Analisis Kompleks

sekar.nugraheni@ugm.ac.id

Materi

1 Bilangan Kompleks

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

√ Untuk suatu bilangan kompleks $z = a + ib$, $\text{Re}(z) = a$ adalah bagian real dari z dan $\text{Im}(z) = b$ adalah bagian imajiner dari z.

√ Dua bilangan kompleks z dan w dikatakan **sama** ($z = w$) jika dan hanya jika $\text{Re}(z) = \text{Re}(w)$ dan $\text{Im}(z) = \text{Im}(w)$.

√ Kompleks sekawan, atau disingkat kawan dari suatu bilangan kompleks $a+ib$ adalah bilangan $a-ib$. Kompleks sekawan dari suatu bilangan kompleks z biasa dinotasikan dengan $\bar{z}$ atau z^*.

√ Operasi pada sistem bilangan kompleks:

- $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$
- $(a + ib) - (c + id) = (a - c) + i(b - d)$
- $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(bc + ad)$
- $\dfrac{a + ib}{c + id} = \dfrac{a + ib}{c + id}.\dfrac{c - id}{c - id} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ac}{c^2 + d^2}$, asalkan $c^2 + d^2 \neq 0$.

√ Modulus dari bilangan kompleks $a + ib$, didefinisikan sebagai

$$|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

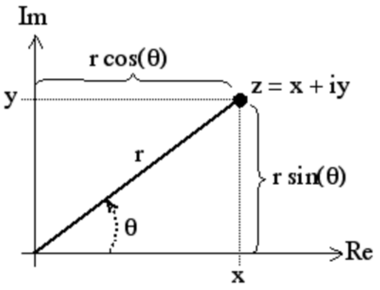
√ Sifat modulus bilangan kompleks:

1. $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$, dengan demikian,
$$|z_1 z_2 ... z_m| = |z_1||z_2|...|z_m|.$$
2. $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$, jika $z_2 \neq 0$.
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$, dengan demikian,
$$|z_1 + z_2 + ... + z_m| \leq |z_1| + |z_2| + ... + |z_m|.$$
4. $|z_1 + z_2| \geq |z_1| - |z_2|$ atau $|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$

√ Untuk sebarang $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{S}$, berlaku:

- $z_1 + z_2$ dan $z_1 z_2 \in \mathbb{S}$
- $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
- $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$
- $z_1 z_2 = z_2 z_1$
- $z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$
- $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_2 z_3$
- Bilangan 0 merupakan unsur identitas pada penjumlahan, artinya $z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1$.
- Bilangan 1 merupakan unsur identitas pada perkalian, artinya $z_1 1 = 1 z_1 = z_1$.
- Untuk setiap bilangan kompleks z_1 terdapat bilangan komplek z sehingga $z + z_1 = z_1 + z = 0$. Bilangan z dinotasikan dengan $-z_1$.
- Untuk setiap bilangan kompleks $z_1 \neq 0$ terdapat bilangan komplek z sehingga $z z_1 = z_1 z = 1$. Bilangan z dinotasikan dengan $\dfrac{1}{z_1}$.

√ Secara geometri, kita dapat merepresentasikan bilangan kompleks sebagai titik pada bidang xy dengan mengoperasikan setiap bilangan kompleks $a + ib$ ke titik (a, b) di bidang xy. Bidang ini dikenal dengan sebutan **diagram Argand**. Sumbu x dikenal dengan **sumbu real** dan sumbu y dikenal dengan **sumbu imajiner**.



√ Jarak antara dua bilangan kompleks $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ adalah

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

√ Diperhatikan bahwa bilangan kompleks $z = x + iy$ dapat dinyatakan sebagai

$$x = r\cos\theta \text{ dan } y = r\sin\theta,$$

dimana $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |x+iy|$ merupakan modulus bilangan kompleks z, dan θ adalah **amplitude** atau **argumen** dari bilangan kompleks z, dan biasa dinotasikan dengan $\arg z$.

