3

Turunan

3.1 Turunan Fungsi

Pada bagian ini akan dijelaskan menganai konsep derivatif serta derivatif/turunan fungsi.

Definisi Derivatif

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, c titik limit A dan $f : A \to \mathbb{R}$ fungsi. Fungsi f dikatakan memiliki **turunan** di c, jika terdapat bilangan L dengan sifat untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon.$$

Lebih lanjut, bilangan L pada definisi diatas dinotasikan dengan $f'(c)$,

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Jika ditulis, $h = x - c$, maka diperoleh

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}.$$

Fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dikatakan memiliki turunan pada A jika untuk setiap $x \in A$, $f'(x)$ ada. Selanjutnya, sebagai sebuah fungsi, f' disebut **Fungsi Turunan** dari f. Tentu saja, fungsi f' juga mungkin memiliki turunan yang nantinya disebut **turunan kedua**, dinotasikan f''. Begitu seterusnya sampai turunan ke-n (jika ada), dengan n bilangan asli. Secara geometri, turunan pada suatu titik c dari fungsi f dapat dipandang sebagai gradien garis singgung grafik fungsi tersebut di titik c sehingga fungsi f' merupakan fungsi yang didefinisikan dari kumpulan gradien garis singgung fungsi f.

Selain itu, berkaitan dengan sifat turunan nantinya, berikut diberikan definisi fungsi konveks.

Definisi Fungsi Konveks

Fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dikatakan **konveks** pada $[a,b]$ jika untuk setiap $t \in [0,1]$ dan $x, y \in [a,b]$ berlaku

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

Pertidaksamaan pada definisi fungsi konveks mengatakan bahwa setiap kita menghubungkan dua titik dengan garis lurus pada grafik fungsi, maka grafik fungsi yang berada diantara kedua titik tersebut akan terletak dibawah garis yang menghubungkan kedua titik tersebut. Lebih lanjut, suatu fungsi f disebut **konkaf** jika $-f$ merupakan fungsi konveks. Jadi secara umum jika suatu fungsi bukan merupakan fungsi konveks, belum tentu fungsi tersebut merupakan fungsi konkaf. Selanjutnya, diberikan rangkuman sifat-sifat turunan serta kaitannya dengan fungsi kontinu serta fungsi konveks.

Sifat Turunan

- Jika $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ memiliki turunan di $c \in [a,b]$, maka f kontinu di c.
- (**Teorema Caratheodory**) Diberikan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dan $c \in [a,b]$. Fungsi f memiliki turunan di c jika dan hanya jika terdapat fungsi φ pada $[a,b]$ yang kontinu di c dan berlaku
$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c).$$
- (**Aturan Rantai**) Diberikan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dan $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ fungsi yang memenuhi $f([a,b]) \subseteq [c,d]$, serta $x \in [a,b]$. Jika f memiliki turunan di x dan g memiliki turunan di $f(x)$, maka fungsi $g \circ f$ memiliki turunan di x dengan
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$
- (**Teorema Ekstremum**) Diberikan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dan $c \in [a,b]$ titik ektremum lokal dari f. Jika f memiliki turunan di c, maka $f'(c) = 0$.

Kekontinuan suatu fungsi dapat dipastikan jika fungsi tersebut mempunyai turunan. Hal sebaliknya belum tentu benar karena ada fungsi kontinu yang bahkan tak memiliki turunan disetiap titik pada domainnya. Selanjutnya, pada Teorema Caratheodory, kita dapat mengambil informasi bahwa fungsi f jika memiliki turunan di c dapat dinyatakan kedalam bentuk

$$f(x) = f(c) + \varphi(x)(x-c). \qquad (1)$$

Tentu saja untuk nilai $x \neq c$, maka

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

dan turunan $f'(c) = \varphi(c)$ karena kekontinuannya. Bentuk (1) merupakan deret Taylor fungsi f yang hanya melibatkan turunan pertama. Aturan Rantai pada turunan biasanya berguna ketika menghadapi fungsi yang rumit sehingga kita dapat memandang fungsi tersebut sebagai komposisi beberapa fungsi sederhana yang nantinya lebih mudah untuk dicari turunannya. Terakhir, Teorema Ekstremum mengatakan bahwa pada domain tertutup terbatas, titik ekstremum lokal (nilai terbesar fungsi pada suatu persekitaran tertentu) ditandai dengan turunannya bernilai 0 (jika ada). Lebih lanjut jika pada interval $[a,b]$ fungsi f terturunkan dan mempunyai nilai maksimum di titik $c \in (a,b)$ maka $f'(c) = 0$. Nilai minimum dapat dicari dengan mencari maksimum dari $-f$. Turunan $f'(c) = 0$

