1. Misalkan G adalah grup berhingga komutatif sedemikian sehingga untuk semua $a \in G, a \neq e$ didapat $a^2 = e$. Jika $a_1, a_2, \ldots, a_n$ adalah semua elemen dari G yang berbeda, maka hitung $a_1 a_2 \cdots a_n$

2. Tunjukkan bahwa semua elemen taknol di $\mathbb{Z}_p$ dengan p bilangan prima membentuk suatu grup terhadap perkalian mod p

3. Buktikan bahwa jika p prima maka $(p-1)! + 1$ habis dibagi oleh p.

4. Tunjukkan bahwa jika H dan K adalah subgrup dari G, maka $H \cap K$ adalah subgrup dari G.

5. Tunjukkan bahwa jika G adalah suatu grup dan sebarang elemen $a, b \in G$, maka $|aba^{-1}| = |b|$ dan $|ab| = |ba|$.

6. Diberikan G adalah suatu grup dengan operasi $*$. Jika $(a * b)^2 = a^2 * b^2$ untuk setiap $a, b \in G$, tunjukkan bahwa G komutatif.

7. Tunjukkan bahwa jumlah semua anggota $\mathbb{Z}_n$ habis dibagi n untuk setiap n ganjil.

8. **(ONMIPA Wilayah 2024)** Suatu grup berhingga $(G, *)$ berorde n dikatakan rapi jika terdapat n unsur berbeda $g_1, g_2, \ldots, g_n$ dari G sehingga $G = \{g_1, *g_2, g_2 * g_3, \ldots, g_{n-1} * g_n, g_n * g_1\}$.
   (a) Tunjukkan bahwa $(\mathbb{Z}_7, +)$ rapi.
   (b) Buktikan bahwa untuk setiap n genap $(\mathbb{Z}_n, +)$ tidak rapi.

9. **(KNMIPA Wilayah 2021)** Misalkan S adalah suatu himpunan yang memiliki dua operasi biner $\circ$ dan $*$. Diketahui bahwa masing-masing operasi mempunyai unsur identitas (yang tidak mesti sama) dan untuk setiap $a, b, c, d \in S$ berlaku

$$(a * b) \circ (c * d) = (a \circ c) * (b \circ d)$$

   Haruskah operasi biner $\circ$ dan $*$ merupakan operasi yang sama?

10. **(ONMIPA Nasional 2022)** Misalkan a, b, c adalah unsur di grup G sehingga $abc = e$ dengan e adalah unsur identitas di G. Untuk masing-masing pernyataan berikut, buktikan jika benar atau berikan contoh penyangkal jika salah.
   (a) $bca = e$
   (b) $bac = e$.

SOLUSI

1. Karena G berhingga, maka setiap $a \in G$ berakibat $|a|$ habis membagi $|G|$. Dapat diambil kesimpulan bahwa G berorde genap.

2. Misalkan $a \in \mathbb{Z}_p$ dengan $a \neq 0$. Jelas bahwa perkalian di $\mathbb{Z}_p$ adalah **tertutup** dan **asosiatif**. Lalu terdapat **elemen identitas** $e = 1$ sehingga $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.

   Selanjutnya karena p prima, maka $\text{fpb}(a, p) = 1$ atau dengan menggunakan Identitas Bézout terdapat $x, y \in \mathbb{Z}$ sehingga
   $$ax + py = 1$$
   Dengan menerapkan modulo p pada kedua ruas, didapat
   $$\begin{aligned} ax + py &\equiv 1 \mod p \\ ax &\equiv 1 \mod p \end{aligned}$$
   Dapat dilihat bahwa x adalah invers dari a sehingga setiap $a \neq 0$ **memiliki invers**.

   $\therefore$ $(\mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \cdot)$ adalah grup.

3. Misalkan kita bekerja di ring $\mathbb{Z}_p$ dengan p prima, maka ring tersebut adalah lapangan sehingga setiap elemen taknol memiliki invers. Pertama kita tinjau elemen apa saja yang invers nya adalah dirinya sendiri. Jika $a \in \mathbb{Z}$ dan $a = a^{-1}$, maka
   $$\begin{aligned} a^2 &\equiv 1 \mod p \\ a^2 - 1 &\equiv 0 \mod p \\ (a-1)(a+1) &\equiv 0 \mod p \end{aligned}$$
   Dari sini kita mendapatkan bahwa $a \equiv 1 \mod p$ atau $a \equiv -1 \mod p$. Jadi elemen yang inversnya adalah dirinya sendiri adalah 1 dan $p - 1$.

