

Klinik Aljabar Analisis
ASCI HIMATIKA ITS 2018-2019

Kumpulan Soal ONMIPA-PT Tingkat Nasional

Tahun 2006-2024



DAFTAR ISI

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2011	1
HARI PERTAMA	1
HARI KEDUA	2
ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2012	3
HARI PERTAMA	3
HARI KEDUA	4
ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2013	5
HARI PERTAMA	5
HARI KEDUA	6
ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2014	7
HARI PERTAMA	7
HARI KEDUA	9
ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2015	10
HARI PERTAMA	10
HARI KEDUA	12
ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2016	14
HARI PERTAMA	14
HARI KEDUA	16
ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2017	17
HARI PERTAMA	17
HARI KEDUA	18
ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2018	19
HARI PERTAMA	19
HARI KEDUA	21
ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2019	22
HARI PERTAMA	22

HARI KEDUA	24
KNMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2020	26
HARI PERTAMA	26
HARI KEDUA	28
KNMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2021	30
HARI PERTAMA	30
HARI KEDUA	32
ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2022	33
HARI PERTAMA	33
HARI KEDUA	35
ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2023	36
HARI PERTAMA	36
HARI KEDUA	38
ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2024	40
HARI PERTAMA	40
HARI KEDUA	41

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2011**HARI PERTAMA**

1. Misalkan N adalah subgrup berhingga dari grup G . Misalkan $G = \langle S \rangle$ dan $N = \langle T \rangle$ dengan $S, T \subseteq G$. Buktikan bahwa N normal jika dan hanya jika $tSt^{-1} \subseteq N$ untuk semua $t \in T$.
2. (a.) Hitunglah

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{\cos z} dz,$$

dengan γ adalah lengkungan batas kotak $-\pi \leq \operatorname{Im}(z) \leq \pi$ dan $0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 2\pi N$ dengan N adalah bilangan bulat positif.

- (a.) Hitung juga

$$\int_{\gamma} \frac{\sin z}{\alpha + \cos z} dz,$$

dengan $|z| < 1$. Periksa semua ketaksamaan yang dignakan.

3. Diberikan $n \in \mathbb{N}$, buktikan secara kombinatorik bahwa

$$\sum_{k=1}^n k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}.$$

4. Diberikan bahwa $S \subseteq \mathbb{R}$ tertutup dan $x \notin S$. Buktikan bahwa terdapat $y \in S$ sedemikian sehingga

$$|y - x| = \inf \{|z - x| : z \in S\}.$$

5. Misalkan A adalah matriks berukuran $n \times n$ sedemikian sehingga elemen-elemen pada diagonal bernilai positif, elemen-elemen lainnya bernilai negatif, dan hasil jumlah semua elemen pada setiap kolom adalah 1. Buktikan bahwa $\det(A) > 1$.

HARI KEDUA

1. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $\lambda \in [0, 1]$ berlaku

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

untuk semua $x, y \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx \geq 0$.

2. Misalkan V adalah ruang vektor atas \mathbb{R} . Fungsi $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ memenuhi sifat:

(a) $f(v) \geq 0$ untuk $v \in V$ dan

(b) $[f(u + w)]^2 + [f(u - w)]^2 = 2[f(u)]^2 + 2[f(w)]^2$, untuk semua $u, w \in V$.

Buktikan bahwa $f(u + w) \leq f(u) + f(w)$, untuk semua $u, w \in V$.

3. Misalkan R adalah ring komutatif dan $R[x]$ adalah polinomial terhadap ring R . Untuk suatu polinomial $f(x) \in R$, pandang ring faktor $\frac{R[x]}{\langle f(x) \rangle}$, dan setiap elemen dari $\frac{R[x]}{\langle f(x) \rangle}$ ditulis sebagai $\overline{p(x)}$ dengan $p(x) \in R[x]$.

(a) Buktikan bahwa $p(x)$ dan $q(x)$ dua polinomial berbeda berderajat kurang dari n , maka $p(x) \neq q(x)$.

(b) Jika $a \in R$ adalah elemen nilpoten, dan $f(x) = x^n - a$, maka \bar{x} adalah elemen nilpoten di $\frac{R[x]}{\langle f(x) \rangle}$.

4. Diberikan fungsi $f : U \rightarrow U$ disebut sebagai biholomorfik jika f memiliki invers, dan f dan f^{-1} keduanya holomorfik atau analitik.

(a) Buktikan bahwa jika $U = \mathbb{C}$, maka $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = \infty$.

(b) Carilah bentuk umum dari $f(z)$ dan jelaskan Argumen anda.

5. Misalkan relasi rekurensi P_n yang didefinisikan dengan $P_1 = 2$ dan $P_{n+1} = P_n^2 - P_n + 1$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa $m \neq n$, maka P_m dan P_n keduanya relatif prima.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2012**HARI PERTAMA**

1. Misalkan Z merupakan subgrup dari G yang memenuhi $\forall z \in Z$, $g \in G$ maka $zg = gz$. Jika G/Z siklis, tunjukkan bahwa G komutatif.
2. Misalkan $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ dengan $|f(z) - f(y)| < \frac{|x - y|}{3}$. Untuk semua $x, y \in [a, b]$. Tunjukkan bahwa ada $c \in [a, b]$ sehingga $f(c) = c$.
3. Misalkan V ruang vektor atas real. Didefinisikan vektor $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ terikat afin jika terdapat $c_1, c_2, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ yang tidak semuanya 0 dan memenuhi $c_1 + c_2 + \dots + c_k = 0$ dan $c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_kv_k = 0$
 - (a) Tunjukkan bahwa vektor 0 bebas afin.
 - b) Carilah contoh empat vektor di \mathbb{R}^4 yang bebas afin tetapi tidak bebas linier.
4. Misalkan f holomorfik kecuali di berhingga titik sebelah dalam suatu lengkungan tertutup berorientasi tertutup positif C .
 - (a) Buktikan

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \text{Residu}_{z=0} \left\{ \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{z^2} \right\}.$$

- (b) Gunakan hasil pada (a) untuk menghitung

$$\oint_{|z|=2} \frac{z^5}{1-z^3} dz,$$

pada $|z| = 2$.

5. Buktikan secara kombinatorik bahwa

$$\sum_{k=1}^{n-2} k \binom{n-2}{k} \binom{n+2}{k+2} = (n-2) \binom{2n-1}{n-1}.$$

HARI KEDUA

1. Misalkan R himpunan tak kosong yang dilengkapi operasi $+$ dan \times dengan
 - (a) $(R, +)$ grup,
 - (b) (R, \times) asosiatif dan memiliki unsur identitas,
 - (c) $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ dan $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$.

Tunjukkan bahwa $(R, +, \times)$ gelanggang.

