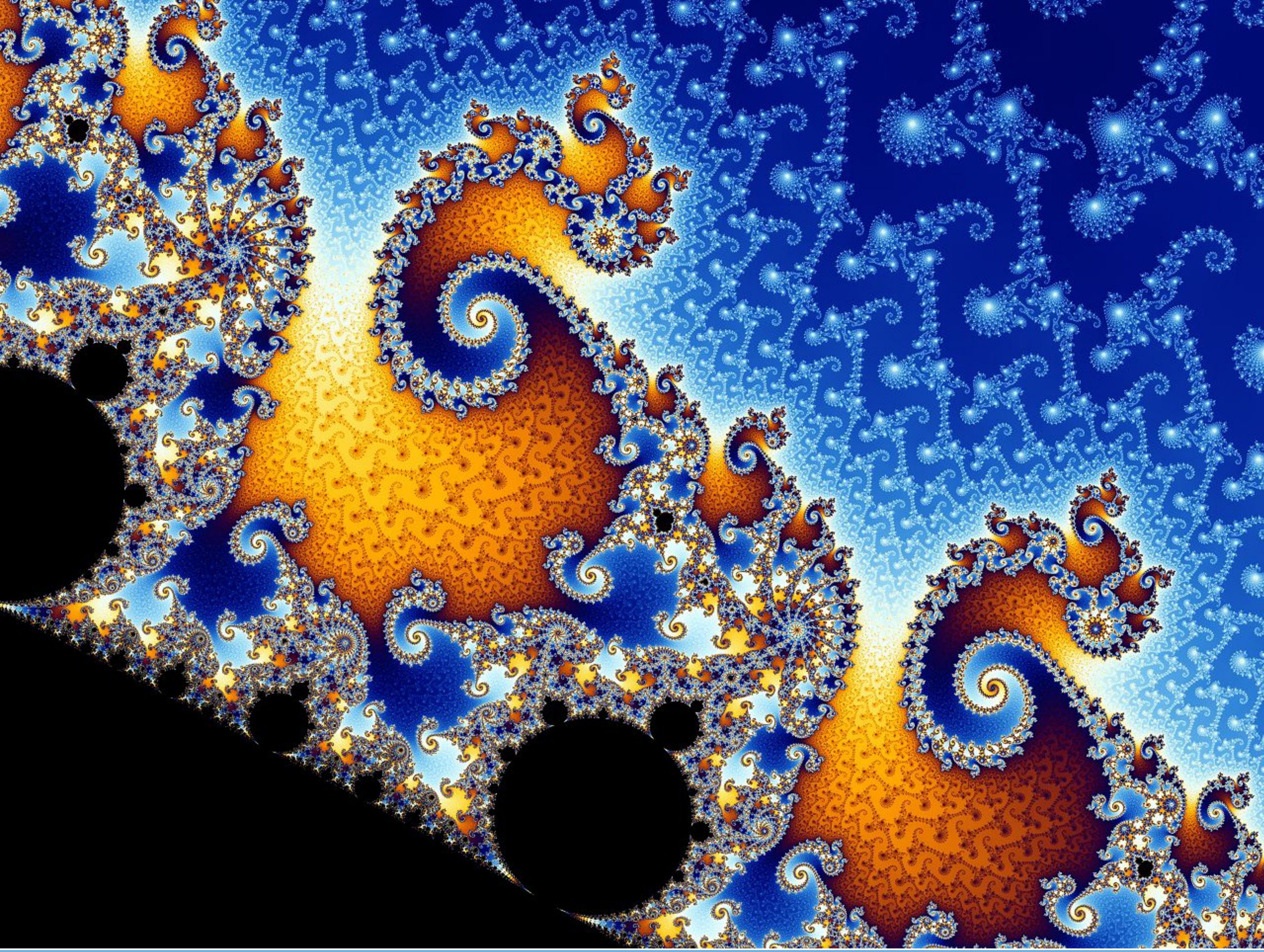

Summary of Real Analysis Lecture

UGM Team's ONMIPA Preparation Training

Penulis: Fahreezan Sheraz Diyaldin

Institusi: Universitas Gadjah Mada

Versi: 1.0

ElegantLaTeX Program

Kata Pengantar

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah *Subhanahu wa Ta'ala* karena atas limpahan rahmat, nikmat, dan karunia-Nya, penulis dapat menyelesaikan handout dengan judul "*Summary of Real Analysis Lecture: UGM Team's ONMIPA Preparation Training*".

Handout ini penulis ketik sebagai bahan pembinaan untuk tim Matematika UGM dalam menghadapi ONMIPA 2024, khususnya untuk subbidang Analisis Real. Adapun alasan pemilihan template ini sebenarnya tidak ada, cuma iseng-iseng aja nyobain template, hehe.

Analisis Real adalah cabang matematika yang mempelajari perilaku (sifat) dari bilangan real, barisan dan deret bilangan real, serta fungsi real. Pada handout ini, disajikan materi dasar, contoh soal, dan latihan-latihan soal untuk subbidang Analisis Real dalam ONMIPA Matematika, Perlu dicatat bahwa materi yang disajikan secara garis besar hanya berisi kumpulan definisi dan teorema. Untuk bukti lengkap setiap teorema dan juga contoh-contohnya, Saudara dapat mempelajari secara mandiri melalui buku dan referensi lainnya terkait Analisis Real.

Beberapa hal yang perlu Saudara perhatikan untuk pembinaan daring terkai dengan handout ini:

1. Usahakan sudah membaca terlebih dahulu materi sebelum waktu pembinaan.
2. Silakan *review* kembali materi Kalkulus Variabel Tunggal (atau Kalkulus I dan Kalkulus II) yang telah Anda dapatkan karena Analisis Real bisa dibilang sebagai "versi lanjut" dari Kalkulus. Beberapa soal memerlukan materi Kalkulus yang tidak disajikan dalam handout ini.
3. Pada prinsipnya, waktu pembinaan sangat terbatas, sehingga tidak mungkin digunakan untuk membahas dengan detail seluruh materi dan menuntaskan semua latihan soal dalam handout ini. Oleh karena itu, kemandirian Anda dalam belajar sangat diperlukan jika Saudara ingin ~~langsung dapat emas pada tahun pertama dan di-*banned* pada tahun berikutnya~~ memeroleh hasil yang terbaik pada kompetisi ini.

Tentunya handout ini masih jauhh dari kata sempurna. Oleh karena itu, penulis memohon maaf jika terdapat kekurangan dalam handout ini baik dari segi pengetikan maupun dari segi konten materi. Akhir kata, semoga handout ini dapat membantu Saudara dalam mempersiapkan diri menghadapi kompetisi matematika paling elit di Indonesia untuk tingkat perguruan tinggi ini.

Daftar Isi

Bab 1 Sifat Kelengkapan $\mathbb{R}$

1.1 Supremum dan Infimum

Ketika berbicara suatu himpunan bagian dari $\mathbb{R}$, terdapat beberapa karakteristik yang melekat padanya. Salah satu sifat tersebut adalah keterbatasan himpunan. Untuk lebih jelasnya, diperhatikan definisi berikut.

Definisi 1.1 (himpunan terbatas)

Diberikan himpunan tak kosong $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. *Himpunan A dikatakan* ***terbatas ke atas*** *jika terdapat $u \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $u \geq x$ untuk setiap $x \in A$. Bilangan u yang memenuhi kondisi tersebut disebut* ***batas atas*** *dari A.*
2. *Himpunan A dikatakan* ***terbatas ke bawah*** *jika terdapat $v \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $v \leq x$ untuk setiap $x \in A$. Bilangan v yang memenuhi kondisi tersebut disebut* ***batas bawah*** *dari A.*
3. *Himpunan A dikatakan* ***terbatas*** *jika A terbatas ke atas dan ke bawah.* ♣

Berdasarkan definisi keterbatasan suatu himpunan, dapat didefinisikan keterbatasan pada fungsi sebagai berikut.

Definisi 1.2 (fungsi terbatas)

Diberikan fungsi $f : A \to B \subseteq \mathbb{R}$

1. *Fungsi f dikatakan* ***terbatas ke atas*** *jika himpunan $f(A)$ terbatas ke atas.*
2. *Fungsi f dikatakan* ***terbatas ke bawah*** *jika himpunan $f(A)$ terbatas ke bawah.*
3. *Fungsi f dikatakan* ***terbatas*** *jika f terbatas ke atas dan ke bawah.* ♣

Untuk mengecek keterbatasan suatu himpunan menggunakan definisi, perlu dicari dua bilangan, satu bilangan sebagai batas atas dan bilangan lainnya sebagai batas bawah. Menggunakan teorema berikut, kita dapat mengecek keterbatasan himpunan dengan mencari satu bilangan saja.

Teorema 1.1

Himpunan tak kosong $A \subseteq \mathbb{R}$ terbatas jika dan hanya jika terdapat $M > 0$ dengan sifat $|x| < M$ untuk setiap $x \in A$. ♡

Mudah dipahami bahwa batas atas dan batas bawah dari suatu himpunan (jika ada) tidaklah tunggal. Jika u batas atas dari suatu himpunan A, maka semua bilangan yang lebih besar dari u juga batas atas A. Batas atas yang terlalu besar tentu tidak terlalu menarik untuk dipelajari. Dari sini, muncul pernyataan terkait eksistensi batas atas yang terkecil, begitu pula batas bawah yang terbesar. Hal tersebut memberi motivasi untuk definisi berikut.

Definisi 1.3 (supremum dan infimum)

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong.

1. *Bilangan $u \in \mathbb{R}$ disebut batas atas terkecil (**supremum**) dari A, ditulis $u = \sup A$, jika*
   - *$u \geq x$ untuk setiap $x \in A$, dan*
   - *untuk setiap u' batas atas dari A, berlaku $u' \geq u$.*
2. *Bilangan $v \in \mathbb{R}$ disebut batas bawah terbesar (**infimum**) dari A, ditulis $u = \inf A$, jika*
   - *$v \leq x$ untuk setiap $x \in A$, dan*
   - *untuk setiap v' batas atas dari A, berlaku $v' \leq v$.*

♣

Secara umum, supremum dari suatu himpunan belum tentu sama dengan elemen maksimum himpunan tersebut. Terkait hal tersebut, diperhatikan teorema berikut.

Teorema 1.2

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong.

1. *Jika u batas atas dari A dan $u \in A$, maka $u = \sup A$.*
2. *Jika v batas bawah dari A dan $v \in A$, maka $v = \inf A$.*

Sebagai tambahan, pada kondisi di atas, u sekaligus menjadi elemen maksimum dari A, sedangkan v menjadi elemen minimum dari A.

♡

Selain menggunakan definisi, pengecekan nilai supremum dan infimum dapat dilakukan menggunakan teorema berikut.

Teorema 1.3

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ tidak kosong.

1. *Bilangan $u \in \mathbb{R}$ merupakan supremum dari A jika dan hanya jika*
   - *$u \geq x$ untuk setiap $x \in A$, dan*
   - *untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $x_\varepsilon \in A$ dengan sifat $x_\varepsilon > u - \varepsilon$.*
2. *Bilangan $v \in \mathbb{R}$ merupakan infimum dari A jika dan hanya jika*
   - *$v \leq x$ untuk setiap $x \in A$, dan*
   - *untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $x_\varepsilon \in A$ dengan sifat $x_\varepsilon < v + \varepsilon$.*

♡

Selanjutnya, diberikan aksioma kelengkapan $\mathbb{R}$ sebagai berikut.

Aksioma 1.1

Setiap himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ yang tak kosong terbatas ke atas memiliki supremum.

♡

Sebagai akibatnya, dapat ditunjukkan bahwa setiap himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ yang tak kosong dan terbatas ke bawah memiliki infimum.

Berikutnya, diberikan sifat terkait himpunan bilangan asli ($\mathbb{N}$).

Teorema 1.4 (sifat Archimedean)

Untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, terdapat $n \in \mathbb{N}$ dengan sifat $x < n$.

♡

Sifat Archimedean menyatakan bahwa $\mathbb{N}$ tidak terbatas ke atas. Selain itu, sifat ini juga dapat dinyatakan sebagai berikut: untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n \in\in N$ dengan sifat $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Sifat Archimedean sering digunakan dalam pengerjaan soal, khususnya yang terkait dengan bilangan asli. Selain itu, sifat ARchimedean juga bermanfaat unntuk membuktikan sifat kerapatan bilangan rasional dan irasional.

