Analisis Kompleks

sekar.nugraheni@ugm.ac.id

Materi

1 Integral Kompleks dan Teorema Cauchy

1.1 Kontur dan path

Definisi 1. *Diberikan $[a, b]$ interval bilangan real. Fungsi kontinu $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ biasa dikenal dengan **path**.*

Jadi, untuk setiap $a \leq t \leq b$, $\gamma(t)$ menyatakan titik di path. Ujung pangkal path γ adalah $\gamma(a)$ dan ujung ekor path γ adalah $\gamma(b)$.
Diperhatikan bahwa dua path dapat memiliki ujung pangkal dan ekor yang sama sekalipun untuk titik-titik yang lain berbeda. Sebagai contoh path

$$\gamma_1(t) = t + it \text{ dan } \gamma_2 = t^2 + it^2, \text{ untuk } 0 \leq t \leq 1$$

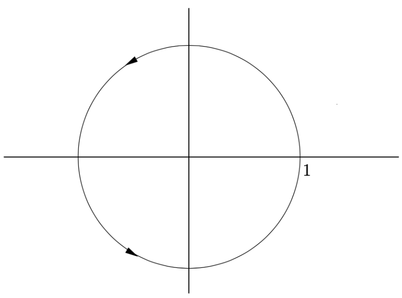
memiliki ujung pangkal dan ekor masing-masing 0 dan $1 + i$. Kedua path ini merupakan path yang dikatakan "sama" tetapi memiliki parametrisasi yang berbeda.

Definisi 2. *Path $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ dikatakan tertutup, jika $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

Salah satu contoh penting path tertutup yang perlu untuk diketahui adalah

$$\gamma(t) = e^{it} = \cos t + i \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

Path ini menyatakan lingkaran di $\mathbb{C}$ dengan pusat 0, jari-jari 1, ujung pangkal dan ekor 1, serta berjalan mengelilingi lingkaran berlawanan arah jarum jam.



Definisi 3. *Path $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ dikatakan mulus, jika γ terdiferensial dan γ' kontinu.*

Note. Path γ dikatakan terdiferensial di a, jika derivatif kanan γ di a ada, begitu juga dengan terdiferensial di b.

Definisi 4. *Diketahui path mulus $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. Panjang path γ didefinisikan dengan*

$$lenght(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| \, dt.$$

Definisi 5. *Koleksi path-path mulus $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ dimana ujung ekor path γ_r terletak di ujung pangkal path γ_{r+1}, untuk setiap $1 \leq r \leq n-1$, disebut dengan kontur γ dan dinotasikan dengan*

$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n.$$

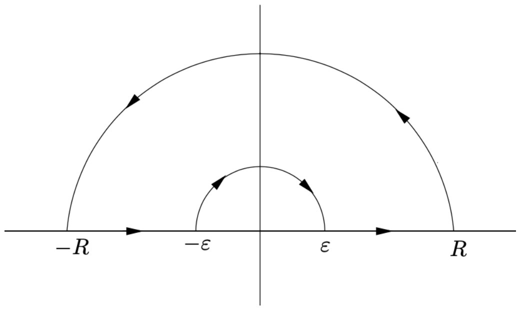
Kontur γ dikatakan tertutup jika ujung pangkal γ_1 sama dengan ujung ekor γ_n.

Diperhatikan bahwa kontur γ mulus kecuali di sebanyak berhingga titik.

Contoh 6. Diberikan $0 < \epsilon < R$. Didefinisikan fungsi

$$\begin{aligned} \gamma_1 &: [\epsilon, R] \to \mathbb{C}, & \gamma_1(t) &= t \\ \gamma_2 &: [0, \pi] \to \mathbb{C}, & \gamma_2 &= Re^{it} \\ \gamma_3 &: [-R, -\epsilon] \to \mathbb{C}, & \gamma_3 &= t \\ \gamma_4 &: [-\pi, 0] \to \mathbb{C}, & \gamma_4 &= \epsilon e^{it}. \end{aligned}$$

Kontur $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4$ merupakan kontur tertutup.



