1

Supremum, Infimum, Barisan

Berbicara bilangan real berarti berbicara sistem bilangan real termasuk kedalamnya operasi pada bilangan real serta sistem urutan pada bilangan real. Hal menarik pada bilangan real salah tiganya adalah supremum, infimum serta limit. Ketiga konsep ini banyak melahirkan sifat-sifat menarik pada bilangan real. Pertama-tama kita pelajari konsep infimum serta supremum pada suatu himpunan bilangan real.

1.1 Supremum dan Infimum

Berbicara mengenai himpunan tidak terlepas dari karakteristik himpunan tersebut. Salah duanya adalah infimum dan supremum. Sebelum itu, berikut diberikan definisi himpunan terbatas.

Definisi Himpunan Terbatas

Diberikan himpunan $E \subseteq \mathbb{R}$. Himpunan E dikatakan **terbatas di bawah** apabila terdapat bilangan A dengan sifat untuk setiap $x \in E$ berlaku $A \leq x$. Himpunan E dikatakan **terbatas di atas** apabila terdapat bilangan B dengan sifat untuk setiap $x \in E$ berlaku $x \leq B$. Himpunan E dikatakan **terbatas** apabila terdapat bilangan A, B dengan sifat untuk setiap $x \in E$ berlaku $A \leq x \leq B$ (terbatas di bawah dan di atas).

Selanjutnya, bilangan A dan B yang memenuhi kondisi diatas berturut-turut disebut **batas bawah** dan **batas atas** himpunan E. Apabila himpunan E tidak memiliki batas bawah atau batas atas, maka himpunan E dikatakan **tidak terbatas**. Perhatikan bahwa jika A batas bawah maka semua anggota interval $(-\infty, A]$ merupakan batas bawah dan jika B batas atas maka semua anggota interval $[B, \infty)$ merupakan batas atas himpunan tersebut.

Definisi Infimum dan Supremum

Diberikan himpunan E tak kosong.

1. Diketahui E memiliki batas bawah. Bilangan a disebut **infimum** dari E, ditulis $a = \inf(E)$ (atau $\inf E$), apabila
   - untuk setiap $x \in E$ berlaku $a \leq x$.

- untuk setiap t batas bawah dari E berlaku $t \leq a$.

2. Diketahui E memiliki batas atas. Bilangan a disebut **supremum** dari E, ditulis $b = \sup(E)$ (atau $\sup E$), apabila
    - untuk setiap $x \in E$ berlaku $x \leq b$.
    - untuk setiap s batas atas dari E berlaku $b \leq s$.

Berdasarkan definisi diatas, infimum merupakan batas bawah terbesar dan supremum merupakan batas atas terkecil. Perlu diperhatikan bahwa supremum tidak selalu sama dengan maksimum (maksimum haruslah anggota dari himpunannya) serta infimum tidak selalu sama dengan minimum (minimum haruslah anggota dari himpunannya). Sebagai contoh pada himpunan $(0, 1)$, himpunan tersebut tidak mempunyai maksimum dan minimum namun punya supremum yaitu 1 dan infimum yaitu 0. Beberapa sifat berkaitan dengan supremum dan infimum diberikan sebagai berikut:

Sifat Supremum dan Infimum

- Diberikan E himpunan terbatas.
    1. $a = \inf(E) \;\Leftrightarrow\; a$ batas bawah dari E dan untuk $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ x_\epsilon \in E$ dengan sifat $a \leq x_\epsilon < a + \epsilon$.
    2. $b = \sup(E) \;\Leftrightarrow\; b$ batas atas dari E dan untuk $\forall\ \epsilon > 0$, $\exists\ x_\epsilon \in E$ dengan sifat $b - \epsilon \leq x_\epsilon < b$.
- Jika himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ mempunyai batas atas, maka supremum dari A ada.
- (Sifat Inverval Bersarang (Nested Interval)) Diberikan barisan $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ dengan sifat $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. Terdapat bilangan x yang memenuhi $x \in I_n$ untuk setiap bilangan asli n.

Tentu saja jika E tidak terbatas di atas maka dikatakan supremum E tidak ada atau pada sistem bilangan real tambahan (extended real number system) dikatakan $\sup E = \infty$ begitu pula jika E tidak terbatas di bawah dikatakan $\inf E = -\infty$.

