

# *Persiapan KN-MIPA 2021 tk Nasional Bidang Matematika*

Made Tantrawan

SUBBIDANG KOMBINATORIKA

18 Juli 2021

# Outline

- 1 *Bukti Kombinatorik dengan Grid*
- 2 *Bilangan Catalan*
- 3 *Kumpulan Soal Nasional ONMIPA/KNMIPA*

# Metode hitung jarak terpendek pada grid

## Teorema

- 1 Banyaknya jalan (latis) terpendek dari  $(0, 0)$  ke  $(m, n)$  adalah  $\binom{m+n}{m}$ .
- 2 Banyaknya jalan (latis) terpendek dari  $(0, 0)$  ke ruas garis  $x + y = n$  ( $0 \leq x \leq n$ ) adalah  $2^n$ .

# Contoh 1

## Contoh

Tunjukkan bahwa

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$$

Penyelesaian:

# Contoh 1

## Contoh

Tunjukkan bahwa

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} = 2^n$$

**Penyelesaian:** Akan dicari banyaknya jalan (latis) terpendek dari  $(0, 0)$  ke ruas garis  $x + y = n$  ( $0 \leq x \leq n$ ).

- Langsung: Dari teorema sebelumnya, jelas bahwa banyaknya adalah  $2^n$ .
- Bagi kasus berdasarkan titik ujung terakhir pada ruas garis  $x + y = n$  ( $0 \leq x \leq n$ ). Terdapat  $n + 1$  buah kasus. Misalkan ujung terakhir adalah titik  $(r, n - r)$ . Banyaknya jalan latis terpendek dari  $(0, 0)$  ke titik tersebut ada  $\binom{n}{r}$ . Dengan demikian, total ada  $\sum_{r=0}^n \binom{n}{r}$ .

Karena kedua metode tersebut merupakan solusi permasalahan yang sama, diperoleh kedua hasil tersebut adalah sama. Terbukti.

## Contoh 2

### Contoh

Tunjukkan bahwa

$$\sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}.$$

Penyelesaian:

## Contoh 2

### Contoh

Tunjukkan bahwa

$$\sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i} = \binom{m+n}{r}.$$

**Penyelesaian:** Akan dicari banyaknya jalan (latis) terpendek dari  $(0, 0)$  ke  $(m+n-r, r)$ .

- Langsung: Dari teorema sebelumnya, jelas bahwa banyaknya adalah  $\binom{m+n}{r}$ .
- Bagi kasus berdasarkan di mana jalan tersebut memotong garis  $x+y=m$  ( $0 \leq y \leq r$ ). Terdapat  $r+1$  buah titik latis pada garis tersebut:  $(m-i, i)$ . Perhatikan bahwa banyak jalan terpendek yang melalui titik  $(m-i, i)$  ada sebanyak  $\binom{m}{i} \binom{n}{r-i}$ . Dengan demikian, total ada  $\sum_{i=0}^r \binom{m}{i} \binom{n}{r-i}$ .

Karena kedua metode tersebut merupakan solusi permasalahan yang sama, diperoleh kedua hasil tersebut adalah sama. Terbukti.

## Contoh 3

### Contoh

Tunjukkan dengan metode hitung jalur terpendek pada grid bahwa

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{r} = \binom{r+n+1}{r+1}.$$

**Penyelesaian:**

## Contoh 3

### Contoh

Tunjukkan dengan metode hitung jalur terpendek pada grid bahwa

$$\sum_{k=0}^n \binom{r+k}{r} = \binom{r+n+1}{r+1}.$$

**Penyelesaian:** Akan dicari banyaknya jalan (latis) terpendek dari  $(0, 0)$  ke  $(r+1, n)$ .

- Langsung: Dari teorema sebelumnya, jelas bahwa banyaknya adalah  $\binom{r+1+n}{r+1}$ .
- Bagi kasus berdasarkan kapan jalan tersebut melalui/memotong garis  $x = r$  terakhir kali. Terdapat  $n + 1$  buah titik latis pada garis tersebut:  $(r, k)$  ( $0 \leq k \leq n$ ). Perhatikan bahwa banyak jalan terpendek yang melalui/memotong garis  $x = r$  terakhir kali di titik  $(r, k)$  ada sebanyak  $\binom{k+r}{r}$ . Dengan demikian, total ada  $\sum_{k=0}^n \binom{k+r}{r}$ .

