Analisis Kompleks

sekar.nugraheni@ugm.ac.id

Materi

1 Fungsi Analitik

- Diketahui fungsi $f : S \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dan z_0 titik dalam S. **Nilai limit**

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0,$$

jika dan hanya jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk setiap $z \in S$, dengan sifat $0 < |z - z_0| < \delta$, berlaku

$$|f(z) - w_0| < \epsilon.$$

- Diperhatikan bahwa nilai limit suatu fungsi tunggal.

- Diketahui fungsi $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, untuk setiap $z = x+iy$, dan $z_0 = x_0+iy_0$, $w_0 = u_0+iv_0$. Dengan demikian, nilai limit $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ jika dan hanya jika

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) &= u_0 \quad \text{dan} \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) &= v_0. \end{aligned}$$

- Jika $\alpha \in \mathbb{C}$, $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$ dan $\lim_{z\to z_0} g(z) = W_0$, maka
  - $\lim_{z\to z_0} (f \pm g)(z) = w_0 \pm W_0$
  - $\lim_{z\to z_0} \alpha f(z) = \alpha w_0$,
  - $\lim_{z\to z_0} (fg)(z) = w_0W_0$, dan
  - jika $W_0 \neq 0$, maka $\lim_{z\to z_0} \frac{f}{g}(z) = \frac{w_0}{W_0}$

- $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$ jika dan hanya jika $\lim_{z\to z_0} \frac{1}{f(z)} = 0$,

- $\lim_{z\to\infty} f(z) = w_0$ jika dan hanya jika $\lim_{z\to 0} f\left(\frac{1}{z}\right) = w_0$,

- $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$ jika dan hanya jika $\lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$.

- Fungsi f dikatakan **kontinu** di z_0, jika memenuhi kondisi berikut:
  - $f(z_0)$ ada
  - $\lim_{z\to z_0} f(z)$ ada, dan
  - $\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$.

- Dengan kata lain, f kontinu di z_0, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$, sehingga untuk setiap z dengan sifat $|z - z_0| < \delta$, berlaku $|f(z) - f(z_0)| < \epsilon$.

- Komposisi fungsi dua buah fungsi kontinu merupakan fungsi kontinu. Lebih lanjut, jika f kontinu pada suatu himpunan $S \subseteq \mathbb{C}$ yang tertutup dan terbatas maka terdapat $M > 0$ sehingga untuk setiap $z \in S$, $|f(z)| \leq M$.

- **Derivatif** fungsi f di z_0 didefinisikan sebagai

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

Fungsi f dikatakan **terdiferensial (analitik)** di z_0, jika $f'(z_0)$ ada.

- Fungsi f dikatakan **entire** jika dan hanya jika f analitik pada seluruh bidang $\mathbb{C}$.

- Jika diketahui $w = f(z)$ dan didefinisikan $\Delta w = f(z_0+\Delta z)-f(z_0)$ dan $\Delta z = z-z_0$, maka diperoleh

$$\frac{dw}{dz} = \lim_{\Delta z\to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}..$$

- Dapat ditunjukkan bahwa

- $\frac{d}{dz}z^n = nz^{n-1}$
- $\frac{d}{dz}cf(z) = cf'(z)$
- $\frac{d}{dz}[f(z) \pm g(z)] = f'(z) + g'(z)$
- $\frac{d}{dz}[f(z)g(z)] = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$
- $\frac{d}{dz}\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right] = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{(g(z))^2}$

√ **(Aturan Rantai)** Jika $w = f(z)$ dan $W = g(w)$ maka

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dW}{dw}\frac{dw}{dz}$$

√ **Persamaan Cauchy Riemann** Diketahui $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Jika $f'(z)$ ada di titik $z = z_0 = x_0 + iy_0$, maka derivatif tingkat pertama dari u dan v ada di (x_0, y_0) dan memenuhi persamaan Cauchy Riemann berikut

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x.$$

Lebih lanjut, diperoleh

$$f(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0).$$

√ Diperhatikan bahwa suatu fungsi $f(z)$ yang memenuhi persamaan Cauchy Riemann di titik $z_0 = (x_0, y_0)$ **tidaklah cukup** untuk menjamin eksistensi derivatifnya di titik tersebut.

√ Diketahui fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ terdefinisi pada suatu persekitaran $N_\epsilon(z_0)$ dengan $z_0 = x_0 + iy_0$. Jika

a. turunan pertama terhadap x dan y dari fungsi u dan v ada pada $N_\epsilon(z_0)$

b. derivatif parsial tersebut kontinu di (x_0, y_0) dan memenuhi persamaan Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x$$

di (x_0, y_0),

maka $f'(z_0)$ ada dan

$$f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

√ Diperhatikan untuk $z \in \mathbb{C}$ tak nol dapat dinyatakan dengan

$$z = x + iy \ \text{ dan } \ z = re^{i\theta}.$$

Dengan menggunakan transformasi koordinat

$$x = r\cos\theta \ \text{ dan } \ y = r\sin\theta,$$

akan dibahas fungsi analitik pada koordinat polar. Jika diketahui $w = f(z) = u + iv$ maka pada koordinat polar diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ \Leftrightarrow u_r &= u_x\cos\theta + u_y\sin\theta, \end{aligned} \tag{1}$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \theta} &= \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \Leftrightarrow u_\theta &= -u_x r\sin\theta + u_y r\cos\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Dengan cara yang sama diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \\ \Leftrightarrow v_r &= v_x\cos\theta + v_y\sin\theta, \end{aligned} \tag{3}$$

dan

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \Leftrightarrow v_\theta &= -v_x r\sin\theta + v_y r\cos\theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Diperhatikan jika derivatif parsial terhadap x dan y dari u dan v memenuhi persamaan Cauchy-Riemann $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$ di z_0, maka di titik z_0 persamaan (3) dan (4) menjadi

$$v_r = -u_y\cos\theta + u_x\sin\theta$$

dan

$$v_\theta = u_y r\sin\theta + u_x r\cos\theta.$$

Akibatnya, pada saat z_0 diperoleh $ru_r = v_\theta$ dan $u_\theta = -rv_r$.

