2 Fungsi Bernilai Kompleks

2.1 Fungsi Bernilai Kompleks

Definisi 2.1. Diberikan $D \subseteq \mathbb{C}$. Fungsi bernilai kompleks f pada D, dinotasikan $f : D \to \mathbb{C}$, adalah suatu aturan yang mengawankan setiap elemen $z \in D$ dengan suatu bilangan kompleks w (tunggal). Bilangan w tersebut dinamakan nilai dari fungsi f di z dan dinotasikan $f(z)$. Himpunan D disebut domain fungsi f.

Fungsi f dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f(z) = f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) \quad \forall z = x + iy \in D,$$

dengan $u(x, y)$ dan $v(x, y)$ merupakan fungsi bernilai real pada D. Bila elemen di D dipandang dalam bentuk polar $z = re^{i\theta}$, fungsi f juga dapat dinyatakan dalam bentuk

$$f(re^{i\theta}) = u(r, \theta) + iv(r, \theta) \quad \forall z = re^{i\theta} \in D,$$

Contoh 2.2. Nyatakan formula fungsi f dengan $f(x, y) = 2xy + i(y^2 - x^2)$ ke dalam variabel $z = x + iy$.

Penyelesaian: Dengan mensubstitusi $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ dan $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ ke formula fungsi f, diperoleh

$$\begin{aligned} f(z) &= 2\frac{z+\bar{z}}{2}\frac{z-\bar{z}}{2i} + i\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 - i\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 \\ &= -\frac{i}{4}\left[2(z+\bar{z})(z-\bar{z}) + (z-\bar{z})^2 + (z+\bar{z})^2\right] \\ &= \frac{-i(z+\bar{z}+z-\bar{z})^2}{4} \\ &= -iz^2. \end{aligned}$$

■

Beberapa contoh fungsi dasar bernilai kompleks yang sering dipelajari di antaranya:

1. Fungsi **konstan**: $f(z) = k$ dengan $k \in \mathbb{C}$ tetap.
2. Fungsi **suku banyak**: $f(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$ dengan $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ dan $c_i \in \mathbb{C}$.
3. Fungsi **rasional**: $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ dengan P dan Q merupakan fungsi suku banyak.
4. Fungsi **eksponensial**: $f(z) = e^z := e^x e^{iy}$ dengan $e^{iy} = \operatorname{cis} y$.

Contoh fungsi dasar lainnya adalah fungsi **trigonometri** dan **hiperbolik**.

Definisi 2.3. Diberikan $z \in \mathbb{C}$.

1. $\cos z := \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$.
2. $\sin z := \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.
3. $\cosh z := \dfrac{e^{z} + e^{-z}}{2}$.
4. $\sinh z := \dfrac{e^{z} - e^{-z}}{2}$.

Fungsi trigonometri dan hiperbolik lainnya didefinisikan dengan cara yang sama seperti kasus real (kalkulus).

Beberapa sifat fungsi trigonometri dan hiperbolik diberikan sebagai berikut.

Teorema 2.4. *Untuk setiap $z_1, z_2, z \in \mathbb{C}$ berlaku*

1. $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$.
2. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$.
3. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.
4. $\sinh(z_1 + z_2) = \sinh z_1 \cosh z_2 + \cosh z_1 \sinh z_2$.
5. $\cosh(z_1 + z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \sinh z_1 \sinh z_2$.
6. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$.

Teorema 2.5. *Untuk setiap bilangan kompleks $z = x + iy$ berlaku*

1. $\sin(z) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$.
2. $\cos(z) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$.
3. $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$.
4. $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$.
5. $\sinh(z) = \sinh x \cos y + i \cosh x \sin y$.
6. $\cosh(z) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$.
7. $|\sinh z|^2 = \sinh^2 x + \sin^2 y$.
8. $|\cosh z|^2 = \sinh^2 x + \cos^2 y$.

Contoh 2.6. Tentukan semua $z \in \mathbb{C}$ sehingga $\sin z = 2i$.

Penyelesaian: Misalkan $z = x + iy$. Perhatikan bahwa

$$2i = \sin z = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

Diperoleh $\sin x \cosh y = 0$ dan $\cos x \sinh y = 2$. Karena $\cosh y > 0$, maka haruslah $\sin x = 0$, sehingga didapat $x = n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$. Akibatnya, $\cos x = \pm 1$.