Karena kedua metode tersebut merupakan solusi permasalahan yang sama, diperoleh kedua hasil tersebut adalah sama. Terbukti.

# Latihan

## Soal 1

Tunjukkan dengan metode hitung jalur terpendek pada grid bahwa

$$\sum_{i=0}^p \binom{p+q-i}{q} \binom{r+i}{r} = \binom{p+q+r+1}{p}.$$

**Penyelesaian:**

# Latihan

## Soal 2

Untuk  $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ , berikan bukti kombinatorial dari persamaan

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k} \binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1}.$$

**Penyelesaian:**

# Latihan

## Soal 3

Tunjukkan dengan metode hitung jalur terpendek pada grid bahwa

$$\sum_{i=m}^n \binom{i}{m} \binom{n-i}{r} = \binom{n+1}{m+r+1}$$

dengan  $n > m + r$ .

**Penyelesaian:**

# Latihan

## Soal 4

Diberikan bilangan bulat tak negatif  $k$  dan  $n$  sehingga  $0 \leq k < n$ . Berikan bukti kombinatorial bahwa

$$\sum_{j=0}^k \binom{n}{j} = \sum_{j=0}^k \binom{n-1-j}{k-j} 2^j.$$

**Penyelesaian:**

# Latihan

## Soal 5

Misalkan  $m$  dan  $n$  dua bilangan tak negatif. Berikan sebuah bukti kombinatorial untuk

$$\binom{m+n}{m} = \sum_{0 \leq a \leq \frac{m-1}{2}} \binom{m-a-1}{a} \binom{n+a}{2a+1} + \sum_{0 \leq a \leq \frac{m}{2}} \binom{m-a}{a} \binom{n+a}{2a}$$

**Penyelesaian:**

# Outline

- 1 *Bukti Kombinatorik dengan Grid*
- 2 *Bilangan Catalan*
- 3 *Kumpulan Soal Nasional ONMIPA/KNMIPA*

# Bilangan Catalan

Bilangan Catalan adalah bilangan yang dapat dinyatakan dalam bentuk

$$C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

## Sifat Bilangan Catalan

- ▶  $C_n$  merupakan bilangan bulat.
- ▶  $C_n$  adalah jalan (latis) terpendek dari  $(0, 0)$  ke  $(n, n)$  yang tidak memotong (boleh menyinggung) garis  $x = y$ .
- ▶ Relasi rekurensi  $C_n$ :

$$C_n = C_0 C_{n-1} + C_1 C_{n-2} + \cdots + C_{n-1} C_0$$

dengan  $C_0 = 1$ .

- ▶ Fungsi pembangkit dari  $\{C_n\}$  adalah  $\frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4x}}$   
dan memenuhi persamaan  $xC(x)^2 = C(x) - 1$ .

## Contoh 4

### Contoh

Misalkan  $A_n$  = banyaknya cara menghubungkan  $n$  garis yang tidak saling berpotongan yang menghubungkan  $2n$  titik pada lingkaran. Tentukan  $A_n$ .

Penyelesaian:

## Contoh 4

### Contoh

Misalkan  $A_n$  = banyaknya cara menghubungkan  $n$  garis yang tidak saling berpotongan yang menghubungkan  $2n$  titik pada lingkaran. Tentukan  $A_n$ .

