Analisis Kompleks

sekar.nugraheni@ugm.ac.id

Materi

1 Power series and elementary analytic function

1.1 Barisan dan Deret Bilangan Kompleks

Definisi 1. *Barisan $\{s_n\} \subset \mathbb{C}$ dikatakan konvergen ke $s \in \mathbb{C}$, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat bilangan asli $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_0$, berlaku $|s_n - s| < \epsilon$. Lebih lanjut, deret bilangan kompleks $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ dikatakan konvergen, jika barisan jumlahan parsial $s_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$ konvergen. Barisan yang tidak konvergen disebut barisan divergen.*

Note. Deret $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergen jika dan hanya jika $\sum_{k=0}^{\infty} Re(z_k)$ dan $\sum_{k=0}^{\infty} Im(z_k)$ konvergen.

Definisi 2. *Deret bilangan kompleks $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ dikatakan konvergen absolut jika deret bilangan real $\sum_{k=0}^{\infty} |z_k|$ konvergen.*

Lemma 3. *Jika deret $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergen absolut maka deret $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergen.*

Lemma 4. *Jika deret $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ dan $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergen absolut maka*

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k\right) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k\right)$$

dengan $c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$ konvergen absolut.

Teorema 5. ***Tes Rasio*** *Diberikan $z_k \in \mathbb{C}$ dengan*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{|z_{k+1}|}{|z_k|} = p.$$

Jika $p < 1$ maka $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergen absolut. Jika $p > 1$ maka $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ divergen.

Teorema 6. ***Tes Akar***. *Diberikan $z_k \in \mathbb{C}$ dengan*

$$\lim_{k\to\infty} |z_k|^{\frac{1}{k}} = p.$$

Jika $p < 1$ maka $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergen absolut. Jika $p > 1$ maka $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ divergen.

Definisi 7. *Deret $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ dengan $a_k, z \in \mathbb{C}$ dikenal sebagai power series di z_0.*

Dengan mengubah variabel dan mengganti $z - z_0$ menjadi z maka diperoleh power series di 0, dengan bentuk

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Kapan power series konvergen? Didefinisikan

$$R = \sup\left\{r \geq 0 : \text{ tdp } z \in \mathbb{C} \text{ shg } |z| = r \ \& \ \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \text{ konvergen}\right\}. \tag{1}$$

Diperhatikan bahwa R dapat mencapai ∞, jika supremumnya tidak ada.

Teorema 8. *Diberikan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k$ power series.*

1. *Deret* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k$ *konvergen absolut untuk* $|z| < R$

2. *Deret* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k$ *divergen untuk* $|z| > R$.

Note. Kita tidak dapat mengambil kesimpulan untuk kasus $|z| = R$, power series bisa konvergen, bisa konvergen tetapi tidak konvergen absolut atau tidak divergen.

Definisi 9. *Bilangan* R *yang didefinisikan pada (1) disebut dengan radius konvergensi dari power series* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k$.

Teorema 10. *Diketahui deret bilangan kompleks* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_k$.

1. *Jika nilai* $\lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ *ada maka*

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}.$$

2. *Jika nilai* $\lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}$ *ada maka*

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} |a_k|^{\frac{1}{k}}.$$

Note. Jika limit pada i ada maka limit pada ii ada dan menghasilkan nilai R yang sama.

1.2 Diferensial pada power series

Diperhatikan polinomial berikut:

$$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$$

memiliki derivatif sebagai berikut:

$$p'(z) = a_1 + 2a_2 z + \cdots + n a_n z^{n-1}.$$

Akibatnya, untuk power series

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \tag{2}$$

memiliki derivatif sebagai berikut:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}. \tag{3}$$

Akan tetapi karena yang dihitung merupakan jumlahan tak hingga, maka hal ini perlu dibuktikan.

1. Diperhatikan bahwa jika (2) konvergen untuk $|z| < R$ maka (3) konvergen untuk $|z| < R$.

2. Dengan demikian, $f(z)$ terdiferensial untuk $|z| < R$ dengan derivatif sesuai pada (3).

Lemma 11. *Diketahui* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *mempunyai radius konvergensi* R. *Dengan demikian,* $g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ *konvergen untuk* $|z| < R$.

