1 Definisi Dasar

Misalkan V dan W adalah dua ruang vektor atas lapangan (field) yang sama, $\mathbb{F}$.

Definisi

Definisi 1.1. *Himpunan $L(V, W)$ didefinisikan sebagai himpunan yang berisi semua transformasi linear dari V ke W.*

$$L(V, W) = \{T : V \to W \mid T \textit{ adalah transformasi linear}\}$$

Jika $V = W$, kita sering menuliskannya secara singkat sebagai $L(V)$. Anggota dari $L(V, W)$ adalah fungsi (transformasi), bukan vektor pada umumnya.

Definisi

Definisi 1.2. *Untuk $T_1, T_2 \in L(V, W)$ dan skalar $c \in \mathbb{F}$, kita mendefinisikan operasi berikut:*

1. ***Penjumlahan:*** $(T_1 + T_2) : V \to W$ *didefinisikan sebagai:*

$$(T_1 + T_2)(v) = T_1(v) + T_2(v) \quad \textit{untuk semua } v \in V$$

2. ***Perkalian Skalar:*** $(cT_1) : V \to W$ *didefinisikan sebagai:*

$$(cT_1)(v) = c \cdot T_1(v) \quad \textit{untuk semua } v \in V$$

2 Struktur Ruang Vektor

Dengan operasi yang telah didefinisikan di atas, himpunan $L(V, W)$ ternyata membentuk sebuah ruang vektor.

Teorema

Teorema 2.1. *Himpunan $L(V, W)$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar yang telah didefinisikan, merupakan sebuah ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$.*

Bukti

Kita perlu memverifikasi aksioma-aksioma ruang vektor.

1. **Tertutup:** Harus ditunjukkan bahwa jika $T_1, T_2 \in L(V, W)$, maka $(T_1 + T_2)$ juga merupakan transformasi linear. Untuk $u, v \in V$ dan $k \in \mathbb{F}$:

$$\begin{aligned}
(T_1 + T_2)(u + kv) &= T_1(u + kv) + T_2(u + kv) \\
&= (T_1(u) + kT_1(v)) + (T_2(u) + kT_2(v)) \\
&= (T_1(u) + T_2(u)) + k(T_1(v) + T_2(v)) \\
&= (T_1 + T_2)(u) + k(T_1 + T_2)(v)
\end{aligned}$$

Jadi, $(T_1 + T_2)$ bersifat linear. Pembuktian untuk (cT_1) juga serupa.

2. **Elemen Nol:** Terdapat transformasi nol $T_0 : V \to W$ yang didefinisikan sebagai $T_0(v) = \mathbf{0}_W$ untuk semua $v \in V$. Jelas bahwa T_0 linear dan $T + T_0 = T$ untuk setiap $T \in L(V, W)$.
3. **Invers Aditif:** Untuk setiap $T \in L(V, W)$, terdapat transformasi $(-T)$ yang didefinisikan oleh $(-T)(v) = -T(v)$. Transformasi ini juga linear dan $T + (-T) = T_0$.
4. **Aksioma lainnya** (asosiatif, komutatif, distributif) mengikuti langsung dari properti yang sama pada ruang vektor W.

Karena semua aksioma terpenuhi, $L(V, W)$ adalah sebuah ruang vektor. □

3 Teorema Utama: Dimensi $L(V, W)$

Ini adalah hasil paling penting terkait ruang $L(V, W)$.

Teorema

Teorema 3.1. *Misalkan V dan W adalah ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan $\mathbb{F}$. Jika $\dim(V) = n$ dan $\dim(W) = m$, maka dimensi dari $L(V, W)$ adalah:*

$$\dim(L(V, W)) = \dim(V) \cdot \dim(W) = n \cdot m$$

Bukti

Bukti ini bersifat konstruktif. Kita akan membangun sebuah basis untuk $L(V, W)$ dan menunjukkan bahwa basis tersebut memiliki $n \cdot m$ elemen.
Misalkan $\mathcal{B}_V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah basis untuk V dan $\mathcal{B}_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ adalah basis untuk W.
Sebuah transformasi linear ditentukan secara unik oleh aksinya pada vektor-vektor basis. Untuk setiap pasangan indeks (i, j) di mana $1 \leq i \leq m$ dan $1 \leq j \leq n$, kita definisikan sebuah transformasi linear $T_{ij} : V \to W$ sebagai berikut:

$$T_{ij}(v_k) = \begin{cases} w_i & \text{jika } k = j \\ \mathbf{0}_W & \text{jika } k \neq j \end{cases}$$