**Penyelesaian:** Labeli  $2n$  titik tersebut dengan  $1, 2, \dots, 2n$ . Perhatikan bahwa setiap ruas garis akan memasangkan dua titik berbeda dan setiap titik hanya termuat di satu pasangan. Akan dicari  $A_n$  berdasarkan kemungkinan pasangan titik berlabel 1. Perhatikan bahwa ada  $n$  kemungkinan pasangan titik berlabel 1, yakni  $2, 4, 6, \dots, 2n$ .

Misalkan titik dengan label 1 berpasangan dengan titik berlabel  $2i$ . Perhatikan bahwa tidak ada titik sebelum  $2i$  dan titik setelah  $2i$  yang terhubung oleh suatu ruas garis. Dengan demikian, ada  $i - 1$  buah ruas garis yang menghubungkan titik-titik berlabel  $2, 3, \dots, 2i - 1$ . Banyaknya cara membentuk  $i - 1$  buah ruas garis tersebut tanpa ada yang berpotongan ada sebanyak  $A_{i-1}$  ( $A_0 = 1$  untuk  $i = 1$ ). Dengan cara yang sama, banyaknya cara membentuk  $n - i$  buah ruas garis yang menghubungkan titik-titik berlabel  $2i + 1, \dots, 2n$  tanpa ada yang berpotongan ada sebanyak  $A_{n-i}$  ( $A_0 = 1$  untuk  $i = n$ ). Jadi, banyaknya cara membentuk  $n$  ruas garis pada kasus ini ada  $A_{i-1}A_{n-i}$ .

Dengan menjumlahkan semua kasus, diperoleh

$$A_n = A_0A_{n-1} + A_1A_{n-2} + \dots + A_{n-1}A_0, \quad n \geq 1,$$

dengan  $A_0 = 1$ . Relasi ini merupakan relasi rekurensi dari barisan bilangan Catalan  $\{C_n\}$ . Jadi,  $A_n = C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ .

## Contoh 5

### Contoh

Tentukan banyaknya barisan bilangan bulat  $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  dengan  $a_i \leq i$ , untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Penyelesaian:**

## Contoh 5

### Contoh

Tentukan banyaknya barisan bilangan bulat  $1 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$  dengan  $a_i \leq i$ , untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Penyelesaian:** Perhatikan bahwa himpunan pasangan

$\{(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n)\}$  merepresentasikan suatu jalan latis terpendek dari  $(1, 1)$  ke  $(n, n)$  yang tidak memotong garis  $x = y$  (boleh menyinggung).

Dengan demikian, banyaknya barisan yang memenuhi adalah  $\frac{1}{n} \binom{2n-2}{n-1}$ .

# Latihan

## Soal 6

Tentukan banyaknya barisan bilangan bulat  $a_1 < a_2 < \dots < a_n$  dengan  $1 \leq a_i \leq 2i$ , untuk setiap  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

**Penyelesaian:**

# Latihan

## Soal 7

Didefinisikan  $A_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  untuk semua  $n \in \mathbb{N}$  dan misalkan  $A(x)$  fungsi pembangkit dari  $A_n$ . Buktikan bahwa

$$\sum_{n \geq 0} (2n+1)x^n A(x)^{2n+1} = \sum_{m \geq 0} (4x)^m.$$

Penyelesaian:

# Latihan

## Soal 8

Tentukan banyaknya cara meletakkan  $n + 1$  buah tanda kurung “()” pada  $a_1 a_2 \dots a_n$ . Contoh untuk  $n = 3$ , ada 4 buah cara, yakni

$$((a_1 a_2) a_3) a_4 \quad (a_1 (a_2 a_3)) a_4 \quad (a_1 a_2) (a_3 a_4) \quad a_1 ((a_2 a_3) a_4) \quad a_1 (a_2 (a_3 a_4))$$

**Penyelesaian:**

# Outline

- 1 *Bukti Kombinatorik dengan Grid*
- 2 *Bilangan Catalan*
- 3 *Kumpulan Soal Nasional ONMIPA/KNMIPA*

