4 Deret dan Residu

4.1 Deret

Diberikan barisan bilangan kompleks $(z_n)_{n\geq\alpha}$. Barisan $(z_n)_{n\geq\alpha}$ dikatakan **konvergen ke** z, dinotasikan

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \quad \text{atau} \quad z_n \to z,$$

jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ dengan sifat untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|z_n - z| < \epsilon$.

Teorema 4.1. *Misalkan $z_n = x_n + y_n$ untuk setiap $n \geq \alpha$ dan $z = x + iy$. Berlaku*

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z \iff \lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \textit{dan} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = y.$$

Barisan $(z_n)_{n\geq\alpha}$ dikatakan **konvergen** jika ada $z \in \mathbb{C}$ sehingga $z_n \to z$. Barisan $(z_n)_{n\geq\alpha}$ yang tidak konvergen dikatakan **divergen**.

Definisi 4.2. Diberikan barisan bilangan kompleks $(z_n)_{n\geq\alpha}$.

1. Deret yang dibangun oleh $(z_n)_{n\geq\alpha}$ adalah barisan jumlahan parsial $(S_k)_{k\geq\alpha}$ yang didefinisikan dengan
$$S_k = z_\alpha + z_{\alpha+1} + \cdots + z_k$$
untuk setiap $k \geq \alpha$. Deret dari $(z_n)_{n\geq\alpha}$ biasanya dinotasikan dengan $\displaystyle\sum_{n=\alpha}^{\infty} z_n$.

2. Deret $\displaystyle\sum_{n=\alpha}^{\infty} z_n$ dikatakan **konvergen** jika barisan jumlahan parsial $(S_k)_{k\geq\alpha}$ konvergen. Sebaliknya, deret $\displaystyle\sum_{n=\alpha}^{\infty} z_n$ dikatakan **divergen** jika barisan jumlahan parsial $(S_k)_{k\geq\alpha}$ divergen.

Sebagian besar sifat-sifat deret di $\mathbb{R}$ dapat diperumum ke $\mathbb{C}$.

Teorema 4.3. *Diberikan deret* $\displaystyle\sum_{n=\alpha}^{\infty} z_n$.

- ☐ *Misalkan $z_n = x_n + y_n$ untuk setiap $n \geq \alpha$ dan $S = X + iY$. Berlaku*
$$\sum_{n=\alpha}^{\infty} z_n = S \iff \sum_{n=\alpha}^{\infty} x_n = X \quad \textit{dan} \quad \sum_{n=\alpha}^{\infty} y_n = Y.$$

- ☐ *Jika $\displaystyle\sum_{n=\alpha}^{\infty} z_n$ konvergen, maka $z_n \to 0$.*

- ☐ *Jika $\displaystyle\sum_{n=\alpha}^{\infty} |z_n|$ konvergen, maka $\displaystyle\sum_{n=\alpha}^{\infty} z_n$ konvergen.*

Selanjutnya, akan diselidiki representasi deret suatu fungsi analitik pada suatu domain.

Teorema 4.4. *Diberikan fungsi f dan g pada $D = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R_0\}$, serta deret kuasa $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$.*

- ☐ *Jika f analitik pada D, $f(z) = T(z)$ pada D dengan*

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Lebih lanjut, $T(z)$ tersebut disebut ***deret Taylor*** *fungsi f di $z = z_0$.*

- ☐ *Jika g kontinu pada suatu kontur C, maka*

$$\int_C g(z)T(z)dz = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_C g(z)(z - z_0)^n dz.$$

- ☐ *Jika $T(z)$ konvergen pada D, maka $T(z)$ analitik pada D. Lebih lanjut,*

$$T'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (z - z_0)^{n-1}$$

- ☐ *Jika $T(z)$ konvergen ke $f(z)$ pada D, maka $f(z)$ analitik pada D dan $T(z)$ deret Taylor dari fungsi f di $z = z_0$.*

Beberapa deret Taylor fungsi elementer di $z = 0$ yang cukup bermanfaat dalam mencari deret Taylor fungsi analitik lain di dalam kompetisi diberikan sebagai berikut:

1. $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $|z| < \infty$.
2. $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z| < \infty$, $|z| < \infty$.
3. $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z| < \infty$.
4. $\sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|z| < \infty$.
5. $\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$, $|z| < \infty$.
6. $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$.
7. $\frac{1}{(1-z)^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+k-1}{n} z^n$, $|z| < 1$.

