# 3 Integral Fungsi Kompleks

## 3.1 Turunan dan Integral Fungsi Bernilai Kompleks

**Definisi 3.1.** Diberikan fungsi bernilai kompleks $w$ pada $[a, b]$ (atas satu variabel $t$):

$$w(t) = u(t) + iv(t),$$

dengan $u$ dan $v$ fungsi bernilai real dalam variabel $t$.

1. **Turunan** dari $w$, dinotasikan $w'(t)$ atau $\frac{d}{dt}w(t)$, adalah fungsi yang didefinisikan sebagai berikut
$$w'(t) = u'(t) + iv'(t),$$
asalkan masing-masing turunan $u$ dan $v$ ada di $t$.

2. Fungsi $W$ disebut **integral tak tentu** (antiderivatif) dari $w$ pada $[a, b]$ jika
$$\frac{dW(t)}{dt} = w(t), \quad \forall t \in [a, b].$$
Lebih lanjut, $W$ dinotasikan sebagai berikut: $\int w(t)dt$.

3. **Integral tertentu** dari $w$ pada $[a, b]$ didefinisikan sebagai
$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^b w(t)dt + i\int_a^b v(t)dt,$$
asalkan kedua integral di ruas kanan ada.

Sebagian besar (namun tidak semua) sifat turunan dan integral fungsi bernilai real tetap dipertahankan untuk fungsi bernilai kompleks.

**Teorema 3.2.** *Diberikan fungsi bernilai kompleks $w, w_1, w_2$ pada $[a, b]$.*

- ☐ *Jika turunan $w$, $w_1$ dan $w_2$ ada pada saat $t$, maka turunan dari $w_1 + w_2$ dan $cw$ ada saat $t$. Lebih lanjut,*
  1. $(w_1 + w_2)'(t) = w_1'(t) + w_2'(t)$.
  2. $(cw)'(t) = cw'(t)$.
- ☐ *Untuk sebarang $c \in \mathbb{C}$,* $\frac{de^{ct}}{dt} = ce^{ct}$.
- ☐ *Jika $W(t)$ dan $H(t)$ merupakan integral tak tentu dari $w(t)$ pada $[a, b]$, maka $W(t) - H(t)$ merupakan fungsi konstan pada $[a, b]$.*
- ☐ *Jika $w = u + iv$ dengan $U(t)$ dan $V(t)$ adalah antiderivatif dari $u(t)$ dan $v(t)$ pada $[a, b]$, maka*
$$W(t) = \int w(t)dt = U(t) + iV(t) + K.$$

- ☐ ***(Teorema Fundamental Kalkulus)*** *Jika $w$ terintegral pada $[a,b]$ dan $W$ merupakan integral tak tentu dari $w$ pada $[a,b]$, maka*

$$\int_a^b w(t)dt = W(b) - W(a).$$

- ☐ *Jika $w, w_1$ dan $w_2$ terintegral pada $[a,b]$, maka $w_1 + w_2$ dan $cw$ terintegral pada $[a,b]$. Lebih lanjut,*

  1. $\displaystyle\int_a^b (w_1(t) + w_2(t))\, dx = \int_a^b w_1(t)dt + \int_a^b w_2(t)dt.$
  2. $\displaystyle\int_a^b cw(t)dt = c\int_a^b w(t)dt.$

- ☐ *Jika $w$ terintegral pada $[a,c]$ dan $[c,b]$ dengan $a \leq c \leq b$, maka $w$ terintegral pada $[a,b]$. Lebih lanjut,*

$$\int_a^b w(t)dt = \int_a^c w(t)dt + \int_c^b w(t)dt.$$

**Contoh 3.3.** Tentukan $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it}dt.$

**Penyelesaian:** Misalkan $w(t) = e^{it}$. Perhatikan bahwa salah satu integral tak tentu (anti derivatif) dari $w$ adalah $W(t) = -ie^{it}$ sebab

$$\frac{d(-ie^{it})}{dt} = -i.ie^{it} = e^{it}.$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema Fundamental Kalkulus berlaku

$$\int_0^1 2t - 3it^2 dt = W\left(\frac{\pi}{4}\right) - W(0) = -ie^{\frac{\pi}{4}i} - 1 = \left(-1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}\right) - i\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

■

Mencari integral fungsi bernilai real terkadang akan lebih mudah jika dipandang dalam integral kompleks.

