1. Diberikan bilangan kompleks

$$z = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)$$

Tentukan nilai

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^3)\cdots(1+z^{2026})$$

***Solusi*:**

Kita perhatikan bahwa $z^3 = 1$, sehingga diperoleh fakta bahwa $z - 1 = 0$ atau $z^2 + z + 1 = 0$. Namun karna $z \neq 1$, maka jelas yang berlaku hanyalah $z^2 + z + 1 = 0$. Selanjutnya dapat ditinjau bahwa

$$(1+z)(1+z^2) = 1 + z + z^2 + z^3 = 1 + z + z^2 + 1 = 2 + z + z^2 = 2 - 1 = 1.$$

dan

$$1 + z^3 = 1 + 1 = 2.$$

Dengan demikian, kita memperoleh

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^3) = 1 \cdot 2 = 2.$$

Perlu kita ingat bahwa $z^3 = 1$ yang menunjukkan bahwa $z^{3k} = 1$ untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$. Oleh karena itu, dengan meninjau bahwa $2026 = 3 \cdot 675 + 1$, kita memperoleh

$$\begin{aligned}(1+z)(1+z^2)(1+z^3)\cdots(1+z^{2026}) &= [(1+z)(1+z^2)(1+z^3)]^{675}(1+z) \\ &= 2^{675}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \\ &= 2^{674}\left(1 + \sqrt{3}i\right).\end{aligned}$$

2. Misalkan $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ yang memenuhi $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 2025$. Nilai dari

$$\left|\frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3}{z_1 + z_2 + z_3}\right| = \cdots$$

***Solusi*:**

Rumuskan persamaan yang diketahui sebagai berikut

$$z_1\overline{z_1} = z_2\overline{z_2} = z_3\overline{z_3} = 2025^2.$$

Selanjutnya dapat kita peroleh dua hubungan yaitu

$$z_1 = \frac{z_2\overline{z_2}}{\overline{z_1}} \quad \text{dan} \quad z_3 = \frac{z_2\overline{z_2}}{\overline{z_3}}.$$

Kemudian kita substitusi ke dalam ekspresi yang ingin kita cari, namun disini kita subtitusi untuk pembilangnya saja

$$\begin{aligned}
\left|\frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3}{z_1 + z_2 + z_3}\right| &= \left|\frac{z_2\overline{z_2}z_2\left[\frac{1}{\overline{z_1}} + \frac{1}{\overline{z_3}} + \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_3}\overline{z_1}}\right]}{z_1 + z_2 + z_3}\right| \\
&= 2025^3\left|\frac{\frac{\overline{z_3}+\overline{z_1}+\overline{z_2}}{\overline{z_1}\overline{z_3}}}{z_1 + z_2 + z_3}\right| \\
&= 2025^3\frac{1}{|\overline{z_1}\overline{z_3}|}\left|\frac{\overline{z_3} + \overline{z_1} + \overline{z_2}}{z_1 + z_2 + z_3}\right| \\
&= 2025^3\frac{1}{2025^2}\left|\frac{\overline{z_3 + z_1 + z_2}}{z_1 + z_2 + z_3}\right| \\
&= 2025 \cdot \frac{|z_3 + z_1 + z_2|}{|z_1 + z_2 + z_3|} \\
&= 2025 \cdot 1 = 2025.
\end{aligned}$$

3. Untuk $m, n \in \mathbb{C}$, tunjukkan bahwa

$$|1 + m| + |1 + n| + |1 + mn| \geq 2$$

4. Tunjukkan bahwa

$$|z| \leq \frac{1}{3} \quad \text{jika dan hanya jika} \quad \left|\frac{6z - i}{2 + 3zi}\right| \leq 1$$