√ Diketahui fungsi

$$f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$$

terdefinisi pada suatu persekitaran $N_\epsilon(z_0)$ dengan $z_0 = r_0 \exp^{i\theta_0}$. Jika

a. derivatif parsial terhadap r dan θ order satu dari fungsi u da v ada pada $N_\epsilon(z_0)$;

b. derivatif parsial tersebut kontinu di (r_0, θ_0); dan

c. memenuhi persamaan Cauchy-Riemann

$$ru_r = v_\theta \ \text{ dan } \ u_\theta = -rv_r$$

di titik (r_0, θ_0),

maka $f'(z_0)$ ada dan

$$f'(z_0) = \exp^{-i\theta}(u_r + iv_r)(r_0, \theta_0).$$

Latihan

1. Untuk setiap fungsi dibawah ini tentukan domainnya.

   a. $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$

   b. $f(z) = \arg\left(\dfrac{1}{z}\right)$

   c. $f(z) = \dfrac{z}{z+\bar{z}}$

   d. $f(z) = \dfrac{1}{1-|z|^2}$

2. Dengan menggunakan definisi, buktikan bahwa

   a. $\lim\limits_{z\to z_0} Re(z) = Re(z_0)$

   b. $\lim\limits_{z\to z_0} \bar{z} = \overline{z_0}$

   c. $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}^2}{z} = 0$

   d. $\lim\limits_{z\to z_0} (az+b) = az_0 + b$

   e. $\lim\limits_{z\to z_0} (z^2+c) = z_0^2 + c$

   f. $\lim\limits_{z\to 1-i} [x+i(2x+y)] = 1+i$, untuk $z = x+iy$.

3. Dengan menggunakan matematika induksi buktikan bahwa
$$\lim_{z\to z_0} z^n = z_0^n.$$

4. Dengan menggunakan definisi buktikan bahwa jika $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ maka $\lim\limits_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|$.

5. Jika $\Delta z = z - z_0$, tunjukkan bahwa $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ jika dan hanya jika $\lim\limits_{\Delta z\to 0} f(z+\Delta z) = w_0$.

6. Dengan menggunakan Teorema 3. tunjukkan bahwa

   a. $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{4z^2}{(z-1)^2} = 4$

   b. $\lim\limits_{z\to 1} \dfrac{1}{(z-1)^3} = \infty$

   c. $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{z^2+1}{z-1} = \infty$

7. Tentukan $f'(z)$ jika diketahui

   a. $f(z) = 3z^2 - 2z + 4$

   b. $f(z) = \dfrac{z-1}{2z+1}$

   c. $f(z) = (1-4z^2)^3$

   d. $f(z) = \dfrac{(1+z^2)^4}{z^2}$

8. Buktikan bahwa koefisien pada polinomial
$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n$$
dapat dinyatakan dengan
$$a_n = \frac{P^(n)(0)}{n!}$$
untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

9. Diketahui $f(z_0) = g(z_0) = 0$ dan $f'(z_0)$ dan $g'(z_0)$ ada dengan $g'(z_0) \neq 0$. Dengan menggunakan definisi buktikan bahwa
$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

10. Tunjukkan bahwa $f'(z)$ tidak ada untuk setiap z, jika

    a. $f(z) = Re(z)$

    b. $f(z) = Im(z)$

11. Tunjukkan bahwa fungsi $f(z) = e^x e^{iy}$ diferentiabel pada $\mathbb{C}$ dan tentukan derivatifnya.

12. Tunjukkan bahwa fungsi $f(z) = |z|^2$ hanya terdiferensiabel di $z = 0$.

13. Tunjukkan bahwa $f'(z)$ dari fungsi berikut tidak ada di titik manapun.

    a. $f(z) = \bar{z}$

    b. $f(z) = 2x + ixy^2$

    c. $f(z) = z - \bar{z}$

    d. $f(z) = e^x e^{-iy}$

14. Tunjukkan bahwa $f'(z)$ dan $f''(z)$ ada pada $\mathbb{C}$ dan tentukan $f"(z)$ jika diketahui

    a. $f(z) = iz + 2$

    b. $f(z) = z^3$

    c. $f(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$

    d. $f(z) = e^{-x} e^{-iy}$

15. Tentukan dimana $f'(z)$ ada dan nilainya jika diketahui

    a. $f(z) = \dfrac{1}{z}$

    b. $f(z) = x^2 + iy^2$

    c. $f(z) = z\text{Im}(z)$

16. Tunjukkan bahwa derivatif fungsi

$$f(z) = \frac{1}{r}\exp^{-i\theta},$$

ada pada saat $z \neq 0$.

17. Tunjukkan bahwa untuk bilangan real α, derivatif fungsi

$$f(z) = \sqrt[3]{r}\exp^{i\frac{\theta}{3}},$$

untuk $r > 0$ dan $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$ ada pada domainnya.

18. Tunjukkan bahwa fungsi berikut terdiferensiabel pada domainnya dan tentukan $f'(z)$.

    a. $f(z) = \sqrt{r}\exp^{i\frac{\theta}{2}}$, untuk $r > 0$ dan $\alpha < \theta < \alpha + 2\pi$

    b. $f(z) = e^{\theta}\cos(\ln r) + ie^{-\theta}\sin(\ln r)$, untuk $r > 0$ dan $0 < \theta < 2\pi$.