Soal 3.15 Misalkan $p \in [1, \infty)$ dan tinjau pemetaan

$$T : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N}), \qquad T\{x_k\}_{k=1}^{\infty} := \{x_k + x_{k+1}\}_{k=1}^{\infty}.$$

(i) Tunjukkan bahwa T benar-benar memetakan $\ell^p(\mathbb{N})$ ke $\ell^p(\mathbb{N})$.

(ii) Tunjukkan bahwa T bersifat linear dan terbatas.

Penyelesaian:

(i) Definisikan operator *shift* $S : \ell^p(\mathbb{N}) \to \ell^p(\mathbb{N})$ sebagai

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, x_4, \dots).$$

Jelas bahwa jika $x = (x_k) \in \ell^p(\mathbb{N})$, maka

$$\|Sx\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1}|^p = \sum_{k=2}^{\infty} |x_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \|x\|_p^p.$$

Dengan demikian $Sx \in \ell^p(\mathbb{N})$.

Selanjutnya, karena $T(x) = x + Sx$, dengan menggunakan **ketaksamaan Minkowski** diperoleh

$$\|T(x)\|_p = \|x + Sx\|_p \leq \|x\|_p + \|Sx\|_p \leq 2\|x\|_p < \infty.$$

Maka $T(x) \in \ell^p(\mathbb{N})$, sehingga T memang memetakan $\ell^p(\mathbb{N})$ ke dalam $\ell^p(\mathbb{N})$.

(ii) Ambil $x = (x_k)$ dan $y = (y_k)$ di $\ell^p(\mathbb{N})$, serta $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (atau $\mathbb{C}$). Maka

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \{(\alpha x_k + \alpha x_{k+1} + \beta y_k + \beta y_{k+1})\}_{k=1}^{\infty} \\ &= \{\alpha(x_k + x_{k+1}) + \beta(y_k + y_{k+1})\}_{k=1}^{\infty} \\ &= \alpha\{(x_k + x_{k+1})\}_{k=1}^{\infty} + \beta\{(y_k + y_{k+1})\}_{k=1}^{\infty} \\ &= \alpha T(x) + \beta T(y). \end{aligned}$$

Dengan demikian, T adalah operator linear.

Kemudian untuk setiap $x \in \ell^p(\mathbb{N})$, berlaku

$$\|T(x)\|_p \leq \|x\|_p + \|Sx\|_p.$$

Selanjutnya,

$$\|Sx\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |x_{k+1}|^p = \sum_{k=2}^{\infty} |x_k|^p \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p = \|x\|_p^p.$$

Dengan demikian, $\|Sx\|_p \leq \|x\|_p$, dan memenuhi $\|S\| = 1$.

Maka
$$\|T(x)\|_p \leq \|x\|_p + \|Sx\|_p \leq 2\|x\|_p,$$
sehingga T adalah operator terbatas dengan
$$\|T\| \leq 2.$$
Jadi, operator T bersifat linear dan terbatas pada ruang $\ell^p(\mathbb{N})$.

$\blacksquare$