Persiapan Seleksi Wilayah

Latihan Soal

1. Diberikan pemetaan $f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \to M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dengan $f(A) = A^T$ untuk setiap $A \in M_{n\times n}$.
   (a) Buktikan bahwa f merupakan transformasi linear.
   (b) Tentukan semua nilai eigen dari f.
   (c) Apakah f dapat didiagonalkan?

2. Misalkan $A = [a_{ij}] \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ yang memenuhi

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-3\\-3\end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}, \qquad A\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}$$

   Tentukan $\sum_{i,j} a_{ij}$ (jumlah semua entri-entri dari A).

3. Diberikan matriks $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Matriks A dikatakan *matriks kubik* jika terdapat matriks $B \in M_{n\times n}$ yang memenuhi $A = B^3$.
   (a) Buktikan bahwa jika A matriks simetri, maka A merupakan *matriks kubik.*
   (b) Jika $A \in M_{n\times n}$ yang memenuhi $A^2 \neq 0$ tetapi $A^3 = 0$, buktikan bahwa A bukan *matriks kubik.*

4. Diberikan ruang vektor V atas lapagan F dan diketahui U dan W adalah dua subruang dari V. Misalkan $\overline{U}$ dan $\overline{W}$ adalah dua subruang di V yang memenuhi $\overline{U} \oplus (U \cap W) = U$ dan $\overline{W} \oplus (U \cap W) = W$. Apakah selalu berlaku $U + W = \overline{U} \oplus \overline{W} \oplus U \cap W$? Jelaskan jawaban saudara.

5. Misalkan u dan v merupakan dua vektor eigen berbeda dari A sedemikian sehingga $u + v$ juga merupakan vektor eigen dari A. Apakah $u - v$ selalu merupakan vektor eigen dari A? Jelaskan jawaban Saudara.

6. Diberikan matriks A dan B berukuran $n \times n$. Matriks A dan B dikatakan *simultaneously diagonalizable* jika terdapat matriks invertible P sehingga $P^{-1}AP$ dan $P^{-1}BP$ keduanya merupakan matriks diagonal.
   (a) Jika A dan B *simultaneously diagonalizable*, buktikan bahwa $AB = BA$.
   (b) Jika $AB = BA$ dan A mempunyai n nilai eigen yang berbeda, buktikan bahwa A dan B *simultaneously diagonalizable.*

7. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dan diketahui $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ merupakan himpunan bebas linear di V. Misalkan $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in F$ dan $u = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n$. Buktikan bahwa $\{u_i \mid u_i = u + b_i \text{ untuk setiap } i = 1, 2, \ldots, n\}$ himpunan tidak bebas linear jika dan hanya jika $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = -1$.

8. Diketahui U, V, W masing-masing merupakan ruang vektor atas lapangan F. Misalkan $f \in Lin_F(U, V)$ dan $g \in Lin_{V,W}$. Buktikan bahwa

$$\text{Range}(g \circ f) = \text{Range}(g) \iff \text{Null}(g) = \text{Null}(g) + \text{Range}(f) = V.$$

9. Diketahui V ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan $\mathbb{R}$. Jika $T \in \text{Lin}(V)$ dengan $\text{Range}(T^m) = \text{Range}(T^{m+1})$ untuk suatu bilangan bulat non negtaif m. Buktikan bahwa $\text{Range}(T^k) = \text{Range}(T^m)$ untuk setiap bilangan non-negatif k dengan $k > m$.

10. Diketahui V ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan $\mathbb{R}$ dan
$$T \in L(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ transformasi linear}\}.$$
Jika $ST = TS$ untuk setiap traformasi linear $S \in L(V)$, buktikan bahwa T merupakan merupakan kelipatan dari pemetaan identitas.

11. Diketahui V ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan $\mathbb{R}$ dan $S, T \in L(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ transformasi linear}\}$. Buktikan bahwa ST invertibel jika dan hanya jika S dan T keduanya invertibel.

12. Diketahui V ruang vektor berdimensi hingga atas lapangan $\mathbb{R}$ dan $S, T \in L(V) = \{f : V \to V \mid f \text{ transformasi linear}\}$. Buktikan bahwa ST dan TS mempunyai nilai eigen yang sama.

13. Diketahui V_1, V_2, V_3 masing masing merupakan subruang dari V. Buktikan bahwa $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ subruang dari V jika dan hanya jika terdapat $i \in \{1, 2, 3\}$ yang memenuhi $V_i \supseteq V_j$ untuk setiap $j \in \{1, 2, 3\}$.