Kasus $\cos x = 1$, yakni saat $x = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Diperoleh $\sinh y = 2$,

$$\begin{aligned} \frac{e^y - e^{-y}}{2} = 2 \Leftrightarrow e^y - 4 - e^{-y} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{2y} - 4e^y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (e^y - 2)^2 = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad e^y = 2 \pm \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Karena $e^y > 0$, maka haruslah $e^y = 2 + \sqrt{5}$ atau ekuivalen dengan $y = \ln\left(2 + \sqrt{5}\right)$. Dengan demikian, penyelesaian untuk kasus ini adalah

$$z = 2k\pi + i \ln\left(2 + \sqrt{5}\right) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Kasus $\cos x = -1$, yakni saat $x = (2k+1)\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$. Diperoleh $\sinh y = -2$,

$$\begin{aligned} \frac{e^y - e^{-y}}{2} = -2 \Leftrightarrow e^y + 4 - e^{-y} = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{2y} + 4e^y - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (e^y + 2)^2 = 5 \\ &\Leftrightarrow \quad e^y = -2 \pm \sqrt{5}. \end{aligned}$$

Karena $e^y > 0$, maka haruslah $e^y = -2+\sqrt{5}$ atau ekuivalen dengan $y = \ln\left(-2+\sqrt{5}\right)$. Dengan demikian, penyelesaian untuk kasus ini adalah

$$z = (2k+1)\pi + i\ln\left(-2+\sqrt{5}\right) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Jadi, semua penyelesaiannya berbentuk

$$z = 2k\pi + i\ln\left(2+\sqrt{5}\right) \quad \text{atau} \quad z = (2k+1)\pi + i\ln\left(-2+\sqrt{5}\right) \quad k \in \mathbb{Z}.$$

■

Beberapa fungsi memiliki interpretasi khusus yang bermanfaat dalam mencari *range* dari suatu fungsi pada domain tertentu.

Teorema 2.7.

1. *Diberikan $z_0 = x_0 + iy_0$. Fungsi*

$$f(z) = z + z_0$$

dapat diinterpretasikan sebagai sebuah translasi sejauh (x_0, y_0).

2. *Diberikan $r > 0$. Fungsi*

$$f(z) = rz$$

dapat diinterpretasikan sebagai sebuah latasi dengan pusat $(0,0)$ dan skala r.

3. *Diberikan $\theta \in \mathbb{R}$. Fungsi*

$$f(z) = e^{i\theta}z$$

dapat diinterpretasikan sebagai sebuah rotasi dengan pusat $(0,0)$ sebesar θ berlawanan arah jarum jam.

4. *Fungsi*

$$f(z) = \frac{1}{z}$$

memetakan garis atau lingkaran ke garis atau lingkaran.

a *Garis yang tidak melalui pusat $(0,0)$ dipetakan ke suatu lingkaran yang melalui pusat $(0,0)$.*

b *Garis yang melalui pusat $(0,0)$ dipetakan ke suatu garis yang tidak melalui pusat $(0,0)$.*

c *Lingkaran yang tidak melalui pusat $(0,0)$ dipetakan ke suatu lingkaran yang tidak melalui pusat $(0,0)$.*

d *Lingkaran yang melalui pusat $(0,0)$ dipetakan ke suatu garis yang tidak melalui pusat $(0,0)$.*

Contoh 2.8. Tentukan peta dari $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ terhadap $f(z) = 2iz + (1+i)$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ merupakan bidang di atas sumbu-x.
Perhatikan bahwa interpretasi fungsi $f_1(z) = iz = e^{\frac{\pi}{2}i}z$ adalah suatu rotasi sebesar $\frac{\pi}{2}$ dengan pusat $(0,0)$ berlawanan arah jarum jam. Diperoleh peta dari $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ terhadap f_1 adalah

$$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}.$$

Selanjutnya, perhatikan bahwa interpretasi fungsi $f_2(z) = 2z$ merupakan suatu latasi dengan pusat $(0,0)$ dan skala 2. Diperoleh peta dari $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}$ terhadap f_2 adalah tetap

$$\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0\}.$$

Kemudian, perhatikan bahwa interpretasi fungsi $f_3(z) = z + (1+i)$ merupakan suatu translasi sejauh $(1,1)$. Diperoleh peta dari $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0\}$ terhadap f_3 adalah

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 1\}.$$

Sekarang, karena $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, diperoleh peta dari $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ adalah

$$\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 1\}.$$

■

Contoh 2.9. Tentukan peta dari garis $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 1\}$ oleh $f(z) = \frac{z-1}{z}$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa $f(z) = \frac{z-1}{z} = 1 - \frac{1}{z}$ merupakan komposisi fungsi $g(z) = -\frac{1}{z}$ dengan $h(z) = 1 + z$.
Pertama, akan dicari peta $A = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) = 1\}$ oleh $g(z) = -\frac{1}{z}$. Perhatikan bahwa jika $z = x + i$, maka $g(z) = -\frac{1}{x+i} = \frac{-x+i}{x^2+1}$. Diperoleh

$$\text{Re}(g)^2 + \text{Im}(g)^2 = \frac{x^2+1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} = \text{Im}(g).$$

Dengan demikian, peta A oleh g adalah

$$B = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 = y\} = \left\{z = x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}.$$

Selanjutnya, oleh h, B yang merupakan lingkaran pusat $(0, \frac{1}{2})$ jari-jari $\frac{1}{2}$ dipetakan ke lingkaran pusat $(1, \frac{1}{2})$ jari-jari $\frac{1}{2}$. Dengan demikian, peta dari A oleh f adalah

$$\left\{z = x + iy \in \mathbb{C} : (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\right\}.$$

■

Latihan 2.10.

