Persiapan Seleksi Wilayah

Latihan Soal

1. Diberikan matriks simetri A berukuran 3×3 dengan nilai-nilai eigennya adalah λ_1, λ_2 dan λ_3. Jika $\mathrm{tr}(A)$ bukan merupakan nilai eigen dari A, buktikan bahwa $(\lambda_1+\lambda_2)(\lambda_2+\lambda_3)(\lambda_3+\lambda_1) \neq 0$.

2. Diberikan matriks $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$. Matriks A dikatakan *matriks kubik* jika terdapat matriks $B \in M_{n\times n}$ yang memenuhi $A = B^3$.
   (a) Buktikan bahwa jika A matriks simetri, maka A merupakan *matriks kubik.*
   (b) Jika $A \in M_{3\times 3}$ yang memenuhi $A^3 = 0$ tetapi $A^2 \neq 0$, buktikan bahwa A bukan *matriks kubik.*

3. Misalkan u dan v merupakan dua vektor eigen berbeda dari A sedemikian sehingga $u + v$ juga merupakan vektor eigen dari A. Apakah $u - v$ selalu merupakan vektor eigen dari A? Jelaskan jawaban Saudara.

4. Diberikan matriks A dan B berukuran $n \times n$. Matriks A dan B dikatakan *simultaneously diagonalizable* jika terdapat matriks invertible P sehingga $P^{-1}AP$ dan $P^{-1}BP$ keduanya merupakan matriks diagonal.
   (a) Jika A dan B *simultaneously diagonalizable*, buktikan bahwa $AB = BA$.
   (b) Jika $AB = BA$ dan A mempunyai n nilai eigen yang berbeda, buktikan bahwa A dan B *simultaneously diagonalizable.*

5. Diberikan matriks A dan B berukuran $n \times n$ dan $AB = BA$. Jika diketahui A memiliki n nilai eigen yang berbeda, buktikan bahwa B dapat didiagonalkan.

6. Diberikan ruang vektor V berdimensi hingga atas lapangan $\mathbb{R}$. Misalkan $T : V \longrightarrow \mathbb{R}$ merupakan transformasi linear. Buktikan bahwa terdapat vektor $\mathbf{v} \in V$ tetapi $\mathbf{v} \notin \ker(T)$ yang memenuhi $V = \ker(T) \oplus \{r\mathbf{v} \mid r \in \mathbb{R}\}$.

7. Diberikan ruang vektor V atas lapangan F. Misalkan A, B, C adalah tiga subruang dari V yang memenuhi $A \cap B = A + C$ dan $B \cap C = A + B$. Buktikan bahwa $A = B = C$.