mengatakan bahwa gradien garis singgung fungsi f di titik c bernilai 0. Hal ini menandakan bahwa titik $c, f(c)$ merupakan salah satu titik puncak pada grafik fungsi f.

Sifat Turunan (II)

- (**Teorema Rolle**) Diberikan f fungsi kontinu pada $[a, b]$ dengan $f(a) = f(b) = 0$. Jika $f'(x)$ ada untuk setiap $x \in (a, b)$, maka terdapat $c \in (a, b)$ dengan $f'(c) = 0$.
- (**Teorema Nilai Rata-rata**) Diberikan f fungsi kontinu pada $[a, b]$. Jika $f'(x)$ ada untuk setiap $x \in (a, b)$, maka terdapat $c \in (a, b)$ dengan sifat
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$
- Diberikan f fungsi terdiferensial (memiliki turunan) pada $[a, b]$.
  1. f naik monoton pada $[a, b]$ jika dan hanya jika $f'(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.
  2. f turun monoton pada $[a, b]$ jika dan hanya jika $f'(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in [a, b]$.
- Diberikan f fungsi pada $[a, b]$ dan $c \in [a, b]$. Jika f memiliki turunan di $c \in [a, b]$, maka
  1. jika $f'(c) > 0$, maka terdapat $\delta > 0$ dengan sifat $f(x) > f(c)$ untuk setiap x dengan $c < x < c + \delta$.
  2. jika $f'(c) < 0$, maka terdapat $\delta > 0$ dengan sifat $f(x) < f(c)$ untuk setiap x dengan $c - \delta < x < c$.
- (**Teorema Darboux**) Jika fungsi f terdiferensial (memiliki turunan) pada $[a, b]$ dan k berada diantara $f'(a)$ dan $f'(b)$, maka terdapat $c \in [a, b]$ dengan $f'(c) = k$.
- (**Teorema Nilai Rata-rata Cauchy**) Diberikan f, g fungsi kontinu pada $[a, b]$ dan $g'(x) \neq 0$ pada (a, b). Jika $f'(x), g'(x)$ ada untuk setiap $x \in (a, b)$, maka terdapat $c \in (a, b)$ sehingga
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Teorema-teorema diatas banyak digunakan dalam soal yang muncul di kompetisi. Pada Teorema Rolle, berlaku lebih umum jika fungsi f kontinu pada $[a, b]$, $f(a) = f(b) = k$ serta $f'(x)$ ada untuk setiap $x \in (a, b)$ maka terdapat $c \in (a, b)$ sehingga $f'(c) = 0$.

Sebagai catatan, dari semua teorema diatas, seringkali ide dari bukti teorema-teorema tersebut yang nantinya sangat berguna untuk konstruksi pembuktian sebuah pernyataan pada kompetisi. Maka dari itu, selain menghafalkan sifat-sifat diatas, akan lebih baik jika dapat menulis ulang bukti dari masing-masingnya sebagai latihan.

Sifat Turunan (III)

- (**Teorema L'Hospital**) Diberikan $-\infty \leq a < b \leq \infty$ dan f, g terdiferensial pada (a, b) dengan $g'(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$. Jika berlaku
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a^+} g(x) \qquad \text{atau} \qquad \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty.$$
maka apabila
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \qquad \text{berakibat} \qquad \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$
- (**Teorema Taylor**) Diberikan bilangan asli n dan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ fungsi dengan

$f', f'', \ldots, f^{(n)}$ kontinu pada $[a,b]$ dan $f^{(n+1)}$ ada pada (a,b). Jika $x_0 \in [a,b]$, maka untuk setiap $x \in [a,b]$ terdapat c diantara x dan x_0 sehingga

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

- Diberikan fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ yang memiliki turunan tingkat dua pada $[a,b]$. Fungsi f konveks pada $[a,b]$ jika dan hanya jika $f''(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

Sifat terakhir diatas menggambarkan hubungan antara fungsi konveks dengan turunan keduanya. Kadang kala Teorema Taylor digunakan untuk memperoleh ketaksamaan tertentu dengan mengubah fungsi f ke bentuk Taylornya sampai tingkat tertentu.