Teorema 1.5 (kerapatan bilangan rasional dan irasional)

Untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$ dengan $x < y$, terdapat $r \in \mathbb{Q}$ dan $s \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ dengan sifat $r, s \in (x, y)$. ♡

1.2 Contoh Soal

Contoh 1.1 Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ yang terbatas ke bawah. Didefinisikan himpunan $-A = \{-a \,|\, a \in A\}$. Buktikan bahwa $\sup(-A) = -\inf A$.

Penyelesaian Misalkan $v = \inf A$. Untuk setiap $x \in -A$, diperoleh $-x \in A$, sehingga $-x \geq \inf A = v \iff x \leq -v$. Akibatnya, $-v$ merupakan batas atas $-A$.

Selanjutnya, diambil sebarang $u \in \mathbb{R}$ batas atas $-A$. Untuk setiap $a \in A$, didapat $-a \in -A$, sehingga $-a \leq u \iff a \geq -u$ yang berarti $-u$ merupakan batas bawah A. Akibatnya, $-u \leq \inf A = v \iff u \geq -v$.

Jadi, dapat disimpulkan bahwa $-v$ merupakan batas atas terkecil dari $-A$. Dengan kata lain, $\sup(-A) = -v = -\inf A$.

Contoh 1.2 Tentukan supremum dari himpunan $S = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$.

Penyelesaian Diperhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n}{n+1} < \frac{n+1}{n+1} = 1,$$

sehingga diperoleh bahwa 1 adalah batas atas dari S. Selanjutnya, diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Menurut sifat Archimedean, terdapat $m \in \mathbb{N}$ dengan sifat

$$\frac{1}{m} < \varepsilon \implies \frac{m}{m+1} = 1 - \frac{1}{m+1} > 1 - \frac{1}{m} > 1 - \varepsilon,$$

yang berarti terdapat anggota S yang lebih besar dari $1 - \varepsilon$.

Dengan demikian, berdasarkan Teorema 1.3, dapat disimpulkan bahwa $\sup S = 1$.

Contoh 1.3 (sifat interval bersarang) Diberikan interval-interval tertutup $I_1, I_2, I_3, \ldots$ dengan $I_n = [a_n, b_n]$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq \ldots$, buktikan bahwa terdapat $x \in \mathbb{R}$ dengan sifat $x \in I_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

Penyelesaian Diambil sebarang $m, n \in \mathbb{N}$. Jika $m \leq n$, diperoleh $I_m \supseteq I_n$, sehingga $a_m \leq a_n \leq b_n$. Jika $m > n$, diperoleh $I_m \subseteq I_n$, sehingga $a_m \leq b_m \leq b_n$. Dari sini, dapat disimpulkan bahwa $a_m \leq b_n$ untuk setiap $m, n \in \mathbb{N}$.

Fakta tersebut menunjukkan bahwa $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$, memiliki batas atas (setidaknya adalah b_1), sehingga supremumnya ada, katakan u. Di sisi lain, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, b_n merupakan batas atas $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$, sehingga $u \leq b_n$. Jadi, untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, terbukti bahwa $a_n \leq u \leq b_n \iff u \in I_n$.

Latihan Bab 1

1. Diberikan $A, B \subseteq \mathbb{R}$ yang terbatas ke atas. Didefinisikan himpunan $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Buktikan bahwa $\sup(A+B) = \sup A + \sup B$.

2. Diberikan fungsi terbatas f dan g dengan domain $D \subseteq \mathbb{R}$. Dibentuk fungsi $h = f+g$ dengan domain D. Jika R_f menyatakan *range* dari fungsi f, buktikan bahwa $\sup R_h \leq \sup R_f + \sup R_g$.

3. (KNMIPA Wilayah 2021) Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}^+$ terbatas ke bawah. Didefinisikan $B = \left\{\frac{1}{a} : a \in A\right\}$. Jika $\inf A > 0$, tentukan $\sup B$. Selanjutnya, jika $\inf A = 0$, tentukan $\sup B$.

4. Diberikan koleksi $\mathscr{A}$ yang berisi himpunan-himpunan bagian dari $\mathbb{R}$ dengan sifat $\sup A$ ada untuk setiap $A \in \mathscr{A}$. Didefinisikan
$$S_1 = \bigcup_{A \in \mathscr{A}} A \text{ dan } S_2 = \{\sup A : A \in \mathscr{A}\}.$$
   (a). Jika salah satu di antara S_1 atau S_2 memiliki supremum, tunjukkan bahwa supremum himpunan lainnya juga ada.
   (b). Jika S_1 dan S_2memiliki supremum, tunjukkan bahwa $\sup S_1 = \sup S_2$.

5. Diberikan koleksi interval $\{I_n\} = \{[a_n, b_n]\}$ dengan sifat $I_{n+1} \subseteq I_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika $\inf\{b_n - a_n : n \in \mathbb{N}\} = 0$, tunjukkan bahwa terdapat tepat satu bilangan x yang memenuhi $x \in I_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

6. Tentukan supremum dan infimum dari himpunan berikut (jika ada).
   (a). $F = \left\{(-1)^n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\right\}$
   (b). $S = \left\{\frac{m}{|m|+n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\right\}$
   (c). $D = \left\{\frac{\lfloor x \rfloor}{x} : x \in (1, \infty)\right\}$
   (d). (Seleksi Tahap I UGM 2021) $A = \left\{e^{2x} + e^{\frac{1}{x}} : x \in \mathbb{R}^+\right\}$

7. Diberikan bilangan irasional ω. Didefinisikan
$$A = \{m + n\omega \in \mathbb{R}^+ : m, n \in \mathbb{Z}\}.$$
   Buktikan bahwa $\inf A = 0$.

Bab 2 Barisan Bilangan Real

2.1 Definisi Dasar dan Konsep Kekonvergenan

Sebagai awalan, diberikan definisi barisan sebagai berikut.

Definisi 2.1 (barisan)

1. ***Barisan bilangan real*** *adalah fungsi dari* $\mathbb{N}$ *ke* $\mathbb{R}$.
2. *Nilai fungsi tersebut di* $n \in \mathbb{N}$ *disebut* ***suku ke-n*** *dari barisan tersebut dan dinotasikan dengan* x_n *(simbol* x *dapat diganti dengan simbol lainnya).* ♣

Beberapa notasi untuk barisan diberikan di bawah ini:

$$\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, \{a_n\}, \{a_1, a_2, a_3, \dots\}, (a_n) \text{ dan } (a_1, a_2, a_3, \dots).$$

Untuk selanjutnya, frasa “barisan bilangan real" cukup ditulis dengan “barisan".

Seperti halnya pada bilangan, terdapat beberapa operasi aljabar yang berlaku pada barisan seperti yang tertera di bawah ini.

Definisi 2.2 (operasi barisan)

Diberikan barisan bilangan real (a_n) *dan* (b_n). *Didefinisikan operasi beberapa operasi pada barisan sebagai berikut.*

1. ***(Penjumlahan barisan)*** $(a_n) + (b_n) := (a_n + b_n)$.
2. ***(Perkalian dengan skalar)*** $k(a_n) := (ka_n)$ *untuk setiap* $k \in \mathbb{R}$.
3. ***(Perkalian barisan)*** $(a_n)(b_n) := (a_n b_n)$.
4. ***(Pembagian barisan)*** $\dfrac{(a_n)}{(b_n)} := \left(\dfrac{a_n}{b_n}\right)$, *asalkan* $b_n \neq 0$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$. ♣

Dalam studi terkait barisan, salah satu konsep yang cukup penting adalah konsep kekonvergenan. Kekonvergenan barisan dapat digunakan untuk melakukan karakterisasi himpunan bilangan real dan fungsi bernilai real. Untuk lebih jelasnya, diperhatikan definisi berikut.

Definisi 2.3 (barisan konvergen)

1. *Barisan bilangan real* (a_n) *dikatakan* ***konvergen ke*** $a \in \mathbb{R}$, *ditulis*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \lim a_n = a, \text{ atau } a_n \to a,$$

jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, *terdapat* $n_0 \in \mathbb{N}$ *dengan sifat untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *dengan* $n \geq n_0$, *berlaku*

$$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Selanjutnya, bilangan real a *yang memenuhi kondisi di atas disebut* ***nilai limit*** *dari* (a_n).

2. *Barisan* (a_n) *dikatakan* ***konvergen*** *jika terdapat* $a \in \mathbb{R}$ *dengan sifat* $a_n \to a$.
3. *Barisan yang tidak konvergen disebut barisan* ***divergen***. ♣

Teorema 2.1

Jika (a_n) merupakan barisan konvergen, maka nilai limitnya tunggal. ♡

Jika dua barisan yang memiliki limit dioperasikan, limit dari barisan hasil operasinya dapat ditentukan melalui teorema berikut.

Teorema 2.2

Diberikan barisan (a_n) dan (b_n) dengan $\lim a_n$ dan $\lim b_n$ ada. Sifat-sifat berikut berlaku.

1. $\lim(a_n + b_n) = \lim a_n + \lim b_n$.
2. $\lim(ka_n) = k \lim a_n$, *untuk setiap* $k \in \mathbb{R}$.
3. $\lim(a_n b_n) = (\lim a_n)(\lim b_n)$.
4. $\lim \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim a_n}{\lim b_n}$, *asalkan* $b_n \neq 0$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *dan* $\lim b_n \neq 0$.

♡

Sebelum menelusuri lebih jauh karakteristik barisan konvergen, akan dikenalkan beberaoa istilah sebagai berikut.

Definisi 2.4 (subbarisan dan ekor barisan)

Diberikan barisan bilangan real (a_n) dan barisan bilangan asli $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dengan $n_k < n_{k+1}$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

- *Barisan berbentuk $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ disebut **subbarisan** dari (a_n).*
- *Barisan $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ disebut **subbarisan ganjil** dari (a_n).*
- *Barisan $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ disebut **subbarisan genap** dari (a_n).*
- *Subbarisan berbentuk $(a_{m+k})_{k\in\mathbb{N}}$ dengan $m \in \mathbb{N}$ disebut **ekor** (lebih tepatnya **ekor-**m) dari (a_n).*

♣

Selanjutnya, diberikan karakterisasi barisan konvergen melalui subbarisan dan ekor barisannya.

Teorema 2.3

Diberikan barisan bilangan real (a_n) dan $a \in \mathbb{R}$. Keempat pernyataan berikut ekuivalen.

1. *Barisan (a_n) konvergen ke a.*
2. *Setiap subbarisan dari (a_n) konvergen ke a.*
3. *Subbarisan ganjil dan genap dari (a_n) konvergen ke a.*
4. *Terdapat ekor barisan (a_n) yang konvergen ke a.*

♡

Ekuivalensi pernyataan 1 dan 4 dalam Teorema 2.3 menunjukkan bahwa kekonvergenan suatu barisan tidak dipengaruhi oleh “kepala" barisan tersebut.

Selanjutnya, diberikan teorem terkait kekonvergenan barisan yang diapit oleh dua barisan yang konvergen ke limit yang sama.

Teorema 2.4 (teorema apit)

Diberikan barisan bilangan real $(a_n), (b_n), (c_n)$ dengan sifat terdapat $m \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $a_n \leq b_n \leq c_n$ untuk setiap $n \geq m$. Jika $a_n \to L$ dan $c_n \to L$ ($L \in \mathbb{R}$), maka $b_n \to L$. ♡

2.2 Barisan Terbatas dan Barisan Monoton

Sebagai awalam, diberikan definisi barisan terbatas sebagai berikut.

Definisi 2.5 (barisan terbatas)

Barisan (a_n) dikatakan ***terbatas*** *jika terdapat $M \in \mathbb{R}$ dengan sifat $|a_n| \leq M$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.* ♣

Definisi tersebut ekuivalen dengan mengatakan bahwa himpunan $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ berdasarkan Teorema 1.1.

Hubungan barisan terbatas dan barisan konvergen disajikan dalam teorem berikut.

Teorema 2.5

Setiap barisan bilangan real yang konvergen merupakan barisan terbatas. ♡

Selanjutnya, akan dikenalkan konsep kemonotonan barisan sebagai berikut.

Definisi 2.6

Diberikan barisan (a_n).