Definisi 7. *Panjang dari kontur* $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ *didefinisikan dengan*

$$\textit{lenght}(\gamma) = \textit{lenght}(\gamma_1) + \textit{lenght}(\gamma_2) + \cdots + \textit{lenght}(\gamma_n).$$

Definisi 8. *Diketahui path* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$. *Didefinisikan path* $-\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$, *dengan*

$$-\gamma(t) = \gamma(a + b - t).$$

Path $-\gamma$ mendeskripsikan path yang sama dengan γ tetapi dengan arah kebalikan. Jika path γ ujung pangkal dan ekor masing-masing adalah $\gamma(a)$ dan $\gamma(b)$ maka path $-\gamma$ memiliki ujung pangkal dan ekor masing-masing $\gamma(b)$ dan $\gamma(a)$.

1.2 Integral Kontur

Diberikan $f : D \to \mathbb{C}$ fungsi kompleks pada domain D dan $\gamma : [a, b] \to D$ path mulus di D.

Definisi 9. *Integral* f *sepanjang* γ *didefinisikan dengan*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt.$$

Lemma 10. *Diberikan* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *path mulus. Jika* $\phi : [c, d] \to [a, b]$ *fungsi bijektif,naik dan mulus, maka* $\gamma \circ \phi : [c, d] \to \mathbb{C}$ *adalah path dengan daerah hasil yang sama dengan* γ. *Lebih lanjut,*

$$\int_{\gamma\circ\phi} f = \int_\gamma f.$$

Bukti. Jelas bahwa γ dan $\gamma \circ \phi$ memiliki daerah hasil yang sama. Dengan demikian, γ dan $\gamma \circ \phi$ merupakan path yang sama dengan parametrisasi yang berbeda. Akibatnya,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma\circ\phi} f &= \int_c^d f(\gamma(\phi(t)))(\gamma \circ \phi)'(t)\ dt \\ &= \int_c^d f(\gamma(\phi(t)))\gamma'(\phi(t))\phi'(t)\ dt \\ &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt\end{aligned}$$

□

Note. Jika ϕ pada Lemma 10. bijektif, mulus tetapi turun, maka $\gamma \circ \phi$ mempunyai daerah hasil yang sama dengan γ tetapi dengan arah yang berlawanan. Dengan kata lain $\gamma \circ \phi$ merupakan parametrisasi dari $-\gamma$. Akibatnya,

$$\int_{\gamma\circ\phi} f = -\int_\gamma f.$$

Lebih lanjut,

$$\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f.$$

Definisi 11. *Diberikan* $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_n$ *kontur di* D. *Didefinisikan*

$$\int_\gamma f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \cdots + \int_{\gamma_n} f.$$

Lemma 12. *Diberikan* $f, g : D \to \mathbb{C}$ *fungsi kontinu,* $c \in \mathbb{C}$, *dan* $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ *kontur di* D. *Jika ujung ekor* γ_1 *merupakan ujung pangkal* γ_2 *maka*

i. $\displaystyle\int_{\gamma_1+\gamma_2} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$

ii. $\displaystyle\int_\gamma (f + g) = \int_\gamma f + \int_\gamma g$

iii. $\displaystyle\int_\gamma cf = c\int_\gamma f$

iv. $\displaystyle\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f$

Definisi 13. *Diketahui* $f : D \to \mathbb{C}$ *fungsi kontinu. Fungsi* $F : D \to \mathbb{C}$ *disebut antiderivatif dari* f *pada* D *jika* $F' = f$.

