Transformasi Linear

Review Materi

1 Transformasi Linear

Definisi 1. *Misalkan V dan W merupakan dua ruang vektor atas lapangan F. Pemetaan $T : V \to W$ disebut pemetaan linear jika memenuhi*

(1) $\boxed{(\forall a, b \in V)T(a+b) = T(a) + T(b)}$

(2) $\boxed{(\forall a \in V)(\forall \alpha \in F)T(\alpha a) = \alpha T(a)}$.

Definisi 1 ekuivalen dengan definisi berikut.

Definisi 2. *Misalkan V dan W merupakan dua ruang vektor atas lapangan F. Pemetaan $T : V \to W$ disebut pemetaan linear jika*

$$\boxed{T(\alpha a + b) = \alpha T(a) + T(b)}$$

untuk setiap $a, b \in V$ dan $\alpha \in F$.

Sifat 3. *Misalkan V dan W merupakan dua ruang vektor atas lapangan F. Jika pemetaan $T : V \to W$ merupakan pemetaan linear, maka berlaku:*

1. $\boxed{T(0_v) = 0_W}$

2. $\boxed{T(-v) = -T(v)}$ *untuk setiap $v \in V$.*

Definisi 4. *Misalkan V dan W merupakan dua ruang vektor atas lapangan F. Diketahui pemetaan $T : V \to W$ merupakan pemetaan linear, dapat dibentuk himpunan-himpunan berikut*

1. $\boxed{\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}}$

2. $\boxed{Im(T) = \{T(v) \in W \mid v \in V\}}$

Sifat 5. *Misalkan V dan W merupakan dua ruang vektor atas lapangan F. Jika pemetaan $T : V \to W$ merupakan pemetaan linear, maka $\ker(T)$ merupakan subruang di V dan $Im(T)$ merupakan subruang di W.*

Sifat 6. *Misalkan V dan W merupakan dua ruang vektor atas lapangan F. Diketahui pemetaan $T : V \to W$ merupakan pemetaan linear. Pemetaan T injektif jika dan hanya jika $\ker(T) = \{0_V\}$.*

2 Matriks Representasi Transformasi Linear

Misalkan V dan W masing-masing ruang vektor berdimensi n dan m, dan

$$\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \cdots, b_n\}$$

serta

$$\mathcal{C} = \{c_1, c_2, \cdots, c_m\}$$

berturut-turut merupakan basis untuk V dan W. Jika $T : V \to W$ merupakan transformasi linear, maka untuk setiap $b_i \in \mathcal{B}$ diperoleh $T(b_i) \in W$. Mengingat $\mathcal{C}$ adalah basis untuk W, maka terdapat dengan tunggal m elemen $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{im} \in F$ sedemikian sehingga

$$T(b_i) = \alpha_{i1}c_1 + \alpha_{i2}c_2 + \cdots + \alpha_{im}c_m$$

Dengan demikian, diperoleh koordinat vektor $T(b_i)$ relatif terhadap basis C adalah

$$\left[T(b_i)\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \alpha_{i1} \\ \alpha_{i2} \\ \vdots \\ \alpha_{im} \end{bmatrix}$$

Selanjutnya, untuk sebarang $v \in V$ terdapat dengan tunggal n vektor $r_1, r_2, \cdots, r_n \in F$ sedemikian sehingga

$$\boxed{v = r_1b_1 + r_2b_2 + \cdots + r_nb_n.}$$

Karena T merupakan tranformasi linear, diperoleh

$$\begin{aligned} T(v) &= T(r_1b_1 + r_2b_2 + \cdots + r_nb_n) \\ &= r_1T(b_1) + r_2T(b_2) + \cdots + r_nT(b_n) \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh

$$\begin{aligned} \left[T(v)\right]_{\mathcal{C}} &= r_1\left[T(b_1)\right]_{\mathcal{C}} + r_2\left[T(b_2)\right]_{\mathcal{C}} + \cdots + r_n\left[T(b_n)\right]_{\mathcal{C}} \\ &= \left[\left[T(b_1)\right]_{\mathcal{C}} \quad \left[T(b_2)\right]_{\mathcal{C}} \quad \cdots \quad \left[T(b_n)\right]_{\mathcal{C}}\right] \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix} \\ &= \left[\left[T(b_1)\right]_{\mathcal{C}} \quad \left[T(b_2)\right]_{\mathcal{C}} \quad \cdots \quad \left[T(b_n)\right]_{\mathcal{C}}\right] \left[v\right]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

