Analisis Kompleks

sekar.nugraheni@ugm.ac.id

Materi

1 Cauchy's Residue Theorem

1.1 Pembuat Nol dan Pole Fungsi Holomorfik

Diperhatikan bahwa fungsi f mempunyai titik singularitas di z_0, jika f tidak terdiferensial di z_0. Misalkan bahwa fungsi $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ dengan $q(z_0) = 0$ mempunyai titik pole di z_0.

Definisi 1. *Diketahui fungsi f kompleks yang terdefinisi pada domain D. Titik $z_0 \in D$ disebut pembuat nol yang terisolasi, jika $f(z_0) = 0$ dan terdapat bilangan $\epsilon > 0$ sehingga $f(z) \neq 0$, untuk setiap $0 < |z - z_0| < \epsilon$.*

Diperhatikan fungsi $f : D \to \mathbb{C}$ holomorfik dan mempunyai titik pembuat nol yang terisolasi di z_0. Berdasarkan Teorema Taylor, f dapat diekspansi menjadi

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

untuk setiap z di suatu persekitaran yang memuat z_0.

Definisi 2. *Fungsi f dikatakan memiliki pembuat nol order m di z_0, jika $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$, tetapi $a_m \neq 0$. Pembuat nol z_0, dikatakan sederhana jika ordernya adalah 1.*

Diperhatikan bahwa koefisien pada deret Taylor dapat dinyatakan dengan

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Dengan demikian, f mempunyai pembuat nol order m di z_0 jika dan hanya jika $f^{(k)}(z_0) = 0$, untuk setiap $0 \leq k \leq m - 1$, tetapi $f^{(k)}(z_0) \neq 0$. Secara khusus, jika $f(z_0) = 0$, tetapi $f'(z_0) \neq 0$ maka z_0 adalah pembuat nol sederhana.

Lemma 3. *Diketahui f fungsi holomorfik yang mempunyai pembuat nol order m di z_0. Dengan demikian, pada suatu persekitaran yang memuat z_0, f dapat dinyatakan dengan*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

dengan g adalah fungsi holomorfik pada suatu lingkaran dengan pusat z_0 dan $g(z_0) \neq 0$.

Lemma 4. *Jika diketahui fungsi $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ dimana*

1. *p holomorfik dan $p(z_0) \neq 0$,*
2. *q holomorfik dan q mempunyai pembuat nol order m di z_0*

maka f mempunyai kutub (pole) order m di z_0.

1.2 Residu dan Teorema Residu

Definisi 5. *Diketahui f fungsi holomorfik pada domain D kecuali pada titik singular terisolasi $z_0 \in D$, f mempunyai deret Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

pada persekitaran $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < R\} \subset D$. Residu f di z_0 didefinisikan dengan

$$Res(f, z_0) = b_1.$$

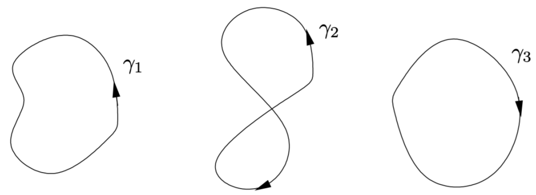
Diketahui $0 < r < R$, berdasarkan Teorema Laurent, diperoleh bahwa

$$Res(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(z)\, dz,$$

dengan $C_r(t) = z_0 + e^{irt}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Definisi 6. *Kontur tertutup γ dikatakan loop tertutup sederhana jika untuk setiap z yang tidak terletak pada γ, winding numbernnnnnnya salah satu dari $w(\gamma, z) = 0$ atau $w(\gamma, z) = 1$. Jika $w(\gamma, z) = 1$, maka z berada di dalam γ.*

Silakan dicek terlebih dahulu:



Teorema 7. *Diketahui D memuat loop tertutup sederhana γ. Jika f meromorfik pada D dan mempunyai sebanyak berhingga kutub (pole) di $z_1, z_2, \ldots, z_n$ di dalam γ, maka*

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, z_j).$$

1.3 Menghitung Residu

Diperhatikan bahwa jika f dapat dinyatakan sebagai deret Laurent

$$f(z) = \frac{b_m}{(z - z_0)^m} + \cdots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \sum_{n=0} a_n (z - z_0)^n,$$

dengan $b_m \neq 0$ maka f mempunyai kutub berorder m di z_0.