Transformasi ini memetakan vektor basis ke-j dari V ke vektor basis ke-i dari W, dan memetakan semua vektor basis V lainnya ke vektor nol.
Kita akan menunjukkan bahwa himpunan $\mathcal{B}_L = \{T_{ij} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ adalah basis untuk $L(V, W)$. Himpunan ini memiliki $n \cdot m$ anggota.
1. $\mathcal{B}_L$ merentang (spans) $L(V, W)$:
Ambil sebarang $T \in L(V, W)$. Untuk setiap vektor basis $v_j \in \mathcal{B}_V$, citranya $T(v_j)$ adalah sebuah vektor di W. Kita dapat menuliskannya sebagai kombinasi linear dari basis $\mathcal{B}_W$:

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$$

untuk suatu skalar $a_{ij} \in \mathbb{F}$. Skalar-skalar ini mendefinisikan matriks $[T]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}$.

Sekarang, pertimbangkan transformasi $S = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} T_{ij}$. Kita cek aksi S pada vektor basis v_k:

$$S(v_k) = \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} T_{ij} \right)(v_k) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(T_{ij}(v_k))$$
$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ik} T_{ik}(v_k) \quad (\text{karena } T_{ij}(v_k) = 0 \text{ jika } j \neq k)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} a_{ik} w_i$$

Hasil ini persis sama dengan $T(v_k)$. Karena S dan T memiliki aksi yang sama pada semua vektor basis V, maka $S = T$. Jadi, setiap $T \in L(V, W)$ dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari elemen-elemen di $\mathcal{B}_L$.

2. $\mathcal{B}_L$ bebas linear (linearly independent):

Misalkan kita memiliki kombinasi linear yang menghasilkan transformasi nol, T_0:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} T_{ij} = T_0$$

Kita harus menunjukkan semua $c_{ij} = 0$. Terapkan transformasi ini pada sebuah vektor basis v_k:

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} T_{ij} \right)(v_k) = T_0(v_k) = \mathbf{0}_W$$

Dengan logika yang sama seperti sebelumnya, sisi kiri menjadi:

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ik} w_i = \mathbf{0}_W$$

Karena $\mathcal{B}_W = \{w_1, \ldots, w_m\}$ adalah himpunan bebas linear, maka semua koefisien harus nol. Jadi, $c_{1k} = c_{2k} = \cdots = c_{mk} = 0$. Karena ini berlaku untuk setiap k dari 1 sampai n, maka semua skalar c_{ij} harus sama dengan nol.

Karena $\mathcal{B}_L$ merentang $L(V, W)$ dan bebas linear, maka ia adalah basis. Jumlah elemennya adalah $n \cdot m$. □

4 Isomorfisme dengan Ruang Matriks

Hubungan antara transformasi linear dan matriks lebih dalam dari sekadar representasi. Faktanya, kedua ruang ini secara struktural identik (isomorfik).

Proposisi

Proposisi 4.1. *Misalkan V dan W adalah ruang vektor berdimensi hingga dengan $\dim(V) = n$ dan $\dim(W) = m$. Misalkan $\mathcal{B}_V$ adalah basis untuk V dan $\mathcal{B}_W$ adalah basis untuk W. Maka, ruang $L(V, W)$ isomorfik dengan ruang matriks $M_{m \times n}(\mathbb{F})$,* *yang juga isomorfik dengan* $\mathbb{F}^{nm}$.

$$L(V, W) \cong M_{m\times n}(\mathbb{F}) \cong \mathbb{F}^{nm}$$

Bukti

Kita akan mendefinisikan sebuah pemetaan $\Phi : L(V, W) \to M_{m\times n}(\mathbb{F})$ dan menunjukkan bahwa pemetaan ini adalah sebuah isomorfisme (transformasi linear yang bijektif).
Definisikan $\Phi(T) = [T]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W}$, yaitu matriks representasi dari T terhadap basis $\mathcal{B}_V$ dan $\mathcal{B}_W$.

