1 Bilangan Kompleks

1.1 Sistem Bilangan Kompleks

Definisi 1.1. Bilangan kompleks adalah pasangan terurut bilangan real (x, y) yang direpresentasikan dalam bentuk:

$$z = x + iy$$

dengan $i := (0, 1)$. Himpunan semua bilangan kompleks dinotasikan dengan $\mathbb{C}$.

Pada $\mathbb{C}$ dapat didefinisikan dua operasi biner, penjumlahan dan perkalian, sebagai berikut:

$$z_1 + z_2 := (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad \text{dan} \quad z_1 \cdot z_2 = z_1 z_2 := (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

untuk setiap $z_1 = x_1 + y_1, z_2 = x_2 + y_2 \in \mathbb{C}$.

Catatan: $i^2 = i \cdot i = -1$.

Teorema 1.2. $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ *merupakan lapangan (field).*

Untuk setiap $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, invers z terhadap operasi perkalian diberikan sebagai berikut:

$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Definisi 1.3. Diberikan $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

- $\operatorname{Re}(z) := x$ disebut **bagian real** dari z.
- $\operatorname{Im}(z) := y$ disebut **bagian imaginer** z.
- $\bar{z} := x - iy$ dari disebut **konjugat** dari z.
- $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ disebut **modulus** dari z.

Beberapa sifat dasar dan penting dari konsep-konsep pada Definisi 1.3 diberikan sebagai berikut:

Teorema 1.4. *Untuk setiap $z \in C$ berlaku*

- ☐ $\operatorname{Re}(z)^2 + \operatorname{Im}(z)^2 = |z|^2$.
- ☐ $\operatorname{Re}(z) \le |\operatorname{Re}(z)| \le |z|$.
- ☐ $\operatorname{Im}(z) \le |\operatorname{Im}(z)| \le |z|$.
- ☐ $\operatorname{Re}(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$.
- ☐ $\operatorname{Im}(z) = \dfrac{z - \bar{z}}{2i}$.
- ☐ $\bar{\bar{z}} = z$.
- ☐ $z \cdot \bar{z} = |z|^2$.
- ☐ $|\bar{z}| = |z|$.

Teorema 1.5. *Untuk setiap $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ berlaku*

- ☐ $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Ketaksamaan Segitiga).
- ☐ $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.
- ☐ $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
- ☐ $\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$.
- ☐ $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$.

Contoh 1.6. Tunjukkan bahwa $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im}(z)$ dan $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re}(z)$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.

Penyelesaian: Diambil sebarang $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Diperoleh

$$iz = -y + ix.$$

Dengan demikian,

$$\operatorname{Re}(iz) = -y = -\operatorname{Im}(z) \quad \text{dan} \quad \operatorname{Im}(iz) = x = \operatorname{Re}(z).$$

■

Contoh 1.7. Tunjukkan bahwa untuk $|z| \leq 1$ berlaku $|\operatorname{Re}(20z + \bar{z} + z^{24})| \leq 22$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} |\operatorname{Re}(20z + \bar{z} + z^{24})| &\leq |20z + \bar{z} + z^{24}| \\ &\leq |20z + \bar{z}| + |z^{24}| \\ &\leq |20z| + |\bar{z}| + |z^{24}| \\ &= 20|z| + |z| + |z|^{24} \\ &\leq 22. \end{aligned}$$

■

Contoh 1.8. Tunjukkan bahwa jika $|z + w| = |z| + |w|$, maka $w = 0$ atau $z = cw$ untuk suatu $c \geq 0$.

Penyelesaian: Misalkan $w \neq 0$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} & |z + w|^2 &&= (|z| + |w|)^2 \\ \iff & (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) &&= |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 \\ \iff & z\bar{z} + z\bar{w} + w\bar{z} + w\bar{w} &&= |z|^2 + 2|z||\bar{w}| + |w|^2 \\ \iff & |z|^2 + z\bar{w} + \overline{z\bar{w}} + |w|^2 &&= |z|^2 + 2|z\bar{w}| + |w|^2 \\ \iff & 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) &&= 2|z\bar{w}| \end{aligned}$$

Karena $\operatorname{Re}(z\bar{w}) = |z\bar{w}|$, diperoleh $z\bar{w}$ merupakan bilangan real non negatif, katakan a. Diperoleh

$$z\bar{w} = a \quad \Longrightarrow \quad z\bar{w}w = aw \quad \Longrightarrow \quad z|w|^2 = aw \quad \Longrightarrow \quad z = \frac{a}{|w|^2}w.$$

Diambil $c = \dfrac{a}{|w|^2} \geq 0$. Diperoleh $z = cw$. ■

Latihan 1.9.

