in V$ berlaku $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle v, b_i \rangle$. Apakah B basis untuk V ? Jelaskan.