

## Isian singkat

1. Diberikan matriks  $A$  berukuran  $2025 \times 2025$  dengan

$$\det(A - \lambda I_{2025 \times 2025}) = (\lambda - 2)^k(\lambda - 1)^{2025-k}$$

untuk suatu bilangan asli<sup>1</sup>  $k$  dengan  $0 \leq k \leq 2025$ . Jika  $A^2 = A$ , maka banyaknya nilai  $k$  yang mungkin adalah ...

### Solusi:

Bentuk determinan yang diberikan menunjukkan bahwa nilai eigen 2 muncul sebanyak  $k$  kali, dan nilai eigen 1 muncul sebanyak  $2025 - k$  kali. Sedangkan diketahui bahwa  $A$  adalah matriks idempotent, sehingga nilai eigen dari  $A$  hanya bisa  $\lambda = 0$  atau  $\lambda = 1$ .

Dengan demikian,  $k$  harus sama dengan 0, karena jika  $k > 0$ , maka akan ada nilai eigen 2 yang tidak sesuai dengan sifat idempotent. Oleh karena itu, satu-satunya nilai yang mungkin untuk  $k$  adalah  $\boxed{1}$  saja yaitu  $k = 0$ .

2. Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$ , dengan  $\dim(V) = 7$ , serta transformasi linear  $T_1 : V \rightarrow V$  dan  $T_2 : V \rightarrow V$ , dengan  $\dim(\text{Im}(T_1)) = 3$  dan  $\dim(\text{Im}(T_2)) = 4$ . Jika  $M$  dan  $m$  berturut-turut menyatakan nilai terbesar dan terkecil yang mungkin dari  $\dim(\text{Im}(T_2 \circ T_1))$ , maka nilai  $M + m = \dots$

### Solusi:

Misalkan  $S = T_2 \circ T_1$  dan dengan menggunakan Teorema Rank-Nullity, kita tau bahwa

$$\dim(\text{Im}(S)) \leq \min\{\dim(\text{Im}(T_1)), \dim(\text{Im}(T_2))\}$$

Sehingga dengan jelas kita peroleh

$$\dim(\text{Im}(S)) \leq \min\{3, 4\} = 3 = M$$

Secara intuitif dapat kita bayangkan bahwa beberapa elemen dari  $\text{Im}(T_1)$  mungkin saja terpenuhi untuk menjadi elemen dari  $\ker(T_2)$ , sehingga didapatkan sebuah rumus sebagai berikut

$$\dim(\ker(S)) = \dim(\ker(T_1)) + \dim(\ker(T_2) \cap \text{Im}(T_1))$$

$\dim(\text{Im}(S))$  diberikan oleh rumus

$$\dim(\text{Im}(S)) = \dim(V) - \dim(\ker(S)) = 7 - \dim(\ker(S))$$

---

<sup>1</sup>Agak rancu disini karena didefinisikan bilangan asli namun nilai  $k = 0$  disebutkan di kalimat setelahnya.

yang artinya  $\dim(\text{Im}(S))$  minimum ketika  $\dim(\ker(S))$  maksimum atau lebih lanjutnya  $\dim(\ker(T_2) \cap \text{Im}(T_1))$  harus maksimum.

Disisi lain kita tahu bahwa  $\dim(\ker(T_2)) = \dim(V) - \dim(\text{Im}(T_2)) = 7 - 4 = 3$ . Dengan memilih  $\ker(T_2) = \text{Im}(T_1)$  maka dapat kita peroleh

$$\dim(\text{Im}(S)) = 0 = m$$

Maka, nilai  $M + m = 3 + 0 = \boxed{3}$ .

3. Jika setiap  $z \in \mathbb{C}$  yang memenuhi

$$\left| \frac{z+1}{z+4} \right| = 2$$

terletak pada suatu lingkaran, maka radius dan titik pusat lingkaran tersebut berturut-turut adalah ...