Lemma 8. *1. Jika f mempunyai kutub sederhana di z_0 maka*

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

2. Jika $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ dengan p, q terdiferensial, $p(z_0) \neq 0$, $q(z_0) = 0$, tetapi $q'(z_0) \neq 0$ maka

$$Res(f, z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}$$

Lemma 9. *Jika f mempunyai kutub berorder m di z_0, maka*

$$Res(f, z_0) = \lim_{z \to z_0} \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (\ (z - z_0)^m f(z)) \right)$$

Contoh 10. 1. Diketahui $f(z) = \dfrac{\cos \pi z}{(1 - z^3)}$. Tentukan kutub z_0, ordernya, dan $Res(f, z_0)$.

2. Diketahui $f(z) = \left(\dfrac{z+1}{z-1} \right)^3$. Tentukan kutub z_0, ordernya, dan $Res(f, z_0)$.

3. Diketahui $f(z) = \dfrac{1}{z^2 \sin z}$. Tentukan kutub z_0, ordernya, dan $Res(f, z_0)$.

4. Diketahui $C_2 = 2e^{it}$ dan $C_4 = 4e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ dan $f(z) = \dfrac{3}{z-1}$. Dengan menggunakan Teorema Residu, hitunglah

$$\int_{C_2} f \text{ dan } \int_{C_4} f.$$

Selanjutnya, jika $g(z) = \dfrac{1}{z^2 + (i-3)z - 3i}$, tentukan

$$\int_{C_2} g \text{ dan } \int_{C_4} g.$$

1.4 Integral Fungsi Real Tak Hingga

Lemma 11. *Diektahui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fungsi kontinu. Jika terdapat bilangan $K, C > 0$ dan $r > 1$ sehingga untuk setiap $|x| \geq K$ diperoleh*

$$|f(z)| \leq \frac{C}{|x|^r}$$

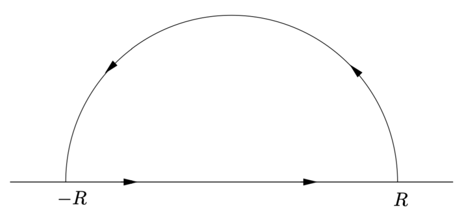
maka nilai integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$ ada dan sama dengan principle value-nya yaitu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} f(x)\ dx$$

Dengan memanfaatkan Teorema Residu, akan ditentukan nilai integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ dx$.

1. Dicek terlebih dahulu apakah f memenuhi 11.

2. Bentuk kontur Γ_R yaitu kontur dengan bentuk sebagai berikut:



3. Temukan kutub dan residu dari $f(z)$ yang berada di dalam Γ_R.

4. Gunakan Teorema Residu untuk menghitung nilai $\int_{\Gamma_R} f(z)\ dz$.

5. Diperhatikan bahwa nilai integral tersebut dapat dibagi menjadi

$$\int_{[-R,R]} f(z)\ dz \text{ dan } \int_{S_R} f(z)\ dz,$$

dengan S_R adalah setengah lingkaran pada gambar di nomor (2.).

6. Dengan menggunakan Estimation Lemma, tunjukkan bahwa integral pada S_R konvergen ke 0 untuk $R \to \infty$.

Contoh 12. Hitunglah nilai integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)}\ dx.$$

1.5 Integral Trigonometri

Akan digunakan Teorema Residu untuk menghitung nilai integral Trigonometri dengan bentuk

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\ dt.$$

1. Ubahlah integral real tersebut menjadi integral kompleks dengan transformasi $z = e^{it}$. Jadi,

$$\cos t = \frac{z+z^{-1}}{2} \text{ dan } \sin t = \frac{z-z^{-1}}{2i}.$$

Interval $[0, 2\pi]$ juga berubah menjadi lingkaran $C_1(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Kemudian $dt = \dfrac{dz}{iz}$. Jadi,

$$\int_0^{2\pi} Q(\cos t, \sin t)\ dt = \int_{C_1} Q\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}.$$

2. Langkah selanjutnya adalah dengan menemukan kutub dari fungsi kompleks tersebut dan gunakan Teorema Residu untuk menghitung integral kompleksnya.

