

Isian singkat

1. Diberikan matriks A berukuran 2025×2025 dengan

$$\det(A - \lambda I_{2025 \times 2025}) = (\lambda - 2)^k(\lambda - 1)^{2025-k}$$

untuk suatu bilangan asli¹ k dengan $0 \leq k \leq 2025$. Jika $A^2 = A$, maka banyaknya nilai k yang mungkin adalah ...

Solusi:

Bentuk determinan yang diberikan menunjukkan bahwa nilai eigen 2 muncul sebanyak k kali, dan nilai eigen 1 muncul sebanyak $2025 - k$ kali. Sedangkan diketahui bahwa A adalah matriks idempotent, sehingga nilai eigen dari A hanya bisa $\lambda = 0$ atau $\lambda = 1$.

Dengan demikian, k harus sama dengan 0, karena jika $k > 0$, maka akan ada nilai eigen 2 yang tidak sesuai dengan sifat idempotent. Oleh karena itu, satu-satunya nilai yang mungkin untuk k adalah $\boxed{1}$ saja yaitu $k = 0$.

2. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F , dengan $\dim(V) = 7$, serta transformasi linear $T_1 : V \rightarrow V$ dan $T_2 : V \rightarrow V$, dengan $\dim(\text{Im}(T_1)) = 3$ dan $\dim(\text{Im}(T_2)) = 4$. Jika M dan m berturut-turut menyatakan nilai terbesar dan terkecil yang mungkin dari $\dim(\text{Im}(T_2 \circ T_1))$, maka nilai $M + m = \dots$

Solusi:

Misalkan $S = T_2 \circ T_1$ dan dengan menggunakan Teorema Rank-Nullity, kita tau bahwa

$$\dim(\text{Im}(S)) \leq \min\{\dim(\text{Im}(T_1)), \dim(\text{Im}(T_2))\}$$

Sehingga dengan jelas kita peroleh

$$\dim(\text{Im}(S)) \leq \min\{3, 4\} = 3 = M$$

Secara intuitif dapat kita bayangkan bahwa beberapa elemen dari $\text{Im}(T_1)$ mungkin saja terpenuhi untuk menjadi elemen dari $\ker(T_2)$, sehingga didapatkan sebuah rumus sebagai berikut

$$\dim(\ker(S)) = \dim(\ker(T_1)) + \dim(\ker(T_2) \cap \text{Im}(T_1))$$

$\dim(\text{Im}(S))$ diberikan oleh rumus

$$\dim(\text{Im}(S)) = \dim(V) - \dim(\ker(S)) = 7 - \dim(\ker(S))$$

¹Agak rancu disini karena didefinisikan bilangan asli namun nilai $k = 0$ disebutkan di kalimat setelahnya.

yang artinya $\dim(\text{Im}(S))$ minimum ketika $\dim(\ker(S))$ maksimum atau lebih lanjutnya $\dim(\ker(T_2) \cap \text{Im}(T_1))$ harus maksimum.

Disisi lain kita tahu bahwa $\dim(\ker(T_2)) = \dim(V) - \dim(\text{Im}(T_2)) = 7 - 4 = 3$. Dengan memilih $\ker(T_2) = \text{Im}(T_1)$ maka dapat kita peroleh

$$\dim(\text{Im}(S)) = 0 = m$$

Maka, nilai $M + m = 3 + 0 = \boxed{3}$.

3. Jika setiap $z \in \mathbb{C}$ yang memenuhi

$$\left| \frac{z+1}{z+4} \right| = 2$$

terletak pada suatu lingkaran, maka radius dan titik pusat lingkaran tersebut berturut-turut adalah ...

Solusi:

Misalkan $z = x + iy$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$, maka

$$\begin{aligned} \left| \frac{z+1}{z+4} \right| &= 2 \\ |z+1| &= 2|z+4| \\ |z+1|^2 &= 4|z+4|^2 \\ (x+1)^2 + y^2 &= 4((x+4)^2 + y^2) \\ x^2 + 2x + 1 + y^2 &= 4x^2 + 32x + 64 + 4y^2 \\ 3x^2 + 3y^2 + 30x + 63 &= 0 \\ x^2 + y^2 + 10x + 21 &= 0 \\ (x+5)^2 + y^2 &= 4. \end{aligned}$$

Dengan demikian, radius lingkaran tersebut adalah 2 dan titik pusatnya adalah $(-5, 0)$ atau $z = -5$.

4. Bentuk sederhana dari

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \sin^3 \left(\frac{x}{3^n} \right)$$

adalah ...