Contoh 4.5. Tentukan deret Taylor dari $\frac{z+1}{z^2+1}$ di $z = 0$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa untuk $|z| < 1$ berlaku

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-z^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}.$$

Diperoleh

$$\frac{z+1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2+1} + \frac{z}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n+1} = 1 + z - z^2 - z^3 + z^4 + z^5 - z^6 - z^7 + \cdots$$

■

Contoh 4.6. Tentukan deret Taylor dari $\frac{1}{z^2}$ di $z = 1$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa untuk $|z-1| < 1$ berlaku

$$\frac{1}{z^2} = \frac{1}{(1-(z-1))^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(z-1)^n.$$

■

Contoh 4.7. Tunjukkan bahwa fungsi

$$f(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z}, & z \neq 0 \\ 1, & z = 0 \end{cases}$$

analitik pada $\mathbb{C}$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa deret kuasa

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

konvergen ke $f(z)$ pada $\mathbb{C}$. Dengan demikian, $f(z)$ analitik dan $S(z)$ merupakan deret Taylor dari $f(z)$ di $z = z_0$. ■

Teorema 4.8. *Diberikan fungsi f pada $D = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, serta deret kuasa*

$$L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$

- ☐ *Jika f analitik pada D, maka $f(z) = L(z)$ pada D dengan*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

dan

$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{-n+1}} dz \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

di mana C sebarang kontur tertutup sederhana pada D yang mengelilingi z_0 dengan orientasi positif.

*Deret $L(z)$ disebut **deret Laurent** fungsi f pada D dan deret*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

*disebut **bagian utama** f di $z = z_0$.*

- ☐ *Jika $L(z)$ konvergen ke $f(z)$ pada D, maka $f(z)$ analitik pada D dan $L(z)$ deret Laurent dari fungsi f pada D.*

Contoh 4.9. Tentukan deret Lauren dari $\dfrac{1}{(2-z)(z-1)}$ pada $1 < |z| < 2$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa untuk $1 < |z| < 2$ berlaku $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$ dan $\left|\dfrac{z}{2}\right| < 1$. Lebih lanjut,

$$\frac{1}{(2-z)(z-1)} = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{z-1} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}.$$

Dengan demikian,

$$\frac{1}{(2-z)(z-1)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}z^n + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}$$

■

Contoh 4.10. Tentukan deret Lauren dari $\dfrac{1}{(2-z)(z-1)}$ pada $2 < |z| < \infty$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa untuk $2 < |z| < \infty$ berlaku $\left|\dfrac{2}{z}\right| < 1$ sehingga $\left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$. Lebih lanjut,

$$\frac{1}{(2-z)(z-1)} = \frac{1}{2-z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} + \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}}.$$

Dengan demikian,

$$\frac{1}{(2-z)(z-1)} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{z^n} + \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2^{n-1}}{z^n}.$$

■

Latihan 4.11.

1. Buktikan Teorema 4.1 dan Teorema 4.3, serta pelajari bukti Teorema 4.4 dan Teorema 4.8.
2. Tunjukkan bahwa jika $(z_n)_{n\geq 1}$ konvergen, maka terdapat $M > 0$ sehingga $|z_n| \leq M$ untuk setiap $n \geq 1$.
3. Tunjukkan bahwa
$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = S \quad \text{berakibat} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\bar{z_n} = \bar{S}.$$
4. Berikan dua deret Laurent dari
$$f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)}$$
di $z = 0$ dan tentukan daerah formula tersebut berlaku.
5. Tunjukkan bahwa fungsi berikut
$$f(z) = \begin{cases} \frac{\cos z}{z^2 - \frac{\pi^2}{4}}, & z \neq \pm\frac{\pi}{2} \\ -\frac{1}{\pi}, & z = \pm\frac{\pi}{2} \end{cases}$$
merupakan fungsi utuh.