2. Misalkan f merupakan entire dengan $Re(f(z)) \leq \frac{2}{|z|}$ untuk semua $|z| \geq 1$. Cari semua f .
3. Misalkan $(y_n)_{n \geq 0}$ barisan bilangan real dengan $y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1} = 1$. Tunjukkan bahwa ada c real sehingga $y_{n+1} = cy_n - y_{n-1}$ untuk $n \geq 1$.
4. Misalkan V ruang vektor atas lapangan F dengan $\dim\{F(V)\} = n$. Misalkan $T : V \rightarrow V$ transformasi linier. Tunjukkan bahwa terdapat $K \leq n$, sehingga $Peta(T^k) = Peta(T^{k+i})$ untuk semua bilangan asli i .
5. Misalkan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terdiferensial dengan $f(a) = 0$. Misalkan terdapat $k > 0$ dan $m > 0$ sehingga $|f'(x) - kf(x)| \leq m|f(x)|$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Tunjukkan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2013**HARI PERTAMA**

1. Suatu subgrup H dari G disebut subgrup *normal* jika untuk setiap $g \in G$ dan $h \in H$ berlaku $g^{-1}hg \in H$. Suatu subgrup H dari G dikatakan mempunyai sifat *refleksif* jika untuk setiap $a, b \in G$ dengan $ab \in H$ berlaku $ba \in H$. Tunjukkan bahwa H merupakan subgrup normal jika dan hanya jika H bersifat refleksif.
2. Misalkan $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ merupakan fungsi kontinu sedemikian sehingga $\int_0^1 f(x) dx = 0$. Tunjukkan bahwa untuk setiap $\alpha \in [0, 1]$ berlaku

$$\left| \int_0^\alpha f(x) dx \right| \leq \frac{1}{8} \sup_{a \in [0,1]} |f'(a)|.$$

3. Misalkan u fungsi harmonik di \mathbb{R}^2 dan v fungsi harmonik konjugatnya (yaitu fungsi sehingga $f(z) = u(z) + iv(z)$ analitik). Jika

$$u^3 - 3uv^2 \geq 0,$$

di \mathbb{R}^2 , carilah fungsi u dan v .

4. Misalkan $A = [a_{ij}]$ matriks real $n \times n$ dengan $a_{ij} = \min\{i, j\}, i, j = 1, 2, \dots, n$. Tentukan A^{-1} .
5. Sebuah n -board adalah sebuah persegi panjang berukuran $n \times 1$. Misalkan f_n menyatakan banyaknya cara mengubin n -board dengan menggunakan ubin 1×1 dan ubin 2×1 . Jadi $f_1 = 1$ dan $f_2 = 2$. Untuk $n \geq 0$, perlihatkan bahwa

$$f_{2n+1} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \binom{n-i}{j} \binom{n-j}{i}.$$

HARI KEDUA

1. Untuk $0 \leq k \leq n/2$, berikan bukti kombinatorial dari persamaan

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k} \binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1},$$

dengan n adalah bilangan bulat positif.

2. Misalkan I ideal di gelanggang R dan $S \subseteq R$. Didefinisikan $\langle I : S \rangle = \{r \in R : rs \in I \text{ untuk setiap } s \in S\}$.

- (a) Buktikan $\langle I : S \rangle$ ideal kiri di R .
- (b) Jika S ideal di R buktikan $\langle I : S \rangle$ ideal di R .
- (c) Jika R daerah integral $a, b \in R$ dengan $b \neq 0$, dan $I = \langle ab \rangle, J = \langle b \rangle$, buktikan $\langle I : J \rangle = \langle a \rangle$.

3. Diketahui fungsi

$$f(z) = \int_1^z \left(\frac{1}{w} + \frac{a}{w^2} \right) \cos w dw.$$

Tentukan nilai a agar fungsi tersebut bernilai tunggal di seluruh daerah bidang kompleks.

4. Misalkan $a_n \geq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_k$. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergen, perlihatkan bahwa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(s_n)^{\alpha}}$ konvergen jika dan hanya jika $\alpha > 1$.
5. Misalkan l dan m dua garis di \mathbb{R}^3 yang bersilangan (yaitu tidak berpotongan dan tidak sejajar). Tentukan titik P di l dan Q di m yang meminimumkan jarak antara titik di l dan titik di m .

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2014**HARI PERTAMA**

1. Buktikan dengan kombinatorik

$$\sum_{k=2}^n k \binom{n-2}{k-2} \binom{n+2}{k} = (n+2) \binom{2n-1}{n-1}.$$

2. Diketahui fungsi $f(x)$ terdefinisi pada selang $[a, b]$. Misalkan $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b], f(x) \geq 0\}$. Tunjukkan bahwa barisan $\left(\int_a^b f^n(x) dx\right)^{\frac{1}{n}}$ konvergen ke M .

3. Diketahui $\sum_{i=0}^n a_i z^i$ dengan jari-jari konvergensi $R > 0$ atau $R = \infty$. Misalkan $M(r) = \max\{|f(z)| : |z| \leq r\}, 0 \leq r < R$.

(a) Hitunglah $M(r)$ dengan $f(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$.

(b) Hitunglah $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(M(r))}{\log(r)}$, $f(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$.

(c) Diberikan f analitik dengan $f(0) = 0$. Buktikan bahwa:

$$\frac{M(r_2)}{M(r_1)} \geq \frac{r_2}{r_1}, 0 < r_1 < r_2 < R.$$

4. Diketahui V adalah ruang hasil kali dalam atas X dengan $\dim(V) = n \geq 2$, X basis bagi V , misalkan $A \in C^{n \times n}$ tak singular dan $B = (A^{-1})^*$. Untuk $i = 1, 2, \dots, n$ kolom ke i matriks A dan B sebagai koordinat x_i dan y_i di V terhadap X . Misalkan $K = \text{span}\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ untuk suatu $1 \leq k < n$. Buktikan bahwa

(a) Jika X ortonormal maka $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ adalah basis terhadap K^\perp .

(b) Periksalah apakah implikasinya berlaku.

5. a dikatakan pembagi kiri dari b , jika $\exists x$ sehingga $ax = b$. p dikatakan prima kiri jika $p \mid ab$ maka $p \mid a$ atau $p \mid b$. Misalkan R ring dengan

setiap unsur dari R adalah prima kiri. Buktikan bahwa

- (a) $\exists e \in R, \forall x \in R$ berlaku $ex = x$ dan $xe = x$.
- (b) $\exists e \in R, \forall x \in R$ berlaku $xy = e$ dan $yx = e$.