√ Hal ini mengakibatkan

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Bentuk ini biasa disebut dengan bentuk kutub bilangan kompleks, dengan r dan θ menyatakan koordinat kutubnya. Beberapa buku menuliskan

$$\text{cis } \theta = \cos\theta + i\sin\theta.$$

√ **(Teorema De Moivre)** Jika $z_1 = x_1 + iy_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ dan $z_2 = x_2 + iy_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ maka

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 \left(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\right) \\ \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\right) \end{aligned}$$

√ **(Perumuman Teorema De Moivre)** Jika $z_k = x_k + iy_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k)$, untuk setiap $k = 1, 2, ..., n$, maka

$$z_1...z_n = r_1...r_n\left(\cos(\theta_1 + ... + \theta_n) + i\sin(\theta_1 + ... + \theta_n)\right).$$

Akibatnya, jika $z_1 = z_2 = ... = z_n = z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ maka diperoleh

$$z^n = (r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta).$$

√ Suatu bilangan kompleks w dikatakan sebagai akar ke-n dari bilangan kompleks z, jika $w^n = z$, dan dinotasikan sebagai $w = z^{\frac{1}{n}}$.

√ Menurut Teorema De Moivre, dapat ditunjukkan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ diperoleh

$$\begin{aligned} z^{\frac{1}{n}} &= (r(\cos\theta + i\sin\theta))^{\frac{1}{n}} \\ &= r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right], \end{aligned}$$

untuk $k = 0, 1, 2, ..., n-1$. Dengan demikian, terdapat n nilai berlainan untuk $z^{\frac{1}{n}}$, asalkan $z \neq 0$.

√ **(Rumus Euler)** Untuk sebarang bilangan kompleks $z = x + iy$, diperoleh

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

√ Dengan demikian, berdasarkan Teorema De Moivre diperoleh

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

√ Diketahui $z_1 = x_1 + iy_1$ dan $z_2 = x_2 + iy_2$ merupakan bilangan kompleks. Dot product dan cross product dari z_1 dan z_2 didefinisikan dengan

$$\begin{aligned} z_1 \circ z_2 &= |z_1||z_2|\cos\theta = x_1x_2 + y_1y_2 \\ &= Re(\bar{z_1}z_2) = \frac{1}{2}(\bar{z_1}z_2 + z_1\bar{z_2}) \\ z_1 \times z_2 &= |z_1||z_2|\sin\theta = x_1y_2 - y_1x_2 \\ &= Im(\bar{z_1}z_2) = \frac{1}{2i}(\bar{z_1}z_2 - z_1\bar{z_2}) \end{aligned}$$

Jelas bahwa

$$\bar{z_1}z_2 = (z_1 \circ z_2) + i(z_1 \times z_2) = |z_1||z_2|e^{i\theta}.$$

√ Jika z_1 dan z_2 tidak nol, maka

- z_1 dikatakan tegak lurus dengan z_2, jika $z_1 \circ z_2 = 0$
- z_1 dikatakan sejajar dengan z_2, jika $z_1 \times z_2 = 0$
- panjang proyeksi z_1 pada z_2 adalah $\frac{|z_1 \circ z_2|}{|z_2|}$
- luas jajar genjang yang dibentuk oleh z_1 dan z_2 adalah $|z_1 \times z_2|$

√ Diberikan bilangan $\delta > 0$ dan $z_0 \in \mathbb{C}$. **Persekitaran-δ dari** z_0, dinotasikan dengan $N_\delta(z_0)$, didefinisikan dengan

$$N_\delta(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \delta\}.$$

Lebih lanjut,

$$N_\delta(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - z_0| < \delta\}.$$

√ Diberikan himpunan $S \subseteq \mathbb{C}$. Titik $z_0 \in \mathbb{C}$ disebut sebagai **titik limit** himpunan S, jika untuk setiap bilangan $\delta > 0$,

$$N_\delta(z_0) \setminus \{z_0\} \cap S \neq \emptyset.$$

√ Diberikan himpunan $S \subseteq \mathbb{C}$. Himpunan S dikatakan **tertutup** jika untuk setiap titik limitnya termuat di dalam S.

