Persiapan Seleksi Universitas

Latihan Soal

1. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ x & 0 & 1 & x+1 \\ 1 & x-1 & 1 & x+1 \\ x & 0 & x & x \end{bmatrix}$ dengan $x \in \mathbb{R}$. Tentukan semua nilai x sehingga $\text{rank}(A) = 3$.

2. Diketahui $A \in M_{5\times 5}(\mathbb{R})$ dengan $\text{rank}(A^2) < 5$. Tentukan semua nilai yang mungkin untuk $\text{rank}(A)$.

3. Diberikan matriks $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ dan transformasi linear $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dengan $T(B) = AB - BA$ untuk setiap $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Misalkan $\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ merupakan basis standar untuk $M_{2\times 2}(\mathbb{R})$. Jumlah semua eigen dari dari matriks $[T]_{\mathcal{B}}$ adalah ...

4. Diketahui $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

   (a) Tentukan semua matriks A yang memenuhi $AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) Tentukan semua matriks A yang memenuhi $AA^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (c) Tentukan semua matriks A yang memenuhi $AA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

   (d) Tentukan semua matriks A yang memenuhi $AA^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

5. Diketahui $P \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dengan $P^2 = P$. Buktikan bahwa P dapat didiagonalkan.

6. Diberikan dua matriks $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ yang memenuhi $AB = BA$. Diketahui A mempunyai n nilai eigen yang berbeda. Buktikan bahwa B dan AB keduanya dapat didiagonalkan.

7. Diberikan dua matriks $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ yang memenuhi $AB = BA$. Diketahui A dapat didiagonalkan. Buktikan bahwa B dan AB keduanya dapat didiagonalkan.

8. Diberikan matriks simetri definit positif $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ dan $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ yang memenuhi BB^T merupakan matriks definit positif. Buktikan bahwa matriks $B^T(BA^{-1}B^T)^{-1}B$ merupakan matriks definit positif.

9. Diberikan matriks $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ dan $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$. Diketahui $I_m - AB$ invertibel. Buktikan bahwa $I_n - BA$ invertibel.