Isian singkat

1. Diberikan matriks A berukuran 2025×2025 dengan

$$\det(A - \lambda I_{2025\times 2025}) = (\lambda - 2)^k (\lambda - 1)^{2025-k}$$

untuk suatu bilangan asli[1] k dengan $0 \leq k \leq 2025$. Jika $A^2 = A$, maka banyaknya nilai k yang mungkin adalah ...

***Solusi*:**

Bentuk determinan yang diberikan menunjukkan bahwa nilai eigen 2 muncul sebanyak k kali, dan nilai eigen 1 muncul sebanyak $2025 - k$ kali. Sedangkan diketahui bahwa A adalah matriks idempotent, sehingga nilai eigen dari A hanya bisa $\lambda = 0$ atau $\lambda = 1$.

Dengan demikian, k harus sama dengan 0, karena jika $k > 0$, maka akan ada nilai eigen 2 yang tidak sesuai dengan sifat idempotent. Oleh karena itu, satu-satunya nilai yang mungkin untuk k adalah $\boxed{1}$ saja yaitu $k = 0$.

2. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F, dengan $\dim(V) = 7$, serta transformasi linear $T_1 : V \to V$ dan $T_2 : V \to V$, dengan $\dim(\text{Im}(T_1)) = 3$ dan $\dim(\text{Im}(T_2)) = 4$. Jika M dan m berturut-turut menyatakan nilai terbesar dan terkecil yang mungkin dari $\dim(\text{Im}(T_2 \circ T_1))$, maka nilai $M + m = \ldots$

***Solusi*:**

Misalkan $S = T_2 \circ T_1$ dan dengan menggunakan Teorema Rank-Nullity, kita tau bahwa

$$\dim(\text{Im}(S)) \leq \min\{\dim(\text{Im}(T_1)), \dim(\text{Im}(T_2))\}$$

Sehingga dengan jelas kita peroleh

$$\dim(\text{Im}(S)) \leq \min\{3, 4\} = 3 = M$$

Secara intuitif dapat kita bayangkan bahwa beberapa elemen dari $\text{Im}(T_1)$ mungkin saja terpenuhi untuk menjadi elemen dari $\ker(T_2)$, sehingga didapatkan sebuah rumus sebagai berikut

$$\dim(\ker(S)) = \dim(\ker(T_1)) + \dim(\ker(T_2) \cap \text{Im}(T_1))$$

$\dim(\text{Im}(S))$ diberikan oleh rumus

$$\dim(\text{Im}(S)) = \dim(V) - \dim(\ker(S)) = 7 - \dim(\ker(S))$$

[1] Agak rancu disini karena didefinisikan bilangan asli namun nilai $k = 0$ disebutkan di kalimat setelahnya.

yang artinya $\dim(\operatorname{Im}(S))$ minimum ketika $\dim(\ker(S))$ maksimum atau lebih lanjutnya $\dim(\ker(T_2) \cap \operatorname{Im}(T_1))$ harus maksimum.

Disisi lain kita tahu bahwa $\dim(\ker(T_2)) = \dim(V) - \dim(\operatorname{Im}(T_2)) = 7 - 4 = 3$. Dengan memilih $\ker(T_2) = \operatorname{Im}(T_1)$ maka dapat kita peroleh

$$\dim(\operatorname{Im}(S)) = 0 = m$$

Maka, nilai $M + m = 3 + 0 = \boxed{3}$.

3. Jika setiap $z \in \mathbb{C}$ yang memenuhi

$$\left|\frac{z+1}{z+4}\right| = 2$$

terletak pada suatu lingkaran, maka radius dan titik pusat lingkaran tersebut berturut-turut adalah ...

***Solusi*:**
Misalkan $z = x + iy$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z+1}{z+4}\right| &= 2 \\
|z+1| &= 2\,|z+4| \\
|z+1|^2 &= 4\,|z+4|^2 \\
(x+1)^2 + y^2 &= 4((x+4)^2 + y^2) \\
x^2 + 2x + 1 + y^2 &= 4x^2 + 32x + 64 + 4y^2 \\
3x^2 + 3y^2 + 30x + 63 &= 0 \\
x^2 + y^2 + 10x + 21 &= 0 \\
(x+5)^2 + y^2 &= 4.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, radius lingkaran tersebut adalah 2 dan titik pusatnya adalah $(-5, 0)$ atau $z = -5$.