Teorema 14. ***(Teorema Fundamental Integral Kontur)*** *Diketahui* $f : D \to \mathbb{C}$ *kontinu dan* $F : D \to \mathbb{C}$ *antiderivatif* f *pada* D. *Jika* γ *kontur dari* z_0 *ke* z_1, *maka*

$$\int_\gamma f = F(z_1) - F(z_0).$$

Bukti. Teorema cukup dibuktikan untuk path mulus. Katakan $\gamma : [a, b] \to D$, $\gamma(a) = z_0$ dan $\gamma(b) = z_1$ merupakan path mulus. Katakan $w(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$ dan $W(t) = F(\gamma(t))$. Dengan demikian, berdasarkan aturan rantai diperoleh

$$W'(t) = F'(\gamma(t))\gamma'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t) = w(t).$$

Katakan $w(t) = u(t) + iv(t)$ and $W(t) = U(t) + iV(t)$ sehingga $U' = u$ dan $V' = v$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f &= \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt \\
&= \int_a^b w(t)\ dt \\
&= \int_a^b u(t)\ dt + i\int_a^b v(t)\ dt \\
&= U(t)|_a^b + iV(t)|_a^b \\
&= W(t)|_a^b \\
&= F(z_1) - F(z_0).
\end{aligned}$$

□

Note.

- √ Diperhatikan bahwa teorema ini tidak tergantung pada pemilihan path dari z_0 ke z_1. Yang perlu ditentukan adalah eksistensi dari antiderivatif untuk f pada domain yang memuat z_0 dan z_1.

- √ Jika γ merupakan kontur tertutup dan f mempunyai antiderivatif pada domain yang memuat γ, maka
$$\int_\gamma f = 0.$$

- √ Dalam analisis real, sebarang fungsi yang cukup "nice" f mempunyai antiderivatif dan didefinisikan dengan
$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt,$$
maka $F' = f$. Akan tetapi dalam analisis kompleks, eksistensi antiderivatif pada domain D tidak semudah itu. Sebagai contoh fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$ terdefinisi pada $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Kandidat paling kuat untuk antiderivatif fungsi ini adalah $\mathrm{Log}(z)$. Akan tetapi, $\mathrm{Log}(z)$ hanya kontinu pada cut-plane, $\mathrm{Log}(z)$ tidak kontinu pada D, jadi tidak terdiferensial oada D. Dengan demikian, $\mathrm{Log}(z)$ bukan merupakan antiderivatif dari $f(z) = \frac{1}{z}$.

- √ Diberikan fungsi $\gamma(t) = e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ yang menyatakan lingkaran unit yang berlawanan arah dengan jam. Dengan demikian, γ merupakan path tertutup. Diperhatikan fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$. Berdasarkan pembahasan sebelumnya diperoleh bahwa f tidak mempunyai antiderivatif pada sebarang domain yang memuat γ. Akibatnya, untuk menghitung $\int_\gamma f$ akan digunakan definisi dari integral kontur. Diperoleh
$$\int_\gamma f = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} \frac{ie^{it}}{e^{it}}\ dt = 2\pi i.$$
Jika f mempunyai antiderivatif pada domain yang memuat γ maka menurut Teorema Fundamental Integral Kontur diperoleh $\int_\gamma f = 0$. Dengan demikian, fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$ tidak mempunyai antiderivatif pada sebarang domain yang memuat γ.

- √ **Secara umum**, mencari antiderivatif bukan merupakan cara yang terbaik untuk menghitung integral kompleks.

1.3 Lemma Estimasi

Terdapat dua hasil mengenai integral fungsi bilangan real, yaitu
$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\ dx$$
dan jika $|f(x)| \le M$ maka
$$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \le M(b-a).$$

Hasil ini akan diperluas untuk integral fungsi bilangan kompleks.