1. Buktikan Teorema 1.2, Teorema 1.4, dan Teorema 1.5.
2. Jika $|z| = 1$, tentukan nilai maksimum dari $|z^3 + z + 2|$.
3. Jika $|z| = 2$, tunjukkan bahwa $\left|\dfrac{1}{z^4 - 4z^2 + 3}\right| \leq \dfrac{1}{3}$.
4. Selidiki kapan kesamaan pada Contoh 1.7 terjadi.
5. Tunjukkan untuk setiap $z, w \in \mathbb{C}$ berlaku
   (a) $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$.
   (b) $|1 + z\bar{w}|^2 + |z - w|^2 = (1 + |z|^2)(1 + |w|^2)$.
   (c) $|1 - z\bar{w}|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$.
   (d) $|z + \bar{w}|^2 - |z - w|^2 = 4\,\mathrm{Re}(z)\,\mathrm{Re}(w)$.
6. Diberikan $n \in \mathbb{N}$. Dengan memanfaatkan
$$1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z},$$
tunjukkan bahwa untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dengan $|z| < 1$ berlaku
$$\left|1 + z + z^2 + \cdots + z^n\right| < \frac{2}{1 - |z|}.$$

1.2 Bentuk Polar dan Eksponensial

Diberikan $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Perhatikan bahwa
$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$$

Definisi 1.10. Bilangan $z = x + iy \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ dapat dinyatakan dalam bentuk
$$z = r\,\mathrm{cis}\,\theta := r(\cos\theta + i\sin\theta)$$
dengan $r = |z|$ dan $\tan\theta = \frac{y}{x}$.

- Nilai θ tidak tunggal dan disebut dengan **argumen** dari z dan dinotasikan dengan $\arg(z)$.
- Dalam hal $-\pi < \theta \leq \pi$, θ disebut **nilai utama** dari $\arg(z)$ dan dinotasikan $\mathrm{Arg}(z)$.

Perhatikan bahwa
$$\arg(z) = \mathrm{Arg}(z) + 2n\pi$$
untuk $n \in \mathbb{Z}$.

Teorema 1.11. *Untuk setiap $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ dan $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ berlaku*

☐ $|\mathrm{cis}\,\theta| = 1$.

- ☐ $\operatorname{cis}(\theta_1 + \theta_2) = \operatorname{cis}\theta_1 \operatorname{cis}\theta_2$.
- ☐ $\operatorname{cis}(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\operatorname{cis}\theta_1}{\operatorname{cis}\theta_2}$.
- ☐ $\operatorname{cis} n\theta = (\operatorname{cis}\theta)^n \ \forall\ n \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$.
- ☐ $\arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$.

Definisi 1.12. Untuk setiap $\theta \in \mathbb{R}$, didefinisikan

$$e^{i\theta} := \operatorname{cis}\theta = \cos\theta + i\sin\theta.$$

Lebih lanjut, untuk setiap $z = x + iy \in \mathbb{C}$, didefinisikan

$$e^z = e^x.e^{iy}.$$

Fungsi eksponensial e^z merupakan perumuman fungsi eksponensial yang telah di kenal di kalkulus. Sebagian besar sifat operasi aljabar yang dimiliki dipertahankan.

Teorema 1.13. *Untuk setiap $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ dan $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ berlaku*

- ☐ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$.
- ☐ $e^{i\theta_1} e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$
- ☐ $\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}$
- ☐ $|e^{i\theta}| = 1$.
- ☐ $e^{i\theta} = e^{i\theta+2k\pi} \ \forall\ k \in \mathbb{Z}$.
- ☐ $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \ \forall\ n \in \mathbb{Q}$.
- ☐ $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$
- ☐ $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1-z_2}$
- ☐ $|e^z| = e^{\operatorname{Re}(z)}$.
- ☐ $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Salah satu manfaat bentuk polar/eksponensial adalah untuk mencari pangkat/akar bilangan kompleks.

Contoh 1.14. Tentukan nilai dari $(1-i)^{2024}$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa

$$1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\sqrt{2} - i\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

Diperoleh

$$(1-i)^{2024} = \left(\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}\right)^{2024} = \sqrt{2}^{2024} e^{(-\frac{\pi}{4}i)2024} = 2^{1012}e^{-506\pi} = 2^{1012}e^0 = 2^{1012}.$$

■

Contoh 1.15. Tentukan semua akar dari $z^n = 1$.