**Solusi:**

Misalkan  $z = x + iy$  dengan  $x, y \in \mathbb{R}$ , maka

$$\begin{aligned} \left| \frac{z+1}{z+4} \right| &= 2 \\ |z+1| &= 2|z+4| \\ |z+1|^2 &= 4|z+4|^2 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 4((x+4)^2 + y^2) \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 &= 4x^2 + 32x + 64 + 4y^2 \\ 3x^2 + 3y^2 + 30x + 63 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 10x + 21 &= 0 \\ (x+5)^2 + y^2 &= 4. \end{aligned}$$

Dengan demikian, radius lingkaran tersebut adalah 2 dan titik pusatnya adalah  $(-5, 0)$  atau  $z = -5$ .

4. Bentuk sederhana dari

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \sin^3 \left( \frac{x}{3^n} \right)$$

adalah ...

**Solusi:**

Perhatikan bahwa  $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ , sehingga

$$\sin^3(\theta) = \left( \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{-8i} (e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}).$$

Jika dikembalikan ke dalam bentuk sinus, kita dapat tuliskan

$$\sin^3(\theta) = \frac{1}{4} [3\sin(\theta) - \sin(3\theta)].$$

Sehingga setiap suku pada deret tersebut dapat dituliskan sebagai

$$3^{n-1} \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{1}{4} \left[ 3^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - 3^{n-1} \sin\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right) \right].$$

Perhatikan bahwa deret diatas dapat dijadikan teleskopik seperti berikut

$$\begin{aligned} n=1 &\implies \frac{1}{4} \left[ 3 \sin\left(\frac{x}{3}\right) - \sin(x) \right] \\ n=2 &\implies \frac{1}{4} \left[ 9 \sin\left(\frac{x}{9}\right) - 3 \sin\left(\frac{x}{3}\right) \right] \\ n=3 &\implies \frac{1}{4} \left[ 27 \sin\left(\frac{x}{27}\right) - 9 \sin\left(\frac{x}{9}\right) \right] \\ &\vdots \\ n=k &\implies \frac{1}{4} \left[ 3^k \sin\left(\frac{x}{3^k}\right) - 3^{k-1} \sin\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right) \right] \end{aligned}$$


---


$$\sum_{n=1}^k 3^{n-1} \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{1}{4} \left[ 3^k \sin\left(\frac{x}{3^k}\right) - \sin(x) \right].$$

Sehingga untuk  $k \rightarrow \infty$ , kita peroleh

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 3^k \sin\left(\frac{x}{3^k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} x \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{3^k}\right)}{\frac{x}{3^k}} = x.$$

Jadi bentuk sederhananya adalah

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \boxed{\frac{1}{4} [x - \sin(x)]}.$$

5. Nilai

$$\sup \left\{ \inf \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{m+1}{n}\right)^2 : n \geq m \right\} : m \in \mathbb{N} \right\}$$

adalah ...

**Solusi:**

$$\text{Misalkan } S = \left\{ \inf \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{m+1}{n}\right)^2 : n \geq m \right\} : m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Untuk setiap  $m \in \mathbb{N}$ , kita akan mencari nilai infimum dari barisan himpunan

$$T_m = \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{m+1}{n}\right)^2 : n \geq m \right\}.$$

Perhatikan bahwa untuk membuat ekspresi  $5(-1)^n - \left(\frac{m+1}{n}\right)^2$  menjadi kecil, kita perlu

- $5(-1)^n$  harus negatif, berarti  $n$  haruslah ganjil.
- $\left(\frac{m+1}{n}\right)^2$  harus besar, berarti  $n$  haruslah sekecil mungkin.

Selanjutnya dengan sedikit melihat pola anggota himpunan  $T_m$  untuk setiap  $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} T_1 &= \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{2}{n}\right)^2 : n \geq 1 \right\} = \left\{ -9, 4, -\frac{49}{9}, \dots \right\} \implies \inf(T_1) = -9 \\ T_2 &= \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{3}{n}\right)^2 : n \geq 2 \right\} = \left\{ \frac{11}{4}, -6, \frac{71}{16}, \dots \right\} \implies \inf(T_2) = -6 \\ T_3 &= \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{4}{n}\right)^2 : n \geq 3 \right\} = \left\{ -\frac{61}{9}, 1, -\frac{121}{25}, \dots \right\} \implies \inf(T_3) = -\frac{61}{9} \\ T_4 &= \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{5}{n}\right)^2 : n \geq 4 \right\} = \left\{ \frac{55}{16}, -6, \frac{121}{25}, \dots \right\} \implies \inf(T_4) = -6 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Dari sedikit perhitungan diatas, kita mendapatkan sebuah pola dugaan yaitu

$$\inf(T_m) = \begin{cases} -5 - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \\ -6, & \text{untuk } m \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan  $S$  sebagai

$$S = \left\{ -5 - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 : m \text{ ganjil} \right\} \cup \{-6 : m \text{ genap}\}.$$

