1 Prinsip Dasar, Permutasi, dan Kombinasi

1.1 Beberapa Prinsip Dasar

Prinsip 1.1 (Penjumlahan). *Diberikan $A_1, A_2, \ldots, A_k$ himpunan-himpunan berhingga. Jika himpunan-himpunan tersebut saling asing, maka*

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|.$$

Akibat 1.2. *Diberikan himpunan berhingga X dan $A \subseteq X$. Berlaku*

$$|A| = |X| - |X \backslash A|.$$

Prinsip 1.3 (Perkalian). *Diberikan $A_1, A_2, \ldots, A_k$ himpunan-himpunan berhingga. Banyaknya pasangan terurut $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ dengan sifat $x_i \in A_i$ untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ adalah*

$$|A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n|.$$

Prinsip 1.4 (Inklusi-Ekslusi). *Untuk sebarang n himpunan berhingga, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, berlaku*

1. $|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$.
2. $|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$.
3. *secara umum,*

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i<j<k} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &\quad - \ldots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n|.\end{aligned}$$

Contoh 1.5. Tunjukkan bahwa banyaknya himpunan bagian dari $\{1, 2, \ldots, n\}$ adalah 2^n.

Penyelesaian: Misalkan A adalah suatu himpunan bagian dari $\{1, 2, \ldots, n\}$. Perhatikan bahwa setiap $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ berlaku tepat salah satu dari dua kemungkinan berikut: $i \in A$ atau $i \notin A$. Dengan demikian, banyaknya himpunan bagian dari $\{1, 2, \ldots, n\}$ sama dengan banyaknya pasangan terurut $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ di mana untuk setiap $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i = 1$ jika $i \in A$ atau $x_i = 0$ jika $i \notin A$. Berdasarkan prinsip penjumlahan, diperoleh banyaknya adalah

$$\underbrace{2 \times 2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ kali angka } 2} = 2^n.$$

■

Contoh 1.6. Tentukan banyaknya bilangan asli kurang dari 1000 yang tidak habis dibagi 4 dan tidak habis dibagi 6.

Penyelesaian: Misalkan A menyatakan himpunan bilangan asli kurang dari 1000 yang habis dibagi 4 dan B menyatakan himpunan bilangan asli kurang dari 1000 yang habis dibagi 6. Dengan demikian, himpunan bilangan asli kurang dari 1000 yang tidak habis dibagi 4 dan tidak habis dibagi 6 adalah

$\{1,2,\ldots,1000\}\backslash(A\cup B)$. Berdasarkan Akibat 1.2 dan Prinsip Inklusi-Ekslusi, diperoleh

$$\begin{aligned}|\{1,2,\ldots,1000\}\backslash(A\cup B)| = 1000-|A\cup B| &= 1000-(|A|+|B|-|A\cap B|)\\ &= 1000-\left(\lfloor\frac{1000}{4}\rfloor+\lfloor\frac{1000}{6}\rfloor-\lfloor\frac{1000}{12}\rfloor\right)\\ &= 1000-(250+166-83)=667.\end{aligned}$$

■

Latihan 1.7.

1. Sebuah dadu dilempar dua kali. Tentukan banyaknya kemungkinan jumlah angka yang muncul merupakan kelipatan 3.
2. Tentukan nilai n terbesar sehingga 5^n habis membagi $100!$.
3. Tentukan banyaknya faktor positif dari 6000.
4. Tentukan banyaknya bilangan asli 3-digit dengan digit ratusan lebih kecil daripada digit puluhan dan digit satuan.
5. Tentukan banyaknya bilangan asli kurang dari 1000 yang jumlah digit-digitnya merupakan bilangan ganjil.
6. Tentukan banyaknya bilangan asli 4-digit dengan tidak ada dua digit bersebelahan yang sama.

1.2 Permutasi dan Kombinasi

Sifat 1.8 (Permutasi)**.** *Diberikan himpunan $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ yang terdiri dari n objek. Banyaknya cara menyusun r objek berbeda dari A adalah*

$$P(n,r)=\frac{n!}{(n-r)!}.$$

Sifat 1.9 (Permutasi Siklis)**.** *Diberikan himpunan $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$ yang terdiri dari n objek. Banyaknya cara menyusun r objek berbeda dari A secara melingkar adalah*

$$\frac{P(n,r)}{r}.$$

Sifat 1.10 (Permutasi dengan repetisi)**.** *Diberikan n objek terdiri dari n_1 jenis 1, n_2 jenis 2, ..., dan n_k jenis k dengan $n_1+n_2+\ldots+n_k=n$. Banyak permutasi dari n objek tersebut adalah*

$$\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_k}=\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}.$$

Sifat 1.11 (Kombinasi)**.** *Diberikan himpunan $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$. Banyaknya subset dari A dengan r elemen adalah*

$$C(n,r)=\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Sifat 1.12 (Kombinasi dengan repetisi)**.** *Jika S adalah himpunan dengan n anggota, maka banyak cara memilih r anggota dari S dengan pengulangan (repetisi) diperbolehkan ada*

$$\binom{n-1+r}{r.}$$

Catatan: Hati-hati dalam menggunakan permutasi/kombinasi. Permutasi biasanya digunakan ketika susunan/urutan diperhatikan, sedangkan kombinasi digunakan untuk kasus yang tidak memperhatikan susunan/urutan.

Contoh 1.13. Tentukan banyaknya bilangan di antara 10000 dan 60000 yang tidak memiliki digit berulang.

Penyelesaian: Misalkan bilangan yang memenuhi kondisi soal adalah $\overline{ABCDE}$ dengan $1 \leq A \leq 5$ dan A, B, C, D, E berbeda. Banyaknya kemungkinan bilangan dapat dicari dengan memilih kemungkinan dari A terlebih dahulu. Kemudian, memilih dan menyusun B, C, D, E berbeda yang tersisa.

- Banyak cara memilih A ada $C(5, 1) = 5$.
- Banyak cara memilih dan menyusun B, C, D, E berbeda yang tersisa sama dengan banyak cara menyusun 4 objek berbeda dari 9 objek yang ada, yakni $P(9, 4) = 3024$

Jadi, banyaknya bilangan yang memenuhi kondisi soal ada $5 \times 3024 = 15120$ ■

Contoh 1.14. Seorang calon peserta KNMIPA diminta menyusun suatu untaian huruf yang merupakan permutasi dari huruf-huruf K, N, M, I, P, A. Tentukan banyaknya susunan untaian di mana tidak ada tiga konsonan berurutan.

Penyelesaian: Misalkan X menyatakan himpunan semua permutasi dari huruf-huruf K, N, M, I, P, A. Misalkan Y menyatakan himpunan susunan kata di X di mana tidak ada konsonan yang bersebelahan (diapit) dengan dua konsonan yang lain.

Perhatikan bahwa $X \backslash Y$ adalah himpunan susunan di mana terdapat tiga konsonan dalam posisi berurutan. Mencari $|X \backslash Y|$ dapat dilakukan dengan memilih dan menyusun posisi tiga konsonan terlebih dahulu, lalu menyusun posisinya terhadap 3 huruf tersisa. Namun, terdapat *double counting* dalam perhitungan ini, yakni ketika keempat konsonan saling berurutan. Banyaknya kasus ketika keempat konsonan saling berurutan sama dengan menyusun posisi keempat konsonan tersebut, lalu menyusun posisinya terhadap 2 huruf vokal yang ada. Dengan demikian,

$$|X \backslash Y| = C(4, 1)P(3, 3).P(4, 4) - P(4, 4)P(3, 3) = 4!4! - 4!3! = 576 - 144 = 432.$$

Dengan demikian,

$$|Y| = |X| - |X \backslash Y| = 6! - 432 = 288.$$

■

Contoh 1.15. Tunjukkan bahwa banyaknya solusi bulat non-negatif dari persamaan $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ adalah

$$\binom{n - 1 + r}{r.}$$

Penyelesaian: Misalkan $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Misalkan $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ adalah suatu solusi bulat non-negatif dari persamaan $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$. Perhatikan bahwa untuk setiap i, x_i dapat dipandang sebagai banyaknya i yang muncul ketika kita memilih r anggota dari S dengan pengulangan (repetisi) diperbolehkan. Dengan demikian, banyaknya solusi bulat non-negatif dari persamaan $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ sama dengan banyak cara memilih r anggota dari S dengan pengulangan (repetisi) diperbolehkan, yakni

$$\binom{n - 1 + r}{r.}$$

■

Contoh 1.16. Tunjukkan bahwa banyaknya solusi bulat positif dari persamaan $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ adalah

$$\binom{r-1}{n-1}$$

Penyelesaian: Misalkan $y_i = x_i - 1$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$. Diperoleh $y_i \geq 0$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, n$ dan

$$y_1 + y_2 + \ldots + y_n = r - n.$$

Dengan demikian, banyaknya solusi bulat positif dari persamaan $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r$ sama dengan banyaknya solusi bulat nonnegatif dari persamaan $y_1 + y_2 + \ldots + y_n = r - n$. Berdasarkan Contoh 1.15, diperoleh hasilnya adalah

$$\binom{n-1+(r-n)}{r-n} = \binom{r-1}{r-n} = \binom{r-1}{n-1}.$$

■

Latihan 1.17.

1. Tentukan banyaknya bilangan genap di antara 10000 dan 60000 yang tidak memiliki digit berulang.
2. Terdapat 7 siswa dan 3 siswi di lapangan. Ada berapa banyak cara menyusun mereka dalam satu barisan di mana tidak ada dua siswi bersebelahan.
3. Berapa banyaknya bilangan asli tiga digit $\overline{abc}$ sehingga $a > b > c$?
4. Tentukan banyaknya jalan latis terpendek yang menghubungkan titik $(0, 0)$ ke (m, n) pada bidang Cartesius.
5. Tentukan banyaknya cara menyusun posisi duduk 10 pasangan suami-istri melingkari suatu meja sehingga setiap istri duduk disebelah suaminya.
6. Tentukan banyaknya cara membagi 15 siswa ke dalam 5 kelompok dengan masing-masing kelompok beranggotakan tiga orang.
7. Tentukan banyaknya cara menyusun kata MATEMATIKA dengan syarat huruf T selalu bersebelahan.
8. Tentukan semua tripel bilangan bulat non-negatif (x, y, z) yang memenuhi

   $$x + y + z = 15$$

   dengan $x \geq 3$, $y \geq 4$, dan $z \geq 5$.

