

SIMULASI ONMIPA NASIONAL BIDANG MATEMATIKA

Durasi pengerjaan: 240 menit

SUBBIDANG ALJABAR LINEAR

Diberikan ruang hasil kali dalam berdimensi hingga V atas lapangan \mathbb{R} . Diketahui $\{e_1, \dots, e_n\}$ merupakan basis ortonormal untuk V dan $B = \{v_1, \dots, v_n\} \subseteq V$. Jika

$$\|e_i - v_i\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

untuk setiap $i \in \{1, \dots, n\}$, buktikan bahwa B merupakan basis untuk V .

SUBBIDANG ANALISIS REAL

Diberikan fungsi $f : [0, 2] \rightarrow (0, \infty)$ yang memenuhi $f''(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [0, 2]$ dan

$$\int_0^1 f(t) dt - \int_1^2 \frac{dt}{f(t)} \leq 1.$$

Buktikan bahwa

$$\int_0^2 f(t) dt \leq 2f(2).$$

SUBBIDANG ANALISIS KOMPLEKS

Diketahui $P(z) = \sum_{j=0}^n a_j z^j$ merupakan polinomial dengan derajat $n \geq 1$ dan semua akar $P(z) = 0$ termuat di dalam himpunan $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Jika didefinisikan

$$P^*(z) = z^n \overline{P}(1/z),$$

dengan $\overline{P}(z) = \sum_{j=0}^n \overline{a_j} z^j$, tunjukkan bahwa semua akar-akar dari persamaan

$$P(z) + P^*(z) = 0$$

termuat di dalam himpunan $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

SUBBIDANG KOMBINATORIKA

Tentukan banyaknya $N \subset \{1, 2, \dots, 2025\}$ dengan $N = \{a_1, a_2, \dots, a_{45}\}$ dan

$$\sum_{i=1}^{45} a_i \equiv 0 \pmod{45}.$$

SUBBIDANG STRUKTUR ALJABAR

Diberikan himpunan tak kosong G dan operasi biner $\star : G \times G \rightarrow G$ yang memenuhi kondisi:

1. Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$;
2. Untuk setiap $a, b, c \in G$ berlaku jika $a \star c = b \star c$, maka $a = b$; dan
3. Terdapat $u \in G$ sedemikian sehingga untuk setiap $a \in G$ berlaku $a \star a \star a = u \star a \star u$.

Tunjukkan bahwa (G, \star) merupakan grup komutatif.

SOLUSI