Pembinaan Peserta
ON-MIPA UGM 2022 Bidang Analisis Real
Kamis, 25 Agustus 2022

Problems :

1. Diberikan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi naik. Jika $f + g$ kontinu, apakah f dan g kontinu ? Jelaskan !

2. Diberikan barisan (x_n) dengan $x_1 = 3$ dan $x_{n+1} = (x_n + 8/x_n)/2$. Tunjukkan bahwa barisan tersebut konvergen.

3. Misalkan fungsi $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ terdiferensiabel sedemikian sehingga $|f(x)| < M$ dan $f(x)f'(x) \geq \cos x$ untuk semua $x \in [0, \infty)$, dimana $M > 0$. Buktikan fungsi $f(x)$ tidak mempunyai limit ketika $x \to \infty$.

4. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah fungsi dengan turunan pertamanya kontinu dan misalkan (a_n) adalah barisan bilangan real positif. Buktikan jika $f(0) = 0$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} f(a_n)$ konvergen.

5. Tentukan semua fungsi real f yang turunannya kontinu sedemikian sehingga
$$(f(x))^2 = \int_0^x \left((f(t))^2 + (f'(t))^2\right) \, dt + 2020, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

6. Buatlah sebuah barisan $(x_n)_{n \geq 1}$ sedemikian sehingga untuk setiap bilangan real L, terdapat subbarisan $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ dengan $\lim\limits_{k \to \infty} = L$.

7. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Jika $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$, tentukan $f(x)$.

8. Diberikan fungsi $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ dan diferensiabel pada (a, b). Tunjukkan bahwa untuk setiap $k \in \mathbb{R}$, terdapat $c \in (a, b)$ sedemikian sehingga
$$f'(c) = kf(c).$$

9. Misalkan barisan (a_n) dan (b_n) berturut-turut konvergen ke a dan b saat $n \to \infty$. Tunjukkan bahwa
$$\frac{a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0}{n}$$
konvergen ke ab saat $n \to \infty$.

10. Diberikan fungsi $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu di $[a, b]$ dan g' ada pada $[a, b]$ yang memenuhi
$$(f(a) - g'(a))(g'(b) - f(b)) > 0.$$
Tunjukkan bahwa terdapat $x_0 \in (a, b)$ sehingga $f(x_0) = g'(x_0)$.

Latihan Mandiri Peserta
ON-MIPA UGM 2022 Bidang Analisis Real

1. Berikan contoh dua barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, dan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n$ tidak ada serta $\{|x_n y_n|\}$ terbatas.

2. Diketahui fungsi f mempunyai turunan di $a \in \mathbb{R}$. Tentukan nilai dari
$$\lim_{x\to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x-a}$$
untuk suatu bilangan bulat positif n.

3. Fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi $f(tx) = tf(x)$ untuk setiap $x, t \in \mathbb{R}$. Buktikan f kontinu.

4. Buktikan : jika f, g kontinu pada interval $[a, b]$, maka $\max(f, g)$ dan $\min(f, g)$ kontinu pada $[a, b]$.

5. Diketahui f fungsi terdiferensial sehingga berlaku $f'(x) = -2xf(x)$. Tunjukkan bahwa terdapat konstanta C sehingga $f(x) = Ce^{-x^2}$.

6. Diketahui fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu. Diketahui barisan $\{a_n\}$ terbatas turun monoton dan $\{b_n\}$ terbatas naik monoton. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k + b_k - a_{k+1} - b_{k+1}|$. Buktikan barisan $\{f(s_n)\}$ konvergen.

7. (ONMIPA 2019) Diketahui fungsi $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terdiferensial, terdapat $x_0 \in \mathbb{R}$ dengan $g(x_0) = 0$ dan untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku $g(x) + g'(x) > 0$. Buktikan $[g(x)]^{2019} \geq 0$ untuk setiap $x \geq x_0$.