Soal 1.18. Uji kemampuan dan pemahamanmu dengan mengerjakan soal-soal berikut ini:

Level: ***Easy***

1. Tentukan banyaknya bilangan bulat yang habis membagi 20^{20}.
2. Berapa banyak cara menyusun huruf-huruf berikut $a, a, a, b, b, b, c, c, c$ sehingga tidak ada tiga huruf berurutan yang sama?
3. Tentukan banyaknya bilangan asli kurang dari 1000 yang jumlah digit-digitnya merupakan kelipatan 4.
4. Diberikan 17 titik pada dua garis yang saling tegak lurus dengan masing-masing garis memuat 9 titik. Tentukan banyaknya segitiga yang dapat dibentuk dari garis-garis tersebut.
5. Berapa banyaknya cara menempatkan 20 bola identik ke dalam 6 kotak berbeda?

Level: ***Medium***

6. Tentukan banyaknya bilangan empat digit $\overline{abcd}$ yang memenuhi kondisi $a \leq b-1 \leq c-2 \leq d-3$.
7. Tentukan semua tripel bilangan bulat (x, y, z) yang memenuhi
$$x + y + z = 15$$
dengan $1 \leq x \leq 5$, $2 \leq y \leq 6$, dan $3 \leq z \leq 9$.
8. Tentukan banyaknya cara 6 orang duduk mengelilingi dua buah meja identik dengan syarat setidaknya ada satu orang duduk pada setiap meja.
9. Tentukan banyaknya solusi bulat positif dari persamaan $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq r$.
10. Dalam sebuah tas terdapat 9 bola putih, 4 bola merah, dan 7 bola hitam. Tentukan banyaknya cara memilih 5 bola dari tas tersebut.

Level: ***Hard***

11. Didefinisikan $S(r, n)$ sebagai banyaknya cara mendistribusikan r buah objek berbeda ke dalam n kotak identik sehingga tidak ada kotak yang kosong. Tunjukkan bahwa
    (a) $S(r, 2) = 2^{r-1} - 1$.
    (b) $S(r, 3) = \frac{1}{2}(3^{r-1} + 1) - 2^{r-1}$
12. Tentukan banyaknya pasangan (A, B, C) dengan A, B, C adalah himpunan bagian yang saling asing dan tak kosong dari $\{1, 2, \ldots, n\}$.
13. Diberikan sebuah persegi yang terbagi menjadi 64 persegi-persegi kecil. Masing-masing persegi kecil akan dilabeli dengan bilangan 1 atau -1. Tentukan banyaknya cara melabeli persegi tersebut sehingga jumlah bilangan pada masing-masing kolom, baris, dan diagonalnya adalah kelipatan 4.
14. Diberikan bilangan asli m, n, r yang memenuhi kondisi $r + (m-1)(r-1) \leq n$. Tentukan banyaknya himpunan bagian dari $\{1, 2, \ldots, n\}$ dengan r anggota yang memenuhi kondisi selisih dari dua anggota berdekatan tidak kurang dari m.
15. Sebuah dadu dilempar sebanyak n kali. Tentukan nilai minimal dari n sehingga peluang angka 1 atau 4 muncul setidaknya satu kali, angka 2 atau 5 muncul setidaknya satu kali, dan angka 3 atau 6 muncul setidaknya satu kali adalah lebih dari $\frac{1}{2}$.

Soal 1.19. Soal-soal ONMIPA/KNMIPA tahun-tahun sebelumnya

1. (ONMIPA 2014) Pada suatu daerah, setiap nomor telepon terdiri dari 6 angka yang diawali dengan angka 6. Jika Anda mengajukan pemasangan untuk mendapatkan nomor telepon yang memuat tidak lebih dari 4 angka berbeda, besarnya peluang Anda mendapatkan nomor yang dimaksud adalah ...

2. (ONMIPA 2015) Banyaknya cara mengisi persegi panjang berukuran 2×16 dengan persegi panjang berukuran 2×2, 2×3, 2×4 adalah ...

3. (ONMIPA 2015) Enam komite akan dibentuk dari 14 orang. Bila 2 komite dari 6 komite ini terdiri atas 3 orang dan sisanya terdiri atas masing-masing 2 orang, maka banyaknya komite yang dapat dibentuk adalah ...

4. (ONMIPA 2015) Sebuah password terdiri atas 7 huruf dibentuk dengan menggunakan huruf kapital. Sebuah password dikatakan *legal* bila memenuhi dua kondisi: (i) tidak terdapat huruf berulang, (ii) huruf X dan Y tidak saling berdekatan. Besarnya peluang untuk membentuk parssword legal adalah

5. (ONMIPA 2016) Sebuah *polindrome* adalah sebuah barisan berhingga karakter sehingga dapat dibaca dengan cara yang sama baik dari kiri maupun kanan. SIKAPAKIS adalah sebuah palindrome. Banyaknya bilangan palindrome yang terdiri atas 7 digit sedemikian sehingga tidak terdapat digit yang muncul lebih dari dua kali adalah ...

6. (ONMIPA 2016) Dari himpunan 26 huruf $A = \{a, b, c, \ldots, y, z\}$ dibentuk susunan enam huruf berbeda (susunan tak perlu bermakna) sedemikian sehingga huruf pertama dan huruf terakhir adalah huluf vokal, dan sisanya adalah huruf konsonan. Jika huruf b selalu muncul pada susunan dan berdampingan dengan huruf c, maka banyaknya susunan yang mungkin adalah ...

7. (ONMIPA 2016) Banyaknya cara memfaktorkan bilangan 441.000 menjadi dua faktor positif m dan n yang saling relatif prima adalah ...

8. (ONMIPA 2016) Banyaknya bilangan antara 1 dan 500 yang tidak habis dibagi oleh 3, 4, dan 6 adalah ...

9. (ONMIPA 2017) Pada sebuah pesta pernikahan terdapat enam orang (termasuk pengantin) yang hendak berfoto. Banyak cara menata pose foto dalam satu baris dari keenam orang tersebut sedemikian sehingga pengantin berdiri tidak saling berdekatan adalah ....

10. (ONMIPA 2017) Sebuah rangkaian digit biner adalah sebuah barisan yang terdiri dari 1 dan 0. Banyaknya rangkaian digit biner yang terdiri atas tepat delapan digit 0 dan tepat sepuluh digit 1 sedemikian sehingga setiap kemunculan digit 0 segera diikuti oleh digit 1 adalah ...

11. (ONMIPA 2017) Sebuah keluarga besar beranggotakan 14 orang anak yang terdiri dari dua kelahiran kembar tiga identik, tiga kelahiran kembar dua identik, dan dua anak yang lain. Bila kembar identik tak dapat dibedakan, maka banyak pose foto berdiri dalam satu baris dari 14 orang anak tersebut adalah ...

12. (ONMIPA 2017) Banyak cara menugaskan 5 pekerjaan berbeda ke 4 orang pegawai berbeda sedemikian sehingga setiap pegawai ditugaskan ke paling sedikit satu pekerjaan adalah ...

13. (ONMIPA 2018) Banyaknya subset dari himpunan $\{1, 2, \ldots, 25\}$ yang terdiri dari 3 bilangan sehingga dalam sebuah subset tidak terdapat dua bilangan berurutan adalah ...

14. (ONMIPA 2018) Sebuah toko roti memproduksi 8 jenis donat. Donat dikemas dalam kotak berisi 12 buah donat. Banyaknya cara untuk mengisi sebuah kotak sehingga terdapat sedikitnya satu buah donat untuk setiap jenis adalah ...

15. (KNMIPA 2019) Sebuah toko menjual empat jenis kembang gula rasa: mangga, jeruk, durian dan kopi. Untuk keperluan sampel akan dipilih paling banyak 3 rasa mangga, paling banyak 3 rasa jeruk, paling banyak 2 rasa durian, dan paling banyak 2 rasa kopi. Banyaknya cara untuk memilih sampel berukuran 5 adalah

16. (KNMIPA 2019) Sebuah tes terdiri atas 10 soal. Setiap soal diberi nilai bulat dan paling sedikit diberi nilai 5. Bila soal pertama hanya boleh diberi nilai 10 atau 15 dan total nilai tes adalah 100, banyaknya cara memberi nilai pada tes tersebut adalah

17. (KNMIPA 2020) Banyaknya solusi bilangan bulat non negatif dari persamaan $a+b+c=13$ dengan $a \leq 4$, $2 \leq b \leq 5$, dan $1 \leq c \leq 6$ adalah $\ldots$

2 Paritas dan Pigeon Hole Principle

2.1 Paritas

Definisi 2.1 (Paritas)**.** Paritas merupakan suatu kondisi yang digunakan untuk menyatakan suatu bilangan bulat itu ganjil atau genap. paritas suatu bilangan bergantung hanya pada sisa pembagian bilangan tersebut oleh 2. Bilangan genap memiliki paritas 0 sebab sisa pembagiannya oleh 2 adalah 0, sedangkan bilangan ganjil memiliki paritas 1 sebab sisa pembagiannya oleh 2 adalah 1.

Prinsip paritas dalam masalah kombinatorik sendiri sering dipergunakan untuk mengeliminasi kemungkinan-kemungkinan tertentu dengan cara memperhatikan dua masalah saja, misalnya ganjil-genap, 0-1, hitam-putih, dan lain-lain.

Contoh 2.2. Jika a, b, c adalah bilangan ganjil, buktikan bahwa akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ bukan merupakan bilangan rasional.

Penyelesaian: Andaikan $x = \frac{p}{q}$ merupakan akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$. Diperoleh

$$ap^2 + bpq + q^2 = 0.$$

Perkatikan bahwa $\gcd(p, q) = 1$, akibatnya ruas kiri merupakan bilangan ganjil, sedangkan ruas kanan merupakan bilangan genap, suatu kontradiksi. Jadi, akar-akar persamaan kuadrat $ax^2 + bx + c = 0$ tidak mungkin merupakan bilangan rasional. ■

Contoh 2.3. Bidak raja pada permainan catur bergerak pada papan catur berukuran 8×8 dengan melalui semua kotak sekali dan kembali ke posisi semula. Tunjukkan total gerak diagonal yang dilakukannya ada sebanyak genap.

Penyelesaian: Warnai papan catur tersebut dengan warna hitam-putih seperti biasanya. Perhatikan bahwa total langkah yang dilakukan oleh bidak raja tersebut adalah 64 dan bidak raja hanya memiliki dua kemungkinan untuk melangkah:

- Melangkah vertikal atau horizontal. Dalam hal ini, bidak raja berpindah dari kotak hitam ke kotak putih atau dari kotak putih ke kotak hitam.
- Melangkah diagonal. Dalam hal ini, bidak raja berpindah dari kotak hitam ke kotak hitam atau dari kotak putih ke kotak putih.

Diandaikan banyak langkah diagonal adalah ganjil. Diperoleh banyak langkah vertikal atau horizontal adalah ganjil (genap-ganjil). Karena setiap langkah vertikal atau horisontal akan mengubah warna kotak bidak raja sedangkan setiap langkah diagonal tidak akan mengubah warna kotak bidak raja, maka kotak posisi bidak raja terakhir akan berbeda warna dengan kotak posisi bidak raja pertama. Hal ini kontradiktif dengan fakta bahwa posisi terakhir dan pertama dari bidak raja adalah di kotak yang sama. Jadi, banyak langkah diagonal haruslah genap. ■

Latihan 2.4.