Penyelesaian: Misalkan $z = re^{i\theta}$ adalah akar dari persamaan $z^n = 1$. Diperoleh

$$\begin{aligned} & \left(re^{i\theta}\right)^3 && = 1 \\ \iff \quad & r^n e^{i(n\theta)} && = e^{0i}. \end{aligned}$$

Dengan demikian, diperoleh

$$r^n = 1 \quad \text{dan} \quad n\theta = 0 + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Didapat $r = 1$ dan $\theta = \frac{2k\pi}{n}$ dengan $k \in \mathbb{Z}$. Karena fungsi $e^{i\theta}$ periodik dengan periode 2π, cukup diperhatikan nilai θ yang berada pada interval $[0, 2\pi)$. Ada n nilai θ yang memenuhi, yakni $\theta = 0, \frac{2\pi}{n}, \frac{4\pi}{n}, \ldots, \frac{2(n-1)\pi}{n}$. Dengan demikian, semua akar dari $z^n = 1$ adalah

$$z_1 = e^{0i} = 1, \quad z_2 = e^{\frac{2\pi}{n}i}, \quad , \ldots, \quad z_n = e^{\frac{2(n-1)\pi}{n}i}.$$

■

Contoh 1.16. Diketahui a dan b $(b \neq 0)$ bilangan kompleks dengan sifat kedua akar persamaan kuadrat

$$z^2 + az + b^2 = 0$$

memiliki modulus yang sama. Tunjukkan bahwa $\dfrac{a}{b}$ merupakan bilangan real.

Penyelesaian: Misal $z_1 = re^{i\theta_1}$ dan $z_2 = re^{i\theta_2}$. Perhatikan bahwa

$$\frac{a^2}{b^2} = \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} = \frac{z_1}{z_2} + 2 + \frac{z_2}{z_1} = 2 + e^{i(\theta_1 - \theta_2)} + e^{i(\theta_2 - \theta_1)} = 2 + 2\cos(\theta_1 - \theta_2) \geq 0$$

Diperoleh $\dfrac{a^2}{b^2}$ merupakan bilangan real dan bernilai nonnegatif. Akibatnya, $\dfrac{a}{b}$ merupakan bilangan real. ■

Bentuk polar/eksponensial dapat dimanfaatkan juga untuk membuktikan identitas-identitas trigonometri tertentu.

Contoh 1.17. Tunjukkan identitas berikut: $\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$.

Penyelesaian: Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} & \operatorname{cis} 3\theta && = (\operatorname{cis}\theta)^3 = (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\ \iff \quad & \cos 3\theta + i\sin 3\theta && = (\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta). \end{aligned}$$

Dengan melihat bagian real kedua ruas persamaan tersebut, diperoleh bahwa

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta.$$

■

Beberapa persamaan dalam bilangan kompleks akan lebih mudah diselesaikan bila ditinjau bentuk polar/eksponensialnya.

Contoh 1.18. Tunjukkan bahwa bilangan kompleks z memenuhi

$$|20 - 24e^z| = |24 - 20e^{\bar{z}}|$$

jika dan hanya jika bagian real dari z bernilai nol.

Penyelesaian:

$$\begin{aligned}
& |20-24e^z| &&= |24-20e^{\bar{z}}| \\
\iff & |20-24e^z|^2 &&= |24-20e^{\bar{z}}|^2 \\
\iff & (20-24e^z)(20-24e^{\bar{z}}) &&= (24-20e^{\bar{z}})(24-20e^z) \\
\iff & 20^2-960(e^z+e^{\bar{z}})+24^2e^{z+\bar{z}} &&= 24^2-960(e^z+e^{\bar{z}})+20^2e^{z+\bar{z}} \\
\iff & 20^2-960(e^z+e^{\bar{z}})+24^2e^{z+\bar{z}} &&= 24^2-960(e^z+e^{\bar{z}})+20^2e^{z+\bar{z}} \\
\iff & (24^2-20^2)e^{z+\bar{z}} &&= 24^2-20^2 \\
\iff & e^{2\,\mathrm{Re}(z)} &&= 1 \\
\iff & \mathrm{Re}(z) &&= 0
\end{aligned}$$

■

Contoh 1.19. Tentukan nilai maksimum dari $|z|$ jika $\left|z+\frac{1}{z}\right|=3$.

