

Persiapan Seleksi Wilayah

Latihan Soal

1. Diberikan ruang vektor V berdimensi hingga atas lapangan F . Buktikan bahwa jika berlaku

$$T \cap (S + U) = T \cap S + T \cap U$$

untuk setiap subruang T, S, U dari V , maka $\dim(V) \leq 1$.

2. Misalkan $A \in M_{2022 \times 2022}(\mathbb{R})$ memenuhi $A^T A + A = 2I$. Tentukan semua kemungkinan trace dari A .
3. Misalkan $A = M_{n \times n}(\mathbb{R})$ memenuhi $A^T A + A = 2I$. Selidiki apakah A dapat didiagonalkan atau tidak. Jelaskan jawaban Saudara.
4. Apakah ada matriks $X \in M_{2 \times 2}(R)$ yang memenuhi

$$X^2 + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

5. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dengan $\dim(V) = 8$. Misalkan $T \in \mathcal{L}(V, V)$ dengan $\dim(\ker(T^4)) = 8$. Jika $\dim(\ker(T^3)) = 6$, buktikan bahwa terdapat himpunan bebas linear $\{u, v\} \subseteq V$ sedemikian sehingga himpunan $B = \{v, T(v), T^2(v), u, T(u), T^2(u)\}$ merupakan himpunan bebas linear.
6. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F . Diketahui himpunan $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$ merupakan himpunan bebas linear dan $w \in V$. Buktikan bahwa

$$\dim(\text{span}\{v_1 - w, v_2 - w, \dots, v_n - w\}) \geq n - 1$$

7. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dan diketahui $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ merupakan himpunan bebas linear di V . Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in F$ dan $u = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \dots + \lambda_n b_n$. Buktikan bahwa $\{u_i \mid u_i = u + b_i \text{ untuk setiap } i = 1, 2, \dots, n\}$ himpunan tidak bebas linear jika dan hanya jika $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = -1$.
8. Diketahui V merupakan ruang hasil kali dalam atas lapangan \mathbb{R} dengan dimensi hingga dan U dan W merupakan dua subruang dari V . Jika $\dim(U) < \dim(W)$, buktikan bahwa terdapat vektor tak nol $w \in W$ yang memenuhi $w \perp u$ untuk semua vektor $u \in U$.
9. Misalkan V ruang hasil kali dalam kompleks berdimensi hingga. Misalkan $u, w \in V$ memenuhi $\langle u, w \rangle \neq 0$. Jika $M = \text{span}\{u\}$ dan $N = \text{span}\{w\}$, buktikan bahwa $V = M^\perp \oplus N$.
10. Misalkan $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ merupakan himpunan orthonormal. Buktikan bahwa

$$v \in \text{span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\}$$

jika dan hanya jika

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^m |\langle v, v_j \rangle|^2$$