1. Tunjukkan bahwa sebuah bidak kuda tidak dapat bergerak pada papan catur berukuran 5×5 dengan melalui semua kotak sekali dan kembali ke posisi semula.

2. Riou dan Jowy memiliki tiga lembar kertas. Masing-masing dari mereka memilih satu kertas kemudian memotongnya menjadi beberapa lembar lebih kecil. Riou memilih selembar kertas lalu memotongnya menjadi tiga lembar, sedangkan Jowy memilih selembar kertas lalu memotongnya menjadi lima lembar. Langkah ini dilakukan beberapa kali. Tunjukkan bahwa berapa banyak langkahpun yang mereka lakukan, banyak kertas tidak akan pernah tepat ada 100 lembar.

3. Mungkinkah sebuah papan catur berukuran 10×10 dipartisi menjadi 25 T-tetromino?

4. Pada sebuah papan catur berukuran 8×8 dengan warna hitam-putih seperti biasa, akan dilakukan beberapa langkah berikut:

   - Mewarnai ulang (putih$\rightarrow$hitam dan sebaliknya) satu baris atau satu kolom.
   - Mewarnai ulang (putih$\rightarrow$hitam dan sebaliknya) suatu kotak berukuran 2×2.

   Mungkinkan dilakukan beberapa langkah tersebut sehingga pada akhirnya hanya ada satu warna hitam pada papan catur tersebut?

5. Perhatikan jumlahan berikut
$$+1 + 2 + 3 + \ldots + 101.$$
   Tunjukkan bahwa jika beberapa tanda "+" diganti dengan tanda "-", hasil jumlahannya tidak akan pernah sama dengan nol.

2.2 Pigeon Hole Principle

Sifat 2.5 (Pigeon Hole Principle)**.**

(a) *Jika $n+1$ benda dimasukkan ke dalam n kotak, maka ada satu kotak yang berisi setidaknya dua benda.*

(b) *Jika lebih dari nm benda dimasukkan ke dalam n kotak, maka ada satu kotak yang berisi setidaknya $m+1$ benda.*

Contoh 2.6. Suatu pertemuan dihadiri oleh n orang. Tunjukkan bahwa terdapat dua orang yang memiliki banyak teman yang sama di pertemuan tersebut.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa banyaknya teman yang mungkin adalah $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Perhatikan bahwa tidak ada dua orang yang memiliki banyak teman 0 dan $n-1$ secara persamaan. Dengan demikian, ada $n-1$ kemungkinan banyaknya teman pada pertemuan tersebut. Karena dalam pertemuan tersebut terdapat n orang, berdasarkan PHP terdapat dua orang yang memiliki banyak teman yang sama di pertemuan tersebut. ■

Contoh 2.7. Tunjukkan bahwa diantara 6 orang, terdapat tiga di antaranya yang saling kenal atau tiga di antaranya yang tidak saling kenal.

Penyelesaian: Katakan keenam orang tersebut A, B, C, D, E, F. Pandang hubungan A dengan kelima orang lainnya. Berdasarkan PHP, terdapat tiga orang yang saling kenal dengan A atau tiga orang yang tidak dikenal A. WLOG, misalkan B, C, D saling kenal dengan A. Perhatikan bahwa jika dua diantara

B, C, D saling kenal, maka mereka dan A merupakan tiga orang yang saling kenal satu sama lain, sehingga pernyataan terbukti. Sebaliknya, jika ketiganya tidak saling kenal, maka pernyataan juga terbukti. ■

Contoh 2.8. Seorang pecatur mempunyai waktu 77 hari untuk persiapan suatu turnamen. Ia merencanakan sedikitnya bermain catur satu kali setiap jari, tetapi tidak lebih dari 132 kali bermain catur dalam periode 77 hari tersebut. Tunjukkan bahwa terdapat beberapa hari berurutan di mana ia bermain tepat 21 kali.

Penyelesaian: Misalkan a_i menyatakan banyaknya pertandingan sampai dengan hari ke-i. Diperoleh

$$1 \leq a_1 < \cdots < a_{77} \leq 132 \implies 22 \leq a_1 + 21 < a_2 + 21 < \cdots < a_{77} + 21 \leq 153.$$

Berdasarkan PHP, dari 154 bilangan $a_1, \ldots, a_{77}, a_1 + 21, \ldots, a_{77} + 21$, terdapat dua bilangan yang sama. Akibatnya, terdapat i, j sehingga $a_i = a_j + 21$. Jadi, ia tepat bermain 21 kali pada hari ke-$(j+1)$ sampai ke-i. ■

Latihan 2.9.

1. Tunjukkan bahwa untuk sebarang 10 titik yang terletak pada suatu persegi dengan panjang 3 cm, terdapat dua titik dengan jarak maksimal $\sqrt{2}$.
2. Di dalam suatu ruangan terdapat n orang. Tentukan nilai minimal dari n sehingga dapat dipastikan terdapat 20 orang memiliki bulan lahir yang sama.
3. Suatu pesta dihadiri oleh n orang, beberapa diantaranya saling berjabat tangan. Tunjukkan bahwa terdapat dua orang yang jumlah jabat tangannya sama.
4. Diketahui himpunan $A \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ dengan $|A| = n + 1$, dimana $n \in \mathbb{N}$.
   - (a) Tunjukkan bahwa terdapat dua bilangan di A yang jumlahnya $2n + 1$.
   - (b) Tunjukkan bahwa terdapat dua bilangan di A yang selisihnya n.
   - (c) Tunjukkan bahwa terdapat dua bilangan di A yang saling prima.
5. Diberikan 7 garis mendatar dan 3 garis vertikal pada bidang. Masing-masing titik potong akan diwarnai dengan satu warna, hitam atau putih.
   - (a) Tunjukkan bahwa pada setiap garis mendatar, terdapat setidaknya 2 titik berwarna sama.
   - (b) Tunjukkan bahwa terdapat persegi panjang yang keempat titik sudutnya berwarna sama.

Soal 2.10. Uji kemampuan dan pemahamanmu dengan mengerjakan soal-soal berikut ini:

Level: ***Easy***

1. Diberikan sebuah papan catur dengan dua kotak yang terletak pada ujung-ujung yang berseberangan dihilangkan. Tunjukkan bahwa bagaimanapun suatu bidak kuda diletakkan pada papan catur tersebut, dia tidak mungkin dapat melangkah melalui setiap kotak yang ada pada papan catur tersebut tepat sekali.

2. Terdapat beberapa orang menghadiri suatu pertemuan. Seseorang dikatakan *ganjil* jika dia berteman dengan sebanyak ganjil orang di pertemuan tersebut. Sebaliknya, seseorang dikatakan *genap* jika dia berteman dengan sebanyak genap orang di pertemuan tersebut. Tunjukkan bahwa terdapat sebanyak genap orang ganjil.

3. Suatu turnamen catur diikuti oleh 21 peserta. Apakah mungkin dibuat suatu jadwal pertandingan dimana setiap peserta bermain sebanyak ganjil kali pada turnamen tersebut.

4. Perhatikan barisan bilangan berikut: $6, 66, 666, 6666, \ldots$.

   (a) Apakah terdapat bilangan dari barisan tersebut yang habis dibagi oleh 2020?

   (b) Apakah terdapat bilangan dari barisan tersebut yang habis dibagi oleh 2021?

5. Titik latis pada bidang adalah titik yang mempunyai koordinat berupa pasangan bilangan bulat. Misalkan P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 adalah lima titik latis berbeda pada bidang. Buktikan bahwa terdapat sepasang titik (P_i, P_j), $i \neq j$ di mana titik tengah ruas garis P_iP_j merupakan titik latis.

Level: ***Medium***

6. Diketahui himpunan $A \subseteq \{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ dengan $|A| = n + 1$, dimana $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa $a, b \in A$, $a \neq b$, dengan sifat a habis membagi b.

7. Diketahui A himpunan yang terdiri dari 2020 bilangan asli berbeda. Tunjukkan terdapat subset B dari A dengan jumlah semua anggotanya habis dibagi 2020.

8. Diketahui $a_1, a_2, \ldots, a_{2021}$ adalah permutasi dari $1, 2, \ldots, 2021$. Tunjukkan bahwa

   $$(a_1 - 1)(a_2 - 2) \ldots (a_{2021} - 2021)$$

   merupakan bilangan genap.

9. Empat puluh satu benteng diletakkan pada papan catur berukuran 10×10. Tunjukkan bahwa dapat dipilih 5 diantaranya yang tidak menyerang satu sama lain.

10. Bilangan $1, 2, \ldots, 2022$ dituliskan pada papan tulis. Pada setiap langkah, Andi menghapus dua bilangan diantaranya dan menggantinya dengan menuliskan selisih bilangan tersebut. Tunjukkan bahwa setelah beberapa langkah, bilangan terakhir pada papan tersebut adalah bilangan ganjil.

Level: ***Hard***

11. Diberikan papan berukuran 5×41 yang dibagi menjadi 205 persegi-persegi kecil. Setiap persegi diwarnai dengan satu warna, merah atau putih. Tunjukkan bahwa terdapat 3 baris dan 3 kolom sedemikian sehingga 9 persegi irisannya memiliki warna yang sama.

12. Diberikan $X \subseteq \{1, 2, \ldots, 99\}$ dengan $|X| = 10$. Tunjukkan bahwa terdapat dua himpunan bagian dari X dimana jumlahan anggota masing-masing himpunan bagian tersebut adalah sama. Lebih lanjut, tunjukkan bahwa kedua himpunan tersebut dapat dipilih yang saling asing.

13. Diberikan sebuah matriks 21×21 yang setiap komponennya $+1$ atau -1. Misalkan b_i adalah hasil kali komponen-komponen baris ke-i dan k_j adalah hasil kali komponen-komponen kolom ke-j. Buktikan bahwa $b_1 + k_1 + b_2 + k_2 + \cdots + b_{21} + k_{21} \neq 0$

14. Diberikan bilangan asli $n \geq 2$ dan T_n menyatakan banyaknya himpunan tak kosong S dari $\{1, 2, \ldots, n\}$ dengan rata-rata anggota S merupakan bilangan asli. Tunjukkan bahwa $T_n - n$ selalu genap.

15. Sebuah kompetisi matematika diikuti oleh 90 peserta. Setiap peserta berkenalan dengan paling sedikit 60 peserta lainnya. Salah seorang peserta, Amin, menyatakan bahwa setidaknya terdapat empat orang peserta yang banyak teman barunya sama. Periksa kebenaran pernyataan Amin.

