4

Integral dan Barisan Fungsi

4.1 Integral Riemann

Konsep integral bermula dari permasalahan menghitung luasan daerah di bawah kurva positif yang kemudian disebut dengan **integral tertentu**. Integral ternyata berkaitan dengan turunan fungsi, jika diberikan suatu fungsi f yang terdiferensial maka turunannya dinamakan f'. Sebaliknya, jika diketahui fungsi g kontinu, terdapat fungsi G (fungsi primitif) sehingga $g = G'$. Fungsi G disebut **integral tak tentu** fungsi g. Integral yang akan dijelaskan di bawah ini merupakan integral Riemann. Diberikan $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ partisi pada $[a, b]$. Partisi membagi interval $[a, b]$ menjadi beberapa bagian. Tentu saja partisi P memenuhi $x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$. Didefinisikan

$$\|P\| = \max\{|x_i - x_{i-1}| : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

dan untuk setiap fungsi f pada $[a, b]$, didefinisikan jumlahan Riemann:

$$S(P, f) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Dari jumlahan Riemann diatas, kita dapat mendefinisikan integral Riemann sebagai berikut.

Definisi Fungsi Terintegral Riemman

Fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan **terintegral Riemann** pada $[a, b]$, jika terdapat bilangan L dengan sifat

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(P, f) = L.$$

Lebih lanjut, bilangan L tersebut dinotasikan dengan

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Sebagai catatan, proses limit yang dilakukan pada jumlahan Riemann di atas ditujukan untuk mempartisi interval $[a, b]$ menjadi sangat kecil sehingga luas yang diperoleh semakin lama semakin mendekati luasan daerah dibawah kurva dan di atas sumbu X (untuk fungsi bernilai positif) dan luasan diatas kurva dan di bawah sumbu X (untuk fungsi bernilai negatif (luasan bernilai negatif)).

Sifat Operasi Fungsi Terintegral Riemman

Diberikan f, g fungsi terintegral Riemann pada $[a, b]$.

1. jika $c \in \mathbb{R}$, maka cf terintegral Riemann pada $[a, b]$ dengan
$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$
2. fungsi $f + g$ terintegral Riemann pada $[a, b]$ dengan
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
3. jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Sifat terakhir diatas diperoleh karena fungsi tak negatif selalu mempunyai nilai integral tak negatif $(g(x) - f(x) \geq 0)$. Sifat sederhana berikut ini sering kali membantu dalam permasalahan yang melibatkan ketaksamaan integral.

Karakteristik Fungsi Terintegral Riemman

- Jika f terintegral Riemann pada $[a, b]$, maka
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$
- Jika f kontinu pada $[a, b]$, maka f terintegral Riemann pada $[a, b]$.

Selain fungsi kontinu, fungsi tangga (belum tentu kontinu) juga terintegral Riemann. Ketaksamaan diatas mengatakan bahwa nilai integral suatu fungsi selalu bernilai kurang dari integral fungsi mutlaknya. Lebih lanjut, jika fungsi f terbatas maka nilai mutlak integralnya pada interval $[a, b]$ akan dibatasi oleh $M(b - a)$ dengan M merupakan batas fungsinya.

Teorema Fundamental Kalkulus

- (**Teorema Fundamental Kalkulus**) Misalkan E himpunan berhingga pada $[a, b]$. Jika $f, F : [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi dengan
  1. F kontinu pada $[a, b]$,
  2. $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]\backslash E$,
  3. f terintegral Riemann,

  maka
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$
- (**Primitif Fungsi Terintegral Riemann**) Jika f fungsi terintegral Riemann pada $[a, b]$

dan f kontinu di $c \in [a,b]$, maka fungsi F dengan

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$

(dikenal sebagai primitif dari f) memiliki turunan di c dengan $F'(c) = f(c)$.