1. Buktikan Teorema 2.4 dan Teorema 2.5.
2. Nyatakan formula fungsi f dengan $f(x,y) = (x^2 - (y+1)^2) + i2x(y+1)$ ke dalam variabel $z = x + iy$.
3. Nyatakan fungsi $f(z) = z + \frac{1}{z}$ ke dalam bentuk polar $u(r,\theta) + iv(r,\theta)$.
4. Tentukan semua $z \in \mathbb{C}$ sehingga $\sin z = 0$.
5. Tentukan semua $z \in \mathbb{C}$ sehingga $\cosh z = 1$.
6. Tentukan semua $z \in \mathbb{C}$ sehingga $\sin z = \cos z$.
7. Tentukan peta $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > 0\}$ oleh $f(z) = iz + i$.
8. Tentukan peta $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ oleh $f(z) = (1+i)z$.
9. Tentukan peta $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 1\}$ oleh $f(z) = (1-i)z$.
10. Tentukan peta $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ oleh $f(z) = z^2$.
11. Tentukan peta $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ oleh $f(z) = z^{\frac{1}{2}}$.

2.2 Limit dan Kekontinuan Fungsi

Suatu persekitaran dan persekitaran terhapus dari $z_0 \in \mathbb{C}$ didefinisikan berturut-turut sebagai berikut:

$$N(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\} \quad \text{dan} \quad N_0(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < r\}.$$

Definisi 2.11. Diberikan $z_0 \in \mathbb{C}$.

1. Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada suatu persekitaran terhapus z_0. Bilangan w_0 disebut **limit** dari $f(z)$ ketika z mendekati z_0, dituliskan

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0,$$

   jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dengan $0 < |z - z_0| < \delta$ berlaku $|f(z) - w_0| < \epsilon$.

2. Diberikan fungsi f yang didefinisikan pada suatu persekitaran z_0. Fungsi f dikatakan **kontinu** di z_0 jika

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

   Lebih lanjut, fungsi f dikatakan **kontinu** pada $A \subseteq D_f$ jika f kontinu di setiap titik di A.

Seperti halnya pada Kalkulus, nilai limit fungsi (jika ada) tunggal. Lebih lanjut, sifat jumlahan, selisih, perkalian, dan pembagian limit dan kekontinuan pada Kalkulus juga dipertahankan untuk kasus $\mathbb{C}$.

Teorema 2.12. *Diberikan fungsi $f(z) = u(x, v) + iv(x, y)$ yang terdefinisi pada domain D yang memuat persekitaran $z_0 \in \mathbb{C}$.*

- ☐ *Jika $z_0 = x_0 + iy_0$ dan $w_0 = u_0 + iv_0$, berlaku $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ jika dan hanya jika*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \quad \textit{dan} \quad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

- ☐ *Jika $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$, maka $\lim\limits_{\substack{z \to z_0 \\ z \in L}} f(z) = w_0$ untuk setiap lintasan L yang melalui z_0.*
- ☐ *Jika f kontinu di z_0, maka $\lim_{z \to z_0} f(z)$ ada.*
- ☐ *Jika f kontinu pada D dan $f(z_0) \neq 0$, maka $f \neq 0$ pada suatu persekitaran dari z_0.*
- ☐ *Jika D tertutup dan terbatas serta f kontinu pada D, maka f terbatas pada D, yakni*

$$|f(z)| \leq M \quad \forall z \in D.$$

Contoh 2.13. Tunjukkan bahwa $\lim_{z \to z_0} z\bar{z}$ ada untuk setiap $z_0 \in \mathbb{C}$ dan $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ tidak ada.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa untuk $z = x + iy$, berlaku $z\bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$. Karena fungsi $x^2 + y^2$ kontinu pada $\mathbb{R}^2$, maka fungsi $f(z) = z\bar{z}$ kontinu pada $\mathbb{C}$, sehingga $\lim_{z \to z_0} z\bar{z}$ ada untuk setiap $z_0 \in \mathbb{C}$. Selanjutnya, misalkan L_1 merupakan garis $\mathrm{Im}(z) = 0$ dan L_2 merupakan garis $\mathrm{Re}(z) = 0$. Diperoleh

$$\lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in L_1}} \frac{z}{\bar{z}} = 1 \quad \text{dan} \quad \lim_{\substack{z \to 0 \\ z \in L_2}} \frac{z}{\bar{z}} = -1$$

Hal ini berarti, $\lim_{z \to 0} \frac{z}{\bar{z}}$ tidak ada. ■

Latihan 2.14.