Soal 2.11. Soal-soal ONMIPA/KNMIPA tahun-tahun sebelumnya

1. (ONMIPA 2014) Sebuah titik $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \mathbb{R}^k$ dikatakan sebuah titik *lattice* jika a_i adalah bilangan bulat untuk semua $i = 1, 2, \ldots, k$. Perlihatkan bahwa setiap himpunan L_k yang terdiri dari $2^k + 1$ buah *lattices*, terdapat dua titik *lattice* $\ell_1, \ell_2 \in L_k$ sedemikian sehingga titik tengah dari ℓ_1 dan ℓ_2 adalah sebuah titik lattice.

2. (ONMIPA 2015) Sebuah papan catur C terdiri dari i baris dan j lajur. Misalkan, b menyatakan banyaknya maksimal benteng yang dapat diletakkan pada C sehingga tidak ada dua benteng yang saling meryerang. Tentukan banyaknya cara meletakkan b buah benteng pada C sedemikian sehingga tidak ada dua benteng yang saling menyerang.

3. (ONMIPA 2016) Perlihatkan bahwa untuk setiap himpunan yang terdiri dari 7 bilangan bulat berbeda, maka terdapat dua bilangan x dan y pada himpunan tersebut sedemikian sehingga $x + y$ atau $x - y$ adalah kelipatan 10.

4. (ONMIPA 2017) Pada sebuah lemari terdapat 25 helai baju yang terdiri atas 4 ukuran. Lima helai baju berukuran S, 4 helai baju berukuran M, 9 helai baju berukuran L, dan 7 helai baju berukuran XL. Untuk menjamin telah terambil 7 helai baju berukuran sama, maka sedikitnya total helai baju yang harus diambil dari lemari adalah ...

5. (ONMIPA 2017) Seorang petinju mempunyai waktu 75 minggu untuk mempertahan gelar. Untuk itu pelatih menjadwalkan program latih tanding. Pelatih merencanakan sedikitnya terdapat satu latih tanding dalam satu minggu, tetapi tidak lebih dari total 125 latih tanding dalam periode 75 minggu. Perlihatkan ada periode waktu yang terdiri atas beberapa minggu berturutan sehingga terdapat tepat 24 latih tanding dalam periode waktu tersebut.

6. (ONMIPA 2019) Misalkan n merupakan bilangan bulat positif yang tidak habis dibagi oleh 2 dan 5. Perlihatkan bahwa terdapat bilangan bulat q yang merupakan kelipatan dari n sedemikian sehingga semua digit dari q adalah 1.

7. (KNMIPA 2020) Diberikan himpunan $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Bila Anda memilih $2^{n-1} + 1$ himpunan bagian berbeda dari A, buktikan bahwa di antaranya, terdapat dua himpunan sedemikian sehingga yang satu adalah himpunan bagian dari yang lain.

3 Koefisien Binomial dan Pembuktian Kombinatorik

3.1 Koefisien Binomial/Multinomial

Teorema 3.1 (Binomial). *Diberikan bilangan real x dan y. Untuk setiap bilangan bulat nonnegatif n berlaku*

$$(x+y)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} x^{n-r} y^r.$$

Teorema 3.2 (Multinomial). *Diberikan bilangan real $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Untuk setiap bilangan bulat nonnegatif n berlaku*

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n = \sum_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} \binom{n}{n_1\ n_2\ \ldots\ n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k}.$$

Lebih lanjut, banyaknya suku-suku berbeda pada ekspansi tersebut adalah $\binom{n+m-1}{n}$.

Catatan: Beberapa identitas kombinatorik dapat dibuktikan secara aljabar dengan memanfaatkan kombinasi teorema Binomial/Multinomial dan teori pada Kalkulus, seperti turunan dan integral.

Contoh 3.3. Tentukan bentuk sederhana dari

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}.$$

Penyelesaian: Perhatikan bahwa untuk sebarang bilangan real x berlaku

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \binom{n}{3}x^3 + \ldots + \binom{n}{n}x^n = (1+x)^n.$$

Dengan menurunkan kedua ruas terhadap x, diperoleh

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + 3\binom{n}{3}x^2 + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1} = n(1+x)^{n-1}.$$

Dengan mensubstitusi $x=1$ diperoleh identitas yang diinginkan. ■

Contoh 3.4. Tunjukkan bahwa

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Penyelesaian: Perhatikan bahwa untuk sebarang bilangan real x berlaku

$$\begin{aligned}
& (1+x)^{2n} &&= (1+x)^n(1+x)^n \\
\iff & \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k &&= \left[\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\right]\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}x^j\right] \\
\iff & \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k &&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}x^{i+j} \\
\iff & \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k &&= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}x^{i+n-j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}x^{n+i-j}
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa koefisien suku x^n di ruas kiri adalah $\binom{2n}{n}$, sedangkan koefisien suku x^n di ruas kanan sama dengan jumlahan $\binom{n}{i}\binom{n}{j}$ dengan $i = j \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Dengan demikian, didapat

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2.$$

■

Latihan 3.5.

1. Tunjukkan bahwa
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2k} + \ldots = 2^{n-1}.$$
2. Tunjukkan bahwa
$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{2k+1} + \ldots = 2^{n-1}.$$
3. Tentukan bentuk sederhana dari
$$\binom{n}{1} - 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}n\binom{n}{n}.$$
4. Tunjukkan bahwa $\binom{n}{0} + \frac{1}{2}\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.
5. Tentukan koefisien konstan pada ekspansi $\left(\frac{1}{x} - 2 + x^2\right)^{10}$.
6. Tentukan koefisien x^5 pada ekspansi $(1 + x + x^2 + \cdots + x^6)^3$.

3.2 Pembuktian Kombinatorik

Definisi 3.6. Pembuktian kombinatorik adalah suatu metode membuktikan suatu identitas kombinatorik dengan memandang suatu masalah tertentu, kemudian dicari dua penyelesaian berbeda yang mana hasilnya masing-masing akan memberikan ekspresi ruas kiri dan ruas kanan dari identitas tersebut.

Langkah-langkah:

1. Cari suatu masalah yang penyelesaiannya terkait identitas yang akan dibuktikan.
2. Cari dua cara untuk menyelesaikan masalah tersebut sehingga masing-masing cara akan memberikan jawaban berupa ekspresi kiri dan ruas kanan dari identitas tersebut.
3. Karena kedua ekspresi tersebut merupakan jawaban dari masalah yang sama, maka dapat disimpulkan kedua ekspresi tersebut sama. Dengan demikian, identitas terbukti.

Contoh 3.7. Tunjukkan dengan pembuktian kombinatorik bahwa

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2k} + \cdots = 2^{n-1}$$

Penyelesaian: Pandang masalah berikut: Ada n mahasiswa. Akan dibentuk suatu tim yang terdiri dari sebanyak genap mahasiswa dari n mahasiswa tersebut. Tentukan banyaknya kemungkinan membentuk tim tersebut.

- **Cara I**: Misalkan banyaknya anggota dari tim tersebut adalah $2k$ dengan $k \in \{0, 1, 2, \ldots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$. Diperoleh banyaknya cara memilih $2k$ mahasiswa untuk tim tersebut ada $\binom{n}{2k}$. Dengan menjumlahkan hasil dari setiap nilai k yang mungkin, diperoleh banyaknya kemungkinan membentuk tim tersebut adalah
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2k} + \cdots$$
- **Cara II**: Pilih salah satu mahasiswa, katakan A. Perhatikan bahwa masing-masing dari $n-1$ mahasiswa selain A memiliki 2 kemungkinan, masuk ke dalam tim atau tidak masuk ke dalam tim. Ketika semua $n-1$ mahasiswa tersebut sudah menentukan pilihan, pilihan mahasiswa A kemudian disesuaikan agar jumlah anggota dari tim tersebut genap. Dengan demikian, banyaknya cara membentuk tim tersebut adalah 2^{n-1}.

Karena kedua cara tersebut merupakan penyelesaian masalah yang sama, diperoleh bahwa
$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{2k} + \cdots = 2^{n-1}.$$
Terbukti. ∎

Contoh 3.8. Tunjukkan identitas berikut dengan pembuktian kombinatorik
$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$

Penyelesaian: Pandang masalah berikut: Ada n mahasiswa. Akan dibentuk suatu tim yang terdiri dari beberapa dari mahasiswa tersebut dan satu orang ditunjuk sebagai ketuanya. Tentukan banyaknya kemungkinan membentuk tim tersebut.

- **Cara I**: Misalkan banyaknya anggota dari tim tersebut adalah k dengan $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Banyaknya cara memilih anggota dari tim tersebut ada $\binom{n}{k}$ dan banyaknya cara memilih satu ketua dari k anggota yang ada adalah k. Dengan demikian, banyaknya kemungkinan membentuk tim tersebut dengan k anggota ada $k\binom{n}{k}$. Selanjutnya, dengan menjumlahkan hasil dari setiap nilai k yang mungkin, diperoleh banyaknya kemungkinan membentuk tim tersebut adalah
$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n}.$$
- **Cara II**: Dipilih salah satu dari n mahasiswa untuk menjadi ketua tim terlebih dahulu, yakni ada n kemungkinan. Selanjutnya, dipilih beberapa anggota sisanya dari $n-1$ mahasiswa tersisa. Banyaknya cara memilih beberapa anggota sisanya dari $n-1$ mahasiswa tersisa ada sebanyak 2^{n-1} (setiap mahasiswa yang tersisa memiliki 2 pilihan, masuk tim atau tidak masuk tim). Dengan demikian, banyaknya kemungkinan membentuk tim tersebut ada $n2^{n-1}$.

Karena kedua cara tersebut merupakan penyelesaian masalah yang sama, diperoleh bahwa
$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + \ldots + n\binom{n}{n} = n2^{n-1}.$$
Terbukti. ∎

Contoh 3.9. Tunjukkan dengan pembuktian kombinatorik bahwa

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Penyelesaian: Pandang masalah berikut: Ada $2n$ orang terdiri dari n pria dan n wanita. Akan dibentuk suatu tim yang terdiri dari n orang dari $2n$ orang tersebut. Tentukan banyaknya kemungkinan membentuk tim tersebut.

- **Cara I**: Misalkan banyaknya anggota pria dari tim tersebut adalah k dengan $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$. Artinya banyaknya anggota wanita dari tim tersebut adalah $n - k$. Perhatikan bahwa banyaknya cara memilih k anggota pria untuk tim tersebut ada $\binom{n}{k}$ dan banyaknya cara memilih $n-k$ anggota wanita untuk tim tersebut ada $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Dengan demikian, banyaknya kemungkinan membentuk tim tersebut ada $\binom{n}{k}\binom{n}{k} = \binom{n}{k}^2$. Selanjutnya, dengan menjumlahkan hasil dari setiap nilai k yang mungkin, diperoleh banyaknya kemungkinan membentuk tim tersebut adalah

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2.$$

- **Cara II**: Dengan menggunakan formula kombinasi, dapat dengan mudah diperoleh bahwa banyaknya cara memilih n orang dari $2n$ orang untuk dijadikan suatu tim adalah $\binom{2n}{n}$.