Contoh 13. 1. Hitunglah nilai integral

$$\int_0^{2\pi} (\cos^3 t + \sin^2 t)\ dt.$$

2. Hitunglah nilai integral

$$\int_0^{2\pi} \cos t \sin t\ dt.$$

1.6 Deret Tak Hingga

Diperhatikan bahwa $\cot \pi z = \dfrac{\cos \pi z}{\sin \pi z}$, jadi $\cot \pi z$ mempunyai kutub ketika $\sin \pi z = 0$, yaitu pada saat $z = n$, untuk setiap $z \in Z$. Karena kutub $z = n$ merupakan kutub sederhana, maka

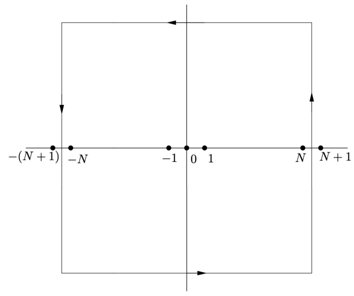
$$Res(\cot \pi z, n) = \frac{\cos \pi n}{\pi \cos \pi n} = \frac{1}{\pi}.$$

Lebih lanjut, jika f adalah fungsi meromorfik yang terdefinisi pada $\mathbb{C}$ sehingga $f(n) = a_n$ dan didefinisikan fungsi $f(z) \cot \pi z$, maka jika $f(n) \neq 0$ diperoleh

$$Res(f(z) \cot \pi z, n) = \frac{a_n}{\pi}.$$

Dengan demikian, dengan menggunakan Teorema Residu akan dihitung nilai deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Hal ini dapat dilakukan karena terjamin oleh lemma berikut.

Lemma 14. *Diketahui fungsi* $\cot \pi z$*, dengan* $z \in C_N$*, dengan* C_N *menyatakan persegi dengan titik ujung* $\left(N+\frac{1}{2}\right) - i\left(N+\frac{1}{2}\right)$, $\left(N+\frac{1}{2}\right) + i\left(N+\frac{1}{2}\right)$, $-\left(N+\frac{1}{2}\right) + i\left(N+\frac{1}{2}\right)$, *dan* $-\left(N+\frac{1}{2}\right) - i\left(N+\frac{1}{2}\right)$.



Jadi persegi ini memiliki panjang $2N+1$*. Terdapat* $M > 0$*, sehingga untuk setiap* N *dan* $z \in C_N$*,* $|\cot \pi z| \leq M$.

Sebagai contoh akan dihitung nilai $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Dipilih $f(z) = \dfrac{1}{z^2}$ sehingga diperoleh fungsi

$$f(z) \cot \pi z = \frac{\cot \pi z}{z^2} = \frac{\cos \pi z}{z^2 \sin \pi z}.$$

Diperhatikan bahwa fungsi tersebut mempunyai kutub $z = n$, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Jika $n = 0$ maka kutub tersebut merupakan kutub sederhana. Namun, jika $n \neq 0$, maka kutub tersebut mempunyai order 3. Untuk $n \neq 0$, diperoleh

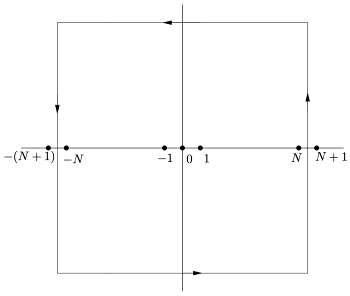
$$Res\left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, n\right) = \frac{1}{\pi n^2}.$$

Selanjutnya, untuk kutub $z = 0$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{1}{z^2}\frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} &= \frac{1}{z^2}\left(1 - \frac{(\pi z)^2}{2!} + \dots\right)\left((\pi z) - \frac{(\pi z)^3}{3!} + \dots\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{z^2}\frac{1}{\pi z}\left(1 - \frac{(\pi z)^2}{2!} + \dots\right)\left(1 - \frac{(\pi z)^2}{3!} + \dots\right) \\
&= \frac{1}{\pi z^3}\left(1 - \frac{(\pi z)^2}{3} + \dots\right).
\end{aligned}$$

Jadi, $Res\left(\dfrac{\cot \pi z}{z^2}, 0\right) = -\dfrac{\pi}{3}$.

Diperhatikan kontur C_N berikut:



Panjang dari kontur tersebut adalah $4(2N+1)$. Jadi, kutub yang terletak di dalam C_N adalah $z = 0, \pm 1, \ldots, \pm N$. Berdasarkan Teorema Residu, diperoleh

$$2\pi i \sum_{n=-N}^{N} Res\left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, n\right) = \int_{C_N} \frac{\cot \pi z}{z^2}\, dz.$$

Berdasarkan lemma sebelumnya $|\cot \pi z| \leq M$ pada C_N dan $\left|\frac{1}{z^2}\right| \leq \frac{1}{N^2}$. Jadi berdasarkan Estimation Lemma diperoleh

$$\left|\int_{C_N} \frac{\cot \pi z}{z^2}\, dz\right| \leq \frac{M}{N^2} \text{ panjang } C_N = \frac{M}{N^2} 4(2N+1) \to 0$$

untuk $N \to \infty$. Jadi,

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} Res\left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, n\right) = 0.$$