**Contoh 3.4.** Tentukan $\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \cos x dx.$

**Penyelesaian:** Perhatikan bahwa $e^x \cos x$ adalah bagian real dari $w = e^{(1+i)x}$. Mudah dicek bahwa salah satu integral tak tentu (anti derivatif) dari $w$ adalah $W(t) = \frac{1-i}{2}e^{(1+i)x}$ sebab

$$\frac{d\frac{1-i}{2}e^{(1+i)x}}{dx} = \frac{1-i}{2}(1+i)e^{(1+i)x} = e^{(1+i)x}.$$

Dengan demikian, berdasarkan Teorema Fundamental Kalkulus berlaku

$$\int_0^{\pi} e^{(1+i)x}dx = W(\pi) - W(0) = \frac{1-i}{2}\left(e^{(1+i)\pi} - 1\right) = \frac{1-i}{2}\left(-e^{\pi} - 1\right) = -\frac{e^{\pi}+1}{2} + i\frac{e^{\pi}+1}{2}.$$

Dengan demikian,

$$\int_0^{\pi} e^x \cos x dx = \operatorname{Re}\left(\int_0^{\pi} e^{(1+i)x}dx\right) = -\frac{e^{\pi}+1}{2}.$$

■

**Latihan 3.5.**

1. Buktikan Teorema 3.2.
2. Jika $w$ fungsi satu variabel bernilai kompleks dan $w'(t)$ ada, tunjukkan bahwa
$$\frac{dw^2(t)}{dt} = 2w(t)w'(t).$$
3. Tentukan nilai dari
$$\int_0^{\pi} \frac{dt}{\cos 2t + i \sin 2t}.$$
4. Untuk sebarang bilangan bulat $m$ dan $n$, tentukan
$$\int_0^{2\pi} e^{im\theta} e^{-in\theta} d\theta.$$
5. Diberikan fungsi terintegral $w : [a, b] \to \mathbb{C}$ pada $[a, b]$. Tunjukkan bahwa
$$\left| \int_a^b w(t)dt \right| \leq \int_a^b |w(t)|dt$$

## 3.2 Integral Lintasan

**Definisi 3.6.** Himpunan titik-titik $z = x + iy$ di $\mathbb{C}$ sehingga
$$x = x(t) \quad \text{dan} \quad y = y(t), \quad t \in [a, b],$$
untuk suatu fungsi kontinu $x(t)$ dan $y(t)$ pada $[a, b]$, disebut **kurva**.

Selanjutnya, diberikan kurva $C$ dengan persamaan parameter $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$. Kurva $C$ dikatakan/disebut

1. **sederhana** jika $C$ tidak memotong dirinya sendiri, yakni $z(t_1) \neq z(t_2)$ untuk setiap $t_1 \neq t_2$.
2. **tertutup** jika $z(a) = z(b)$.
3. **tertutup sederhana** jika $C$ tertutup dan sederhana kecuali saat $t = a$ atau $t = b$, yakni jika $t_1, t_2$ dua titik berbeda pada $[a, b]$ sehingga $z(t_1) = z(t_2)$, maka $\{t_1, t_2\} = \{a, b\}$.
4. **berorientasi positif** jika pergerakan kurva $C$ berlawanan arah jarum jam.
5. **berorientasi negatif** jika pergerakan kurva $C$ searah jarum jam.
6. **halus** jika $z$ diferensiabel dan $z'(t) \neq 0$ untuk setiap $t \in (a, b)$.
7. **kontur** jika $C$ merupakan suatu kurva yang merupakan gabungan beberapa kurva halus yang terhubung dalam suatu untaian.

Kurva $-C$ didefinisikan sebagai suatu kurva yang memuat semua titik dari $C$, namun dengan arah yang berlawanan, yakni dari $z_2 := z(b)$ ke $z_1 := z(a)$.

Salah satu kurva yang sering digunakan di Analisis Kompleks adalah kurva berbentuk lingkaran.

**Contoh 3.7.** Tentukan suatu parameterisasi dari kurva $C$ berbentuk lingkaran dengan pusat $z_0$ jari-jari $R$ dengan orientasi positif dan suatu parameterisasi dari kurva $-C$.

**Penyelesaian:**

- **Kurva $C$:** Dapat digunakan parameterisasi berikut:

$$z = z_0 + Re^{i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

- **Kurva $-C$:** Dapat digunakan parameterisasi berikut:

$$z = z_0 + Re^{-i\theta}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

■

**Definisi 3.8.** Diberikan kurva halus $C$ dengan persamaan parameter $z(t) = x(t) + iy(t)$, $a \leq t \leq b$.

1. **Panjang kurva** $C$ diberikan oleh formula

$$L_C = \int_a^b |z'(t)| dt.$$

2. Misalkan $f$ fungsi kontinu pada $C$. **Integral lintasan** fungsi $f$ di sepanjang $C$ dinotasikan dan didefinisikan sebagai berikut

$$\int_C f(z) dz := \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Misalkan $C$ merupakan suatu kontur yang merupakan gabungan kurva halus $C_1, C_2, \ldots, C_n$ dan fungsi $f$ kontinu pada $C$. **Integral lintasan** fungsi $f$ di sepanjang $C$ dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \cdots + \int_{C_n} f(z) dz.$$

