Persiapan Seleksi Wilayah

1. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dan $S, T \in \mathcal{L}(V, V)$ dengan $\operatorname{Im}(S) \subseteq \ker(T)$. Buktikan bahwa $(ST)^2 = 0$.
2. Diberikan ruang vektor berdimensi V hingga atas lapangan F. Misalkan $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Buktikan bahwa terdapat subruang U di V yang memenuhi $U \cap \ker(T) = \{\mathbf{0}_V\}$ dan $\operatorname{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}$.
3. Diberikan dua ruang vektor berdimensi hingga V dan W atas lapangan F. Misalkan U subruang di V. Buktikan bahwa terdapat $T \in \mathcal{L}(V, W)$ dengan $\ker(T) = U$ jika dan hanya jika $\dim(U) \geq \dim(V) - \dim(W)$.
4. Diberikan ruang vektor berdimensi hingga V atas lapangan F dan $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Buktikan bahwa T surjektif jika dan hanya jika terdapat $S \in \mathcal{L}(W, V)$ yang memenuhi TS merupakan pemetaan identitas di W.
5. Diberikan dua ruang vektor berdimensi hingga V dan W atas lapangan Fdan $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Buktikan bahwa T injektif jika dan hanya jika terdapat $S \in \mathcal{L}(W, V)$ yang memenuhi ST merupakan pemetaan identitas di V.
6. Diberikan ruang vektor berdimensi hingga V atas lapangan F dan $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Buktikan bahwa ST bijektif jika dan hanya jika S dan T keduanya bijektif.
7. Diberikan ruang vektor berdimensi hingga V atas lapangan F dan $S, T \in \mathcal{L}(V)$. Buktikan bahwa $ST = I$ jika dan hanya jika $TS = I$.
8. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dengan $\dim(V) = n \geq 1$. Misalkan $T, S \in \mathcal{L}(V)$ dengan $ST = 0$. Buktikan bahwa terdapat vektor tak nol $v \in V$ yang memenuhi $TS(v) = 0$.
9. Diberikan dua ruang vektor berdimensi hingga U dan V atas lapangan F. Misalkan $S \in \mathcal{L}(V, W)$ dan $T \in \mathcal{L}(U, V)$. Buktikan bahwa $\dim(\ker(ST)) \leq \dim(\ker(S)) + \dim(\ker(T))$.
10. Diberikan ruang vektor berdimensi hingga V atas lapangan F dan $T \in \mathcal{L}(V)$. Buktikan bahwa T merupakan kelipatan dari pemetaan identitas jika dan hanya jika $ST = TS$ untuk setiap $S \in \mathcal{L}(V)$.