√ Diberikan himpunan $S \subseteq \mathbb{C}$. Himpunan S dikatakan **terbatas**, jika terdapat $M > 0$, sehingga untuk setiap $z \in S$, $|z| < M$. Jika tidak demikian maka himpunan S dikatakan tidak terbatas.

Latihan

1. Buktikan bahwa $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$.
2. Buktikan bahwa

   √ $\cos 5\theta = 15\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

   √ $\dfrac{\sin 5\theta}{\sin\theta} = 16\cos^4\theta - 12\cos^2\theta + 1$
3. Tunjukan bahwa

   √ $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

   √ $\sin\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$
4. Buktikan bahwa

   √ $\sin^3\theta = \dfrac{3}{4}\sin\theta - \dfrac{1}{4}\sin 3\theta$

   √ $\cos^3\theta = \dfrac{1}{8}\cos 4\theta + \dfrac{1}{2}\cos 2\theta + \dfrac{3}{8}$
5. Tentukan semua nilai z sehingga $z^5 = 32$.
6. Tentukan semua akar dari $(-1+i)^{\frac{1}{3}}$
7. Reduksi bilangan kompleks berikut.

   a. $\dfrac{1+2i}{3-4i} + \dfrac{2-i}{5i}$

   b. $\dfrac{5i}{(1-i)(2-i)(3-i)}$

   c. $(1-i)^4$
8. Buktikan bahwa untuk setiap $z \neq 0$

   $$\frac{1}{1/z} = z.$$
9. Buktikan bahwa jika z_1 dan z_2 bilangan kompleks tidak nol, maka untuk setiap $n = 1, 2, ...$

   $$(z_1 + z_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k}.$$
10. Tunjukkan

    $$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) \\ &= z_1\bar{z}_1 + (z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}) + z_2\bar{z}_2. \end{aligned}$$
11. Tunjukkan bahwa

    $$z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2} = 2Re(z_1\bar{z}_2) \leq 2|z_1||z_2|.$$
12. Tentukan nilai $\arg z$ maka

    a. $z = \dfrac{i}{-2-2i}$

    b. $z = (\sqrt{3} - i)^6$
13. Diberikan sebarang bilangan kompleks tidak nol $z = re^{i\theta}$. Tunjukkan bahwa

    $$z^n = r^m e^{in\theta} \quad \text{dan} \quad z^{-1} = \frac{1}{r}e^{-i\theta}.$$
14. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan kompleks $z \neq 1$ berlaku

    $$1 + z + z^2 + ... + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.$$
15. Buktikan bahwa untuk setiap bilangan asli $n \in \mathbb{N}$ dan $0 < \theta < 2\pi$, berlaku

    $$1 + \cos\theta + \cos 2\theta + ... + \cos n\theta = \frac{1}{2} + \frac{(\sin[2n+1]\pi/2)}{2\sin(\pi/2)}.$$
16. Tunjukkan bahwa untuk setiap $n = 0, 1, 2, ...$

    $$\cos n\theta + i\sin n\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos^{(n-k)\theta})(i\sin\theta)^k$$
17. Tunjukkan bahwa untuk setiap $n = 0, 1, 2, ...$

    $$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{2k} (-1)^k \cos^{(n-2k)}\theta \sin^{2k}\theta.$$
18. Tentukan nilai akar $\sqrt{2i}$, $\sqrt{1 - \sqrt{3}i}$, $(-16)^{1/4}$ dan $(-8 - 8\sqrt{3}i)^{1/4}$.
19. Tentukan dan gambarkan himpunan semua bilangan real berikut.

    a. $|z - 2 + i| \leq 1$

b. $|2z+3| > 4$

c. $Im(z) > 1$

d. $Im(z) = 1$

e. $0 \leq \arg z \leq \pi/4$

20. Tentukan himpunan mana pada nomor sebelumnya yang terbuka dan mana yang tertutup.

21. Tentukan himpunan mana pada nomor sebelumnya yang terbatas mana yang tidak terbatas.