1. Buktikan Teorema 2.12.

2. Misalkan $z_0 = x_0 + iy_0$ dan $w_0 = u_0 + iv_0$. Jika $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$, maka

   (a) $\lim_{z\to z_0} \mathrm{Re}(f(z)) = u_0$.

   (b) $\lim_{z\to z_0} \mathrm{Im}(f(z)) = v_0$.

   (c) $\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{w_0}$.

   (d) $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = |w_0|$.

   Berikan penjelasan apakah arah sebaliknya dari masing-masing implikasi di atas berlaku.

3. Selidiki apakah limit berikut ada

   (a) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{z}$.

   (b) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{(\bar{z})^2}{z}$.

   (c) $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}}{(z)^2}$.

   (d) $\lim\limits_{z\to 0} \left(\dfrac{\bar{z}}{z}\right)^2$.

4. Diketahui $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0$ dan g terbatas di suatu persekitaran dari z_0. Tunjukkan bahwa

$$\lim_{z\to z_0} f(z)g(z) = 0.$$

2.3 Fungsi Analitik

Definisi 2.15. Diberikan $z_0 \in \mathbb{C}$. Misalkan fungsi $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ terdefinisi pada suatu persekitaran dari z_0.

1. **Turunan** dari $f(z)$ di z_0 dinotasikan dan didefinisikan sebagai berikut

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

   asalkan limitnya ada. Lebih lanjut, jika limit tersebut ada, f dikatakan memiliki turunan di z_0.

2. Fungsi f dikatakan **analitik** di z_0 jika terdapat suatu persekitaran $N(z_0, r)$ dari z_0 sehingga $f'(z)$ ada untuk setiap $z \in N(z_0, r)$.

3. Fungsi f dikatakan **analitik pada** $D \subseteq \mathbb{C}$ jika f analitik di setiap $z \in D$. Dalam hal f analitik pada $\mathbb{C}$, f disebut **fungsi utuh**.

4. Fungsi f dikatakan memenuhi **Persamaan Cauchy-Rieman (PCR)** di z_0, jika turunan parsial tingkat pertama dari $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ ada di $z_0 = x_0 + iy_0$ dan berlaku

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0) \quad \text{dan} \quad u_y(x_0, y_0) = -v_x(x_0, y_0).$$

Sifat dasar turunan (penjumlahan, perkalian skalar, aturan perkalian, aturan pembagian, aturan rantai) pada Kalkulus masih berlaku untuk kasus $\mathbb{C}$.

Teorema 2.16. *Diberikan fungsi $f(z) = u(x, v) + iv(x, y)$ yang terdefinisi pada* ***domain*** *(daerah terbuka dan terhubung) D yang memuat persekitaran $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$.*

- ☐ *Jika f memiliki turunan di z_0, maka f kontinu di z_0.*
- ☐ *Jika f memiliki turunan di z_0, maka f memenuhi Persamaan Cauchy Riemann di z_0. Lebih lanjut, $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$.*
- ☐ *Jika u_x, u_x, v_x, v_y ada di suatu persekitaran (x_0, y_0) dan kontinu di (x_0, y_0), serta Persamaan Cauchy Riemann terpenuhi, maka $f'(z_0)$ ada dan berlaku $f'(z_0) = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$.*
- ☐ *Jika $f'(z) = 0$ pada D, maka f konstan pada D.*
- ☐ *Jika f analitik pada D dan $f(z) = 0$ pada suatu domain atau ruas garis di dalam D, maka $f = 0$ pada D.*
- ☐ *Jika D merupakan suatu daerah yang simetris terhadap sumbu-x dan f analitik pada D, maka*

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}) \quad \forall z \in D$$

jika dan hanya jika $f(z)$ bilangan real untuk setiap bilangan real z di dalam D.

Fungsi-fungsi dasar pada Bagian 2.1 merupakan fungsi analitik pada domainnya.

Contoh 2.17. Selidiki titik di mana fungsi $f(z) = |z|^2$ analitik.