Penyelesaian: Misalkan $z=re^{i\theta}$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $r \geq 1$ (Mengapa?). Diperoleh

$$\begin{aligned}
& \left|re^{i\theta}+\tfrac{1}{r}e^{-i\theta}\right|^2 &&= 9 \\
\iff & \left(re^{i\theta}+\tfrac{1}{r}e^{-i\theta}\right)\left(re^{-i\theta}+\tfrac{1}{r}e^{i\theta}\right) &&= 9 \\
\iff & r^2+e^{i2\theta}+e^{-i2\theta}+\tfrac{1}{r^2} &&= 9 \\
\iff & r^2+2\cos 2\theta+\tfrac{1}{r^2} &&= 9 \\
\iff & r^2+\tfrac{1}{r^2} &&= 9-2\cos 2\theta.
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa fungsi $f(r)=r^2+\frac{1}{r^2}$ naik tegas pada $[1,\infty)$, dengan demikian, memaksimalkan $|z|=r$ ekuivalen dengan memaksimalkan $r^2+\frac{1}{r^2}$.

Berdasarkan persamaan di atas, nilai maksimal $r^2+\frac{1}{r^2}$ tercapai ketika $\cos 2\theta=-1$. Dengan demikian,

$$r^2+\frac{1}{r^2}=11 \quad\Longrightarrow\quad r^4-11r^2+1=0 \quad\Longrightarrow\quad r^2=\frac{11+\sqrt{117}}{2} \quad\Longrightarrow\quad r=\sqrt{\frac{11+\sqrt{117}}{2}}.$$

Jadi, nilai maksimum dari z adalah

$$\sqrt{\frac{11+\sqrt{117}}{2}}$$

■

Latihan 1.20.

1. Buktikan Teorema 1.11 dan Teorema 1.13.
2. Hitung $(1+i\sqrt{3})^{2024}-(-\sqrt{3}+i)^{2024}$.
3. Tentukan semua akar dari $z^4+1=0$.
4. Tunjukkan bahwa $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$.
5. Tunjukkan bahwa jika $c \neq 1$ merupakan akar dari $z^n=1$, maka
$$1+c+c^2+\cdots+c^{n-1}=0.$$
6. Tentukan semua bilangan kompleks $z \neq 0$ sehingga $z-\dfrac{1}{z}$ bilangan real.

Soal 1.21. Uji kemampuan dan pemahamanmu dengan mengerjakan soal-soal berikut ini:

Level: ***Easy***

1. Tunjukkan bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{C}$ tak nol dengan $|a| = |b|$ berlaku $\frac{a}{b} + \frac{b}{a}$ merupakan bilangan real.
2. Tentukan semua penyelesaian dari $\left(1 + \frac{1}{z}\right)^5 = \frac{1}{z^5}$.
3. Tunjukkan bahwa jika $|z| < 1$ dan $|w| < 1$, maka
$$\left|\frac{z-w}{1-z\bar{w}}\right| < 1.$$
4. Tentukan semua anggota $z \in \mathbb{C}$ dengan $|z| = 1$ yang memaksimalkan $|z + 20 + 24i|$.
5. Tunjukkan bahwa untuk setiap $z, w \in \mathbb{C}$ berlaku
$$|z| + |w| \leq |z - w| + |z + w|.$$

Level: ***Medium***

6. Tentukan semua penyelesaian dari $z^4 = \bar{z}$.
7. Tunjukkan bahwa jika $|z| = |w| = 1$ dan $zw \neq -1$, maka $\frac{z+w}{1+zw}$ merupakan bilangan real.
8. Tunjukkan bahwa untuk sebarang $z, w \in \mathbb{C}$ berlaku
$$|zw| \geq |\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(w)| + |\operatorname{Im}(z)\operatorname{Im}(w)|.$$
9. Tentukan semua $z \in \mathbb{C}$ yang memenuhi
$$\operatorname{Re}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 1.$$
10. Tentukan semua $z \in \mathbb{C}$ yang memenuhi $|z + 2 + 3i| = 5$ dan $\arg\left(\frac{2z-3+i}{3z-2-i}\right) = \frac{\pi}{4}$.