Solusi:

Perhatikan bahwa $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$, sehingga

$$\sin^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \right)^3 = \frac{1}{-8i} (e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}).$$

Jika dikembalikan ke dalam bentuk sinus, kita dapat tuliskan

$$\sin^3(\theta) = \frac{1}{4} [3\sin(\theta) - \sin(3\theta)].$$

Sehingga setiap suku pada deret tersebut dapat dituliskan sebagai

$$3^{n-1} \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{1}{4} \left[3^n \sin\left(\frac{x}{3^n}\right) - 3^{n-1} \sin\left(\frac{x}{3^{n-1}}\right) \right].$$

Perhatikan bahwa deret diatas dapat dijadikan teleskopik seperti berikut

$$\begin{aligned} n=1 &\implies \frac{1}{4} \left[3 \sin\left(\frac{x}{3}\right) - \sin(x) \right] \\ n=2 &\implies \frac{1}{4} \left[9 \sin\left(\frac{x}{9}\right) - 3 \sin\left(\frac{x}{3}\right) \right] \\ n=3 &\implies \frac{1}{4} \left[27 \sin\left(\frac{x}{27}\right) - 9 \sin\left(\frac{x}{9}\right) \right] \\ &\vdots \\ n=k &\implies \frac{1}{4} \left[3^k \sin\left(\frac{x}{3^k}\right) - 3^{k-1} \sin\left(\frac{x}{3^{k-1}}\right) \right] \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^k 3^{n-1} \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \frac{1}{4} \left[3^k \sin\left(\frac{x}{3^k}\right) - \sin(x) \right].$$

Sehingga untuk $k \rightarrow \infty$, kita peroleh

$$\lim_{k \rightarrow \infty} 3^k \sin\left(\frac{x}{3^k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} x \cdot \frac{\sin\left(\frac{x}{3^k}\right)}{\frac{x}{3^k}} = x.$$

Jadi bentuk sederhananya adalah

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^{n-1} \sin^3\left(\frac{x}{3^n}\right) = \boxed{\frac{1}{4} [x - \sin(x)]}.$$

5. Nilai

$$\sup \left\{ \inf \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{m+1}{n}\right)^2 : n \geq m \right\} : m \in \mathbb{N} \right\}$$

adalah ...

Solusi:

$$\text{Misalkan } S = \left\{ \inf \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{m+1}{n}\right)^2 : n \geq m \right\} : m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, kita akan mencari nilai infimum dari barisan himpunan

$$T_m = \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{m+1}{n}\right)^2 : n \geq m \right\}.$$

Perhatikan bahwa untuk membuat ekspresi $5(-1)^n - \left(\frac{m+1}{n}\right)^2$ menjadi kecil, kita perlu

- $5(-1)^n$ harus negatif, berarti n haruslah ganjil.
- $\left(\frac{m+1}{n}\right)^2$ harus besar, berarti n haruslah sekecil mungkin.

Selanjutnya dengan sedikit melihat pola anggota himpunan T_m untuk setiap $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} T_1 &= \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{2}{n}\right)^2 : n \geq 1 \right\} = \left\{ -9, 4, -\frac{49}{9}, \dots \right\} \implies \inf(T_1) = -9 \\ T_2 &= \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{3}{n}\right)^2 : n \geq 2 \right\} = \left\{ \frac{11}{4}, -6, \frac{71}{16}, \dots \right\} \implies \inf(T_2) = -6 \\ T_3 &= \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{4}{n}\right)^2 : n \geq 3 \right\} = \left\{ -\frac{61}{9}, 1, -\frac{121}{25}, \dots \right\} \implies \inf(T_3) = -\frac{61}{9} \\ T_4 &= \left\{ 5(-1)^n - \left(\frac{5}{n}\right)^2 : n \geq 4 \right\} = \left\{ \frac{55}{16}, -6, \frac{121}{25}, \dots \right\} \implies \inf(T_4) = -6 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Dari sedikit perhitungan diatas, kita mendapatkan sebuah pola dugaan yaitu

$$\inf(T_m) = \begin{cases} -5 - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2, & \text{untuk } m \text{ ganjil} \\ -6, & \text{untuk } m \text{ genap} \end{cases}$$

Dengan demikian, kita dapat menyatakan S sebagai

$$S = \left\{ -5 - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 : m \text{ ganjil} \right\} \cup \{-6 : m \text{ genap}\}.$$

Untuk mencari supremum dari S , kita perlu mencari nilai maksimum dari kedua himpunan tersebut. Karena untuk m genap hasilnya tetap -6, maka kita fokus pada himpunan pertama. Dengan menggunakan limit, kita dapatkan

$$\lim_{m \rightarrow \infty} -5 - \left(1 + \frac{1}{m}\right)^2 = -6.$$

Sehingga supremum dari S adalah $\boxed{-6}$.