1. *Barisan (a_n) dikatakan* ***naik monoton*** *jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $a_{n+1} \geq a_n$.*
2. *Barisan (a_n) dikatakan* ***turun monoton*** *jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku $a_{n+1} \leq a_n$.*
3. *Barisan (a_n) dikatakan* ***monoton*** *jika (a_n) naik monoton atau turun monoton.* ♣

Hubungan sifat kemonotonan dengan kekonvergenan barisan diberikan dalam teorema berikut. Perlu dicatat bahwa teorema ini cukup sering digunakan dalam pengerjaan soal.

Teorema 2.6

Diberikan barisan (a_n).

1. *Jika (a_n) naik monoton dan terbatas ke atas, maka $a_n \to \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.*
2. *Jika (a_n) turun monoton dan terbatas ke bawah, maka $a_n \to \inf\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$.* ♡

Secara umum, barisan bilangan real tidak selalu monoton. Akan tetapi, selalu dapat ditemukan subbarisannya yang monoton.

Teorema 2.7

Setiap barisan bilangan real memiliki subbarisan yang monoton. ♡

Koonvers dari Teorema 2.5 belum tentu berlaku. Akan tetapi, menggunakan Teorema 2.6 dan 2.7, dapat dibuktikan teorema berikut.

Teorema 2.8 (Boltzano-Weierstrass)

Setiap barisan bilangan real yang terbatas memiliki subbarisan yang monoton. ♡

2.3 Barisan Cauchy

Sebelumnya, diberikan definisi barisan Cauchy sebagai berikut.

Definisi 2.7

Barisan (a_n) disebut ***barisan Cauchy*** *jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ dengan sifat untuk setiap bilangan asli $m, n \geq n_0$, berlaku*

$$|a_m - a_n| < \varepsilon.$$

♣

Dapat ditunjukkan bahwa setiap barisan Cauchy terbatas. Menggunakan keterbatasan barisan Cauchy dan Teorema Boltzano-Weierstrass, dapat ditunjukkan ekuivalensi berikut.

Teorema 2.9

Barisan (a_n) konvergen jika dan hanya jika (a_n) merupakan barisan Cauchy. ♡

Teorema tersebut memberikan alternnatif cara untuk menunjukkan suatu barisan konvergen tanpa harus menebak terlebih dahulu nilai limitnya.

Sebagai pennutup bab ini, akan dikenalkan suatu jenis barisan khusus yang beberapa kali muncul dalam soal-soal.

Definisi 2.8

Barisan (a_n) dikatakan ***kontraktif*** *jika terdapat $C \in (0,1)$ sehingga untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku*

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq C|a_{n+1} - a_n|.$$

♣

Dapat ditunjukkan bahwa setiap barisan kontraktif merupakan barisan Cauchy, sehingga dapat disimpulkan sifat berikut.

Teorema 2.10

Setiap barisan kontraktif merupakan barisan yang konvergen. ♡

2.4 Contoh Soal

Contoh 2.1 Tentukan nilai limit barisan $(\sqrt[n]{n})$.

Penyelesaian Diambil sebarang $n \in \mathbb{N}$. Menggunakan ketaksamaan Bernoulli, didapat

$$\left(1 + \frac{\sqrt{n} - 1}{n}\right)^n \geq \sqrt{n} \iff \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)^2 \geq \sqrt[n]{n}.$$

(**Catatan:** ketaksamaan Bernoulli menyatakan bahwa $(1+x)^n \geq 1 + nx$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $x \geq -1$.)

Di sisi lain, mudah dipahami bahwa $\sqrt[n]{n} \geq 1$. Akibatnya,

$$1 \leq \sqrt[n]{n} \leq \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n}\right)^2.$$

Dengan demikian, menggunakan teorema apit, diperoleh $\sqrt[n]{n} \to 1$.

Contoh 2.2 Diberikan barisan (b_n) yang memenuhi $b_1 = 2$ dan $b_{n+1} = 2 - \dfrac{1}{b_n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Buktikan bahwa (b_n) konvergen dan tentukan nilai limitnya.

Penyelesaian Pertama, akan ditunjukkan (b_n) terbatas ke bawah oleh 1 menggunakan induksi matematika. (dengan kata lain, akan ditunjukkan $b_n \geq 1$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

- Untuk $n = 1$, jelas bahwa $b_1 \geq 1$.
- Diasumsikan $b_k \geq 1$ untuk suatu $k \in \mathbb{N}$.
- Akan ditunjukkan bahwa $b_{k+1} \geq 1$. Diperhatikan bahwa

$$b_{k+1} = 2 - \frac{1}{b_k} \geq 2 - \frac{1}{1} = 1$$

Jadi, berdasarkan induksi matematika, terbukti bahwa (b_n) terbatas ke bawah oleh 1.

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa (b_n) turun monoton (dengan kata lain, akan ditunjukkan $b_{n+1} - b_n \leq 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$). Untuk itu, diambil sebarang $n \in \mathbb{N}$. Diperhatikan bahwa

$$b_{n+1} - b_n = 2 - \frac{1}{b_n} - b_n = \frac{2b_n - 1 - b_n^2}{b_n} = \frac{-(b_n - 1)^2}{b_n} \leq 0.$$

Jadi, terbukti bahwa (b_n) turun monoton.

Karena (b_n) turun monoton dan terbatas ke bawah, maka dapat disimpulkan bahwa (b_n) konvergen berdasarkan Teorema 2.6, katakan ke b. Diperoleh

$$b = \lim b_{n+1} = \lim(2 - \frac{1}{b_n}) = 2 - \frac{1}{b} \iff b = 1.$$

Dengan demikian, barisan (b_n) konvergen ke 1.

Contoh 2.3 Diberikan barisan (x_n) yang konvergen. Diketahui bahwa setiap subbarisan dari (x_n) yang konvergen memiliki nilai limit yang sama. Buktikan bahwa (x_n) konvergen.

Penyelesaian Diketahui (x_n) terbatas. Berdasarkan Teorema Boltzano-Weierstrass, terdapat subbarisan dari (x_n) yang konvergen, katakan ke x. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $x_n \to x$.

Andaikan (x_n) tidak konvergen ke x. Menurut definisi, terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga untuk setiap $k \in \mathbb{N}$, terdapat $n_k \in \mathbb{N}$ dengan $n_k \geq k$ sehingga $|x_{n_k} - x| \geq \varepsilon$. Lebih lanjut, dapat dipilih n_k yang lebih besar dari n_k untuk setiap $k \geq 2$.

Sekarang, ditinjau barisan $(y_k) := (x_{n_k})$. Karena (y_k) merupakan subbarisan dari (x_n), maka (y_k) terbatas. Dengan kembali menggunakan Teorema Boltzano-Weierstrass, didapat (y_k) memiliki subbarisan yang konvergen. Akan tetapi, subbarisan tersebut tidak mungkin konvergen ke x mengingat $|y_k - x| \geq \varepsilon$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Di sisi lain, subbarisan dari (y_k) tersebut juga sekaligus subbarisan dari (x_n), sehingga seharusnya juga konvergen ke x berdasarkan asumsi pada soal. Hal ini merupakan suatu kontradiksi.

Jadi, terbukti bahwa barisan (x_n) konvergen (yakni ke x).

Latihan Bab 2

1. Diberikan barisan bilangan real (x_n) dengan $x_1 = 22$ dan $x_{n+1} = \sqrt[3]{3x_n - 2}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (x_n) terbatas dan tentukan nilai limitnya.
2. Diberikan $c \in (0, 2)$. Tunjukkan bahwa barisan (a_n) dengan $a_0 = 1, a_1 = 2$, serta $a_{n+2} = ca_{n+1} + (1 - c)a_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ konvergen. Tentukan pula nilai limitnya.

3. (Seleksi Tahap I UGM 2022) Diberikan barisan bilangan real (a_n) dengan $a_1 = 1$ dan $a_{n+1} = \frac{n}{n+1}\sqrt{a_n}$ untuk $n \geq 1$. Tunjukkan bahwa barisan tersebut konvergen.

4. (ONMIPA Wilayah 2022) Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan $x_n = \left(\sqrt{2}\right)^{x_{n-1}}$ untuk $n > 1$. Buktikan bahwa barisan tersebut konvergen dan tentukan nilai limitnya.

5. (Seleksi Tahap I UGM 2023) Diberikan barisan real positif (a_n) dan (b_n) yang memenuhi
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ dan } b_{n+1} = \frac{2}{\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}} \forall n \in \mathbb{N}.$$
Tunjukkan bahwa (a_n) dan (b_n) konvergen dan nilai limit keduanya sama.

6. (ONMIPA Wilayah 2018) Selidiki kekonvergenan barisan bilangan real (x_n) dengan $x_1 = 1$ dan $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

7. Diberikan barisan (c_n) yang memenuhi $c_n \in (0,1)$ dan $c_n(1 - c_{n+1}) > \frac{1}{4}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (c_n) konvergen dan tentukan nilai limitnya.

8. (ONMIPA Nasional 2018) Diberikan barisan bilangan real (x_n) yang terbatas dan memenuhi $x_{n+2} \leq \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Didefinisikan $A_n = \max\{x_n, x_{n+1}\}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
   (a). Buktikan bahwa barisan (A_n) konvergen.
   (b). Buktikan bahwa barisan (x_n) konvergen.

9. (ONMIPA Wilayah 2023) Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n) dengan (x_n) konvergen ke $x \in \mathbb{R}$ dan (y_n) konvergen ke $y \in \mathbb{R}$. Didefinisikan barisan (z_n) dengan
$$z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+1-i} \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$
Buktikan bahwa barisan (z_n) konvergen ke xy.

10. Tentukan nilai limit berikut jika ada.
   (a). $\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \cdots + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$
   (b). $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{20^n + 24^n}$

Bab 3 Deret Bilangan Real

3.1 Definisi Dasar dan Konsep Kekonvergenan

Dalam aljabar, telah diketahui bahwa operasi penjumlahan pada $\mathbb{R}$ bersifat komutatif. Akibatnya, penjumlahan sebanyak berhingga bilangan real, katakan $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2024}$ dapat dilakukan dengan terlebih dahulu menjumlahkan sebarang dua bilangan, kemudian hasilnya dijumlahkan dengan satu bilangan lainnya, dan seterusnya. Akan tetapi, aljabar tidak mempelajari jumlahan yang melibatkan tak hingga bilangan.

Dalam analisis, terdapat konsep deret yang digunakan untuk mempelajari penjumlahan sebanyak terhitung bilangan real. Untuk lebih jelasnya, diperhatikan definisi berikut.

Definisi 3.1 (deret bilangan real)

Diberikan barisan (x_n). Didefinisikan barisan (s_n) dengan $s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

1. *Barisan (s_n) disebut* ***deret*** *yang dibangkitkan oleh (x_n).*
2. *Suku ke-n dari (s_n) disebut* ***jumlah parsial*** *dari deret tersebut.*

♣

Karena deret pada dasarnya merupakan barisan, maka definisi deret konvergen dan divergen mengikuti definisi barisan konvergen dan divergen seperti diberikan pada Definisi 2.1.

Untuk selanjutnya, notasi

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots$$

digunakan untuk menyatakan deret (s_n) yang dibangkitkan oleh (x_n) sekaligus menyatakan nilai limit dari (s_n). Jika $s_n \to s$ untuk suatu $s \in \mathbb{R}$, nilai s disebut **nilai dari deret** $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$.

Sifat sederhana dari deret konvergen diberikan di bawah ini.

Teorema 3.1

Diberikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Jika deret tersebut konvergen, maka $x_n \to 0$.

♡

Perlu diingat bahwa konvers teorema di atas belum tentu berlaku.

3.2 Uji Kekonvergenan Deret

Membuktikan suatu deret konvergen atau divergen menggunakan definisi seringkali tidak mudah. Sebagai alternatifnya, terdapat beberapa uji yang dapat digunakan.

Teorema 3.2 (uji banding)

Diberikan barisan bilangan nonnegatif (x_n) dan (y_n) dengan sifat terdapat $N \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N$, berlaku $x_n \leq y_n$.

1. *Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen.*
2. *Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ divergen.*

♡

Teorema 3.3 (uji limit banding)

Diberikan barisan bilangan positif (x_n) dan (y_n) dengan sifat nilai limit $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$ ada, katakan nilainya L.