Contoh 9. Asumsikan fungsi f terdiferensial di a. Tentukan

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$$

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa

$$\frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = \frac{xf(a) - af(a) + af(a) - af(x)}{x - a} = \frac{(x - a)f(a)}{x - a} - \frac{a(f(x) - f(a))}{x - a}.$$

Akibatnya,

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{(x - a)f(a)}{x - a} - \lim_{x \to a} \frac{a(f(x) - f(a))}{x - a} = f(a) - af'(a).$$

Contoh 10. Diketahui fungsi f kontinu pada interval tertutup $[a,b]$ dan terdiferensial pada interval terbuka (a,b). Jika $f(a) = f(b) = 0$, maka tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan real α terdapat $x \in (a,b)$ sehingga

$$\alpha f(x) + f'(x) = 0.$$

Penyelesaian:

Diambil sebarang bilangan real α. Pertama-tama dibentuk fungsi

$$g(x) = f(x)e^{\alpha x}.$$

Karena $f(x)$ terdiferensial pada (a,b) maka $g(x)$ juga terdiferensial pada (a,b) dengan

$$g(a) = g(b) = 0.$$

Akibatnya, berdasarkan Teorema nilai rata-rata, terdapat $x \in (a,b)$ sehingga

$$0 = \frac{g(b) - g(a)}{b - a} = g'(x) = e^{\alpha x}(\alpha f(x) + f'(x)).$$

Karena $e^{\alpha x} > 0$ maka tentu saja

$$\alpha f(x) + f'(x) = 0.$$

Perhatikan bahwa cara penyelesaian diatas sering disebut penyelesaian dengan konstruksi fungsi. Salah satu fungsi tambahan yang sering digunakan adalah fungsi exponensial e^x. Idenya adalah menganggap hal yang dicari adalah bagian dari turunan dari fungsi yang dikonstruksi kemudian dengan memanfaatkan asumsi kita bisa menggunakan teorema nilai antara atau teorema nilai rata-rata sebagai bagian akhirnya. Tentu saja konstruksi ini perlu latihan agar bisa menebak jenis fungsi yang digunakan. Sarannya adalah lebih banyak membaca penyelesaian masalah semacam ini.

Contoh 11. Asumsikan f terdiferensial kontinu dua kali pada $(0, \infty)$,

$$\lim_{x\to+\infty} xf(x) = 0 \qquad \text{dan} \qquad \lim_{x\to+\infty} xf''(x) = 0.$$

Tunjukkan bahwa $\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$.

Penyelesaian:

Perhatikan bahwa untuk $x > 0$, dengan Teorema Taylor, terdapat $c \in (x, x+1)$ sehingga

$$f(x+1) = f(x) + f'(x) + \frac{1}{2}f'(c).$$

Selanjutnya,

$$xf'(x) = \frac{x}{x+1}(x+1)f(x+1) - xf(x) - \frac{1}{2}\cdot\frac{x}{c}\cdot cf''(c).$$