Teorema 12. *Jika* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *mempunyai radius konvergensi* R, *maka* $f(z)$ *holomorfik pada* $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$ *dan*

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}.$$

Teorema 13. *Jika* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *mempunyai radius konvergensi* R, *maka untuk semua bilangan asli* n, *derivatif tingkat ke-*n, $f^{(n)}$ *ada pada himpunan* $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$. *Lebih lanjut,*

$$\begin{aligned} f^{(n)}(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1) a_k z^{k-n} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k z^{k-n}. \end{aligned}$$

Untuk power series $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ dengan radius konvergensi $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Untuk semua bilangan asli n, derivatif tingkat ke-n, $g^{(n)}$ ada pada himpunan $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$. Lebih lanjut,

$$\begin{aligned} g^{(n)}(z) &= \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (z - z_0)^{k-n}. \end{aligned}$$

1.3 Fungsi Spesial

1.3.1 Fungsi Eksponensial

Telah dikenalkan fungsi eksponensial $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, untuk x sebarang bilangan real.

Definisi 14. *Fungsi eksponensial pada himpunan kompleks didefinisikan dengan*

$$exp\ z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

Diperhatikan bahwa radius konvergensi untuk $\exp z$ diberikan dengan

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = 0.$$

Jadi $R = \infty$. Dengan demikian fungsi exp z konvergen absolut untuk setiap $z \in \mathbb{C}$. Selanjutnya, berdasarkan Teorema 12. diperoleh

$$\frac{d}{dz}\exp\ z = \sum_{k=1}^{\infty} k\frac{z^{k-1}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = \exp\ z.$$

Teorema 15. *Untuk $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ maka exp $(z_1 + z_2) = \exp(z_1)\exp(z_2)$.*

1.3.2 Fungsi Trigonometri

Diperhatikan bahwa

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \ \text{ dan } \ \sin z = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Jelas bahwa fungsi-fungsi ini konvergen absolut untuk setiap $z \in \mathbb{C}$. Dengan mensubstitusi $z = -z$, dapat dilihat bahwa $\cos z$ merupakan fungsi genap dan $\sin z$ merupakan fungsi ganjil. Lebih lanjut, $\cos 0 = 1$ dan $\sin 0 = 0$. Berdasarkan Teorema 12. diperoleh bahwa $\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z$ dan $\frac{d}{dz}\sin z = \cos z$.
Berdasarkan definisi power seriesnya dapat ditunjukkan bahwa $\exp iz = \cos z + i \sin z$. Lebih lanjut, $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$. Jadi, diperoleh

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) \ \text{ dan } \ \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Untuk rumus identitas fungsi trigonometri pada bilangan real masih bisa digunakan untuk fungsi trigonometri pada bilangan kompleks.

1.3.3 Fungsi Hiperbolik

Didefinisikan

$$\cosh z = \frac{1}{2}(e^{z} + e^{-z}) \ \text{ dan } \ \sinh z = \frac{1}{2}(e^{z} - e^{-z}).$$

Diperoleh derivatif

$$\frac{d}{dz}\cosh z = \sinh z \ \text{ dan } \ \frac{d}{dz}\sinh z = \cosh z.$$

Beberapa rumus yang dapat digunakan

1. $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$, untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.
2. $\cos iz = \cosh z$ dan $\sin iz = i \sinh z$.

1.3.4 Periode Fungsi Eksponensial dan Fungsi Trigonometri

Definisi 16. *Diberikan fungsi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Bilangan $p \in \mathbb{C}$ disebut sebagai periode untuk f, jika $f(z+p) = f(z)$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.*

Jelas jika $p \in \mathbb{C}$ periode dan $n \in \mathbb{Z}$ maka np juga merupakan periode.
Untuk fungsi eksponensial diperoleh $e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$, sehingga

$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z.$$

Dengan demikian, $e\pi i$ adalah periode untuk fungsi eksponensial $\exp z$.

1.3.5 Fungsi Logaritmik

Diberikan bilangan kompleks $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$ dan diperhatikan fungsi

$$\exp w = z. \tag{4}$$

Dengan demikian, jika w_1 solusi untuk (4) maka $w_1 + 2n\pi i$ juga merupakan solusi. Nilai-nilai inilah yang dikenal dengan logarima z, dan dinotasikan dengan $\log z$. Jadi, perlu diperhatikan bahwa logaritma bilangan kompleks merupakan fungsi bernilai banyak.
Akan ditentukan rumus dari $\log z$. Jika $w = x + iy$, maka

$$z = \exp w = \exp(x+iy) = e^x(\cos y + i \sin y).$$

Dengan mengambil nilai modulusnya, diperoleh bahwa $|z| = e^e$. Diperhatikan bahwa kedua ruas merupakan bilangan real. Jadi, $x = \ln |z|$. Dilain pihak, $y = \arg z$.

