Persiapan Seleksi Universitas

Seleksi Pertama

1. Diketahui $E_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \{A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \mid A^2 = A\}$. Dimensi dari subruang yang dibangun oleh $E_{2\times 2}(\mathbb{R})$ adalah ....

2. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F dan diketahui W_1, W_2, dan U merupakan subruang-subruang dari V yang memenuhi $V = W_1 \bigoplus U = W_2 \bigoplus U$. Buktikan bahwa

$$\dim(V) - 2\dim(U) \leq \dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim(V) - \dim(U).$$

Latihan Soal

1. Diketahui S, U, W merupakan subruang dari V. Buktikan bahwa

$$S \cap (U + W) = (S \cap U) + (S \cap W)$$

   jika dan hanya jika $\dim(V) = 1$.

2. Diketahui S, U, W merupakan subruang dari V yang memenuhi $S \cap U = S + W$ dan $U \cap W = S + U$. Buktikan bahwa $S = U + W$.

3. Diketahui V ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ dan $T : V \longrightarrow V$ merupakan transformasi linear. Misalkan $\mathbf{v} \in V$ dengan $\mathbf{v} \notin \ker(T)$. Buktikan bahwa $V = \ker(T) \oplus \operatorname{Span}(\mathbf{v})$.

4. Diketahui himpunan $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\} \subseteq \mathbb{R}^n$ yang bebas linear dan $\mathbf{w}_1 = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$, $\mathbf{w}_2 = c\mathbf{u}_1 + d\mathbf{u}_2$. Buktikan bahwa $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ bebas linear jika dan hanya jika $ad \neq bc$.

5. Diketahui $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ merupakan basis orthonormal untuk $\mathbb{R}^3$. Misalkan $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ dengan $\mathbf{x} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3$ untuk suatu $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ memenuhi $\|\mathbf{x}\| = 5$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v}_1 = 4$ dan $\mathbf{x} \perp \mathbf{v}_2$. Jika M dan n berturut-turut merupakan nilai terbesar dan terkecl yang mungkin untuk $c_1 + c_2 + c_3$, maka nilai dari $|M - n|$ adalah ....

6. Diketahui U, V dan W merupakan ruang vektor atas lapangan F. Misalkan $T : U \longrightarrow V$ dan $S : V \longrightarrow W$ masing-masing merupakan transformasi linear. Buktikan bahwa

$$\dim(U) - \dim(V) \leq \dim(\ker(S \circ T)) - \dim(\ker(S)).$$

7. Diberikan ruang hasil kali dalam V dan vektor satuan $\mathbf{u} \in V$ ($\|\mathbf{u}\| = 1$). Misalkan $T : V \longrightarrow V$ dengan $T(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \mathbf{u}$ untuk setiap $\mathbf{v} \in V$.

   (a) Buktikan bahwa T merupakan transformasi linear.

   (b) Selidiki apakah T injektif atau tidak.

8. Diberikan ruang vektor V atas lapangan $\mathbb{R}$.

   (a) Misalkan V_1 dan V_2 merupakan dua subruang *non-trivial* dari V. Buktikan bahwa terdapat vektor $\mathbf{v} \in V$ yang memenuhi $\mathbf{v} \notin V_1$ dan $\mathbf{v} \notin V_2$.

   (b) Buktikan bahwa untuk setiap k subruang *non-trivial*, terdapat vektor $\mathbf{v}$ yang tidak termuat di semua subruang tersebut.