Karena kedua cara tersebut merupakan penyelesaian masalah yang sama, diperoleh bahwa

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Terbukti. ■

Latihan 3.10. Tunjukkan dengan pembuktian kombinatorika identitas-identitas berikut:

1. $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$.
2. $\binom{n+1}{r} = \binom{n}{r-1} + \binom{n-1}{r} + \binom{n-1}{r-1}$.
3. $\binom{n}{m}\binom{m}{r} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{m-r}$.
4. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$.
5. $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{2k+1} + \cdots = 2^{n-1}$.
6. $\binom{m}{0}\binom{n}{r} + \binom{m}{1}\binom{n}{r-1} + \cdots + \binom{m}{r}\binom{n}{0} = \binom{m+n}{r}$ *(Identitas Vardermonde)*

Soal 3.11. Uji kemampuan dan pemahamanmu dengan mengerjakan soal-soal berikut ini:

Level: ***Easy***

1. Tentukan nilai dari $\displaystyle\sum_{r=0}^{n} \frac{(-1)^r}{r+1}\binom{n}{r}$.

2. Dengan menyelidiki banyaknya anggota himpunan $\{(a,b,c) : a,b,c \in \mathbb{N},\ a < c,\ b < c \leq n+1\}$, tunjukkan bahwa
$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \binom{n+1}{2} + 2\binom{n+1}{3}.$$

3. Tunjukkan dengan pembuktian kombinatorik bahwa
$$\binom{2n+2}{n+1} = \binom{2n}{n+1} + 2\binom{2n}{n} + \binom{2n}{n-1}.$$

4. Tentukan koefisien x^{17} dari ekspansi $(x^4 + x^5 + x^6 + \cdots)^3$.

5. Tunjukkan dengan pembuktian kombinatorik bahwa
$$\binom{n}{1} + 3\binom{n}{3} + \cdots + (2k+1)\binom{n}{2k+1} + \cdots = n2^{n-2}$$

Level: ***Medium***

6. Tentukan koefisien x^n dan x^{n+1} dari ekspansi
$$(1+x)^{2n} + x(1+x)^{2n-1} + x^2(1+x)^{2n-2} + \cdots + x^n(1+x)^n.$$

7. Tunjukkan dengan pembuktian kombinatorik bahwa
$$\sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}\binom{n}{m} = \binom{n}{k}2^{n-k}.$$

8. Buktikan identitas kombinatorik berikut (Identitas Chu Shih-Chieh):
   (a) $\displaystyle\binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \ldots + \binom{n}{r} = \binom{n+1}{r+1}$.
   (b) $\displaystyle\binom{r}{0} + \binom{r+1}{1} + \ldots + \binom{r+k}{k} = \binom{r+k+1}{k}$.

9. Berikan dua buah bukti bahwa identitas berikut benar untuk setiap $n \geq 2$.
$$\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{3} + \cdots + n^2\binom{n}{n} = n(n+1)2^{n-2}$$

10. Tunjukkan dengan pembuktian kombinatorik bahwa
$$\sum_{r=1}^{n} r\binom{n}{r}\binom{m}{r} = n\binom{n+m-1}{m}.$$

Level: ***Hard***

11. Tunjukkan bahwa
$$\sum_{r=1}^{n}(n+1-r)\binom{r+1}{2}=\binom{n+3}{4}.$$

12. Tuliskan sebuah argumentasi kombinatorial untuk memperlihatkan
$$\sum_{r=1}^{n}(nr-r^2)\binom{n}{r}^2=n^2\binom{2n-2}{n}$$

13. Tunjukkan bahwa
$$\binom{p+q}{q}\binom{r}{r}+\binom{p+q-1}{q}\binom{r+1}{r}+\ldots+\binom{q}{q}\binom{r+p}{r}=\binom{p+q+r+1}{p}.$$

14. Tunjukkan bahwa
$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}\left[2^r-\binom{n}{r}-1\right]=0.$$

15. Diberikan $1 \leq r \leq n$ dan pandang himpunan-himpunan bagian $\{1, 2, \ldots, n\}$ dengan r anggota. Misalkan $F(n, r)$ menyatakan rata-rata anggota terkecil dari masing-masing himpunan bagian tersebut. Tunjukkan bahwa
$$F(n,r)=\frac{n+1}{r+1}.$$

Soal 3.12. Soal-soal ONMIPA/KNMIPA tahun-tahun sebelumnya

1. (ONMIPA 2014) Koefisien dari x^{128} dalam ekspansi $\left(\frac{x}{2}-\frac{2}{7x}\right)^{236}$ adalah ...

2. (ONMIPA 2014) Untuk bilangan asli n nilai dari $3\cdot 2\binom{n}{3}+4\cdot 3\binom{n}{4}+\cdots+n\cdot(n-1)\binom{n}{n}$ adalah ...

3. (ONMIPA 2015) Untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$, nilai dari
$$\frac{1}{n}\binom{n}{1}+\frac{2}{n}\binom{n}{2}+\cdots+\frac{n-1}{n}\binom{n}{n-1}$$
adalah ...

4. (ONMIPA 2015) Misalkan n adalah bilangan bulat positif. Tunjukkan bahwa
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}.$$

5. (ONMIPA 2016) Tuliskan sebuah argumentasi kombinatorial untuk memperlihatkan
$$\binom{2n}{2}=2\binom{n}{2}+n^2$$

6. (ONMIPA 2017) Diberikan bilangan bulat $n \geq 5$. Tuliskan sebuah argumentasi kombinatorial untuk memperlihatkan bahwa
$$\binom{2n}{5}=2\binom{n}{5}+2n\binom{n}{4}+(n^2-n)\binom{n}{3}.$$

7. (ONMIPA 2018) Untuk bilangan bulat positif $n \geq 2$, nilai dari $\sum_{k=2}^{n}(-1)^k k\binom{n}{k}$ adalah ....

8. (KNMIPA 2019) Diberikan bilangan bulat $n \geq 4$. Tuliskan argumentasi kombinatorial untuk memperlihatkan
$$\sum_{k=4}^{n}k\binom{n-4}{k-4}\binom{n+4}{k}=(n+4)\binom{2n-1}{n-1}.$$

9. (KNMIPA 2020) Untuk bilangan bulat $x, y \geq 1$, tuliskan bukti kombinatorial dari
$$xy=\binom{x+y}{2}-\binom{x}{2}-\binom{y}{2}.$$

4 Fungsi Pembangkit dan Relasi Rekurensi

4.1 Fungsi Pembangkit (Biasa)

Definisi 4.1 (Fungsi Pembangkit)**.** Diberikan barisan bilangan real $(a_n)_{n\geq 0}$. Fungsi pembangkit (fungsi pembangkit biasa) dari barisan ini adalah deret pangkat yang koefisien-koefisiennya adalah suku-suku barisan tersebut.

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n.$$

Sifat 4.2. *Diketahui* $A(x)$ *dan* $B(x)$ *berturut-turut adalah fungsi pembangkit dari barisan* $(a_n)_{n\geq 0}$ *dan* $(b_n)_{n\geq 0}$.

barisan $(c_n)_{n\geq 0}$	fungsi pembangkit
$c_n = \alpha a_n + \beta b_n$	$\alpha A(x) + \beta B(x)$
$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$	$A(x)B(x)$
$c_n = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq n \leq m-1 \\ a_{n-m} & , \ n \geq m. \end{cases}$	$x^mA(x)$
$c_n = k^na_n$	$A(kx)$
$c_n = (n+1)a_{n+1}$	$A'(x)$
$c_0 = 0$ dan $c_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}, \ n \geq 0$	$\int_0^x A(t)dt$

Beberapa identitas aljabar yang sering terpakai :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \\
\frac{1}{(1-x)^2} &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots \\
\frac{1}{(1-x)^n} &= 1 + \binom{1+n-1}{1}x + \binom{2+n-1}{2}x^2 + \cdots + \binom{r+n-1}{r}x^r + \cdots \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k}x^k, \quad \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}.
\end{aligned}$$

Contoh 4.3. Tentukan fungsi pembangkit dari barisan $(c_n)_{n\geq 0}$ dengan $c_n = (n+2)(-2)^n$.

Penyelesaian: Misalkan $a_n = (-2)^n$. Perhatikan bahwa fungsi pembangkit dari $(a_n)_{n\geq 0}$ adalah

$$A(x) = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + \cdots = \frac{1}{1+2x}$$

Di lain pihak

$$c_n = -\frac{1}{2}(n+1)a_{n+1} + a_n.$$

Dengan demikian, fungsi pembangkit dari $(c_n)_{n\geq 0}$ adalah

$$-\frac{1}{2}A'(x) + A(x) = \frac{1}{(1+2x)^2} + \frac{1}{1+2x} = \frac{2(x+1)}{(1+2x)^2}.$$

■

Contoh 4.4. Diketahui fungsi pembangkit dari $(a_n)_{n\geq 0}$ adalah $A(x)$. Tentukan fungsi pembangkit dari (c_n) dengan $c_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Penyelesaian: Misalkan $b_n = 1$ untuk setiap $n \geq 1$. Perhatikan bahwa fungsi pembangkit dari $(b_n)_{n\geq 0}$ adalah

$$B(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1+x}$$

Di lain pihak

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \ldots + a_n b_0.$$

Dengan demikian, fungsi pembangkit dari $(c_n)_{n\geq 0}$ adalah

$$A(x)B(x) = \frac{A(x)}{1-x}.$$

■

Salah satu aplikasi dari fungsi pembangkit adalah untuk mencari banyaknya solusi suatu persamaan linear. Diberikan bilangan asli k. Misalkan a_n menyatakan banyaknya penyelesaian bulat nonnegatif persamaan

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$$

dengan syarat $a_i \leq x_i \leq b_i$ untuk setiap i. Perhatikan bahwa fungsi pembangkit dari barisan $(a_n)_{n\geq 0}$ adalah

$$A(x) = (x^{a_1} + \ldots + x^{b_1})(x^{a_2} + \ldots + x^{b_2})\ldots(x^{a_k} + \ldots + x^{b_k}).$$

Dengan demikian, a_n adalah koefisien x^n dari $A(x)$.

Contoh 4.5. Tentukan banyaknya penyelesaian bulat persamaan $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ dengan $0 \leq x_1 \leq 4$, $1 \leq x_2 \leq 5$ dan $2 \leq x_3 \leq 6$.