Definisi 17. *Diberikan $z \in \mathbb{C}$, dengan $z \neq 0$ maka logarima kompleks dari z adalah*

$$\log z = \ln |z| + i \arg z.$$

Principal value dari $\log z$ adalah nilai $\arg z$ mempunyai principal value Arg$z$, yaitu nilai tunggal dari argumen di interval $(-\pi, \pi]$. Nilai ini dinotasikan dengan

$$\text{Log } z = \ln |z| + i\text{Arg } z.$$

Agar fungsi bernilai tunggal, maka fungsi ini di definisikan pada himpunan bagian dari $\mathbb{C}$ yang dikenal sebagai *cut plane*, yaitu himpunan bilangan kompleks dengan menghilangkan sumbu bilangan real negatif.

Teorema 18. *Principal logaritm Log z kontinu dan holomorfik pada cut plane dan*

$$\frac{d}{dz}Log\ z = \frac{1}{z}.$$

Latihan

1. Tunjukkan bahwa deret bilangan kompleks $\sum_{k=0}^{\infty} z_k$ konvergen jika dan hanya jika $\sum_{k=0}^{\infty} Re(z_k)$ dan $\sum_{k=0}^{\infty} Im(z_k)$ konvergen.

2. Tentukan radius konvergensi dari

   a. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k z^k}{k}$

   b. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$

   c. $\sum_{k=0}^{\infty} k! z^k$

   d. $\sum_{k=0}^{\infty} k^p z^k$, untuk $p \in \mathbb{N}$.

3. Diperhatikan power series

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

   dengan $a_k = \frac{1}{2^k}$, jika k genap dan $a_k = \frac{1}{3^k}$, jika k ganjil. Tunjukkan bahwa tidak ada nilai untuk radius konvergensi. Tunjukan dengan menggunakan tes banding bahwa deret ini konvergen untuk $|z| < 2$.

4. Tunjukkan bahwa

   a. $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}$, untuk setiap $|z| < 1$

   b. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z+w)^k}{k!}$,

      untuk $z, w \in \mathbb{C}$.

5. Untuk $|z| < 1$, telah ditunjukkan bahwa

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^k + \cdots = \frac{1}{1-z}.$$

   Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{(1-z)^n} = \sum_{k=n-1}^{\infty} \binom{k}{n-1} z^{k-n+1},$$

   untuk setiap $|z| < 1$.

6. Untuk setiap $z, w \in \mathbb{C}$, tunjukkan bahwa

   a. $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$

   b. $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$

   c. $\sin(z+w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$

   d. $\cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$

7. Diperhatikan bahwa bilangan real yang memenuhi $\sin x = 0$ adalah $x = n\pi$, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$. Tunjukkan bahwa jika $z \in \mathbb{C}$ dan $\sin z = 0$ maka $z = n\pi$, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$ dan jika $z \in \mathbb{C}$ dan $\cos z = 0$ maka $z = \frac{(n+1)}{2}\pi$, untuk setiap $n \in \mathbb{Z}$.

8. Tentukan pembuat nol dari

   a. $1 + e^z$

   b. $1 + i - e^z$.

9. Tentukan himpunan periode dari $\sin z$.

10. Tunjukkan bahwa tidak ada periode lain selain $p = 2n\pi i$ untuk $n \in \mathbb{Z}$ untuk fungsi $\exp z$.

11. Tunjukkan bahwa

$$\text{Log } z_1 z_2 = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2 + 2n\pi i,$$

    untuk suatu n bilangan bulat tertentu. Berikan contoh eksplisit sehingga $\text{Log } z_1 z_2 = \text{Log } z_1 + \text{Log } z_2$.

12. Tentukan principal value dari i^i. Gambarkan path berikut:

    i. $\gamma(t) = e^{-it}$, $0 \leq t \leq \pi$

    ii. $\gamma(t) = 1 + i + 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$

    iii. $\gamma(t) = t + i \cosh t$, $-1 \leq t \leq 1$

    iv. $\gamma(t) = \cosh t + i \sinh t$, $-1 \leq t \leq 1$

13. Tentukan nilai dari

$$\int_{\gamma} x - y + ix^2 \, dz,$$

    dimana $z = x + iy$ dan γ adalah

    i. garis lurus yang memhubungkan 0 ke $1 + i$

    ii. garis lurus yang menghubungkan 0 ke i

    iii. garis yang paralel dengan sumbu axis dari i ke $1 + i$

14. Diberikan

$$\gamma_1(t) = 2 + 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$
$$\gamma_2(t) = i + e^{-it}, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