1. *Jika $L \neq 0$, maka deret $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen jika dan hanya jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen.*
2. *Jika $L = 0$ dan deret $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ konvergen, maka $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen.*

♡

Uji banding dan uji limit banding memungkinkan kita untuk menyelidiki kekonvergenan suatu deret melalui deret lain yang kekonvergenannya telah diketahui sebelumnya.

Teorema 3.4 (uji rasio)

Diberikan deret suku-suku tak nol $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dengan sifat $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|$ ada, katakan L.

1. *Jika $L < 1$, maka deret tersebut konvergen.*
2. *Jika $L > 1$, maka deret tersebut divergen.*
3. *Jika $L = 1$, maka tidak dapat ditarik kesimpulan mengenai kekonvergenan deret tersebut.* ♡

Teorema 3.5 (uji akar)

Diberikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dengan sifat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ ada, katakan L.

1. *Jika $L < 1$, maka deret tersebut konvergen.*
2. *Jika $L > 1$, maka deret tersebut divergen.*
3. *Jika $L = 1$, maka tidak dapat ditarik kesimpulan mengenai kekonvergenan deret tersebut.* ♡

Beberapa uji yang diberikan diatas mensyaratkan deret yang ditinjau memiliki suku-suku nonnegatif atau bahkan positif. Tentu saja tidak semua deret memenuhi kondisi tersebut. Karena itu, akan dibahas hubungan kekonvergenan barisan dengan suatu barisan suku-suku nonnegatif. Sebelumnya, diperhatikan definisi berikut.

Definisi 3.2 (konvergen mutlak dan bersyarat)

1. *Deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dikatakan* ***konvergen mutlak*** *jika deret mutlaknya, $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$, konvergen.*
2. *Deret konvergen yang tidak konvergen mutlak disebut deret* ***konvergen bersyarat***. ♣

Hubungan deret konvergen dan konvergen mutlak diberikan pada teorema berikut. Teorema ini memungkinkan kita menyelidiki kekonvergenan suatu deret melalui kekonvergenan suatu deret suku-suku nonnegatif.

Teorema 3.6

Setiap deret yang konvergen mutlak merupakan deret yang konvergen. ♡

Perlu dicatat bahwa konvers teorema tersebut belum tentu berlaku.

Selanjutnya, akan dibahas kekonvergenan dari sebuah deret dengan sifat khusus, yakni deret ayun/ deret berganti tanda.

Definisi 3.3

Deret berbentuk $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *dengan* $a_n \geq 0$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$ *disebut* ***deret ayun/ deret berganti tanda***. ♣

Sederhananya, setiap dua suku berurutan pada deret ayun memiliki tanda (positif/ negatif) yang berbeda.

Menguji kekonvergenan deret ayun dapat dilakukan dengan Teorema 3.6. Selain itu, dapat digunakan sifat berikut sebagai alternatifnya.

Teorema 3.7

Diberikan barisan suku-suku nonnegatif (a_n)*. Jika* (a_n) *turun monoton dan konvergen ke* 0*, maka deret* $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ *konvergen.* ♡

Sebagai penutup subbab ini, diberikan beberapa sifat kekonvergenan dari beberapa deret khusus. Deret ini dapat digunakan sebagai contoh untuk soal-soal tertentu dan sebagai deret pembanding ketika ingin menggunakan uji banding atau uji limit banding.

1. **(deret geometri)** Diberikan $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ dan $r \in \mathbb{R}$. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ konvergen jika dan hanya jika $|r| < 1$.
2. **(deret p)** Diberikan $p \in \mathbb{R}$. Deret $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergen jika dan hanya jika $p > 1$.

3.3 Teknik Menghitung Nilai Deret

Uji-uji kekonvergenan yang diberikan pada subbab sebelumnya hanya digunakan untuk menguji kekonvergenan suatu deret, bukan menghitung nilai eksak dari deret tersebut. Pada subbab ini, diberikan beberapa teknik menghitung nilai deret.

1. Memanfaatkan deret Taylor/ Maclaurin fungsi-fungsi tertentu.
2. Mengubah deret ke dalam bentuk teleskopik. Misalkan diberikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$. Nyatakan x_n ke dalam bentuk $y_n - y_{n+1}$, sehingga bentuk eksplisit dari jumlahan parsial deret tersebut adalah
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} (y_k - y_{k+1}) = y_1 - y_{n+1}.$$
Terakhir, tentukan $\lim_{n\to\infty} s_n$ untuk menentukan nilai deretnya.

3. Melihat suku-suku awal dari barisan jumlahan parsial suatu deret, tentukan polanya, kemudian buktikan pola tersebut berlaku untuk setiap bilangan asli n dengan induksi.

Latihan Bab 3

1. Diberikan deret $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ yang konvergen. Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n)$ konvergen.
2. Diberikan deret suku-suku positif $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yang konvergen. Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n a_{n+1}}$, dan $\sum_{n=1}^{\infty} \max\{a_n, a_{n+1}\}$ konvergen.
3. Diberikan deret suku-suku positif $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ yang konvergen dan barisan (a_n) yang terbatas. Tunjukkan bahwa deret $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ konvergen.
4. Diberikan barisan bilangan real nonnegatif (x_n) yang turun monoton. Jika $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergen, tunjukkan bahwa $nx_n \to 0$.
(Petunjuk: Diperhatikan bahwa $nx_{2n} \leq x_{n+1} + x_{n+2} + \cdots + x_{2n}$)
5. (ONMIPA Wilayah 2019) Diberikan deret suku-suku tak negatif $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ yang konvergen. Tentukan nilai dari
$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \right).$$
6. Selidiki kekonvergenan deret $\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-\sqrt{n}}$ dan $\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{3} - 1)$.
7. Tentukan nilai dari deret berikut.
   (a). (ONMIPA Wilayah 2021) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! + 4^{n+1}}{4^n n!}$
   (b). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n2^n}$
   (c). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n! + (n+1)!}$
   (d). $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2^{n+1}) \sin^2(2^n)}{2^n}$

Bab 4 Limit dan Kekontinuan Fungsi

4.1 Sekilas Tentang Topologi

Sebelum membahas lebih jauh mengenai limit, akan dibahas terlebih dahulu konsep-konsep topologi pada $\mathbb{R}$. Topologi sebenarnya bukan materi utama dalam ONMIPA, tetapi beberapa definisi perlu diketahui untuk mempelajari topik utama.

Sebagai awalan, diberikan definisi persekitaran.

Definisi 4.1

Diberikan $x \in \mathbb{R}$ dan $r > 0$. Himpunan

$$N_r(x) := \{y \in \mathbb{R} : |y - x| < r\} = (x - r, x + r)$$

*disebut **persekitaran dari** x **dengan jari-jari** r.* ♣

Menggunakan persekitaran, dapat didefinisikan jenis-jenis titik terkait suatu himpunan, yakni sebagai berikut.

Definisi 4.2

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. *Titik $x \in A$ disebut **titik interior** dari A jika terdapat $r > 0$ dengan sifat $N_r(x) \subseteq A$. Himpunan semua titik interior dari A dinotasikan A^0 atau $\operatorname{int}(A)$.*
2. *Titik $x \in \mathbb{R}$ disebut **titik limit** dari A jika untuk setiap $r > 0$, berlaku $N_r(x) \cap A - \{x\} \neq \emptyset$. Himpunan semua titik limit dari A dinotasikan A'.*
3. *Titik $x \in \mathbb{R}$ disebut **titik klosur** dari A jika untuk setiap $r > 0$, berlaku $N_r(x) \cap A \neq \emptyset$. Himpunan semua titik klosur dari A dinotasikan $\overline{A}$ atau $\operatorname{cl}(A)$.*
4. *Titik $x \in \mathbb{R}$ disebut **titik batas** dari A jika untuk setiap $r > 0$, berlaku $N_r(x) \cap A \neq \emptyset$ dan $N_r(x) \cap A^c \neq \emptyset$. Himpunan semua titik batas dari A dinotasikan ∂A atau $b(A)$.*
5. *Titik $x \in A$ disebut **titik terasing** dari A jika terdapat $r > 0$ dengan sifat $N_r(x) \cap A = \{x\}$.* ♣

Selanjutnya, didefinisikan jenis-jenis himpunan sebagai berikut.

Definisi 4.3

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. *Himpunan A dikatakan **terbuka** jika $A = \operatorname{int}(A)$.*
2. *Himpunan A dikatakan **tertutup** jika A^c terbuka.* ♣

Selain menggunakan definisi, karakterisasi himpunan tertutup juga diberikan melalui sifat berikut.

Teorema 4.1

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$. Himpunan A tertutup jika dan hanya jika $A = \operatorname{cl}(A)$. ♡

Sebagai catatan, beberapa referensi menempatkan teorema ini untuk definisi himpunan tertutup.

Sifat lain himpunan tertutup yang cukup penting untuk diketahui diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 4.2

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$.

1. *Untuk setiap $a \in \mathbb{R}$, berlaku $a \in \mathrm{cl}(A)$ jika dan hanya jika terdapat barisan di A yang konvergen ke a.*
2. *Himpunan A tertutup jika dan hanya jika untuk setiap $a \in A$, terdapat barisan di A yang konvergen ke a.*

♡

4.2 Limit Fungsi

Limit merupakan konsep penting untuk mempelajari perilaku sebuah fungsi. Sebagai awalan, diperhatikan definisi berikut.

Definisi 4.4

*Diberikan $D \subseteq \mathbb{R}$, c titik limit dari D, dan fungsi $f : D \to \mathbb{R}$. Bilangan real L disebut **nilai limit** dari fungsi f di c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x \in D$ dengan $0 < |x - c| < \delta$, berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

♣

Dapat ditunjukkan bahwa bilangan L yang memenuhi kondisi pada definisi di atas (jika ada) tunggal adanya. Selanjutnya, kondisi tersebut ditulis dengan

$$\lim_{x \to c} f(x) = L.$$

Selain limit, dikenal pula konsep limit satu sisi seperti tertera di bawah ini.

Definisi 4.5

1. *Diberikan c titik limit himpunan $D \cap (c, \infty)$. Fungsi f dikatakan mempunyai **limit kanan** R di c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in D$ dengan $c < x < c + \delta$, berlaku $|f(x) - R| < \varepsilon$.*
2. *Diberikan c titik limit himpunan $D \cap (-\infty, c)$. Fungsi f dikatakan mempunyai **limit kiri** L di c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in D$ dengan $c - \delta < x < c$, berlaku $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

♣

Dapat ditunjukkan bahwa nilai limit kiri dan kanan (jika ada) tunggal adanya. Selanjutnya, notasi untuk limit kiri dan kanan dari f di c berturut-turut adalah

$$\lim_{x \to c^-} f(x) \text{ dan } \lim_{x \to c^+} f(x).$$

Limit fungsi memiliki keterkaitan dengan limit barisan seperti tertera pada teorema berikut.

Teorema 4.3

Diberikan $D \subseteq \mathbb{R}$, c titik limit D, dan fungsi $f: D \to \mathbb{R}$. Kedua pernyataan berikut ekuivalen:

1. $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$, *dan*
2. *untuk setiap barisan (x_n) di $D - \{c\}$ yang konvergen ke c, barisan bilangan real $(f(x_n))$ konvergen ke L.*

♡

Sifat tersebut juga berlaku untuk limit satu sisi. Untuk limit kiri, himpunan $D - \{c\}$ pada teorema di atas diganti dengan $D \cap (-\infty, c)$, sedangkan untuk limit kanan diganti dengan $D \cap (c, \infty)$.

Selanjutnya, terkait dengan teknik-teknik yang digunakan dalam perhitungan limit, pembaca dapat mempelajarinya melalui literatur yang digunakan saat belajar kalkulus variabel tunggal.

4.3 Fungsi Kontinu dan Kontinu Seragam

Kekontinuan merupakan salah satu konsep penting dalam analisis. Sebagai awalan, diperhatikan definisi berikut.

Definisi 4.6

Diberikan $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$, dan $f: D \to \mathbb{R}$.

1. *Fungsi f dikatakan **kontinu di** c jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x \in D$ dengan $0 < |x - c| < \delta$, berlaku $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$.*
2. *Fungsi f dikatakan **kontinu pada** $A \subseteq D$ jika f kontinu di setiap titik $c \in A$.*
3. *Fungsi f dikatakan **kontinu seragam pada** $A \subseteq D$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ dengan sifat untuk setiap $x, y \in A$ dengan $|x - y| < \delta$, berlaku $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

♣

Diperhatikan beberapa fakta sebagai berikut.

