TES BAGIAN PERTAMA

Bentuk Soal: Isian Singkat

Waktu: 60 menit

SOAL

1. Misalkan $\theta_n = \arctan n$. Nilai dari $\lim\limits_{n\to\infty}(\theta_{n+1}-\theta_n)$ adalah ...

2. Diberikan $\mathbb{Z}_3[x]/I$ dengan I adalah ideal yang dibangun oleh x^4+x+2, invers dari $x^2+x+I \in \mathbb{Z}_3[x]/I$ adalah ...

3. Jika K dan L dua subruang dari $\mathbb{R}^{10}$ dan untuk dim K + dim $L = 12$, maka nilai terkecil yang mungkin untuk $\dim(K\cap L)$ adalah ...

4. Misalkan v dan w adalah akar-akar yang berbeda yang dipilih secara acak dari persamaan $z^{2024}-1=0$. Misalkan $\frac{m}{n}$ adalah probabilitas dari $\sqrt{2+\sqrt{3}} \le |v+w|$, di mana m dan n adalah bilangan bulat positif yang relatif prima, nilai dari $m+n$ adalah ...

5. Enam orang siswa akan duduk pada tiga meja bundar, dimana setiap meja akan diduduki oleh minimal satu siswa. Banyaknya cara untuk melakukan hal tersebut adalah ...

SOLUSI

1. Karena $\lim\limits_{n\to\infty}\arctan n = \dfrac{\pi}{2}$ dan $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n = \lim\limits_{n\to\infty}\theta_{n+1}$, maka

$$\lim_{n\to\infty}(\theta_{n+1}-\theta_n) = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2} = \boxed{0}$$

2. Misalkan $\boldsymbol{p}(x) = x^4+x+2$ dan $ax^3+bx^2+cx+d+I$ (pangkat tertinggi di ring kuasi) adalah invers dari x^2+x+I. Maka

$$\begin{aligned}
(ax^3+bx^2+cx+d+I)(x^2+x+I) &= 1+I\\
ax^5+(a+b)x^4+(b+c)x^3+(c+d)x^2+dx &= 1+I\\
\hline
(a+b)x^4+(b+c)x^3+(c+d-a)x^2+(d-2a)x &= 1+I \qquad -ax\cdot\boldsymbol{p}(x)\\
\hline
(b+c)x^3+(c+d-a)x^2+(d-b)x-2(a+b) &= 1+I \qquad -(a+b)\cdot\boldsymbol{p}(x)
\end{aligned}$$

Kemudian didapatkan sistem persamaan linear

$$\begin{aligned} b+c &= 0 \\ c+d-a &= 0 \\ d-b &= 0 \\ a+b &= 1 \end{aligned}$$

Dapat dicek bahwa solusinya adalah $a = 0$, $b = 1, c = 2, d = 1$. Sehingga invers dari $x^2 + x + I$ adalah $\boxed{x^2 + 2x + 1 + I}$.

3. Karena K dan L adalah subruang dari $\mathbb{R}^{10}$, maka $K + L$ juga merupakan subruang dari $\mathbb{R}^{10}$. Selanjutnya diketahui hubungan

$$\dim(K + L) = \dim(K) + \dim(L) - \dim(K \cap L)$$

Dan juga karena $K + L$ adalah subruang berakibat $\dim(K + L) \leq 10$ atau

$$\begin{aligned} \dim(K) + \dim(L) - \dim(K \cap L) &\leq 10 \\ 12 - \dim(K \cap L) &\leq 10 \\ \dim(K \cap L) &\geq 2 \end{aligned}$$

Jadi nilai terkecil yang mungkin untuk $\dim(K \cap L)$ adalah $\boxed{2}$.