4. Bentuk sederhana dari

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right)$$

adalah ...

***Solusi*:**

Perhatikan bahwa $\sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, sehingga

$$\sin^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 = \frac{1}{-8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right).$$

Jika dikembalikan ke dalam bentuk sinus, kita dapat tuliskan

$$\sin^3(\theta) = \frac{1}{4}\left[3\sin(\theta) - \sin(3\theta)\right].$$

Sehingga setiap suku pada deret tersebut dapat dituliskan sebagai

$$3^{n-1}\sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{1}{4}\left[3^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - 3^{n-1}\sin\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right)\right].$$

Perhatikan bahwa deret diatas dapat dijadikan teleskopik seperti berikut

$$\begin{aligned}
n = 1 &\implies \frac{1}{4}\left[\cancel{3\sin\left(\frac{x}{3}\right)} - \sin(x)\right]\\
n = 2 &\implies \frac{1}{4}\left[\cancel{9\sin\left(\frac{x}{9}\right)} - \cancel{3\sin\left(\frac{x}{3}\right)}\right]\\
n = 3 &\implies \frac{1}{4}\left[\cancel{27\sin\left(\frac{x}{27}\right)} - \cancel{9\sin\left(\frac{x}{9}\right)}\right]\\
&\vdots\\
n = k &\implies \frac{1}{4}\left[3^k\sin\left(\frac{x}{3^k}\right) - \cancel{3^{k-1}\sin\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right)}\right]\\
\hline
\sum_{n=1}^{k} 3^{n-1}\sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) &= \frac{1}{4}\left[3^k\sin\left(\frac{x}{3^k}\right) - \sin(x)\right].
\end{aligned}$$

Sehingga untuk $k \to \infty$, kita peroleh

$$\lim_{k\to\infty} 3^k \sin\left(\frac{x}{3^k}\right) = \lim_{k\to\infty} x \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{3^k}\right)}{\frac{x}{3^k}} = x.$$

Jadi bentuk sederhananya adalah

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1}\sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \boxed{\frac{1}{4}\left[x - \sin(x)\right]}.$$

5. Nilai

$$\sup\left\{\inf\left\{5(-1)^n - \left(\frac{m+1}{n}\right)^2 : n \geq m\right\} : m \in \mathbb{N}\right\}$$

adalah ...

Solusi:

Misalkan $S = \left\{\inf\left\{5(-1)^n - \left(\frac{m+1}{n}\right)^2 : n \geq m\right\} : m \in \mathbb{N}\right\}$.

Untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, kita akan mencari nilai infimum dari barisan himpunan

$$T_m = \left\{5(-1)^n - \left(\frac{m+1}{n}\right)^2 : n \geq m\right\}.$$

Perhatikan bahwa untuk membuat ekspresi $5(-1)^n - \left(\frac{m+1}{n}\right)^2$ menjadi kecil, kita perlu

- $5(-1)^n$ harus negatif, berarti n haruslah ganjil.
- $\left(\frac{m+1}{n}\right)^2$ harus besar, berarti n haruslah sekecil mungkin.

Selanjutnya dengan sedikit melihat pola anggota himpunan T_m untuk setiap $m \in \mathbb{N}$

$$T_1 = \left\{5(-1)^n - \left(\frac{2}{n}\right)^2 : n \geq 1\right\} = \left\{-9, 4, -\frac{49}{9}, \dots\right\} \implies \inf(T_1) = -9$$

$$T_2 = \left\{5(-1)^n - \left(\frac{3}{n}\right)^2 : n \geq 2\right\} = \left\{\frac{11}{4}, -6, \frac{71}{16}, \dots\right\} \implies \inf(T_2) = -6$$