Untuk mencari supremum dari  $S$ , kita perlu mencari nilai maksimum dari kedua himpunan tersebut. Karena untuk  $m$  genap hasilnya tetap -6, maka kita fokus pada himpunan pertama. Dengan menggunakan limit, kita dapatkan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} -5 - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 = -6.$$

Sehingga supremum dari  $S$  adalah  $\boxed{-6}$ .

- Diberikan fungsi kontinu  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  dengan  $|f(x)| \leq x$  untuk setiap  $x \in [0, 1]$ . Nilai terbesar yang mungkin dari

$$\int_0^1 ((f(x))^2 - x^4 f(x)) dx$$

adalah ...

**Solusi:**

Diketahui sifat fungsi  $f$  dan  $g$  yang terintegralkan pada interval  $[a, b]$  dan memenuhi  $f(x) \leq g(x)$  untuk setiap  $x \in [a, b]$ , maka

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Dengan demikian, kita dapat mencari nilai maksimum dari integral di soal

$$\begin{aligned} \int_0^1 ((f(x))^2 - x^4 f(x)) dx &\leq \left| \int_0^1 ((f(x))^2 - x^4 f(x)) \right| \\ &\leq \int_0^1 |(f(x))^2 - x^4 f(x)| dx \end{aligned}$$

Ketaksamaan segitiga mengatakan  $|f^2(x) - x^4 f(x)| \leq |f^2(x)| + |x^4 f(x)|$  untuk setiap  $x \in [0, 1]$ . Demikian juga dengan integralnya

$$\begin{aligned} \int_0^1 |(f(x))^2 - x^4 f(x)| dx &\leq \int_0^1 |(f(x))^2| + \int_0^1 |x^4 f(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^5 dx \\ &= \left[ \frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Jadi, nilai terbesar yang mungkin dari integral tersebut adalah  $\boxed{\frac{1}{2}}$ .

7. Banyaknya bilangan asli  $x \in \{1, 2, 3, \dots, 2025\}$  yang bukan kelipatan 2 dan bukan kelipatan 5 adalah ...

**Solusi:**

Misalkan  $S$  adalah himpunan bilangan asli dari 1 sampai 2025 dan. Selanjutnya definisikan  $A_1$  dan  $A_2$  sebagai himpunan bilangan asli dari 1 sampai 2025 yang masing-masing merupakan kelipatan 2 dan kelipatan 5. Dengan mudah kita peroleh bahwa

$$\begin{aligned} |S| &= 2025, \\ |A_1| &= \left\lfloor \frac{2025}{2} \right\rfloor = 1012, \\ |A_2| &= \left\lfloor \frac{2025}{5} \right\rfloor = 405, \\ |A_1 \cap A_2| &= \left\lfloor \frac{2025}{10} \right\rfloor = 202. \end{aligned}$$

Menggunakan prinsip inklusi-eksklusi, maka banyaknya bilangan asli dari 1 sampai 2025 yang bukan kelipatan 2 dan bukan kelipatan 5 adalah

$$|A_1^c \cap A_2^c| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 2025 - 1012 - 405 + 202 = \boxed{810}.$$

8. Tiga siswa  $a_1, a_2, a_3$  dari Sekolah A dan 4 siswa  $b_1, b_2, b_3, b_4$  dari Sekolah B berkumpul dalam sebuah pertemuan. Banyaknya cara menyusun ketujuh siswa tersebut dalam satu baris dengan syarat tidak terdapat satu blok yang berisikan semua siswa dari sekolah yang sama adalah . . . (Contoh:  $b_3b_2a_1a_3b_1b_4a_2$  diperbolehkan, tetapi  $b_1b_4a_1a_2a_3b_3b_2$  dan  $a_1b_4b_3b_1b_2a_3a_2$  tidak diperbolehkan)