- Jika f kontinu pada $[a,b]$, maka primitif F terdiferensial pada $[a,b]$ dengan $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

Teorema Fundamental Kalkulus di atas sering digunakan untuk menghitung integral tertentu dari suatu fungsi dengan memanfaatkan primitif fungsinya. Selain itu jika kita mempunyai fungsi terintegral Riemann maka kita dapat membentuk fungsi primitifnya seperti pada sifat kedua di atas. Konstruksi seperti ini sering muncul pada kompetisi terkait integral. Selain itu di bawah ini diberikan ketaksamaan (meskipun jarang terpakai) yang berguna untuk menyelesaikan ketaksamaan bentuk integral.

Ketaksamaan Holder

Diberikan bilangan real positif p, q dengan $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Jika f, g fungsi terintegral Riemann pada $[a,b]$, maka berlaku

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |f(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Permasalahan limit berikut dapat diselesaikan menggunakan definisi integral tertentu.

Contoh 12. Tentukan nilai limit berikut.

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{n^3+1^3} + \frac{1}{n^3+2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3+n^3}\right).$$

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa

$$n^2 \left(\frac{1}{n^3+1^3} + \frac{1}{n^3+2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3+n^3}\right) = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1^3}{n^3}} + \frac{1}{1+\frac{2^3}{n^3}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n^3}{n^3}}\right)$$

sehingga

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{n^3+1^3} + \frac{1}{n^3+2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3+n^3}\right) = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\, dx$$

dengan mengambil partisi $P = \{0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\}$. Karena

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\, dx = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{9}\sqrt{3}\pi, \text{ (integral fungsi pecah rasional)}$$

maka

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\frac{1}{n^3+1^3} + \frac{1}{n^3+2^3} + \cdots + \frac{1}{n^3+n^3}\right) = \frac{1}{3}\ln 2 + \frac{1}{9}\sqrt{3}\pi.$$

Berikut ini contoh pemanfaatan Teorema Nilai Antara pada permasalahan integral.

Contoh 13. Jika f kontinu pada $[a, b]$, tunjukkan bahwa terdapat $c \in [a, b]$ dengan sifat

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Penyelesaian:

Karena f kontinu pada $[a, b]$ maka terdapat bilangan real m dan M sehingga

$$m = \min\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\} \qquad \text{dan} \qquad M = \max\{f(x) \ : \ x \in [a, b]\}.$$

Diperoleh

$$m(b-a) = \int_a^b m \ dx \leq \int_a^b f(x) \ dx \leq \int_a^b M \ dx = M(b-a).$$

Akibatnya,

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) \ dx}{b-a} \leq M.$$

Karena f kontinu pada $[a, b]$, maka berdasarkan teorema nilai antara, terdapat $c \in [a, b]$ sehingga

$$\frac{\int_a^b f(x) \ dx}{b-a} = f(c) \qquad \text{atau} \qquad \int_a^b f(x) \ dx = f(c)(b-a).$$

Teknik-teknik perubahan yang sering muncul dapat dipelajari dari bukti teknik pengintegralan yang telah dipelajari pada mata kuliah Kalkulus dasar terkait integral seperti halnya metode substitusi, parsial (integration by parts), fungsi pecah rasional, irasional serta metode substitusi trigonometri. Ide pada metode di atas sering kali memberikan intuisi untuk memecahkan masalah integral khusus seperti di bawah ini.

Contoh 14. Hitunglah nilai integral berikut

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} \ dx.$$

Penyelesaian:

Digunakan substitusi $t = \pi/2 - x$, diperoleh

$$\sin x = \cos t \qquad \text{dan} \qquad \cos x = \sin t$$

sehingga

$$I := \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^n x}{\sin^n x + \cos^n x} \ dx = -\int_{\pi/2}^0 \frac{\cos^n t}{\sin^n t + \cos^n t} \ dt = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^n t}{\sin^n t + \cos^n t} \ dt.$$

Akibatnya,

$$2I = \int_0^{\pi/2} 1 \ dx = \pi/2.$$

Jadi $I = \pi/4$.