Selanjutnya, matriks $\left[\left[T(b_1)\right]_{\mathcal{C}} \quad \left[T(b_2)\right]_{\mathcal{C}} \quad \cdots \quad \left[T(b_n)\right]_{\mathcal{C}}\right]$ disebut sebagai **matriks representasi** transformasi linear T relatif terhadap basis $\mathcal{B}$ dan $\mathcal{C}$ dan dinotasikan dengan

$$\boxed{\left[T\right]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \left[\left[T(b_1)\right]_{\mathcal{C}} \quad \left[T(b_2)\right]_{\mathcal{C}} \quad \cdots \quad \left[T(b_n)\right]_{\mathcal{C}}\right]}$$

Contoh 7. *Diberikan tranformasi linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dengan definisi*

$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b \\ a+c \end{bmatrix}$$

untuk setiap $\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Akan matriks representasi transformasi linear T relatif terhadap basis $\mathcal{B} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ dan $\mathcal{C} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$.
Diperhatikan bahwa:

(i) $T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(ii) $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$

(iii) $T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \Leftrightarrow \left[T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right)\right]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$

Dengan demikian diperoleh $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\1 & -1 & -1\end{bmatrix}$

3 Rank dan Nullitas

Sebelumnya, telah diketahui jika pemetaan $T; V \to W$ merupakan transformasi linear, maka $\ker(T) = \{v \in V \mid T(v) = 0_W\}$ dan $\text{Im}(T) = \{T(v) \mid v \in V\}$ berturut-turut merupakan subruang dari V dan W. Mengingat $\ker(T)$ dan $\text{Im}(T)$ merupakan subruang, maka keduanya mempunyai basis.

Definisi 8. *Diberikan transformasi linear $T : V \to W$.*

1. *Rank dari transformasi linear T, dinotasikan dengan rank(T) adalah dimensi dari Im(T).*

2. *Nullitas dari transformasi linear T, dinotasikan dengan null(T) adalah dimensi dari* $\ker(T)$.

Berikut ini diberikan hubungan antara rank dan nullitas dari suatu transformasi linear.

Teorema 9. *Diberikan transformasi linear $T : V \to W$. Jika V berdimensi hingga, maka berlaku*

$$\boxed{\textit{rank}(T) + \textit{null}(T) = \dim(V)}$$

Dari Teorema 9 di atas, diperoleh akibat berikut ini.

Teorema 10. *Diberikan transformasi linear $T : V \to W$. Jika $\dim(V) = n$ dan $\dim(W) = m$, maka berlaku*

$$\boxed{\textit{rank}(T) \leq \min\{n, m\}}$$

Teorema 11. *Diberikan matriks A berukuran $m \times n$ atas bilangan real dan misalkan $T_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ transformasi linear dengan definisi $T_A(v) = Av$ untuk setiap $v \in \mathbb{R}^n$. Berlaku*

$$\boxed{\textit{rank}(A) = \textit{rank}(T)}$$

Latihan Soal

1. Diberikan pemetaan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dengan definisi
$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b+1 \\ a+1 \\ b+1 \end{bmatrix}.$$
Jelaskan mengapa pemetaan T bukan merupakan transformasi linear.

2. Diberikan pemetaan $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dengan definisi
$$T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b \\ b+c \\ c+a \end{bmatrix}.$$
Buktikan bahwa pemetaan T merupakan transformasi linear.

3. Diketahui $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar dengan matriks. Diberikan sebarang matriks $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dan dibentuk pemetaan $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dengan definisi $T(B) = AB$ untuk setiap $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (a) Buktikan bahwa T merupakan transformasi linear.
   (b) Untuk $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan $\ker(T)$ dan $\mathrm{Im}(T)$.

4. Diketahui $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar dengan matriks. Diberikan sebarang matriks $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dan dibentuk pemetaan $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dengan definisi $T(B) = AB^t$ untuk setiap $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (a) Buktikan bahwa T merupakan transformasi linear.
   (b) Untuk $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, tentukan $\ker(T)$ dan $\mathrm{Im}(T)$.

5. Diketahui $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar dengan matriks. Diberikan sebarang matriks invertible $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dan dibentuk pemetaan $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dengan definisi $T(B) = A^{-1}BA$ untuk setiap $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (a) Buktikan bahwa T merupakan transformasi linear.
   (b) Apakah pemetaan T merupakan pemetaan injektif?

6. Diketahui $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar dengan matriks. Dibentuk pemetaan $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dengan definisi $T(B) = \dfrac{B + B^t}{2}$ untuk setiap $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (a) Buktikan bahwa T merupakan transformasi linear.

(b) Tentukan $\ker(T)$ dan $\mathrm{Im}(T)$.