**Teorema 3.9.** *Diberikan kurva halus $C$ dan $f, g$ fungsi kontinu pada $C$.*

- ☐ $\displaystyle\int_C (f(z) + g(z))\, dz = \int_C f(z) dz + \int_C g(z) dz.$
- ☐ $\displaystyle\int_C cf(z) dz = c \int_C f(z) dz$ *untuk setiap* $c \in \mathbb{C}$.
- ☐ $\displaystyle\int_{-C} f(z) dz = -\int_C f(z) dz.$
- ☐ *(**Teorema ML**) Jika terdapat $M > 0$ sehingga $|f(z)| \leq M$ untuk setiap $z \in C$, maka*

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq M L_C$$

*dengan $L_C$ menyatakan panjang kurva $C$.*

**Contoh 3.10.** Diberikan kurva $C$ berupa lingkaran pusat 0 jari-jari $R$ dengan orientasi positif. Tentukan

$$\int_C \frac{1}{z} dz.$$

**Penyelesaian:** Diambil parameterisasi dari $C$ sebagai berikut:

$$z = Re^{it}, \quad 0 \le t \le 2\pi.$$

Perhatikan bahwa untuk setiap $t \in [0, 2\pi]$ berlaku $z'(t) = iRe^{it}$. Dengan demikian,

$$\int_C \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} e^{-it}.ie^{it} dt = \int_0^{2\pi} \frac{i}{R} dt = \frac{2\pi i}{R}.$$

■

**Contoh 3.11.** Diberikan kurva $C$ yang terdiri dari penggal garis $C_1$ dari $z = 0$ sampai $z = 1$ dan penggal garis $C_2$ dari $z = 1$ sampai $z = i$. Hitunglah

$$\int_C ((2x + 2y) + ixy) dz.$$

**Penyelesaian:**

- Kurva $C_1$ mempunyai persamaan parameter $z = t, \quad 0 \le t \le 1$. Diperoleh $z'(t) = 1$, sehingga

$$\int_{C_1} (2(x + y) + ixy) dz = \int_0^1 2t dt = [t^2]_0^1 = 1.$$

- Kurva $C_2$ mempunyai persamaan parameter $z = t + i(1 - t)$ dari $t = 1$ sampai $t = 0$. Diperoleh $z'(t) = 1 - i$, sehingga

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} (2(x + y) + ixy) dz &= \int_1^0 (2 + i(t - t^2))(1 - i) dt = (1 - i) \int_1^0 (2 + i(t - t^2)) dt \\
&= (-1 + i) \int_0^1 (2 + i(t - t^2)) dt = (-1 + i)[2t + i(\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3})]_0^1 \\
&= (-1 + i)(2 + \frac{i}{6}) = -\frac{13}{6} + i\frac{11}{6}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\int_C (2(x + y) + ixy) dz = \int_{C_1} (2(x + y) + ixy) dz + \int_{C_2} (2(x + y) + ixy) dz = -\frac{7}{6} + i\frac{11}{6}.$$

■

**Contoh 3.12.** Jika $C$ adalah kurva berbentuk setengah lingkaran $z = 4e^{i\theta}$ dari $z = 4$ sampai $z = -4$, tunjukkan bahwa

$$\left| \int_C \frac{z}{z + 1} dz \right| \le \frac{16\pi}{3}$$

**Penyelesaian:** Perhatikan bahwa panjang kurva $C$ adalah $L = 4\pi$. Sekarang, perhatikan bahwa untuk sebarang $z \in C$ berlaku $|z + 1| \ge ||z| - 1| \ge |z| - 1$, sehingga diperoleh

$$\left| \frac{z}{z + 1} \right| \le \frac{|z|}{|z + 1|} \le \frac{|z|}{|z| - 1} = \frac{4}{3}.$$

Dengan demikian,

$$\left| \int_C \frac{z}{z + 1} dz \right| \le \frac{4}{3}.4\pi = \frac{16\pi}{3}.$$

■

**Contoh 3.13.** Diberikan kurva $C$ berupa lingkaran pusat $z_0$ jari-jari $R$ dengan orientasi positif dan $f$ fungsi kontinu pada $C$ dengan $|f(z)| \leq M$ pada $C$. Tunjukkan untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} dz \right| \leq \frac{2\pi M}{R^{n-1}}.$$

**Penyelesaian:** Perhatikan bahwa panjang kurva $C$ adalah $L = 2\pi R$. Sekarang, perhatikan bahwa untuk sebarang $z \in C$ berlaku $|z - z_0| = R$, sehingga diperoleh

$$\left| \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} \right| = \frac{|f(z)|}{|z-z_0|^n} \leq \frac{M}{R^n}.$$

Dengan demikian,

$$\left| \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^n} dz \right| \leq \frac{M}{R^n}.2\pi R = \frac{2\pi M}{R^{n-1}}.$$

■

**Latihan 3.14.**

1. Buktikan Teorema 3.9.
2. Tentukan

$$\int_C (iz-1) dz$$

dengan $C$ merupakan kurva dengan persamaan parameter $z(t) = t + it^2$, $-1 \leq t \leq 1$.

