

Latihan Soal 4

1. Terdapat 3 kota, misalkan kota A, kota B, dan kota C. Terdapat sebuah jalan yang menghubungkan setiap dua kota. Untuk bepergian dari satu kota ke kota lain membutuhkan bensin 1 liter. Andi saat ini berada di kota A dan memiliki 30 liter. Jika Andi ingin menuju ke kota B dan bensin harus habis sesampainya di kota B, maka ada berapa macam rute yang mungkin?
2. Diberikan sebuah bilangan real α dan bilangan bulat positif n . Tunjukkan bahwa terdapat bilangan rasional dengan bentuk p/q yang memenuhi

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{nq}.$$

3. Terdapat 8 soal yang dikerjakan oleh 8 orang, dengan aturan bahwa setiap soal dikerjakan minimal oleh 5 orang. Buktikan bahwa selalu ada 2 orang yang diambil dari 8 orang dan menghasilkan gabungan dari soal yang dijawab adalah semua soal.
4. Diberikan barisan Fibonacci (F_n) dengan $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ dan $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ untuk $n > 1$. Buktikan bahwa untuk seluruh bilangan bulat positif n berlaku

$$F_1 \binom{n}{1} + F_2 \binom{n}{2} + \dots + F_n \binom{n}{n} = F_{2n}.$$

5. Dengan definisi barisan Fibonacci pada soal sebelumnya, tunjukkan bahwa

$$F_n = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots$$

6. Untuk $0 \leq k \leq \frac{n}{2}$, tunjukkan bahwa

$$\sum_{m=k}^{n-k} \binom{m}{k} \binom{n-m}{k} = \binom{n+1}{2k+1}.$$

7. Diberikan bilangan bulat nonnegatif k . Hitunglah

$$\sum_{j=0}^k 2^{k-j} \binom{k+j}{j}$$

dalam bentuk yang paling sederhana.

8. Buktikan identitas berikut:

$$\sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n+k}{m} = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \binom{n}{k} 2^k.$$