7. Diketahui $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$ merupakan ruang vektor atas lapangan $\mathbb{R}$ terhadap operasi penjumlahan matriks dan perkalian skalar dengan matriks. Dibentuk pemetaan $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to M_{2\times 2}(\mathbb{R})$ dengan definisi $T(B) = \dfrac{B - B^t}{2}$ untuk setiap $B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (a) Buktikan bahwa T merupakan transformasi linear.
   (b) Tentukan $\ker(T)$ dan $\mathrm{Im}(T)$.

8. Diberikan pemetaan $T : M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dengan definisi
$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b+c & a-c \\ c-d & a+d \end{bmatrix}$$
untuk setiap $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
   (a) Buktikan bahwa T merupakan transformasi linear.
   (b) Tentukan $\ker(T)$.

9. Diberikan matriks A berukuran $m \times n$ dengan entri-entri bilangan real dan *null space* dari A, yakni $NS(A) = \{0\}$. Jika $\{v_1, v_2, \cdots, v_k\}$ merupakan himpunan bebas linear di $\mathbb{R}^n$, buktikan bahwa himpunan $\{Av_1, Av_2, \cdots, Av_k\}$ merupakan himpunan bebas linear.

10. Diberikan ruang vektor V dan W atas lapangan F dengan $\dim(V) = \dim(W) = n$ dan misalkan pemetaan $T : V \to W$ merupakan transformasi linear. Jika T injektif, buktikan bahwa T surjektif. Apakah sebaliknya berlaku? jelaskan jawaban Saudara.

11. Diketahui $P_n(\mathbb{R})[x]$ merupakan ruang vektor atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$ dan $U = \{p(x) \in P_n(\mathbb{R})[x] \mid p(1) = 0 \text{ dan } p'(2) = 0\} \subseteq P_n(\mathbb{R})[x]$. Buktikan bahwa $\dim(U) = n - 1$.

12. Jika $T : V \to W$ transformasi linear dengan $\mathrm{rank}(T) = 1$, buktikan bahwa $T^2 = kT$ untuk suatu skalar k.

13. (ON MIPA 2015 Wilayah) Misalkan U, V, W ruang-ruang vektor atas lapangan F dengan $\dim(V) = n$ dan $\dim(U) = m$. Misalkan pula $T : V \to W$ transformasi linear dan injektif, sedangkan $S : W \to U$ transformasi linear dan surjektif. Jika diketahui $\mathrm{Im}(T) = \ker(S)$, tentukan $\dim(W)$.

14. (ON MIPA 2016 Wilayah) Terhadap basis $\{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}$, matriks representasi transformasi linear $T : P_2 \to P_2$ adalah $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. Maka $T(x^2 - x) = \ldots$

15. (ON MIPA 2016 Wilayah) Pemetaan linear $T : P_2 \to \mathbb{R}^2$ memenuhi $T(1 + x) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $T(x + x^2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $T(1 + x^2) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Salah satu basis Inti$(T)$ adalah ....

16. (ON MIPA 2016 Wilayah) Diberikan matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, kita definisikan pemetaan $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ sebagai $T(X) = AX$, untuk setiap $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Jika nolitas$(A) = k$, tentukan nolitas$(T)$.

17. (ON MIPA 2017 Wilayah) Misalkan V ruang vektor fungsi-fungsi $ae^{3x}\sin x + be^{3x}\cos x$ atas lapangan bilangan real $\mathbb{R}$. Transformasi $T : V \to V$ didefinisikan $T(f) = f' + f$ untuk setiap $f \in V$. Tentukan matriks representasi T terhadap basis $\mathcal{B} = \{e^{3x}\sin x, e^{3x}\cos x\}$.

18. (ON MIPA 2017 Wilayah) Inti transformasi linier $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dibangun oleh

$$\{(1, 2, 3, 4), (0, 1, 1, 1)\}$$

Jika $T(a, b, c, d) = (a + b - c, x, 0, 0)$, maka $x = \ldots$

19. (ON MIPA 2017 Wilayah) Misalkan $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Misalkan T operator linear pada $\mathbb{R}^{2\times 2}$ dengan aturan $T(X) = AX - XA, \forall X \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Maka $\text{rank}(A) = \ldots$

20. (ON MIPA 2018 Wilayah) Jika $T : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ dengan $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} b & -a \\ d & -c \end{bmatrix}$ untuk semua bilangan real a, b, c, d. Himpunan

$$X = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

adalah basis untuk $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Maka $[T]_X = \ldots$

21. (ON MIPA 2018 Wilayah) Misalkan $T : \mathbb{R}^2 \to R^2$ adalah transformasi linear pencerminan terhadap garis $y = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$. Tentukanlah $T(-5, 4)$.