8. Diberikan fungsi $f : [a, b] \to [a, b]$ kontinu dengan $f \circ f = f$ pada $[a, b]$. Diberikan
$$T(f) = \{x \in [a, b] : f(x) = x\}.$$
   (a) Buktikan bahwa $T(f)$ merupakan interval tak kosong.
   (b) Tentukan semua fungsi f yang memenuhi syarat diatas.

9. (ONMIPA 2019) Diketahui Ω adalah koleksi semua fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi :
$$|f(x) - f(t)| \leq |x - t|^4,$$
untuk setiap $x, t \in \mathbb{R}$. Buktikan bahwa :
   (i) untuk setiap $f \in \Omega$, f merupakan fungsi terbatas pada $\mathbb{R}$.
   (ii) terdapat barisan fungsi (f_n) di dalam Ω, dengan sifat untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \infty.$$

10. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi
$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$
untuk suatu k, $0 < k < 1$ dan untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa fungsi f memiliki titik tetap yaitu x^* dengan $f(x^*) = x^*$

11. Tentukan supremum dan infimum dari himpunan
$$A = \left\{ \frac{(m+n)^2}{2^{mn}} : m, n \in \mathbb{N}. \right\}$$

12. Hitung nilai integral berikut :

$$\int_0^a \int_0^b e^{\max\{b^2x^2,a^2y^2\}}\, dydx, \quad a,b>0.$$

13. Salah satu contoh himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ dan barisan fungsi $\{f_n\}$ yang konvergen seragam pada A tetapi $\{f_n^2\}$ tidak konvergen seragam pada A adalah ...

14. Berikan contoh fungsi real f dan g di mana f kontinu seragam dan tidak terbatas pada interval I dan fungsi g terbatas dan tidak kontinu seragam pada interval I, tetapi hasil kali kedua fungsi tersebut kontinu seragam pada I.

15. Misalkan (a_n) dan (b_n) adalah dua barisan real positif yang didefinisikan secara rekursif sebagai berikut :

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{dan} \qquad b_{n+1} = \sqrt{\frac{a_n^2 + b_n^2}{2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Buktikan $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ dan $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ ada serta

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

16. Berikan contoh fungsi terbatas pada $[0,1]$ tetapi tidak mempunyai nilai maksimum maupun minimum.

17. Misalkan $f \in C[0,\infty)$ dan

$$a_n = \int_0^1 f(n+x)\, dx, \qquad n = 0,1,2,\ldots.$$

Jika $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, maka $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\, dx = \cdots$.

18. Berikan contoh barisan fungsi $f_n \in C[a,b]$ sedemikian sehingga f_n konvergen titik demi titik (pointwise) ke f pada $[a,b]$, tetapi $f \notin C[a,b]$.

19. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu pada titik nol dan memenuhi kondisi berikut :

$$f(0) = 0 \quad \text{dan} \quad f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2) \quad \text{untuk sebarang } \; x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Buktikan f kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

20. Misalkan fungsi $f : [0,1] \to [0,1]$ adalah fungsi terdiferensial yang mana $|f'(x)| \neq 1$ untuk semua $x \in [0,1]$. Buktikan terdapat titik yang unik (tunggal) $\alpha, \beta \in [0,1]$ sedemikian sehingga $f(\alpha) = \alpha$ dan $f(\beta) = 1 - \beta$.

21. Jika $A = \left\{ \dfrac{n^n}{(n!)^2} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$, maka tentukan sup A dan inf A.

22. Diberikan q adalah bilangan irasional positif. Jika

$$A = \{m + nq \mid m + nq > 0 \text{ dan } m,n \in \mathbb{Z}\},$$

maka tunjukkan bahwa inf $A = 0$.

