Persiapan Seleksi Nasional

Latihan Soal

1. Diketahui V_1, V_2, V_3 masing masing merupakan subruang dari V. Buktikan bahwa $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ subruang dari V jika dan hanya jika terdapat $i \in \{1, 2, 3\}$ yang memenuhi $V_i \supseteq V_j$ untuk setiap $j \in \{1, 2, 3\}$.

2. Misalkan V merupakan ruang hasil kali dalam berdimensi hingga atas lapangan $\mathbb{R}$ dan himpunan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan himpunan orthonormal di V. Jika untuk setiap $v \in V$ berlaku
$$\|v\|^2 = \langle v, v_1\rangle^2 + \langle v, v_2\rangle^2 + \ldots + \langle v, v_n\rangle^2$$
apakah himpunan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ merupakan basis untuk V? Jelaskan jawaban Saudara.

3. Diberikan dua ruang vektor V dan W atas lapangan F dan transformasi linear $T : V \longrightarrow W$. Jika V berdimensi hingga, buktikan bahwa terdapat subruang U di V yang memenuhi $U \cap \ker(T) = \{0_V\}$ dan $\mathrm{Im}(T) = \{T(u) \mid u \in U\}$.

4. Diberikan V ruang vertor berdimensi hingga atas lapangan F dan transformasi linear $T : V \longrightarrow V$. Jika T dapat didiagonalkan, buktikan bahwa $V = \ker(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

5. Diberikan dua ruang vektor V dan W atas lapangan F dan transformasi linear $T : V \longrightarrow W$. Jika W berdimensi hingga buktikan bahwa T injektif jika dan hanya jika terdapat transformasi linear $S : W \longrightarrow V$ yang memenuhi $S \circ T = I_V$ (pemetaan identitas pada V).

6. Diberikan dua ruang vektor V dan W atas lapangan F dan transformasi linear $T : V \longrightarrow W$. Jika W berdimensi hingga buktikan bahwa T surjektif jika dan hanya jika terdapat transformasi linear $S : W \longrightarrow V$ yang memenuhi $T \circ S = I_W$ (pemetaan identitas pada W).

7. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dan transformasi linear $T : V \to F$. Jika $v \in \ker(T)$, buktikan bahwa $V = \ker(T) \oplus \langle a\rangle$.