1. Jika f kontinu di c, tidak selalu berlaku $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$. Pernyataan tersebut berlaku jika c merupakan titik limit D sebagai domain f.
2. Fungsi yang kontinu seragam pada A pasti kontinu pada A.

Selain menggunakan definisi, identifikasi fungsi kontinu juga dapat dilakukan melalui kekonvergenan barisan.

Teorema 4.4

Diberikan $D \subseteq \mathbb{R}$, $c \in D$, dan $f: D \to \mathbb{R}$.

1. *Fungsi f kontinu di c jika dan hanya jika untuk setiap barisan (x_n) di D yang konvergen ke c, berlaku $f(x_n)$ konvergen ke $f(c)$.*
2. *Fungsi f tidak kontinu seragam pada $A \subseteq D$ jika dan hanya jika terdapat $\varepsilon > 0$ dan dua barisan (x_n) dan (x_n) di A dengan $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n - y_n) = 0$, tetapi $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.*

♡

Salah satu sifat fungsi kontinu yang cukup intuitif adalah sebagai berikut.

Teorema 4.5 (Teorema Nilai Antara)

Diberikan himpunan D, fungsi $f : D \to \mathbb{R}$ dan $x, y \in D$ yang memenuhi $[x,y] \in D$. Jika $k \in \mathbb{R}$ berada di antara $f(x)$ dan $f(y)$, maka terdapat $z \in [x,y]$ sehingga $f(z) = k$. ♡

Fungsi kontinu pada interval tertutup dan terbatas memiliki beberapa sifat menarik seprti tertera dalam teorema berikut.

Teorema 4.6

Diberikan fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Jika f merupakan fungsi kontinu, maka pernyataan-pernyataan berikut berlaku.

1. *Nilai maksimum dan minimum f tercapai pada $[a,b]$.*
2. *Himpunan $f([a,b])$ merupakan interval tertutup dan terbatas.*
3. *Fungsi f kontinu seragam pada $[a,b]$.* ♡

Untuk sifat-sifat lainnya terkait fungsi kontinu, silakan pelajarri kembali literatur yang Anda gunakan saat belajar kalkulus variabel tunggal.

4.4 Fungsi Monoton

Topik terakhir yang akan dibahas pada bab ini adalah fungsi monoton. Diperhatikan definisi berikut.

Definisi 4.7

Diberikan $D \subseteq \mathbb{R}$, $A \subseteq D$, dan fungsi $f : D \to \mathbb{R}$.

1. *Fungsi f dikatakan* ***naik monoton*** *pada A jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $x < y$, berlaku $f(x) \leq f(y)$.*
2. *Fungsi f dikatakan* ***turun monoton*** *pada A jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $x < y$, berlaku $f(x) \geq f(y)$.*
3. *Fungsi f dikatakan* ***monoton*** *pada A jika f naik monoton atau turun monoton pada A.*
4. *Fungsi f dikatakan* ***naik tegas*** *pada A jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $x < y$, berlaku $f(x) < f(y)$.*
5. *Fungsi f dikatakan* ***turun tegas*** *pada A jika untuk setiap $x, y \in A$ dengan $x < y$, berlaku $f(x) > f(y)$.*
6. *Fungsi f dikatakan* ***monoton tegas*** *pada A jika f naik tegas atau turun tegas pada A.* ♣

Fungsi monoton pada suatu interval selalu memiliki limit satu sisi di setiap titik yang bukan titik ujung interval tersebut.

Teorema 4.7

Diberikan interval I dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ serta $c \in I$ bukan titik ujung I.

1. *Jika f naik monoton, maka*

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I, x > c\} \text{ dan } \lim_{x \to c^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I, x < c\}.$$

2. *Jika f turun monoton, maka*

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I, x > c\} \text{ dan } \lim_{x\to c^-} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I, x < c\}.$$

♡

4.5 Contoh Soal

Contoh 4.1 Tunjukkan bahwa fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = x^2$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ tidak kontinu seragam pada domainnya.

Penyelesaian Dipilih barisan (x_n) dan (y_n) dengan $x_n = n + \dfrac{1}{n}$ dan $y_n = n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. DIperhatikan bahwa $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$, tetapi

$$|f(x_n) - f(y_n)| = \left|\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2\right| = \left|2 + \frac{1}{n^2}\right| \geq 2$$

untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jadi, berdasarkan Teorema 4.4 bagian 2, dapat disimpulkan bahwa f tidak kontinu seragam pada $\mathbb{R}$.

Contoh 4.2 Diberikan himpunan tertutup D. Tunjukkan bahwa setiap fungsi kontinu $f : D \to \mathbb{R}$ mencapai nilai maksimum dan minimum pada D.

Penyelesaian Akan ditunjukkan dahulu bahwa f fungsi terbatas. Andaikan f tidak terbatas pada D. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diperoleh terdapat $x_n \in D$ dengan sifat $|f(x_n)| > n$. Karena (x_n) merupakan barisan di D dan D terbatas, maka (x_n) terbatas, sehingga menurut Teorema Boltzano-Weierstrass, terdapat subbarisan dari (x_n) yang konvergen, katakan (x_{n_k}). Mudah dipahami bahwa $(f(x_{n_k}))$ barisan yang tak terbatas. Sekarang, misalkan $x_{n_k} \to x$. Karena D tertutup dan (x_{n_k}) barisan di D, maka menurut Teorema 4.2 bagian 2, didapat $x \in D$. Akibatnya, berdasarkan Teorema 4.4 bagian 1, didapat $f(x_{n_k}) \to f(x)$. Terjadi kontradiksi dengan ketakterbatasan barisan $(f(x_{n_k}))$. Jadi, haruslah f terbatas pada D.

Karena f terbatas pada D, maka $f(D)$ memiliki supremum dan infimum, misalkan M dan m berturut-turut. Akan ditunjukkan bahwa terdapat $y \in D$ sehingga $f(y) = M$. Untuk situ, diambil sebarang $n \in \mathbb{N}$. Karena $M - \dfrac{1}{n}$ bukan batas atas $f(D)$, diperoleh terdapat $y_n \in D$ sehingga $M - \dfrac{1}{n} < f(y_n) \leq M$. Menurut Teorema Boltzano-Weierstrass, terdapat subbarisan (y_{n_i}) dari (y_n) yang konvergen, katakan konvergen ke y. Karena D tertutup, maka $y \in D$ yang berakibat $f(y_{n_i}) \to f(y)$. Di sisi lain, $M - \dfrac{1}{n_i} < f(y_{n_i}) \leq M$ untuk setiap $i \in \mathbb{N}$, sehingga menurut Teorema Apit, didapat $f(y_{n_i}) \to M$. Jadi, didapat $f(y) = M$, sehingga dapat disimpulkan bahwa f mencapai nilai maksimum pada D. Secara analog, dapat ditunjukkan pula bahwa f mencapai nilai minimum pada D.

Contoh 4.3 (ONMIPA Nasional 2021) Diberikan himpunan terbatas $A \subset \mathbb{R}$. Jika fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ kontinu seragam,

1. selidiki apakah terdapat fungsi kontinu $g : \overline{A} \to \mathbb{R}$ dengan sifat $g(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in A$.
2. buktikan bahwa f terbatas.

Penyelesaian

1. Diambil sebarang $x \in \overline{A}$. Berdasarkan definisi klosur, didapat untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, himpunan $D \cap N_{\frac{1}{n}}(x)$ tidak kosong, katakan salah satu anggotanya adalah x_n. Dari sini, dapat disimpulkan bahwa (x_n) konvergen ke x, sehingga (x_n) merupakan barisan Cauchy.
   Sekarang, diambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena f kontinu seragam pada A, maka terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x, y \in A$ dengan $|x-y| < \delta$, berlaku $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Di samping itu, karena (x_n) merupakan barisan Cauchy, maka terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $m, n \geq n_0$, berlaku $|x_m - x_n| < \delta$ yang berakibat
   $$|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon.$$
   Jadi, $(f(x_n))$ merupakan barisan Cauchy, sehingga $(f(x_n))$ konvergen, katakan ke L_x. Hal ini berarti terdapat $n_{x,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap bilangan asli $n \geq n_{x,\varepsilon}$, berlaku
   $$|f(x_n) - L_x| < \varepsilon.$$
   Didefinisikan fungsi $g : \overline{A} \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = L_x$ untuk setiap $x \in \overline{A}$. Untuk $x \in A$, diperoleh $f(x_n) \to f(x)$, sehingga $g(x) = L_x = f(x)$. Berikutnya, akan ditunjukkan bahwa g kontinu seragam. Untuk itu, diambil sebarang $x, y \in \overline{A}$ dengan $|x-y| \leq \frac{\delta}{2}$. Dipilih $N > \max n_{x,\varepsilon}, n_{y,\varepsilon}$ sehingga $|x_N - x| < \frac{\delta}{4}$ dan $|y_N - y| < \frac{\delta}{4}$ dengan (x_n) dan (y_n) merupakan barisan yang dikonstruksi seperti tertera pada paragraf pertama. Diperoleh
   $$|x_N - y_N| \leq |x_N - x| + |x - y| + |y - y_N| < \delta,$$
   sehingga didapat $|f(x_N) - f(y_N)| < \varepsilon$. Akibatnya,
   $$|g(x) - g(y)| = |L_x - L_y| \leq |L_x - f(x_N)| + |f(x_N) - f(y_N)| + |f(y_N) - L_y| < 3\varepsilon.$$
   Jadi, g kontinu seragam, sehingga terbukti g kontinu. Dengan demikian, terbukti bahwa terdapat fungsi g yang memenuhi kondisi pada soal.
2. Karena g merupakan fungsi kontinu pada himpunan tertutup, maka g terbatas berdasarkan Contoh 4.2, sehingga terbukti bahwa f juga terbatas.

Note:

1. Untuk mengerjakan soal ini, diperlukan sifat mengenai klosur, yakni $\overline{A}$ merupakan himpunan tertutup terkecil yang memuat A.
2. Hasil pada bagian (a) menyatakan syarat perlu dan cukup untuk suatu fungsi f yang kontinu seragam, yakni eksistensi fungsi kontinu hasil perluasan f pada klosur domainnya.

Latihan Bab 4

1. (ONMIPA Wilayah 2018) Diberikan $a \in \mathbb{R}$ dan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $|xf(x) + a| \leq \sin^2(x-a)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$. Tentukan $\lim\limits_{x \to a} f(x)$.
2. (Seleksi Tahap I UGM 2020) Buktikan bahwa jika fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ kontinu, maka fungsi $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan $g(x) = \min\{x, 2020\}$ untuk setiap $x \in [0,1]$ kontinu. Apalah berlaku sebaliknya? Berikan penjelasan Saudara.

3. (Seleksi Tahap I UGM 2022) Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(x+y) = f(x) + f(y)$ untuk setiap bilangan real tak nol x dan y. Jika terdapat $x_0 \neq 0$ sehingga f kontinu di x_0, tunjukkan bahwa f kontinu di 0.
4. Diberikan fungsi kontinu $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jika $g(x)$ rasional untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, tunjukkan bahwa g adalah fungsi konstan.
5. Diberikan fungsi kontinu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jika $f(x) = 2024$ untuk setiap bilangan rasional x, tentukan $f(\sqrt{2024})$.
6. (ONMIPA Wilayah 2018) Diketahui fungsi $f : [-5,4] \to \mathbb{R}$ kontinu. Jika $E = \{x \in [-5,4] : f(x) = x\}$, tentukan klosur dari E.
7. (ONMIPA Wilayah 2021) Diberikan fungsi kontinu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jika untuk setiap himpunan terbuka $G \subseteq \mathbb{R}$, berlaku $f(G)$ juga terbuka, buktikan bahwa f fungsi monoton.
8. (ONMIPA Nasional 2017) Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang kontinu dan monoton. Jika untuk setiap $y \in \mathbb{R}$, cacah anggota himpunan $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}$ paling banyak dua, buktikan bahwa f monoton.
9. Diberikan fungsi kontinu $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Jika untuk setiap $x \in [0,1]$, selalu dapat ditemukan $y \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $2|f(y)| \leq |f(x)|$, tunjukkan bahwa terdapat $c \in [0,1]$ yang memenuhi $f(c) = 0$.
10. Diberikan fungsi kontinu $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan $f(0) = f(1) = 0$.
    (a). Tunjukkan bahwa terdapat $c \in [0, \frac{1}{2}]$ yang memenuhi $f(c + \frac{1}{2}) = f(c)$.
    (b). Apakah selalu terdapat $c \in [0, \frac{2}{3}]$ yang memenuhi $f(c + \frac{1}{3}) = f(c)$?