LATIHAN: Integral

1. Jika f terintegral Riemann pada $[a,b]$ dan $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a).$$
2. Diberikan $0 < a < b$. Tunjukkan bahwa
$$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2}dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$
3. Misalkan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu sehingga $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 xf(x)dx = 1$. Nilai minimal dari $\int_0^1 f^2(x)dx$ adalah ...
4. Diketahui f kontinu pada $[a,b]$ dan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$ dan $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = 0$. Tunjukkan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$.
5. Jika f, g kontinu pada $[a,b]$ dan $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$, tunjukkan bahwa terdapat $c \in [a,b]$ dengan sifat $f(c) = g(c)$.
6. Jika f, g kontinu pada $[a,b]$ dan $g(x) > 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, tunjukkan bahwa terdapat $c \in [a,b]$ dengan sifat $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.
7. Jika f kontinu pada $[-a,a]$, tunjukkan bahwa
$$\int_{-a}^a f(x^2)dx = 2\int_0^a f(x^2)dx.$$
8. Jika f kontinu pada $[-1,1]$, tunjukkan bahwa
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$
9. Tentukan nilai dari
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx.$$
10. Tentukan nilai dari
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right).$$
11. Tentukan nilai dari
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$
12. Tentukan nilai dari
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+4} + \ldots + \frac{1}{2n^2}\right).$$
13. Jika f kontinu pada $[0,1]$ dan $\displaystyle\int_0^t f(x)dx = \int_t^1 f(x)dx$ untuk setiap $t \in [0,1]$, maka tunjukkan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap x.

14. Jika f kontinu pada $\mathbb{R}$ dan $c > 0$, tunjukkan bahwa fungsi g dengan
$$g(x) = \int_{x-c}^{x+c} f(t)dt$$
terdiferensial pada $\mathbb{R}$. Tentukan $g'(x)$.
15. Diberikan f fungsi kontinu pada $[0,1]$. Tentukan nilai dari
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 x^n f(x)dx.$$
16. Tentukan nilai integral berikut
$$\int_0^1 (1+2x^2)e^{x^2}dx.$$
17. Jika f kontinu pada $[a,b]$ dan f bernilai nonnegatif pada $[a,b]$, tunjukkan bahwa
$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$

4.2 Barisan Fungsi

Kita telah membahas barisan bilangan real pada subbab sebelumnya. Kali ini kita akan berbicara tentang barisan fungsi. Barisan fungsi dinotasikan dengan $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Tentu saja domain setiap suku fungsinya adalah sama. Seperti halnya pada barisan bilangan real, kita juga akan berbicara terkait kekonvergenan barisan fungsi. Tidak seperti barisan bilangan real, kita mempunyai dua konsep kekonvergenan pada barisan fungsi yaitu kekonvergenan titik demi tiitk dan kekonvergenan seragam. Berikut diberikan definisinya.

Kekonvergenan Barisan Fungsi

Diketahui $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ barisan fungsi bernilai real pada $[a,b]$.

1. Barisan fungsi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dikatakan **konvergen titik-demi-titik** ke fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pada $[a,b]$ jika untuk setiap $x \in [a,b]$ dan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli n_0 dengan sifat untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.
2. Barisan fungsi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dikatakan **konvergen seragam** ke fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pada $[a,b]$ jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli n_0 dengan sifat untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$ dan $x \in [a,b]$ berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Pada definisi diatas, fungsi f sebagai limit fungsi memang harus ditebak atau paling tidak bisa dikonstruksi dengan mengumpulkan semua titik limit barisan bilangan real $\{f_n(x)\}$ untuk x pada domainnya. Seperti halnya kekontinuan seragam, konsep konvergen seragam mengatakan bahwa pemilihan n_0 pada definisinya tidak bergantung pada beberapa titik di domainnya melainkan seragam untuk setiap titik (kata seragam muncul dari sini). Tentu saja jika barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen seragam maka barisan tersebut konvergen titik demi titik namun tidak selalu berlaku sebaliknya. Berikut ini diberikan beberapa sifat terkait barisan fungsi.