Contoh 1. Diberikan $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan terbatas. Didefinisikan

$$A + B = \{z = x + y \;:\; x \in A,\ y \in B\} \quad \text{dan} \quad A - B = \{z = x - y \;:\; x \in A,\ y \in B\}.$$

Tunjukkan bahwa

(a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,

(b) $\sup(A - B) = \sup A - \inf B$.

Penyelesaian:

(a) Dimisalkan $A_1 = \sup A$ dan $B_1 = \sup B$. Diambil sebarang $\epsilon > 0$. Tentu saja karena untuk setiap $x \in A$ dan $y \in B$ berlaku $x + y \leq A_1 + B_1$ maka $A_1 + B_1$ adalah batas atas dari himpunan $A + B$. Terdapat $x_\epsilon \in A$ dan $y_\epsilon \in B$ sehingga

$$A_1 - \epsilon/2 \leq x_\epsilon < A_1 \quad \text{dan} \quad B_1 - \epsilon/2 \leq y_\epsilon < B_1.$$

Akibatnya,

$$A_1 + B_1 - \epsilon \leq x_\epsilon + y_\epsilon < A_1 + B_1.$$

Karena berlaku untuk setiap $\epsilon > 0$, maka $\sup(A + B) = A_1 + B_1$.

(b) Perhatikan bahwa $A - B = A + (-B)$. Karena

$$\sup(-B) = -\inf B \quad \text{(Bukti diserahkan sebagai latihan)}$$

maka terbukti pernytaaan (b).

Berikut beberapa tips berkaitan dengan penyelesaian masalah yang menyangkut supremum dan infimum.

- Jika himpunan E merupakan interval terbatas contohnya $E = [a, b]$ maka infimum dan supremum E merupakan ujung-ujung interval $[a, b]$ ($\inf E = a,\ \sup E = b$).
- Pada beberapa kasus dapat dimanfaatkan ketaksamaan $AM - GM - HM$.
- Pada beberapa kasus dapat memanfaatkan sifat turunan fungsi yaitu jika fungsi f terturunkan (diferensiabel) pada interval tertutup $[c, d]$ maka pada titik puncaknya (misalkan x) berlaku $f'(x) = 0$. Namun titik puncak tidak selalu merupakan titik maksimum atau minimum, perlu dibandingkan dengan nilai pada batasnya yaitu $f(a)$ dan $f(b)$. Untuk interval lainnya (misalnya interval tak terbatas) perlu pemahaman lebih lanjut terhadap sifat ini.
- Pada beberapa kasus dapat memanfaatkan sifat limit barisan yang akan dipelajari selanjutnya.

LATIHAN: Supremum dan Infimum

1. (**Sifat Archimedian**) Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan real ϵ, terdapat bilangan asli n sehingga $\epsilon < n$.
2. Diberikan himpunan E. Tunjukkan bahwa E terbatas jika dan hanya jika terdapat bilangan $M > 0$ dengan sifat untuk setiap $x \in E$ berlaku $|x| \leq M$.
3. Misalkan $A \subset \mathbb{R}$ tak kosong. Didefinisikan $-A = \{x \ : \ -x \in A\}$. Tunjukkan bahwa

$$\sup(A) = -\inf(A) \qquad \text{dan} \qquad \inf(A) = -\sup(A).$$

4. Tentukan infimum dan supremum dari himpunan berikut (jika ada) dan buktikan dengan definisi:

(a) $E = \left\{\dfrac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

(b) $E = \left\{\dfrac{n}{n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

(c) $E = \left\{x^2 - 2x - 1 \ : \ x \in [0, 2]\right\}$.

(d) $E = \left\{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m} \ : \ n, m \in \mathbb{N}]\right\}$.

(e) $E = \left\{(-1)^n - \dfrac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

(f) $E = \left\{\dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{(-1)^m}{m} : n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

(g) $E = \left\{\dfrac{m}{n} + \dfrac{4n}{m} \ : \ n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

(h) $E = \left\{\dfrac{mn}{4m^2 + n^2} \ : \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(i) $E = \left\{\dfrac{m}{|m| + n} \ : \ m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(j) $E = \left\{\dfrac{mn}{1 + m + n} \ : \ n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

(k) $E = \left\{\dfrac{m - n}{m + n} \ : \ n, m \in \mathbb{N}\right\}$.

