TES BAGIAN PERTAMA

Bentuk Soal: Isian Singkat

Waktu: 60 menit

SOAL

1. Diketahui suatu barisan $(a_n)_{n\geq 1}$ memenuhi $\lim a_{n+1} - a_n = 2024$. Nilai dari
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n+1}$$
adalah....

2. Diberikan suatu matriks berukuran 2025×2025, $A = \|a_{ij}\|_{i=1}^{n}$ dimana $a_{ii} = 0$, $a_{ij} = i \mod (j+1)$ untuk $i < j$ dan $a_{ij} = -(j \mod (i+1))$ untuk i, j yang lainnya. Nilai dari $\det(2025A)$ adalah...

3. Diberikan G adalah suatu grup komutatif dengan orde 2025 dan N adalah subgrup normal dari G dengan orde n. Jumlah semua n yang mungkin adalah ...

4. Diberikan fungsi
$$F(z) = \frac{z+i}{z-i}$$
untuk semua bilangan kompleks $z \neq i$, dan $z_n = F(z_{n-1})$ untuk semua bilangan bulat positif n. Diketahui bahwa $z_0 = -1 + i$ dan $z_{2025} = a + bi$, dimana a dan b adalah bilangan real. Nilai $a + b$ adalah ....

5. Banyak himpunan bagian dari $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ yang bukan merupakan himpunan bagian dari $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ maupun $\{4, 5, 6, 7, 8\}$ adalah ...

SOLUSI

1. Definisikan barisan $b_n = n$ untuk $n \in \mathbb{N}$, sehingga jelas bahwa b_n monoton naik dan divergen ke ∞. Selanjutnya perhatikan bahwa
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(n+1) - n} = \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 2024.$$
Berdasarkan teorema Stolz-Cesàro, diperoleh bahwa
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} - a_n = 2024.$$
yang berarti nilai dari $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n+1}$ adalah
$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 2024 \cdot 1 = \boxed{2024}.$$

2. Perhatikan bahwa setiap elemen dapat dituliskan lebih sederhana sebagai berikut

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{jika } i = j, \\ i & \text{jika } i < j, \\ -j & \text{jika } i > j. \end{cases}$$

Untuk lebih jelasnya kita dapat menuliskan matriks A sebagai berikut

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1,2025} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2,2025} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2025,1} & a_{2025,2} & a_{2025,3} & \dots & a_{2025,2025} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & 2024 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 2023 \\ -2 & -1 & 0 & \dots & 2022 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -2024 & -2023 & -2022 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Dengan mudah dapat diidentifikasi bahwa matriks A adalah matriks anti-simetri (*skew-symmetric*) yang memenuhi $A^T = -A$, sehingga

$$\det(A) = \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^{2025} \det(A) = -\det(A) \implies \det(A) = 0$$

Jadi $\det(2025A) = 2025^{2025} \det(A) = 2025^{2025} \cdot 0 = \boxed{0}$.

3. Semua subgrup dari grup komutatif adalah subgrup normal, sehingga jumlah semua orde n yang mungkin sama saja dengan jumlah semua faktor dari 2025. Jika difaktorkan, maka $2025 = 3^4 \cdot 5^2$, yang artinya banyaknya faktor dari 2025 adalah $(4+1)(2+1) = 15$ yaitu

$$\{1, 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 81, 135, 225, 405, 675, 2025\}$$

yang jika dijumlahkan hasilnya adalah $\boxed{3751}$.

TES BAGIAN KEDUA

Bentuk Soal: Uraian

Waktu: 120 menit

SOAL

1. Diberikan $\mathbb{F}$ adalah lapangan dengan karakteristik p. Tunjukkan bahwa matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dengan $\alpha \in \mathbb{F}$ memenuhi $A^p = I$ dan A tidak dapat didiagonalkan atas $\mathbb{F}$ jika $\alpha \neq 0$.

2. Buktikan bahwa untuk setiap $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ memenuhi

$$-x \cos x + \sin x \leq \frac{\pi}{2} x.$$

3. Suatu matriks A berordo n memiliki sifat bahwa untuk setiap matriks X yang berordo n dengan $\mathrm{tr} X = 0$, memenuhi $\mathrm{tr}(AX) = 0$. Buktikan bahwa $A = \lambda I$.

4. Tentukan peta himpunan

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3, 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{6} \right\}$$

oleh pemetaan $f(z) = -iz^3$.

5. Tentukan banyaknya bilangan bulat dari 1 sampai 99999 sehingga jumlah digit-digitnya pada bilangan tersebut adalah 22.

SOLUSI

1. Karena $\mathbb{F}$ berkarakteristik p, akibatnya untuk $\alpha \in \mathbb{F}$ berlaku $p\alpha = 0$. Sehingga diperoleh

$$A^p = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^p = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \cdots \cdot \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{p} = \begin{bmatrix} 1 & p\alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I.$$

Selanjutnya perhatikan bahwa nilai eigen dari A adalah $\lambda = 1$ dengan multiplisitas aljabar 2 (dapat dicari menggunakan polinomial karakteristik $\det(A - \lambda I) = 0$).

Untuk mencari vektor eigennya dapat dicari dengan mencari solusi dari persamaan $(A - \lambda I)\mathbf{v} = 0$.

$$\begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \alpha v_2 = 0 \quad \text{dan} \quad v_1 \in \mathbb{F}.$$

Jika $\alpha \neq 0$, maka haruslah $v_2 = 0$. Sehingga vektor eigennya hanyalah $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ atau bisa dibilang multiplisitas geometrinya adalah 1.

Multiplisitas geometri kurang dari multiplisitas aljabar mengimplikasikan bahwa matriks A tidak dapat didiagonalisasi atas $\mathbb{F}$.

2.