Definisi 1: Polinomial Karakteristik

iberikan sebuah matriks persegi A berukuran $n \times n$ atas lapangan $\mathbb{F}$. Polinomial karakteristik dari A, dinotasikan $p_A(\lambda)$, didefinisikan sebagai:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

di mana I adalah matriks identitas $n \times n$.

Dengan definisi ini, kita dapat menyatakan Teorema Cayley-Hamilton.

Teorema 1: Cayley-Hamilton

etiap matriks persegi A berukuran $n \times n$ memenuhi persamaan karakteristiknya sendiri. Artinya, jika $p_A(\lambda)$ adalah polinomial karakteristik dari A, maka:

$$p_A(A) = \mathbf{0}$$

di mana $\mathbf{0}$ adalah matriks nol berukuran $n \times n$.

Bukti:

Misalkan A adalah matriks $n \times n$ dan $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ adalah polinomial karakteristiknya. Misalkan $B(\lambda) = \operatorname{adj}(A - \lambda I)$ adalah matriks adjugat dari $(A - \lambda I)$. Setiap entri dari $B(\lambda)$ adalah kofaktor dari $(A - \lambda I)$, yang merupakan polinomial dalam λ dengan derajat paling tinggi $n - 1$. Oleh karena itu, kita dapat menulis $B(\lambda)$ sebagai sebuah polinomial dengan koefisien berupa matriks:

$$B(\lambda) = B_{n-1}\lambda^{n-1} + B_{n-2}\lambda^{n-2} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

di mana B_i adalah matriks-matriks $n \times n$.
Dari sifat dasar matriks adjugat, kita tahu bahwa:

$$(A - \lambda I) \cdot \operatorname{adj}(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I) \cdot I$$

Substitusikan ekspresi untuk $B(\lambda)$ dan $p_A(\lambda) = c_n\lambda^n + \cdots + c_0$:

$$(A - \lambda I)(B_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + B_0) = (c_n\lambda^n + \cdots + c_0)I$$

Dengan menjabarkan dan menyamakan koefisien untuk setiap pangkat λ, kita peroleh sistem persamaan matriks berikut:

$$\begin{aligned} -B_{n-1} &= c_n I \\ AB_{n-1} - B_{n-2} &= c_{n-1} I \\ &\vdots \\ AB_1 - B_0 &= c_1 I \\ AB_0 &= c_0 I \end{aligned}$$

Kalikan setiap persamaan di atas dari kiri dengan perpangkatan A yang sesuai $(A^n, A^{n-1}, \ldots, I)$ lalu jumlahkan semuanya. Sisi kiri akan menjadi deret teleskopik yang hasilnya adalah matriks nol, sementara sisi kanan menjadi $p_A(A)$. Maka, kita sampai pada kesimpulan:

$$p_A(A) = c_n A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I = \mathbf{0}$$

Contoh Soal 1: V

rifikasi Teorema Cayley-Hamilton untuk matriks $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Solusi:

Langkah 1: Cari Polinomial Karakteristik

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 2 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)(4-\lambda) - (1)(2) = \lambda^2 - 7\lambda + 10 \end{aligned}$$

Langkah 2: Substitusi A ke dalam Polinomial

Teorema Cayley-Hamilton memprediksi bahwa $A^2 - 7A + 10I = \mathbf{0}$. Mari kita buktikan.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix}$$

Maka,

$$\begin{aligned} A^2 - 7A + 10I &= \begin{pmatrix} 11 & 7 \\ 14 & 18 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + 10 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11-21+10 & 7-7+0 \\ 14-14+0 & 18-28+10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

Verifikasi berhasil.

1. Misalkan A adalah matriks $n \times n$ sedemikian sehingga $A^k = \mathbf{0}$ untuk suatu bilangan asli k (matriks nilpoten). Buktikan bahwa semua nilai eigen dari A adalah 0, dan simpulkan bahwa $A^n = \mathbf{0}$.