

# Subruang

## Review Materi

Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$ . Subhimpunan tak kosong  $S \subseteq V$  disebut **subruang** jika  $S$  merupakan ruang vektor atas lapangan  $F$  terhadap operasi yang sama pada  $V$ . Berikut ini diberikan syarat perlu dan cukup suatu subhimpunan di ruang vektor  $V$  merupakan subruang.

**Teorema 1.** Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  dan subhimpunan tak kosong  $S \subseteq V$ . Himpunan  $S$  merupakan subruang di  $V$  jika dan hanya jika berlaku

1.  $(\forall a, b \in S) a + b \in S$
2.  $(\forall a \in S)(\forall \alpha \in F) \alpha a \in S$

Teorema 1 di atas dapat disederhanakan menjadi teorema berikut ini

**Teorema 2.** Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  dan subhimpunan tak kosong  $S \subseteq V$ . Himpunan  $S$  merupakan subruang di  $V$  jika dan hanya jika berlaku

$$(\forall a, b \in S)(\forall \alpha \in F) \alpha a + b \in S$$

Berikut ini diberikan sifat terkait dimensi dari subruang dari suatu ruang vektor berdimensi hingga.

**Sifat 3.** Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  dan subruang  $S$  di  $V$ . Jika  $V$  berdimensi hingga, maka berlaku  $\dim(S) \leq \dim(V)$ . Lebih lanjut, jika  $\dim(S) = \dim(V)$ , maka  $S = V$ .

Berikut ini diberikan sifat terkait dengan irisan dan jumlahan dari dua buah subruang.

**Sifat 4.** Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  dan dua subhimpunan tak kosong  $U, W \subseteq V$ . Jika  $U$  dan  $W$  masing-masing merupakan subruang maka berlaku

1.  $U \cap W$  merupakan subruang  $V$  dan  $U \cap W$  merupakan subruang terbesar yang termuat di  $U$  dan  $W$ .
2.  $U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$  merupakan subruang  $V$  dan  $U + W$  merupakan subruang terkecil yang memuat  $U$  dan  $W$ .

Berikut ini diberikan sifat terkait dengan hubungan dimensi dari irisan dan jumlahan dari dua buah subruang.

**Sifat 5.** Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  dan dua subhimpunan tak kosong  $U, W \subseteq V$ . Jika  $U$  dan  $W$  masing-masing merupakan subruang maka berlaku

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

**Teorema 6.** Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  dan dua subruang  $U, W$  di  $V$ . Kondisi berikut adalah ekuivalen:

- (a)  $U \cap W = \{0_V\}$
- (b) Setiap vektor  $v \in U + W$  dapat direpresentasikan secara tunggal dalam bentuk  $v = u + w$  dengan  $u \in U$  dan  $w \in W$ .

Ketika kondisi ekuivalensi dari Teorema 6 terpenuhi, jumlah  $U + W$  disebut sebagai **jumlah langsung** dari  $U$  dan  $W$ , dan dituliskan dengan  $U \oplus W$ .

## Latihan Soal

1. Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  dan dua subruang  $U, W$  di  $V$ . Buktikan bahwa  $U \cup W$  merupakan subruang di  $V$  jika dan hanya jika  $U \subseteq W$  atau  $W \subseteq U$ .
2. Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  dan tiga subruang  $U_1, U_2, U_3$  di  $V$ . Buktikan bahwa  $U_1 \cup U_2 \cup U_3$  merupakan subruang di  $V$  jika dan hanya jika terdapat  $i \in \{1, 2, 3\}$  sedemikian sehingga untuk setiap  $j \in \{1, 2, 3\}$  berlaku  $U_j \subseteq U_i$ .
3. Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  dan tiga subruang  $U_1, U_2, U_3$  di  $V$ . Jika  $V = U_1 \oplus U_2 = U_1 \oplus U_3$ , apakah selalu berlaku  $U_2 = U_3$ ?
4. Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$  dan subruang  $U$  di  $V$ . Jika terdapat dengan tunggal subruang  $W$  di  $V$  sedemikian sehingga  $V = U \oplus W$ , buktikan bahwa  $U = W$ .
5. Diberikan ruang vektor  $P_5(\mathbb{R})$  yaitu himpunan semua polinomial atas lapangan bilangan real  $\mathbb{R}$  dengan derajat paling tinggi 5. Kemudian dibentuk ruang-ruang bagian sebagai berikut

$$S_1 = \langle x \rangle, S_2 = \langle x^2 \rangle, S_3 = \langle x^3 \rangle$$

Buktikan bahwa terdapat subruang  $T$  di  $P_5(\mathbb{R})$  sedemikian sehingga berlaku  $P_5(\mathbb{R}) = T \oplus S_i$  untuk setiap  $i \in \{1, 2, 3\}$ .

6. Diberikan ruang vektor  $V = C[0, 3]$  atas lapangan  $\mathbb{R}$ . Selanjutnya didefinisikan himpunan  $V_1 = \{f \in V \mid f(1) = 0\}$  dan  $V_2 = \{f \in V \mid f(2) = 0\}$ .
  - (a) Buktikan bahwa  $V = V_1 + V_2$ .
  - (b) Apakah  $V = V_1 \oplus V_2$ ?
7. Diketahui  $U$  dan  $W$  masing-masing merupakan subruang dari  $\mathbb{R}^n$  dengan  $\dim(U) = 2$ . Buktikan bahwa  $U \subseteq W$  atau  $\dim(U \cap W) \leq 1$ .
8. Diberikan ruang vektor  $V$  berdimensi hingga atas lapangan  $F$ . Buktikan bahwa jika berlaku

$$T \cap (S + U) = T \cap S + T \cap U$$

untuk setiap subruang  $T, S, U$  dari  $V$ , maka  $\dim(V) \leq 1$ .

9. Diberikan ruang vektor  $V$  atas lapangan  $F$ . Diketahui himpunan  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\} \subseteq V$  merupakan himpunan bebas linear dan  $w \in V$ . Buktikan bahwa

$$\dim(\text{span}\{v_1 - w, v_2 - w, \dots, v_n - w\}) \geq n - 1$$

10. (ON MIPA 2015 Wilayah) Di ruang  $\mathbb{R}^3$ , subruang  $K$  dibangun oleh  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$  dan subruang  $L$  dibangun oleh  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ . Maka  $K \cap L = \dots$
11. (ON MIPA 2017 Wilayah) Misalkan  $K$  dan  $L$  dua subruang berbeda dari ruang vektor real  $V$ . Jika  $\dim(K) = \dim(L) = 4$ , maka dimensi minimal yang mungkin untuk  $V$  adalah ...
12. Misalkan  $K$  dan  $L$  dua subruang berbeda dari ruang vektor real  $V$ . Jika  $\dim(K) = \dim(L) = 4$  dan  $\dim(V) = 7$ , buktikan bahwa  $K \cap L \neq \{\mathbf{0}_V\}$