6. Diberikan fungsi kontinu $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dengan $|f(x)| \leq x$ untuk setiap $x \in [0, 1]$. Nilai terbesar yang mungkin dari

$$\int_0^1 ((f(x))^2 - x^4 f(x)) dx$$

adalah ...

Solusi:

Diketahui sifat fungsi f dan g yang terintegralkan pada interval $[a, b]$ dan memenuhi $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Dengan demikian, kita dapat mencari nilai maksimum dari integral di soal

$$\begin{aligned} \int_0^1 ((f(x))^2 - x^4 f(x)) dx &\leq \left| \int_0^1 ((f(x))^2 - x^4 f(x)) \right| \\ &\leq \int_0^1 |(f(x))^2 - x^4 f(x)| dx \end{aligned}$$

Ketaksamaan segitiga mengatakan $|f^2(x) - x^4 f(x)| \leq |f^2(x)| + |x^4 f(x)|$ untuk setiap $x \in [0, 1]$. Demikian juga dengan integralnya

$$\begin{aligned} \int_0^1 |(f(x))^2 - x^4 f(x)| dx &\leq \int_0^1 |(f(x))^2| + \int_0^1 |x^4 f(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 x^2 dx + \int_0^1 x^5 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^6}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Jadi, nilai terbesar yang mungkin dari integral tersebut adalah $\boxed{\frac{1}{2}}$.

7. Banyaknya bilangan asli $x \in \{1, 2, 3, \dots, 2025\}$ yang bukan kelipatan 2 dan bukan kelipatan 5 adalah ...

Solusi:

Misalkan S adalah himpunan bilangan asli dari 1 sampai 2025 dan. Selanjutnya definisikan A_1 dan A_2 sebagai himpunan bilangan asli dari 1 sampai 2025 yang masing-masing merupakan kelipatan 2 dan kelipatan 5. Dengan mudah kita peroleh bahwa

$$\begin{aligned} |S| &= 2025, \\ |A_1| &= \left\lfloor \frac{2025}{2} \right\rfloor = 1012, \\ |A_2| &= \left\lfloor \frac{2025}{5} \right\rfloor = 405, \\ |A_1 \cap A_2| &= \left\lfloor \frac{2025}{10} \right\rfloor = 202. \end{aligned}$$

Menggunakan prinsip inklusi-eksklusi, maka banyaknya bilangan asli dari 1 sampai 2025 yang bukan kelipatan 2 dan bukan kelipatan 5 adalah

$$|A_1^c \cap A_2^c| = |S| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2| = 2025 - 1012 - 405 + 202 = \boxed{810}.$$

8. Tiga siswa a_1, a_2, a_3 dari Sekolah A dan 4 siswa b_1, b_2, b_3, b_4 dari Sekolah B berkumpul dalam sebuah pertemuan. Banyaknya cara menyusun ketujuh siswa tersebut dalam satu baris dengan syarat tidak terdapat satu blok yang berisikan semua siswa dari sekolah yang sama adalah ... (Contoh: $b_3b_2a_1a_3b_1b_4a_2$ diperbolehkan, tetapi $b_1b_4a_1a_2a_3b_3b_2$ dan $a_1b_4b_3b_1b_2a_3a_2$ tidak diperbolehkan)

Solusi:

Misalkan S adalah himpunan semua susunan ketujuh siswa tersebut, sehingga jelas bahwa $|S| = 7! = 5040$. Misalkan A dan B adalah himpunan susunan masing-masing siswa sekolah A yang satu blok berurutan dan siswa sekolah B yang satu blok berurutan (Contoh: $b_1b_2a_1a_2a_3b_3b_4 \in A$ dan $a_3b_1b_2b_3b_4a_1a_2 \in B$). Banyaknya anggota A, B dan $A \cap B$ dapat dihitung sebagai berikut:

$$|A| = 5! \cdot 3! = 120 \cdot 6 = 720,$$

$$|B| = 4! \cdot 4! = 24 \cdot 24 = 576,$$

$$|A \cap B| = 2 \cdot 4! \cdot 3! = 2 \cdot 24 \cdot 6 = 288.$$

Lagi-lagi dengan prinsip inklusi-eksklusi, maka banyaknya susunan ketujuh siswa tersebut yang tidak memiliki satu blok berisikan semua siswa dari sekolah yang sama adalah

$$|A^c \cap B^c| = |S| - |A| - |B| + |A \cap B| = 5040 - 720 - 576 + 288 = 4.032$$

9. Jika S_5 menyatakan grup semua fungsi bijektif pada $\{1, 2, \dots, 5\}$ terhadap operasi komposisi fungsi, maka banyaknya elemen berorder 2 pada S_5 adalah ...