3. Jika $C$ adalah kurva berbentuk lingkaran pusat 0 jari-jari 2 dengan orientasi positif. Tunjukkan bahwa

$$\left| \int_C \frac{1}{z^2-1} dz \right| \leq \frac{4\pi}{3}.$$

4. Diberikan kurva $C$ berupa lingkaran pusat $z_0$ jari-jari $R$ dengan orientasi positif. Untuk setiap bilangan bulat $n$, tentukan

$$\int_C (z-z_0)^n dz.$$

5. Jika $f$ fungsi terdiferensial kontinu pada suatu daerah konveks $D$ dengan $|f'(z)| \leq 1$ pada $D$. Tunjukkan bahwa

$$|f(a) - f(b)| \leq |a-b|$$

untuk setiap $a, b \in \mathbb{C}$.

*Catatan:* $D$ dikatakan konveks jika untuk setiap $a, b \in D$, $\alpha a + (1-\alpha)b \in D$ untuk setiap $\alpha \in [0,1]$.

## 3.3 Sifat Integral Fungsi Kompleks

Diberikan fungsi bernilai kompleks $f$ pada suatu domain $D \subseteq \mathbb{C}$. Fungsi (analitik) $F$ disebut **antiderivatif** fungsi $f$ pada $D$ jika

$$F'(z) = f(z) \quad \forall z \in D.$$

Beberapa ekuivalensi antiderivatif diberikan dalam teorema berikut.

**Teorema 3.15.** *Pernyataan-pernyataan berikut ini ekuivalen*

1. $f$ *memiliki antiderivatif pada* $D$.
2. *Untuk sebarang* $z_1, z_2 \in D$ *dan sebarang kontur* $C$ *di dalam* $D$ *dari* $z_1$ *sampai* $z_2$, *nilai*

$$\int_C f(z)dz$$

*tidak bergantung pada kontur* $C$.

3. *Untuk sebarang kontur tertutup* $C$ *di dalam* $D$ *berlaku* $\displaystyle\int_C f(z)dz = 0$.

**Teorema 3.16 (Cauchy-Goursat).** *Diberikan* $C$ *kontur tertutup sederhana. Jika* $f$ *analitik di dalam dan pada* $C$, *maka*

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

Menariknya, jika $f$ analitik pada **domain terhubung sederhana** $D$, yakni setiap kontur tertutup sederhana di dalam $D$ hanya melingkupi titik-titik di dalam $D$, maka semua pernyataan pada Teorema 3.15 terpenuhi berdasarkan Teorema Cauchy-Goursat.

**Contoh 3.17.** Misalkan $C$ adalah kurva lingkaran dengan pusat 0 dan jari-jari 1. Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli $n$ berlaku

$$\int_C z^n dz = 0.$$

**Penyelesaian:** Perhatikan bahwa $C$ merupakan kontur tertutup sederhana dan fungsi $f(z) = z^n$ merupakan fungsi yang analitik pada seluruh bidang kompleks. Akibatnya, berdasarkan Teorema Cauchy-Goursat berlaku $\displaystyle\int_C z^n dz = 0$. ■

Sekarang, apa yang terjadi dengan integral lintasan pada $C$ bila di dalam kurva $C$ ada titik di mana fungsi integrand yang tidak analitik?

**Teorema 3.18.** *Diberikan* $C$ *kontur tertutup sederhana arah positif. Jika* $f$ *analitik pada dan di dalam* $C$ *dan* $z_0$ *di dalam* $C$, *maka berlaku*

1. ***Rumus Integral Cauchy:***

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}dz.$$

2. *Versi umum: untuk setiap bilangan bulat nonnegatif* $n$ *berlaku:*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}dz.$$

**Contoh 3.19.** Jika $C_1$ adalah kurva berbentuk lingkaran $|z| = \frac{1}{4}$ (arah positif), tentukan

$$\int_{C_1} \frac{z+1}{z^2(z-1)} dz.$$

**Penyelesaian:** Perhatikan bahwa titik $z = 0$ satu-satunya titik di mana fungsi $\frac{z+1}{z^2(z-1)}$ tidak analitik di dalam $C_1$.

Misalkan $f(z) = \dfrac{z+1}{z-1}$. Jelas bahwa $f$ analitik pada dan di dalam lingkaran $|z| = \frac{1}{4}$. Lebih lanjut,

$$f'(z) = \frac{-2}{(z-1)^2}$$

Berdasarkan rumus integral Cauchy, diperoleh

$$\int_{C_1} \frac{z+1}{z^2(z-1)} dz = \int_{C_1} \frac{f(z)}{z^2} dz = 2\pi i f'(0) = -4\pi i.$$

■

Secara umum, nilai integral dapat berbeda tergantung pada kurva pengintegralnya.