(l) $E = \left\{\left(\dfrac{n+1}{2n}\right)\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

5. Diberikan himpunan bilangan real tak kosong A dan B. Tunjukkan bahwa

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

dan
$$\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

6. Misalkan S dan T merupakan himpunan sehingga $S \subseteq T$. Tunjukkan bahwa
$$\inf T \leq \inf S \leq \sup S \leq \sup T.$$
7. Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan $f, g : A \to \mathbb{R}$ sedemikian hingga $|f(x)| \leq M_1$ dan $|g(x)| \leq M_2$ untuk setiap $x \in A$. Tunjukkan bahwa
   (a) $\sup\{f(x) + g(x)|x \in A\} \leq \sup\{f(x)|x \in A\} + \sup\{g(x)|x \in A\}$
   (b) $\inf\{f(x) + g(x)|x \in A\} \geq \inf\{f(x)|x \in A\} + \inf\{g(x)|x \in A\}$
   (c) $\sup\{f(x) - g(x)|x \in A\} \leq \sup\{f(x)|x \in A\} - \inf\{g(x)|x \in A\}$
8. Tentukan supremum dan infimum dari himpunan berikut.
   - $S_1 = \{|a - b| \mid a \in A, b \in B\}$
   - $S_2 = \{a - b \mid a \in A, b \in B\}$
9. Tentukan supremum dan infimum dari himpunan
$$B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| - |x - 2| < 1\},$$
$$A = \{\sqrt{n^2 + 1} - n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$
10. Diberikan barisan $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{[a_n, b_n]\}_{n\in\mathbb{N}}$ dengan sifat $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. Tunjukkan bahwa jika berlaku $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, maka x yang memenuhi "$x \in I_n$ untuk setiap bilangan asli n" adalah tunggal.
11. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan real x yang memenuhi $x^2 = 5$.
12. Diberikan bilangan real x dan y berbeda dengan $x < y$. Tunjukkan bahwa terdapat bilangan rasional r yang memenuhi $x < r < y$.
13. Diberikan bilangan irasional positif ω. Dimisalkan
$$A = \{m + n\omega \ : \ m + n\omega > 0 \text{ dan } m.n \in \mathbb{Z}\}.$$
Tunjukkan bahwa $\inf A = 0$.

1.2 Barisan

Barisan didefinisikan sebagai suatu fungsi dari domain $\mathbb{N}$ ke suatu himpunan A. Nilai-nilai dari fungsi tersebut dinamakan suku-suku dari barisan. Barisan biasanya dinotasikan dengan
$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_n\}_{n\geq 1} = \{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} = (a_n)_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, \ldots\} \quad \text{atau} \quad \{a_n\}, (a_n).$$
Barisan dengan suku-suku bernilai real biasanya disebut **barisan bilangan real**. Analog untuk barisan bilangan bulat, barisan bilangan asli, barisan fungsi dan lain-lain.

Sebarang barisan $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dengan $n_k < n_{k+1}$ dinamakan **subbarisan** dari $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Definisi Barisan Konvergen

Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di $\mathbb{R}$ dikatakan **konvergen** ke $x \in \mathbb{R}$, ditulis $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli n_0 dengan sifat untuk setiap $n \geq n_0$ berlaku $|x_n - x| < \epsilon$.

Lebih lanjut, x disebut **nilai limit** dari barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Perhatikan bahwa jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ memiliki limit, maka nilainya tunggal (kenapa ?).

Definisi Barisan Cauchy

Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di $\mathbb{R}$ dikatakan Cauchy, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli n_0 dengan sifat untuk setiap $n, m \geq n_0$ berlaku $|x_n - x_m| < \epsilon$.

Definisi Barisan Kontraktif

Barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ di $\mathbb{R}$ dikatakan **kontraktif**, jika terdapat $C \in (0, 1)$ dengan sifat untuk setiap bilangan asli n berlaku

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq C|x_{n+1} - x_n|.$$

Barisan konvergen, barisan Cauchy serta barisan kontraktif memiliki hubungan satu dengan lainnya. Beberapa sifat berkaitan dengan barisan diberikan sebagai berikut:

Sifat Barisan

- Setiap barisan real konvergen merupakan barisan terbatas. (Tunjukkan !)
- (**Teorema Apit**) Diberikan barisan bilangan real $\{x_n\}_{n\geq 1}$, $\{y_n\}_{n\geq 1}$ dan $\{z_n\}_{n\geq 1}$ dengan sifat
$$x_n \leq y_n \leq z_n$$
untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n = A$, maka $\{y_n\}_{n\geq 1}$ konvergen dan
$$\lim_{n\to\infty} y_n = A.$$
- Diberikan barisan bilangan real $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dengan sifat $\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = L$ ada. Jika $L < 1$, maka barisan $\{x_n\}_{n\geq 1}$ konvergen ke 0. (Tunjukkan !)
- Setiap barisan monoton dan terbatas merupakan barisan konvergen. (Tunjukkan !)
- Barisan $\{x_n\}_{n\geq 1}$ dengan
$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n,$$
konvergen. Lebih lanjut, dinotasikan
$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$
- Jika barisan $\{x_n\}_{n\geq 1}$ konvergen, maka setiap subbarisan dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke nilai limit yang sama. (Tunjukkan !)

- Diberikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tidak terbatas atau terdapat dua subbarisan dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang konvergen ke nilai limit yang berbeda, maka barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tidak konvergen. (Tunjukkan !)
- (**Subbarisan Monoton**) Setiap barisan real memiliki subbarisan yang monoton.
- (**Teorema Boltzano-Weierstrass**) Setiap barisan real terbatas memiliki subbarisan yang konvergen.
- Diberikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$. Jika terdapat x yang memenuhi sifat setiap subbarisan dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yang konvergen memiliki nilai limit x, maka barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke x.
- Barisan real $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen $\Leftrightarrow$ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan Cauchy. (**Penting !**)
- Setiap barisan real kontraktif merupakan barisan Cauchy.

Sifat-sifat diatas merupakan sifat dasar yang diperlukan untuk mengetahui karakteristik suatu barisan (apakah konvergen atau tidak). Seringkali jika kita dihadapkan pada suatu barisan, untuk menentukan apakah barisan konvergen atau tidak, terdapat beberapa strategi yang bisa digunakan.

(a) Pertama coba tebak limit barisan tersebut jika memungkinkan, kemudian tunjukkan bahwa nilai tersebut memang limit barisan dengan definisi limit barisan. Sebagai contoh barisan $\{1/n\}$ mudah dilihat limitnya adalah 0 saat n menuju takhingga. Kemudian dengan definisi limit barisan tunjukkan bahwa 0 memang benar limit barisan tersebut.

(b) Jika limit barisan tersebut sulit untuk ditebak, coba cek apakah barisan tersebut merupakan barisan Cauchy. Jika iya maka barisan tersebut konvergen. Namun, hanya dengan mengetahui bahwa barisan tersebut konvergen tidak menjamin bahwa barisan tersebut dapat diketahui limitnya langsung. Perlu latihan dan trik-trik tertentu pada setiap tipe barisan.

(c) Jika barisan berbentuk formula rekursi (suku selanjutnya berkaitan dengan beberapa suku sebelumnya, seperti $x_{n+1} = x_n + 1$) kita bisa mengandaikan barisan tersebut konvergen dan menebak nilai limitnya dengan melimitkan kedua ruas persamaan sehingga diperoleh persamaan dalam x dengan x merupakan nilai limit barisan tersebut. Namun, cara ini kadang tidak bekerja sehingga harus mencari jalan lainnya.

(d) Apabila ketiga cara diatas tidak berhasil, maka cara lainnya adalah melihat pola subbarisan ganjil dan subbarisan genap. Jika keduanya konvergen ke nilai yang sama maka barisan awal konvergen ke nilai tersebut.

Contoh 2. Tunjukkan bahwa barisan $\{a_n\}$ yang diberikan secara rekursif oleh

$$a_1 = \frac{3}{2}, \quad a_n = \sqrt{3a_{n-1} - 2} \text{ untuk } n \geq 2$$

konvergen dan tentukan nilai limitnya.

Penyelesaian:

Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa barisan $\{a_n\}$ naik monoton. Jelas bahwa untuk setiap n, $a_n > 0$. Akan ditunjukkan $a_{n+1} - a_n > 0$ untuk setiap n. Kita akan membuktikan dengan induksi. Karena

$$a_2 = \sqrt{3 \cdot \frac{3}{2} - 2} = \sqrt{10}/2 > a_1$$

maka untuk $n = 1$ benar bahwa $a_2 - a_1 > 0$. Asumsikan untuk $n = k$ benar bahwa $a_{k+1} - a_k > 0$. Selanjutnya, karena