4.2 Residu

Konsep residu sangat bermanfaat dalam menyelesaikan masalah terkait integral kompleks maupun integral (real) tak wajar.

Definisi 4.12. Diberikan $z_0 \in \mathbb{C}$ dan f fungsi bernilai kompleks.

1. Titik z_0 disebut **titik singular** fungsi f jika f tidak analitik di z_0, tetapi f analitik di suatu titik di setiap persekitaran z_0.
2. Titik z_0 disebut **titik singular terasing** fungsi f jika z_0 titik singular f dan terdapat $\epsilon > 0$ sehingga f analitik pada
$$\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}.$$
3. Misalkan fungsi f analitik pada $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\}$ dan memiliki deret kuasa
$$L(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{(z - z_0)^n}.$$
Koefisien b_1 disebut **residu** f di z_0 dan dinotasikan dengan $\mathrm{Res}(f, z = z_0)$.
4. Misalkan f analitik pada suatu domain kecuali di berhingga titik di dalam lintasan tertutup sederhana C. Misalkan C_0 adalah lingkaran $|z| = R$ (searah jarum jam) yang memuat C di dalam interiornya. Didefinisikan **residu** f **di tak-hingga** sebagai berikut
$$\mathrm{Res}(f, z = \infty) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} f(z) dz.$$

Jika f memiliki sebanyak berhingga titik singular di dalam domain D, maka titik-titik singular tersebut haruslah terasing.

Teorema 4.13. *Diberikan fungsi bernilai kompleks f dan C sebarang kontur tertutup sederhana arah positif.*

- ☐ *Jika z_0 merupakan satu-satunya titik singular terasing di dalam daerah yang dikelilingi oleh C, maka*
$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \, \mathrm{Res}(f, z = z_0).$$
- ☐ *Jika f analitik di dalam dan pada C, kecuali di $z_k \in int(C)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, maka*
$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}(f, z = z_k) \\ &= -2\pi i \, \mathrm{Res}(f, z = \infty) \\ &= 2\pi i \, \mathrm{Res}\left(\frac{1}{z^2} f\left(\frac{1}{z}\right), z = 0 \right). \end{aligned}$$

Contoh 4.14. Misalkan C adalah lingkaran $|z| = 2$ arah positif. Tentukan $\displaystyle\int_C \frac{z+1}{z(z-1)} dz$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa pada $D = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 2\}$, ada dua titik singular terasing $f(z) = \frac{z+1}{z(z-1)}$, yakni $z = 0$ dan $z = 1$. Lebih lanjut, deret Laurent dari fungsi f pada $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \frac{1}{2}\}$ adalah

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z(z-1)} &= \frac{z+1}{z}.(-1)\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right)\\ &= -\left(1+\frac{1}{z}\right)\left(1+z+z^2+z^3+\cdots\right)\\ &= -\frac{1}{z}-2-2z-2z^2-\cdots,\end{aligned}$$

sedangkan deret Laurent dari fungsi f pada $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-1| < \frac{1}{2}\}$ adalah

$$\begin{aligned}\frac{z+1}{z(z-1)} &= \frac{1}{z-1}\left(1+\frac{1}{1+(z-1)}\right)\\ &= \frac{1}{z-1}\left(2-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\cdots\right)\\ &= \frac{2}{z-1}-1+(z-1)-(z-1)^2+\cdots.\end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\int_C \frac{z+1}{z(z-1)}dz = 2\pi i\left[\operatorname{Res}(f, z=0)+\operatorname{Res}(f, z=1)\right] = 2\pi i.$$

Alternatif: Perhatikan bahwa

$$\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1+z}{z(1-z)},$$

sehingga $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), z=0\right) = 1$. Dengan demikian,

$$\int_C \frac{z+1}{z(z-1)}dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z^2}f\left(\frac{1}{z}\right), z=0\right) = 2\pi i.$$

■

Mencari residu akan menjadi lebih mudah dengan mengidentifikasi tipe dari titik singular.

