Analisis Kompleks

sekar.nugraheni@ugm.ac.id

Materi

1 Deret Laurent dan Titik Singular

1.1 Deret Laurent

Seperti yang telah kita ketahui bahwa fungsi holomorfik f dapat dinyatakan sebagai deret Taylor. Dengan demikian, jika f terdeferensial pada suatu domain D dan $z_0 \in D$, maka

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

untuk suatu koefisien a_n dan deret ini benar untuk setiap z sehingga $|z - z_0| < R$, untuk suatu $R > 0$.

Definisi 1. *Deret Laurent adalah deret dengan bentuk*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Karena deret Laurent yang dimaksud memuat dua jumlahan tak hingga, maka dapat didefinisikan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \Sigma^- + \Sigma^+.$$

Diperhatikan bahwa agar deret Laurent konvergen maka deret Σ^- dan Σ^+ harus keduanya konvergen.

- √ Katakan Σ^+ konvergen untuk $|z - z_0| < R_2$ untuk suatu $R^2 \geq 0$ radius konvergensi Σ^+.

- √ Deret Σ^- merupakan power series dalam $(z - z_0)^{-1}$. Dengan demikian, apabila Σ^- mempunyai radius konvergensi sebesar $R_1^{-1} \geq 0$, maka Σ^- konvergen untuk $|(z - z_0)^{-1}| < R_1^{-1}$. Dengan kata lain, Σ^- konvergen pada saat $|z - z_0| > R_1$.

Berdasarkan poin-poin di atas, jika $0 \leq R_1 \leq R_2 \leq \infty$ maka deret Laurent konvergen pada suatu annulus

$$\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}.$$

Teorema 2. *Jika f holomorfik pada suatu annulus $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, dengan $0 \leq R_1 \leq R_2 \leq \infty$, maka f dapat dinyatakan dalam deret Laurent*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \tag{1}$$

untuk setiap $R_1 < |z - z_0| < R_2$. Lebih lanjut, jika $R_1 < r < R_2$ dan $C_r(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, maka

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}!\, dz,$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Note:

- √ Dalam kasus ini kita tidak boleh mengambil kesimpulan bahwa $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ karena kita tahu apakah f terdiferensial di z_0, atau bahkan terdefinisi di z_0.

- √ Persamaan 1 biasa dikenal dengan sebutan deret Laurent $f(z)$ disekitar z_0 atau ekspansi Laurent $f(z)$.

- √ Suku yang memuat semua pangkat negatif

$$\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$$

biasa dikenal dengan sebutan bagian principal dari deret Laurent.

Teorema 3. *Jika*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$$

untuk setiap $z \in \mathbb{C}$ *sehingga* $R_1 < |z-z_0| < R_2$*, maka* $a_n = b_n$*, untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$*.*

Note:

√ Diberikan fungsi holomorfik $f : D \to \mathbb{C}$. Katakan terdapat dua annulus berbeda $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-z_0| < R_2\}$ dan $\{z \in \mathbb{C} : R_1' < |z - z_0'| < R_2'\}$ yang termuat di dalam D. Dengan demikian, berdasarkan Teorema Laurent, kita dapat mengekspansi fungsi f dalam dua deret Laurent

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \text{ dan } \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n'(z-z_0')^n.$$

Karena annulusnya berbeda, maka tidak ada alasan bahwa koefisien a_n dan a_n' harus sama.

Contoh 4. Diberikan fungsi $f(z) = e^z + e^{\frac{1}{z}}$. Diperhatikan bahwa $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, untuk setiap $z \in \mathbb{C}$. Dengan demikian, $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$, untuk setiap $z \neq 0$. Akibatnya,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \cdots + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{z} + 2 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots$$

dengan

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n!}, & \text{untuk } n \geq 1, \\ 2, & \text{untuk } n = 0, \\ \frac{1}{n!}, & \text{untuk } -n \geq 1 \end{cases}.$$

Diperhatikan bahwa ekspansi ini berlaku untuk $z \neq 0$. Dengan demikian, diperoleh annulus $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < \infty\}$.