Penyelesaian: Misalkan $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Diperoleh

$$u(x, y) = x^2 + y^2 \quad \text{dan} \quad v(x, y) = 0.$$

Dapat dicek bahwa u_x, u_y, v_x, v_y ada di setiap titik di $\mathbb{C}$. Lebih lanjut, Persamaan Cauchy-Riemann hanya berlaku ketika $(x, y) = (0, 0)$. Dengan demikian, $f'(z)$ ada hanya di titik $z = 0$. Jadi, f tidak analitik di manapun. ■

Berikut contoh **PENTING** terkait fungsi analitik.

Contoh 2.18. Jika fungsi f dan konjugatnya $\bar{f}$ analitik pada suatu domain D, tunjukkan bahwa f konstan pada D

Penyelesaian: Misalkan $f = u + iv$. Karena f analitik, berlaku

$$u_x = v_y \quad \text{dan} \quad u_y = -v_x.$$

Di lain pihak, $\bar{f} = u - iv$ juga analitik, sehingga berlaku

$$u_x = -v_y \quad \text{dan} \quad u_y = v_x.$$

Berdasarkan empat persamaan tersebut, diperoleh $u_x = u_y = v_x = v_y = 0$. Secara khusus, diperoleh $f' = u_x + iv_x = 0$ pada D. Berdasarkan Teorema 2.16, f konstan pada D. ■

Beberapa aplikasi Contoh 2.18 diberikan sebagai berikut.

Contoh 2.19. Jika fungsi f analitik pada suatu domain D dan $|f|$ konstan pada D, tunjukkan bahwa f konstan pada D.

Penyelesaian: Misalkan $|f| = c$. Dibagi dua kasus:
Kasus $c = 0$**.** Diperoleh $u^2 + v^2 = |f|^2 = 0$, yang berakibat $u = v = 0$ pada D. Jadi, $f = 0$ (fungsi konstan) pada D.
Kasus $c \neq 0$**.** Diperoleh $f \neq 0$ pada D. Lebih lanjut,

$$f.\bar{f} = c^2 \implies \bar{f} = \frac{c^2}{f}.$$

Karena fungsi konstan dan f analitik pada D, diperoleh $\bar{f}$ juga analitik pada D. Berdasarkan Contoh 2.18, f konstan pada D. ■

Contoh 2.20. Fungsi g pada $\mathbb{C}$ dikatakan **unik** jika terdapat fungsi analitik tak nol f pada $\mathbb{C}$ sehingga berlaku

$$g(z)|f(z)|^2 = (f(z))^2 \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Tentukan semua fungsi analitik yang unik.

Penyelesaian: Misalkan g merupakan fungsi analitik yang unik dan f fungsi analitik tak nol yang memenuhi persamaan tersebut. Karena $f \neq 0$ pada $\mathbb{C}$, maka $g \neq 0$ pada $\mathbb{C}$. Lebih lanjut, persamaan dapat ditulis ulang menjadi

$$g(z)\overline{f(z)} = f(z) \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

atau ekuivalen dengan

$$\overline{f(z)} = \frac{f(z)}{g(z)} \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Karena f dan g analitik, diperoleh $\bar{f}$ analitik. Akibatnya, berdasarkan Contoh 2.18, f konstan pada D. Dengan demikian, g merupakan fungsi konstan pada $\mathbb{C}$. Lebih lanjut $|g| = 1$ pada $\mathbb{C}$. Dapat dicek, semua fungsi g yang memenuhi kondisi ini unik dan analitik.
Jadi, semua fungsi analitik yang unik adalah fungsi konstan dengan modulus 1. ■

Berikut diberikan suatu konsep yang memberikan ciri lain fungsi analitik dan sekaligus dapat digunakan untuk membangun suatu fungsi analitik.

Definisi 2.21. Diberikan fungsi dua peubah bernilai real $u(x, y)$ yang didefinisikan pada suatu domain $D \subseteq C$.

1. Fungsi u dikatakan **harmonik** pada D jika turunan parsial tingkat dua dari u ada dan kontinu pada D dan memenuhi persamaan
$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$
2. Fungsi dua peubah bernilai real v disebut sebagai **sekawan harmonik** u jika fungsi kompleks $f = u + iv$ memenuhi Persamaan Cauchy Riemann.

Untuk sebarang fungsi harmonik u pada D, berlaku $u_{xy} = u_{yx}$ pada D.

Teorema 2.22. *Diberikan fungsi $f(z) = u(x, v) + iv(x, y)$ yang terdefinisi pada domain D yang memuat persekitaran $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$.*

- ☐ *Jika f analitik pada D, maka u dan v harmonik pada D.*
- ☐ *Fungsi f analitik pada D jika dan hanya jika v sekawan harmonik u pada D.*

Contoh 2.23. Diberikan fungsi harmonik $u(x, y) = y^3 - 3x^2y$ pada $\mathbb{C}$. Tentukan fungsi utuh f yang memenuhi $\mathrm{Re}(f) = u$.