Penyelesaian: Misalkan a_n menyatakan banyaknya penyelesaian bulat nonnegatif persamaan

$$x_1 + x_2 + x_3 = n$$

dengan $0 \leq x_1 \leq 4$, $1 \leq x_2 \leq 5$ dan $2 \leq x_3 \leq 6$. Perhatikan bahwa fungsi pembangkit dari barisan $(a_n)_{n\geq 0}$ adalah

$$\begin{aligned}
A(x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5)(x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6) \\
&= x^3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)^3 \\
&= x^3\frac{(1-x^5)^3}{(1-x)^3} \\
&= x^3(1 - 3x^5 + 3x^{10} - x^{15})\left(1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \ldots\right)
\end{aligned}$$

Dengan demikian, a_7 adalah koefisien x^7 dari $A(x)$, yakni 15. ■

Latihan 4.6.

1. Tentukan fungsi pembangkit dari barisan $(a_n)_{n\geq 0}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

   (a) $a_n = (-1)^n$.
   (b) $a_n = n$.
   (c) $a_n = 2n+1$.
   (d) $a_n = (n+1)(-1)^n$.
   (e) $a_n = (-1)^n 2^n$.
   (f) $a_n = \binom{n+2}{2}$.
   (g) $a_n = 2^n + 3^n$.
   (h) $a_n = \begin{cases} 1, & n \text{ ganjil} \\ 0, & n \text{ genap.} \end{cases}$.
   (i) $a_n = \frac{1}{n}$, $a_0 = 0$.

2. Diketahui fungsi pembangkit dari $(a_n)_{n\geq 0}$ adalah $A(x)$. Tentukan fungsi pembangkit dari (c_n) dengan

   (a) $c_n = a_{n+1}$.
   (b) $c_n = a_{n+1} - a_n$.
   (c) $c_n = a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \ldots + a_{n-1} a_1 + a_n a_0$.
   (d) $c_n = n a_n$.

4.2 Relasi Rekurensi (Linear)

Definisi 4.7. Diketahui suatu permasalahan kombinatorik pada saat n. Misalkan a_n adalah penyelesaian permasalahan tersebut. Salah satu cara mencari penyelesaian masalah tersebut adalah dengan menghubungkannya dengan permasalahan pada saat $n-1, n-2, \ldots, 1$. Dengan kata lain, mencari hubungan a_n dengan $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1$. Hubungan ini yang dinamakan dengan relasi rekurensi.

Relasi rekurensi dapat berbentuk persamaan linear maupun nonlinear. Penyelesaian relasi rekurensi secara umum bergantung pada bentuk persamaannya.
Apabila relasi rekurensi tersebut berbentuk linear sebagai berikut:

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r} = f(n), \tag{1}$$

ada metode khusus yang dapat digunakan untuk mencari penyelesaiannya. Berikut metode penyelesaiannya:

1. Cari penyelesaian relasi rekurensi linear homogen terlebih dahulu, yakni:

   $$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \ldots + c_r a_{n-r} = 0 \tag{2}$$

   Untuk mencari penyelesaiannya, lakukan substitusi $a_i = x^i$ ke dalam persamaan tersebut, kemudian sederhanakan untuk mendapatkan persamaan berikut (persamaan karakteristik):

   $$c_0 x^r + c_1 x^{r-1} + \ldots + c_{r-1} x + c_r = 0.$$

   Misalkan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ penyelesaian persamaan karakteristik di atas. Jika $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ akar-akar berbeda dari persamaan karakteristik, maka penyelesaian persamaan (2) adalah

   $$a_n^{(h)} = A_1(\alpha_1)^n + A_2(\alpha_2)^n + \ldots + A_r(\alpha_r)^n,$$

   dimana A_i konstanta. Jika ada α_i yang memiliki multiplisitas $m_i > 1$, maka ganti $A_i(\alpha_i)^n$ dengan $(A_{i1} + A_{i2}n + \ldots + A_{im_i} n^{m_i - 1})(\alpha_i)^n$ dimana A_{ij} konstanta.

2. Cari satu penyelesaian dari persamaan (1), namakan $a_n^{(k)}$. Mencari penyelesaian persamaan (1) bergantung pada fungsi $f(n)$ yang diberikan, sehingga tidak ada metode umum yang selalu dapat digunakan untuk mencari penyelesaian tersebut. Namun, apabila $f(n)$ berbentuk polinomial atau berbentuk pangkat, maka $a_n^{(p)}$ dapat dipilih yang bentuknya serupa dengan bentuk dari $f(n)$ (Apabila bentuk pilihan $a_n^{(p)}$ sudah termuat di dalam penyelesaian homogen, coba pilihan baru dengan mengalikan bentuk pilihan awal dengan n).

3. Penyelesaian umum persamaan relasi rekurensi (1) diberikan sebagai berikut:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}.$$

Contoh 4.8. Selesaikan relasi rekurensi berikut

$$a_n - 2a_{n-1} = 2.3^n \tag{3}$$

diberikan $a_0 = 1$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa relasi rekurensi homogen $a_n - 2a_{n-1} = 0$ memiliki persamaan karakteristik $x - 2 = 0$. Diperoleh solusi persamaan tersebut adalah $x = 2$. Dengan demikian, solusi umum relasi rekurensi homogen tersebut adalah

$$a_n^{(h)} = A2^n.$$

Selanjutnya, akan dicari solusi khusus persamaan (3). Perhatikan bahwa $f(n) = 2.3^n$. Oleh sebab itu, dicoba solusi khusus $a_n^{(p)}$ yang berbentuk $B3^n$. Substitusi ke persamaan (3) diperoleh

$$B3^n - 2B3^{n-1} = 2.3^n \iff B.3^{n-1} = 6.3^{n-1}$$

atau ekuivalen dengan $B = 6$. Dengan demikian, solusi umum persamaan (3) adalah

$$a_n = A2^n + 6.3^n$$

Selanjutnya, karena $a_0 = 1$, maka diperoleh $A = -5$. Jadi, $a_n = -5.2^n + 6.3^n$.

Alternatif penyelesaian (dengan fungsi pembangkit): Misalkan $A(x)$ fungsi pembangkit dari barisan $(a_n)_{n\geq 0}$.

$$A(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i.$$

Kalikan kedua ruas persamaan (3) dengan x^n, diperoleh

$$a_nx^n - 2a_{n-1}x^n = 2.3^nx^n.$$

Jumlahkan dari $n = 1$ sampai tak hingga, diperoleh

$$(a_1x^1 + \ldots + a_nx^n + \ldots) - 2(a_0x^1 + a_1x^2 + \ldots + a_nx^{n+1} + \ldots) = 2(3x^1 + \ldots + 3^nx^n + \ldots).$$

Didapat

$$(A(x) - a_0) - 2x(a_0 + a_1x^1 + \ldots + a_nx^n + \ldots) = 2(1 + (3x) + \ldots + (3x)^n + \ldots) - 2$$

$$\iff A(x) - 1 - 2xA(x) = \frac{2}{1-3x} - 2$$

$$\iff A(x) = \frac{1+3x}{(1-2x)(1-3x)} = \frac{-5}{1-2x} + \frac{6}{1-3x} = -5\sum_{i=0}^{\infty}(2x)^i + 6\sum_{i=0}^{\infty}(3x)^i$$

Jadi, $a_n = -5.2^n + 6.3^n$. ■

Contoh 4.9. Selesaikan relasi rekurensi berikut

$$a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 4.3^n \tag{4}$$

diberikan $a_0 = 1$ dan $a_1 = 5$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa relasi rekurensi homogen $a_n - 2a_{n-1} - 3a_{n-2} = 0$ memiliki persamaan karakteristik $x^2 - 2x - 3 = 0$. Diperoleh solusi persamaan tersebut adalah $x = -1$ atau $x = 3$. Dengan demikian, solusi umum relasi rekurensi homogen tersebut adalah

$$a_n^{(h)} = A(-1)^n + B3^n.$$

Selanjutnya, akan dicari solusi khusus persamaan (4). Perhatikan bahwa $f(n) = 4.3^n$ dan bentuk 3^n sudah terlibat dalam solusi homogen. Oleh sebab itu, dicoba solusi khusus $a_n^{(p)}$ yang berbentuk $Cn3^n$. Substitusi ke persamaan (3) diperoleh

$$Cn3^n - 2C(n-1)3^{n-1} - 3C(n-2)3^{n-2} = 4.3^n \iff 4C3^{n-1} = 12.3^{n-1}$$

atau ekuivalen dengan $C = 3$. Dengan demikian, solusi umum persamaan (4) adalah

$$a_n = A(-1)^n + B3^n + 3n.3^n = A(-1)^n + B3^n + n3^{n+1}$$

Selanjutnya, karena $a_0 = 1$ dan $a_1 = 5$, maka diperoleh $A = 2$ dan $B = -1$. Jadi, $a_n = 2(-1)^n - 3^n + n3^{n+1}$. ∎

Relasi rekurensi dapat dimanfaatkan juga untuk menyelesaikan beberapa masalah kombinatorika.

Contoh 4.10. Tentukan banyaknya bilangan biner 2021-digit dimana digit 0 selalu diikuti digit 1.

Penyelesaian: Diambil sebarang bilangan asli n. Misalkan a_n menyatakan banyaknya bilangan biner n-digit dimana digit 0 selalu diikuti digit 1. Akan dicari relasi rekurensi dari (a_n). Perhatikan bahwa $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, dan $a_3 = 3$. Untuk kasus $n \geq 3$ secara umum, tinjau kasus digit terakhir bilangan yang terbentuk.

- Jika digit terakhir adalah 1, maka banyak bilangan biner n-digit yang memenuhi kondisi tersebut dan kondisi soal sama dengan banyak bilangan biner $n-1$-digit yang memenuhi kondisi soal, yakni ada a_{n-1}.
- Jika digit terakhir adalah 0, maka digit satu dari terakhir haruslah 1 sebab digit 0 selalu diikuti digit 1. Dengan demikian, banyak bilangan biner n-digit yang memenuhi kondisi tersebut dan kondisi soal sama dengan banyak bilangan biner $n-2$-digit yang memenuhi kondisi soal, yakni ada a_{n-2}.

Dengan demikian diperoleh relasi rekurensi:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

dengan $a_1 = 1$ dan $a_2 = 2$. Perhatikan relasi rekurensi tersebut homogen dan memiliki penyelesaian umum:

$$a_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Karena $a_1 = 1$ dan $a_2 = 2$, diperoleh $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}$ dan $B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}$. Jadi, banyaknya bilangan biner 2021-digit dimana digit 0 selalu diikuti digit 1 adalah

$$a_{2021} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2021} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{5}}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2021}.$$

∎

Latihan 4.11.

1. Tentukan penyelesaian relasi-relasi rekurensi berikut:
   (a) $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ dengan $a_1 = a_2 = 1$.
   (b) $a_{n+1} = 2a_n + 2^n$ dengan $a_0 = 1$.
   (c) $a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2} + 1$ dengan $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$.
   (d) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} + n$ dengan $a_0 = 0$ dan $a_1 = 1$.
   (e) $a_n = 3\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ dengan $a_0 = 1$.