**Contoh 3.20.** Jika $C_2$ adalah kurva berbentuk lingkaran $|z-1| = \frac{1}{4}$ (arah positif), tentukan

$$\int_{C_2} \frac{z+1}{z^2(z-1)} dz.$$

**Penyelesaian:** Perhatikan bahwa titik $z = 1$ satu-satunya titik di mana fungsi $\frac{z+1}{z^2(z-1)}$ tidak analitik di dalam $C_2$.

Misalkan $f(z) = \dfrac{z+1}{z^2}$. Jelas bahwa $f$ analitik pada dan di dalam lingkaran $|z-1| = \frac{1}{4}$. Berdasarkan rumus integral Cauchy, diperoleh

$$\int_{C_2} \frac{z+1}{z^2(z-1)} dz = \int_{C_2} \frac{f(z)}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = 4\pi i.$$

■

Sekarang, bagaimana bila di dalam kurva, fungsi integrand tidak analitik di lebih dari satu titik?

**Teorema 3.21.** *Diketahui*

1. *$C$ kontur tertutup sederhana arah positif.*
2. *$C_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, kontur tertutup sederhana arah positif, berada di dalam interior $C$, dan interior mereka masing-masing saling asing.*

*Jika $f$ analitik di dalam dan pada $C$, kecuali di interior masing-masing $C_k$, maka*

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{C_k} f(z) dz.$$

Dengan demikian, jika fungsi integrand tidak analitik di lebih dari satu titik, bentuk beberapa kontur tertutup sederhana yang saling asing dengan masing-masing kontur hanya memuat satu titik tidak analitik dari fungsi integrand. Selanjutnya, manfaatkan rumus integral Cauchy untuk mencari integral di masing-masing kontur dan gunakan Teorema 3.21 untuk mendapatkan nilai integral terhadap kontur semula.

**Contoh 3.22.** Jika $C$ adalah kurva berbentuk lingkaran $|z| = 2$ (arah positif), tentukan

$$\int_C \frac{z+1}{z^2(z-1)}dz.$$

**Penyelesaian:** Berdasarkan Teorema 3.21,

$$\int_C \frac{z+1}{z^2(z-1)}dz = \int_{C_1} \frac{z+1}{z^2(z-1)}dz + \int_{C_2} \frac{z+1}{z^2(z-1)}dz$$

dengan $C_1$ adalah kurva berbentuk lingkaran $|z| = \frac{1}{4}$ (arah positif) dan $C_2$ adalah kurva berbentuk lingkaran $|z-1| = \frac{1}{4}$ (arah positif). Berdasarkan Contoh 3.19 dan Contoh 3.20 diperoleh

$$\int_C \frac{z+1}{z^2(z-1)}dz = -4\pi i + 4\pi i = 0.$$

■

Berikut diberikan beberapa akibat dari Rumus Integral Cauchy.

**Teorema 3.23.**

- ☐ *Jika $f$ analitik pada suatu titik $z_0 \in \mathbb{C}$, maka turunan $f$ di semua tingkat juga analitik di $z_0$.*
- ☐ *Jika $f$ kontinu pada suatu domain $D$ dan untuk setiap kontur tertutup $C$ di dalam $D$ berlaku $\displaystyle\int_C f(z)dz = 0$, maka $f$ analitik pada $D$.*
- ☐ *(**Teorema Liouville**) Jika $f$ analitik dan terbatas pada $\mathbb{C}$, maka $f$ konstan pada $\mathbb{C}$.*
- ☐ *(**Teorema Modulus Maksimum**) Jika $f$ analitik dan tidak konstan pada suatu domain $D$, maka $|f(z)|$ tidak pernah mencapai maksimum pada $D$, artinya tidak ada $z_0 \in D$ sehingga $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ untuk setiap $z \in D$.*
- ☐ *(**Lema Schwarz**) Jika $f$ analitik pada $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dengan $f(0) = 0$ dan $|f(z)| \leq 1$ pada $D$, maka $|f(z)| \leq |z|$ pada $D$ dan $|f'(0)| \leq 1$. Jika sebarang kesamaan terjadi, maka $f(z) = az$ untuk suatu $a \in \mathbb{C}$ dengan $|a| = 1$.*

**Contoh 3.24.** Carilah nilai maksimum dari $|z^2 + 2z - 3|$ pada cakram satuan tertutup $|z| \leq 1$.

**Penyelesaian:**Perhatikan bahwa fungsi $z^2+2z-3$ merupakan fungsi analitik pada cakram satuan tertutup $|z| \leq 1$. Berdasarkan Teorema Modulus Maksimum, nilai maksimum $z^2 + 2z - 3$ tercapai ketika $|z| = 1$, yang berarti

$$\max_{|z|\leq 1} |z^2 + 2z - 3| = \max_{|z|=1} |z^2 + 2z - 3| = \max_{|z|=1} \frac{|z^2 + 2z - 3|}{|z|} = \max_{|z|=1} \left| z + 2 - \frac{3}{z} \right| = \max_{|z|=1} |z + 2 - 3\bar{z}|$$