Definisi 4.15. Diberikan fungsi bernilai kompleks f dan z_0 titik singular terasing f. Titik z_0 disebut

1. **kutub** tingkat m jika f mempunyai bagian utama berbentuk

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

   dengan $b_m \neq 0$ (dengan kata lain, hanya ada berhingga banyaknya n sehingga $b_n \neq 0$ dan $b_m \neq 0$). Kutub tingkat 1 disebut **kutub sederhana**.

2. **titik singular esensial** fungsi f jika bagian utama f di $z = z_0$ merupakan deret tak hingga (dengan kata lain, ada tak berhingga banyaknya n sehingga $b_n \neq 0$).

3. **titik singular *removable*** fungsi f jika f tidak mempunyai bagian utama di z_0 (dengan kata lain, $b_n = 0$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$).

Titik z_0 disebut **nilai nol (*zeros*)** tingkat m fungsi f jika

$$f^{(m)}(z_0) \neq 0 \quad \text{dan} \quad f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0.$$

Teorema 4.16. *Diberikan fungsi bernilai kompleks f dan z_0 titik singular terasing f.*

- ☐ *Tepat salah satu tipe pada Definisi 4.15 dimiliki oleh titik $z = z_0$.*
- ☐ *z_0 kutub tingkat m fungsi f jika dan hanya jika*
  - *untuk $0 \leq n < m$, $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = \infty$.*
  - *untuk $n > m$, berlaku $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = 0$.*
- ☐ *z_0 kutub tingkat m dari f jika dan hanya jika $f(z) = \dfrac{h(z)}{(z - z_0)^m}$ untuk suatu fungsi $h(z)$ yang analitik yang tak nol di $z = z_0$. Lebih lanjut, $\mathrm{Res}(f, z = z_0) = \dfrac{h^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!}$ dengan $h^0(z) := h(z)$.*
- ☐ *z_0 titik singular removable fungsi f jika dan hanya jika untuk $n \geq 1$, $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^n f(z) = 0$. Lebih lanjut, $\mathrm{Res}(f, z = z_0) = 0$.*
- ☐ *Jika $p(z_0) \neq 0$, maka $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ mempunyai kutub tingkat m di z_0 jika dan hanya jika q mempunyai nilai nol tingkat m di z_0.*
- ☐ *Jika $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$, dan $q'(z_0) \neq 0$, maka $\dfrac{p(z)}{q(z)}$ mempunyai kutub sederhana di z_0 dan*

$$\mathrm{Res}\left(\frac{p}{q}, z = z_0\right) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Contoh 4.17. Tentukan semua titik singular terasing dari fungsi $f(z) = \dfrac{z^3 + 2z}{(z+i)^3}$ beserta jenisnya dan tentukan residu f di titik singular terasingnya.

Penyelesaian: Fungsi f hanya memiliki satu titik terasing, yakni $z = -i$. Berdasarkan Teorema 4.16,

$$\mathrm{Res}(f, -i) = h''(-i) = -6i$$

dengan $h(z) = z^3 + 2z$. ■

Berikut contoh aplikasi residu dalam mencari nilai integral tak wajar.

Contoh 4.18. Tentukan nilai dari

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2} dx.$$

Penyelesaian: Dapat ditunjukkan integral tersebut konvergen. Dengan demikian, cukup dicari

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2} dx.$$

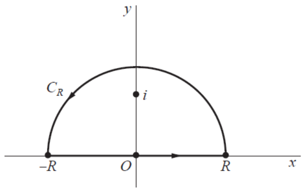
Didefinisikan fungsi

$$f(z) = \frac{e^{i3z}}{(z^2+1)^2}.$$

Dapat dicek bahwa ketika $z = x$ bernilai real, $f(z) = \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2}$. Dengan demikian, nilai yang dicari sama dengan

$$\lim_{R\to\infty} \int_{L_R} f(z)dz$$

dengan L_R merupakan ruas garis $z = x$ dengan $-R \le x \le R$.
Sekarang perhatikan gambar berikut:



Misalkan C_R merupakan lintasan setengah lingkaran dari $z = R$ ke $z = -R$ seperti pada gambar. Diperoleh $C_R \cup L_R$ merupakan lintasan tertutup dan berlaku

$$\lim_{R\to\infty} \int_{L_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{L_R\cup C_R} f(z)dz - \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz.$$

Akan ditunjukkan $\int_{L_R\cup C_R} f(z)dz = \frac{2\pi}{e^3}$ untuk $R > 1$.