$$a_{k+2}^2 - a_{k+1}^2 = 3(a_{k+1} - a_k)$$

maka

$$a_{k+2} - a_{k+1} = \frac{3(a_{k+1} - a_k)}{a_{k+2} + a_{k+1}} > 0.$$

Jadi terbukti bahwa barisan $\{a_n\}$ naik monoton. Selanjutnya, ditunjukkan barisan $\{a_n\}$ terbatas. Perhatikan bahwa untuk setiap $n \geq 2$, $a_n + a_{n-1} \geq a_2 + a_1 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{10}}{2} > 3$. Akibatnya,

$$a_{n+2} - a_{n+1} = \frac{3(a_{n+1} - a_n)}{a_{n+2} + a_{n+1}} < p(a_{n+1} - a_n)$$

dengan $p = 3/(a_2 + a_1) < 1$. Lebih lanjut, untuk setiap $n \geq 1$ berlaku

$$a_{n+1} - a_n < p^{n-1}(a_2 - a_1) < p^{n-1}.$$

Sehingga

$$a_{n+1} < a_n + p^{n-1} < a_{n-1} + p^{n-2} + p^{n-1} < a_2 + p + p^2 + \cdots + p^{n-1} < a_2 + \frac{1}{1-p}.$$

Jadi terbukti bahwa barisan $\{a_n\}$ terbatas. Dengan demikian, barisan $\{a_n\}$ konvergen, katakan ke a. Selanjutnya akan ditentukan nilai a. Dengan melimitkan kedua ruas dari persamaan $a_n^2 = 3a_{n-1} - 2$ untuk n menuju tak hingga diperoleh

$$a^2 = 3a - 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad a^2 - 3a + 2 = 0.$$

Persamaan diatas mempunyai solusi $a = 2$ atau $a = 1$. Karena $a_1 > 1$ maka haruslah $a = 2$.

LATIHAN: Barisan

1. Diberikan barisan $\{a_n\}$ dengan $a_1 = \frac{1}{3}, a_{2n} = \frac{1}{3}a_{2n-1}$ dan $a_{2n+1} = \frac{1}{3} + a_{2n},\ n = 1, 2, 3\ldots.$ Jika $A = \inf\{a_n\}, B = \sup\{a_n\}$, maka $B - A = \ldots.$
2. Tunjukkan bahwa jika limit suatu barisan ada maka nilainya tunggal.
3. Tunjukkan bahwa jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan positif dan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0$
4. Diberikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \frac{1}{4}(2x_n + 3)$. Tunjukkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen dan tentukan nilai limitnya.
5. Diberikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}$. Tunjukkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen dan tentukan nilai limitnya.
6. Diberikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $x_1 > 1$ dan $x_{n+1} = 2 - \frac{1}{x_n}$. Tunjukkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen dan tentukan nilai limitnya.
7. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.
8. Tunjukkan bahwa jika $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ barisan dengan $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, maka $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{\sqrt{n}x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen
9. Diberikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $x_1 = 2$ dan $x_{n+1} = 2 + \frac{1}{x_n}$. Tunjukkan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen dan tentukan nilai limitnya.
10. Tunjukkan bahwa jika subbarisan indeks genap dan subbarisan indeks ganjil dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke nilai limit yang sama, maka barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen.

11. Tunjukkan bahwa jika barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dan $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergen, maka barisan $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $z_n = \max(x_n, y_n)$ konvergen.
12. Diberikan barisan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dengan $x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n}$. Tentukan nilai limit dari $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.
13. Diberikan $\alpha \in (0, 2)$. Tunjukkan barisan $\{a_n\}_{n\geq 1}$ dengan

$$a_{n+1} = \alpha a_n + (1 - \alpha)a_{n-1}$$

untuk $n \geq 1$ dan $a_0 = 1, a_1 = 2$ konvergen. Tentukan nilai limitnya!

14. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!}$.
15. Diberikan barisan bilangan real (a_n) yang didefinisikan dengan $a_1 = \frac{3}{4}$ dan $a_{n+1} = 1 - a_n + a_n^2$. Apakah (a_n) konvergen? Jika ya, berapakah nilai limitnya?
16. Jika barisan bilangan real (x_n) konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ maka untuk $n \to \infty$

$$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n}$$

konvergen ke ...

17. Tentukan nilai dari $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{2} - 1)$.
18. Tunjukkan bahwa jika $0 < b < 1$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$.
19. Tunjukkan bahwa jika $c > 0$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c} = 1$.
20. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
21. Misalkan $a_n = \sin n$ untuk sebarang $n \geq 1$. Tunjukkan barisan $\{a_n\}$ divergen!