Perhatikan bahwa

$$|z + 2 - 3\bar{z}|^2 = (z + 2 - 3\bar{z})(\bar{z} + 2 - 3z) = 10z\bar{z} - 4z - 4\bar{z} + 4 = 14 - 8\,\mathrm{Re}(z)$$

Untuk $|z| = 1$, berlaku $-1 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1$, sehingga diperoleh nilai maksimum dari $|z+2-3\bar{z}|^2$ ketika $|z| = 1$ adalah 22. Dengan demikian, nilai maksimum dari $|z+2-3\bar{z}|$ pada cakram satuan tertutup adalah $\sqrt{22}$. ■

**Contoh 3.25.** Tunjukkan bahwa sebarang suku banyak berderajat $n \geq 1$

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0$$

memiliki setidaknya satu akar kompleks.

**Penyelesaian:**Diandaikan $P(z)$ tidak memiliki akar kompleks. Artinya $P(z) \neq 0$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.

Didefinisikan fungsi $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dengan $f(z) = \frac{1}{P(z)}$. Karena $P$ fungsi utuh, $f$ juga fungsi utuh. Lebih lanjut, karena $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$, diperoleh $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$. Artinya terdapat suatu $R > 0$ sehingga untuk $|z| > R$ berlaku $|f(z)| \leq 1$.

Di sisi lain, karena $f$ utuh, $f$ kontinu pada $\mathbb{C}$, khususnya pada $\{z : |z| \leq R\}$. Akibatnya, $f$ terbatas pada $\{z : |z| \leq R\}$. Dengan demikian, $f$ terbatas pada $\mathbb{C}$. Karena, $f$ utuh dan terbatas pada $\mathbb{C}$, maka $f$ konstan pada $\mathbb{C}$, yang berakibat $P$ juga konstan pada $\mathbb{C}$, suatu kontradiksi. ∎

**Latihan 3.26.**

1. Pelajari bukti Teorema 3.15 sampai Teorema 3.23.
2. Diketahui $C$ lintasan berbentuk segiempat dengan sudut-sudut $\pm 1$ dan $\pm i$ dengan arah positif. Hitunglah $\displaystyle\int_C f(z)dz$ jika
   (a) $f(z) = \dfrac{z}{z+1+i}$.
   (b) $f(z) = \dfrac{z+1}{2z+1}$.
   (c) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z(z-2)}$
   (d) $f(z) = \dfrac{64z^3}{(16z^4-1)}$.
3. Tentukan $\displaystyle\int_C \frac{1}{z^2(z^2-1)}dz$ dengan $C$ lintasan berbentuk lingkaran $|z-i| = 2$ arah positif.
4. Tentukan $\displaystyle\int_C \frac{2z^2-z-2}{z-w}dz$ dengan $C$ lintasan berbentuk lingkaran $|z| = 3$ arah positif dan $|w| \neq 3$.
5. Diketahui $f$ fungsi analitik pada $\mathbb{C}$ dan $|f(z)| \geq 1$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ dengan $|z| \leq 1$. Tunjukkan bahwa $f$ konstan pada $\mathbb{C}$.
6. Diketahui $f$ analitik dan tidak konstan pada suatu domain $D$. Jika $f(z) \neq 0$ pada $D$, tunjukkan bahwa $|f(z)|$ tidak pernah mencapai minimum pada $D$.
7. Diberikan $f$ fungsi analitik pada $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dengan $f(0) = 0$ dan $|f(z)| \leq 1$ pada $D$. Misalkan $g : D \to \mathbb{C}$ dengan
$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)}{z}, & z \neq 0 \\ f'(0), & z = 0. \end{cases}.$$
   Tunjukkan bahwa $g$ merupakan fungsi analitik pada $D$ dan berlaku $|g(z)| \leq 1$ pada $D$.

**Soal 3.27.** Uji kemampuan dan pemahamanmu dengan mengerjakan soal-soal berikut ini:

**Level**: ***Easy***

1. Misalkan $C$ adalah kurva dengan persamaan parameter $z(t) = t + it^2$, $0 \le t \le 2\pi$. Tentukan nilai dari
$$\int_C |z|^2 dz.$$

2. Tentukan nilai dari
$$\int_C \frac{e^{24z}}{z} dz.$$
dengan $C$ kurva lingkaran pusat 0 jari-jari 1 dengan orientasi positif.