Perhatikan bahwa untuk $R > 1$ fungsi $f(z)$ memiliki kutub tingkat 2 di i. Lebih lanjut, $f(z) = \frac{h(z)}{(z-i)^2}$ dengan $h(z) = \frac{e^{3iz}}{(z+i)^2}$ fungsi analitik di atas sumbu-x.

Berdasarkan Teorema 4.16,

$$\text{Res}(f(z), z = i) = h'(i) = \frac{1}{ie^3}.$$

Dengan demikian, untuk $R > 1$ berlaku

$$\int_{L_R\cup C_R} f(z)dz = 2\pi i \,\text{Res}(f(z), z = i) = \frac{2\pi}{e^3}.$$

Selanjutnya, akan dibuktikan $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$.

Perhatikan bahwa panjang kurva C_R adalah πR dan untuk $z \in C_R$ berlaku

$$|f(z)| \le \frac{e^{-\text{Im}(z)}}{|R^2-1|^2} \le \frac{1}{|R^2-1|^2}.$$

Berdasarkan Teorema ML, diperoleh

$$\left|\int_{C_R} f(z)dz\right| \le \frac{\pi R}{|R^2-1|^2}.$$

Karena $\lim_{R\to\infty} \frac{\pi R}{|R^2-1|^2} = 0$, disimpulkan $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$.
Dengan demikian

$$\lim_{R\to\infty} \int_{L_R} f(z)dz = \lim_{R\to\infty} \int_{L_R\cup C_R} f(z)dz - \lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = \frac{2\pi}{e^3}.$$

Jadi,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{2\pi}{e^3}.$$

■

Latihan 4.19.

1. Buktikan Teorema 4.13 dan Teorema 4.16.

2. Tentukan

   (a) $\text{Res}\left(\sec z, z = \frac{\pi}{2}\right)$.

   (b) $\text{Res}\left(\frac{z}{z^4 - 1}, z = i\right)$.

   (c) $\text{Res}\left(\frac{z}{z^3 + z^2 - 2}, z = 1\right)$.

   (d) $\text{Res}\left(\sin \frac{2}{z - 1}, z = 1\right)$.

3. Jika f analitik di dalam dan pada kontur tertutup sederhana C, kecuali di $z_k \in \text{int}(C)$, $k = 1, 2, \dots, n$, tunjukkan bahwa

$$\text{Res}(f, z = z_1) + \text{Res}(f, z = z_2) + \cdots + \text{Res}(f, z = z_n) + \text{Res}(f, z = \infty) = 0.$$

4. Diketahui f analitik di z_0 dan $f(z_0) = 0$. Jika $f \not\equiv 0$ untuk setiap persekitaran z_0, tunjukkan bahwa terdapat $\epsilon > 0$ sehingga $f(z) \neq 0$ pada $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$.

5. Diketahui f merupakan fungsi genap ($f(z) = f(-z)$) pada $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ dengan 0 satu-satunya titik singular terasing di dalam dan pada D. Tunjukkan bahwa

$$\int_{|z|=1} f(z) dz = 0.$$

Soal 4.20. Uji kemampuan dan pemahamanmu dengan mengerjakan soal-soal berikut ini:

