Limit dan Fungsi Kontinu

Senin, 10 April 2023

0.1 Limit Fungsi dan Fungsi Kontinu

Diberikan bilangan real x dan $r > 0$. Didefinisikan **persekitaran** dari x dengan jari-jari r adalah sebagai berikut:

$$N_r(x) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < r\} = \{y \in \mathbb{R} : -r < y - x < r\} = (x - r, x + r).$$

Definisi 1.1

Diberikan A himpunan bagian dari $\mathbb{R}$.

1. Titik $u \in A$ disebut **titik dalam/interior** himpunan A ($u \in A^o$) jika terdapat $r > 0$ sehingga $N_r(u) \subseteq A$.
2. Titik $p \in \mathbb{R}$ disebut **titik limit** himpunan A ($p \in A'$) jika untuk setiap $r > 0$ berlaku
$$N_r(p) \cap A \backslash \{p\} \neq \emptyset.$$
3. Titik $q \in \mathbb{R}$ disebut **titik klosur** himpunan A ($q \in \bar{A}$) jika untuk setiap $r > 0$ berlaku
$$N_r(p) \cap A \neq \emptyset.$$
4. Titik $x \in A$ disebut **titik terasing** himpunan A jika terdapat $r > 0$ dan berlaku
$$N_r(p) \cap A = \{x\}.$$
5. Titik $t \in \mathbb{R}$ disebut **titik batas** himpunan A jika untuk setiap $r > 0$ berlaku
$$N_r(x) \cap A \neq \emptyset \quad \text{dan} \quad N_r(x) \cap A^c \neq \emptyset.$$
6. Himpunan A dikatakan **terbuka** jika untuk setiap $a \in A$, a merupakan titik dalam.
7. Himpunan A dikatakan **tertutup** jika A^c terbuka.

Sifat 1.2

Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. $\overline{A}$ tertutup.
2. A tertutup jika dan hanya jika $\overline{A} = A$.
3. A tertutup jika dan hanya jika untuk setiap barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di A yang konvergen ke suatu titik, katakan $x \in \mathbb{R}$, berlaku $x \in A$.
4. $\overline{A} = A \cup A'$

Definisi 1.3

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, c titik limit A dan $f : A \to \mathbb{R}$ fungsi. Bilangan L disebut titik limit dari f di c, ditulis $\lim_{x \to c} f(x) = L$, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ berlaku $|f(x) - L| < \epsilon$.

Definisi 1.4

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, $c \in A$. Fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dikatakan **kontinu** di c, ditulis $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x \in A$ dengan $|x - c| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

Fungsi f dikatakan kontinu pada A jika f kontinu di c untuk setiap $c \in A$.

Definisi 1.5

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$. Fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dikatakan kontinu seragam pada A, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x, y \in A$ dengan $|x - y| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon.$$

Sifat 1.6

Beberapa sifat berkaitan dengan limit fungsi diberikan sebagai berikut:

- Jika $f : A \to \mathbb{R}$ dan c titik limit A, maka berlaku $\lim_{x \to c} f(x) = L$ jika dan hanya jika untuk setiap barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di A yang konvergen ke c berakibat $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke L.
- Diberikan $f : A \to \mathbb{R}$. Fungsi f kontinu di c jika dan hanya jika untuk setiap barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di A yang konvergen ke c berakibat $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke $f(c)$.
- Fungsi f tidak kontinu seragam pada $[a, b]$ jika dan hanya jika terdapat $\varepsilon_0 > 0$ dan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ di A dengan $\lim_{n \to \infty} x_n - y_n = 0$ tetapi $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon_0$.
- Diketahui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi. Jika f kontinu, maka
  1. f terbatas dan kontinu seragam pada $[a, b]$.
  2. nilai maksimal dan minimal dari f tercapai pada $[a, b]$.
  3. peta dari f pada $[a, b]$ merupakan interval.
- (Teorema Nilai Antara) Diketahui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu. Jika $k \in \mathbb{R}$ dan $x, y \in [a, b]$ memenuhi $f(x) < k < f(y)$, maka terdapat c diantara x dan y sehingga $f(c) = k$.
- Jika f fungsi kontinu pada $\mathbb{R}$, maka $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \to \infty} x_n\right)$.