Sifat Barisan Fungsi

- Barisan fungsi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **tidak konvergen seragam** ke f pada $[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat $\epsilon_0 > 0$ sehingga terdapat subbarisan $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ dari $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dan barisan $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di dalam $[a,b]$ sehingga untuk setiap $k\in\mathbb{N}$,
$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \epsilon_0 > 0.$$
- Jika $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ merupakan barisan fungsi kontinu pada $[a,b]$ yang konvergen seragam ke f pada $[a,b]$, maka f kontinu pada $[a,b]$. (Coba dibuktikan !)
- Jika $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ merupakan barisan fungsi terdiferensial pada $[a,b]$ dengan $\{f_n'\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen seragam ke suatu fungsu g pada $[a,b]$ dan terdapat $x_0\in[a,b]$ dengan $\{f_n(x_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen, maka $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen seragam ke fungsi f pada $[a,b]$ yang mempunyai turunan pada $[a,b]$ dan $f'(x) = g(x)$ untuk setiap $x\in[a,b]$.

Sifat pertama diatas dapat digunakan untuk menunjukkan bahwa suatu barisan fungsi tidak konvergen seragam (beberapa kali muncul pada kompetisi). Selanjutnya, diberikan sifat bahwa fungsi kontinu dapat didekati secara seragam (dalam proses limit) oleh fungsi polinomial.

Sifat Barisan Fungsi (II)

- Jika $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ merupakan barisan terintegral Riemann pada $[a,b]$ dan konvergen seragam ke f pada $[a,b]$, maka f terintegral Riemann pada $[a,b]$ dan berlaku
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$
- (**Pendekatan Stone-Weierstrass**) Diberikan f fungsi kontinu pada $[a,b]$. Terdapat barisan polinomial $\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ yang konvergen seragam ke f pada $[a,b]$

Contoh 15. Diberikan barisan bilangan real konvergen $\{a_n\}$ dan misalkan $\{f_n\}$ barisan fungsi yang memenuhi
$$\sup\{|f_n(x) - f_m(x)| \ : \ x\in A\} \leq |a_n - a_m|, \qquad n,m\in\mathbb{N}.$$
Tunjukkan bahwa $\{f_n\}$ konvergen seragam pada A.

Penyelesaian:

Karena barisan $\{a_n\}$ konvergen maka barisan $\{a_n\}$ merupakan barisan Cauchy. Berdasarkan persamaan diatas, diperoleh bahwa untuk $x\in A$, barisan $\{f_n(x)\}$ barisan Cauchy sehingga konvergen. Katakan barisan fungsi $\{f_n\}$ konvergen titik demi titik ke fungsi f. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f. Diambil sebarang $\epsilon > 0$, terdapat n_0 sedemikian hingga untuk $n,m > n_0$ berlaku
$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{2}\epsilon$$
untuk setiap $x\in A$. Karena kekontinuan dari fungsi mutlak diperoleh
$$\lim_{m\to\infty}|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon$$

untuk setiap $x \in A$ untuk setiap $n \geq n_0$. Jadi terbukti $\{f_n\}$ konvergen seragam ke fungsi f.

Contoh 16. Diberikan $\{f_n\}$ barisan fungsi kontinu seragam yang konvergen seragam pada $\mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa limit fungsinya juga kontinu seragam.

Penyelesaian:

Dimisalkan barisan $\{f_n\}$ konvergen seragam ke fungsi f pada $\mathbb{R}$. Akan ditunjukkan f fungsi kontinu seragam. Diambil sebarang $\epsilon > 0$. Karena $\{f_n\}$ konvergen seragam ke f maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

untuk setiap x. Karena fungsi f_{n_0} kontinu seragam maka terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in A$ dengan $|x - y| < \delta$ berlaku

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Dengan memilih δ yang sama, berlaku untuk setiap $x, y \in A$ dengan $|x - y| < \delta$ berlaku

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Jadi f fungsi kontinu seragam.