Level: ***Hard***

11. Diketahui $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ dengan $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$.
    (a) Tunjukkan $|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3|$.
    (b) Tunjukkan jika $z_1 + z_2 + z_3 = 0$, maka $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1|$.
12. Diketahui $x, y, z \in \mathbb{R}$ dengan $\sin x + \sin y + \sin z = \cos x + \cos y + \cos z = 0$. Tunjukkan bahwa
$$\sin 2x + \sin 2y + \sin 2z = \cos 2x + \cos 2y + \cos 2z = 0.$$
13. Tunjukkan untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dengan $\operatorname{Re}(z) \geq 1$ berlaku $\left|\frac{z}{|z|} - 1\right| \leq |z - 1|$.
14. Diberikan $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ sehingga $|z_1| = |z_2| = |z_3| > 0$. Tunjukkan bahwa
$$\frac{(z_1+z_2)(z_2+z_3)(z_3+z_1)}{z_1z_2z_3}$$
merupakan bilangan real.
15. Tunjukkan bahwa jika $|z^2 + 1| < 1$, maka $|z + 1| \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Soal 1.22. Soal-soal ONMIPA/KNMIPA tahun-tahun sebelumnya

1. (ONMIPA 2011) Buktikan bahwa jika $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ dan $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$, maka z_1, z_2, z_3 merupakan titik-titik ujung sebuah segitiga sama sisi yang berada di salam lingkaran satuan.

2. (ONMIPA 2012) Diberikan $w, z \in \mathbb{C}$ dengan $|w| \neq |z|$. Jika
$$\mathrm{Re}\left(\frac{w+z}{w-z}\right) = \frac{(|w|+|z|)(|w|-|z|)}{2012}$$
maka $|w-z| = \ldots$

3. (ONMIPA 2013) Tentukan argumen dari bilangan kompleks $(\sqrt{3}-1)^6$.

4. (ONMIPA 2013) Misalkan a dan b adalah dua bilangan real konstan dan n bilangan bulat positif. Buktikan semua akar persamaan
$$\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)^n = a + bi$$
merupakan bilangan real jika dan hanya jika $a^2 + b^2 = 1$.

5. (ONMIPA 2015) Hitung bagian real dan imaginer dari
$$\frac{3i^{30} - i^{19}}{2i - 1}.$$

6. (ONMIPA 2015) Tentukan nilai
$$\min_{z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}} \frac{\mathrm{Im}(z^5)}{\mathrm{Im}(z)^5}$$

7. (ONMIPA 2016) Hitunglah
$$(i-1)^{49}\left(\cos\frac{\pi}{40} + i\sin\frac{\pi}{40}\right)^{10}.$$

8. (ONMIPA 2016) Carilah nilai maksimum dari $|z^2 + 2z - 3|$ pada cakram satuan tertutup $|z| \leq 1$.

9. (ONMIPA 2016) Diberikan bilangan kompleks z_1, z_2, z_3 yang memenuhi $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ dan $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Buktikan bahwa $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0$.

10. (ONMIPA 2017) Berapa banyak akar berbeda dari persamaan $z^{12} = 1$ yang bukan merupakan bilangan real?

11. (ONMIPA 2017) Misalkan λ bilangan kompleks yang memenuhi $\lambda^{2017} = 1$ dan $\lambda \neq 1$.
    (a) Buktikan bahwa $1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{2016}$ semua berbeda.
    (b) Hitung nilai dari $(1+\lambda)(1+\lambda^2)\ldots(1+\lambda^{2016})$

12. (ONMIPA 2018) Bilangan bulat terkecil $n \geq 2018$ sehingga $\left(\sqrt{3}+3i\right)^n$ merupakan bilangan real adalah ....

13. (ONMIPA 2018) Misalkan $z \in \mathbb{C}$ sehingga $|1 + z^2| < 1$. Tunjukkan bahwa $2|1+z|^2 \geq 1$.

14. (KNMIPA 2019) Jika $A = \{z \in \mathbb{C} : |z|^6 = 1\}$ dan $B = \{z \in \mathbb{C} : |z|^9 = 1\}$, maka banyak anggota $A \cup B$ adalah

15. (KNMIPA 2019) Diberikan $z_1, z_2, \ldots, z_n$ adalah bilangan -bilangan kompleks sehingga $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| > 0$. Buktikan bahwa

$$\operatorname{Re}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{z_j}{z_k}\right) = 0 \quad \text{jika dan hanya jika} \quad \sum_{k=1}^{n} z_k = 0.$$

16. (KNMIPA 2020) Banyak bilangan kompleks z sehingga $z^{2020} = 1$ tetapi $z^{20} \neq 1$ adalah ....