3. Diberikan kurva $C$ berupa lingkaran pusat 0 jari-jari 2 dengan orientasi positif. Tunjukkan bahwa
$$\left| \int_C \frac{e^z}{z^2+1} dz \right| \le \frac{4\pi e^2}{3}.$$

4. Diberikan kurva $C$ berupa lingkaran pusat 0 jari-jari 1 dengan orientasi positif. Untuk setiap bilangan bulat $m$ dan $n$, tentukan
$$\int_C z^n \bar{z}^m dz.$$

5. Diberikan kurva $C$ berupa lingkaran pusat 0 jari-jari 1 dengan orientasi positif. Tentukan
$$\int_C \left( z + \frac{1}{z} \right)^{2024} dz.$$

**Level**: ***Medium***

6. Tentukan nilai dari
$$\int_C \csc z dz$$
dengan $C$ lingkaran pusat 0 jari-jari 4 dengan orientasi positif.

7. Untuk setiap $R > 0$, misalkan $C_R$ kurva lingkaran pusat 0 dan jari-jari $R$ dengan orientasi positif. Tentukan nilai dari
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} \frac{2z^2-1}{z^4+5z^2+4} dz.$$

8. Tunjukkan bahwa jika $|a| < r < |b|$ dan $C$ merupakan kurva lingkaran dengan pusat 0 dan jari-jari $r$ arah positif, maka
$$\int_C \frac{1}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{2\pi i}{a-b}.$$

9. Tentukan nilai dari
$$\int_0^\pi e^{24\cos x} \cos(24 \sin x) dx.$$

10. Tunjukkan bahwa untuk setiap $a, b \in \mathbb{C}$ dengan $\mathrm{Re}(a), \mathrm{Re}(b) < 0$ berlaku
$$|e^a - e^b| \le |a - b|.$$

**Level**: ***Hard***

11. Tentukan semua fungsi utuh $f$ yang memenuhi $|f(z)| \leq |z|$ untuk setiap $z \in \mathbb{C}$.

12. Jika $f$ fungsi kontinu pada kurva $C$ berupa lingkaran pusat 0 jari-jari 1 dan $|f(z)| \leq 1$ pada $C$, tunjukkan bahwa
$$\left| \int_C f(z)dz \right| \leq 4.$$

13. Diketahui $f$ fungsi kontinu pada daerah $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ dengan $\lim_{z\to\infty} zf(z) = A$ ada. Misalkan $C_R$ merupakan kurva berbentuk setengah lingkaran $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta\pi$ dengan $R \geq 1$. Tentukan
$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz.$$

14. Jika $f$ analitik di dalam dan pada suatu lintasan tertutup sederhana $C$ dan $z_0 \neq C$, tunjukkan bahwa
$$\int_C \frac{f'(z)}{z - z_0} dz = \int_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

15. Diketahui $f$ fungsi utuh dengan sifat terdapat bilangan real $u_0$ sehingga $\mathrm{Re}(f(z)) \leq u_0$ untuk semua $z \in \mathbb{C}$. Tunjukkan bahwa $f$ merupakan fungsi konstan.

**Soal 3.28.** Soal-soal ONMIPA/KNMIPA tahun-tahun sebelumnya

1. (ONMIPA 2010) Tentukan nilai integral berikut jika $C$ adalah lingkaran $|z+5|=3$ dari
$$\int_C \frac{dz}{z^3(z+4)}.$$

2. (ONMIPA 2010) Dengan menggunakan $\displaystyle\int_C \frac{dz}{z+1}$ untuk $C$ lingkaran $|z|=2$, hitunglah
$$\int_C \frac{(x+1)dy - ydx}{(x+1)^2+y^2}.$$

3. (ONMIPA 2010) Misalkan $f(z)$ fungsi analitik di $z_0$ dengan $f(z_0)\neq 0$. Jika $C$ adalah lingkaran yang cukup kecil yang melingkari $z_0$, hitunglah
   (a) $\displaystyle\int_C \frac{f(z)-f(z_0)}{(z-z_0)^2}dz.$
   (b) $\displaystyle\int_C \frac{dz}{f(z)-f(z_0)}dz.$

4. (ONMIPA 2011) Berapakah nilai integral berikut?
$$\int_{|z-a|=a} \frac{zdz}{z^4-1}$$
dengan $a\in\mathbb{R}$ dan $a>1$.

5. (ONMIPA 2011) Misalkan $f(z)$ fungsi analitik yang memenuhi $|f(z)|\leq 1+|z|^{\frac{3}{2}}$. Tuliskan semua fungsi analitik yang mungkin!

6. (ONMIPA 2012) Nilai $\displaystyle\int_C \frac{1}{1-\cos z}dz$ dengan $C$ lingkaran pusat 0 jari-jari 2 adalah ....

7. (ONMIPA 2013) Misalkan $r, R$ dua konstanta dengan $0<r<R$. Misalkan $\gamma_r$ lingkaran $z=re^{i\theta}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$. Hitung nilai $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r}\frac{R+z}{(R-z)z}dz.$

8. (ONMIPA 2013) Jika $C$ adalah lingkaran $|z|=1$, maka nilai dari $\displaystyle\int_C \frac{\cos z}{\sin z}dz = \ldots.$

9. (ONMIPA 2014) Misalkan $f(z)$ fungsi yang analitik di $|z|<R$ dengan $R>1$. Hitunglah
$$\int_0^{2\pi} f(e^{it})\cos^2\left(\frac{1}{2}t\right)dt,$$
nyatakan dalam $f(0)$, $f'(0)$, ....