LATIHAN: Barisan Fungsi

1. Diberikan $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ barisan fungsi dengan $f_n(x) = \dfrac{1}{(1+x)^n}$ untuk $x \in [0,1]$. Tentukan limit titik demi titik dari barisan $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pada $[0,1]$. Apakah barisan fungsi tersebut konvergen seragam?
2. Diberikan f fungsi kontinu seragam pada $\mathbb{R}$ dan $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ barisan fungsi dengan $f_n(x) = f\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$ untuk $x \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen seragam ke f pada $\mathbb{R}$.
3. Diketahui barisan fungsi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergen seragam ke fungsi f pada $[a,b]$. Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, fungsi f_n terbatas, tunjukkan bahwa fungsi f juga terbatas.
4. Diketahui barisan fungsi $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dan f fungsi pada $\mathbb{R}$. Jika untuk setiap barisan $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ yang konvergen ke x berlaku $f_n(x_n)$ konvergen ke $f(x)$. Tunjukkan bahwa f kontinu pada $\mathbb{R}$.
5. (ONMIPA 2011) Beri contoh suatu barisan dari fungsi-fungsi kontinu (f_n) yang terdefinisi pada $[0,1]$, sedemikian sehingga $0 \leq f_n(x) \leq 1$, dan $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = 0$, tetapi barisan itu tidak konvergen pada $[0,1]$.
6. (ONMIPA 2014) Misalkan barisan fungsi (f_n) konvergen ke fungsi f pada selang $[a,b]$. Jika f_n' kontinu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ pada $[a,b]$ dan barisan (f_n') konvergen seragam ke fungsi g pada $[a,b]$, maka nilai $\int_a^x g(t)\,dx = \ldots$.
7. (ONMIPA 2015) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^n x^n$, untuk setiap $-1 < x < 1$. Jika fungsi $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$, dengan $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, pada $(-1,1)$, maka nilai $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \ldots$.
8. (ONMIPA 2016) Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = nx(1-x^2)^n$, untuk setiap $x \in [0,1]$, dan

$a_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx$. Jika $s_n = \sin(\pi a_n)$, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \ldots$.

9. Diketahui $b > a > 0$. Tentukan nilai dari
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b e^{-nx^2} dx.$$

10. Diberikan f fungsi kontinu pada $[0,1]$. Tentukan nilai dari
$$\lim_{n\to\infty} (n+1) \int_0^1 x^n f(x) dx.$$

11. (ONMIPA 2006) Diberikan barisan fungsi real (f_n), $f_n : [0,2] \to \mathbb{R}$, dengan
$$f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$
   (a) Buktikan (f_n) tidak konvergen seragam pada $[0,2]$.
   (b) Tentukan $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x),\ x \in [0,2]$.

12. (ONMIPA 2008) Diketahui fungsi $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ n = 1, 2, 3, \ldots$. Untuk sebarang barisan (x_n) konvergen ke x berakibat $(f_n(x_n))$ konvergen ke $f(x)$. Tunjukkan bahwa f kontinu.

13. (ONMIPA 2012) Diketahui fungsi $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ kontinu, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, dan $f_1 \geq f_2 \geq f_3 \geq \cdots$. Jika $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$, buktikan bahwa barisan (f_n) konvergen seragam ke fungsi nol pada $[0,1]$.

14. (ONMIPA 2016) Diketahui fungsi f kontinu pada $[0,1]$. Didefinisikan $f_0 = f$ pada $[0,1]$ dan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,
$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\, dt, \qquad \text{untuk setiap } x \in [0,1].$$
Buktikan bahwa barisan fungsi f_n konvergen seragam pada $[0,1]$ ke fungsi nol.

15. (ONMIPA 2018) Buktikan pernyataan berikut. Jika untuk setiap n, f_n merupakan fungsi naik dan (f_n) konvergen seragam ke f pada $[a,b]$, maka
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx \to \int_a^b f(x)\, dx.$$