Lemma 15. *Jika $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu, maka*
$$\left|\int_a^b (u(t) + iv(t))\ dt\right| \le \int_a^b |u(t) + iv(t)|\ dt.$$

Bukti. Dikatakan
$$\int_a^b u(t) + iv(t)\ dt = X + iY.$$

Dengan demikian,
$$\begin{aligned}
X^2 + Y^2 &= (X - iY)(X + iY) \\
&= \int_a^b (X - iY)(u(t) + iv(t))\ dt \\
&= \int_a^b Xu(t) + Yv(t)\ dt + i\int_a^b Xv(t) - Yu(t)\ dt.
\end{aligned}$$

Akan tetapi, $X^2 + Y^2$ adalah bagian real, dengan demikian, bagian imaginer harus bernilai 0. Jadi,
$$\int_a^b Xv(t) - Yu(t)\ dt = 0$$
dan
$$X^2 + Y^2 = \int_a^b Xu(t) + Yv(t)\ dt.$$

Diperhatikan bahwa $Xu(t) + Yv(t)$ merupakan bagian real dari $(X - iY)(u(t) + iv(t))$. Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned} Xu(t) + Yv(t) &\leq |(X - iY)(u(t) + iv(t))| \\ &= |X - iY||u(t) + iv(t)| \\ &= \sqrt{X^2 + Y^2}|u(t) + iv(t)|. \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 &= \int_a^b Xu(t) + Yv(t)\ dt \\ &\leq \sqrt{X^2 + Y^2}|u(t) + iv(t)|. \end{aligned}$$

Akibatnya, diperoleh

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b u(t) + iv(t)\ dt \right| &= |X + iY| = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ &\leq \int_a^b |u(t) + iv(t)|\ dt. \end{aligned}$$

□

Lemma 16. ***(Lemma Estimasi)*** *Diketahui $f : D \to \mathbb{C}$ kontinu dan γ kontur di D. Jika $|f(z)| \leq M$ untuk setiap $z \in \gamma$, maka*

$$\left| \int_\gamma f \right| \leq M \text{lenght}(\gamma).$$

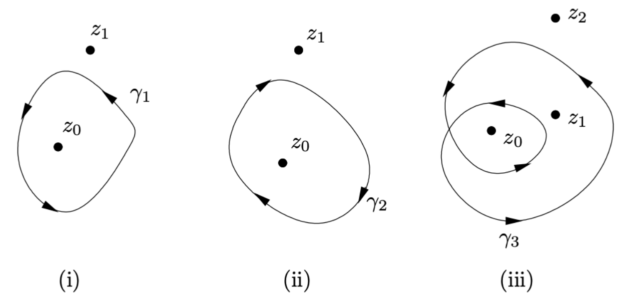
Bukti. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} \left| \int_\gamma f \right| &= \left| \int_\gamma f(\gamma(t))\gamma'(t)\ dt \right| \\ &\leq \int_a^b |f(\gamma(t))||\gamma'(t)|\ dt \\ &\leq M \int_a^b |\gamma'(t)|\ dt \\ &= M \text{lenght}(\gamma). \end{aligned}$$

□

1.4 Teorema Cauchy

Sebelum membahas mengenai Teorema Cauchy, dibahas terlebih dahulu mengenai *winding numbers.* Diberikan γ path tertutup dan z_0 adalah titik yang tidak terletak pada γ. *Winding number* $w(\gamma, z_0)$ adalah banyaknya lilitan berlawanan arah jarum jam yang diperoleh jika mengitari sekeliling z_0 sesuai dengan path γ. Sebagai contoh perhatikan gambar berikut:



Pada gambar (i) jelas bahwa $w(\gamma_1, z_0) = 1$ dan $w(\gamma_1, z_1) = 0$. Untuk gambar (ii) diperoleh $w(\gamma_2, z_0) = -1$ dan $w(\gamma_2, z_1) = 0$. Untuk gambar (iii) diperoleh $w(\gamma_3, z_0) = 2$, $w(\gamma_3, z_1) = 1$ dan $w(\gamma_3, z_2) = 0$.

