

**PERSIAPAN SELEKSI NASIONAL ONMIPA-PT 2023**  
**UNIVERSITAS GADJAH MADA**

**ALJABAR LINEAR**  
**4 Juni 2023**

1. Diberikan ruang hasil kali dalam  $V$  atas lapangan  $R$ . Misalkan  $\mathbf{v} \in V$  dan  $S$  adalah subhimpunan tak kosong dari  $V$  yang memenuhi

$$\frac{1}{2}(\mathbf{s} + \mathbf{t}) \in S$$

untuk setiap  $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in S$ . Buktikan bahwa terdapat paling banyak satu vektor  $\mathbf{x} \in S$  yang memenuhi

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{s} - \mathbf{w}\|$$

untuk setiap vektor  $\mathbf{s} \in S$ .

2. Diberikan matriks definit positif  $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$  dan difinisikan pemetaan

$$\begin{aligned}\psi_A : M_{n \times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_{n \times n}(\mathbb{R}) \\ B &\longmapsto AB + BA.\end{aligned}$$

Buktikan bahwa  $\psi_A$  merupakan pemetaan injektif.

3. Diberikan matriks invertibel  $A$  berukuran  $n \times n$  dengan entri-entri bilangan real. Buktikan bahwa terdapat dengan tunggal matriks orthogonal  $Q$  dan matriks definit positif  $B$  yang memenuhi  $A = QB$ .
4. Diberikan matriks  $P \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ . Didefinisikan *norm matriks*  $P$ , dengan notasi  $\|P\|$ , dengan

$$\|P\| = \max_{\mathbf{x} \neq 0} \frac{\|P\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|}$$

Misalkan  $\|P\| < 1$ . Buktikan bahwa  $I + P$  invertibel dan

$$\frac{1}{1 + \|P\|} \leq \|(I + P)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|P\|}$$

5. Suatu matriks  $A$  berukuran  $3 \times 3$  atas lapangan bilangan real  $\mathbb{R}$  dikatakan *ajaib* jika jumlah entri-entri setiap baris, setiap kolom, setiap diagonal dari matriks  $A$  semuanya bernilai sama. Jika  $A$  invertibel,  $A^{-1}$  juga *ajaib*.