Integral Riemann

Hari Jumat, 2 Juni 2023

0.1 Integral Riemann

Diberikan $P = \{a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n = b\}$ partisi pada $[a, b]$. Didefinisikan

$$\|P\| = \max\{|x_i - x_{i-1}| : i = 1, 2, \ldots, n\}$$

dan untuk setiap fungsi f pada $[a, b]$, didefinisikan jumlahan Riemann:

$$S(f, P) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

dengan $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$.

Definisi 1.1

Fungsi $f : [a, b] \to \infty$ dikatakan terintegral Riemann pada $[a, b]$, jika terdapat bilangan L dengan sifat

$$\lim_{\|P\| \to 0} S(f, P) = L.$$

Lebih lanjut, bilangan L tersebut dinotasikan dengan

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Sifat 1.2

Beberapa sifat berkaitan dengan integral diberikan sebagai berikut:

- Diberikan f, g fungsi terintegral Riemann pada $[a, b]$.
  1. jika $c \in \mathbb{R}$, maka cf terintegral Riemann pada $[a, b]$ dengan
  $$\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx.$$
  2. fungsi $f + g$ terintegral Riemann pada $[a, b]$ dengan
  $$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
  3. jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a, b]$, maka
  $$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$
- Jika f terintegral Riemann pada $[a, b]$, maka
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$
- Jika f kontinu pada $[a, b]$, maka f terintegral Riemann pada $[a, b]$.

- (Teorema Fundamental Kalkulus) Misalkan E himpunan berhingga pada $[a,b]$. Jika $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ fungsi dengan
  1. F kontinu pada $[a,b]$,
  2. $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b] \backslash E$,
  3. f terintegral Riemann,

  maka
  $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$
- (Teorema Fundamental Kalkulus) Jika f fungsi terintegral Riemann pada $[a,b]$ dan f kontinu di $c \in [a,b]$, maka fungsi F dengan
  $$F(t) = \int_a^t f(x)dx$$
  (dikenal sebagai primitif dari f) memiliki turunan di c dengan $F'(c) = f(c)$.
- Jika f kontinu pada $[a,b]$, maka primitif F terdiferensial pada $[a,b]$ dengan $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$.
- (Ketaksamaan Holder) Diberikan bilangan real positif p, q dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Jika f, g fungsi terintegral Riemann pada $[a,b]$, maka berlaku
  $$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Problems :

1. Jika f terintegral Riemann pada $[a,b]$ dan $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka
   $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M(b-a).$$
2. Diberikan $0 < a < b$. Tunjukkan bahwa
   $$\int_a^b (x^2+1)e^{-x^2} dx \geq e^{-a^2} - e^{-b^2}.$$
3. Diketahui f kontinu pada $[a,b]$ dan $f(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$ dan $\int_a^b f(x)dx = 0$. Tunjukkan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$.
4. Jika f, g kontinu pada $[a,b]$ dan $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$, tunjukkan bahwa terdapat $c \in [a,b]$ dengan sifat $f(c) = g(c)$.
5. Jika f kontinu pada $[a,b]$, tunjukkan bahwa terdapat $c \in [a,b]$ dengan sifat $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.
6. Jika f, g kontinu pada $[a,b]$ dan $g(x) > 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, tunjukkan bahwa terdapat $c \in [a,b]$ dengan sifat $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$.

7. Jika f kontinu pada $[-a,a]$, tunjukkan bahwa
$$\int_{-a}^{a} f(x^2)dx = 2\int_0^a f(x^2)dx.$$

8. Jika f kontinu pada $[-1,1]$, tunjukkan bahwa
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)dx.$$

9. Tentukan nilai dari
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x}dx.$$

10. Tentukan nilai dari
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

11. Tentukan nilai dari
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

12. Tentukan nilai dari
$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+4}+\ldots+\frac{1}{2n^2}\right).$$

13. Jika f kontinu pada $[0,1]$ dan $\displaystyle\int_0^t f(x)dx = \int_t^1 f(x)dx$ untuk setiap $t \in [0,1]$, maka tunjukkan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap x.

14. Jika f kontinu pada $\mathbb{R}$ dan $c > 0$, tunjukkan bahwa fungsi g dengan
$$g(x) = \int_{x-c}^{x+c} f(t)dt$$
terdiferensial pada $\mathbb{R}$. Tentukan $g'(x)$.

15. Diberikan f fungsi kontinu pada $[0,1]$. Tentukan nilai dari
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx.$$

16. Tentukan nilai integral berikut
$$\int_0^1 (1+2x^2)e^{x^2}dx.$$

17. Jika f kontinu pada $[a,b]$ dan f bernilai nonnegatif pada $[a,b]$, tunjukkan bahwa
$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f^n\right)^{\frac{1}{n}} = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$$