Lemma 17. *Jika γ merupakan path di $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, maka terdapat $\gamma^* : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ path parametrisasi dari γ, dimana pemetaan $t \mapsto \arg \gamma^*(t)$ merupakan fungsi kontinu.*

Teorema 18. *Jika γ merupakan path tertutup yang tidak melalui titik 0, maka*

$$w(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{1}{z}\ dz.$$

Bukti. Katakan $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$ path tertutup yang tidak melalui 0. Dengan demikian, $\gamma(a) = \gamma(b)$. Untuk setiap $\alpha \in [-\pi, \pi)$, didefinisikan cut plane dengan sudut α berikut:

$$\mathbb{C}_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} : r > 0\}.$$

Pada cut plane $\mathbb{C}_\alpha$, dapat didefinisikan $\arg_\alpha z = \theta$ dimana

$$z = re^{i\theta}, \quad r > 0, \quad \alpha - 2(m + 1)\pi < \theta \leq \alpha - 2m\pi,$$

dengan $m \in \mathbb{Z}$. Diperhatikan bahwa γ tidak mungkin terletak pada satu cut plane saja. Katakan γ terpotong-potong menjadi path-path $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ yang terdefinisi pada $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \ldots, [t_{n-1}, t_n]$ sehingga untuk setiap γ_r terletak pada satu cut plane katakan $\mathbb{C}_{\alpha_r}$. Lebih lanjut, untuk setiap γ_r dipilih argumen $\arg_{\alpha_r}$ yang kontinu pada $\mathbb{C}_{\alpha_r}$ dan $\arg_{\alpha_r} \gamma_r(t_r) = \arg_{\alpha_{r+1}} \gamma_{r+1}(t_r)$, untuk setiap $0 \leq r \leq n - 1$. Akibatnya,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\ dz &= \log \gamma(t_r) - \log \gamma(t_{r-1}) \\ &= \log |\gamma(t_r)| - \log |\gamma(t_{r-1})| \\ &\quad + i(\arg_{\alpha_r}(\gamma(t_r)) - \arg_{\alpha_r}(\gamma(t_{r-1}))). \end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz &= \sum_{r=1}^{n} \int_{\gamma_r} \frac{1}{z}\, dz \\ &= i(\arg_{\alpha_n}(\gamma(t_n)) - \arg_{\alpha_0}(\gamma(t_0))) \\ &= 2\pi i w(\gamma, 0).\end{aligned}$$

□

Banyak yang menggunakan perhitungan berikut:

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz &= \int_a^b \frac{1}{\gamma(t)}\gamma'(t)\, dt \\ &= \log(\gamma(t))|_a^b \\ &= (\ln|\gamma(b)| + i\arg\gamma(b)) - (\ln|\gamma(a)| + i\arg\gamma(a)) \\ &= i(\arg\gamma(b) - \arg\gamma(a)) \\ &= 2\pi i w(\gamma, 0)\end{aligned}$$

Diperhatikan bahwa perhitungan di atas bukan merupakan bukti yang benar karena $\log(z)$ bukan merupakan antiderivatif dari $\frac{1}{z}$.

Teorema 19. *Jika γ path tertutup dan tidak melalui titik z_0, maka*

$$w(\gamma, z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz.$$

Bukti. Katakan $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ path tertutup yang tidak melalui titik z_0. Didefinisikan path $\gamma_1(t) = \gamma(t) - z_0$, yaitu path γ yang ditranslasi sejauh z_0. Dengan demikian, $w(\gamma, z_0) = w(\gamma_1, 0)$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{1}{\gamma(t) - z_0}\gamma'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \frac{1}{\gamma_1(t)}\gamma_1'(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1} \frac{1}{z}\, dz \\ &= w(\gamma_1, 0) = w(\gamma, z_0).\end{aligned}$$