Bab 5 Turunan

5.1 Definisi dan Sifat Dasar

Pada bab ini, akan dipelajari konsep turunan beserta sifat-sifatnya. Sebagai awalan, diperhatikan definisi berikut.

Definisi 5.1

Diberikan intercval $I \subseteq \mathbb{R}$, cI, dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$.

1. *Fungsi f dikatakan memiliki **turunan di** c jika terdapat $L \in \mathbb{R}$ sehingga*
$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = L.$$
Bilangan L selanjutnya ditulis dengan $f'(c)$.
2. *Fungsi f ddikatakan memiliki **turunan pada** I atau **diferensiabel/ terdiferensial pada** I jika $f'(x)$ ada untuk setiap $x \in I$.*

♣

Untuk fungsi f yang disebutkan dalam definisi di atas, misalkan $A_1 = \{x \in I : f'(x) \text{ ada}\}$. Fungsi yang memetakan setiap $x \in A_1$ ke $f'(x)$ disebut **fungsi turunan** dari f yang selanjutnya dinotasikan dengan f' atau $\frac{df}{dx}$. Fungsi f' juga dapat memiliki turunan yang selanjutnya disebut **turunan kedua** dari f dan dinotasikan f''. Begitu seterusnya hingga turunan ke-n. Turunan ke-n dari f dapat dinotasikan $f^{''\cdots'}$ dengan simbol aksen sebanyak n kali atau $f^{(n)}$.

Fungsi yang memiliki turunan di suatu titik pasti kontinu di suatu titik, tetapi kebalikannya belum tentu berlaku.

Teorema 5.1

Diberikan interval $I \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$. Untuk setiap $c \in I$, jika $f'(c)$ ada, maka f kontinu di c.

♡

Salah satu karakterisasi fungsi yang memiliki turunan diberikan oleh teorema berikut.

Teorema 5.2 (Caratheodory)

Diberikan interval I, $c \in I$, dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$. Fungsi f memiliki turunan di c jika dan hanya jika terdapat fungsi $\phi : I \to \mathbb{R}$ yang kontinu di c dan memenuhi
$$f(x) = \phi(x)(x - c) + f(c) \text{ untuk setiap } x \in I.$$

♡

Untuk selanjutnya, sifat-sifat terkait teknik perhitungan nilai turunan suatu fungsi dapat pembaca pelajari secara mandiri melalui referensi yang digunakan saat belajar kalkulus variabel tunggal.

5.2 Eksistensi Nilai Turunan Tertentu

Pada soal-soal kompetisi, termasuk ONMIPA, terdapat beberapa soal terkait pembuktian eksistensi titik tertentu yang memenuhi persamaan yanng melibatkan turunan fungsi. Untuk itu, pada subbab ini, akan dibahas beberapa alat yang dapat digunakan untuk menyelesaikan permasalahan tersebut.

Alat yang pertama adalah Teorema Rolle yang membahas eksistensi titik dengan nilai turunan nol.

Teorema 5.3 (Rolle)

Diberikan f fungsi kontinu pada interval $[a,b]$ ($a \neq b$) dengan $f(a) = f(b) = 0$. Jika $f'(x)$ ada untuk setiap $x \in (a,b)$, maka terdapat $c \in (a,b)$ dengan $f'(c) = 0$. ♡

Menggunakan Teorema Rolle, dapat diturunkan sifat yang lebih umum sebagai berikut.

Teorema 5.4 (Teorema Nilai Rata-Rata)

Diberikan f fungsi kontinu pada interval $[a,b]$ ($a \neq b$). Jika $f'(x)$ ada untuk setiap $x \in (a,b)$, maka terdapat $c \in (a,b)$ dengan

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

♡

Teorema Niilai Rata-Rata dapat diperumum lebih lanjut sebagai berikut.

Teorema 5.5 (Teorema Nilai Rata-Rata Cauchy)

Diberikan f, g fungsi kontinu pada $[a,b]$ ($a \neq b$) dengan $g(a) \neq g(b)$. Jika $f'(x)$ dan $g'(x)$ ada serta $g'(x) \neq 0$ untuk setiap $x \in (a,b)$, maka terdapat $c \in (a,b)$ dengan

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

♡

Diperhatikan bahwa jika dipilih $g(x) = x$ untuk setiap $x \in [a,b]$, diperoleh pernyataan yang sama dengan Teorema Nilai Rata-Rata.

Terakhir, diberikan Teorema Darboux sebagai berikut.

Teorema 5.6 (Darboux)

Diberikan f fungsi yang terdiferensial pada interval $[a,b]$ ($a \neq b$). Jika k adalah bilangan di antara $f'(a)$ dan $f'(b)$, maka terdapat $c \in [a,b]$ dengan sifat $f'(c) = k$. ♡

5.3 Beberapa Aplikasi Turunan

Sebelum melanjutkan pembahasan, diberikan definisi fungsi konveks dan konkaf sebagai berikut.

Definisi 5.2

Diberikan interval $I \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$.

1. *Fungsi f dikatakan* ***konveks*** *pada I jika untuk setiap $x, y \in I$ dan $t \in [0,1]$, berlaku $f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$.*
2. *Fungsi f dikatakan* ***konkaf*** *pada I jika $-f$ konveks pada I.*

♣

Diberikan pula definisi ekstremum lokal sebagai berikut.

Definisi 5.3

Diberikan interval $I \subseteq \mathbb{R}$, $c \in I$, dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$.

1. *Titik c disebut **pembuat maksimum lokal** dari f jika terdapat $r > 0$ dengan sifat $\max f(x) : x \in I \cap N_r(c) = f(c)$. Nilai $f(c)$ selanjutnya disebut **nilai maksimum lokal**.*
2. *Titik c disebut **pembuat minimum lokal** dari f jika terdapat $r > 0$ dengan sifat $\min f(x) : x \in I \cap N_r(c) = f(c)$. Nilai $f(c)$ selanjutnya disebut **nilai minimum lokal**.*
3. *Titik c disebut **ekstremum lokal** dari f jika c pembuat maksimum lokal atau pembuat minimum lokal.*

Nilai turunan suatu fungsi dapat digunakan untuk mengidentifikasi “perilaku" grafik suatu fungsi, mulai dari titik ekstremum lokal, kemonotonan fungsi, hingga kecembungan (konveks/ konkaf) fungsi.

Teorema 5.7

Diberikan interval $I \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ yang memiliki turunan pada I.

1. *Fungsi f naik monoton pada I jika dan hanya jika $f'(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$.*
2. *Fungsi f turun monoton pada I jika dan hanya jika $f'(x) \leq 0$ untuk setiap $x \in I$.*
3. *Jika $c \in I$ merupakan ekstremum f, maka $f'(c) = 0$.*

Lebih lanjut, jika f memiliki turunan kedua, maka f konveks pada I jika dan hanya jika $f''(x) \geq 0$ untuk setiap $x \in I$.

Konvers dari Teorema 5.7 bagian 3 belum tentu berlaku. Akan tetapi, jika diberi syarat tambahan, konvers tersebut berlaku, bahkan dapat diekathui jenis ekstremum lokalnya.

Teorema 5.8

Diberikan interval $I \subseteq \mathbb{R}$, $c \in I$, dan fungsi $f : I \to \mathbb{R}$ yang memiliki turunan kedua I dengan $f'(c) = 0$.

1. *Jika $f''(c) > 0$, maka c merupakan pembuat minimum lokal dari f.*
2. *Jika $f''(c) < 0$, maka c merupakan pembuat maksimum lokal dari f.*

Terkait dengan kemonotonan, terdapat sifat lainnya sebagai berikut.

Teorema 5.9

Diberikan fungsi f yang teriferensial pada interval I dan $c \in I$.

1. *Jika $f'(c) > 0$, maka terdapat $r > 0$ dengan sifat f naik tegas pada $I \cap N_r(c)$.*
2. *Jika $f'(c) < 0$, maka terdapat $r > 0$ dengan sifat f turun tegas pada $I \cap N_r(c)$.*

Selain untuk mempelajari grafik, turunan juga dapat dimanfaatkan melalui teorema berikut.

Teorema 5.10 (L’Hopital)

Diberikan interval I dan $c \in I$ atau $c = \pm\infty$. Misalkan f dan g dua fungsi yang terdiferensial pada $I - \{c\}$. Jika

1. *$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} g(x) = 0$ atau*
2. *$\lim_{x \to c} f(x)$ dan $\lim_{x \to c} g(x)$ keduanya bernilai ∞ atau $-\infty$,*

maka

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

asalkan limit di sebelah kanan ada atau bernilai $\pm\infty$.

Teorema terakhir yang diberikan adalah Teorema Taylor. Teorema ini bermanfaat untuk menyelesaikan beberapa permasalahan deret dan masalah aproksimasi.

Teorema 5.11 (Taylor)

Diberikan interval I dan $a \in I$. Misalkan $f : I \to \mathbb{R}$ adalah fungsi yang terdiferensial kontinu n kali pada I dan $f^{(n+1)}$ ada. Untuk setiap $x \in I$, terdapat suatu titik c_x di antara x dan a sehingga:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Dalam hal f terdiferensial kontinu sampai tak hingga kali dan $\lim_{n\to\infty}\frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} = 0$ untuk setiap $x \in J$ dengan J suatu interval di I yang memuat a, maka $f(x)$ dapat ditulis dalam bentuk deret sebagai berikut:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ untuk setiap } x \in J.$$

Deret di atas disebut **deret Taylor dari f di sekitar** a dan J disebut **interval konvergensi** dari deret tersebut.

5.4 Contoh Soal

Contoh 5.1 Diberikan interval I dan fungsi $f, g : I \to \mathbb{R}$ yang terdiferensial pada I. Jika $f' = g'$, tunjukkan bahwa terdapat $C \in \mathbb{R}$ yang memenuhi $f(x) = g(x) + C$ untuk setiap $x \in I$.

Penyelesaian Misalkan $h := f - g$. Andaikan h bukan fungsi konstan. Artinya, terdapat $a, b \in I$ dengan sifat $h(a) \neq h(b)$. Karena f dan g terdiferensial pada I, maka keduanya juga terdiferensial pada $[a,b]$, sehingga h terdiferensial pada $[a,b]$. Akibatnya, menggunakan Teorema Nilai Rata-Rata, diperoleh terdapat $c \in (a,b)$ yang memenuhi

$$h'(c) = \frac{h(b) - h(a)}{b-a} \neq 0.$$

Di sisi lain, $h'(c) = f'(c) - g'(c) = 0$, sehingga terjadi kontradiksi. Jadi, h merupakan fungsi konstan, katakan $h(x) = C$ untuk setiap $x \in I$. Dengan demikian, $f(x) = g(x) + h(x) = g(x) + C$ untuk setiap $x \in I$.

Contoh 5.2 (Seleksi Tahap 1 UGM 2023) Diberikan $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ terdiferensial dengan $f(x) = g'(x)$ dan $g(x) = -f'(x)$. Buktikan $f^2 + g^2$ fungsi konstan.

Penyelesaian Diperhatikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{R}$,
$$\frac{d}{dx}(f^2+g^2) = 2ff' + 2gg' = 2g'f' + 2(-f')g' = 2f'g' - 2f'g' = 0.$$
Jadi, f^2+g^2 merupakan fungsi konstan.

Contoh 5.3 Diberikan fungsi f yang kontinu pada $[a,b]$ $(a \neq b)$ dan terdiferensial pada (a,b). Tunjukkan bahwa untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, terdapat $x \in (a,b)$ yang memenuhi $\alpha f(x) + f'(x) = 0$.

Penyelesaian Diambil sebarang bilangan real α. Pertama-tama dibentuk fungsi $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ dengan
$$g(x) = f(x)e^{\alpha x} \text{ untuk setiap } x \in [a,b].$$
Karena f terdiferensial pada (a,b) maka g juga terdiferensial pada (a,b) dengan $g(a) = g(b) = 0$. Akibatnya, berdasarkan Teorema Rolle, terdapat $x \in (a,b)$ sehingga
$$0 = g'(x) = e^{\alpha x}\left(\alpha f(x) + f'(x)\right).$$
Jadi, karena $e^{ax} > 0$ maka tentu saja $\alpha f(x) + f'(x) = 0$.

