1. Misalkan $f \in C^2[0, N]$ dan $|f'(x)| < 1$, $f''(x) > 0$ untuk setiap $x \in [0, N]$. Misalkan $0 \leq m_0 < m_1 < \cdots < m_k \leq N$ adalah bilangan bulat sedemikian sehingga $n_i = f(m_i)$ juga merupakan bilangan bulat untuk $i = 0, 1, \ldots, k$. Misalkan $b_i = n_i - n_{i-1}$ dan $a_i = m_i - m_{i-1}$ untuk $i = 1, 2, \ldots, k$. Buktikan bahwa

$$-1 < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < \cdots < \frac{b_k}{a_k} < 1.$$

Solusi:

Diketahui bahwa f kontinu dan $f''(x) > 0$, sehingga f adalah fungsi yang cekung ke atas. Dengan menggunakan teorema nilai rata-rata, kita dapat menyatakan bahwa terdapat $c_i \in (m_{i-1}, m_i)$ sehingga

$$f'(c_i) = \frac{f(m_i) - f(m_{i-1})}{m_i - m_{i-1}} = \frac{b_i}{a_i}.$$

untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k$. Dengan kata lain kita punya informasi bahwa $-1 < f'(c_i) < 1$ untuk setiap i.

Jelas bahwa $c_i < c_{i+1}$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots, k$. Sekarang gunakan fakta bahwa $f'(x)$ adalah fungsi kontinu yang monoton naik, sebab $f \in C^2[0, N]$ dan $f''(x) > 0$ untuk setiap $x \in [0, N]$. Oleh karena itu berlaku

$$-1 < f'(c_1) < f'(c_2) < \cdots < f'(c_k) < 1.$$

Dengan demikian, kita memperoleh

$$-1 < \frac{b_1}{a_1} < \frac{b_2}{a_2} < \cdots < \frac{b_k}{a_k} < 1.$$

2. Misalkan $F : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang didefinisikan oleh

$$F(x) := \int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}.$$

Tunjukkan bahwa F adalah fungsi satu-ke-satu (injektif) dan tentukan daerah hasil (range) dari F.

3. Misalkan $x_1 = 0.8$ dan $y_1 = 0.6$. Didefinisikan

$$x_{n+1} = x_n \cos y_n - y_n \sin y_n, \quad y_{n+1} = x_n \sin y_n + y_n \cos y_n, \quad \text{untuk semua } n \geq 1.$$

Tentukan konvergensi dari barisan-barisan tersebut, dan jika konvergen, tentukan nilai limitnya.

4. Buktikan bahwa jika $f : [0, 1] \to [0, 1]$ adalah fungsi kontinu, maka barisan iterasi

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

konvergen jika dan hanya jika

$$\lim_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = 0.$$

5. Diketahui fungsi kontinu $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ memenuhi

$$xf(y) + yf(x) \leq 1, \quad \text{untuk semua } x, y \in [0,1].$$

Tunjukkan bahwa:

$$\int_0^1 f(x)\,dx \leq \frac{\pi}{4}.$$