

PERSIAPAN SELEKSI NASIONAL ONMIPA-PT 2023
UNIVERSITAS GADJAH MADA

ALJABAR LINEAR
4 Juni 2023

1. Diberikan ruang hasil kali dalam V atas lapangan R . Misalkan $\mathbf{v} \in V$ dan S adalah subhimpunan tak kosong dari V yang memenuhi

$$\frac{1}{2}(\mathbf{s} + \mathbf{t}) \in S$$

untuk setiap $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in S$. Buktikan bahwa terdapat paling banyak satu vektor $\mathbf{x} \in S$ yang memenuhi

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{s} - \mathbf{w}\|$$

untuk setiap vektor $\mathbf{s} \in S$.

2. Diberikan matriks definit positif $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ dan didefinisikan pemetaan

$$\begin{aligned}\psi_A : M_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ B &\longmapsto AB + BA.\end{aligned}$$

Buktikan bahwa ψ_A merupakan pemetaan injektif.

3. Diberikan matriks invertibel A berukuran $n \times n$ dengan entri-entri bilangan real. Buktikan bahwa terdapat dengan tunggal matriks orthogonal Q dan matriks definit positif B yang memenuhi $A = QB$.
4. Diberikan matriks $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$. Didefinisikan *norm matriks* P , dengan notasi $\|P\|$, dengan

$$\|P\| = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|P\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Misalkan $\|P\| < 1$. Buktikan bahwa $I + P$ invertibel dan

$$\frac{1}{1 + \|P\|} \leq \|(I + P)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|P\|}$$

5. Suatu matriks A berukuran 3×3 atas lapangan bilangan real \mathbb{R} dikatakan *ajaib* jika jumlah entri-entri setiap baris, setiap kolom, setiap diagonal dari matriks A semuanya bernilai sama. Jika A invertibel, A^{-1} juga *ajaib*.