2. (a) Berikan sebuah relasi rekurensi linear homogen yang memenuhi persamaan $a_n = 2^n + 3^n$ untuk setiap $n \geq 0$. Apakah relasi yang memenuhi tunggal?
   (b) Berikan sebuah relasi rekurensi linear nonhomogen yang memenuhi persamaan $a_n = 2^n + 3^n$ untuk setiap $n \geq 0$. Apakah relasi yang memenuhi tunggal?

Soal 4.12. Uji kemampuan dan pemahamanmu dengan mengerjakan soal-soal berikut ini:

Level: ***Easy***

1. Tentukan banyaknya cara mewarnai setiap kotak pada papan catur berukuran $1 \times n$ dengan satu warna dari merah atau biru dengan syarat kotak yang berwarna merah ada sebanyak ganjil.
2. Tentukan banyaknya bilangan n digit yang tidak memiliki dua digit 0 berurutan.
3. Tunjukkan bahwa fungsi pembangkit dari barisan $\left(\binom{2n}{n}\right)_n$ adalah $\dfrac{1}{\sqrt{1-4x}}$.
4. Tentukan penyelesaian relasi-relasi rekurensi berikut $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = \binom{n+3}{3}$.
5. Diketahui a_n adalah banyaknya bilangan dengan n digit dimana setiap digitnya adalah 1,2, atau 3 dengan syarat jumlah digit-digitnya genap. Tentukan relasi rekurensi dari $(a_n)_{n\geq 0}$, beserta penyelesaiannya.

Level: ***Medium***

6. Kotak berukuran $1 \times n$ akan ditutup menggunakan kotak-kotak berukuran 1×1 atau 1×2 dimana kotak berukuran 1×1 memiliki 3 jenis warna berbeda dan kotak berukuran 1×2 memiliki 4 jenis warna berbeda. Tentukan banyaknya cara menutupi kotak tersebut.
7. Tentukan fungsi pembangkit dari barisan $(a_n)_{n\geq 0}$, dimana a_n adalah banyaknya solusi bulat non-negatif persamaan
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = n.$$
8. Sebuah dadu dilempar lima kali. Tentukan banyaknya kemungkinan jumlah mata dadu yang muncul sama dengan 10.
9. Pada sebuah kantong terdapat tak hingga banyaknya bola merah, biru, dan putih. Tentukan banyaknya cara memilih n bola dari dalam kantong tersebut dengan syarat bola merah terpilih ada sebanyak genap.
10. Sebuah lingkaran dibagi menjadi n bagian yang sama dan diberi label 1 sampai n. Masing-masing bagian tersebut akan diwarnai dengan salah satu dari merah, kuning, hijau dengan syarat tidak ada dua bagian bersebelahan memiliki warna sama. Tentukan banyaknya pewarnaan yang mungkin.

Level: ***Hard***

11. Misalkan A_n adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entri pada diagonal utama dan dua diagonal yang bersebelahan dengannya adalah 1 dan 0 sisanya. Tentukan nilai $\det(A_n)$.
12. Tunjukkan bahwa
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k} = 4^n$$
13. Tentukan banyaknya cara mewarnai setiap kotak pada papan catur berukuran $1 \times n$ dengan satu warna dari merah, putih, kuning, atau biru dengan syarat kotak yang berwarna merah ada sebanyak ganjil dan kotak berwarna biru ada sebanyak genap.
14. Tentukan fungsi pembangkit dari barisan (a_n) yang memenuhi relasi rekurensi $a_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ dengan $a_0 = 1$. Selanjutnya, tentukan formula a_n.

15. Tentukan banyaknya permutasi $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ dari $\{1, 2, \ldots, n\}$ yang memenuhi kondisi
$$a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \ldots \leq na_n.$$

Soal 4.13. Soal-soal ONMIPA tahun-tahun sebelumnya

1. (ONMIPA 2014) Solusi dari fungsi rekursif $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$ dengan $f(1) = 1$ dan $f(2) = 5$ adalah ...
2. (ONMIPA 2015) Diberikan sebuah barisan dengan suku ke-n adalah $x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(a^n - b^n)$ dimana $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ dan $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Relasi rekursif yang memenuhi barisan (x_n) adalah ...
3. (ONMIPA 2015) Setiap bujusangkar pada persegi panjang berukuran $1 \times n$ diwarnai dengan mexggunakan satu dari tiga warna: merah, putih, atau biru. Banyak cara mewanai persegi $1 \times n$ dengan merah, putih atau biru sehingga terdapat genap buah bujursangkar berwarna putih adalah ...
4. (ONMIPA 2016) Dalam bentuk yang paling sederhana, fungsi pembangkit biasa $g(x)$ dari barisan $(1, 2, 3, \ldots)$ adalah ...
5. (ONMIPA 2016) Didefinisikan suatu fungsi rekursif, $f(1) = 1$, $f(2) = 5$, dan $f(n+1) = f(n) + 2f(n-1)$ untuk $n > 2$. Maka $f(n) = \ldots$
6. (ONMIPA 2017) Solusi dari relasi rekurensi $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}$ dengan $a_0 = 1$ dan $a_1 = 2$ adalah ...
7. (ONMIPA 2017) Dalam bentuk yang paling sederhana, fungsi pembangkit biasa $g(x)$ dari barisan $(0, 1, 0, 1, 0, 1, \ldots)$ adalah ...
8. (ONMIPA 2018) Misalkan b_n adalah banyaknya untaian atas n huruf yang dapat dibentuk dengan menggunakan A, B, dan C sedemikian sehingga bila huruf A muncul bukan sebagai huruf akhir pada untaian, maka A harus segera diikuti oleh B. Relasi rekurensi dari barisan (b_n) adalah ...
9. (ONMIPA 2018) Tentukan banyaknya cara untuk mewarnai n bujur sangkar 1×1 pada persegi panjang $1 \times n$ dengan menggunakan warna merah, hijau, atau biru sedemikian sehingga terdapat sejumlah genap bujur sangkar berwarna merah.
10. (ONMIPA 2018) Perhatikan barisan Fibonacci dengan relasi rekurensi: $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, dan $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ untuk $n \geq 2$.
    (a) Buktikan bahwa
    $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} f_{n+1} & f_n \\ f_n & f_{n-1} \end{bmatrix}.$$
    (b) Buktikan bahwa $f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = \begin{cases} 1 & \text{bila } n \text{ genap} \\ -1 & \text{bila } n \text{ ganjil} \end{cases}$

5 Teori Graf

Suatu graf G terdiri dari 2 himpunan berhingga, yaitu himpunan titik-titik tidak kosong ($V(G)$) dan himpunan garis-garis ($E(G)$) yang menghubungkan beberapa titik di $V(G)$.

- Setiap garis dihubungkan dengan satu atau dua titik, yang dinamakan **titik ujung**. Garis yang hanya menghubungkan satu titik disebut **loop**. Dua garis berbeda yang menghubungkan titik yang sama disebut **garis paralel**.
- Dua titik dikatakan **bertetangga** (*adjacent*) jika ada garis yang menghubungkan keduanya. Titik yang tidak mempunyai garis yang berhubungan dengannnya disebut **titik terasing**.
- Jika semua garisnya berarah, maka disebut **graf berarah**. Jika semua garisnya tidak berarah, maka disebut **graf tak berarah**.

5.1 Graf Tak Berarah

- **Graf sederhana** adalah graf yang tidak mempunyai loop ataupun garis paralel.
- **Graf lengkap** dengan n titik (K_n) adalah graf sederhana dengan n titik, dimana setiap 2 titik berbeda terhubung.

Teorema 5.1. *Banyaknya garis dalam suatu graf lengkap dengan n titik adalah* $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

- Suatu graf G disebut **graf bipartit** apabila himpunan titik-titik di G merupakan gabungan dari dua himpunan tak kosong U dan V, dan setiap garis di G menghubungkan suatu titik di U dengan titik di V. Apabila dalam graf bipartit $G = (U, V)$, setiap titik dalam U berhubungan dengan setiap titik dalam V, maka grafnya disebut **graf bipartit lengkap** ($K_{m,n}$).
- **Komplemen** suatu graf G ($\overline{G}$) dengan n titik adalah suatu graf dengan $V(\overline{G}) = V(G)$ dan $E(\overline{G}) = E(K_n) - E(G)$.
- Diketahui G adalah suatu graf. Graf H disebut **subgraf** G apabila $V(H) \subseteq V(G)$, $E(H) \subseteq E(G)$, dan setiap garis dalam H mempunyai titik ujung yang sama dengan garis tersebut dalam G.
- **Derajat** titik v ($d(v)$) pada suatu graf G adalah jumlah garis yang berhubungan dengan titik v dimana garis berupa loop dihitung dua kali. **Derajat total** G adalah jumlah derajat semua titik dalam G.

Teorema 5.2. *Derajat total suatu graf selalu genap.*

- Graf G dikatakan **reguler** jika derajat setiap titiknya sama.
- Graf G dikatakan **isomorfis** dengan graf G' jika terdapat korespondensi satu-satu

  $$g : V(G) \to V(G') \quad \text{dan} \quad h : E(G) \to E(G')$$

  sehingga untuk setiap $v, w \in V(G)$ dan $e \in E(G)$ berlaku: v dan w titik-titik ujung e jika dan hanya jika $g(v)$ dan $g(w)$ adalah titik-titik ujung $h(e)$.
- Diketahui G graf dan v, w dua titik dalam G.

- **Jalan** dari v ke w adalah barisan titik-titik yang bertetangga dan garis secara berselang-seling, diawali dari titik v diakhiri pada titik w. Notasi: $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{n-1}, e_n, v_n$ dengan $v_0 = v$; $v_n = w$; v_{n-1} dan v_i adalah titik-titik ujung garis e_i. Dalam hal ini, jalan ini dikatakan memiliki panjang n.
- **Lintasan** dari v ke w adalah jalan dari v ke w yang semua garisnya berbeda. **Lintasan sederhana** dari v ke w adalah lintasan dari v ke w yang semua titiknya berbeda.
- **Sirkuit** adalah lintasan dengan titik awal sama dengan titik akhir. **Sirkuit sederhana** adalah sirkuit yang semua titiknya berbeda.

- Dua titik v dan w dalam graf G dikatakan **terhubung** jika dan hanya jika ada jalan dari v ke w. Graf G dikatakan **terhubung** jika dan hanya jika setiap dua titik dalam G terhubung.
- **Sirkuit Euler** adalah sirkuit di mana setiap titik dalam G muncul paling sedikit satu kali dan setiap garis dalam G muncul tepat satu kali. Apabila G tidak terhubung, maka G dapat dipartisi menjadi subgraf-subgraf yang saling asing dan masing-masing terhubung. Subgraf-subgraf ini dinamakan **komponen** dari graf G.
- **Sirkuit Hamilton** adalah sirkuit di mana setiap titik dalam G muncul tepat satu kali.