Latihan Bab 5

1. Diberikan $a \in \mathbb{R}$ dan fungsi diferensiabel $f.g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ dengan $f(a) = g(a)$. Jika $f'(x) \leq g'(x)$ untuk setiap $x \geq a$, tunjukkan bahwa $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \geq a$.
2. (Seleksi Tahap II UGM 2021) Diberikan $0 < a < b$ dan $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu pada $[a,b]$ dan diferensiabel pada (a,b). Tunjukkan bahwa terdapat $c \in (a,b)$ sehingga
$$\frac{bf(a) - af(b)}{b-a} = f(c) - cf'(c).$$
3. (Seleksi Tahap III UGM 2020) Diberikan fungsi diferensiabel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi
$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x+y}{2}\right)(x-y) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}.$$
Tunjukkan bahwa f memiliki turunan kedua dan f'' merupakan fungsi konstan.
4. (ONMIPA Wilayah 2023) Misalkan fungsi $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ memiliki turunan ke $n-1$ yang kontinu pada $[a,b]$. Jika untuk suatu $c \in [a,b], f^{(k)}(c) = 0$ dan $g^{(k)}(c) = 0$, untuk semua $k = 0,1,2,3,\ldots n-2$ serta, $g^{(n-1)}(c) \neq 0$, tentukan $\lim\limits_{x\to c} \frac{e^x}{g(x)} f(x)$.
5. (ONMIPA Wilayah 2023) Diberikan barisan bilangan real (x_n) dan (y_n). Jika $x_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}$ dan $y_n = 1 + x_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, tentukan $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.
6. (ONMIPA Wilayah 2020) Diberikan fungsi $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$, dengan
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x \leq 0 \\ 1, & 0 < x \leq 1 \end{cases}.$$
Selanjutnya, diberikan fungsi $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $g'(x) = f(x)$, untuk setiap $x \in [-1,1] \backslash \{0\}$. Apakah ada fungsi kontinu $\phi : [-1,1] \to \mathbb{R}$ sehingga
$$g(x) = \phi(x)(x+1),$$

untuk setiap $x \in [-1,1]$? Jika ada, tentukan fungsi ϕ tersebut. Berikan penjelasan pada jawaban Saudara!

7. (ONMIPA Wilayah 2022) Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $|f(x) - f(y)| \leq |x^3 - x^2y|^2$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$. Jika $f(1) = 1$, tentukan $f(2022)$.

8. (ONMIPA Wilayah 2022) Diberikan fungsi $f : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ memenuhi $f(1) = 1$ dan $f'(x) = \dfrac{x}{x^4 + [f(x)]^4}$ untuk setiap $x \in [1,\infty)$. Buktikan bahwa $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ ada dengan nilainya tidak melebihi $1 + \dfrac{\pi}{8}$.

9. (ONMIPA Nasional 2023) Diberikan fungsi $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Jika fungsi f kontinu dan g terdiferensial pada $\mathbb{R}$ dengan
$$(g'(1) - f(1))(f(0) - g'(0)) > 0,$$
buktikan bahwa terdapat $c \in (0,1)$ sehingga $g'(c) - f(c) = 0$.

10. Diberikan fungsi diferensiabel $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ yang memiliki tak berhingga banyak pembuat nol. Tunjukkan bahwa terdapat $c \in [0,1]$ yang memenuhi $f(c) = f'(c) = 0$.

Bab 6 Integral Riemann

6.1 Pendefinisian Integral Riemann

Sebelum membahas definisi integral Riemann, akan dijelaskan terlebih dahulu definisi partisi dari suatu interval dan norma partisi.

Definisi 6.1

Diberikan $a,b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$. Himpunan $P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n\}$ yang memenuhi

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$$

*disebut **partisi** pada $[a,b]$. Selanjutnya, bilangan*

$$\|P\| := \max\{x_k - x_{k-1} : k = 1,2,\dots,n\}$$

*disebut **norma partisi** P.* ♣

Selanjutnya, misalkan f merupakan fungsi bernilai real pada $[a,b]$ dan P partisi pada $[a,b]$. Untuk setiap $k = 1,2,\dots,n$, dipilih $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Jumlahan

$$S(P,f) := \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

disebut **jumlah Riemann**.

Menggunakan jumlah Riemann, didefinisikan fungsi terintegral Riemann sebagai berikut.

Definisi 6.2

*Diberikan $a,b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$ dan fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Fungsi f dikatakan **terintegral Riemann pada** $[a,b]$ jika terdapat $L \in \mathbb{R}$ dengan sifat untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap partisi $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ pada $[a,b]$ dengan $\|P\| < \delta$ dan untuk setiap $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ dengan $k = 1,2,\dots,n$, berlaku $|S(P,f) - L| < \varepsilon$.* ♣

Secara sederhana, definisi di atas dapat ditulis

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f) = L \text{ atau } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Frasa "integral Riemann" selanjutnya cukup ditulis dengan "integral". Di samping itu, bilangan L ditulis dengan $\int_a^b f(x)dx$ yang selanjutnya disebut **nilai integral dari** f **pada** $[a.b]$.

Terdapat banyak fungsi yang terintegral. Pada pembahasa kali ini, diberikan dua kelompok fungsi terintegral yang cukup sering digunakan.

Teorema 6.1

Diberikan $a,b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$. Jika fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kontinu atau monoton pada $[a,b]$, maka f terintegral pada $[a,b]$. ♡

6.2 Kesamaan dan Ketaksamaan Terkait Integral

Pada subbab ini, diberikan beberapa kesamaan dan ketaksamaan yang sering digunakan dalam pengerjaan soal. Pembahasan dimulai dari beberapa fakta sederhana sebagai berikut.

Teorema 6.2

Diberikan $a,b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$ dan fungsi $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ yang terintegral pada $[a,b]$.

1. *Untuk setiap $c \in [a,b]$, fungsi f juga terintegral pada $[a,c]$ dan $[c,b]$. Lebih ;anjut, berlaku*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$
2. *Fungsi $\alpha f + \beta g$ juga terintegral pada $[a,b]$ untuk setiap $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Lebih lanjut. berlaku*
$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx.$$
3. *Jika $f(x) \leq g(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka*
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$
4. *Fungsi $|f|$ juga terintegral pada $[a,b]$ dengan*
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

♡

Selanjutnya, diberikan suatu ketaksamaan yang dapat digunakan dalam pengerjaan beberapa soal, yakni Ketaksamaan Holder.

Teorema 6.3 (Ketaksamaan Holder)

Diberikan $a,b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$ dan fungsi $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ yang terintegral pada $[a,b]$. Untuk setiap $p,q > 0$ dengan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, berlaku
$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

♡

6.3 Teorema Fundamental Kalkulus dan Primitif Fungsi

Pada subbab ini, akan dibahas suatu sifat yang sering digunakan saat belajar kalkulus, yakni teorema fundamental kalkulus. Teorema ini menjadi penghubung antara integral dan turunan.

Teorema 6.4 (Teorema Fundamental Kalkulus)

Diberikan $a,b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$ dan fungsi $F,f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Jika

1. *F kontinu pada $[a,b]$,*
2. *$F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$ kecuali di sebanyak berhingga titik, dan*
3. *f terintegral pada $[a,b]$,*

maka
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

♡

Sebagai catatan, fungsi F yang memenuhi kondisi di atas diebut **antiturunan** atau **antiderivatif** dari f. Selain itu, dalam kalkulus, fungsi F ini juga disebut dengan **integral tak tentu dari** f. Antiturunan dari fungsi-fungsi khusus dan teknik-teknik mencari antiturunan dapat dipelajari secara mandiri melalui referensi yang digunakan dalam pembelajaran kalkulus variabel tunggal.

Selanjutnya, akan dibahas konsep primitif fungsi.

Definisi 6.3

Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$ dan fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ yang terintegral pada $[a,b]$. Fungsi $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ dengan definisi

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ untuk setiap } x \in [a,b]$$

*disebut **primitif dari** f.* ♣

Turunan dari F sebagai primitif dari f tidak selalu sama dengan f. Akan tetapi, turunan F dapat bernilai sama dengan f pada titik-titik tertentu.

Teorema 6.5

Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$ dan fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ yang terintegral pada $[a,b]$. Primitif dari f, katakan F, merupakan fungsi kontinu pada [a, b]. Lebih lanjut, jika f kontinu di suatu titik $c \in [a,b]$, maka $F'(c)$ ada dan nilainya sama dengan $f(c)$. ♡

Menggunakan teorema tersebut, dapat diturunkan sebuah teorema yang serupa dengan Teorema Nilai Rata-Rata untuk turunan.

Teorema 6.6 (Teorema Nilai Rata-Rata untuk integral)

Diberikan $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $a < b$. Untuk setiap fungsi kontinu $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, terdapat $c \in (a,b)$ dengan sifat

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

♡

6.4 Contoh Soal

Contoh 6.1 (ONMIPA Wilayah 2022) Jika untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$, tentukan $\lim_{n\to\infty} a_n$.

Penyelesaian Diperhatikan bahwa

$$a_n = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Diperoleh bahwa a_n dapat dituliskan dalam bentuk

$$\frac{1}{n} + S(P_n, f) = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

dengan

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{1+x}, && \text{untuk } x \in [0,1];\\
x_k &= \frac{k}{n}, && \text{untuk } k = 0,1,2,\ldots,n;\\
P_n &= \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}, && \text{untuk } n \in \mathbb{N};\\
t_k &= x_k, && \text{untuk } k = 1,2,\ldots,n.
\end{aligned}$$

Dengan demikian,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} + \lim_{n\to\infty} S(P_n, f) = 0 + \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2.$$

Contoh 6.2 Buktikan Teorema Nilai Rata-Rata untuk integral.

Penyelesaian Diperhatikan kembali asumsi yang diberikan pada Teorema 6.6. Misalkan F merupakan primitif dari f. Karena f kontinu pada $[a,b]$, maka berdasarkan Teorema 6.5, $F'(x) = f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$. Jadi, menggunakan Teorema Nilai Rata-Rata (Teorena 5.4), diperoleh terdapat $c \in (a,b)$ yang memenuhi

$$f(c) = F'(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^b f(x)dx - \int_a^a f(x)dx\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Latihan Bab 6

1. (ONMIPA Wilayah 2018) Tentukan nilai dari $\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 \frac{2x^n}{x+x^{2n+1}}dx$.
2. (ONMIPA Wilayah 2023) Diberikan Fungsi kontinu $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ yang memenuhi $(f(x))^2 \leq 4\int_0^x (f(x))^2 dx$ untuk setiap $x \in [0,1]$. Buktikan bahwa $3(f(x))^2 + 2f(x) = 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$.
3. (Seleksi Tahap II UGM 2021) Diberikan fungsi kontinu $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$. Buktikan bahwa jika untuk setiap $x \in \mathbb{R}$, berlaku
$$\int_0^1 f(e^x t)dt = 0,$$
maka f merupakan fungsi konstan pada $[0,\infty)$.
4. (Seleksi Tahap III UGM 2020) Buktikan bahwa untuk setiap bilangan real $p \neq -1$, berlaku
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}.$$
5. (ONMIPA Wilayah 2018) Diberikan fungsi f yang memiliki turunan yang kontinu pada $[a,b]$. Jika $f(a) = f(b) = 0$ dan $\int_a^b (f(x))^2 dx = 1$, buktikan bahwa
$$\int_a^b x^2 (f'(x))^2 dx \geq \frac{1}{4}.$$
6.
7. (ONMIPA Nasional 2020) Diketahui fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ kontinu dan $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, dengan
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad \text{untuk setiap } x \in [a,b].$$

Jika $(p_n) \subseteq \mathbb{R}$ merupakan barisan Cauchy dengan $a \leq p_n \leq b$, untuk setiap n, buktikan bahwa terdapat $p, c \in [a,b]$ dengan sifat barisan $(F(p_n))$ konvergen ke $f(c)(p-a)$.

8. (ONMIPA Nasional 2023) Diberikan barisan bilangan real (x_n) dengan
$$x_n = \int_0^n \frac{\sin(t)}{t^2} dt \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N}.$$
Buktikan bahwa (x_n) konvergen.

