1. Diberikan suatu matriks $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ dengan semua entrinya bernilai bilangan real. Tentukan semua matriks A yang memenuhi

$$A^2 - (2a^2 + 2d^2)A - 3(\det A)I = 0.$$

***Solusi*:**

Menggunakan Teorema Cayley-Hamilton, kita dapat menyatakan bahwa

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I = 0.$$

Dengan mengeliminasi A^2 dari kedua persamaan, kita memperoleh

$$(2a^2 + 2d^2 - a - d)A = -4(ad - bc)I.$$

Dari informasi ini perlu kita bagi kasus menjadi dua.

- Jika $b = 0$ dan $c = 0$, maka kita memperoleh

  $$(2a^2 + 2d^2 - a - d)A = -4adI.$$

  Dengan menyamakan entri diagonal utama, kita memperoleh

  $$\begin{aligned}(2a^2 + 2d^2 - a - d)a &= -4ad \\ (2a^2 + 2d^2 - a - d)d &= -4ad.\end{aligned}$$

  – Jika $a = 0$, maka kita memperoleh

    $$2d^2 - d = 0 \implies d(2d-1) = 0 \implies d = 0 \text{ atau } d = \frac{1}{2}.$$

    Jadi matriks yang memenuhi adalah $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ atau $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$. (Analog dengan $d = 0$.)

  – Jika $a \neq 0$ dan $d \neq 0$, maka kita memperoleh dua persamaan dengan hukum kanselasi

    $$\begin{aligned}2a^2 + 2d^2 - a - d &= -4d, \\ 2a^2 + 2d^2 - a - d &= -4a.\end{aligned}$$

    Dengan menyamakan kedua persamaan tersebut, kita memperoleh $a = d$. Subtitusikan kembali ke salah satu persamaan hingga didapatkan

$$\begin{aligned}
2a^2 + 2d^2 - a - d &= -4d \\
2a^2 + 2a^2 - a - a &= -4a \\
4a^2 + 2a &= 0 \\
2a(2a+1) &= 0.
\end{aligned}$$

Karena $a \neq 0$, maka haruslah $a = d = -\frac{1}{2}$.

- Jika $b \neq 0$ atau $c \neq 0$, maka kita memperoleh

2. Misalkan M adalah matriks invertibel berdimensi $2n \times 2n$, yang dinyatakan dalam bentuk blok sebagai

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}, \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix}.$$

Tunjukkan bahwa $\det M \cdot \det H = \det A$.

***Solusi*:**
Kita dapat menggunakan sifat perkalian dari matriks blok yaitu

$$I = MM^{-1} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AE+BG & AF+BH \\ CE+DG & CF+DH \end{bmatrix}.$$

Dengan menyamakan entri-entri dari kedua matriks tersebut, kita memperoleh

$$\begin{aligned}
AE + BG &= I, \\
AF + BH &= 0, \\
CE + DG &= 0, \\
CF + DH &= I.
\end{aligned}$$

3. Misalkan pemetaan $f : \mathbb{M}_n \to \mathbb{R}$ dari ruang $\mathbb{M}_n = \mathbb{R}^{n^2}$ (matriks $n \times n$ berentrikan bilangan real) ke $\mathbb{R}$ adalah linier, yaitu:

$$f(A+B) = f(A) + f(B), \quad f(cA) = cf(A)$$

untuk setiap $A, B \in \mathbb{M}_n$ dan $c \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa terdapat matriks $C \in \mathbb{M}_n$ yang unik sehingga

$$f(A) = \operatorname{tr}(AC)$$

untuk setiap $A \in \mathbb{M}_n$. (Jika $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$, maka $\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$.)

