

SELEKSI SESI PERTAMA BIDANG MATEMATIKA

Hari, Tanggal	: Sabtu, 16 Agustus 2025
Durasi pengerjaan	: 90 menit
Waktu pengerjaan	: Pukul 08.00–09.30 WIB
Batas waktu pengumpulan	: Pukul 09.40 WIB
Total poin	: 30

Naskah soal ini terdiri atas dua halaman.

1. Diberikan ruang vektor V atas lapangan \mathbb{R} dengan $\dim(V) = 6$. Diketahui U_1 dan U_2 merupakan subruang dari V dengan $U_1 \subseteq U_2$ dan $\dim(U_1) = 2$ serta $\dim(U_2) = 4$. Jika

$$E = \{T : V \rightarrow V \mid T \text{ transformasi linear, } T(U_1) \subseteq U_1, T(U_2) \subseteq U_2\},$$

maka $\dim(E) = \dots$.

2. Bilangan tiga digit abc dikatakan “jaya” jika sistem persamaan linear

$$\begin{cases} ax + by + cz = a, \\ cx + ay + bz = b, \\ bx + cy + az = c \end{cases}$$

mempunyai lebih dari dua solusi. Banyaknya bilangan jaya adalah ...

3. Jika bilangan kompleks z memenuhi $z = (1 + i)^i$, maka nilai yang mungkin dari $\arg(z)$ adalah ...
4. Jika a dan b adalah bilangan kompleks dengan sifat $|a| \leq |b|$, maka nilai terkecil dari $|z|, z \in \mathbb{C}$, yang memenuhi persamaan

$$|z - a| + |z + a| = 2|b|$$

adalah ...

5. Nilai dari

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{26}} \sum_{k=1}^n (k + 25)^{25}$$

adalah ...

6. Diberikan fungsi terdiferensial $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang memenuhi $f'(0) = 1$ dan

$$f(x + y) = \frac{f(x)}{e^y} + \frac{f(y)}{e^x}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Nilai terbesar yang mungkin dari $f(1)$ adalah ...

7. Sebuah permainan terdiri dari dua jenis langkah: maju dan mundur. Permainan akan selesai apabila salah satu jenis langkah dilakukan sebanyak 5 kali, tanpa memperhatikan urutannya. Banyaknya kemungkinan kombinasi langkah pada suatu permainan yang selesai tepat setelah langkah terakhir adalah

8. Suatu bilangan bulat positif dikatakan bebas kuadrat (*squarefree*) jika bilangan bulat itu tidak habis dibagi oleh bilangan kuadrat yang lebih besar dari 1. Contoh bilangan bebas kuadrat adalah 1 dan 21. Banyaknya bilangan bebas kuadrat yang kurang dari 250 adalah
9. Banyaknya anggota dari grup faktor \mathbb{Q}/\mathbb{Z} yang berorde bilangan prima yang kurang dari 50 adalah
10. Banyaknya pembagi nol berderajat satu di gelanggang suku banyak $\mathbb{Z}_{10}[x]$ adalah

SOLUSI

1. Misalkan $B_1 = \{u_1, u_2\}$ adalah basis dari U_1 . Karena $U_1 \subseteq U_2$ dan $\dim(U_2) = 4$, maka kita dapat memperluas B_1 menjadi basis $B_2 = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ dari U_2 . Selanjutnya, karena $U_2 \subseteq V$ dan $\dim(V) = 6$, kita dapat memperluasnya kembali sehingga diperoleh $B_3 = \{u_1, u_2, u_3, u_4, v_1, v_2\}$ adalah basis dari V .

Misalkan $T \in E$. Karena $T(U_1) \subseteq U_1$, maka

$$T(u_1) = a_{11}u_1 + a_{21}u_2, \quad T(u_2) = a_{12}u_1 + a_{22}u_2.$$

Selanjutnya, karena $T(U_2) \subseteq U_2$, maka

$$T(u_3) = a_{13}u_1 + a_{23}u_2 + a_{33}u_3 + a_{43}u_4, \quad T(u_4) = a_{14}u_1 + a_{24}u_2 + a_{34}u_3 + a_{44}u_4.$$

Terakhir, karena T adalah transformasi linear dari V ke V , maka

$$T(v_1) = b_{11}u_1 + b_{21}u_2 + b_{31}u_3 + b_{41}u_4 + b_{51}v_1 + b_{61}v_2,$$

$$T(v_2) = b_{12}u_1 + b_{22}u_2 + b_{32}u_3 + b_{42}u_4 + b_{52}v_1 + b_{62}v_2.$$

Dengan demikian, transformasi linear T ditentukan oleh 24 bilangan real bebas, yaitu

$a_{11}, a_{21}, a_{12}, a_{22}, a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{43}, a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44}, b_{11}, b_{21}, b_{31}, b_{41}, b_{51}, b_{61}, b_{12}, b_{22}, b_{32}, b_{42}, b_{52}, b_{62}$.

Jadi, $\dim(E) = 24$.

2.