4. Misalkan $v = \cos\theta_1 + i \sin\theta_1$ dan $w = \cos\theta_2 + i \sin\theta_2$. Selanjutnya $|v + w|$ dapat ditulis sebagai berikut

$$\begin{aligned} |v+w| &= \sqrt{(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)^2 + (\sin\theta_1 + \sin\theta_2)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_2 + 2\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin^2\theta_1 + \sin^2\theta_2 + 2\sin\theta_1\sin\theta_2} \\ &= \sqrt{2 + 2(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2)} \\ &= \sqrt{2 + 2\cos(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned}$$

Ingat bahwa $\theta_1, \theta_2 \in \left\{ \frac{\pi k}{1012} \middle| k = \{0, 1, \ldots, 2023\} \right\}$ yang berakibat $\theta_1 - \theta_2$ dapat ditulis sebagai $\frac{\pi k}{1012}$ untuk suatu $k \in \{0, 1, \ldots, 2023\}$.

$$\begin{aligned} |v+w| &\geq \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ \sqrt{2 + 2\cos(\theta_1 - \theta_2)} &\geq \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ 2\cos\left(\frac{\pi k}{1012}\right) &\geq \sqrt{3} \\ -\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi k}{1012} &\leq \frac{\pi}{6} \\ -168\frac{2}{3} \leq k &\leq 168\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Karena k bulat maka $k \in \{-168, -167, \ldots, 168\}$ yang dimana memiliki 337 kemungkinan. Dengan demikian probabilitasnya adalah $\frac{337}{2024}$. Selanjutnya dapat dicek bahwa $\gcd(337, 2024) = 1$, sehingga $m + n = 337 + 2024 = \boxed{2361}$.

5. Permasalahan diatas dapat direpresentasikan sebagai banyaknya pasangan (x_1, x_2, x_3) yang memenuhi

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6 \quad x_1, x_2, x_3 \geq 1$$

misalkan $y_1 = 6 - x_1$, $y_2 = 6 - x_2$, dan $y_3 = 6 - x_3$. Maka permasalahan diatas dapat direpresentasikan sebagai banyaknya pasangan (y_1, y_2, y_3) yang memenuhi

$$y_1 + y_2 + y_3 = 3 \quad y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Dengan demikian dengan metode *stars and bars* didapatkan banyaknya cara enam siswa duduk adalah $\binom{5}{3} = \boxed{6}$.

TES BAGIAN KEDUA

Bentuk Soal: Uraian

Waktu: 120 menit

SOAL

1. Diberikan barisan bilangan positif $(a_n)_{n\geq 1}$ sedemikian hingga

$$a_{n+1} \leq a_n + \frac{1}{(n+1)^2}$$

untuk setiap $n \geq 1$. Buktikan bahwa $(a_n)_{n\geq 1}$ merupakan barisan konvergen.

2. Diberikan homomorfisma ring $f : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}_2[x]$ dengan

$$f(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) := \overline{a_0} + \overline{a_1} X + \cdots + \overline{a_n} x^n,$$

dan $\overline{a_i} = a_i \mod 2$ untuk setiap $i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

   (a) Tentukan $\ker f$

   (b) Tunjukkan bahwa $\ker f$ adalah ideal prima di $\mathbb{Z}[x]$

3. Diberikan suatu ruang vektor berdimensi hingga V serta subruang K dan L dari V. Didefinisikan

$$W = K + L = \{k + l \mid k \in K, l \in L\}.$$

Buktikan bahwa

   (a) $K \cap L$ dan W merupakan subruang dari V

   (b) $\dim(W) = \dim(K) + \dim(L) - \dim(K \cap L)$.

4. Diberikan fungsi kompleks $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ merupakan fungsi analitik dan memenuhi $u(x, y) \leq x$ untuk semua $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Tunjukkan bahwa f adalah polinomial kompleks berderajat 2.

5. Diberikan bilangan bulat tak negatif k dan n sehingga $0 \leq k < n$. Berikan bukti kombinatorial bahwa

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-1-j}{k-j} 2^j$$

<u>SOLUSI</u>

1. Diketahui bahwa $a_n > 0$ untuk setiap $n \geq 1$. dan secara rekrusif diperoleh

$$a_{n+1} \leq a_n + \frac{1}{(n+1)^2} \leq a_{n-1} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \cdots \leq a_1 + \sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2}$$

2. (a) Secara definisi dapat ditulis sebagai

$$\ker f = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(p(x)) = 0\}$$

Sehingga untuk $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ dapat kita tinjau

$$\begin{aligned} f(p(x)) &= 0 \\ f(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) &= 0 \quad \mod 2 \\ \overline{a_0} + \overline{a_1}X + \cdots + \overline{a_n}x^n &= 0 \quad \mod 2 \\ \overline{a_0} = \overline{a_1} = \cdots = \overline{a_n} &= 0 \quad \mod 2 \end{aligned}$$

Artinya anggota dari $\ker f$ adalah polinomial dengan koefisien genap semua. Atau dapat juga ditulis

$$\ker f = \{p(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid p(x) = 2q(x),\, q(x) \in \mathbb{Z}[x]\}$$

(b) Misalkan $r(x)s(x) \in \ker f$ untuk suatu $r(x), s(x) \in \mathbb{Z}[x]$.