## ONMIPA 2011

- 1 Diberikan  $n \in \mathbb{N}$ , buktikan dengan kombinatorika bahwa

$$\sum_{k=1}^n k(n+1-k) = \binom{n+2}{3}.$$

- 2 Misalkan relasi rekuren  $P_n$  yang didefinisikan dengan  $P_1 = 2$  dan  $P_{n+1} = P_n^2 - P_n + 1$  untuk semua  $n \in \mathbb{N}$ . Buktikan bahwa jika  $n \neq m$ , maka  $P_m$  dan  $P_n$  keduanya prima relatif.

# *ONMIPA 2011*

## ONMIPA 2012

1. Buktikan secara kombinatorika bahwa

$$\sum_{k=1}^{n-2} k \binom{n-2}{k} \binom{n+2}{k+2} = (n-2) \binom{2n-1}{n-1}.$$

2. Misalkan  $(y_n)_{n \geq 0}$  barisan bilangan real dengan  $y_n^2 - y_{n-1}y_{n+1} = 1$ .  
Tunjukkan bahwa ada  $c$  real sehingga  $y_{n+1} = cy_n - y_{n-1}$  untuk  $n \geq 1$ .

# *ONMIPA 2012*

## ONMIPA 2013

- 1 Sebuah  $n$ -board adalah sebuah persegi panjang berukuran  $n \times 1$ . Misalkan  $f_n$  menyatakan banyaknya cara mengubini  $n$ -board dengan menggunakan ubin  $1 \times 1$  dan ubin  $2 \times 1$ . Jadi  $f_1 = 1$  dan  $f_2 = 2$ . Untuk  $n \geq 0$ , perlihatkan bahwa

$$f_{2n+1} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \binom{n-i}{j} \binom{n-j}{i}.$$

- 2 Untuk  $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ , berikan bukti kombinatorial dari persamaan

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k} \binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1}.$$

# *ONMIPA 2013*

1. Buktikan secara kombinatorika bahwa

$$\sum_{k=1}^{n-2} k \binom{n-2}{k} \binom{n+2}{k+2} = (n-2) \binom{2n-1}{n-1}.$$

2. Carilah koefisien  $x^{2n+r}$  dari

$$\sum_{i=0}^{2n} x^i (1+x)^{4n-i}.$$

# *ONMIPA 2014*

- 1 Misalkan  $m$  dan  $n$  dua bilangan tak negatif. Berikan sebuah bukti kombinatorial untuk

$$\binom{m+n}{m} = \sum_{0 \leq a \leq \frac{m-1}{2}} \binom{m-a-1}{a} \binom{n+a}{2a+1} + \sum_{0 \leq a \leq \frac{m}{2}} \binom{m-a}{a} \binom{n+a}{2a}$$

- 2 Didefinisikan  $A_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  untuk semua  $n \in \mathbb{N}$  dan bentuk fungsi pembangkit