HARI KEDUA

1. Diketahui $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi periodik dan $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - g(x)) = 0$.
Buktikan bahwa $f = g$.
2. Carilah koefisien x^{2n+r} , $1 \leq r \leq 2n$ dari $\sum_{l=0}^{2n} x^l (1+x)^{4n-l}$
3. Diketahui $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A bekerja sepenuhnya atas lapangan real.
Buktikan bahwa A dapat didiagonalisasikan jika dan hanya jika $\text{tr}(A) \neq 0$.
4. $G = \langle x, y : x^2 = y^2 = e \rangle$. Tuliskan $z = xy$.
 - (a) Buktikan bahwa $H = \langle z \rangle$ merupakan subgrup normal dari G .
 - (b) Buktikan bahwa $\frac{G}{H}$ merupakan grup siklik orde 1 atau 2.
5. Diketahui C_R adalah setengah lingkaran dengan pusat $(0, 0)$ dengan jari-jari R dan $f(z) \rightarrow 0$ secara seragam untuk $R \rightarrow \infty$.
Buktikan bahwa

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) e^{ikz} dz = 0,$$
 jika $k > 0$.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2015**HARI PERTAMA**

1. Misalkan D dan E dua matriks diagonal yang berukuran berturut-turut $m \times n$ dan $n \times n$. Jika $D = \text{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$ dan $E = \text{diag}(e_1, e_2, \dots, e_n)$. Buktikan bahwa

$$\det \begin{pmatrix} 0 & D \\ E & 0 \end{pmatrix} = (-1)^{mn} d_1 d_2 \dots d_m e_1 e_2 \dots e_n.$$

2. Misalkan G grup hingga dan e elemen identitas di G . Didefinisikan dua himpunan $A = \{x \in G \mid x^3 = e\}$ dan $\{x \in G \mid x^2 \neq e\}$. Tunjukkan bahwa $|A|$ ganjil dan $|B|$ genap.
3. Misalkan m dan n dua bilangan tak negatif. Berikan sebuah bukti kombinatorial untuk

$$\binom{m+n}{m} = \sum_{0 \leq a \leq \frac{(m-1)}{2}} \binom{m-a-1}{a} \binom{n+a}{2a} + \sum_{0 \leq a \leq \frac{m}{2}} \binom{m-a}{a} \binom{n+a}{2a}.$$

4. Diberikan barisan bilangan real $\{x_n\}$ yang memenuhi $\sqrt{x_1} \geq \sqrt{x_0+1}$ dan $\left| x_{n+1} - \frac{x_n^2}{x_{n-1}} \right| \leq 1$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Perlihatkan bahwa barisan $\left\{ \frac{x_{n+1}}{x_n} \right\}$ konvergen.
5. Misalkan $P_t(z)$ merupakan polinomial dalam z untuk setiap nilai t dengan $0 \leq t \leq 1$. Misalkan pada $P_t(z)$ kontinu terdapat t , dalam arti

$$P_t(z) = \sum_{j=0}^N a_j(t) z^j$$

dengan $a_j(t)$ kontinu, $j = 0, 1, \dots, N$. Misalkan $Z = \{(z, t) | P_t(z) = 0\}$

- (a) Buktikan bahwa Z , merupakan himpunan tutup di perkalian topologi.

- (b) Jika $P_{t_0}(z_0) = 0$ dan $\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) P_{t_0}(z)\Big|_{z=z_0} \neq 0$, buktikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan untuk t yang cukup dengan t_0 , ada satu dan hanya satu $z \in D(z_0, t)$ sehingga $P_{t_0}(z) = 0$.

HARI KEDUA

1. Misalkan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ terdiferensial, $f'(x) > f(x)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $f(x_0) = 0$, untuk suatu $x_0 \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $f(x) > 0$, untuk setiap $x > x_0$. Sebagai aplikasi, diberikan $c > 0$, perlihatkan bahwa persamaan $ce^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$ mempunyai tepat satu akar.
2. (a) Misalkan n bilangan asli. Buktikan bahwa

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{(1+z)^{2n}}{z^{n+1}} dz = C_n^{2n},$$

dengan C adalah sebarang lingkaran yang mengelilingi titik asal, dan C_k^n adalah koefisien binomial $\frac{n!}{k!(n-k)!}$.

- (b) Gunakan hasil di atas untuk menentukan

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} \binom{.2n}{n}$$

Tunjukkan perhitungannya.

3. Diketahui dua matriks persegi berukuran M dan N yang semua nilai eigennya real positif.
 - (a) Jika $M = M^*$ dan $N = N^*$, tunjukkan bahwa semua nilai eigen matriks MN positif.
 - (b) Berikan contoh matriks M dan N berukuran 3×3 sehingga MN hanya mempunyai nilai eigen real positif. Tunjukkan bahwa contoh yang diberikan memang memenuhi semua persyaratan yang diminta.
4. (a) Berikan contoh suku banyak $P(x)$ dengan koefisien rasional memenuhi

$$P(1 + 2\sqrt[3]{2}) = 1 + 2\sqrt[3]{4}$$

- (b) Tentukan semua suku banyak $Q(x)$ dengan koefisien rasional yang memenuhi persamaan (a).

5. Didefinisikan $A_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan bentuk fungsi pembangkit

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} A_n x^n.$$

Buktikan bahwa

$$\sum_{n \geq 0} (2n+1)x^n A(x)^{2n+1} = \sum_{m \geq 0} (4x)^m.$$

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2016**HARI PERTAMA**

1. Misalkan $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dan $b \in \mathbb{R}^2, b \neq 0$. Pemetaan $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ didefinisikan sebagai $T(x) = Ax + b$. Oleh T , setiap titik dipetakan ke titik lain dan setiap garis dipetakan ke garis lain. Buktikan bahwa $Ab \neq b$ dan $(A - I)^2 = 0$, dengan I adalah matriks identitas 2×2 .
2. Misalkan R suatu ring. Unsur $x \neq 0$ di R disebut sebagai pembagi nol kiri jika terdapat $a \neq 0$ di R sedemikian sehingga $xa = 0$. Secara serupa, unsur $y \neq 0$ di R disebut sebagai pembagi nol kanan jika terdapat $b \neq 0$ di R sedemikian sehingga $by = 0$. Misalkan x pembagi nol kiri dan y pembagi nol kanan di R . Jika R gelanggang dengan berhingga banyak unsur $xy \neq 0$, tunjukkan bahwa xy sekaligus merupakan pembagi nol kiri dan pembagi nol kanan.
3. Misalkan fungsi kontinu $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$. Didefinisikan $u_n = \left(\int_0^1 (f(x))^n dx \right)^{\frac{1}{n}}$ dan $M = \sup_{0 \leq x \leq 1} f(x)$. Buktikan bahwa
 - (a) Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan α dan β dengan $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$ sedemikian sehingga $M(1 - \varepsilon) \leq f(x) \leq M, \forall x \in (\alpha, \beta)$.
 - (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = M$.
4. Untuk setiap pernyataan berikut, buktikan atau berikan sebuah contoh penyangkalan
 - (a) Jika fungsi kompleks $f(z)$ terdefinisi pada cakram satuan terbuka $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dan jika $f^2(z)$ analitik pada D , maka f analitik pada D .
 - (b) Jika fungsi kompleks $f(z)$ terdefinisi dan terdiferensial kontinu pada cakram satuan terbuka $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dan jika $f^2(z)$ analitik pada D , maka f analitik pada D .
5. Setiap bilangan-bilangan $1, 2, \dots, n$ diwarnai dengan tiga warna. Tentukan n terkecil sedemikian sehingga untuk sebarang pewarnaan dari bilangan-bilangan tersebut, selalu terdapat tiga bilangan

$x_1, x_2, x_3 \in \{1, 2, \dots, n\}$ yang berwarna sama dan memenuhi
 $x_1 + x_2 = x_3$.