9. (ONMIPA Nasional 2019) DIberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan sifat untuk setiap $\lambda \in [0,1]$, berlaku $\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda) y) \geq 0$. Buktikan bahwa
   (a). $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$ untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}$, dan
   (b). $\int_0^{2\pi} f(x) \cos x \, dx \geq 0$.

Bab 7 Barisan Fungsi

7.1 Kekonvergenan Barisan Fungsi

Barisan fungsi merupakan fungsi dari N ke X dengan X merupakan himpunan yang berisi fungsi-fungsi tertentu, misalkan himpunan semua fungsi dari suatu himpunan A ke $\mathbb{R}$, himpunan semua fungsi kontinu pada suatu himpunan A, dan sebagainya. Seperti halnya barisan bilangan real, terdapat konsep kekonvergenan pada barisan fungsi. Ada dua jenis kekonvergenan yang akan dipelajari, yakni kekonvergenan titik demi titik dan kekonvergenan seragam.

Definisi kekonvergenan titik demi titik adalah sebagai berikut.

Definisi 7.1

*Diberikan himpunan $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dengan $B \subseteq A$ dan fungsi $f_n : A \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan fungsi (f_n) dikatakan **konvergen titik demi titik (atau cukup konvergen)** ke fungsi $f : B \to \mathbb{R}$ jika untuk setiap $x \in B$, berlaku*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

♣

Bila dijabarkan menggunakan definisi limit barisan, barisan fungsi (f_n) konvergen ke f jika untuk setiap $x \in B$ dan $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$, dengan sifat untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$, berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Nilai n_0 pada kekonvergenan titik demi titik secara umum bergantung pada x dan ε. Jika nilai n_0 tidak bergantung kepada x, kekonvergenan barisan fungsi tersebut disebut konvergen seragam. Untuk lebih jelasnya, diperhatikan definisi berikut.

Definisi 7.2

*Diberikan himpunan $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dengan $B \subseteq A$ dan fungsi $f_n : A \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan fungsi (f_n) dikatakan **konvergen seragam** ke fungsi $f : B \to \mathbb{R}$ pada B jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$, dengan sifat untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$ dan $x \in B$, berlaku $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.*

♣

Berdasarkan definisi di atas, dapat diturunkan teorema berikut untuk menunjukkan suatu barisan fungsi tidak konvergen seragam.

Teorema 7.1

Diberikan himpunan $A, B \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dengan $B \subseteq A$ dan fungsi $f_n : A \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan fungsi (f_n) tidak konvergen seragam ke $f : B \to \mathbb{R}$ pada B jika dan hanya jika terdapat $\varepsilon_0 > 0$, terdapat subbarisan (f_{n_k}) dari (f_n) dan barisan (x_n) di B sehingga $|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_0$. ♡

Untuk mengecek kekonvergenan seragam suatu barisan fungsi, terdapat banyak cara selain menggunakan definisi. Sebelumnya akan diberikan definisi norma seragam pada himpunan fungsi terbatas.

Misalkan diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan $f : A \to \mathbb{R}$ fungsi terbatas. Bilangan

$$\|f\|_A := \sup\{|f(x)| : x \in A\}$$

disebut **norma seragam** f pada A.

Konsep norma seragam dapat digunakan untuk mengecek kekonvergenan seragam barisan fungsi terbatas seperti tertera dalam teorema berikut.

Teorema 7.2

Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan fungsi terbatas $f_n : A \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan fungsi (f_n) konvergen seragam ke $f : A \to \mathbb{R}$ pada A jika dan hanya jika $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_A = 0$. ♡

Terakhir, untuk mengecek kekonvergenan seragam suatu barisan fungsi, terdapat sebuah teorema yang serupa dengan kriteria Cauchy dalam konteks barisan bilangan real, yakni sebagai berikut.

Teorema 7.3 (Kriteria Cauchy)

Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan fungsi terbatas $f_n : A \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Barisan (f_n) konvergen seragam ke $f : A \to \mathbb{R}$ jika dan hanya jika untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ dengan sifat untuk setiap $m,n \in \mathbb{N}$ dengan $m,n \geq n_0$, berlaku $\|f_m - f_n\|_A < \varepsilon$. ♡

7.2 Sifat Kekonvergen Seragam

Pada bagian ini, akan dibahas beberapa sifat terkait kekonvergen seragam. Sifat pertama menyatakan bahwa kekonvergenan seragam mengawetkan keterbatasan fungsi, seperti tertera pada teorema di bawah ini.

Teorema 7.4

Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan fungsi terbatas $f_n : A \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika (f_n) konvergen seragam ke f pada A, maka f terbatas pada A. ♡

Selain keterbatasan, kekonvergenan seragam juga mengawetkan kekontinuan. Untuk lebih jelasnya, diperhatikan teorema berikut.

Teorema 7.5

Diberikan himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong dan fungsi kontinu $f_n : A \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika (f_n) konvergen seragam ke f pada A, maka f kontinu pada A. ♡

Sifat berikutnya berkaitan dengan barisan fungsi yang diferensiabel pada suatu interval terbatas.

Teorema 7.6

Diberikan interval terbatas $I \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi diferensiabel $f_n : I \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Jika terdapat $c \in I$ sehingga $(f_n(c))$ konvergen dan barisan fungsi (f_n') konvergen seragam ke fungsi g pada I, maka (f_n) konvergen seragam ke suatu fungsi diferensiabel f pada I dengan $f'(x) = g(x)$ untuk setiap $x \in I$. ♡

Sifat terakhir berkaitan dengan penukaran posisi operator limit dengan integral.

Teorema 7.7

Diberikan $a,b \in \mathbb{R}$ *dengan* $a < b$ *dan fungsi* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ *yang terintegral Riemann pada* $[a,b]$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$. *Jika* (f_n) *konvergen seragam ke* f *pada* $[a,b]$, *maka* f *juga terintegral Riemann pada* $[a,b]$. *Lebih lanjut,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx,$$

♡

7.3 Kekonvergenan Deret Fungsi

Sebelum membahas lebih jauh, akan diberikan terlebih dahulu beberapa definisi istilah terkait deret fungsi dan kekonvergenannya. Misal diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ tak kosong. Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, diberikan suatu fungsi $f_n : A \to \mathbb{R}$. **Deret fungsi** yang dibangkitkan oleh (f_n) didefinisikan secara serupa seprti halnya deret bilangan real, yakni barisan fungsi (F_n) dengan $F_n = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Selanjutnya, bentuk

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

digunakan untuk menyatakan deret (F_n) sekaligus limit dari deret fungsi (F_n). Suku ke n dari (F_n) disebut **jumlah parsial** dari deret $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

Kekonvergenan deret bergantung pada kekonvergenan barisan jumlahan parsialnya. Deret fungsi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$ dikatakan konvergen titik demi titik (konvergen) ke fungsi f pada A jika barisan fungsi (F_n) konvergen ke f pada A. Kekonvergenan seragam untuk deret fungsi didefinisikan serupa.

Selain menggunakan definisi, terdapat suatu uji yang dapat digunakan untuk mengetes kekonvergenan seragam suatu deret fungsi. Uji tersebut disebut **uji M-Weierstrass**. Untuk detailnya, diperhatikan teorema berikut.

Teorema 7.8 (Uji M-Weierstrass)

Diberikan $A \subseteq \mathbb{R}$ *tak kosong dan fungsi* $f_n : A \to \mathbb{R}$ *untuk setiap* $n \in \mathbb{N}$. *Jika terdapat barisan bilangan real* (M_n) *dengan sifat*

1. $|f_n(x)| \leq M_n$ *untuk setiap* $x \in A$ *dan* $n \in \mathbb{N}$, *serta*
2. *deret* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ *konvergen,*

maka deret fungsi

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

konvergen seragam pada A.

♡

Serupa dengan di kekonvergenan barisan, terdapat teorema yang berkaitan kekonvergenan seragam sebuah deret fungsi diferensiabel. Teorema ini merupakan akibat langsung dari Teorema 7.6.

Teorema 7.9

Diberikan interval $J := [a,b]$ dan fungsi diferensiabel $f_n : J \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in |mathbbN$. Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergen setidaknnya di satu titik anggota J dan deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n'$ konvergen seragam pada J, maka terdapat fungsi $f : J \to \mathbb{R}$ sehingga deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergen seragam ke f pada J. Lebih lanjut, $f' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.

♡

Teorema terakhir berkaitan dengan pertukaran operator jumlahan tak hingga dengan integral yang merupakan akibat langsung dari Teorema 7.7.

Teorema 7.10

Diberikan fungsi $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ yang terintegral Riemann untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan fungsi $f : [a,b] \to \mathbb{N}$. Jika deret $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ konvergen seragam ke f pada $[a,b]$, maka f juga terintegral Riemann pada $[a,b]$. Lebih lanjut,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \right) dx$$

♡

7.4 Contoh Soal

Contoh 7.1 Untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, didefinisikan fungsi $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan

$$f_n(x) = \frac{nx^3}{4+nx^2} \text{ untuk setiap } x \in \mathbb{R}.$$

(a) Tentukan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sehingga barisan fungsi (f_n) konvergen ke f pada $\mathbb{R}$.

(b) Apakah barisan fungsi (f_n) konvergen ke fungsi f pada $\mathbb{R}$ di bagian (a)?

Penyelesaian

(a) Diperhatikan bahwa untuk $x = 0$, jelas bahwa $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 = x$. Adapun untuk $x \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx^3}{4+nx^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{x^3}{\frac{4}{n}+x^2} = \frac{x^3}{x^2} = x.$$

Dengan demikian, $f_n \to f$ pada $\mathbb{R}$ dengan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ merupakan fungsi yang memenuhi $f_n(x) = x$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$.

(b) Diambil sebarang $\varepsilon > 0$. mMenurut sifat ARchimedean, terdapat $n_0 \in \mathbb{N}$ dengan sifat $\frac{1}{n_0} < \varepsilon^2$. Menggunakan ketaksamaan AM-GM, diperoleh untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$ dengan $n \geq n_0$, berlaku

$$|f_n(x) - f(x)| = 0 < \varepsilon$$

untuk $x = 0$ dan

$$|f_n(x) - f(x)| = \left| \frac{nx^3}{4+nx^2} - x \right| = \left| \frac{4x}{4+nx^2} \right| = \frac{4|x|}{4+nx^2} \leq \frac{4|x|}{2\sqrt{4nx^2}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n_0}} < \varepsilon$$

untuk $x \neq 0$.

Jadi, terbukti bahwa (f_n) konvergen seragam ke f pada $\mathbb{R}$.

Latihan Bab 7

1. Diberikan fungsi terbatas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Didefinisikan barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) = (f(x))^n$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$.
   (a). Jika $\sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\} < 1$, tunjukkan bahwa (f_n) konvergen seragam ke fungsi nol pada $\mathbb{R}$.
   (b). Jika $\sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\} = 1$, tentukan semua fungsi kontinu f sehingga barisan fungsi (f_n) konvergen seragam pada $\mathbb{R}$
2. Diberikan $f, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fungsi kontinu untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan barisan fungsi (f_n) konvergen seragam ke f pada $\mathbb{R}$. Jika (x_n) adalah barisan di $\mathbb{R}$ yang konvergen ke $x \in \mathbb{R}$, buktikan bahwa barisan $(f_n(x_n))$ konvergen ke $f(x)$.
3. Diberikan fungsi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yang kontinu seragam pada $\mathbb{R}$. DIdefinisikan barisan fungsi (f_n) dengan $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right)$ untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$. Tunjukkan bahwa (f_n) konvergen seragam ke f pada $\mathbb{R}$.
4. Diberikan fungsi $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ yang terintegral Riemann. Diketahui
$$\int_0^1 x^n f(x)dx = \frac{1}{n+2}, \text{ untuk setiap } n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$
   Tentukan nilai dari
$$\int_0^1 e^x f(x)dx.$$
5. (ONMIPA Wilayah 2012) Diberikan fungsi kontinu $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. DIketahui bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ dan $x \in [0,1]$, berlaku $f_{n+1}(x) \le f_n(x)$. Jika (f_n) konvergen titik demi titik ke fungsi nol pada $[0,1]$, tunjukkan bahwa (f_n) juga konvergen seragam ke fungsi nol pada $[0,1]$.