$$T_3 = \left\{5(-1)^n - \left(\frac{4}{n}\right)^2 : n \geq 3\right\} = \left\{-\frac{61}{9}, 1, -\frac{121}{25}, \dots\right\} \implies \inf(T_3) = -\frac{61}{9}$$

$$T_4 = \left\{5(-1)^n - \left(\frac{5}{n}\right)^2 : n \geq 4\right\} = \left\{\frac{55}{16}, -6, \frac{121}{25}, \dots\right\} \implies \inf(T_4) = -6$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Dari sedikit perhitungan diatas, kita mendapatkan sebuah pola dugaan yaitu

$$\inf(T_m) = \begin{cases} -5 - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \\ -6, & \text{untuk } m \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan S sebagai

$$S = \left\{-5 - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 : m \text{ ganjil}\right\} \cup \{-6 : m \text{ genap}\}.$$

Untuk mencari supremum dari S, kita perlu mencari nilai maksimum dari kedua himpunan tersebut. Karena untuk m genap hasilnya tetap -6, maka kita fokus pada himpunan pertama. Dengan menggunakan limit, kita dapatkan

$$\lim_{m \to \infty} -5 - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 = -6.$$

Sehingga supremum dari S adalah $\boxed{-6}$.

6. Diberikan fungsi kontinu $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dengan $|f(x)| \leq x$ untuk setiap $x \in [0, 1]$. Nilai terbesar yang mungkin dari

$$\int_0^1 \left((f(x))^2 - x^4 f(x)\right)\, dx$$

adalah . . .

***Solusi*:**

Diketahui sifat fungsi f dan g yang terintegralkan pada interval $[a, b]$ dan memenuhi $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Dengan demikian, kita dapat mencari nilai maksimum dari integral di soal

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left((f(x))^2 - x^4 f(x)\right)\,dx &\leq \left|\int_0^1 \left((f(x))^2 - x^4 f(x)\right)\right| \\ &\leq \int_0^1 \left|(f(x))^2 - x^4 f(x)\right|\,dx\end{aligned}$$

Ketaksamaan segitiga mengatakan $|f^2(x) - x^4 f(x)| \leq |f^2(x)| + |x^4 f(x)|$ untuk setiap $x \in [0, 1]$. Demikian juga dengan integralnya

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left|(f(x))^2 - x^4 f(x)\right|\,dx &\leq \int_0^1 \left|(f(x))^2\right| + \int_0^1 \left|x^4 f(x)\right|\,dx \\ &\leq \int_0^1 x^2\,dx + \int_0^1 x^5\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Jadi, nilai terbesar yang mungkin dari integral tersebut adalah $\boxed{\frac{1}{2}}$.

7. Banyaknya bilangan asli $x \in \{1, 2, 3, \ldots, 2025\}$ yang bukan kelipatan 2 dan bukan kelipatan 5 adalah ...

***Solusi*:**

Misalkan S adalah himpunan bilangan asli dari 1 sampai 2025 dan. Selanjutnya definisikan A_1 dan A_2 sebagai himpunan bilangan asli dari 1 sampai 2025 yang masing-masing merupakan kelipatan 2 dan kelipatan 5. Dengan mudah kita peroleh bahwa

$$\begin{aligned}|S| &= 2025, \\ |A_1| &= \left\lfloor \frac{2025}{2} \right\rfloor = 1012, \\ |A_2| &= \left\lfloor \frac{2025}{5} \right\rfloor = 405, \\ |A_1 \cap A_2| &= \left\lfloor \frac{2025}{10} \right\rfloor = 202.\end{aligned}$$

Menggunakan prinsip inklusi-eksklusi, maka banyaknya bilangan asli dari 1 sampai 2025 yang bukan kelipatan 2 dan bukan kelipatan 5 adalah

$$|A_1^c \cap A_2^c| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 2025 - 1012 - 405 + 202 = \boxed{810}.$$