Penyelesaian: Misalkan v sekawan harmonik u. Diperoleh $u_x = v_y$ dan $u_y = -v_x$. Didapat

$$v_y = u_x = -6xy. \tag{1}$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas Persamaan (1) terhadap y, diperoleh

$$v = -3xy^2 + g(x). \tag{2}$$

Dengan menurunkan Persamaan (2) terhadap x, diperoleh

$$u_y = -v_x = 3y^2 - g'(x). \tag{3}$$

Di sisi lain, dengan menurunkan fungsi u pada soal terhadap y, diperoleh $u_y = 3y^2 - 3x^2$. Berdasarkan Persamaan (3), didapat $g'(x) = 3x^2$, yang berarti $g(x) = x^3 + C$.
Jadi, $f = u + iv$, dengan $v = x^3 - 3xy^2 + C$ dan C konstanta, merupakan fungsi analitik yang memenuhi.

Cara alternatif: Dengan mensubstitusi $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ dan $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ ke fungsi u, diperoleh

$$\begin{aligned} u &= \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^3 - 3\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) = -\frac{1}{2i}\left(z^3 - \bar{z}^3\right) \\ &= -\frac{\left(z^3 - \bar{z^3}\right)}{2i} = -\mathrm{Im}(z^3) = \mathrm{Re}(iz^3). \end{aligned}$$

Jadi, $f(z) = iz^3$ memenuhi kondisi yang diminta. Lebih lanjut, semua fungsi analitik yang memenuhi berbentuk $f(z) = iz^3 + C$ dengan C konstan.
Catatan: $iz^3 = i(x + iy)^3 = (y^3 - 3x^2y) + i(x^3 - 3xy^2)$. ■

Latihan 2.24.

1. Pelajari bukti Teorema 2.16 dan Teorema 2.22.
2. Selidiki titik di mana fungsi-fungsi berikut analitik:
   (a) $f(z) = z - \bar{z}$.
   (b) $f(z) = 2x + ixy^2$.
   (c) $f(z) = x^2 - iy^2$.
   (d) $f(z) = \frac{z}{z+1}$.
   (e) $f(z) = \frac{z^4+1}{z^4-1}$.
   (f) $f(z) = (x^2 - y^2) + 2ixy$.
3. Diberikan fungsi f analitik pada suatu domain D. Tunjukkan bahwa f konstan pada D jika salah satu kondisi berikut terpenuhi
   a $f(z)$ bernilai real untuk setiap $z \in D$.
   b $f(z)$ bernilai imaginer untuk setiap $z \in D$.
4. Tentukan fungsi analitik $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ pada domain yang sama dengan u.
   (a) $u(x, y) = x + y$.
   (b) $u(x, y) = x^2 - y^2$.
   (c) $u(x, y) = xy$.
   (d) $u(x, y) = x^2 - y^2 + 3y$.
   (e) $u(x, y) = e^x \cos y$.
   (f) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

Soal 2.25. Uji kemampuan dan pemahamanmu dengan mengerjakan soal-soal berikut ini:

Level: ***Easy***

1. Apakah ada fungsi analitik $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ dengan $u(x, y) = x^2 + y^2$?
2. Tentukan semua fungsi analitik f pada $\mathbb{C}$ sehingga $\text{Re}(f(z)) = 24$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.
3. Tentukan peta $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) > \text{Im}(z)\}$ oleh $f(z) = (1 - i)z$.
4. Tentukan peta garis $\text{Re}(z) = 1$ oleh $f(z) = \dfrac{z+1}{z}$.
5. Diketahui f fungsi analitik pada suatu domain D sehingga
$$22\,\text{Re}(f(z)) + 23\,\text{Im}(f(z)) = 24$$
untuk setiap $z \in D$. Tunjukkan bahwa f konstan pada D.

Level: ***Medium***

6. Tentukan peta $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ oleh $f(z) = z + \dfrac{1}{z}$.
7. Tentukan peta garis $\text{Re}(z) = 1$ oleh $f(z) = \dfrac{z}{z+1}$.
8. Tunjukkan bahwa untuk setiap $z \in \mathbb{C}$, $\sinh z \neq \cosh z$.
9. Misalkan $f(z) = u(x, y)+iv(x, y)$ fungsi utuh dengan sifat $u_x(x, y)+v_y(x, y) = 0$ pada $\mathbb{C}$. Tunjukkan bahwa terdapat $c, d \in \mathbb{C}$ sehingga $f(z) = icz + d$ pada $\mathbb{C}$.
10. Diketahui f fungsi analitik pada suatu domain D sehingga
$$\text{Re}(f(z))\,\text{Im}(f(z)) = 0$$
untuk setiap $z \in D$. Tunjukkan bahwa f konstan pada D.