Solusi:

Misalkan $g \in S_5$ adalah elemen berorder 2, maka $g^2 = e$ dimana e adalah elemen identitas pada S_5 . Perhatikan bahwa untuk setiap elemen $g \in S_5$ haruslah berbentuk maksimal dua siklus yang saling asing dengan maksimal 2 elemen persikelnya yaitu

$$g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \text{ atau } g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_3 & a_4 \end{pmatrix}$$

sehingga banyaknya elemen berorder 2 pada S_5 adalah

$$\binom{5}{2} + \frac{1}{2!} \binom{5}{2} \binom{3}{2} = 10 + 15 = \boxed{25}.$$

10. Jika z , p , dan m berturut-turut menyatakan banyaknya ideal di \mathbb{Z}_{2025} , banyaknya ideal prima di \mathbb{Z}_{2025} , dan banyaknya ideal maksimal di \mathbb{Z}_{2025} , maka nilai $z + p + m$ adalah ...

Solusi:

Perhatikan bahwa $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Dengan demikian, banyaknya ideal di \mathbb{Z}_{2025} adalah

$$z = (4+1)(2+1) = 15.$$

Dalam ring \mathbb{Z}_n untuk $n \in \mathbb{N}$, terdapat sebuah sifat penting yaitu ideal prima dan ideal maksimal adalah objek yang sama. Keduanya berkorespondensi dengan ideal-ideal yang dibangun oleh faktor-faktor prima dari n . Sehingga banyaknya ideal prima dan ideal maksimal di \mathbb{Z}_{2025} adalah

$$p = m = 2,$$

karena faktor prima dari 2025 adalah 3 dan 5. Dengan demikian, kita peroleh

$$z + p + m = 15 + 2 + 2 = \boxed{19}.$$

Uraian

1. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dengan $\dim(V) = n$. Misalkan U dan W merupakan dua ruang bagian dari V dengan $\dim(U) + \dim(W) = n$. Buktikan bahwa terdapat transformasi linear $T : V \rightarrow V$ yang memenuhi $\ker(T) = U$ dan $\text{Im}(T) = W$.

Solusi:

Misalkan $\dim(U) = k$ dan $\dim(W) = n - k$. Karena U dan W adalah subruang dari V , maka terdapat basis $B_U = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ dari U dan basis $B_W = \{w_1, w_2, \dots, w_{n-k}\}$ dari W . Disisi lain dengan perluasan basis, kita dapatkan basis $B_V = \{u_1, u_2, \dots, u_k, v_1, v_2, \dots, v_{n-k}\}$ dari V .

Selanjutnya perlu kita definisikan transformasi linear $T : V \rightarrow V$ sebagai berikut

$$T(u_i) = 0, \quad \text{untuk setiap } i \in \{1, 2, \dots, k\}$$

dan

$$T(v_j) = w_j, \quad \text{untuk setiap } j \in \{1, 2, \dots, n - k\}.$$

Selanjutnya dengan definisi diatas akan dibuktikan dua hal berikut:

- $\ker(T) = U$

Misalkan $x \in \ker(T)$, maka $T(x) = 0$. Karena B_V adalah basis dari V ,

maka x dapat dituliskan sebagai

$$x = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_ku_k + b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_{n-k}v_{n-k}$$

untuk beberapa skalar $a_i, b_j \in F$. Dengan menggunakan sifat linearitas dari T , kita peroleh

$$\begin{aligned} T(x) &= T(a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_ku_k + b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_{n-k}v_{n-k}) \\ &= a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \dots + a_kT(u_k) + b_1T(v_1) + \dots + b_{n-k}T(v_{n-k}) \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_{n-k}w_{n-k} \\ &= b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_{n-k}w_{n-k}. \end{aligned}$$

Karena $T(x) = 0$, maka $b_j = 0$ untuk setiap $j \in \{1, 2, \dots, n - k\}$ karena B_W adalah basis dari W (bebas linear). Dengan demikian, kita peroleh

$$x = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_ku_k,$$

yang berarti bahwa $x \in U$. Jadi, $\ker(T) \subseteq U$.