   Selanjutnya tinjau elemen $\{2, 3, \ldots, p-2\}$ yang dimana setiap elemen tersebut memiliki invers sehingga karena banyaknya elemennya genap maka untuk setiap elemen pastilah mempunyai pasangan inversnya. Jadi kita bisa membagi elemen tersebut menjadi pasangan-pasangan (a, a^{-1}) sehingga perkalian dari semua elemen tersebut adalah 1.
   $$\begin{aligned} (p-1)! &= (p-1)(p-2)\cdots 2 \cdot 1 \\ &= (p-1)[(p-2)(p-3)\cdots 2] \cdot 1 \\ &= (p-1)[\underbrace{(1)\cdot(1)\cdots(1)}_{\text{disusun ulang}}] \\ &\equiv -1 \mod p \end{aligned}$$
   Jadi $(p-1)! + 1 \equiv 0 \mod p$ atau $(p-1)! + 1$ habis dibagi oleh p.

4. Misalkan $m, n \in H$ dan $m, n \in K$ sehingga $m, n \in H \cap K$. Karena H dan K masing-masing adalah subgrup dari G, maka berlaku $mn^{-1} \in H$ dan $mn^{-1} \in K$. Dengan demikian didapatkan $mn^{-1} \in H \cap K$.

   $\therefore$ $H \cap K$ adalah subgrup dari G.

5. Misalkan $a, b \in G$ dengan G grup.

   - Andaikan $|ab| = n$ dan $|ba| = m$, maka
   $$(ab)^n = e \iff \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n} = e \iff a\underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{n-1}b = e$$
   $$\iff \underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{n-1} = a^{-1}b^{-1} \iff \underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{n} = e \iff (ba)^n = e$$

Dari hasil di atas didapatkan $n = k_1 m$ dengan $k_1 = 1, 2, 3, \ldots$.

Selanjutnya dapat kita tinjau

$$(ba)^m = e \iff \underbrace{(ba)(ba)\cdots(ba)}_{m} = e \iff b\underbrace{(ab)\cdots(ab)}_{m-1}a = e$$
$$\iff \underbrace{(ab)\cdots(ab)}_{m-1} = a^{-1}b^{-1} \iff \underbrace{(ab)\cdots(ab)}_{m} = e \iff (ab)^m = e$$

Dari hasil di atas didapatkan $m = k_2 n$ dengan $k_2 = 1, 2, 3, \ldots$.

Alhasil kita dapatkan $n = k_1 m \longrightarrow n = k_1(k_2 n) \longrightarrow k_1 = k_2 = 1$. Sehingga didapatkan kesimpulan $|ab| = |ba|$.

- Dengan cara yang sama, seperti yang dilakukan pada poin pertama.
  Andaikan $|aba^{-1}| = n$, maka

$$(aba^{-1})^n = e \iff ab(a^{-1}a)b(a^{-1}a)\cdots(a^{-1}a)ba^{-1} = e$$
$$\iff a\underbrace{bb\cdots b}_{n}a^{-1} = e \iff a^{-1}a\underbrace{bb\cdots b}_{n}a^{-1}a = a^{-1}a \iff b^n$$

Dari hasil di atas didapatkan $n = k_1|b|$.

Kemudian andaikan $|b| = m$, maka dengan cara yang sama didapatkan $m = k_2|aba^{-1}|$. Disini nantinya berakibat $k_1 = k_2 = 1$.

$\therefore$ $|aba^{-1}| = |b|$.

6. Dengan mudah kita bisa manipulasi persamaan yang telah Diketahui

$$\begin{aligned}
(a*b)^2 &= a^2 * b^2 \\
a*b*a*b &= a*a*b*b \\
\cancel{a}*b*a*\cancel{b} &= \cancel{a}*a*b*\cancel{b} \quad \text{(Kanselasi)} \\
b*a &= a*b
\end{aligned}$$

Sehingga G komutatif.