Level: ***Hard***

11. Tentukan peta $\{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ oleh $f(z) = \dfrac{z-1}{z+1}$.
12. Tentukan
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin 2x}{2^2} + \cdots + \frac{\sin nx}{2^n}$$
13. Diberikan fungsi $u(x, y) = \dfrac{20x + 24y}{x^2 + y^2}$. Selidiki, apakah ada fungsi harmonik $v(x, y)$ sehingga $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik.
14. Tentukan semua bilangan kompleks C sehingga terdapat fungsi analitik tak nol f pada $\mathbb{C}$ yang memenuhi
$$\frac{1}{f(z)} + \frac{1}{\bar{f}(z)} = C$$
untuk setiap $z \in D$.
15. Misalkan $D_a = \{z \in \mathbb{C} : a < |z| < 1\}$. Diberikan fungsi $f : D_a \to D_b$ dengan
$$f(re^{i\theta}) = \left[\frac{(1-b)r + (b-a)}{1-a}\right] e^{i\theta}.$$
Tunjukkan bahwa f analitik pada D_a jika dan hanya jika $a = b$.

Soal 2.26. Soal-soal ONMIPA/KNMIPA tahun-tahun sebelumnya

1. (ONMIPA 2010) Tentukan peta dari himpunan $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 3, 0 < \arg(z) < \frac{\pi}{6}\}$ oleh pemetaan $f(z) = iz^3$.
2. (ONMIPA 2011) Tentukan luas daerah peta dari hasil pemetaan daerah
$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} : -1 < x \leq 2, -1 \leq y < 3\}$$
oleh $T(z) = (1 + i\sqrt{3})z + 2 - i$.
3. (ONMIPA 2013) Tentukan semua bilangan kompleks yang memenuhi $\sin z = 2$.
4. (ONMIPA 2013) Tentukan bayangan dari $D = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3}\}$ oleh $w = z^3$.
5. (ONMIPA 2013) Misalkan f dan konjugatnya merupakan fungsi analitik pada suatu domain terhubung. Buktikan bahwa f hanyalah fungsi konstan di domain tersebut.
6. (ONMIPA 2014) Diketahui polinomial $p(z)$ dan $q(z)$ sehingga berlaku
$$p(z)\cos^2 z + q(z)\sin^2 z = 2$$
untuk setiap $z \in \mathbb{C}$. Hitunglah $p(1) + q(1)$.
7. (ONMIPA 2014) Berikan sebuah contoh fungsi analitik tak konstan $f(z)$ di suatu himpunan buka $D \subseteq C$ sehingga titik limit dari himpunan pembuat nol fungsi f berada di luar D.
8. (ONMIPA 2014) Misalkan u fungsi harmonik pada daerah terhubung $\Omega \subseteq \mathbb{C}$.
   (a) Buktikan bahwa $f = u_x - iv_y$ merupakan fungsi analitik pada Ω.
   (b) Misalkan $u = \text{Re}(g)$ merupakan bagian real dari suatu fungsi analitik g. Buktikan bahwa $g' = f$.
9. (ONMIPA 2015) Hitung nilai dari
$$\lim_{z\to 0} \frac{1}{z^2} - \frac{1}{\sin^2 z}.$$
10. (ONMIPA 2015) Tentukan nilai k sehingga peta dari lingkaran $|z - 1| = k$ oleh fungsi kompleks $f(z) = \frac{z-3}{1-2z}$ adalah sebuah garis lurus.
11. (ONMIPA 2016) Diketahui fungsi $u(x, y) = e^x(x\cos y - y\sin y)$. Selidiki, apakah ada fungsi harmonik $v(x, y)$ sehingga $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ analitik. Jika ada, tuliskan fungsi tersebut.
12. (ONMIPA 2017) Diketahui f fungsi analitik pada $\mathbb{C}$ dengan $f(z) = u(x) + iv(y)$ untuk setiap $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Jika $f(20) = 17$ dan $f(17) = 20$, maka nilai dari $f(2017)$ adalah ....
13. (ONMIPA 2017) Untuk sebarang $a \in \mathbb{C}$ dan $r > 0$, didefinisikan
$$D_r^a = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}.$$
Jika fungsi $T(z) = \dfrac{z}{z+1}$ memenuhi
$$T^{-1}(D_r^0) = D_{2017r}^a,$$
maka $a = \ldots$.
14. (ONMIPA 2018) Apabila $f(z) = z\,\text{Re}(z) + \bar{z}\,\text{Im}(z) + \bar{z}$ terdiferensial di titik z_0, maka nilai dari $f'(z_0)$ adalah

15. (KNMIPA 2019) Jika diketahui fungsi

$$f(z) = f(x+iy) = x^2 + axy + by^2 + i(cx^2 + dxy + y^2)$$

analitik di seluruh bidang kompleks, maka nilai dari $f(i)$ adalah ....