HARI KEDUA

1. Misalkan $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ memiliki sifat: terdapat bilangan-bilangan real konstan c_1, c_2, \dots, c_n sehingga $\sum_{i=1}^k a_{ij} = c_k$ untuk semua $1 \leq j \leq k \leq n$. Tentukan semua nilai eigen dari A .
2. Misalkan G suatu grup dengan n unsur ($n \geq 2$) dan p adalah faktor prima terkecil dari n . Misalkan G memiliki tepat satu subgrup H yang berorde p . Tunjukkan bahwa untuk setiap $h \in H$ dan $g \in G$ berlaku $hg = gh$.
3. Diberikan suatu konstanta positif k . Misalkan barisan bilangan real non-negatif a_n memenuhi $a_{m+n} \leq a_m + a_n + K$, untuk setiap bilangan bulat positif m, n . Perlihatkan bahwa barisan $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ konvergen.
4. Diberikan bilangan-bilangan kompleks z_1, z_2, z_3 dengan $z_1 \neq z_2$ dan $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r > 0$. Buktikan bahwa

$$\min\{kz_1 + (1-k)z_2 - z_3 \mid k \in \mathbb{R}\} = \frac{1}{2r}|z_1 - z_3||z_2 - z_3|.$$

5. Misalkan $G = (V(G), E(G))$ adalah suatu graf terhubung tak trivial. Didefinisikan $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$, $k \in \mathbb{N}$ adalah suatu pewarnaan sisi dengan dua sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan P dari titik u ke titik v di graf G ditulis $u - v$ path P di G . Lintasan $u - v$ path P di G dinamakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di P yang berwarna sama. Graf G disebut *rainbow connected* jika di setiap dua titik yang berbeda di G dihubungkan oleh *rainbow path*. Pewarnaan sisi yang mengakibatkan G bersifat *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring*. Bilangan *rainbow connection* dari graf terhubung G ditulis $rc(G)$, yaitu banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk sedemikian sehingga graf G *rainbow connected*. Misalkan c adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung G . Misalkan C_n adalah graf lingkaran (*cycle*) dengan $n \geq 3$. Tentukan $rc(C_n)$, kemudian buktikan.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2017

HARI PERTAMA

1. Untuk bilangan bulat k dan n dengan $0 \leq k \leq n$, Buktikan bahwa

$$\sum_{m=k}^n \binom{m}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

2. Misalkan A dan B adalah matriks dalam $\mathbb{R}^{n \times n}$ yang memenuhi persamaan $AB^2 - 2BAB + B^2A = 0$. Tentukan nilai eigen terbesar dari matriks $AB - BA$.
3. Misalkan a, b , dan c adalah bilangan-bilangan kompleks dengan sifat $abc = 1$ dan

$$\left\{ \begin{array}{lcl} a^{20} + b^{20} + c^{20} & = & \frac{1}{a^{20}} + \frac{1}{b^{20}} + \frac{1}{c^{20}} \\ a^{17} + b^{17} + c^{17} & = & \frac{1}{a^{17}} + \frac{1}{b^{17}} + \frac{1}{c^{17}} \\ a^{2017} + b^{2017} + c^{2017} & = & \frac{1}{a^{2017}} + \frac{1}{b^{2017}} + \frac{1}{c^{2017}} \end{array} \right.$$

Buktikan bahwa $1 \in \{a, b, c\}$.

4. Jika fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mempunyai sifat: untuk setiap deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen berakibat deret $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ konvergen, buktikan bahwa terdapat $M > 0$ dan $\varepsilon > 0$, dengan sifat untuk setiap $x \in \mathbb{R}, 0 < x < \varepsilon$ berlaku $|f(x)| \leq Mx$.
5. (a) Berikan contoh suatu bilangan prima ganjil p dan suatu grup G sehingga $|G| = p + 1$ dan p membagi $|\text{Aut}(G)|$.
- (b) Misalkan p suatu bilangan prima ganjil dan G suatu grup dengan $|G| = p + 1$. Buktikan bahwa jika p membagi $|\text{Aut}(G)|$ maka $p = 4k + 3$ untuk suatu bilangan bulat k .

HARI KEDUA

1. Misalkan A dan B adalah matriks dalam $\mathbb{R}^{2017 \times 2017}$ yang memenuhi persamaan-persamaan $A^{-1} = (A+B)^{-1} - B^{-1}$ dan $\det(A^{-1}) = 2017$. Tentukan $\det(B)$.
2. Misalkan R suatu gelanggang yang memenuhi $x^2 = x$ untuk setiap x di R
 - (a) Tunjukkan bahwa R merupakan gelanggang komutatif.
 - (b) Buktikan bahwa untuk setiap x_1, x_2, \dots, x_n di R , ideal $I := \langle x_1 \rangle + \langle x_2 \rangle + \dots + \langle x_n \rangle$ dapat dituliskan sebagai $I = \langle x \rangle$ untuk suatu x di R .
3. Sebuah barisan $\{Y_n\}$ didefinisikan oleh $Y_1 = 2$ dan $Y_{n+1} = Y_n(Y_n - 1) + 1$, untuk $n \geq 1$. Buktikan bahwa bila $m \neq n$, maka pembagi sekutu terbesar dari Y_m dan Y_n adalah 1 dan

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{Y_i} = 1.$$

4. Diketahui fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu dan surjektif. Jika untuk setiap $y \in \mathbb{R}$, cacah anggota himpunan $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$ paling banyak dua, buktikan bahwa f monoton.
5. Misalkan $C = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 2\}$ dan

$$f(z) = \frac{z^4 + 2017}{z^4 + z^3 + 1}.$$

- (a) Buktikan bahwa untuk setiap $R > 2$ berlaku

$$\int_C f(z) dz = \int_{|z|=R} f(z) dz.$$

- (b) Hitung $\int_C f(z) dz$.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2018

HARI PERTAMA

1. Diberikan bilangan asli n . Cari semua bilangan bulat yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$\left(\sum_{k=1}^n z_k \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k} \right).$$

Untuk suatu bilangan kompleks $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ dengan $|z_1| = \dots = |z_n| = 1$.

2. Misalkan $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ dengan $k_1, k_2, \dots, k_n \in \mathbb{R}^n$ adalah vektor-vektor kolom dari A . Vektor-vektor kolom tersebut memenuhi hubungan

$$k_i = (i+2)k_{i+2},$$

dengan $i = 1, 2, \dots, (n-2)$.

Untuk $n > 3$. Pilihlah satu nilai eigen A kemudian tentukan dimensi terkecil yang mungkin untuk ruang eigen dari nilai eigen yang terpilih.

3. Untuk bilangan bulat positif $n \geq 1$, definisikan h_n sebagai banyaknya cara menuliskan n sebagai jumlahan dari bilangan 1 dan 2 dengan memperhatikan urutan kemunculan bilangan 1 dan 2. Sebagai contoh $h_3 = 3$, karena $3 = 1 + 1 + 1, 3 = 2 + 1$, dan $3 = 1 + 2$. Selanjutnya $h_4 = 5$, karena $4 = 1+1+1+1, 4 = 1+1+2, 4 = 1+2+1, 4 = 2+1+1$, dan $4 = 2 + 2$. Buktikan bahwa untuk $k \geq 0$

$$h_{2k+1} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \binom{k-i}{j} \binom{k-j}{i}.$$

4. Diberikan fungsi kontinu $f : [0, \infty) \rightarrow [0, a]$ untuk suatu bilangan real $a > 0$, dan f memenuhi *The Intermediate Value Property* pada $[0, \infty)$. Jika $f(0) = 0$ dan $xf(x) \geq \int_0^x f(t) dt$, untuk semua $x \in (0, \infty)$, buktikan bahwa f mempunyai anti derivatif.