□

Teorema 20. *i. Jika γ_1, γ_2 path-path tertutup yang tidak melalui z_0, maka*

$$w(\gamma_1 + \gamma_2, z_0) = w(\gamma_1, z_0) + w(\gamma_2, z_0).$$

ii. Jika γ path tertutup yang tidak melalui z_0, maka

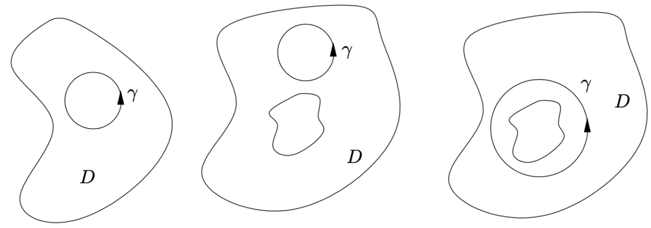
$$w(-\gamma, z_0) = -w(\gamma, z_0).$$

Teorema 21. ***(Teorema Cauchy)*** *Diberikan fungsi holomorfik f pada domain D. Jika γ kontur tertutup di D sehingga $w(\gamma, z) = 0$ untuk setiap $z \notin D$, maka*

$$\int_\gamma f = 0.$$

Dalam membuktikan teorema ini tidak mudah, untuk lebih jelasnya silakan buka buku acuan yang Anda miliki.

Diperhatikan domain berikut:



(i) (ii) (iii)

Dalam gambar (i) dan (ii) nilai $w(\gamma, z) = 0$ untuk setiap titik z di luar D, dengan demikian Teorema Cauchy dapat digunakan. Akan tetapi pada gambar (iii) tidak demikian.

Definisi 22. *Domain D dikatakan terhubung sederhana, jika untuk setiap kontur tertutup γ di D dan untuk setiap $z \notin D$, diperoleh $w(\gamma, z) = 0$.*

Teorema 23. *Jika D merupakan domain terhubung sederhana dan f fungsi holomorfik pada D, maka untuk setiap kontur tertutup γ diperoleh $\int_\gamma f = 0$.*

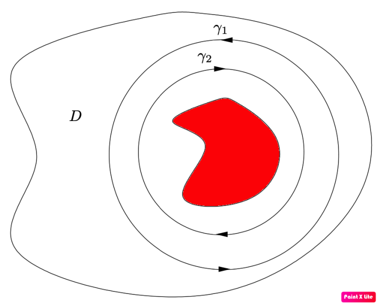
Teorema 24. ***(Teorema Cauchy Diperluas)*** *Jika D merupakan domain terhubung sederhana dan f fungsi holomorfik pada D, maka untuk setiap kontur-kontur tertutup $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ di D dengan*

$$w(\gamma_1, z) + w(\gamma_2, z) + \cdots + w(\gamma_n, z) = 0, \quad \textit{untuk setiap } z \notin D,$$

maka

$$\int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f + \cdots + \int_{\gamma_n} f = 0.$$

Untuk lebih jelasnya diperhatikan gambar berikut:



Jika z berada di dalam lubang D maka $w(\gamma_1, z) = 1$ dan $w(\gamma_2, z) = -1$ sehingga

$$w(\gamma_1, z) + w(\gamma_2, z) = 0.$$

Dengan demikian, Teorema Cauchy diperluas dapat digunakan.

Latihan

1. Gambarkan path berikut:

   i. $\gamma(t) = e^{-it}$, $0 \le t \le \pi$

   ii. $\gamma(t) = 1 + i + 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$

   iii. $\gamma(t) = t + i\cosh t$, $-1 \le t \le 1$

   iv. $\gamma(t) = \cosh t + i\sinh t$, $-1 \le t \le 1$

2. Tentukan nilai dari

$$\int_\gamma x - y + ix^2 \; dz,$$

   dimana $z = x + iy$ dan γ adalah

   i. garis lurus yang memhubungkan 0 ke $1+i$

   ii. garis lurus yang menghubungkan 0 ke i

   iii. garis yang paralel dengan sumbu axis dari i ke $1+i$

3. Diberikan

$$\gamma_1(t) = 2 + 2e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$
$$\gamma_2(t) = i + e^{-it}, \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}.$$