Level: ***Easy***

1. Tunjukkan bahwa jika f fungsi utuh dengan $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z} = 0$, maka f fungsi konstan.
2. Tentukan deret Lauren dari fungsi
$$\frac{1}{(z-20)(z-24)}$$
berturut-turut pada $|z| < 20$, $20 < |z| < 24$, dan $|z| > 24$.
3. Diketahui f analitik pada suatu domain D. Jika terdapat barisan (z_n) di D yang konvergen ke $s \in D$ dan $f(z_n) = 0$ untuk setiap n, tunjukkan bahwa $f(z) = 0$ untuk setiap $z \in D$.
4. Diketahui f analitik dan terbatas di suatu persekitaran terhapus $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$ dari z_0. $f(z_0) = 0$. Jika f tidak analitik di z_0, tunjukkan bahwa z_0 merupakan titik singular *removable*.
5. Diketahui P dan Q suku banyak berturut-turut berderajat n dan m dengan $m \geq n + 2$. Misalkan C adalah kontur tertutup sederhana yang memuat semua akar dari $Q(z) = 0$. Tunjukkan bahwa
$$\int_C \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0.$$

Level: ***Medium***

6. Misalkan $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ deret Taylor di $z = z_0$ dari fungsi analitik f pada $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Tunjukkan bahwa untuk setiap $0 < r < R$ berlaku
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})|^2 dt.$$
7. Tunjukkan bahwa z_0 merupakan kutub dari f jika dan hanya jika
$$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty.$$
8. Tunjukkan bahwa
$$\int_C e^{z+\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(n+1)!}$$
dengan C merupakan lingkaran $|z| = 1$ dengan arah positif.
9. Tentukan
$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{x^6 + 1} dx.$$
10. [Teorema Argumen] Diketahui f analitik di dalam dan pada kontur C arah positif dan $f(z) \neq 0$ pada C. Tunjukkan
$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$
sama dengan banyaknya nilai nol (*zeros*) dari f (terhitung multiplisitas) yang ada di dalam C.

Level: ***Hard***

11. Tunjukkan bahwa jika f analitik di dalam dan pada kurva tertutup reguler γ, maka untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ berlaku
$$\int_\gamma z^m \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_k z_k^m$$
dengan jumlahan diambil untuk semua zeros f di dalam γ.

12. Diketahui $f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1$ polinom yang akar-akarnya berada di dalam lingkaran satuan. Tunjukkan bahwa
$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} z^2 \frac{f'(z)}{f(z)} dz = a_1^2 - 2a_2.$$

13. Diketahui $\alpha \in \mathbb{C}$ dengan $0 < |\alpha| < 1$. Tunjukkan bahwa
$$\int_{|z|=1} \frac{|dz|}{|z-\alpha|^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}.$$

14. [Teorema Rouche] Tunjukkan bahwa jika f dan g analitik didalam dan pada kurva tertutup sederhana γ dan $|f(z)| > |g(z)|$ untuk setiap $z \in \gamma$, maka
$$\mathbf{Z}(f+g) = \mathbf{Z}(f), \quad \text{di dalam } \gamma.$$

15. Tunjukkan bahwa $P(z) = 2z^{10} + 4z^2 + 1$ punya tepat dua akar di $|z| < 1$.

Soal 4.21. Soal-soal ONMIPA/KNMIPA tahun-tahun sebelumnya

1. (ONMIPA 2010) Diketahui $f(z) = z^5 + 2z^3 - 3iz^2 + 2z - 1 + i$. Jika C adalah lingkaran yang melingkupi semua akar $f(z)$, hitunglah
$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

2. (ONMIPA 2010)

   (a) Hitunglah
   $$\int_\gamma \frac{\sin x}{\cos z} dz$$
   dengan γ adalah kelengkungan batas kotak $-\pi \leq \text{Im}(z) \leq \pi$.

   (b) Hitung juga
   $$\int_\gamma \frac{\sin x}{\alpha + \cos z} dz$$
   dengan $|\alpha| < 1$.

3. (ONMIPA 2011) Misalkan $p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ dan $q(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$. Didefinisinkan $f(z) = p(z)q(z)$. Tentukan $f^{(n)}(0)$.

4. (ONMIPA 2012) Misalkan $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ dengan $c_{n+2} = c_{n+1} + c_n$, $c_0 = -1$ dan $c_1 = -1$. Dengan menghitung nilai $z^2 f(z) = zf(z) - f(z)$, maka bentuk eksplisit dari rumus $f(z)$ adalah ....

