

Latihan Soal 5

1. A dan B bergiliran mengisi matriks kosong berukuran 2024×2024 . A memperoleh giliran pertama. Pada masing-masing giliran, setiap pemain memilih sebuah bilangan real dan mengisinya di tempat yang masih kosong. A menang apabila determinan matriks bernilai tak nol, dan B menang jika determinannya nol. Siapa yang memiliki strategi untuk menang?

2. Tunjukkan bahwa

$$\binom{p+q}{q} \binom{r}{r} + \binom{p+q-1}{q} \binom{r+1}{r} + \dots + \binom{q}{q} \binom{r+p}{r} = \binom{p+q+r+1}{p}.$$

3. Diberikan sebuah himpunan $S = \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$ dengan a_i merupakan bilangan bulat dan $1 \leq a_i \leq 99$. Tunjukkan bahwa terdapat dua himpunan bagian yang *disjoint* dan memiliki hasil jumlahan yang sama.
4. Tunjukkan bahwa dari 7 bilangan bulat positif yang tidak lebih dari 126, terdapat 2 bilangan, misalkan a dan b , yang memenuhi

$$b < a \leq 2b.$$

5. Tunjukkan bahwa suku ke- $(n+1)$ barisan Fibonacci, F_{n+1} , dengan $F_0 = 0$, memenuhi

$$F_{n+1} = \binom{n}{0} + \binom{n-1}{1} + \binom{n-2}{2} + \dots.$$

6. Untuk setiap bilangan asli $n \geq 2$, T_n adalah banyak himpunan bagian tak kosong S dari $\{1, 2, \dots, n\}$ yang mana rata-rata dari semua anggota S merupakan bilangan bulat. Tunjukkan bahwa $T_n - n$ bernilai genap.
7. Sembilan ilmuwan berkumpul pada suatu acara dan mereka mendapati bahwa untuk setiap tiga orang, terdapat setidaknya dua orang yang berbicara dengan bahasa yang sama. Apabila masing-masing ilmuwan menguasai paling banyak tiga bahasa, tunjukkan bahwa terdapat tiga ilmuwan yang berbicara dengan bahasa yang sama.
8. Diberikan bilangan asli n . Tunjukkan bahwa

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{4n}{4k+1} = 2^{4n-2}.$$

9. Diberikan bilangan asli n . Tunjukkan bahwa

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{n+1}{n+2} (1 + (-1)^n).$$

10. Diberikan bilangan bulat genap n . Nilai-nilai $1, 2, \dots, n^2$ akan diisikan pada matriks berukuran $n \times n$ secara urut dari kiri ke kanan, dan atas ke bawah. Kemudian, masing-masing nilai akan diwarnai merah atau hitam sedemikian sehingga banyak bilangan yang berwarna hitam sama dengan banyak bilangan yang berwarna merah di setiap baris maupun setiap kolom. Tunjukkan bahwa jumlahan dari bilangan berwarna merah sama dengan jumlahan dari bilangan berwarna hitam.