Infimum, Supremum, Barisan dan Deret

Kamis, 23 Maret 2023

Beberapa Sifat Penting dalam Analisis Real

Teorema 1 (Sifat Archimedian)
Untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli n yang memenuhi $\frac{1}{n} < \epsilon$.

Teorema 2
Diberikan bilangan real a dan b. Jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$ berlaku $a < b + \epsilon$, maka $a \leq b$.

Teorema 3 (Sifat Kepadatan Rasional di Real)
Untuk sebarang bilangan real a dan b dengan $a < b$, terdapat bilangan rasional r yang memenuhi $a < r < b$.

Latihan: Tunjukkan/buktikan teorema-teorema di atas.

0.1 Infimum dan Supremum

Definisi 1.1

Diberikan himpunan $E \subseteq \mathbb{R}$. Himpunan E dikatakan **terbatas di bawah** apabila terdapat bilangan A dengan sifat untuk setiap $x \in E$ berlaku $A \leq x$. Himpunan E dikatakan **terbatas di atas** apabila terdapat bilangan B dengan sifat untuk setiap $x \in E$ berlaku $x \leq B$. Himpunan E dikatakan **terbatas** apabila terdapat bilangan A, B dengan sifat untuk setiap $x \in A$ berlaku $A \leq x \leq B$.

Selanjutnya, bilangan A dan B yang memenuhi kondisi pada Definisi 1.1 berturut-turut disebut **batas bawah** dan **batas atas** himpunan E. Apabila himpunan E tidak memiliki batas bawah atau batas atas, maka himpunan E dikatakan **tidak terbatas**.

Definisi 1.2

Diberikan himpunan E tak kosong.

1. Diketahui E memiliki batas bawah. Bilangan a disebut **infimum** dari E, ditulis $a = \inf(E)$, apabila
   - untuk setiap $x \in E$ berlaku $a \leq x$.
   - untuk setiap t batas bawah dari E berlaku $t \leq a$.
2. Diketahui E memiliki batas atas. Bilangan b disebut **supremum** dari E, ditulis $b = \sup(E)$, apabila
   - untuk setiap $x \in E$ berlaku $x \leq b$.
   - untuk setiap s batas atas dari E berlaku $b \leq s$.

Berdasarkan definisi di atas, diperoleh beberapa sifat berikut ini.

Sifat 1.3

Beberapa sifat berkaitan dengan supremum dan infimum diberikan sebagai berikut:

- Diberikan E himpunan terbatas.
  1. $a = \inf(E)$ jika dan hanya jika a batas bawah dari E dan untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $x_\epsilon \in E$ dengan sifat $a \leq x_\epsilon < a + \epsilon$.
  2. $b = \sup(E)$ jika dan hanya jika b batas atas dari E dan untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $x_\epsilon \in E$ dengan sifat $b - \epsilon \leq x_\epsilon < b$.
- Jika himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ mempunyai batas atas, maka supremum dari A ada.
- (Sifat Inverval Nested) Diberikan barisan $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ dengan sifat $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. Terdapat bilangan x yang memenuhi $x \in I_n$ untuk setiap bilangan asli n.

Problems:

1. Diberikan himpunan E. Tunjukkan bahwa E terbatas jika dan hanya jika terdapat bilangan $M > 0$ dengan sifat untuk setiap $x \in E$ berlaku $|x| \leq M$.
2. Tentukan infimum dan supremum dari himpunan berikut (jika ada):
   (a) $E = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
   (b) $E = \left\{\frac{n-1}{n+1} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
   (c) $E = \left\{x^2 - 2x - 1 : x \in [0, 2]\right\}$.
   (d) $E = \left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{m+1} : n, m \in \mathbb{N}]\right\}$.
   (e) $E = \left\{(-1)^n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$.
   (f) $E = \left\{\frac{(-1)^n}{n} + \frac{(-1)^m}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$.
   (g) $E = \left\{x^3 + x + 1 : x \in \mathbb{R}\right\}$.
3. Diberikan barisan $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ dengan sifat $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. Tunjukkan bahwa jika berlaku $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, maka x yang memenuhi "$x \in I_n$ untuk setiap bilangan asli n" adalah tunggal.
4. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan real x yang memenuhi $x^2 = 3$.
5. Diketahui $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ fungsi dengan $f(x) = x$, jika x rasional dan $f(x) = 2x$ jika x irrasional. Tentukan $\inf\limits_{a\in[0,2]} \sup\limits_{h>a} \left\{\frac{f(a+h) - f(a)}{h}\right\}$.
6. Diberikan himpunan $A = \left\{e^{2x} + e^{\frac{1}{x}},\ x > 0\right\}$. Tentukan Sup($A$) dan Inf($A$) serta berikan buktinya.
7. Diketahui $S \subset \mathbb{R}$ tertutup dan $x \notin S$. Tunjukkan terdapat $y \in S$ sehingga
$$|y - x| = \sup\{|z - x| \ : \ z \in S\}.$$