23. Diberikan $a \in \mathbb{R}$. Apakah barisan (x_n) konvergen jika

$$x_n = \frac{\lfloor a \rfloor + \lfloor 2a \rfloor + \cdots + \lfloor na \rfloor}{n^2} \text{ ?}$$

24. Diketahui (a_n) barisan bilangan real yang memenuhi $e^{a_n} + na_n = 2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa (a_n) konvergen.

25. Diketahui $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi periodik. Jika $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$, buktikan bahwa periode f dan g sama. Lebih lanjut, buktikan bahwa $f = g$.

26. Diberikan fungsi $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ yang memenuhi sifat $f(0) = f(1)$ dan $|f(x) - f(y)| < |x - y|$ untuk setiap $x \neq y$. Buktikan bahwa $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}$ untuk setiap $x, y \in [0, 1]$.

27. Diketahui $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ diferensiabel pada I, dan $c \in (a, b)$. Jika $f''(c)$ ada, buktikan bahwa

$$f''(c) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c + h) - 2f(c) + f(c - h)}{h^2}.$$

28. Diketahui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ dan diferensiabel pada (a, b). Buktikan bahwa terdapat $c \in (a, b)$ sehingga

$$\frac{2}{a - c} < f'(c) < \frac{2}{b - c}.$$

29. Diketahui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ dan diferensiabel pada (a, b). Buktikan bahwa f konveks jika dan hanya jika $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

30. Diberikan fungsi kontinu $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dimana terdapat $k \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$f(x) \leq k \int_0^x f(t)\, dt \qquad \text{untuk setiap } x \geq 0.$$

Tunjukkan bahwa $f \equiv 0$.

31. Diberikan fungsi f nonnegatif, kontinu dan naik tegas pada $[0, 1]$. Untuk $p > 0$ didefinisikan bilangan x_p yang memenuhi

$$f^p(x_p) = \int_0^1 f^p(x)\, dx.$$

Tentukan $\lim\limits_{p\to\infty} x_p$.

32. Diketahui fungsi $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ terdiferensial kontinu. Tunjukkan bahwa

$$\left| \int_0^1 f^3(x)\, dx - f^2(0) \int_0^1 f(x)\, dx \right| \leq \max_{0\leq x\leq 1} |f'(x)| \left(\int_0^1 f(x)\, dx \right)^2.$$

33. Diberikan k bilangan asli lebih dari 1. Misalkan $a_0 > 0$ dan didefinisikan

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{\sqrt[k]{a_n}}$$

untuk setiap bilangan asli $n > 0$. Hitunglah $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^{k+1}}{n^k}$.

34. Diberikan fungsi f diferensiabel pada $\mathbb{R}$ dan memenuhi $|f'(x)| \leq \delta < 1$ untuk suatu $\delta \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa terdapat $c \in \mathbb{R}$ sehingga $f(c) = c$. Apa yang terjadi jika syarat "$\leq \delta$" dihilangkan?

35. Diketahui $n > 1$ bilangan asli dan $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu sehingga

$$\int_0^1 f(x)\, dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

Buktikan terdapat $x_0 \in (0, 1)$ sehingga $f(x_0) = \dfrac{1 - x_0^n}{1 - x_0}$.

36. Diketahui $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferensiabel dan f' kontinu seragam pada $\mathbb{R}$. Buktikan bahwa barisan (f_n) dengan
$$f_n(x) = n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right)$$
konvergen seragam ke f' pada $\mathbb{R}$.

37. Diketahui $(a_n)_{n\geq 1}$ barisan bilangan real sehingga $|a_{n+1} - a_n| \leq 1$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$ dan $(b_n)_{n\geq 1}$ barisan yang didefinisikan dengan
$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$
Tunjukkan bahwa $|b_{n+1} - b_n| \leq \dfrac{1}{2}$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

38. Diketahui $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi-fungsi periodik sehingga fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f : f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ memenuhi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ berhingga. Buktikan bahwa f konstan.