5. Diberikan bilangan prima p dan bilangan asli $n \geq 3$. Misalkan

$$G_n(p) := \left\{ x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \mid a_i \in \mathbb{Z}_p \right\}.$$

Definisikan operasi \circ di $G_n(p)$ melalui $P \circ Q = P(Q(x))$ modulo x^{n+1} . Sebagai contoh di $G_3(5)$, misalkan $P = x + 2x^2$ dan $Q = x + 3x^2$, maka

$$\begin{aligned} P \circ Q &= (x + 3x^2) + 2(x + 3x^2)^2 \\ &= x + 3x^2 + 2(x^2 + 6x^3 + 9x^4) \\ &= x + 5x^2 + 12x^3 + 18x^4 \\ &= x + 5x^2 + 12x^3 \quad (\text{karena modulo } x^4) \\ &= x + 2x^3 \quad (\text{karena koefisiennya di } \mathbb{Z}_5) \end{aligned}$$

Periksa apakah $G_n(p)$ merupakan grup terhadap operasi \circ .

HARI KEDUA

1. Diberikan bilangan bulat tak negatif k dan n sehingga $0 \leq k < n$.
 Berikan bukti kombinatorial bahwa

$$\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^k \binom{n-1-j}{k-j} 2^j.$$

2. (a) Apakah $\langle x + 2018 \rangle$ merupakan ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$?
 (b) Apakah $\langle x + 2018 \rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{Z}[x]$?
 3. Misalkan barisan bilangan real $\{x_n\}$ terbatas dan memenuhi $x_{n+2} \leq \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$, $\forall n \geq 0$. Jika $A_n = \max \{x_n, x_{n+1}\}$, buktikan:
 (a) barisan $\{A_n\}$ konvergen.
 (b) barisan $\{x_n\}$ konvergen.
 4. Buktikan atau beri contoh penyangkal

- (a) Untuk setiap fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, jika fungsi $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan definisi

$$g(x) = f(x^{2018}), \forall x \in \mathbb{R},$$

mempunyai deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ yang konvergen di suatu persekitaran $x = 0$ maka f mempunyai turunan di $x = 0$.

- (b) Untuk setiap fungsi $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, jika fungsi $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, dengan definisi

$$g(z) = f(z^{2018}), \forall z \in \mathbb{C},$$

mempunyai deret pangkat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ yang konvergen di suatu persekitaran $z = 0$ maka f mempunyai turunan di $z = 0$.

5. Diberikan bilangan asli n . Misalkan $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ dengan $\det(A) = a + d = 1$. Jika $A^n = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$, maka tentukanlah $a' + d'$.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2019**HARI PERTAMA**

1. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ memenuhi sifat bahwa jika untuk setiap $\lambda \in [0, 1]$ dan $x, y \in \mathbb{R}$ maka

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y) - f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq 0.$$

Buktikan:

- (a) Untuk semua x dan y dengan $x < y$, maka

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

- (b) $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx$ adalah positif.

2. Misalkan G adalah grup dan H subgrup dari G . Buktikan bahwa tidak ada subgrup S dari G dengan $S \neq G$ dan $S \supseteq G - H$.
3. Diberikan bilangan bulat n dan k dengan $0 \leq k \leq n/2$. Tuliskan sebuah bukti kombinatorial dari persamaan:

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{m-k} \binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1}.$$

4. Diberikan fungsi kompleks

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

yang bersifat analitik pada $\mathcal{U} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dan diasumsikan bahwa

$$W := \iint_{\mathcal{U}} |f'(z)|^2 \, dx \, dy < \infty.$$

Buktikan:

- (a) $W = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2$.

(b) Untuk setiap $z \in \mathcal{U}$ berlaku:

$$|f(z) - f(0)| \leq \sqrt{\frac{W}{\pi} \ln \left(\frac{1}{1 - |z|^2} \right)}.$$

5. Diberikan F dan H matriks berukuran $n \times n$ dengan

$$HF - FH = 2^{2019}F$$

Misalkan \mathbf{v} adalah vektor eigen dari H dengan $F\mathbf{v} \neq 0$. Buktikan terdapat bilangan bulat positif k sehingga $F^k\mathbf{v}$ adalah vektor eigen dari F .

HARI KEDUA

1. Diberikan bilangan bulat positif k dan n . Buktikan bahwa

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \begin{cases} n! & \text{jika } k = n, \\ 0 & \text{jika } k > n. \end{cases}$$

2. Bilangan bulat positif n dikatakan *cantik* jika terdapat empat bilangan kompleks a, b, c , dan d yang memenuhi

$$a^n = b^n = c^n = d^n = 1 \quad \text{dan} \quad a + b + c + d = 1.$$

- (a) Tunjukkan bahwa terdapat bilangan cantik.
 - (b) Apakah 28 merupakan bilangan cantik? Jelaskan.
3. Misalkan R suatu gelanggang komutatif dengan unsur kesatuan. Ideal I dan J di R memenuhi $I + J = R$.
- (a) Buktikan bahwa pemetaan $\phi : R \rightarrow R/I \times R/J$ yang didefinisikan melalui $\phi(r) = (r + I, r + J)$ merupakan homomorfisma yang surjektif.
 - (b) Gunakan bagian (a) di atas untuk membuktikan bahwa $R/(I \cap J)$ isomorfik dengan $R/I \times R/J$.
4. Misalkan A matriks tak nol berukuran $n \times (n - k)$, $k < n$, dengan kolom-kolom A adalah himpunan ortogonal yang tidak memuat vektor nol. Misalkan juga $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_k$ adalah vektor kolom berukuran $n - k$. Jika matriks

$$B = [A_1 \mid A_2 \mid \cdots \mid A_{n-k} \mid A\mathbf{b}_1 \mid \cdots \mid A\mathbf{b}_k]$$

dengan A_i adalah kolom ke- i dari A , tentukan suatu basis bagi ruang nol B .

5. Diberikan barisan bilangan real positif $\{a_n\}$ untuk $n \geq 0$. Barisan

tersebut memenuhi:

$$\sqrt{a_0} + 1 \leq \sqrt{a_1} \quad \text{dan} \quad \left| a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}} \right| \leq 1,$$

untuk semua n bilangan bulat positif. Buktikan bahwa barisan $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ konvergen, katakan ke α . Selanjutnya buktikan barisan $\left\{ \frac{a_n}{\alpha^n} \right\}$ konvergen.

KNMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2020**HARI PERTAMA**

1. Bila x, y , dan m adalah bilangan bulat dengan $x, y \geq 0$ dan $m \geq x+y$, buktikan bahwa

$$\binom{m+1}{x+y+1} = \sum_{i=0}^m \binom{i}{x} \binom{m-i}{y}.$$

2. Tentukan semua fungsi $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ yang memenuhi $f(0) = 0$ dan

$$|f(z) - f(w)| = |z - w|,$$

untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dan $w \in \{0, 1, i\}$.