16. (KNMIPA 2020) Cakram terbuka

$$A = \{z \in \mathbb{C} : \left|z - \frac{1}{3}\right| < r\}$$

dipetakan oleh fungsi $f(z) = \dfrac{z}{z+1}$ menjadi cakram terbuka

$$B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}\}.$$

Nilai r adalah ....

17. (KNMIPA 2021) Fungsi kompleks $f(z) = \frac{1}{z}$ memetakan garis $\text{Re}(z) = \frac{1}{4}$ ke lingkaran dengan jari-jari ....

18. (KNMIPA 2021) Diketahui fungsi $f(z)$ analitik pada domain D. Jika ada konstanta $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ yang tidak semuanya nol sehingga $c_1 f(z) + c_2 \overline{f(z)} = 0$ untuk setiap $z \in D$, maka buktikan bahwa $f(z)$ adalah fungsi konstan pada D.

19. (ONMIPA 2022) Jika $z = \sin\left(\frac{\pi}{4} + i\right)$, maka $\sqrt{2}\,(\text{Re}(z) + \text{Im}(z)) = \cdots$.

20. (ONMIPA 2022) Diberikan fungsi kompleks

$$f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}^3}{z^2} & , z \neq 0 \\ 0 & , z = 0. \end{cases}$$

Apakah fungsi f terdiferensial di $z = 0$? Jelaskan!

21. (ONMIPA 2023) Nilai m agar fungsi kompleks

$$f(z) = \frac{z - 2023}{1 - 3z}$$

memetakan lingkaran $|z - 3| = m$ menjadi garis lurus adalah ...

22. (ONMIPA 2023) Buktikan bahwa

$$|\tan(x+iy)| \geq \frac{|e^y - e^{-y}|}{e^y + e^{-y}},$$

untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$.

Hint Soal 2.26.

1. Misalkan $z = re^{i\theta}$. Nyatakan $f(z)$ ke dalam r dan θ.
2. Nyatakan T sebagai komposisi transformasi translasi, rotasi, dan latasi. Hanya transformasi latasi yang mengubah luas daerah.
3. Analog Contoh 2.6.
4. Misalkan $z = re^{i\theta}$. Nyatakan $f(z)$ ke dalam r dan θ.
5. Contoh 2.18.
6. Cek identitas trigonometri yang ada.
7. Cek fungsi $\sin(\frac{1}{z})$ atau sejenisnya.
8. Gunakan Teorema 2.16 bagian 2 atau 3.
9. Tinjau kasus z bilangan real. Ingat sifat-sifat di Kalkulus.
10. Nyatakan f ke dalam komposisi fungsi-fungsi pada Teorema 2.7 dan gunakan ide yang sama seperti Contoh 2.9.
11. Cek apakah u harmonik. Jika ya, gunakan cara seperti Contoh 2.23 untuk mencari v.
12. Gunakan Teorema 2.16 bagian 2 atau 3.
13. Nyatakan f ke dalam komposisi fungsi-fungsi pada Teorema 2.7 dan gunakan ide yang sama seperti Contoh 2.9.
14. Gunakan Teorema 2.16 bagian 2 atau 3.
15. Gunakan Teorema 2.16 bagian 2 atau 3.
16. Nyatakan f ke dalam komposisi fungsi-fungsi pada Teorema 2.7 dan gunakan ide yang sama seperti Contoh 2.9.
17. Gunakan ide yang sama seperti Contoh 2.9.
18. Manfaatkan Contoh 2.18.
19. Manfaatkan definisi $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.
20. Selidiki apakah $\lim_{z\to 0} \dfrac{\bar{z}^3}{z^3}$ ada. Serupa dengan Latihan 2.14 nomor 3.
21. Perhatikan $f(z) = -\dfrac{1}{3}\left(1 + \dfrac{6068}{1-3z}\right)$. Pecah f menjadi komposisi fungsi-fungsi yang ada di Teorema 2.7. Perhatikan untuk fungsi tipe $\frac{1}{z}$ hanya akan memetakan lingkaran yang melalui pusat $(0,0)$ ke garis.
22. Perhatikan bahwa $|\tan z|^2 = \dfrac{|\sin z|^2}{|\cos z|^2}$. Manfaatkan Teorema 2.5 Bagian 3 dan 4, dapat diperoleh hasil yang diinginkan. Ingat $0 \leq \sin^2 x, \cos^2 x \leq 1$.