39. Tunjukkan jika a_1, a_2, a_3 bilangan-bilangan real dan
$$a_1 \cos a_1 x + a_2 \cos a_2 x + a_3 \cos a_3 x \geq 0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$
maka $a_1 a_2 a_3 = 0$.

40. Diketahui $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ dan $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ kontinu. Jika $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1$. Buktikan
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_0^n f(x) g\left(\frac{x}{n}\right)\, dx = \int_0^1 g(x)\, dx.$$

41. Didefinisikan barisan (x_n) dengan $x_1 = \sqrt{2}$ dan $x_{n+1} = \sqrt{2}^{x_n}$ untuk $n \geq 1$. Tunjukkan bahwa barisan (x_n) konvergen dan tentukan nilai limitnya.

42. Diberikan fungsi konveks f dengan $f \in C^2((0, 2\pi])$. Tunjukkan bahwa integral $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x\, dx$ positif.

43. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $x \in \mathbb{R}^+$ didefinisikan $f_1(x) = \sqrt{x}$ dan $f_{n+1}(x) = \sqrt{f_n(x) + x}$. Buktikan bahwa (f_n) konvergen seragam di setiap interval $[a, b]$ dengan $0 < a < b < \infty$.

44. Diberikan $f : [0, a] \to \mathbb{R}$ fungsi terdiferensial kontinu yang memenuhi $f(0) = 0$. Buktikan ketaksamaan berikut,
$$\int_0^a \left(\frac{f(x)}{2x}\right)^2 dx \leq \int_0^a (f'(x))^2\, dx.$$

45. Jika $0 < x_0 < 1$ dan $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$ untuk $n \geq 0$. Buktikan $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n = 1$.

46. Diketahui $f(n)$ fungsi tak negatif yang didefinisikan pada himpunan semua bilangan bulat tak negatif sehingga $f(n + m) \leq f(n) + f(m)$ untuk semua n dan m. Buktikan $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(n)}{n}$ ada.

47. Jika $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferensiabel dan $f'(x) \leq f'\left(x + \dfrac{1}{n}\right)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan setiap $n \in \mathbb{N}$, buktikan f' kontinu.

48. Misalkan $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ barisan bilangan real positif sehingga $b_0 = 1$ dan

$$b_n = 2 + \sqrt{b_{n-1}} - 2\sqrt{1 + \sqrt{b_{n-1}}}.$$

Tentukan nilai dari $\sum_{n=0}^{\infty} b_n 2^n$.

49. Diketahui fungsi $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Untuk sebarang barisan (x_n) yang konvergen ke x berakibat barisan $(f_n(x_n))$ konvergen ke $f(x)$. Tunjukkan bahwa fungsi f kontinu. Apakah sebaliknya juga berlaku ?

50. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan memenuhi $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Buktikan bahwa jika f kontinu di suatu titik, maka f kontinu di setiap titik.

51. Jika (f_n) dan (g_n) konvergen seragam, maka buktikan bahwa $(af_n + bg_n)$ juga konvergen seragam untuk setiap $a, b \in \mathbb{R}$. Bagaimana dengan $(f_n g_n)$?

52. Didefinisikan $f_n = \dfrac{x^2 + n}{n^2}$ untuk $n \geq 1$. Buktikan bahwa fungsi s dengan

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f_n(x)$$

konvergen seragam pada setiap interval terbatas tetapi $s(x)$ tidak konvergen mutlak.

53. Berikan contoh dua barisan $\{x_n\}$ dan $\{y_n\}$ sehingga $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \infty$, dan $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n$ tidak ada serta $\{|x_n y_n|\}$ terbatas.