8. Tiga siswa a_1, a_2, a_3 dari Sekolah A dan 4 siswa b_1, b_2, b_3, b_4 dari Sekolah B berkumpul dalam sebuah pertemuan. Banyaknya cara menyusun ketujuh siswa tersebut dalam satu baris dengan syarat tidak terdapat satu blok yang berisikan semua siswa dari sekolah yang sama adalah ... (Contoh: $b_3b_2a_1a_3b_1b_4a_2$ diperbolehkan, tetapi $b_1b_4a_1a_2a_3b_3b_2$ dan $a_1b_4b_3b_1b_2a_3a_2$ tidak diperbolehkan)

***Solusi*:**

Misalkan S adalah himpunan semua susunan ketujuh siswa tersebut, sehingga jelas bahwa $|S| = 7! = 5040$. Misalkan A dan B adalah himpunan susunan masing-masing siswa sekolah A yang satu blok berurutan dan siswa sekolah B yang satu blok berurutan (Contoh: $b_1b_2a_1a_2a_3b_3b_4 \in A$ dan $a_3b_1b_2b_3b_4a_1a_2 \in B$). Banyaknya anggota A, B dan $A \cap B$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
|A| &= 5! \cdot 3! = 120 \cdot 6 = 720, \\
|B| &= 4! \cdot 4! = 24 \cdot 24 = 576, \\
|A \cap B| &= 2 \cdot 4! \cdot 3! = 2 \cdot 24 \cdot 6 = 288.
\end{aligned}$$

Lagi-lagi dengan prinsip inklusi-eksklusi, maka banyaknya susunan ketujuh siswa tersebut yang tidak memiliki satu blok berisikan semua siswa dari sekolah yang sama adalah

$$|A^c \cap B^c| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 5040 - 720 - 576 + 288 = 4.032$$

9. Jika S_5 menyatakan grup semua fungsi bijektif pada $\{1, 2, ..., 5\}$ terhadap operasi komposisi fungsi, maka banyaknya elemen berorder 2 pada S_5 adalah ...

***Solusi*:**

Misalkan $g \in S_5$ adalah elemen berorder 2, maka $g^2 = e$ dimana e adalah elemen identitas pada S_5. Perhatikan bahwa untuk setiap elemen $g \in S_5$ haruslah berbentuk maksimal dua sikel yang saling asing dengan maksimal 2 elemen persikelnya yaitu

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \text{ atau } g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

sehingga banyaknya elemen berorder 2 pada S_5 adalah

$$\binom{5}{2} + \frac{1}{2!}\binom{5}{2}\binom{3}{2} = 10 + 15 = \boxed{25}.$$

10. Jika z, p, dan m berturut-turut menyatakan banyaknya ideal di $\mathbb{Z}_{2025}$, banyaknya ideal prima di $\mathbb{Z}_{2025}$, dan banyaknya ideal maksimal di $\mathbb{Z}_{2025}$, maka nilai $z+p+m$ adalah ...

***Solusi*:**

Perhatikan bahwa $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Dengan demikian, banyaknya ideal di $\mathbb{Z}_{2025}$ adalah

$$z = (4+1)(2+1) = 15.$$

Banyaknya ideal prima di $\mathbb{Z}_{2025}$ adalah

$$p = 2,$$

karena hanya ada dua bilangan prima yang membagi 2025 yaitu 3 dan 5. Sedangkan banyaknya ideal maksimal di $\mathbb{Z}_{2025}$ adalah

$$m = 2,$$

karena ideal maksimal berkorespondensi satu-satu dengan bilangan prima yang membagi 2025. Dengan demikian, kita peroleh

$$z+p+m = 15+2+2 = \boxed{19}.$$

Uraian

1. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dengan $\dim(V) = n$. Misalkan U dan W merupakan dua ruang bagian dari V dengan $\dim(U) + \dim(W) = n$. Buktikan bahwa terdapat transformasi linear $T : V \longrightarrow V$ yang memenuhi $\ker(T) = U$ dan $\operatorname{Im}(T) = W$.

***Solusi*:**

Misalkan $\dim(U) = k$ dan $\dim(W) = n-k$. Karena U dan W adalah subruang dari V, maka terdapat basis $B_U = \{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ dari U dan basis $B_W = \{w_1, w_2, \ldots, w_{n-k}\}$ dari W. Disisi lain dengan perluasan basis, kita dapatkan basis $B_V = \{u_1, u_2, \ldots, u_k, v_1, v_2, \ldots, v_{n-k}\}$ dari V.