Sebaliknya, misalkan $y \in U$. Maka terdapat skalar $c_i \in F$ sehingga

$$y = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_ku_k.$$

sehingga diperoleh

$$T(y) = c_1T(u_1) + c_2T(u_2) + \dots + c_kT(u_k) = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_k \cdot 0 = 0.$$

Dengan demikian, $y \in \ker(T)$, sehingga $U \subseteq \ker(T)$. Jadi dapat disimpulkan $\ker(T) = U$.

- $\text{Im}(T) = W$

Misalkan $z \in \text{Im}(T)$, maka terdapat $x \in V$ sehingga $T(x) = z$. Karena B_V adalah basis dari V , maka x dapat dituliskan sebagai

$$x = a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_ku_k + b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_{n-k}v_{n-k}$$

untuk beberapa skalar $a_i, b_j \in F$. Dengan menggunakan sifat linearitas dari T , kita peroleh

$$\begin{aligned} T(x) &= T(a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_ku_k + b_1v_1 + b_2v_2 + \dots + b_{n-k}v_{n-k}) \\ &= a_1T(u_1) + a_2T(u_2) + \dots + a_kT(u_k) + b_1T(v_1) + \dots + b_{n-k}T(v_{n-k}) \\ &= 0 + 0 + \dots + 0 + b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_{n-k}w_{n-k} \\ &= b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_{n-k}w_{n-k}. \end{aligned}$$

Artinya $z = b_1w_1 + b_2w_2 + \dots + b_{n-k}w_{n-k} \in W$. Jadi, $\text{Im}(T) \subseteq W$.

Sebaliknya, misalkan $w \in W$. Maka terdapat skalar $c_j \in F$ sehingga

$$w = c_1w_1 + c_2w_2 + \dots + c_{n-k}w_{n-k}.$$

Perhatikan bahwa dapat kita definisikan $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_{n-k}v_{n-k} \in V$. Sehingga diperoleh informasi

$$\begin{aligned} T(v) &= T(c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_{n-k}v_{n-k}) \\ &= c_1T(v_1) + c_2T(v_2) + \dots + c_{n-k}T(v_{n-k}) \\ &= c_1w_1 + c_2w_2 + \dots + c_{n-k}w_{n-k} = w. \end{aligned}$$

Karena kita dapat menemukan $v \in V$ sehingga $T(v) = w$, maka $w \in \text{Im}(T)$, sehingga $W \subseteq \text{Im}(T)$. Jadi dapat disimpulkan $\text{Im}(T) = W$.

2. Diketahui A_1, A_2, \dots, A_n merupakan titik-titik sudut sebuah poligon n sisi beraturan yang termuat pada sebuah lingkaran dengan radius r dan titik pusat $O(0,0)$. Jika P merupakan titik di luar lingkaran yang terletak pada garis perpanjangan OA_1 , buktikan bahwa

$$\prod_{k=1}^n |PA_k| = |OP|^n - r^n,$$

dengan $|AB|$ menyatakan panjang ruang garis yang menghubungkan titik A dan B .

Solusi:

3. Diberikan fungsi kontinu $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ yang terdiferensial pada (a, b) dengan $f(a) = f(b)$. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli n , terdapat n bilangan real berbeda, $c_1, c_2, \dots, c_n \in (a, b)$, yang memenuhi

$$f'(c_1) + f'(c_2) + \dots + f'(c_n) = 0.$$

4. Untuk suatu bilangan bulat tak negatif n dan m , misalkan $D(m, n)$ menyatakan banyaknya solusi persamaan

$$x_1 + x_2 + \dots + x_m = n$$

dengan $x_i \in \mathbb{N}$, untuk setiap $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ dan $x_1 < x_2 < \dots < x_m$. Tunjukkan bahwa

$$D(m, n) = D(m, n-m) + D(m-1, n-m).$$

5. (a) Diketahui A, B, C merupakan subgrup dari sebuah grup G . Jika $A \subseteq B$, $A \cap C = B \cap C$, dan $AC = BC$, buktikan bahwa $A = B$.

- (b) Carilah contoh grup G dan subgroup A, B, C dari G yang memenuhi $A \cap C = B \cap C$, dan $AC = BC$ tetapi $A \neq B$.

Catatan: Jika P dan Q adalah subgroup dari $(G, *)$, maka PQ didefinisikan sebagai

$$PQ = \{p * q : p \in P, q \in Q\}.$$