1.2 Singularitas

Definisi 5. *Titik singular fungsi* $f(z)$ *adalah titik* z_0 *dimana* $f(z)$ *tidak terdiferensial di* z_0*.*

Definisi 6. *Diketahui* f *mempunyai titik singular* z_0*. Titik* z_0 *dikatakan sebagai titik singular terasing, jika terdapat* $R > 0$ *sehingga* f *terdiferensial pada* $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| < R\}$*.*

Dalam pembahasan analisis kompleks, titik singular yang akan dipelajari adalah titik singular terasing. Katakan f mempunyai titik singular terasing z_0, maka f holomorfik pada annulus $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| < R\}$. Kita dapat mengekspansi fungsi f menjadi deret Laurent disekitar z_0 yaitu

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-z_0)^{-n}, \qquad (2)$$

untuk setiap $0 < |z-z_0| < R$. Diperhatikan bagian principal berikut

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}(z-z_0)^{-n}.$$

Terdapat tiga kemungkinan untuk bagian ini:

√ tidak ada,

√ ada sebanyak berhingga

√ ada sebanyak tak hingga.

Dari sini karakterisasi dari titik singular terasing dapat ditentukan dengan meninjau deret Laurentnya.

Diberikan fungsi f dan z_0 merupakan isolated singularity dari f. Jika f mempunyai deret Laurent (2) pada annulus $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-z_0| < R\}$ maka

√ a merupakan removable singularity f jika dan hanya jika $b_n = 0$ untuk setiap bilangan asli n

√ a merupakan pole berorde m jika dan hanya jika $b_m \neq 0$ dan $b_n = 0$, untuk setiap $n \geq m+1$

√ a merupakan essential singularity f jika dan hanya jika $b_n \neq 0$ untuk sebanyak tak hingga n.

Latihan

1. Tentukan deret Laurent fungsi berikut di sekitar $z = 0$.

   a. $(z-3)^{-1}$ pada annulus $3 < |z| < \infty$

   b. $\dfrac{1}{z(1-z)}$ pada annulus $0 < |z < 1|$

   c. $z^3 e^{\frac{1}{z}}$ pada annulus $0 < |z| < \infty$

   d. $\cos\left(\dfrac{1}{z}\right)$ pada annulus $0 < |z| < \infty$.

2. Tentukan deret Laurent untuk fungsi

$$f(z) = \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z-3}$$

   pada annulus

   a. $0 \leq |z| < 1$

   b. $1 < |z| < 3$

   c $3 < |z| < \infty$

3. Tentujan deret Laurent untuk fungsi berikut:

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$$

   pada annulus

   a. $0 < |z| < 1$

   b. $0 < |z-1| < 1$

4. Diketahui $f(z) = (z-1)^{-2}$. Tentukan deret Laurent untuk f pada annulus

   a. $0 < |z-1| < \infty$

   b. $0 \leq |z| < 1$

   c. $1 < |z| < \infty$

5. Tentukan pole dan ordernya untuk fungsi berikut:

   a. $\dfrac{1}{z^2+1}$

   b. $\dfrac{1}{z^4+16}$

   c. $\dfrac{1}{z^4+2z^2+1}$

   d. $\dfrac{1}{z^2+z-1}$

6. Tentukan tipe titik singular dari fungsi-fungsi berikut:

   a. $\sin\left(\dfrac{1}{z}\right)$

   b. $z^{-3}\sin^2 z$

   c. $\dfrac{\cos z - 1}{z^2}$

7. Diberikan domain D dan $z_0 \in D$. Jika f holomorfik pada $D \setminus \{z_0\}$ dan terbatas pada $D \setminus \{z_0\}$, tunjukkan bahwa f mempunyai removable singularity di z_0.