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} A_n x^n.$$

Buktikan bahwa

$$\sum_{n \geq 0} (2n+1)x^n A(x)^{2n+1} = \sum_{m \geq 0} (4x)^m.$$

# *ONMIPA 2015*

## ONMIPA 2016

- 1 Setiap bilangan-bilangan  $1, 2, \dots, n$  diwarnai dengan tiga warna. Tentukan  $n$  terkecil sedemikian sehingga untuk sebarang pewarnaan dari bilangan-bilangan tersebut, selalu terdapat tiga bilangan  $x_1, x_2, x_3 \in \{1, 2, \dots, n\}$  yang berwarna sama dan memenuhi  $x_1 + x_2 = x_3$ .
- 2 Misalkan  $G = (V(G), E(G))$  adalah suatu graf terhubung tak trivial. Didefinisikan  $c : E(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  adalah suatu pewarnaan sisi di mana dua sisi yang bertetangga boleh berwarna sama. Suatu lintasan  $P$  dari titik  $u$  ke titik  $v$  ditulis  $u - v$  path  $P$  di  $G$ . Lintasan  $u - v$  path  $P$  di  $G$  dinamakan *rainbow path* jika tidak terdapat dua sisi di  $P$  yang berwarna sama. Graf  $G$  disebut *rainbow connected* jika setiap dua titik yang berbeda di  $G$  dihubungkan oleh *rainbow path*. Pewarnaan sisi yang mengakibatkan  $G$  bersifat *rainbow connected* dikatakan *rainbow coloring*. Bilangan *rainbow connection* dari graf terhubung  $G$ , ditulis  $rc(G)$ , yaitu banyaknya warna minimal yang diperlukan untuk sedemikian sehingga graf  $G$  *rainbow connected*. Misalkan  $c$  adalah *rainbow coloring* dari graf terhubung  $G$ . Misalkan  $C_n$  adalah graf lingkaran (*cycle*) dengan  $n \geq 3$ . Tentukan  $rc(C_n)$ , kemudian buktikan.

# *ONMIPA 2016*

## ONMIPA 2017

- 1 Untuk bilangan bulat  $k$  dan  $n$  dengan  $0 \leq k \leq n$ , buktikan bahwa

$$\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^n \binom{m}{k}.$$

- 2 Sebuah barisan  $\{Y_n\}$  didefinisikan oleh  $Y_1 = 2$  dan  $Y_{n+1} = Y_n(Y_n - 1) + 1$ , untuk  $n \geq 1$ . Buktikan bahwa bila  $m \neq n$ , maka pembagi sekutu terbesar dari  $Y_m$  dan  $Y_n$  adalah 1 dan

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{Y_i} = 1.$$

# *ONMIPA 2017*

## ONMIPA 2018

- 1 Untuk bilangan bulat positif  $n \geq 1$ , definisikan  $h_n$  sebagai banyaknya cara menuliskan  $n$  sebagai jumlahan dari bilangan 1 dan 2 dengan memperhatikan urutan kemunculan bilangan 1 dan 2. Buktikan bahwa

$$h_{2n+1} = \sum_{i \geq 0} \sum_{j \geq 0} \binom{n-i}{j} \binom{n-j}{i}.$$

- 2 Diberikan bilangan bulat tak negatif  $k$  dan  $n$  sehingga  $0 \leq k < n$ . Berikan bukti kombinatorial bahwa

$$\sum_{j=0}^k \binom{n}{k-j} = \sum_{j=0}^k \binom{n-1-j}{k-j} 2^j.$$

# *ONMIPA 2018*

- 1 Untuk  $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$ , berikan bukti kombinatorial dari persamaan

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k} \binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1}.$$

- 2 Diberikan bilangan bulat positif  $k$  dan  $n$ . Buktikan bahwa

$$\sum_{i=0}^k (-1)^i \binom{k}{i} (k-i)^n = \begin{cases} n! & \text{jika } k = n \\ 0 & \text{jika } k > n. \end{cases}$$

# *KNMIPA 2019*

1. Bila  $x, y$ , dan  $m$  adalah bilangan bulat dengan  $x, y \geq 0$  dan  $m \geq x + y$ , buktikan bahwa

$$\binom{m+1}{x+y+1} = \sum_{i=1}^m \binom{i}{x} \binom{m-i}{y}.$$

2. Andaikan  $B = \{1, 2, \dots, n\}$ . Untuk bilangan bulat positif  $k \leq n$ , buktikan bahwa banyaknya barisan  $B_1, B_2, \dots, B_k$  sedemikian sehingga  $B_i \subseteq B$  untuk  $1 \leq i \leq k$ , dan

$$\bigcup_{i=1}^k B_i = B$$

adalah  $(2^k - 1)^n$ .

# *KNMIPA 2020*