1. Diberikan suatu fungsi kontinu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan didefinisikan bahwa $A = \{x \in [a, b] | f(x) \leq 0\}$. Jika A tidak kosong, buktikan bahwa $\sup A \in A$ dan $\inf A \in A$.

***Solusi*:**

Karena A adalah himpunan bagian tak kosong dari $[a, b]$ yang dimana jelas himpunan tersebut terbatas, maka pasti terdapat $\sup A$ dan $\inf A$. Misalkan $c = \sup A$ dan kita tahu menggunakan definisi supremum bahwa

- Untuk setiap $x \in A$, $x \leq c$.
- $\forall \epsilon > 0, \exists x \in A$ sehingga $c - \epsilon < x$.

Artinya untuk setiap $\epsilon > 0$, bilangan $c - \epsilon \in A$.

Teorema 1. *Misalkan $f : A \to \mathbb{R}$ dan c adalah titik akumulasi dari A. Maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekivalen:*

(i) $\lim_{x \to c} f(x) = L$.

(ii) Untuk setiap barisan (x_n) dalam A yang konvergen ke c, dengan $x_n \neq c$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, barisan $(f(x_n))$ konvergen ke L.

Didefinisikan barisan $(x_n) \in A$ dengan $x_n = c - \frac{1}{n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Dengan fakta bahwa $x_n \to c$ ketika $n \to \infty$ dan f kontinu pada $[a, b]$ (dengan c adalah titik akumulasi dari A), maka menggunakan teorema di atas diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_n) &\leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n \to \infty} f(x_n) &\leq 0 \\ f(c) &\leq 0 \end{aligned}$$

Dengan kata lain, $c = \sup A \in A$.

Analog untuk $\inf A$, misalkan $d = \inf A$ dapat dibuat barisan $(y_n) \in A$ dengan $y_n = d + \frac{1}{n}$ sehingga

$$\begin{aligned} f(y_n) &\leq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ \lim_{n \to \infty} f(y_n) &\leq 0 \\ f(d) &\leq 0 \end{aligned}$$

Dengan kata lain, $d = \inf A \in A$.

2. Dari hasil nomer 1, buktikan bahwa jika $f(a) < 0$ dan $f(b) > 0$ maka $f(\sup A) = 0$. Konsep ini selanjutnya kita kenal dengan teorema letak akar. Lebih umumnya, disebut teorema nilai antara, yakni untuk setiap k dengan $f(a) < k < f(b)$ terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian hingga $f(c) = k$.

***Solusi*:**

Dari hasil sebelumnya diperoleh bahwa $f(\sup A) \leq 0$. Sekarang andaikan $f(\sup A) < 0$, misalkan juga $c = \sup A$ maka karena f kontinu di c menggunakan definisi diperoleh $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sehingga $|x - c| < \delta \implies |f(x) - f(c)| < \epsilon$.

Dengan memilih $\varepsilon = -f(c)$ (jelas boleh karena $f(c) < 0$), maka diperoleh

$$\begin{aligned} |f(x) - f(c)| &< -f(c) \\ -f(c) < f(x) &< f(c) \\ 2f(c) < f(x) &< 0 \end{aligned}$$

Artinya untuk semua $x \in (c-\delta, c+\delta)$ berlaku $f(x) < 0$. Sekarang kita perlu membuktikan bahwa interval $(c, c+\delta)$ tidak kosong, kita akan menggunakan fakta bahwa $f(b) > 0$. Artinya $b \notin A$ dan pastinya dengan mudah berlaku $c \neq b$ dan $c < b$. Dengan menggunakan sifat kerapatan bilangan real diperoleh bahwa terdapat $x_0 \in (c, c+\delta) \subseteq (c, b)$ sehingga $f(x_0) < 0$.

Hal ini bertentangan dengan definisi $c = \sup A$, karena $x_0 \in A$ sehingga $x_0 \leq c$. Dengan demikian, kita memperoleh bahwa $f(\sup A) = 0$.

3. Buktikan bahwa jika $f : [a, b] \to [a, b]$ kontinu, maka terdapat $c \in [a, b]$ sedemikian hingga $f(c) = c$. Untuk soal-soal berikutnya, c disebut titik tetap (*fixed point*) jika $f(c) = c$.

***Solusi*:**

Misalkan $f : [a, b] \to [a, b]$ kontinu. Kita definisikan fungsi $g(x) = f(x) - x$. Maka, g adalah fungsi kontinu pada $[a, b]$ dan jelas bahwa $f(a) \geq a$ dan $f(b) \leq b$. Maka, kita punya $g(a) = f(a) - a \geq 0$ dan $g(b) = f(b) - b \leq 0$.

Dengan menggunakan teorema nilai antara, kita dapat menyimpulkan bahwa terdapat $c \in [a, b]$ sedemikian hingga $g(c) = 0$, atau dengan kata lain $f(c) = c$.

4. Buktikan bahwa fungsi $f(x) = \cos(\sin(x^2))$ mempunyai titik tetap.

***Solusi*:**

Perhatikan bahwa untuk fungsi $g(x) = f(x) - x = \cos(\sin(x^2)) - x$

- g adalah fungsi kontinu pada $\mathbb{R}$.
- $g(0) = \cos(\sin(0^2)) - 0 = \cos(0) = 1 > 0$.
- $g(1) = \cos(\sin(1^2)) - 1 < 0$ (karena $\cos(\sin(1)) < 1$).

Dengan menggunakan teorema nilai antara, kita dapat menyimpulkan bahwa terdapat $c \in [0, 1]$ sedemikian hingga $g(c) = 0$, atau dengan kata lain $f(c) = c$.

5. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi kontinu dan menurun. Buktikan bahwa:
   (a) f memiliki satu titik tetap yang tunggal
   (b) Berlaku alternatif berikut: himpunan $\{x \in \mathbb{R} \mid (f \circ f)(x) = x\}$ adalah tak hingga atau memiliki jumlah elemen ganjil.
6. Buktikan bahwa setiap fungsi kontinu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ terbatas (Gunakan konsep kontradiksi untuk membuktikan hal tersebut).
7. Buktikan bahwa setiap fungsi kontinu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mempunyai nilai maksimum dan minimum.
8. Buktikan bahwa tidak ada fungsi kontinu dan pada (surjective) yang memenuhi $f : [0, 1] \to (0, 1)$.
9. Carilah semua fungsi kontinu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sedemikian sehingga $x_1 - x_2 \in \mathbb{Q} \iff f(x_1) - f(x_2) \in \mathbb{Q}$. Jawaban. $f(x) = ax + b$ dengan $a \in \mathbb{Q}, a \neq 0$ dan $b \in \mathbb{R}$.
10. Misalkan $C > 0$ adalah konstanta sembarang. Carilah semua fungsi kontinu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi: $f(x) = f(x^2 + C)$, untuk semua $x \in \mathbb{R}$.