Akibatnya, berdasarkan asumsi diperoleh

$$\lim_{x\to+\infty} xf'(x) = 0$$

karena saat x menuju tak hingga, c juga menuju tak hingga serta

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{c} = 1.$$

LATIHAN: Turunan

1. Tentukan semua bilangan rasional positif r dengan sifat fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $f(x) = x^r \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$, memiliki turunan di 0.
2. Diberikan f fungsi kontinu pada $[a, b]$ dan f memiliki turunan pada (a, b). Jika $f'(x) = 0$ untuk setiap $x \in (a, b)$, tunjukkan bahwa f merupakan fungsi konstan.
3. Diberikan f, g fungsi kontinu pada $[a, b]$ dan f, g memiliki turunan pada (a, b). Jika $f'(x) = g'(x)$ untuk setiap $x \in (a, b)$, tunjukkan bahwa terdapat bilangan C dengan sifat $f = g + C$ pada $[a, b]$.
4. Tunjukkan bahwa $|\sin x| \leq |x|$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Lebih lanjut, tunjukkan bahwa $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.
5. Tunjukkan bahwa $e^x \geq 1 + x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Tentukan kapan kesamaan terjadi.
6. Diberikan f, g fungsi terdiferensial pada $\mathbb{R}$ dengan $f(0) = g(0)$. Jika $f'(x) \leq g'(x)$ untuk setiap $x \geq 0$, tunjukkan $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \geq 0$.
7. Fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terdiferensial kontinu pada $[a, b]$, jika untuk setiap $\epsilon > 0$,

terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x, y \in [a, b]$ dengan $0 < |x - y| < \delta$ berlaku

$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x)\right| < \epsilon.$$

Tunjukkan jika f terdiferensial seragam pada $[a, b]$, maka f' kontinu pada $[a, b]$.

8. Diberikan $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada $[0, 2]$ dan terdiferensial pada $(0, 2)$. Jika $f(0) = 0, f(1) = 1$ dan $f(2) = 1$, maka tunjukkan bahwa terdapat $c \in (0, 2)$ dengan sifat $f'(c) = \dfrac{1}{3}$.

9. Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x}\right)$.

10. Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\arctan x}\right)$.

11. Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 0^+} (\sin x)^x$.

12. Tentukan nilai $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

13. Misalkan $f(x) = a_1 \sin x + 2a_2 \sin 2x + \cdots + na_n \sin nx$ dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan-bilangan real. Jika $|f(x)| \leq |\sin x|$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, maka nilai maksimal dari $|a_1 + 4a_2 + \ldots + n^2 a_n|$ adalah …

14. Tunjukkan bahwa $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$ untuk setiap bilangan real x.

15. Tentukan semua bilangan real positif x yang memenuhi

$$2013^x + 2015^x = 2.2014^x.$$

16. Tentukan semua bilangan bulat a dan b yang memenuhi $0 < a < b$ dan $a^b = b^a$.

17. Diketahui f kontinu pada $[a, b]$ dan f'' ada pada (a, b). Jika garis yang melalui $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$ memotong grafik fungsi f di suatu titik di dalam (a, b), maka tunjukkan bahwa terdapat $c \in (a, b)$ sehingga $f''(c) = 0$.

18. Diketahui f fungsi konveks pada $[a, b]$. Tunjukkan bahwa untuk setiap $t \in [a, b]$ berlaku

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \leq \frac{f(b) - f(t)}{b - t}.$$

19. Jika $a, b > 0$ dan $\alpha \in (0, 1)$, maka tunjukkan bahwa

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b.$$

20. Diberikan $f : [0, \infty)$ fungsi yang memiliki turunan pada $(0, \infty)$. Jika $f'(x) \to b$ untuk $x \to \infty$, maka tunjukkan bahwa
    (a) untuk setiap $h > 0$ berlaku $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} = b$.
    (b) jika $f(x) \to a$, maka $b = 0$.
    (c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = b$.

21. Diberikan fungsi f terdiferensial pada $(0, \infty)$. Jika $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) + f'(x) = L$, maka tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ dan $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

22. Diberikan f fungsi terdiferensial sampai tingkat tiga pada $[0,1]$. Jika $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'(1) = f''(1) = 0$ dan $f(1) = 1$. Tunjukkan bahwa terdapat $c \in [0,1]$ sehingga $f^{(3)}(c) \geq 24$.
23. Diberikan f fungsi terdiferensial pada $[0,1]$ dan tidak ada $x \in [0,1]$ sehingga $f(x) = f'(x) = 0$. Tunjukkan banyaknya pembuat nol dari f hanya berhingga.
24. Misalkan f fungsi atas real yang terdiferensial sedemikian sehingga $f(x)+f'(x) \leq 1$ untuk semua x dan $f(0) = 0$. Nilai terbesar dari $f(1)$ yang mungkin adalah ...
25. Diberikan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fungsi terdiferensial sampai tingkat dua pada $(0,1)$ dengan $f(0) = f(1) = 0$ dan $f'' + 2f' + f \geq 0$. Tunjukkan bahwa $f(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$.