   Gambarkan path γ_1 dan γ_2. Berdasarkan definisi $\int_\gamma f = \int_a^a f(\gamma(t))\gamma'(t)\; dt$, hitunglah

   i. $\displaystyle\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-2}$

   ii. $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z-i)^3}$

4. Hitunglah $\int_\gamma |z|^2 \; dz$ dimana γ merupakan lingkaran berlawan arah jarum jam $|z-1| = 1$.

5. Untuk setiap fungsi berikut, tentukan antiderivatif dan hitunglah nilai integral untuk sebarang path mulus dari 0 ke i:

   i. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 \sin z$

   ii. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = ze^{iz}$

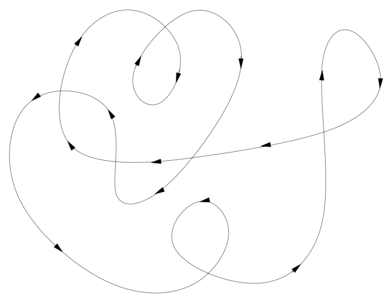
6. Hitunglah $\int_\gamma |z|^2 \; dz$, dimana

   i. γ menyatakan kontur yang menghubungkan titik 0 ke titik i, kemudian dari titik i ke titik $1+i$

   ii. γ menyatakan kontur yang menghubungkan titik 0 ke titik 1, kemudian dari titik 1 ke titik $1+i$

   iii. Dari jawaban Anda, mungkinkan terdapat antiderivatif untuk $f(z) = |z|^2$?

7. Hitunglah *winding number* untuk sebarang titik yang tidak terletak pada path berikut:



8. Buktikan jika D domain, γ kontur di D dan $f : D \to \mathbb{C}$ kontinu, maka

$$\int_{-\gamma} f = -\int_\gamma f.$$

9. Diberikan $f, g : D \to \mathbb{C}$ fungsi holomorfik, γ path mulus di D dengan ujung pangkal z_0 dan ujung ekor z_1. Buktikan bahwa

$$\int_\gamma fg' = f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0) - \int_\gamma f'g.$$

10. Diketahui

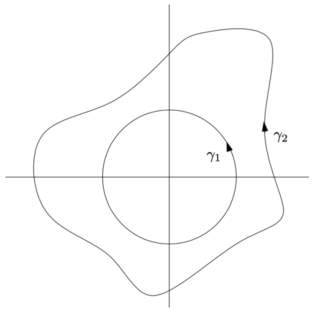
$$\gamma_1(t) = -1 + \frac{1}{2}e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$
$$\gamma_2(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$
$$\gamma(t) = 2e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

   Dengan menggunakan Teorema Cauchy diperluas, tunjukkan bahwa

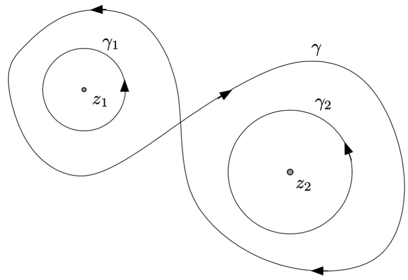
$$\int_\gamma f \; dz = \int_{\gamma_1} f \; dz + \int_{\gamma_2} f \; dz,$$

   dengan $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)}$.

11. Diberikan γ_1 menyatakan lingkaran dengan pusat di titik 0 dan radius 1 berlawanan arah jarum jam. Jika $f(z) = \dfrac{1}{z}$, tunjukkan bahwa $\int_{\gamma_1} f = 2\pi i$. Diberikan γ_2 kontur tertutup sebagai berikut:



12. Diketahui D domain di $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$. Jika $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ kontur tertutup di D seperti berikut:



dan $\displaystyle\int_{\gamma_1} f = 3 + 4i$ dan $\displaystyle\int_{\gamma_2} f = 5 + 6i$, maka tunjukkan

$$\int_{\gamma} f.$$