0.2 Barisan Bilangan Real

Barisan bilangan real didefinisikan sebagai suatu fungsi dari $\mathbb{N}$ ke suatu himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$. Nilai-nilai fungsi tersebut dinamakan suku-suku barisan. Barisan biasanya dinotasikan dengan

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \qquad \{a_n\}_{n\geq 1}, \qquad \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \qquad (a_n)_{n=1}^{\infty}, \qquad \{a_1, a_2, \ldots\}, \qquad \{a_n\}, \qquad (a_n).$$

Sebarang barisan $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dengan $n_k < n_{k+1}$ dinamakan **subbarisan** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definisi 2.1

Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di $\mathbb{R}$ dikatakan **konvergen** ke $x \in \mathbb{R}$, ditulis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli n_0 dengan sifat untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x| < \epsilon$.

Lebih lanjut, x disebut **nilai limit** barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Perhatikan bahwa jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ memiliki limit, maka nilainya tunggal. Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dikatakan **terbatas** jika terdapat bilangan $M > 0$ sedemikian hingga $|x_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Definisi 2.2

Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di $\mathbb{R}$ dikatakan **Cauchy**, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli n_0 dengan sifat untuk setiap $n, m \geq n_0$ berlaku $|x_n - x_m| < \epsilon$.

Definisi 2.3

Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di $\mathbb{R}$ dikatakan **kontraktif**, jika terdapat $C \in (0, 1)$ dengan sifat untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|.$$

Diberikan barisan $\{x_n\}$ di $\mathbb{R}$. Jika $x_{n+1} \geq x_n$ ($x_{n+1} \leq x_n$) untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ maka barisan $\{x_n\}$ disebut barisan **monoton ke atas** (monoton ke bawah). Barisan disebut **monoton** jika barisan tersebut monoton ke atas atau monoton ke bawah. Berdasarkan definisi di atas, diperoleh beberapa sifat berikut ini.

Sifat 2.3

Beberapa sifat berkaitan dengan barisan diberikan sebagai berikut:

- Setiap barisan real konvergen merupakan barisan terbatas.
- Jika barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen, maka setiap subbarisan dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke nilai limit yang sama.
- Setiap barisan monoton dan terbatas merupakan barisan konvergen.
- Diberikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tidak terbatas atau terdapat dua subbarisan dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang konvergen ke nilai limit yang berbeda, maka barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tidak konvergen.
- (Teorema Subbarisan Monoton) Setiap barisan real memiliki subbarisan yang monoton.
- (Teorema Boltzano-Weierstrass) Setiap barisan real terbatas memiliki subbarisan yang konvergen.

- Diberikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jika ada bilangan x yang memenuhi sifat setiap subbarisan dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang konvergen memiliki nilai limit x, maka barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke x.
- Barisan real $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen **jika dan hanya jika** $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan Cauchy.
- Setiap barisan real kontraktif merupakan barisan Cauchy.
- (Teorema Apit/Squeeze Theorem) Diberikan barisan bilangan real $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan sifat
$$x_n \leq y_n \leq z_n$$
untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$, maka $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen dan
$$\lim_{n\to\infty} y_n = A.$$
- Diberikan barisan bilangan real $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan sifat $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = L$ ada. Jika $L < 1$, maka barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke 0.
- Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$
konvergen. Lebih lanjut, dinotasikan
$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Problems:

1. Tunjukkan bahwa jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan positif dan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0$
2. Diberikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Tunjukkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen dan tentukan nilai limitnya.
3. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n + \cos n}{n}$.
4. Tunjukkan bahwa jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan dengan $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{\sqrt{n}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen
5. Diberikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \frac{2}{n} + \frac{x_n}{2}$. Tunjukkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen.
6. Diberikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = a_n + \frac{x_n}{2}$ untuk suatu $\{a_n\}$ yang konvergen dan monoton turun. Tunjukkan bahwa $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen.
7. Tunjukkan bahwa jika subbarisan indeks genap dan subbarisan indeks ganjil dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke nilai limit yang sama, maka barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen.
8. Tunjukkan bahwa jika barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen, maka barisan $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $z_n = \max(x_n, y_n)$ konvergen.
9. Selidiki kekonvergenan barisan (x_n) jika $x_1 = 1$ dan
$$x_{n+1} = \sqrt{x_n^2 + \frac{1}{2^n}} \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

10. Misalkan barisan (a_n) dan (b_n) konvergen ke α dan β berturut-turut. Tunjukkan bahwa

$$\frac{a_0b_n + a_1b_{n-1} + \cdots + a_nb_0}{n}$$

konvergen ke $\alpha\beta$ saat $n \to \infty$.

11. Diberikan barisan real (a_n) dengan $a_1 = 2$ dan $a_{n+1} = \left(\frac{n}{n+1}\right)\sqrt{a_n}$ untuk $n \geq 1$. Tunjukkan bahwa barisan tersebut konvergen.

12. Diketahui barisan bilangan real (x_n) memenuhi untuk setiap $n \geq 2$ berlaku

$$3x_{n+1} = 4x_n - x_{n-1}.$$

Tunjukkan bahwa barisan (x_n) terbatas.

13. Diberikan barisan a_n turun monoton dan b_n barisan terbatas dengan $a_n, b_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $\sum a_n$ konvergen, buktikan bahwa

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)(a_n - a_{n-1})$$

konvergen.

14. Diberikan barisan bilangan real $\{a_n\}$ dan $\{b_n\}$ dengan $0 < b_1 < a_1$ dan

$$a_{n+1} = \sqrt{a_nb_n}, \qquad b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}}.$$

Tunjukkan bahwa kedua barisan tersebut konvergen ke limit yang sama.

0.3 Deret

Sebelumnya, telah dijelaskan beberapa karakteristik suatu barisan bilangan real. Selanjutnya, dipelajari karakteristik lain suatu barisan yaitu jumlahannya.

Definisi 3.1

Diberikan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan real. Barisan $S = \{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} x_n$$

disebut **deret** yang dibangun oleh barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, ditulis $\sum x_n$.

Bilangan S_n disebut **jumlahan parsial** deret di atas. Notasi yang digunakan untuk menyatakan deret beragam seperti:

$$\sum(x_n), \qquad \sum x_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} x_n.$$

Jika $\lim S$ ada, maka deret di atas dikatakan **konvergen** dan limitnya disebut jumlah atau nilai dari deretnya. Jika limitnya tidak ada, kita katakan deret S **divergen**.

Sifat 3.2

Beberapa sifat berkaitan dengan konvergensi deret diberikan sebagai berikut:

- Jika deret $\sum x_n$ konvergen, maka $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
- Jika deret $\sum |x_n|$ konvergen, maka $\sum x_n$ konvergen.
- Jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ merupakan barisan real positif, maka $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ terbatas.
- (Kriteria Cauchy) Deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat $M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian hingga jika $m > n \geq M(\varepsilon)$, maka berlaku
$$|s_m - s_n| = |x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_m| < \varepsilon.$$
- (Deret Harmonik) Diberikan bilangan positif p.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = \begin{cases} \text{konvergen}, & p > 1 \\ \text{divergen}, & p \leq 1 \end{cases}$$
- Diberikan deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ dengan $x_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Deret $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x_n$ konvergen jika $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.
- Deret
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$
konvergen.
- (Tes Banding) Diberikan barisan real $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan sifat
$$0 \leq x_n \leq y_n$$
untuk setiap $n \geq K$, untuk suatu $K \in \mathbb{N}$.

1. Jika deret $\sum y_n$ konvergen, maka deret $\sum x_n$ konvergen.
2. Jika deret $\sum x_n$ divergen, maka deret $\sum y_n$ divergen.

