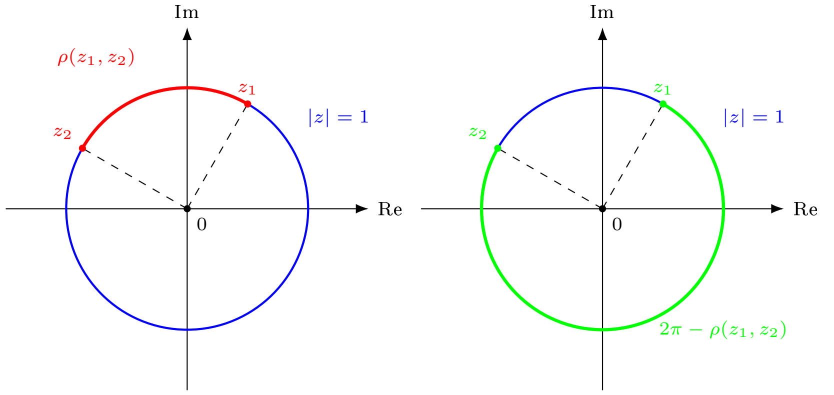
Nomor 4

Diberikan $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, yaitu lingkaran dengan pusat titik 0 dan berjari-jari 1 pada bidang kompleks. Untuk sebarang $z, w \in X$ didefinisikan $\rho(z,w) = 0$ jika $z = w$, $\rho(z,w) = \pi$ jika $z = -w$, dan $\rho(z,w)$ menyatakan panjang busur terpendek yang menghubungkan z dan w jika $z \neq \pm w$. Buktikan bahwa ρ merupakan metrik pada X.

Bukti. Dari informasi pada soal, didapatkan ilustrasi sebagai berikut



Sehingga untuk $z, w \in X$ panjang busur terpendek dapat dirumuskan sebagai

$$\rho(z,w) = \min\{|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)|, 2\pi - |\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)|\}, \quad z, w \in X$$

yang dimana telah memenuhi ketentuan fungsi ρ yang diberikan pada soal.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ρ memenuhi sifat-sifat metrik.

1. **(Positifitas)** Ambil sebarang $z, w \in X$ maka jelas berlaku

$$|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)| \geq 0$$

dan karena $\text{Arg}(z), \text{Arg}(w) \in [-\pi, \pi]$, akibatnya

$$|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)| \leq 2\pi$$
$$2\pi - |\text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)| \geq 0.$$

Jadi $\rho(z,w) \geq 0$.

2. Akan dibuktikan bahwa $\rho(z,w) = 0 \iff z = w$.

- ($\Leftarrow$) Terbukti dari definisi $\rho(z,w)$.
- ($\Rightarrow$) Ambil $z, w \in X$ dan misalkan $\rho(z,w) = 0$, maka berlaku

$$\min\{|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)|, 2\pi - |\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)|\} = 0$$

Berarti $|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)| = 0$ atau $2\pi - |\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)| = 0$.

- Jelas untuk $|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)| = 0$ berakibat $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(w)$ dan $z = w$.
- Untuk $2\pi - |\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)| = 0$ berlaku $\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w) = 2\pi$ (2π atau -2π sama saja untuk bilangan kompleks). Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
\exp\left[i(\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w))\right] &= \exp(2\pi i) \\
\exp(i\text{Arg}(z))\exp(-i\text{Arg}(w)) &= 1 \\
|z|e^{i\text{Arg}(z)}|w|e^{-i\text{Arg}(w)} &= 1 \\
z\overline{w} &= 1 \\
z &= \frac{1}{\overline{w}}
\end{aligned}$$

Karena $|w| = 1$ berakibat $w = \dfrac{1}{\overline{w}}$ sehingga $z = w$.

Jadi $\rho(z, w) = 0 \iff z = w$.

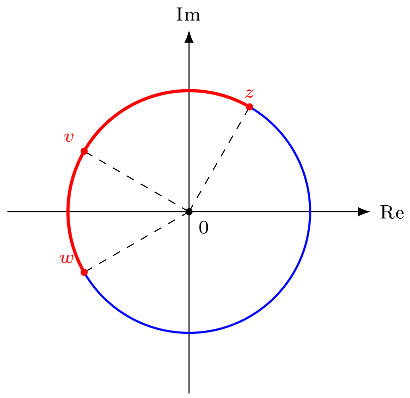
3. **(Simetri)** Untuk setiap $z, w \in X$ berlaku bahwa

$$\begin{aligned}
\rho(z, w) &= \min\left\{|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)|, 2\pi - |\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)|\right\} \\
&= \min\left\{|\text{Arg}(w) - \text{Arg}(z)|, 2\pi - |\text{Arg}(w) - \text{Arg}(z)|\right\} \\
&= \rho(w, z)
\end{aligned}$$

Jadi $\rho(z, w) = \rho(w, z)$.

4. **(Ketaksamaan Segitiga)** Misalkan $z, w, v \in X$ dan akan dibuat menjadi dua kasus.

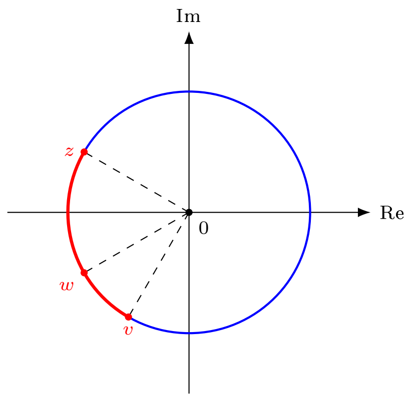
- Untuk $\text{Arg}(z) \leq \text{Arg}(v) \leq \text{Arg}(w)$, dapat diilustrasikan sebagai berikut



Dari ilustrasi diatas berlaku

$$\rho(z, w) = \rho(z, v) + \rho(v, w)$$

- Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\mathrm{Arg}(z) \leq \mathrm{Arg}(w) \leq \mathrm{Arg}(v)$ diilustrasikan sebagai berikut

  Dari ilustrasi diatas berlaku

  $$\rho(z,w) \leq \rho(z,v) + \rho(v,w)$$

  Jadi $\rho(z,w) \leq \rho(z,v) + \rho(v,w)$ dengan kesamaan terjadi ketika titik v berada diantara busur terpendek z dan w.

$\therefore$ ρ merupakan metrik pada X. $\square$