    Gambarkan path γ_1 dan γ_2. Berdasarkan definisi $\int_{\gamma} f = \int_a^a f(\gamma(t))\gamma'(t) \, dt$, hitunglah

    i. $\int_{\gamma_1} \frac{dz}{z-2}$

ii. $\displaystyle\int_{\gamma_2} \frac{dz}{(z-i)^3}$

15. Hitunglah $\displaystyle\int_{\gamma} |z|^2 \; dz$ dimana γ merupakan lingkaran berlawan arah jarum jam $|z-1| = 1$.

16. Untuk setiap fungsi berikut, tentukan antiderivatif dan hitunglah nilai integral untuk sebarang path mulus dari 0 ke i:

    i. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = z^2 \sin z$

    ii. $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = ze^{iz}$

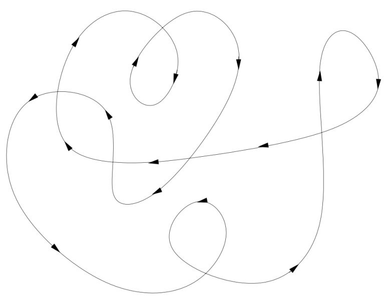
17. Hitunglah $\displaystyle\int_{\gamma} |z|^2 \; dz$, dimana

    i. γ menyatakan kontur yang menghubungkan titik 0 ke titik i, kemudian dari titik i ke titik $1+i$

    ii. γ menyatakan kontur yang menghubungkan titik 0 ke titik 1, kemudian dari titik 1 ke titik $1+i$

    iii. Dari jawaban Anda, mungkinkan terdapat antiderivatif untuk $f(z) = |z|^2$?

18. Hitunglah *winding number* untuk sebarang titik yang tidak terletak pada path berikut:



19. Buktikan jika D domain, γ kontur di D dan $f : D \to \mathbb{C}$ kontinu, maka

$$\int_{-\gamma} f = -\int_{\gamma} f.$$

20. Diberikan $f, g : D \to \mathbb{C}$ fungsi holomorfik, γ path mulus di D dengan ujung pangkal z_0 dan ujung ekor z_1. Buktikan bahwa

$$\int_{\gamma} fg' = f(z_1)g(z_1) - f(z_0)g(z_0) - \int_{\gamma} f'g.$$

21. Diketahui

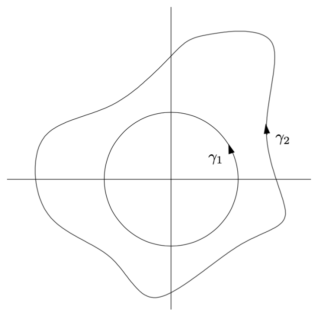
$$\gamma_1(t) = -1 + \frac{1}{2}e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$
$$\gamma_2(t) = 1 + \frac{1}{2}e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi$$
$$\gamma(t) = 2e^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Dengan menggunakan Teorema Cauchy diperluas, tunjukkan bahwa

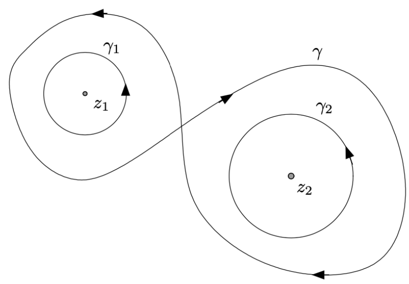
$$\int_{\gamma} f \; dz = \int_{\gamma_1} f \; dz + \int_{\gamma_2} f \; dz,$$

dengan $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)}$.

22. Diberikan γ_1 menyatakan lingkaran dengan pusat di titik 0 dan radius 1 berlawanan arah jarum jam. Jika $f(z) = \dfrac{1}{z}$, tunjukkan bahwa $\displaystyle\int_{\gamma_1} f = 2\pi i$. Diberikan γ_2 kontur tertutup sebagai berikut:



23. Diketahui D domain di $\mathbb{C} \setminus \{z_1, z_2\}$. Jika $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ kontur tertutup di D seperti berikut:



dan $\displaystyle\int_{\gamma_1} f = 3 + 4i$ dan $\displaystyle\int_{\gamma_2} f = 5 + 6i$, maka tunjukkan

$$\int_{\gamma} f.$$