Turunan Fungsi

0.1 Turunan Fungsi

Definisi 1.1

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$, $c \in A$ dan $f : A \to \mathbb{R}$ fungsi. Kita katakan bilangan real L adalah **turunan** f **di** c, jika untuk setiap bilangan $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x \in A$ dengan $0 < |x - c| < \delta$ berlaku

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon.$$

Pada kasus di atas kita katakan f **diferensiabel** di c dan bilangan L pada Definisi 1.1 dinotasikan dengan $f'(c)$:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dikatakan memiliki turunan pada A jika untuk setiap $x \in A$, $f'(x)$ ada.

Definisi 1.2

Fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dikatakan **konveks** pada $[a, b]$ jika untuk setiap $t \in [0, 1]$ dan $x, y \in [a, b]$ berlaku

$$f((1 - t)x + ty) \leq (1 - t)f(x) + tf(y).$$

Titik x disebut titik maksimum lokal (minimum lokal) fungsi f jika terdapat persekitaran $N_r(x)$ dari x sehingga $f(x) = \max\{f(y) : y \in N_r(x)\}$ ($f(x) = \min\{f(y) : y \in N_r(x)\}$). Titik x disebut titik ekstremum lokal fungsi f jika x merupakan titik maksimum lokal atau minimum lokal.

Sifat 1.3

Beberapa sifat berkaitan dengan turunan diberikan sebagai berikut:

- Jika $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ memiliki turunan di $c \in [a, b]$, maka f kontinu di c.
- (Teorema Caratheodory) Diberikan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $c \in [a, b]$. Fungsi f memiliki turunan di c jika dan hanya jika terdapat fungsi φ pada $[a, b]$ yang kontinu di c dan berlaku
$$f(x) - f(c) = \varphi(x)(x - c).$$
- (Aturan Rantai) Diberikan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $g : [c, d] \to \mathbb{R}$ fungsi yang memenuhi $f([a, b]) \subseteq [c, d]$, serta $x \in [a, b]$. Jika f memiliki turunan di x dan g memiliki turunan di $f(x)$, maka fungsi $g \circ f$ memiliki turunan di x dengan
$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$
- (Teorema Ekstremum) Diberikan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $c \in [a, b]$ titik ektremum lokal dari f. Jika f memiliki turunan di c, maka $f'(c) = 0$.
- (Teorema Rolle) Diberikan f fungsi kontinu pada $[a, b]$ dengan $f(a) = f(b) = 0$. Jika $f'(x)$ ada untuk setiap $x \in (a, b)$, maka terdapat $c \in (a, b)$ dengan $f'(c) = 0$.
- (Teorema Nilai Rata-rata) Diberikan f fungsi kontinu pada $[a, b]$. Jika $f'(x)$ ada untuk setiap $x \in (a, b)$, maka terdapat $c \in (a, b)$ dengan sifat
$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

- Diberikan f fungsi terdiferensial pada $[a,b]$.
  1. f naik monoton pada $[a,b]$ jika dan hanya jika $f'(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$.
  2. f turun monoton pada $[a,b]$ jika dan hanya jika $f'(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$.
- Diberikan f fungsi pada $[a,b]$ dan $c \in [a,b]$. Jika f memiliki turunan di $c \in [a,b]$, maka
  1. jika $f'(c) > 0$, maka terdapat $\delta > 0$ dengan sifat $f(x) > f(c)$ untuk setiap x dengan $c < x < c + \delta$.
  2. jika $f'(c) < 0$, maka terdapat $\delta > 0$ dengan sifat $f(x) < f(c)$ untuk setiap x dengan $c - \delta < x < c$.
- (Teorema Darboux) Jika fungsi f terdiferensial pada $[a,b]$ dan k berada diantara $f'(a)$ dan $f'(b)$, maka terdapat $c \in [a,b]$ dengan $f'(c) = k$.
- (Teorema Nilai Rata-rata Cauchy) Diberikan f, g fungsi kontinu pada $[a,b]$ dan $g'(x) \neq 0$ pada (a,b). Jika $f'(x), g'(x)$ ada untuk setiap $x \in (a,b)$, maka terdapat $c \in (a,b)$ sehingga
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
- (Teorema L'Hospital) Diberikan $-\infty \leq a < b \leq \infty$ dan f, g terdiferensial pada (a,b) dengan $g'(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$. Jika berlaku
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = 0 = \lim_{x \to a^+} g(x)$$
atau
$$\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty,$$
maka apabila
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$
berakibat
$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$
- (Teorema Taylor) Diberikan bilangan asli n dan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fungsi dengan $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ kontinu pada $[a,b]$ dan $f^{(n+1)}$ ada pada (a,b). Jika $x_0 \in [a,b]$, maka untuk setiap $x \in [a,b]$ terdapat c diantara x dan x_0 sehingga
$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \\ &\quad + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$
- Diberikan fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ yang memiliki turunan tingkat dua pada $[a,b]$. Fungsi f konveks pada $[a,b]$ jika dan hanya jika $f''(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$.