1. **Linearitas:** Sifat dasar dari representasi matriks adalah linear. Untuk $T_1, T_2 \in L(V, W)$ dan $c \in \mathbb{F}$:

$$\begin{aligned}\Phi(T_1 + cT_2) &= [T_1 + cT_2]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} \\ &= [T_1]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} + c[T_2]_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} \\ &= \Phi(T_1) + c\Phi(T_2)\end{aligned}$$

   Jadi, Φ adalah transformasi linear.

2. **Injektif (Satu-ke-satu):** Misalkan $\Phi(T)$ adalah matriks nol. Ini berarti bahwa untuk setiap vektor basis $v_j \in \mathcal{B}_V$, kolom ke-j dari matriks, yaitu $[T(v_j)]_{\mathcal{B}_W}$, adalah vektor nol. Ini menyiratkan $T(v_j) = \mathbf{0}_W$ untuk semua $j = 1, \ldots, n$. Karena T memetakan semua vektor basis dari V ke vektor nol di W, maka T haruslah transformasi nol ($T = T_0$). Jadi, kernel dari Φ hanya berisi transformasi nol, yang berarti Φ adalah injektif.

3. **Surjektif (Pada):** Ambil sebarang matriks $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Kita dapat mendefinisikan sebuah transformasi linear $T : V \to W$ dengan menentukan aksinya pada basis $\mathcal{B}_V = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Untuk setiap $j = 1, \ldots, n$, definisikan citra $T(v_j)$ sebagai vektor di W yang vektor koordinatnya terhadap basis $\mathcal{B}_W$ adalah kolom ke-j dari A. Konstruksi ini selalu mungkin. Dengan definisi ini, matriks representasi dari T adalah persis matriks A, sehingga $\Phi(T) = A$. Karena setiap matriks A adalah citra dari suatu T, maka Φ adalah surjektif.

Karena Φ adalah transformasi linear yang bijektif (injektif dan surjektif), maka ia adalah sebuah isomorfisme. Jadi, $L(V, W) \cong M_{m\times n}(\mathbb{F})$.
Selanjutnya, isomorfisme antara $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ dan $\mathbb{F}^{nm}$ adalah trivial, yaitu dengan memetakan sebuah matriks ke sebuah vektor kolom panjang dengan menumpuk kolom-kolom matriks tersebut. $\square$

5 Contoh

Contoh

Contoh 5.1 (Ruang $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$)**.** Misalkan $V = \mathbb{R}^2$ ($n = 2$) dan $W = \mathbb{R}^3$ ($m = 3$). Menurut teorema, $\dim(L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)) = 2 \cdot 3 = 6$. Setiap transformasi $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dapat direpresentasikan oleh sebuah matriks 3×2. Ruang dari semua matriks $M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ memiliki dimensi 6, yang konsisten dengan teorema kita. Basis untuk $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ dapat direpresentasikan oleh matriks-matriks basis standar:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Contoh

Contoh 5.2 (Ruang Dual)**.** Kasus khusus yang penting adalah ketika $W = \mathbb{F}$ (lapangan itu sendiri, sebagai ruang vektor berdimensi 1). Ruang $V^* = L(V, \mathbb{F})$ disebut **ruang dual** dari V. Anggotanya adalah fungsional linear. Dimensinya adalah:

$$\dim(V^*) = \dim(L(V, \mathbb{F})) = \dim(V) \cdot \dim(\mathbb{F}) = n \cdot 1 = n$$

Jadi, dimensi ruang dual sama dengan dimensi ruang asalnya.