Akibatnya,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=-N}^{N} Res\left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, n\right)\\
&= \sum_{n=-N}^{-1} Res\left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, n\right) + Res\left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, 0\right)\\
&\quad + \sum_{n=1}^{N} Res\left(\frac{\cot \pi z}{z^2}, n\right)\\
&= 2\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\pi n^2} - \frac{\pi}{3}.
\end{aligned}$$

Jadi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Latihan

1. Tentukan kutub (pole) dari fungsi berikut. Kemudian, hitunglah residu di titik tersebut .
   (a) $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z^2)}$
   (b) $f(z) = \tan z$
   (c) $f(z) = \dfrac{z}{1+z^4}$
   (d) $f(z) = \left(\dfrac{z+1}{z^2+1}\right)^2$

2. Tentukan singularitas dari fungsi-fungsi berikut, kemudian hitunglah residu di titik tersebut.
   (a) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^2}$
   (b) $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^4}$

3. Diketahui $f(z) = \dfrac{1}{z(1-z)^2}$. Diperhatikan bahwa titik singular fungsi tersebut adalah 0 dan 1. Tentukan deret Laurent fungsi f di 0 dan 1. Tentukan order dari kutub (pole)-nya dan residu dari kutub tersebut.

4. Diberikan fungsi holomorfik $f, g : D \to \mathbb{C}$ dan $z_0 \in D$. Jika f mempunyai pembuat nol dengan order n di z_0 dan g mempunyai pembuat nol dengan order m di z_0, tunjukkan bahwa $f(z)g(z)$ mempunyai pembuat nol dengan order $m+n$ di z_0.

5. Diketahui $C_r(t) = re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$ adalah lingkaran dengan pusat nol dan jari-jari r. Tentukan nilai integral berikut:
   (a) $\displaystyle\int_{C_4} \frac{1}{z^2-5z+6}\, dz$
   (b) $\displaystyle\int_{C_{\frac{5}{2}}} \frac{1}{z^2-5z+6}\, dz$
   (c) $\displaystyle\int_{C_2} \frac{e^{3z}}{1+z^2}\, dz$

6. Tentukan nilai integral berikut:
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{2ix}}{x^2+1}\, dx.$$
   Selanjutnya, dengan memanfaatkan hasil integral tersebut, hitunglah
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1}\, dx \text{ dan } \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1}\, dx.$$

7. Tentukan nilai integral berikut:
   (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+3)}\, dx$
   (b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{28+11x^2+x^4}\, dx$

8. Tunjukkan bahwa
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2+4x+5}\, dx = -\frac{\pi \sin 2}{e}.$$

9. Tunjukkan bahwa
$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{13+5\cos t}\, dt = \frac{2}{i}\int_{C_1} \frac{1}{5z^2+26z+5}\, dz = \frac{\pi}{6},$$
   dimana C_1 menyatakan lingkaran dengan pusat 0 dan jari-jari 1 berlawanan arah jarum jam.

10. Tentukan nilai integral berikut:
    (a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2\cos^3 t + 3\cos^2 t\, dt$
    (b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\cos^2 t}\, dt$

11. Buktikan bahwa nilai jumlahan
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

12. Diberikan fungsi
$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$$
    Tentukan deret Laurent pada
    (a) $0 < |z| < 1$
    (b) $1 < |z| < \infty$
    (c) $0 < |z-1| < 1$
    (d) $1 < |z-1| < \infty$.

13. Diberikan $0 < a < b$. Tentukan nilai integral
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\, dx.$$

14. Diketahui $a \neq 0$ dan fungsi $f(z) = \dfrac{\cot \pi z}{z^2+a}$.
    (a) Tunjukkan bahwa fungsi f memiliki kutub (pole) di n, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ dan $z = \pm ia$.
    (b) Tentukan residu di kutub-kutub tersebut.
    (c) Tentukan
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+a^2} = \frac{\pi}{a}\coth \pi a - \frac{1}{2a^2}.$$

15. Diketahui $C_1 = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

(a) Buktikan bahwa

$$\int_{C_1} \frac{e^z}{z}\, dz = 2\pi i.$$

(b) Buktikan bahwa

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t)\; dt = 2\pi.$$

(c) Buktikan bahwa

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos t} \sin(\sin t)\; dt = 0.$$

16. Diberikan $0 < a < 1$. Buktikan bahwa

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$