Selanjutnya perlu kita definisikan transformasi linear $T : V \longrightarrow V$ sebagai berikut

$$T(u_i) = 0, \quad \text{untuk setiap } i \in \{1, 2, \ldots, k\}$$

dan

$$T(v_j) = w_j, \quad \text{untuk setiap } j \in \{1, 2, \ldots, n-k\}.$$

Selanjutnya dengan definisi diatas akan dibuktikan dua hal berikut:

- $\ker(T) = U$
  Misalkan $x \in \ker(T)$, maka $T(x) = 0$. Karena B_V adalah basis dari V, maka x dapat dituliskan sebagai

  $$x = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k + b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_{n-k}v_{n-k}$$

  untuk beberapa skalar $a_i, b_j \in F$. Dengan menggunakan sifat linearitas dari T, kita peroleh

  $$\begin{aligned} T(x) &= T(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k + b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_{n-k}v_{n-k}) \\ &= a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \ldots + a_kT(u_k) + b_1T(v_1) + \ldots + b_{n-k}T(v_{n-k}) \\ &= 0 + 0 + \ldots + 0 + b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_{n-k}w_{n-k} \\ &= b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_{n-k}w_{n-k}. \end{aligned}$$

  Karena $T(x) = 0$, maka $b_j = 0$ untuk setiap $j \in \{1, 2, \ldots, n-k\}$ karena B_W adalah basis dari W (bebas linear). Dengan demikian, kita peroleh

  $$x = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k,$$

  yang berarti bahwa $x \in U$. Jadi, $\ker(T) \subseteq U$.
  Sebaliknya, misalkan $y \in U$. Maka terdapat skalar $c_i \in F$ sehingga

  $$y = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots + c_ku_k.$$

  sehingga diperoleh

  $$T(y) = c_1T(u_1) + c_2T(u_2) + \ldots + c_kT(u_k) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \ldots + c_k \cdot 0 = 0.$$

  Dengan demikian, $y \in \ker(T)$, sehingga $U \subseteq \ker(T)$. Jadi dapat disimpulkan $\ker(T) = U$.

- $\mathrm{Im}(T) = W$
  Misalkan $z \in \mathrm{Im}(T)$, maka terdapat $x \in V$ sehingga $T(x) = z$. Karena B_V adalah basis dari V, maka x dapat dituliskan sebagai

  $$x = a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k + b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_{n-k}v_{n-k}$$

untuk beberapa skalar $a_i, b_j \in F$. Dengan menggunakan sifat linearitas dari T, kita peroleh

$$\begin{aligned}
T(x) &= T(a_1u_1 + a_2u_2 + \ldots + a_ku_k + b_1v_1 + b_2v_2 + \ldots + b_{n-k}v_{n-k}) \\
&= a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \ldots + a_kT(u_k) + b_1T(v_1) + \ldots + b_{n-k}T(v_{n-k}) \\
&= 0 + 0 + \ldots + 0 + b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_{n-k}w_{n-k} \\
&= b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_{n-k}w_{n-k}.
\end{aligned}$$

Artinya $z = b_1w_1 + b_2w_2 + \ldots + b_{n-k}w_{n-k} \in W$. Jadi, $\mathrm{Im}(T) \subseteq W$.
Sebaliknya, misalkan $w \in W$. Maka terdapat skalar $c_j \in F$ sehingga

$$w = c_1w_1 + c_2w_2 + \ldots + c_{n-k}w_{n-k}.$$

Perhatikan bahwa dapat kita definisikan $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_{n-k}v_{n-k} \in V$. Sehingga diperoleh informasi

$$T(v) = T(c_1v_1 + c_2v_2 + \ldots + c_{n-k}v_{n-k})$$

$$\begin{aligned}
&= c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \ldots + c_{n-k}T(v_{n-k}) \\
&= c_1w_1 + c_2w_2 + \ldots + c_{n-k}w_{n-k} = w.
\end{aligned}$$

Karena kita dapat menemukan $v \in V$ sehingga $T(v) = w$, maka $w \in \mathrm{Im}(T)$, sehingga $W \subseteq \mathrm{Im}(T)$. Jadi dapat disimpulkan $\mathrm{Im}(T) = W$.