5. (ONMIPA 2012) Misalkan f holomorfik kecuali di berhingga titik di sebelah dalam suatu lengkungan tertutup berorientasi positif C.

   (a) Buktikan
   $$\int_C f(z)dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{1}{z^2} f(\frac{1}{z}).$$

   (b) Gunakan hasil pada (a) untuk menghitung
   $$\int_{|z|=2} \frac{z^5}{1 - z^3} dz.$$

6. (ONMIPA 2012) Misalkan f entire dengan $\text{Re}(f(z)) \leq \frac{2}{|z|}$ untuk semua $|z| \geq 1$. Cari semua f.

7. (ONMIPA 2014) Misalkan $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$ dan $g(z) = b_{-2} z^{-2} + b_{-1} z^{-1} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$. Jika kedua derert tersebut konvergen ketika $0 < |z| < 2$, hitunglah
$$\int_{|z|=1} f(z)g(z)dz.$$

8. (ONMIPA 2014) Tentukan deret Lauren dari fungsi
$$\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$
berturut-turut pada $|z| < 1$, $1 < |z| < 2$, dan $|z| > 2$.

9. (ONMIPA 2014) Misalkan $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$ dengan jari-jari konvergensi $R > 0$ atau $R = \infty$. Misalkan $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| \leq r\}$, $0 \leq r < R$.

a Hitunglah $M(r)$ dengan $f(z) = \frac{\sin\sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

b Hitunglah $\lim_{r\to\infty} \frac{\log(M(r))}{\log r}$.

c Jika f analitik dengan $f(0) = 0$, buktikan bahwa

$$\frac{M(r_2)}{M(r_1)} \geq \frac{r_2}{r_1} \quad 0 < r_1 < r_2 < R.$$

10. (ONMIPA 2014) Diketahui C_R adalah setengah lingkaran dengan pusat $(0,0)$ dengan jari-jari R dan $f(z) \to 0$ secara seragam untuk $R \to \infty$. Tunjukkan bahwa

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)e^{ikz}dz = 0 \quad \text{jika } k > 0.$$

11. (ONMIPA 2015) Misalkan n bilangan asli. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz = \binom{2n}{n}$$

dengan C sebarang lingkaran yang mengelilingi titik asal.

12. (ONMIPA 2016) Tentukan residu dari

$$\frac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z^2}$$

di $z = 0$.

13. (ONMIPA 2017) Diberikan bilangan real positif M. Misalkan fungsi analitik $f : D \to \mathbb{C}$ dengan $D = \{z : |z| \leq 1\}$ mempunyai bentuk deret

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

dan memenuhi $|f(z)| \leq M$ untuk setiap $z \in D$.

(a) Untuk setiap $n \geq 1$ dan $0 < r < 1$, buktikan bahwa

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right|.$$

(b) Dengan menggunakan (a) dan mengambil $r \to 1$, tunjukkan bahwa $|a_n| \leq M$ untuk setiap $n \geq 0$.

Hint Soal 4.21.

1. Cek Soal 4.20 No 10.
2. Cek Soal 4.20 No 10.
3. Nyatakan $f(z)$ dalam bentuk deret, lalu turunkan atau manfaatkan rumus integral Cauchy.
4. Barisan (c_n) merupakan negatif dari barisan Fibonacci dan deretnya memenuhi hint yang diberikan di soal.
5. (a) Substitusi $w = \frac{1}{z}$ ke dalam integral. (b) Gunakan (a).
6. Ide serupa Contoh 4.18.
7. Nyatakan $f(z)$ dalam bentuk deret, lalu gunakan residu untuk mencari integralnya.
8. Analog Soal 4.20 No 2.
9. Manfaatkan ekspansi deret sin.
10. Gunakan Teorema ML.
11. Cek residu fungsi di ruas kiri.
12. Nyatakan fungsi $e^{\frac{1}{z}}$ dan $\frac{1}{1+z^2}$ dalam deret Laurent.
13. (a) Cek formula deret Laurent/Taylor-Integral Cauchy. (b) Manfaatkan Teorema ML.