Teorema 5.3. *Diketahui G graf terhubung. G adalah sirkuit Euler jika dan hanya jika semua titik dalam G berderajat genap.*

Teorema 5.4. *Jika G memiliki sirkuit Hamilton, maka G mempunyai subgraf H dengan sifat H terhubung, $V(H) = V(G)$, $|V(H)| = |E(H)|$, dan setiap titik dalam H berderajat 2.*

5.2 Graf Berarah

Suatu graf berarah G terdiri dari himpunan titik-titik $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots\}$, himpunan garis-garis $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots\}$, dan suatu fungsi ψ yang mengawankan setiap garis dalam $E(G)$ ke suatu pasangan berurutan titik (v_i, v_j).

- Jika $e_k = (v_i, v_j)$ adalah suatu garis dalam G, maka v_i disebut **titik awal** e_k dan v_j disebut **titik akhir** e_k. Arah garis adalah dari v_i ke v_j.
- Jumlah garis yang keluar dari titik v_i disebut **derajat keluar** titik v_i ($d^+(v_i)$), sedangkan jumlah garis yang masuk ke titik v_i disebut **derajat masuk** titik v_i ($d^-(v_i)$).
- **Titik terasing** adalah titik dalam G di mana derajat keluar dan derajat masuknya adalah 0.
- **Titik pendan** adalah titik dalam G di mana jumlah derajat keluar dan masuknya adalah 1.
- Dua garis berarah dikatakan **paralel** jika keduanya mempunyai titik awal dan akhir yang sama.

5.3 Pohon (*Tree*)

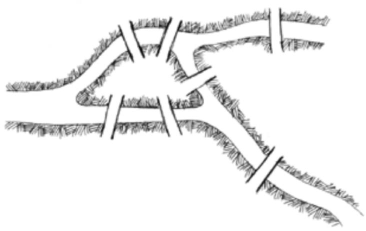
- Graf sederhana G disebut **pohon** jika G tidak memuat sirkuit dan terhubung. Graf sederhana G disebut **hutan** (*forest*) jika G tidak memuat sirkuit.
- Diberikan sebuah pohon T. **Daun** adalah titik di T yang berderajat 1. Titik di T yang berderajat lebih dari 1 disebut titik **cabang**.

Teorema 5.5. *Suatu graf terhubung dengan n titik merupakan pohon jika dan hanya jika ia memiliki* $n-1$ *garis.*

- **Pohon Berakar** adalah suatu pohon di mana ada satu titik yang dikhususkan dari yang lain. Titik tersebut disebut **akar** (*root*).
  - **Tingkat** suatu titik adalah banyaknya garis antara titik tersebut dengan akar.
  - **Tinggi** pohon adalah tingkat maksimum yang dimiliki oleh titik-titik pohon.
  - **Anak** dari titik v adalah semua titik yang berhubungan langsung dengan v, tetapi mempunyai tingkat yang lebih tinggi dari v. Jika w adalah anak dari v, maka v disebut **orang tua** dari w.
  - Dua titik yang mempunyai orang tua yang sama disebut **saudara** .
- **Pohon biner** adalah pohon berakar yangs setiap titiknya mempunyai paling banyak 2 anak. **Pohon biner penuh** adalah pohon biner yang setiap titiknya (kecuali daun) mempunyai tepat 2 anak.
- **Pohon rentang** suatu graf terhubung G adalah subgraf G yang merupakan pohon dan memuat semua titik dalam G.

Latihan 5.6.

1. Diberikan graf sederhana G dengan n titik ($n \geq 2$). Tunjukkan bahwa terdapat dua titik yang memiliki derajat sama.
2. Diketahui G graf dengan n buah titik dan k buah garis. Berapa banyak garis dalam $\overline{G}$?
3. Tentukan banyaknya titik yang mungkin dari graf reguler G dengan derajat total 2021
4. Perhatikan sketsa bagian kota Königsberg berikut (ada 4 daerah dan 7 jembatan):

   Dapatkah seseorang melakukan perjalanan dalam kota tersebut dengan melintasi setiap jembatan sekali dan kembali ke posisi awalnya?
5. Diberikan graf bipartit G. Tunjukkan bahwa setiap sirkuit sederhana di dalam G memiliki genap titik.
6. Tunjukkan bahwa jika u dan v adalah dua titik berbeda pada suatu pohon, maka terdapat dengan tunggal lintasan yang menghubungkan mereka.
7. Berapakah derajat total pohon yang terdiri dari n titik?

Soal 5.7. Uji kemampuan dan pemahamanmu dengan mengerjakan soal-soal berikut ini:

Level: ***Easy***

1. Berapa banyak graf sederhana G dengan $V(G) = \{1, 2, \ldots, 2021\}$?

2. Diberikan hutan dengan n titik dan k pohon. Tentukan banyaknya garis pada hutan tersebut.

3. Diberikan graf sederhana dengan 6 titik. Tunjukkan bahwa terdapat tiga titik yang saling bertetangga atau semua tidak saling bertetangga.

4. Diberikan graf sederhana G. Jika terdapat titik u dengan derajat ganjil, tunjukkan bahwa terdapat titik lain v di G dengan derajat ganjil sedemikian sehingga u dan v terhubung.

5. Apakah terdapat graf sederhana dengan 10 titik dengan derajat masing-masing titik diberikan sebagai berikut: $1, 1, 1, 3, 3, 3, 4, 6, 7, 9$?

Level: ***Medium***

6. Diketahui graf G merupakan graf reguler dengan n titik dan masing-masing titik berderajat 2.
   (a) Jika n genap, tunjukkan bahwa G merupakan graf bipartit.
   (b) Selidiki apakah G mungkin merupakan graf bipartit jika n ganjil.

7. Diberikan sebuah graf terhubung dengan n titik dan memiliki setidaknya n garis. Tunjukkan bahwa salah satu garis pada graf tersebut dapat dihilangkan sedemikian sehingga graf tersebut tetap terhubung.

8. Jika pada graf terhubung G terdapat tepat dua titik berderajat ganjil, katakan a dan b, maka terdapat lintasan yang menghubungkan a dan b dan melalui semua garis masing-masing tepat sekali.

9. Tunjukkan bahwa pada graf berarah jika setiap titik memiliki derajat keluar dan derajat masuk yang sama, maka terdapat sirkuit Euler dalam graf tersebut.

10. Tentukan banyaknya pohon yang tidak isomorfis yang terdiri dari 5 titik!

Level: ***Hard***

11. Diberikan pohon T dengan n titik $(n > 1)$. Tunjukkan bahwa terdapat dua titik dengan derajat 2.

12. Tunjukkan bahwa sebuah pohon dengan minimal dua titik merupakan graf bipartit.

13. Tunjukkan bahwa graf bipartit dengan n titik memiliki banyak garis tidak lebih dari $\frac{n^2}{4}$.

14. Diberikan graf lengkap K_6. Tunjukkan bahwa terdapat segitiga, K_3 , dimana sisi terkecilnya merupakan sisi terbesar dari segitiga lain.

15. Diberikan sebarang bilangan bulat positif a dan b, bilangan $r(a, b) = t$ adalah suatu bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf lengkap dengan t titik, senantiasa akan memuat subgraf lengkap a titik dengan semua sisi berwarna merah atau memuat subgraf lengkap b titik dengan semua sisi berwama biru.
    (a) Tunjukkan bahwa $R(a, 2) = R(2, a) = a$.
    (b) Tunjukkan bahwa $R(a, b) \le R(a, b-1) + R(a-1, b)$.
    (c) Tunjukkan bahwa $R(a, b) \le \binom{a+b-2}{a-1}$.

Soal 5.8. Soal-soal ONMIPA tahun-tahun sebelumnya

1. (ONMIPA 2014) Misalkan G adalah sebuah graf dengan n titik $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Sebuah matriks $A = (a_{ij})$ dari graf G didefinisikan sebagai sebuah bujur sangkar berordo n dengan entri
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{bila } \{v_i, v_j\} \text{ adalah sebuah sisi di } G \\ 0, & \text{bila } \{v_i, v_j\} \text{ bukan sebuah sisi di } G. \end{cases}$$
Buktikan bahwa entri $a_{ij}^{(m)}$ dari A^m menyatakan banyaknya jalan (*walk*) dengan panjang m yang menghubungkan v_i dengan v_j.

2. (ONMIPA 2014) Suatu sisi e graf G dikatakan *bridge* jika penghapusan sisi e dari graf G mengakibatkan komponen (subgraf terhubung maksimal) dari graf G bertambah. Buktikan bahwa suatu sisi e dari graf G adalah *bridge* jika dan hanya jika e tidak berada di sebuah *cycle* di G.

3. (ONMIPA 2015) Tentukan bilangan bulat positif terkecil n sedemilian sehingga untuk setiap sebarang graf G dengan n titik senantiasa memuat graf lengkap K_3 sebagai subgraf atau graf $\overline{F}$ memuat graf lengkap K_3 sebagai subgraf. Kemudian, buktikan.

4. (ONMIPA 2016) Banyaknya graf sederhana berlabel atas n titik yang memiliki sedikitnya dua sisi adalah ...

5. (ONMIPA 2016) Diberikan sebarang bilangan bulat positif a dan b, bilangan $r(a, b) = t$ adalah suatu bilangan bulat positif terkecil sedemikian sehingga setiap pewarnaan merah-biru pada semua sisi dari graf lengkap dengan t titik, senantiasa akan memuat subgraf lengkap a titik dengan semua sisi berwarna merah atau memuat subgraf lengkap b titik dengan semua sisi berwama biru. Jika bilangan t ada dan $a, b > 2$, buktikan bahwa
$$r(a, b-1) + r(a-1, b) \leq \binom{a+b-2}{a-1}.$$

6. (ONMIPA 2017) Suatu sisi e di graf G dikatakan suatu *cut edge* jika jumlah komponen dari $G\backslash\{e\}$ lebih dari jumlah komponen dari G. Buktikan bahwa, suatu sisi e adalah cut edge di G jika dan hanya jika e tidak termuat di setiap lingkaran di G.

7. (ONMIPA 2018) Diberikan sebuah graf sederhana G atas 6 titik $v_1, \ldots, v_6$. Bila G mempunyai 8 sisi dan derajat dari titik-titik v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 masing-masing adalah 1, 3, 3, 3, dan 2, maka derajat dari titik v_6 adalah ...

8. (ONMIPA 2018) Andaikan G adalah sebuah graf sederhana (*simple graph*). Bila e adalah sebuah sisi yang menghubungkan titik u dan titik v di G, maka dikatakan bahwa titik u bertetangga dengan titik v. Derajat dari sebuah titik v di G adalah banyaknya titik-titik yang bertetangga dengan v. Perlihatkan bahwa pada sebuah graf sederhana G terdapat sedikitnya dua titik dengan derajat sama.