2. Diketahui $A_1, A_2, ..., A_n$ merupakan titik-titik sudut sebuah poligon n sisi beraturan yang termuat pada sebuah lingkaran dengan radius r dan titik pusat $O(0, 0)$. Jika P merupakan titik di luar lingkaran yang terletak pada garis perpanjangan OA_1, buktikan bahwa

$$\prod_{k=1}^{n} |PA_k| = |OP|^n - r^n,$$

dengan $|AB|$ menyatakan panjang ruang garis yang menghubungkan titik A dan B.

***Solusi*:**

Pandang P dan A_k untuk $k = 1, 2, \ldots, n$ sebagai bilangan kompleks z dan z_k berturut-turut. Representasikan titik-titik yang disebutkan pada soal sebagai akar bilangan kompleks dari fungsi

$$f(z) = z^n - r^n.$$

Misalkan $z_k = re^{\frac{2(k-1)\pi i}{n}}$ untuk $k = 1, 2, \ldots, n$ adalah akar-akar dari $f(z)$.

Artinya $f(z)$ dapat dituliskan sebagai

$$f(z) = (z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_n).$$

Karena P berada diperpanjangan garis OA_1 yang berarti P berada pada sumbu real positif, maka P dapat direpresentasikan sebagai bilangan real positif p.

Oleh karena itu, dengan mensubstitusi $z = p$ pada $f(z)$, kita peroleh sebuah persamaan

$$\begin{aligned} p^n - r^n &= (p - z_1)(p - z_2)\dots(p - z_n) \\ \implies |p^n - r^n| &= |(p - z_1)(p - z_2)\dots(p - z_n)| \\ \iff |p^n - r^n| &= |p - z_1||p - z_2|\dots|p - z_n| \end{aligned}$$

Karena P diluar lingkaran, maka $p > r \implies p^n - r^n > 0$. Sehingga diperoleh fakta $|p^n - r^n| = p^n - r^n$. Terakhir dapat diperhatikan bahwa $|p - z_k| = |PA_k|$ yang dimana merepresentasikan panjang garis yang menghubungkan titik P dan A_k. Dengan demikian, kita peroleh

$$\prod_{k=1}^{n} |PA_k| = |p - z_1||p - z_2|\dots|p - z_n| = p^n - r^n = |OP|^n - r^n.$$

3. Diberikan fungsi kontinu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial pada (a, b) dengan $f(a) = f(b)$. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli n, terdapat n bilangan real berbeda, $c_1, c_2, ..., c_n \in (a, b)$, yang memenuhi

$$f'(c_1) + f'(c_2) + \cdots + f'(c_n) = 0.$$

***Solusi*:**

Pertama-tama akan kita partisi himpunan interval $[a, b]$ menjadi n subinterval yang sama panjangnya, yaitu $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, b]$ dengan $x_k = a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)$ untuk $k = 1, 2, \dots, n-1$. Selanjutnya, karena f kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b), maka berdasarkan teorema nilai rata-rata, untuk setiap subinterval $[x_{k-1}, x_k]$ terdapat $c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ sehingga

$$f'(c_k) = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{\frac{b-a}{n}} = \frac{n}{b-a}(f(x_k) - f(x_{k-1})).$$

Dengan menjumlahkan persamaan diatas untuk $k = 1, 2, \ldots, n$, kita peroleh

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f'(c_k) &= \frac{n}{b-a}\sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1})) \\ &= \frac{n}{b-a}(f(x_n) - f(x_0)) \\ &= \frac{n}{b-a}(f(b) - f(a))\end{aligned}$$