3. Diketahui fungsi $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu dan $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dengan

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, \quad \text{untuk setiap } x \in [a, b].$$

Jika $(p_n) \subseteq \mathbb{R}$ merupakan barisan **Cauchy**, dengan $a \leq p_n \leq b$ untuk setiap n , **buktikan** bahwa terdapat p dan c , dengan $a \leq p, c \leq b$, dengan sifat barisan $(F(p_n))$ konvergen ke $f(c)(p-a)$.

4. Misalkan V sebuah ruang vektor berdimensi $n \geq 2$ dan $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sebuah basis dari V . Diberikan sebuah operator linear $T : V \rightarrow V$ yang memiliki balikan (invertible) $T^{-1} : V \rightarrow V$. Operator linear A dan B pada V yang memenuhi:

$$A(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \quad \text{dan} \quad A(\mathbf{v}_i) = T^{-1}(\mathbf{v}_i) \quad \text{untuk } i = 2, \dots, n,$$

$$B(\mathbf{v}_1) = \mathbf{0} \quad \text{dan} \quad B(\mathbf{v}_i) = T^{-1}(\mathbf{v}_{i-1}) \quad \text{untuk } i = 2, \dots, n.$$

- (a) Buktikan bahwa $\text{rank}((A \circ T)^{n-1}) = n-1$.

- (b) Hitunglah $\text{rank}((B \circ T)^{n-1})$.

Catatan: Jika S suatu operator linear pada V dan k suatu bilangan

asli, S^k didefinisikan sebagai komposisi S sebanyak k kali, yakni

$$S^k = \underbrace{S \circ S \circ \cdots \circ S}_{k \text{ kali}}.$$

5. Misalkan G adalah suatu grup hingga dan m adalah suatu bilangan asli kelipatan tiga. Buktikan jika G memuat tepat sebanyak m unsur berorde m , maka m adalah bilangan kelipatan enam dan G memiliki tepat tiga subgroup siklik berorde m .

HARI KEDUA

1. Pasangan bilangan kompleks (a, b) dikatakan *seimbang* jika $|a| = |b| = |a + b|$.
 - (a) Tunjukkan bahwa terdapat pasangan seimbang (a, b) dengan $a \neq b$.
 - (b) Jika (a, b) merupakan pasangan seimbang dan $a^{2020} = b^{2020}$, tunjukkan bahwa $a = b$.
2. Andaikan $B = \{1, 2, \dots, n\}$. Untuk bilangan bulat positif $k \leq n$, buktikan bahwa banyaknya barisan B_1, B_2, \dots, B_k sedemikian sehingga $B_i \subseteq B$ untuk $1 \leq i \leq k$, dan

$$\bigcup_{i=1}^k B_i = B$$

adalah $(2^k - 1)^n$.

3. Diberikan $a \in \mathbb{R}$ dan interval terbuka dan terbatas $I \subseteq \mathbb{R}$, dengan $a \in I$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, fungsi $f_n, g, h : I \rightarrow \mathbb{R}$ terdiferensial, memenuhi:
 - (a) $f_n(a) = g(a)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$;
 - (b) $f'_n(x) \geq g'(x)$, untuk setiap $x \in I$ dan $x > a$;
 - (c) $f'_n \rightarrow h'$ secara seragam pada I .

Buktikan bahwa terdapat fungsi terdiferensial $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, dengan $f_n \rightarrow f$ pada I dan $h(x) \geq g(x)$, untuk setiap $x \in I$ dan $x > a$.

4. Misalkan R adalah ring yang memiliki identitas perkalian 1. Diketahui bahwa x, y adalah unsur di R yang bersifat $xy = 1$ tetapi $yx \neq 1$.
 - (a) Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan bulat positif m, n yang berbeda berlaku $y^m x^m \neq y^n x^n$.
 - (b) Tunjukkan bahwa terdapat tak hingga banyaknya unsur z di R yang memenuhi $z^{2020} = 0$.

5. Misalkan A, B, C, D adalah matriks ukuran 9×9 dengan entri-entri bilangan riil dan memenuhi persamaan $CA = BC$. Jika polinom karakteristik matriks A sama dengan polinom karakteristik matriks B , maka apakah polinom karakteristik matriks $(A - DC)$ juga sama dengan polinom karakteristik matriks $(B - CD)$? Lengkapilah jawaban Anda dengan bukti.

KNMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2021**HARI PERTAMA**

1. Diberikan bilangan bulat positif n dan k sehingga $2 \leq k \leq n$.

Buktikan bahwa

$$\sum_{k=2}^n \binom{k}{2} \binom{n+2}{k} \binom{n-2}{k-2} = \binom{n+2}{2} \binom{2n-2}{n-2}.$$

2. Diberikan fungsi f analitik di dalam dan pada kurva tertutup sederhana γ dan z_0 sebuah titik pada bidang kompleks yang tidak berada pada γ . Buktiakan bahwa untuk setiap bilangan asli m dan n berlaku

$$\oint_{\gamma} \frac{f^{(m)}(z)}{(z - z_0)^n} dz = \frac{(m+n-1)!}{(n-1)!} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+n}} dz.$$

3. Misalkan k dan n bilangan bulat positif dan G adalah grup dengan n unsur. Buktiakan bahwa kedua pernyataan berikut ekuivalen.

(a) Bilangan n dan k relatif prima.

(b) Untuk setiap subgrup A dari G berlaku $\{x \in G \mid x^k \in H\} \subseteq H$.

4. Diberikan matriks A berukuran $n \times n$ dengan komponen real. Didefinisikan pemetaan linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dan $S : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dengan $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ dan $S(\mathbf{x}) = A^T\mathbf{x}$ untuk setiap $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

(a) Buktiakan bahwa $\ker(S \circ T) = \ker(T)$.

(b) Jelaskan apakah selalu berlaku $\text{Im}(S \circ T) = \text{Im}(S)$?

5. Diberikan barisan fungsi kontinu (f_n) dengan $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, \infty)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika dipenuhi kondisi berikut:

(a) $f_1(x) \geq f_2(x) \geq f_3(x) \geq \dots$ untuk setiap $x \in [0, 1]$.

(b) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ dan $M = \sup_{0 \leq x \leq 1} f(x)$.

maka

- (1) Buktikan terdapat $t \in [0, 1]$ sedemikian sehingga $f(t) = M$.
- (2) Berikan contoh bahwa (1) belum tentu berlaku, apabila kondisi
 - (a) diganti menjadi terdapat bilangan asli N_x sehingga untuk setiap $n \geq N_x$, $f_n(x) \geq f_{n+1}(x)$. Jelaskan.

