Latihan Soal 2

1. Tentukan bilangan asli n dan k yang memenuhi $\binom{n}{k-1} = 2002$ dan $\binom{n}{k} = 3003$.

2. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli n, $\left(1+\sqrt{2}\right)^n + \left(1-\sqrt{2}\right)^n$ merupakan bilangan bulat.

3. Buktikan beberapa identitas kombinatorik berikut:

   (a) $k\dbinom{n}{k} = n\dbinom{n-1}{k-1}$

   (b) $\dbinom{a+b+c}{2} = \dbinom{a}{2} + \dbinom{b}{2} + \dbinom{c}{2} + ab + bc + ca$

   (c) $\dbinom{n}{0} - \dbinom{n}{1} + \dbinom{n}{2} - \cdots + (-1)^n\dbinom{n}{n} = 0$

   (d) $\sum_{k=1}^{n} \binom{m+k-1}{k} = \sum_{k=1}^{m} \binom{n+k-1}{k}$

4. Tentukan fungsi pembangkit untuk barisan-barisan berikut:

   (a) $\langle 1,1,1,1,1,1,2,2,2,2,2,2,0,0,0,0,0,\ldots\rangle$

   (b) $\langle 2,2,2,2,2,2,2,\ldots\rangle$

   (c) $\langle 1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,\ldots\rangle$

   (d) $\langle 1,4,9,16,25,36,\ldots\rangle$

   (e) $\langle 1,0,2,0,3,0,4,0,5,0,6,0,\ldots\rangle$

5. Tentukan koefisien dari x^n pada
$$\frac{1}{(1-x)^k}.$$

6. Tentukan bentuk eksplisit (*closed-form*) dari rumus rekursif berikut:

   - $a_0 = 1$,
   - $a_{n+1} = 3a_n + 4^n$ untuk $n \geq 0$.

   Hitung dengan menggunakan cara biasa dan fungsi pembangkit (sebagai latihan).

7. Tentukan banyak cara untuk membuat salad dari n buah dengan batasan sebagai berikut:

   - banyak apel harus genap,
   - banyak pisang harus kelipatan 5,
   - paling banyak 4 jeruk, dan
   - paling banyak 1 buah pir.

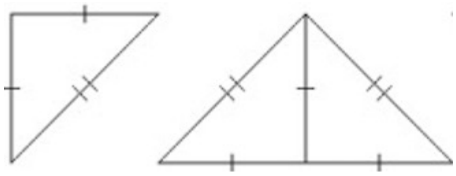
8. Tentukan banyak cara membagi 12 robot identik ke 5 anak sehingga setiap anak menerima paling banyak 3 robot.

9. Diberikan petak berukuran $3\times n$, akan ditutupi dengan ubin berukuran 1×3. Ubin dapat diletakkan secara horizontal atau vertikal, dan tidak boleh ada dua ubin yang tumpang tindih. Ada berapa banyak cara pengubinan?

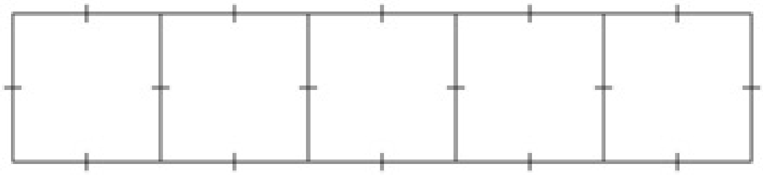
10. Diberikan petak berukuran $2 \times n$ (2 baris dan n kolom), akan ditutupi dengan ubin berukuran 1×1 dan 1×2. Ubin harus diletakkan secara horizontal, dan tidak boleh ada dua ubin yang tumpang tindih. Ada berapa banyak cara pengubinan?

11. Diberikan petak berukuran $2 \times n$, akan ditutupi dengan ubin berukuran 1×1 dan 1×2. Ubin dapat diletakkan secara horizontal atau vertikal, dan tidak boleh ada dua ubin yang tumpang tindih. Ada berapa banyak cara pengubinan?

12. Terdapat dua jenis ubin seperti pada gambar berikut.



Sementara, Erwin ingin menutup lantai dengan bentuk sebagai berikut.



Tentu saja, ubin yang dipasang tidak boleh tumpang tindih dan keseluruhan ubin harus masuk ke dalam lantai. Ubin dapat dirotasi maupun direfleksi. Apabila banyak stok ubin tak terhingga untuk setiap jenisnya, berapa banyak cara menutup lantai tersebut?

13. Diberikan barisan Fibonacci, yang didefinisikan dengan $f_0 = 0$, $f_1 = 1$, dan $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$. Tunjukkan identitas-identitas berikut:

    (a) $\sum_{k=0}^{n} f_k = f_{n+2} - 1$

    (b) $\sum_{k=0}^{n} f_k^2 = f_n f_{n+1}$

    (c) $f_{m+n} = f_m f_{n+1} + f_{m-1} f_n$

    (d) $f_n^2 + f_{n+1}^2 = f_{2n+1}$

    (e) $f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2 = f_{2n}$