Karena $f(a) = f(b)$, maka diperoleh

$$\sum_{k=1}^{n} f'(c_k) = \frac{n}{b-a}(f(b) - f(a)) = 0.$$

Karena c_k berada pada subinterval yang berbeda, maka $c_1, c_2, \ldots, c_n$ adalah bilangan real yang berbeda. Dengan demikian, kita telah membuktikan bahwa terdapat n bilangan real berbeda $c_1, c_2, \ldots, c_n \in (a, b)$ sehingga

$$f'(c_1) + f'(c_2) + \ldots + f'(c_n) = 0.$$

4. Untuk suatu bilangan bulat tak negatif n dan m, misalkan $D(m, n)$ menyatakan banyaknya solusi persamaan

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n$$

dengan $x_i \in \mathbb{N}$, untuk setiap $i \in \{1, 2, ..., m\}$ dan $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Tunjukkan bahwa

$$D(m, n) = D(m, n - m) + D(m - 1, n - m).$$

***Solusi*:**

Misalkan S adalah himpunan semua solusi dari persamaan $x_1+x_2+\ldots+x_m = n$ dengan $x_i \in \mathbb{N}$ dan $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Kita akan membagi himpunan S menjadi dua bagian berdasarkan nilai dari x_1.

Kasus 1: $x_1 = 1$.

Jika $x_1 = 1$, maka kita dapat menuliskan ulang persamaan tersebut sebagai

$$1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n \implies x_2 + x_3 + \ldots + x_m = n - 1.$$

Karena $x_2 < x_3 < \ldots < x_m$, kita dapat mendefinisikan variabel baru $y_i = x_i - 1$ untuk setiap $i = 2, 3, \ldots, m$. Dengan demikian, kita memiliki

$$y_2 + y_3 + \ldots + y_m = n - 1 - (m - 1) = n - m,$$

dengan syarat $y_2 < y_3 < \ldots < y_m$ dan $y_i \in \mathbb{N}$. Banyaknya solusi dari persamaan ini adalah $D(m - 1, n - m)$.

Kasus 2: $x_1 > 1$.

Jika $x_1 > 1$, kita dapat mendefinisikan variabel baru $z_i = x_i - 1$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, m$. Maka persamaan tersebut menjadi

$$z_1 + z_2 + z_3 + \ldots + z_m = n - m,$$

dengan syarat $z_1 < z_2 < z_3 < \ldots < z_m$ dan $z_i \in \mathbb{N}$. Banyaknya solusi dari persamaan ini adalah $D(m, n - m)$.

Karena setiap solusi dalam himpunan S masuk ke dalam salah satu dari dua kasus di atas, maka kita dapat menyimpulkan bahwa

$$D(m, n) = D(m, n - m) + D(m - 1, n - m).$$

5. (a) Diketahui A, B, C merupakan subgrup dari sebuah grup G. Jika $A \subseteq B$, $A \cap C = B \cap C$, dan $AC = BC$, buktikan bahwa $A = B$.

   (b) Carilah contoh grup G dan subgrup A, B, C dari G yang memenuhi $A \cap C = B \cap C$, dan $AC = BC$ tetapi $A \neq B$.

Catatan: Jika P dan Q adalah subgrup dari $(G, *)$, maka PQ didefinisikan sebagai

$$PQ = \{p * q : p \in P, q \in Q\}.$$

***Solusi*:**

(a) Misalkan $x \in B$. Karena $AC = BC$, maka terdapat $b \in B$ dan $c \in C$ sehingga $x = bc$. Karena $A \subseteq B$, maka $b \in A$. Selanjutnya, karena $A \cap C = B \cap C$, maka $c \in A \cap C$. Dengan demikian, terdapat $a_1, a_2 \in A$ sehingga $x = a_1 a_2$. Karena A adalah subgrup, maka $x = a_1 a_2 \in A$. Jadi, kita peroleh bahwa $B \subseteq A$. Karena juga diketahui bahwa $A \subseteq B$, maka dapat disimpulkan bahwa $A = B$.

(b) Misalkan $G = S_3$ adalah grup terhadap operasi komposisi. Misalkan

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}, \quad C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dengan mudah kita peroleh bahwa

$$A \cap C = B \cap C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix} \right\},$$

dan

$$AC = BC,$$

tetapi jelas bahwa $A \neq B$.