HARI KEDUA

1. Tentukan banyaknya bilangan terurut quintuples $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ dari bilangan bulat ganjil positif yang memenuhi $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 101$.
2. Diberikan himpunan terbatas $A \subset \mathbb{R}$. Jika fungsi $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu seragam,
 - (a) Selidiki apakah terdapat fungsi kontinu $g : \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $g(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in A$. (Catatan: \bar{A} menyatakan klosur himpunan A)
 - (b) Buktikan bahwa f terbatas.
3. Untuk sebarang bilangan asli n , misalkan $A_n = (a_{ij})$ matriks berukuran $n \times n$ dengan $a_{ij} = |i - j|$ untuk setiap $1 \leq i, j \leq n$. Tentukan dengan bukti, nilai dari $\det(A_n)$ untuk setiap bilangan asli n .
4. Pasangan terurut bilangan real (a, b) dikatakan *milenial* jika memenuhi persamaan $(a + bi)^{2021} = a^2 - b^2 - 2abi$ dengan $i = \sqrt{-1}$.
 - (a) Jika (a, b) adalah pasangan milenial, buktikan bahwa $a = b = 0$ atau $a^2 + b^2 = 1$.
 - (b) Hitunglah banyak semua pasangan *milenial*.
5. Misalkan $(A, +)$ adalah grup siklik dengan kardinalitas n . Ditetapkan α sebuah pembangun dari $(A, +)$. Untuk setiap m bilangan asli, didefinisikan ring A_m dengan $(A_m, +) = (A, +)$ dan perkalian di A_m didefinisikan melalui

$$\alpha\dot{\alpha} = \alpha + \alpha + \cdots + \alpha = m\alpha.$$

Buktikan bahwa A_r isomorfik dengan A_s sebagai ring jika dan hanya jika $\text{fpb}(r, n) = \text{fpb}(s, n)$.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2022

HARI PERTAMA

1. Misalkan a, b, c adalah unsur di grup G sehingga $abc = e$ dengan e adalah unsur identitas di G . Untuk masing-masing pernyataan berikut, buktikan jika benar atau berikan contoh penyangkal jika salah.
 - (a) $bca = e$.
 - (b) $bac = e$.
2. Misalkan $n \in \mathbb{N}$ dan c adalah sembarang bilangan real. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan bulat a dan b dengan $1 \leq b \leq n$ sedemikian sehingga $\left|c - \frac{a}{b}\right| < \frac{1}{bn}$.
3. Diberikan suku banyak $p(z) = az^2 + bz + c$ untuk suatu bilangan kompleks a, b , dan c .
 - (a) Jika $\{w_0, w_1, w_2\}$ merupakan himpunan penyelesaian dari persamaan $w^3 = 1$, tentukan nilai dari

$$w_0p(w_0) + w_1p(w_1) + w_2p(w_2).$$

Jelaskan jawaban saudara!

- (b) Jika $|abc| > 1$, tunjukkan bahwa terdapat bilangan kompleks z dengan $|z| \leq 1$ sehingga $|p(z)| > 1$.
4. Diberikan matriks A berukuran 4×2 dan matriks $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \end{bmatrix}$ yang memenuhi

$$A \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad A \begin{bmatrix} b_{11} + b_{13} + b_{14} \\ b_{21} + b_{23} + b_{24} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Tentukan semua nilai eigen dari matriks AB beserta multiplisitas aljabarnya.
- (b) Buktikan bahwa $BA = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
5. Misalkan barisan bilangan real (a_n) dengan $\frac{1}{2} < a_n < 1$ untuk setiap $n \geq 0$. Didefinisikan barisan (x_n) dengan

$$x_0 = a_0, \quad x_{n+1} = \frac{a_{n+1} + x_n}{1 + a_{n+1} \cdot x_n}, \quad n \geq 0.$$

Apakah (x_n) konvergen? Jika ya, tentukan limitnya.

HARI KEDUA

1. Misalkan $k \geq 4$ adalah bilangan bulat genap dan $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Tentukan bilangan asli terkecil n sedemikian sehingga untuk setiap pewarnaan bilangan-bilangan di dalam S dengan tiga warna berbeda senantiasa terdapat tiga anggota S . Katakan a, b , dan c (tidak harus berbeda) yang berwarna sama dan memenuhi $ka + b = c$.
2. Diberikan fungsi terbatas $f : [a, b] \rightarrow R$ dan $x_0 \in (a, b)$. Didefinisikan fungsi $p : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $p(x) = \sup\{f(t) : t < x\}$. Jika fungsi f kontinu di x_0 , selidiki apakah p kontinu di x_0 ! Berikan penjelasan jawaban saudara!
3. Diberikan fungsi kompleks $f(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \dots + c_kz^k$ dengan $|c_n| < 1945$ untuk setiap $1 \leq n \leq k$. Buktikan bahwa fungsi f tidak memiliki akar z dengan sifat $|z| < \frac{1}{2022}$.
4. Misalkan A adalah ring dengan identitas perkalian 1. Untuk setiap $a \in A$, didefinisikan pemetaan l_a dan r_a dari A ke A melalui $l_a(x) = ax$ dan $r_a(x) = xa$ untuk setiap $x \in A$.
 - (a) Berikan contoh ring tak komutatif A sehingga manakala $a \in A$ membuat salah satu dari l_a atau r_a injektif, maka yang satunya lagi juga injektif.
 - (b) Berikan contoh ring tak komutatif A sehingga terdapat $a \in A$ yang membuat tepat salah satu di antara l_a atau r_a injektif.
5. Diberikan dua bilangan bulat positif n dan m dengan $n \leq m$.
Buktikan bahwa

$$\begin{vmatrix} 1 & {}^m P_1 & \dots & {}^m P_n \\ 1 & {}^{m+1} P_1 & \dots & {}^{m+1} P_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & {}^{m+n} P_1 & \dots & {}^{m+n} P_n \end{vmatrix} = 1!2!\cdots n!.$$

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2023**HARI PERTAMA**

1. Diberikan enam bilangan asli berbeda yang tidak melebihi 426. Buktikan terdapat tiga diantaranya, sebut saja a, b, c yang memenuhi kondisi $a < b + c < 4a$.
2. Buktikan bahwa tidak terdapat bilangan kompleks z sedemikian sehingga $|z| = 1$ dan $z^{2023} + z + 1 = 0$
3. Diberikan barisan bilangan real (x_n) , dan fungsi bernilai real f dan g .
 - (a) Jika barisan (x_n) didefinisikan dengan

$$x_n := \int_1^n \frac{\sin t}{t^2} dt,$$
 buktikan bahwa (x_n) konvergen.
 - (b) Jika fungsi f kontinu dan g terdiferensialkan pada \mathbb{R} dengan

$$(g'(1) - f(1))(f(0) - g'(0)) > 0,$$
 buktikan bahwa terdapat $c \in (0, 1)$ sehingga $g'(c) - f(c) = 0$.
4. Misalkan $G \subseteq \mathbb{R}^3$ adalah grup dengan operasi \star (G tidak selalu merupakan subgrup dari \mathbb{R}^3). Diketahui bahwa untuk hasil kali silang (*cross product*) di \mathbb{R}^3 dan untuk setiap $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$ berlaku: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \star \mathbf{b}$ atau $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (atau keduanya).
 - (a) Tunjukkan bahwa untuk setiap $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in G$, berlaku $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.
 - (b) Berikan contoh grup (G, \star) yang memenuhi sifat di atas dengan $|G| > 1$ dan G bukan subgrup dari \mathbb{R}^3 .
5. Misalkan $n \geq 2$ suatu bilangan asli dan P_n adalah ruang polinom dengan koefisien real berderajat paling tinggi n . Diberikan polinom-polinom tak nol $Q_0(x), Q_1(x), Q_2(x), \dots, Q_n(x)$ di P_n

sehingga $\deg(Q_j) = j$ untuk $j = 0, 1, 2, \dots, n$ dan

$$Q_j(2023) = \begin{cases} 1, & \text{jika } j = 0, \\ 0, & \text{jika } j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

Jika $D : P_n \rightarrow P_n$ adalah suatu pemetaan linear dengan

$$D(Q_j) = \begin{cases} 0, & \text{jika } j = 0, \\ Q_{j-1}, & \text{jika } j = 1, 2, \dots, n, \end{cases}$$

buktikan bahwa untuk sebarang polinom $f(x) \in P_n$ berlaku

$$f(x) = \sum_{j=0}^n (D^j(f))(2023) \cdot Q_j(x).$$

Catatan: D^j adalah komposisi dari D sebanyak j kali.