3. (a)

4. Fungsi f analitik di $\mathbb{C}$ berarti f dapat diekspansi sebagai deret berikut

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

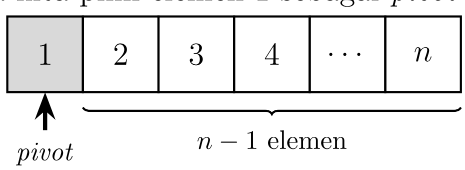
5. Misalkan S adalah himpunan yang mempunyai n elemen yaitu $S = \{1, 2, \ldots, n\}$. Bagaimana total cara memilih maksimal k elemen dari S?

LHS: Untuk memilih $j = 0, 1, \ldots$ elemen dari S dapat dilakukan dengan $\binom{n}{j}$ cara. Selanjutnya total cara untuk memilih minimal 0 elemen dan maksimal k elemen adalah

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n}{j}$$

RHS: Andaikan kita memilih suatu elemen berurutan, sebut saja *pivot* yang dimana elemen tersebut tidak akan dipilih.

- Untuk $j = 0$, maka kita pilih elemen 1 sebagai *pivot*



Karena tersisa $n - 1$ elemen, maka cara memilih k elemen adalah

$$\binom{n-1}{k}$$

- Untuk $j = 1$, maka kita pilih elemen 2 sebagai *pivot*

$$\boxed{1}\,\underset{\uparrow \atop \textit{pivot}}{\boxed{2}}\,\underbrace{\boxed{3}\,\boxed{4}\,\boxed{\cdots}\,\boxed{n}}_{n-2 \text{ elemen}}$$

  Selanjutnya kita akan memilih $k-1$ elemen dari $n-2$ elemen terlebih dahulu. Kemudian karena maksimal adalah k elemen, maka kita punya pilihan untuk memilih elemen 1 sebagai elemen ke-k atau tidak (2 kemungkinan). Sehingga total cara adalah

$$\binom{n-2}{k-1} \cdot 2$$

- Untuk $j = 2$, maka kita pilih elemen 3 sebagai *pivot*

$$\boxed{1}\,\boxed{2}\,\underset{\uparrow \atop \textit{pivot}}{\boxed{3}}\,\underbrace{\boxed{4}\,\boxed{\cdots}\,\boxed{n}}_{n-3 \text{ elemen}}$$

  Analog kita memilih $k-2$ elemen dari $n-3$ dan mempertimbangkan masing-masing elemen 1 dan 2 sebagai elemen ke-$(k-1)$ dan ke-k atau tidak (2^2 kemungkinan). Sehingga total cara adalah

$$\binom{n-3}{k-2} \cdot 2^2$$

$$\vdots$$

- Secara umum untuk elemen ke-j, maka elemen *pivot*-nya adalah $j+1$

$$\boxed{1}\,\boxed{2}\,\boxed{\cdots}\,\boxed{j}\,\underset{\uparrow \atop \textit{pivot}}{\boxed{j+1}}\,\underbrace{\boxed{\cdots}\,\boxed{n-1}\,\boxed{n}}_{n-1-j \text{ elemen}}$$

  Terdapat $k-j$ elemen yang harus dipilih dari $n-1-j$ elemen dan masing-masing j elemen memiliki 2 kemungkinan untuk dipilih atau tidak (2^j kemungkinan). Sehingga total cara adalah

$$\binom{n-1-j}{k-j} \cdot 2^j$$

Dengan cara diatas, maka total cara untuk memilih maksimal k elemen dari S adalah

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{n-1-j}{k-j} \cdot 2^j$$

$\therefore$ **LHS** $=$ **RHS** sehingga pernyataan tersebut benar.