17. (KNMIPA 2020) Penyelesaian dari persamaan $ie^z + 1 = 0$ yang memenuhi $4 < |z| < 5$ adalah ....

18. (KNMIPA 2020) Misalkan $z \in \mathbb{C}$ sehingga $|z| + |z - 2020| = 2020$. Tunjukkan bahwa $|z - (20 + 20i)| \geq 20$.

19. (KNMIPA 2021) Jika a dan b merupakan bilangan real dengan $0 < a < b < 2\pi$ yang memenuhi persamaan $e^{ai} + e^{bi} = i\sqrt{2}$, maka nilai dari $\frac{b}{a}$ adalah ....

20. (KNMIPA 2021) Misalkan $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ dan $B = \{z = x + (4 - 2x)i : x \in \mathbb{R}\}$. Jika $C = \{a - b : a \in A, b \in B\}$, maka tentukan $\inf\{|c| : c \in \mathbb{C}\}$.

21. (ONMIPA 2022) Berapa bilangan kompleks tak real yang memenuhi $z^{20} = 22$ adalah ....

22. (ONMIPA 2022) Diberikan bilangan kompleks a, b dengan $|a| = |b| = 1$. Tunjukkan bahwa bilangan

$$z = (a + b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)$$

merupakan bilangan real dan $0 \leq z \leq 4$.

23. (ONMIPA 2023) Banyak bilangan kompleks tak real z yang memenuhi $|z - 20| + |z - 23| = 3$ adalah ...

Hint Soal 1.22.

1. Manfaatkan Latihan 1.9 No 5a untuk menunjukkan $|z_i - z_j|^2 = 3$ untuk setiap $i \neq j$.
2. Manfaatkan identitas pada Soal 1.21 No 10.
3. Nyatakan $\sqrt{3} - 1$ dalam bentuk $re^{i\theta}$.
4. Misalkan $z = x + iy$. Cek modulus kedua ruas persamaan; nyatakan dalam x dan y.
5. Kalikan pembilang dan penyebut dengan konjugat dari penyebut.
6. Ubah ekpresi ke dalam bentuk polar. Selanjutnya, manfaatkan identitas: $\sin 5\theta = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$.
7. Ubah semua ekspresi ke dalam bentuk polar.
8. Kuadratkan ekspresi dan manfaatkan sifat $|a|^2 = a\bar{a}$. Teorema Modulus Maksimum: nilai maksimal modulus fungsi analitik pada daerah tertutup sederhana, tercapai di batasnya, dalam hal ini $|z| = 1$. Selanjutnya, ubah z dalam bentuk polar $\cos\theta + i\sin\theta$.
9. Manfaatkan sifat: jika $|z| = 1$, maka $\bar{z} = \frac{1}{z}$. Tunjukkan $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 0$.
10. Manfaatkan Contoh 1.15.
11. (a) Manfaatkan fakta 2017 prima; (b) Manfaatkan sifat $z^{2017} - 1 = (z-1)(z-\lambda)\ldots(z-\lambda^{2016})$
12. Ubah ekspresi ke dalam bentuk polar.
13. Gunakan bukti dengan kontradiksi. Misalkan $z = x + iy$. Ubah kedua ketaksamaan ke dalam variabel x dan y, lalu jumlahkan.
14. Manfaatkan Contoh 1.15 dan prinsip inklusi-ekslusi.
15. Jabarkan bentuk $\left(\sum_{k=1}^n z_k\right)\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{z_k}\right)$ dan manfaatkan sifat $\bar{z} = \frac{|z|^2}{z}$.
16. Manfaatkan Contoh 1.15 dan prinsip pengurangan.
17. Nyatakan dalam bentuk $e^z = \cdots$.
18. Manfaatkan Contoh 1.8.
19. Tinjau konjugat dari persamaan yang dimiliki. Lalu, kalikan kedua persamaan tersebut.
20. A merupakan daerah di dalam dan pada lingkaran pusat $(0,0)$ jari-jari 1, sedangkan B merupakan garis $2x + y = 4$. Cari jarak terpendek dari garis ke lingkaran tersebut.
21. Serupa seperti Contoh 1.15. Perhatikan bahwa bilangan kompleks z merupakan bilangan real ketika $\arg(z)$ kelipatan π.
22. Perhatikan bahwa ketika $|w| = 1$, berlaku $\frac{1}{w} = \bar{w}$. Gunakan ide penjabaran ruas kiri persamaan pertama pada Contoh 1.8.
23. Manfaatkan Contoh 1.8.