7. Anggota $\mathbb{Z}_n$ adalah $\{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Kemudian jumlah semua anggotanya adalah

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Selanjutnya karena n ganjil berakibat $n-1$ genap, sehingga $\dfrac{n-1}{2}$ adalah bilangan bulat. Jadi terbukti $\dfrac{n(n-1)}{2}$ habis dibagi n untuk n ganjil.

8. (a) Kita pilih unsur terurut berbeda dari $\mathbb{Z}_7$ yaitu $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Selanjutnya kita operasikan unsur berurutan tersebut

- $0 + 1 = 1$
- $1 + 2 = 3$
- $2 + 3 = 5$
- $3 + 4 = 0$
- $4 + 5 = 2$
- $5 + 6 = 4$
- $6 + 0 = 6$

Dapat dilihat bahwa hasil operasinya memmbentuk himpunan grup $\mathbb{Z}_7$.

$\therefore$ $(\mathbb{Z}_7, +)$ rapi.

(b) Tinjau jumlahan semua elemen dari $\mathbb{Z}_n$ dengan n genap yang berurutan, yaitu

$$0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Jika diasumsikan $\left.\dfrac{n(n-1)}{2}\,\right|\, n$, maka dapat dilihat bahwa $n-1 \mid n$ atau $\left.\dfrac{n}{2}\,\right|\, n$. Namun kedua hal tersebut adalah pernyataan yang salah. Sehingga haruslah

$$\frac{n(n-1)}{2} \nmid n \iff \frac{n(n-1)}{2} \not\equiv 0 \mod n$$

Artinya jumlah semua elemen dari $\mathbb{Z}_n$ tidak habis dibagi n untuk n genap.

Selanjutnya asumsikan bahwa $(\mathbb{Z}_n, +)$ rapi, maka berakibat elemen $\mathbb{Z}_n$ dapat dibentuk menjadi $\{g_1 + g_2, g_2 + g_3, \dots, g_{n-1} + g_n, g_n + g_1\}$. Kemudian jumlahan semua elemen tersebut adalah

$$(g_1+g_2)+(g_2+g_3)+\cdots+(g_{n-1}+g_n)+(g_n+g_1) = 2\sum_{i=1}^{n} g_i = 2\sum_{0}^{n-1} i = 2\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) = n(n-1)$$

Sehingga haruslah $n(n-1) \equiv 0 \mod n$ atau jumlahan elemen $\mathbb{Z}_n$ habis dibagi n untuk n genap. Hal ini kontradiksi dengan pembuktian sebelumnya.

$\therefore$ $(\mathbb{Z}_n, +)$ tidak rapi.

9. Karena masing-masing operasi mempunyai unsur identitas, dapat dimisalkan $e_\circ$ dan e_* sebagai unsur identitas dari operasi $\circ$ dan $*$. sehingga untuk $x, y \in S$ berlaku

$$\begin{aligned}(x * e_*) \circ (y * e_\circ) &= (x \circ y) * (e_* \circ e_\circ)\\ x \circ (y * e_\circ) &= (x \circ y) * e_*\\ x \circ (y * e_\circ) &= x \circ y\end{aligned}$$

subtitusi $x = e_\circ$ dan $y = e_*$ didapatkan

$$\begin{aligned}e_\circ \circ (e_* * e_\circ) &= e_\circ \circ e_*\\ e_\circ \circ e_\circ &= e_*\\ e_\circ &= e_*\end{aligned}$$

Artinya unsur identitas dari operasi $\circ$ dan $*$ adalah sama, misalkan saja e. Selanjutnya dapat kita tinjau

$$\begin{aligned}(x * e) \circ (e * y) &= (x \circ e) * (e \circ y)\\ x \circ y &= x * y\end{aligned}$$

Sehingga operasi biner $\circ$ dan $*$ haruslah sama.

10. (a) Karena $a, b, c \in G$ grup dan $abc = e$, maka

$$a^{-1}a(bc) = a^{-1}e \iff bc = a^{-1} \iff bca = a^{-1}a \iff bca = e \blacksquare$$

(b) Kita ambil contoh grup yang tak komutatif yaitu S_3 dan $a = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$, dan $c = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix}$. Dengan mudah dapat dicek

$$abc = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix} = (1) = e$$

Namun

$$bac = \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 3 & 2\end{pmatrix} \neq e$$

Sehingga pernyataan $bac = e$ salah.