54. Buktikan : jika f, g kontinu pada interval $[a, b]$, maka $\max(f, g)$ dan $\min(f, g)$ kontinu pada $[a, b]$.

55. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ memenuhi

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

untuk suatu k, $0 < k < 1$ dan untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa fungsi f memiliki titik tetap yaitu x^* dengan $f(x^*) = x^*$

56. Hitung nilai integral berikut :

$$\int_0^a \int_0^b e^{\max\{b^2x^2, a^2y^2\}}\, dydx, \quad a, b > 0.$$

57. Misalkan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu pada titik nol dan memenuhi kondisi berikut :

$$f(0) = 0 \quad \text{dan} \quad f(x_1 + x_2) \leq f(x_1) + f(x_2) \quad \text{untuk sebarang } x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Buktikan f kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

58. Diketahui $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi periodik. Jika $\lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - g(x)) = 0$, buktikan bahwa periode f dan g sama. Lebih lanjut, buktikan bahwa $f = g$.

59. Diketahui $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu pada $[a, b]$ dan diferensiabel pada (a, b). Buktikan bahwa f konveks jika dan hanya jika $f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a)$.

60. Diberikan fungsi kontinu $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ dimana terdapat $k \in \mathbb{R}$ sedemikian sehingga

$$f(x) \leq k \int_0^x f(t)\, dt \qquad \text{untuk setiap } x \geq 0.$$

Tunjukkan bahwa $f \equiv 0$.

61. Diberikan fungsi $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ kontinu di $[a, b]$ dan g' ada pada $[a, b]$ yang memenuhi

$$(f(a) - g'(a))(g'(b) - f(b)) > 0.$$

Tunjukkan bahwa terdapat $x_0 \in (a, b)$ sehingga $f(x_0) = g'(x_0)$.

62. Diketahui $f_1, f_2, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi-fungsi periodik sehingga fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f : f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ memenuhi $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ berhingga. Buktikan bahwa f konstan.

63. Diberikan fungsi bernilai real f terdiferensial pada $(-1, 1)$ sedemikian sehingga $\dfrac{f(x)}{x^2}$ mempunyai nilai limit saat $x \to 0$. Apakah ini berakibat $f''(0)$ ada? Berikan bukti atau contoh penyangkal.

64. Diberikan barisan bilangan real (x_n) sehingga untuk setiap subbarisannya mempunyai subbarisan yang konvergen ke 0. Apakah barisan (x_n) konvergen? Berikan penjelasan.

65. Diberikan a dan x_0 bilangan real positif, dan didefinisikan barisan $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ secara rekursif dengan

$$x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right).$$

Buktikan bahwa barisan ini konvergen, dan tentukan nilai limitnya.

66. (a) Diberikan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ barisan di $\mathbb{R}$ sehingga

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n| < \infty.$$

Buktikan bahwa barisan $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ adalah barisan Cauchy.

(b) Apakah berlaku sebaliknya? Berikan bukti atau contoh penyangkal.

67. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kontinu seragam dengan $f(0) = 0$. Buktikan bahwa terdapat bilangan bulat positif B sehingga $|f(x)| \leq 1 + B|x|$.

68. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terdiferensial pada $\mathbb{R}$. Misalkan $f(0) = 0$ dan $|f'(x)| \leq |f(x)|$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Tunjukkan bahwa $f(x) = 0$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

69. Buktikan atau beri contoh penyangkal: Setiap fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga $f(x + y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap x dan y adalah fungsi kontinu.

70. Diberikan bilangan positif b dan L serta $f : [0, b] \to \mathbb{R}$ kontinu dan memenuhi

$$f(x) \geq L \int_0^x f(t)dt, \qquad (0 \leq x \leq b).$$

Tunjukkan bahwa $f(x) \geq 0$ untuk $0 \leq x \leq b$.

71. Misalkan fungsi bernilai real f kontinu pada $[0, 1]$. Buktikan bahwa

$$\lim_{\alpha\to 0^+} \alpha \int_0^1 x^{\alpha-1} f(x)dx = f(0).$$

72. Diberikan fungsi kontinu tak negatif $x : [a, b] \to \mathbb{R}$ dan $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ yang memenuhi

$$x^2(t) \leq 1 + \int_a^t f(s)x(s)ds$$

untuk setiap $a \leq t \leq b$. Tunjukkan bahwa

$$x(t) \leq 1 + \frac{1}{2}\int_a^t f(s)ds$$

untuk $a \leq t \leq b$.

