Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

Carilah fungsi $y(x)$ yang meminimalkan integral berikut:

$$J[y] = \int_0^1 \left(y'^2 - xy\right)\, dx$$

dengan syarat batas:

$$y(0) = 0 \quad \text{dan} \quad y(1) = 1.$$

<u>Solusi</u>:
Rumus Euler-Lagrange adalah:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$

di mana $F = y'^2 - xy$.

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(y'^2 - xy\right) = -x.$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial}{\partial y'}\left(y'^2 - xy\right) = 2y'.$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{d}{dx}(2y') = 2y''.$$

Masukkan hasil turunan ke persamaan Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0,$$

sehingga:

$$-x - 2y'' = 0.$$

Atau dapat ditulis sebagai:

$$y'' + \frac{x}{2} = 0.$$

Persamaan diferensial tersebut adalah:

$$y'' = -\frac{x}{2}.$$

Integrasikan kedua ruas terhadap x untuk mendapatkan y':

$$y' = -\frac{x^2}{4} + C_1,$$

dengan C_1 adalah konstanta integrasi.
Integrasikan lagi untuk mendapatkan y:

$$y = -\frac{x^3}{12} + C_1 x + C_2,$$

dengan C_2 adalah konstanta integrasi kedua.
Dari syarat batas $y(0) = 0$ dan $y(1) = 1$:
- Ketika $x = 0$, $y(0) = 0$:

$$0 = -\frac{0^3}{12} + C_1(0) + C_2 \implies C_2 = 0.$$

- Ketika $x = 1$, $y(1) = 1$:

$$1 = -\frac{1^3}{12} + C_1(1) + 0 \implies C_1 = 1 + \frac{1}{12} = \frac{13}{12}.$$

Sehingga, fungsi $y(x)$ adalah:

$$y(x) = -\frac{x^3}{12} + \frac{13}{12}x.$$

Kita memverifikasi bahwa fungsi $y(x)$ memenuhi syarat batas:

- Ketika $x = 0$, $y(0) = 0$.
- Ketika $x = 1$, $y(1) = -\frac{1^3}{12} + \frac{13}{12}(1) = 1$.

Fungsi ini juga meminimalkan integral $J[y]$ sesuai dengan persamaan Euler-Lagrange.
Fungsi yang meminimalkan integral adalah:

$$y(x) = -\frac{x^3}{12} + \frac{13}{12}x.$$