HARI KEDUA

1. Misalkan A suatu matriks berbentuk

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{bmatrix},$$

dengan a, b bilangan real selain nol. Tentukan semua nilai yang mungkin dari $\text{rank}(A)$. Jelaskan jawaban Anda.

2. Untuk setiap bilangan bulat positif n , buktikan

$$\sum_{k=0}^n 2^k \binom{n}{k} \binom{n-k}{\lfloor (n-k)/2 \rfloor} = \binom{2n+1}{n}.$$

3. Untuk fungsi kompleks f yang analitik pada domain $A \subseteq \mathbb{C}$, didefinisikan $A^* = \{\bar{z} \mid z \in A\}$ dan fungsi $f^* : A^* \rightarrow \mathbb{C}$ dengan $f^*(z) = \overline{f(\bar{z})}$.

- (a) Jika $f(z) = \sin z$, maka tunjukkan bahwa $f^*(z) = f(z)$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.
- (b) Buktikan bahwa $(f^*)'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$ untuk setiap $z \in A^*$.

4. Diketahui bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, fungsi $g_n : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ terintegral Riemann pada $[a, b]$. Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan untuk setiap $x \in [a, b]$ berlaku $|g_n(x)| \leq 2023$ dan barisan (g_n) konvergen ke fungsi g yang terintegral Riemann pada $[a, b]$, selidiki apakah

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b g_n(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Tuliskan penjelasan jawaban Saudara!

5. Diberikan suatu *ring* $(R, +, \cdot)$ dan $\frac{R}{Z_R} = \{r+Z_R \mid r \in R\} \cong \mathbb{Z}_{23} \times \mathbb{Z}_{23}$, dengan $Z_R = \{s \in R \mid sr = rs, \forall r \in R\}$. Untuk setiap $x \in R$, definisikan $C_x = \{r \in R \mid xr = rx\}$.

- (a) Jika $(S, +)$ merupakan subgrup tak-trivial dari $(R, +)$ dengan Z_R subset sejati dari S , tentukan $\left| \frac{S}{Z_R} \right|$.
- (b) Jika $C = \{C_x \mid x \in R\}$, tentukan $|C|$.

ONMIPA-PT TINGKAT NASIONAL 2024**HARI PERTAMA**

1. Diberikan barisan bilangan real (a_n) yang memenuhi kondisi $0 < a_n < 1$ dan

$$a_n(1 - a_{n+1}) > \frac{1}{4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Selidiki kekonvergenan barisan (a_n) dan tentukan limitnya jika ada.

2. Diketahui fungsi $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ analitik pada \mathbb{C} , memenuhi

$$f(z_1 + z_2) = f(z_1)f(z_2),$$

untuk setiap $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dan $f(x) = e^x$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa $f(z) = e^z$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.

3. Diberikan barisan Fibonacci a_1, a_2, a_3, \dots dengan aturan $a_1 = a_2 = 1$ dan $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, untuk setiap $n > 1$. Buktikan bahwa terdapat bilangan pada barisan tersebut yang berakhir dengan 2024 angka nol tak terputus sebelah kanan.

- (a) Misalkan A suatu matriks berukuran $n \times n$ atas \mathbb{R} yang memenuhi persamaan $A^2 = A^T$. Jika A dapat didiagonalkan atas \mathbb{R} , buktikan bahwa A matriks simetrik.
- (b) Berikan matriks B berukuran 2×2 atas \mathbb{R} yang tidak simetrik dan memenuhi persamaan $B^2 = B^T$.
4. Diberikan grup hingga G dengan unsur-unsurnya x_1, x_2, \dots, x_n . Misalkan $A = (a_{ij})$ adalah matriks berukuran $n \times n$ dengan

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } x_i x_j^{-1} \neq x_j x_i^{-1}, \\ 0, & \text{jika } x_i x_j^{-1} = x_j x_i^{-1}. \end{cases}$$

Buktikan bahwa $\det(A)$ selalu genap.

HARI KEDUA

1. Cari semua pasangan bilangan kompleks (x, y, z) yang memenuhi sistem persamaan

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= (x + y)z, \\y^2 + z^2 &= (y + z)x, \\z^2 + x^2 &= (z + x)y.\end{aligned}$$

2. Diberikan sembarang pewarnaan merah-biru pada setiap ruas garis yang menghubungkan 10 titik. Buktikan bahwa terdapat tiga titik sedemikian sehingga ketiga ruas garis yang menghubungkan ketiga titik tersebut berwarna merah, atau terdapat empat titik sedemikian sehingga keenam ruas garis yang menghubungkan keempat titik tersebut berwarna biru.
3. Diketahui $r > 0$, $\alpha \in (0, 1)$, fungsi $f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ kontinu di 0 dan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(\alpha x)}{x},$$

- ada di \mathbb{R} . Selidiki eksistensi $f'(0)$. Berikan penjelasan jawaban Anda.
4. Diketahui $\mathbb{R}[x]$ adalah ring polinom atas \mathbb{R} . Untuk setiap $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, ideal di $\mathbb{R}[x]$ yang dibangun oleh $p(x)$ dinotasikan sebagai $\langle p(x) \rangle$.
- (a) Buktikan $\langle x - 2024 \rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.
 - (b) Tentukan bilangan asli a terbesar sehingga $\langle x^2 + ax + 2024 \rangle$ merupakan ideal maksimal di $\mathbb{R}[x]$.
5. Misal V ruang vektor yang dilengkapi dengan hasil kali dalam riil $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dan norma $\|\cdot\|$ yang didefinisikan dengan

$$\|\mathbf{f}\|^2 = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle, \quad \forall f \in V.$$

Lebih lanjut, diberikan pemetaan linier $T : V \rightarrow V$ dengan

$$\langle T(\mathbf{v}_1), \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, T(\mathbf{v}_2) \rangle, \quad \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V.$$

Buktikan bahwa jika $\mathbf{v} \in V$ dan $\mathbf{u} \in T(V)$ dengan $T(\mathbf{v}) = T(\mathbf{u})$, buktikan bahwa

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|, \quad \forall \mathbf{w} \in T(V).$$

Catatan. $T(V) = \{T(\mathbf{a}) : \mathbf{a} \in V\}$.