10. (ONMIPA 2015) Hitung nilai
$$\int_C \frac{e^z}{(z+\pi i)}dz$$
dengan $C$ adalah lingkaran dengan pusat 0 dan jari-jari 4.

11. (ONMIPA 2015) Jika $f$ adalah fungsi utuh, $f(0)=1$ dan berlaku $|f(z)-e^z\sin 2z|<4$ untuk setiap $z\in\mathbb{C}$. Tentukan nilai dari $f(1)$.

12. (ONMIPA 2015) Hitunglah

$$\int_0^{2\pi} e^{e^{2it}-3it} dt.$$

13. (ONMIPA 2016) Diberikan $S$ adalah suatu domain dan $\gamma$ adalah kurva tertutup di dalam $S$. Diketahui $f(z)$ analitik pada $S$ dan $f'(z)$ kontinu pada $S$. Buktikan bahwa

$$\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z) dz$$

bernilai imaginer murni.

14. (ONMIPA 2018) Nilai integral berikut

$$\int_{|z|=1} \left( z^2 \sin \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \sin z \right) dz$$

adalah ....

15. (ONMIPA 2018) Diberikan suku banyak $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ dan $\gamma$ adalah lingkaran $|z| = r$. Buktikan

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{|p(z)|^2}{z^{1-n}} dz = a_0 \bar{a}_n r^{2n}.$$

16. (ONMIPA 2019) Diberikan fungsi kompleks

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

yang analitik pada $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ dan misalkan

$$W := \iint_U |f'(z)|^2 dx dy < \infty.$$

Buktikan

(a) $W = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |c_n|^2$.

(b) untuk setiap $z \in U$ berlaku

$$|f(z) - f(0)| \le \sqrt{\frac{W}{\pi} \ln \frac{1}{1 - |z|^2}}.$$

17. (ONMIPA 2021) Diketahui fungsi $f$ analitik di dalam dan kurva pada tertutup sederhana $\gamma$ dan $z_0$ titik pada bidang kompleks yang tidak berada pada $\gamma$. Buktikan untuk setiap bilangan asli $m$ dan $n$ berlaku

$$\int_\gamma \frac{f^{(m)}(z)}{z - z_0} dz = \frac{m+n-1}{(n-1)!} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

**Hint Soal 3.28.**

1. Manfaatkan rumus integral Cauchy, hanya ada satu titik tidak analitik.
2. Misalkan $z = x + iy$ $(dz = dx + idy)$. Cari kaitan antara kedua bentuk integral yang ada dan manfaatkan rumus integral Cauchy.
3. $(a)$ Manfaatkan rumus integral Cauchy di $z_0$. $(b)$ Tinjau faktor $(z - z_0)$ dari $f(z) - f(z_0)$ dan manfaatkan rumus integral Cauchy.
4. Tentukan akar-akar $z^4 = 1$ pada $|z - a| \leq a$ dan manfaatkan rumus integral Cauchy.
5. Manfaatkan integral Cauchy seperti Contoh 3.13 untuk menunjukkan $f'(z)$ konstan di setiap $z \in \mathbb{C}$.
6. Tentukan akar-akar $\cos z = 1$ pada $|z| \leq 2$ dan manfaatkan rumus integral Cauchy.
7. Tentukan akar-akar $(R - z)z = 0$ pada $|z| \leq r$ dan manfaatkan rumus integral Cauchy.
8. Tentukan akar-akar $\sin z = 0$ pada $|z| \leq 1$ dan manfaatkan rumus integral Cauchy.
9. Nyatakan integral dalam variabel $z$ dan manfaatkan rumus integral Cauchy.
10. Manfaatkan rumus integral Cauchy.
11. Manfaatkan Teorema Liouville.
12. Sederhanakan fungsi, lalu integralkan.
13. Misalkan $f = u + iv$. Tunjukkan bahwa $\mathrm{Re}(\overline{f(z)}f'(z)dz) = d\frac{u^2+v^2}{2}$. Integral ruas kanan pada sebarang kurva tertutup selalu nol.
14. Pecah dua integral dan manfaatkan rumus integral Cauchy.
15. Ingat bahwa $|a|^2 = a\bar{a}$. Misalkan $z = re^{i\theta}$. Ubah integral dalam variabel $\theta$ dan manfaatkan Latihan 3.5 Nomor 4.
16. $(a)$ Ubah ke bentuk polar lalu manfaatkan Teorema Fubini (tukar integral). Selanjutnya, manfaatkan Latihan 3.5 Nomor 4. $(b)$ Manfaatkan bagian $(a)$ dan gunakan ketaksamaan Cauchy-Schwarz.
17. Manfaatkan integral Cauchy untuk $f$ dan $f^{(m)}$.