**Solusi:**

Misalkan  $S$  adalah himpunan semua susunan ketujuh siswa tersebut, sehingga jelas bahwa  $|S| = 7! = 5040$ . Misalkan  $A$  dan  $B$  adalah himpunan susunan masing-masing siswa sekolah A yang satu blok berurutan dan siswa sekolah B yang satu blok berurutan (Contoh:  $b_1b_2a_1a_2a_3b_3b_4 \in A$  dan  $a_3b_1b_2b_3b_4a_1a_2 \in B$ ). Banyaknya anggota  $A, B$  dan  $A \cap B$  dapat dihitung sebagai berikut:

$$|A| = 5! \cdot 3! = 120 \cdot 6 = 720,$$

$$|B| = 4! \cdot 4! = 24 \cdot 24 = 576,$$

$$|A \cap B| = 2 \cdot 4! \cdot 3! = 2 \cdot 24 \cdot 6 = 288.$$

Lagi-lagi dengan prinsip inklusi-eksklusi, maka banyaknya susunan ketujuh siswa tersebut yang tidak memiliki satu blok berisikan semua siswa dari sekolah yang sama adalah

$$|A^c \cap B^c| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 5040 - 720 - 576 + 288 = 4.032$$

9. Jika  $S_5$  menyatakan grup semua fungsi bijektif pada  $\{1, 2, \dots, 5\}$  terhadap operasi komposisi fungsi, maka banyaknya elemen berorder 2 pada  $S_5$  adalah . . .
10. Jika  $z, p$ , dan  $m$  berturut-turut menyatakan banyaknya ideal di  $\mathbb{Z}_{2025}$ , banyaknya ideal prima di  $\mathbb{Z}_{2025}$ , dan banyaknya ideal maksimal di  $\mathbb{Z}_{2025}$ , maka nilai  $z + p + m$  adalah . . .

## Uraian

1. Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  dengan  $\dim(V) = n$ . Misalkan  $U$  dan  $W$  merupakan dua ruang bagian dari  $V$  dengan  $\dim(U) + \dim(W) = n$ . Buktikan bahwa terdapat transformasi linear  $T : V \rightarrow V$  yang memenuhi  $\ker(T) = U$  dan  $\text{Im}(T) = W$ .

2. Diketahui  $A_1, A_2, \dots, A_n$  merupakan titik-titik sudut sebuah poligon  $n$  sisi beraturan yang termuat pada sebuah lingkaran dengan radius  $r$  dan titik pusat  $O(0,0)$ . Jika  $P$  merupakan titik di luar lingkaran yang terletak pada garis perpanjangan  $OA_1$ , buktikan bahwa

$$\prod_{k=1}^n |PA_k| = |OP|^n - r^n,$$

dengan  $|AB|$  menyatakan panjang ruang garis yang menghubungkan titik  $A$  dan  $B$ .

3. Diberikan fungsi kontinu  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  yang terdiferensial pada  $(a, b)$  dengan  $f(a) = f(b)$ . Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli  $n$ , terdapat  $n$  bilangan real berbeda,  $c_1, c_2, \dots, c_n \in (a, b)$ , yang memenuhi

$$f'(c_1) + f'(c_2) + \dots + f'(c_n) = 0.$$

4. Untuk suatu bilangan bulat tak negatif  $n$  dan  $m$ , misalkan  $D(m, n)$  menyatakan banyaknya solusi persamaan

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$$

dengan  $x_i \in \mathbb{N}$ , untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, m\}$  dan  $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ . Tunjukkan bahwa

$$D(m, n) = D(m, n - m) + D(m - 1, n - m).$$

5. (a) Diketahui  $A, B, C$  merupakan subgrup dari sebuah grup  $G$ . Jika  $A \subseteq B$ ,  $A \cap C = B \cap C$ , dan  $AC = BC$ , buktikan bahwa  $A = B$ .
- (b) Carilah contoh grup  $G$  dan subgrup  $A, B, C$  dari  $G$  yang memenuhi  $A \cap C = B \cap C$ , dan  $AC = BC$  tetapi  $A \neq B$ .

Catatan: Jika  $P$  dan  $Q$  adalah subgrup dari  $(G, *)$ , maka  $PQ$  didefinisikan sebagai

$$PQ = \{p * q : p \in P, q \in Q\}.$$