***Solusi*:**

Pertama-tama definisikan basis baku $E_{ij} \in \mathbb{M}_n$ dimana E_{ij} adalah matriks yang memiliki entri 1 pada baris i dan kolom j, dan 0 di tempat lainnya $(1 \leq i, j \leq n)$

4. (a) Tunjukkan bahwa untuk setiap $m \in \mathbb{N}$ terdapat suatu matriks real $m \times m$, misalkan A, sedemikian sehingga

$$A^3 = A + I,$$

di mana I adalah matriks identitas $m \times m$.

(b) Tunjukkan bahwa $\det A > 0$ untuk setiap matriks real $m \times m$ yang memenuhi $A^3 = A + I$.

***Solusi*:**

(a) Tinjau untuk $m = 1$, maka kita peroleh persamaan

$$a^3 = a + 1 \implies a^3 - a - 1 = 0.$$

Perhatikan bahwa fungsi $f(x) = x^3 - x - 1$ adalah fungsi kontinu yang monoton naik (tidak turun). Selanjutnya kita dapat tinjau bahwa

$$\begin{aligned} f(1) &= 1^3 - 1 - 1 = -1, \\ f(2) &= 2^3 - 2 - 1 = 5. \end{aligned}$$

Menggunakan teorema nilai antara, kita memperoleh bahwa terdapat suatu $\lambda \in (1, 2)$ sehingga $f(\lambda) = \lambda^3 - \lambda - 1 = 0$. Dengan demikian, kita memperoleh suatu matriks $A = [\lambda]$ yang memenuhi $A^3 = A + I$.

Selanjutnya secara umum untuk $m \geq 2$, kita dapat kontruksi matriks A sebagai sebagai matriks diagonal dengan entri λ. Karena perpangkatan dari matriks diagonal adalah dengan cara memangkatkan setiap entri diagonalnya, maka kita memperoleh

$$\begin{aligned} A^3 - A - I &= \begin{bmatrix} \lambda^3 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^3 - \lambda - 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^3 - \lambda - 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda^3 - \lambda - 1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Jadi terbukti matriks $A = \operatorname{diag}(\lambda, \lambda, \dots, \lambda)$ memenuhi $A^3 = A + I$.

(b) $\det A$ dapat dinyatakan sebagai perkalian semua nilai eigen dari A. Misalkan α adalah sembarang nilai eigen dari A, maka kita peroleh

$$Av = \alpha v$$

untuk suatu vektor tak nol v.

Disisi lain karena A memenuhi $A^3 - A - I = 0$, maka juga harus berlaku

$$\begin{aligned}(A^3 - A - I)v &= 0\\ A^3v - Av - Iv &= 0\\ \alpha^3 v - \alpha v - v &= 0\\ (\alpha^3 - \alpha - 1)v &= 0.\end{aligned}$$

Karena $v \neq 0$, maka harus berlaku $\alpha^3 - \alpha - 1 = 0$. Dengan demikian, setiap nilai eigen dari A adalah akar dari polinomial $x^3 - x - 1$.

Karena $f(x) = x^3 - x - 1$ adalah fungsi kontinu yang monoton naik, maka $f(x)$ tepat memiliki 1 akar real, yaitu λ dan sisa nya adalah akar kompleks yang saling konjugat misalkan saja μ dan $\overline{\mu}$. Sekarang perhatikan bahwa

$$\det A = \lambda^p \cdot \mu^q \cdot \overline{\mu}^q,$$

dengan p dan q mempresentasikan multiplisitas aljabar dari masing-masing nilai eigen $(n = p + 2p)$. Gunakan fakta bahwa

- $\lambda > 0$, sebab $\lambda \in (1, 2)$,
- $\mu\overline{\mu} = |\mu|^2 > 0$

maka kita memperoleh $\det A = \lambda^p |\mu|^{2q} > 0$.

5. Misalkan A dan B adalah matriks kompleks bujur sangkar dengan ukuran yang sama, dan

$$\operatorname{rank}(AB - BA) = 1.$$

Tunjukkan bahwa

$$(AB - BA)^2 = 0.$$

***Solusi*:**