73. Diberikan barisan bilangan real (x_n) sedemikian hingga $\lim\limits_{n\to\infty}(2x_{n+1} - x_n) = x$. Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

74. Didefinisikan barisan bilangan real positif sebagai berikut. Diberikan $x_0 > 0$ dan didefinisikan $x_{n+1} = \dfrac{1}{1 + x_n}$ untuk setiap $n \geq 0$. Tunjukkan bahwa barisan tersebut konvergen dan tentukan juga nilai limitnya.

75. Misalkan barisan bilangan real (x_n) terbatas dan memenuhi $x_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$, $\forall n \geq 0$. Jika $A_n = \max\{x_n, x_{n+1}\}$, buktikan
    (a) barisan (A_n) konvergen
    (b) barisan (x_n) konvergen

76. Diberikan barisan bilangan real positif (a_n) untuk $n \geq 0$. Barisan tersebut memenuhi

$$\sqrt{a_1} \geq \sqrt{a_0} + 1 \quad \text{dan} \quad \left|a_{n+1} - \frac{a_n^2}{a_{n-1}}\right| \leq 1$$

untuk semua n bilangan bulat positif. Buktikan bahwa barisan $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ konvergen, katakan ke α. Selanjutnya buktikan barisan $\left(\dfrac{a_n}{\alpha^n}\right)$ konvergen.

77. Diberikan (u_n) barisan bilangan real sedemikian hingga barisan $(v_n = u_{n+1} - u_n)$ konvergen ke l. Buktikan bahwa ketika $n \to \infty$

$$\frac{u_n}{n} \to l \qquad \text{dan} \qquad \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n^2} \to \frac{l}{2}.$$

78. Diberikan (u_n) barisan bilangan real yang konvergen ke l. Misalkan barisan (v_n) didefinisikan sebagai berikut.

$$\text{Untuk } n \geq 1 \qquad v_n = \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{1 + 2 + \cdots + n}.$$

Tunjukkan bahwa barisan (v_n) konvergen ke limit yang sama.

79. Diberikan f fungsi kontinu pada $[0, 1]$ sedemikian hingga untuk setiap $x \in [0, 1]$ berlaku

$$\int_x^1 f(t)dt \geq \frac{1 - x^2}{2}.$$

Tunjukkan bahwa $\displaystyle\int_0^1 f^2(t)dt \geq \frac{1}{3}$.

80. Diberikan $u : I \to (0, \infty)$ dan $v : I \to \mathbb{R}$ fungsi terdiferensial pada interval I. Dibentuk fungsi f didefinisikan pada I dengan

$$f(x) = u(x)^{v(x)}.$$

Tunjukkan bahwa f terdiferensial pada I.

81. Diberikan $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu. Dimisalkan bahwa selisih $f(x + 1) - f(x)$ mempunyai limit l saat $x \to \infty$. Buktikan bahwa kemiringan $\dfrac{f(x)}{x}$ juga mempunyai limit l saat $x \to \infty$.

82. Diberikan $a \in \mathbb{R}$ dan interval terbuka dan terbatas, $I \subseteq \mathbb{R}$, dengan $a \in I$. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, fungsi $f_n, g, h : I \to \mathbb{R}$ terdiferensial dan memenuhi

(a) $f_n(a) = g(a)$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$

(b) $f_n'(x) \geq g'(x)$, untuk setiap $x \in I$ dan $x > a$ serta

(c) $f_n' \to h'$ secara seragam pada I.

Buktikan bahwa terdapat fungsi terdiferensial $f : I \to \mathbb{R}$ dengan $f_n \to f$ pada I dan $h(x) \geq g(x)$ untuk setiap $x \in I$ dan $x > a$.