Untuk menunjukkan $\lim_{x \to c} f(x)$ tidak ada, salah satunya adalah menemukan dua barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ yang keduanya konvergen ke c namun $\{f(x_n)\}$ dan $\{f(y_n)\}$ konvergen ke titik yang berbeda atau salah satunya tidak konvergen.

Problems:

1. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to 0} \sin\dfrac{1}{x}$ tidak ada.

2. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x} = 0$.

3. Jika $a > 0$ dan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi
$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0,$$
tunjukkan bahwa
$$\lim_{x\to 0} f(ax) = 0,$$

4. Tunjukkan bahwa $f(x) = x^2$ pada $\mathbb{R}$ tidak kontinu seragam.

5. Tunjukkan bahwa $f(x) = \dfrac{1}{x}$ pada $\mathbb{R}^+$ tidak kontinu seragam.

6. Jika $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu yang bernilai konstan untuk setiap bilangan rasional, maka tunjukkan bahwa f fungsi konstan pada $\mathbb{R}$.

7. Diberikan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi dengan $f(x) = 3x$ jika $x \in \mathbb{Q}$ dan $f(x) = 2x + 1$ jika $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Tentukan titik kontinuitas dari f.

8. Misalkan $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu sedemikian sehingga $(f(x))^2 = x^2$ untuk setiap $x \in (0, 1)$. Banyaknya fungsi yang f yang mungkin adalah $\ldots$

9. Diberikan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu dan untuk setiap $x \in [a, b]$ dapat ditemukan $y \in [a, b]$ dengan sifat $3|f(y)| \leq |f(x)|$. Tunjukkan bahwa terdapat $c \in [a, b]$ dengan $f(c) = 0$.

10. Diberikan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu dengan $f(a) < 0 < f(b)$. Misalkan $W = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$ dan $w = \sup W$. Tunjukkan bahwa $f(w) = 0$.

11. Diketahui $f : [0, 1] \to [0, 1]$ adalah fungsi kontinu. Tunjukkan bahwa terdapat $c \in [0, 1]$ sehingga $f(c) = c^{2015}$.

12. Diketahui $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu. Jika $f(0) = f(1) = 0$, maka
    (a) tunjukkan bahwa terdapat $c \in [0, \frac{1}{2}]$ sehingga $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$.
    (b) apakah terdapat $c \in [0, \frac{2}{3}]$ sehingga $f(c + \frac{1}{3}) = f(c)$?
    (c) untuk sebarang bilangan asli $n \geq 4$, apakah terdapat $c \in [0, \frac{n-1}{n}]$ sehingga $f(c + \frac{1}{n}) = f(c)$?

13. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu yang memenuhi
$$f\left(r + \frac{1}{n}\right) = f(r)$$
untuk sebarang bilangan rasional r dan bilangan positif n. Tunjukan bahwa f merupakan fungsi konstan.

14. Misalkan $\lim_{x\to 0} f(x) = 1, \lim_{x\to 0} g(x) = \infty, \lim_{x\to 0} g(x)(f(x)-1) = c$. Nilai dari $\lim_{x\to 0} f(x)^{g(x)}$ adalah $\ldots$

15. Tunjukkan bahwa sebarang fungsi kontinu dan periodik pada $\mathbb{R}$ merupakan fungsi kontinu seragam.

16. Diberikan $f : (0, 1)$ fungsi dengan

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \quad \text{dan} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(\frac{x}{2})}{x} = 0$$

Tentukan nilai dari

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

17. Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi $f(tx) = tf(x)$ untuk setiap $x, t \in \mathbb{R}$. Buktikan f kontinu.

18. Diberikan fungsi $f : [a, b] \to [a, b]$ kontinu dengan $f \circ f = f$ pada $[a, b]$. Diberikan

$$T(f) = \{x \in [a, b] : f(x) = x\}.$$

    (a) Buktikan bahwa $T(f)$ merupakan interval tak kosong.
    (b) Tentukan semua fungsi f yang memenuhi syarat di atas.

19. Berikan contoh fungsi real f dan g di mana f kontinu seragam dan tidak terbatas pada interval I dan fungsi g terbatas dan tidak kontinu seragam pada interval I, tetapi hasil kali kedua fungsi tersebut kontinu seragam pada I.

20. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu pada titik nol dan memenuhi kondisi berikut :

$$f(0) = 0 \quad \text{dan} \quad f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2) \quad \text{untuk sebarang } \ x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Buktikan f kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.