- (Tes Limit Banding) Diberikan barisan real $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang naik monoton tegas dan terdapat $r \in \mathbb{R}$ dengan
$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$
  1. Jika $r \neq 0$, maka deret $\sum x_n$ konvergen jika dan hanya jika deret $\sum y_n$ konvergen.
  2. Jika $r = 0$ dan deret $\sum y_n$ konvergen, maka deret $\sum x_n$ konvergen.
- Diberikan barisan real $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$
  1. Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1$, maka deret $\sum x_n$ konvergen.
  2. Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1$, maka deret $\sum x_n$ divergen.
  3. Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1$, maka deret $\sum x_n$ konvergen.
  4. Jika $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1$, maka deret $\sum x_n$ divergen.

Problems:

1. Tunjukkan bahwa deret $\sum \cos n$ divergen.
2. Tunjukkan bahwa deret $\sum \frac{\cos n}{n^2}$ konvergen.
3. Jika $\sum x_n$ konvergen dengan $x_n > 0$, apakah
   (a) $\sum x_n^2$ konvergen?
   (b) $\sum \sqrt{x_n}$ konvergen?
   (c) $\sum \sqrt{x_n x_{n+1}}$ konvergen?
4. Tentukan nilai dari
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$
5. Jika $\sum x_n$ konvergen dengan $x_n > 0$, maka tunjukkan bahwa
$$\sum \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$
   divergen.
6. Selidiki kekonvergenan deret berikut
   (a) $\sum \frac{|\cos 2^n|}{n}$
   (b) $\sum \frac{\cos(b \ln n)}{n^a}$
7. Tentukan semua bilangan positif a yang menyebabkan deret
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{(n!)^{1/n}}$$
   konvergen.

8. Diberikan $a > 0$ dan $\mathcal{A}$ merupakan koleksi semua barisan bilangan real positif (a_n) dengan sifat $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a$. Tentukan
$$\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \ : \ (a_n) \in \mathcal{A} \right\}.$$

9. Tunjukkan bahwa deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen jika dan hanya jika deret $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n+1]{a_n^n}$ konvergen.

SOAL-SOAL

1. Diberikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$. Tentukan nilai limit dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2. Diberikan $\alpha \in (0, 2)$. Tunjukkan barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dengan
$$a_{n+1} = \alpha a_n + (1 - \alpha)a_{n-1}$$
untuk $n \geq 1$ dan $a_0 = 1, a_1 = 2$ konvergen. Tentukan nilai limitnya!

3. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.

4. Diberikan barisan bilangan real (a_n) yang didefinisikan dengan $a_1 = \frac{3}{4}$ dan $a_{n+1} = 1 - a_n + a_n^2$. Apakah (a_n) konvergen? Jika ya, berapakah nilai limitnya?

5. Diberikan barisan $\{a_n\}$ dengan $a_1 = \frac{1}{3}, a_{2n} = \frac{1}{3}a_{2n-1}$ dan $a_{2n+1} = \frac{1}{3} + a_{2n},\ n = 1, 2, 3 \ldots$. Jika $A = \inf\{a_n\}, B = \sup\{a_n\}$, maka $B - A = \ldots$.

6. Jika barisan bilangan real (x_n) konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ maka untuk $n \to \infty$
$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$
konvergen ke ...

7. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1)$.

8. Tunjukkan bahwa jika $0 < b < 1$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$.

9. Tunjukkan bahwa jika $c > 0$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.

10. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

11. Misalkan $a_n = \sin n$ untuk sebarang $n \geq 1$. Tunjukkan barisan $\{a_n\}$ divergen!

12. Diberikan barisan bilangan real (a_n) yang didefinisikan dengan $a_1 = 0$ dan $a_{n+1} = 1 + a_n^2$. Apakah (a_n) konvergen? Jika ya, berapakah nilai limitnya?

13. Diberikan barisan bilangan real (a_n) yang didefinisikan dengan $a_1 = \dfrac{1}{2}$ dan $a_{n+1} = a_n^2 - 1$. Apakah (a_n) konvergen? Jika ya, berapakah nilai limitnya?

14. Misalkan $\{a_n\}$ adalah barisan bilangan-bilangan real positif dan misalkan $b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$. Misalkan $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \infty$. Jika $\{x_n\}$ adalah barisan bilangan real yang konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i = x$$
.

Referensi

1. Robert G. Bartle, *Introduction to Real Analysis*
2. W.J. Kaczor, M.T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis I*
3. W.J. Kaczor, M.T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis II*
4. W.J. Kaczor, M.T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis III*