Problems :

1. Tentukan semua bilangan rasional positif r dengan sifat fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dengan $f(x) = x^r \sin(1/x)$ untuk $x \neq 0$ dan $f(0) = 0$, memiliki turunan di 0.
2. Diberikan f fungsi kontinu pada $[a,b]$ dan f memiliki turunan pada (a,b). Jika $f'(x) = 0$ untuk

setiap $x \in (a,b)$, tunjukkan bahwa f merupakan fungsi konstan.

3. Diberikan f, g fungsi kontinu pada $[a,b]$ dan f, g memiliki turunan pada (a,b). Jika $f'(x) = g'(x)$ untuk setiap $x \in (a,b)$, tunjukkan bahwa terdapat bilangan C dengan sifat $f = g + C$ pada $[a,b]$.

4. Tunjukkan bahwa $|\sin x| \leq |x|$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Lebih lanjut, tunjukkan bahwa $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$.

5. Tunjukkan bahwa $e^x \geq 1 + x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Tentukan kapan kesamaan terjadi.

6. Diberikan f, g fungsi terdiferensial pada $\mathbb{R}$ dengan $f(0) = g(0)$. Jika $f'(x) \leq g'(x)$ untuk setiap $x \geq 0$, tunjukkan $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \geq 0$.

7. Fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dikatakan terdiferensial kontinu pada $[a,b]$, jika untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x, y \in [a,b]$ dengan $0 < |x - y| < \delta$ berlaku

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} - f'(x) \right| < \epsilon.$$

Tunjukkan jika f terdiferensial seragam pada $[a,b]$, maka f' kontinu pada $[a,b]$.

8. Diberikan $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada $[0,2]$ dan terdiferensial pada $(0,2)$. Jika $f(0) = 0, f(1) = 1$ dan $f(2) = 1$, maka tunjukkan bahwa terdapat $c \in (0,2)$ dengan sifat $f'(c) = \dfrac{1}{3}$.

9. Tentukan nilai $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right)$.

10. Tentukan nilai $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arctan x} \right)$.

11. Tentukan nilai $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (\sin x)^x$.

12. Tentukan nilai $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} (\cos 2x)^{\frac{1}{x^2}}$.

13. Misalkan $f(x) = a_1 \sin x + 2a_2 \sin 2x + \cdots + na_n \sin nx$ dengan $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bilangan-bilangan real. Jika $|f(x)| \leq |\sin x|$ untuk semua $x \in \mathbb{R}$, maka nilai maksimal dari $|a_1 + 4a_2 + \ldots + n^2 a_n|$ adalah ...

14. Tunjukkan bahwa $\cos x \geq 1 - \frac{1}{2}x^2$ untuk setiap bilangan real x.

15. Tentukan semua bilangan real positif x yang memenuhi

$$2013^x + 2015^x = 2.2014^x.$$

16. Tentukan semua bilangan bulat a dan b yang memenuhi $0 < a < b$ dan $a^b = b^a$.

17. Diketahui f kontinu pada $[a,b]$ dan f'' ada pada (a,b). Jika garis yang melalui $(a, f(a))$ dan $(b, f(b))$ memotong grafik fungsi f di suatu titik di dalam (a,b), maka tunjukkan bahwa terdapat $c \in (a,b)$ sehingga $f''(c) = 0$.

18. Diketahui f fungsi konveks pada $[a,b]$. Tunjukkan bahwa untuk setiap $t \in [a,b]$ berlaku

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \leq \frac{f(b) - f(t)}{b - t}.$$

19. Jika $a, b > 0$ dan $\alpha \in (0,1)$, maka tunjukkan bahwa

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \leq \alpha a + (1 - \alpha)b.$$

20. Diberikan $f : [0, \infty)$ fungsi yang memiliki turunan pada $(0, \infty)$. Jika $f'(x) \to b$ untuk $x \to \infty$, maka tunjukkan bahwa

    (a) untuk setiap $h > 0$ berlaku $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = b$.

    (b) jika $f(x) \to a$, maka $b = 0$.

    (c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = b$.

21. Diberikan fungsi f terdiferensial pada $(0, \infty)$. Jika $\lim_{x\to\infty} f(x) + f'(x) = L$, maka tunjukkan bahwa $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ dan $\lim_{x\to\infty} f'(x) = 0$.

22. Diberikan f fungsi terdiferensial sampai tingkat tiga pada $[0, 1]$. Jika $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'(1) = f''(1) = 0$ dan $f(1) = 1$. Tunjukkan bahwa terdapat $c \in [0, 1]$ sehingga $f^{(3)}(c) \geq 24$.

23. Diberikan f fungsi terdiferensial pada $[0, 1]$ dan tidak ada $x \in [0, 1]$ sehingga $f(x) = f'(x) = 0$. Tunjukkan banyaknya pembuat nol dari f hanya berhingga.

24. Misalkan f fungsi atas real yang terdiferensial sedemikian sehingga $f(x)+f'(x) \leq 1$ untuk semua x dan $f(0) = 0$. Nilai terbesar dari $f(1)$ yang mungkin adalah ...

25. Diberikan $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fungsi terdiferensial sampai tingkat dua pada $(0, 1)$ dengan $f(0) = f(1) = 0$ dan $f'' + 2f' + f \geq 0$. Tunjukkan bahwa $f(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in [0, 1]$.