EVALUASI TENGAH SEMESTER GENAP 2023/2024
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS
PROGRAM SARJANA

Matakuliah	:	Analisis II
Hari, Tanggal	:	Rabu, 19 Juni 2024
Waktu / Sifat	:	100 menit / *Closed Book*
Kelas, Dosen	:	A. Sunarsini, S.Si, M.Si.
		B, C. Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
		D. Dr. Rinurwati, M.Si.
		E, F. Dr.mont. Kistosil Fahim, M.Si.

HARAP DIPERHATIKAN !!!
Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Misal $A := [0, \infty)$, perhatikan barisan fungsi $(f_n(x))$ yang didefinisikan dengan

$$f_n(x) := nx/(1 + nx^2)$$

untuk $x \in A$.

(a) Tunjukkan bahwa (f_n) terbatas pada A untuk semua $n \in \mathbb{N}$.
Jawab:
Kita perhatikan bahwa $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2}$. Karena $x \geq 0$ dan $n \in \mathbb{N}$, maka $nx \geq 0$ dan $1 + nx^2 \geq 1$. Sehingga $f_n(x) \leq \dfrac{nx}{1}$. Dengan demikian, $f_n(x)$ terbatas pada A untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

(b) Tunjukkan bahwa (f_n) konvergen titik-demi-titik ke suatu fungsi f, tetapi tidak terbatas.
Jawab:

- Untuk $x = 0$, kita punya $f_n(0) = 0$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$. Sehingga $f_n(x)$ konvergen ke 0.
- Untuk $x > 0$, kita punya $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx^2} = \dfrac{1}{1/nx + x} \implies \dfrac{1}{x}$. Sehingga $f_n(x)$ konvergen ke $1/x$.

Jadi, (f_n) konvergen titik-demi-titik ke suatu fungsi f yaitu $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x = 0 \\ 1/x & \text{jika } x > 0 \end{cases}$.
Sekarang untuk menujukkan bahwa f tidak terbatas, kita gunakan kontradiksi. Asumsikan f terbatas, maka ada $M > 0$ sehingga $|f(x)| \leq M$ untuk setiap $x \in A$. Kita ambil $x = 1/(2M)$, maka $f(1/(2M)) = 2M$ yang mana bertentangan dengan asumsi bahwa f terbatas.

$\therefore f$ tidak terbatas.

(c) Apakah (f_n) konvergen seragam pada A? Jelaskan!
Jawab:

Teorema. *Misalkan $f_n(x)$ adalah sebuah barisan fungsi kontinu pada suatu himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$. Jika (f_n) konvergen seragam pada A ke fungsi $f : A \to \mathbb{R}$, maka f kontinu pada A.*

Jelas bahwa $f_n(x)$ kontinu untuk $n \in \mathbb{N}$, hal ini diperoleh dari $g_n(x) = nx$ dan $h_n(x) = 1 + nx^2 \neq 0$ dimana kedua fungsi tersebut adalah fungsi polinom yang jelas kontinu pada $A \subseteq \mathbb{R}$, sehingga $f_n(x) = g_n(x)/h_n(x)$ kontinu pada A juga.

Dengan Modus Tolen, karena f tidak kontinu pada A maka (f_n) tidak konvergen seragam pada A.

2. Diberikan deret fungsi $\sum f_n$ dengan $f_n(x) = \sin(\frac{x}{n^2})$. Apakah deret tersebut konvergen seragam pada $[0, \pi]$? Jelaskan! (Petunjuk: Gunakan Weierstrass M-Test)
Jawab:

Teorema (Weierstrass M-Test)**.** *Misalkan $f_n : A \to \mathbb{R}$ adalah fungsi pada himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$. Jika ada barisan bilangan real positif M_n sehingga $|f_n(x)| \leq M_n$ untuk setiap $x \in A$ dan $n \in \mathbb{N}$, dan deret $\sum M_n$ konvergen, maka deret $\sum f_n$ konvergen seragam pada A.*

Perhatikan ketaksamaan $\sin(\alpha) \leq \alpha$ untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$. Dari hal tersebut kita modifikasi dengan mensubsitusi $\alpha = \dfrac{x}{n^2}$, sehingga ketaksamannya menjadi $\sin\left(\dfrac{x}{n^2}\right) \leq \dfrac{x}{n^2}$ untuk $x \in [0, \pi] \subseteq \mathbb{R}$ dan $n \in \mathbb{N}$.

Kita definisikan $f_n(x) = \sin\left(\dfrac{x}{n^2}\right)$ dan barisan real $M_n = \dfrac{\pi}{n^2}$, maka

$$|f_n(x)| \leq M_n \quad \text{untuk } n \in \mathbb{N}.$$

Sekarang tinjau deret $\sum M_n = \sum \dfrac{1}{n^2}$ yang dimana deret $\sum \dfrac{1}{n^2}$ konvergen dengan nilai konvergennya[1] adalah $\dfrac{\pi^2}{6}$, maka deret $\sum M_n$ konvergen pada $[0, \pi]$.

Dengan Weierstrass M-Test, kita dapatkan bahwa deret $\sum f_n$ konvergen seragam pada $[0, \pi]$.

3. Tunjukkan bahwa $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ bukan himpunan tertutup.
Jawab:

Teorema. *Himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ adalah tertutup jika dan hanya jika A mengandung semua titik klusternya.*

Pertama kita buktikan bahwa 0 adalah titik kluster dari A. Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Perhatikan bahwa $V_\varepsilon(0) \setminus \{0\} = (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)$. Sifat archimedean memberikan bahwa ada $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $1/n_\varepsilon < \varepsilon$. Akibatnya $(V_\varepsilon(0) \setminus \{0\}) \cap A \neq \emptyset$ yang berarti 0 adalah titik kluster dari A.

Namun dapat dilihat bahwa $0 \notin A$, sehingga A tidak mengandung semua titik klusternya. Jadi, A bukan himpunan tertutup.

4. Tunjukkan bahwa $(-2, 1)$ tidak kompak di $\mathbb{R}$.
Jawab:

Teorema (Heine-Borel)**.** *Himpunan $A \subseteq \mathbb{R}$ adalah kompak jika dan hanya jika A tertutup dan terbatas.*

Cukup dibuktikan bahwa $(-2, 1)$ tidak tertutup. Ambil $x = 1 \notin (-2, 1)$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ berapapun mengakibatkan $V_\varepsilon(1) \cap (-2, 1) \neq \emptyset$. Jadi $(-2, 1)$ tidak tertutup.

Dengan demikian $(-2, 1)$ tidak kompak di $\mathbb{R}$.

[1] Jika tidak tau nilai eksak deretnya cukup gunakan fakta2 lain seperti teorema deret-p

—o0o—

5. Diberikan fungsi $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan oleh

$$d\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) := |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|, \quad \text{untuk } x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}.$$

Buktikan bahwa pasangan $(\mathbb{R}^2, d)$ adalah ruang metrik.

Jawab:

Misalkan $v_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

(a) $d(v_1, v_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Karena nilai mutlak selalu positif, maka $|x_1 - x_2| \geq 0$ dan $|y_1 - y_2| \geq 0$. Sehingga $|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \geq 0$. (**kepositifan**)

(b) Kiri ke kanan
$\implies d(v_1, v_2) = 0 \iff |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 0 \iff |x_1 - x_2| = 0$ dan $|y_1 - y_2| = 0 \iff x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2 \iff v_1 = v_2$.
Kanan ke kiri
$\impliedby v_1 = v_2 \iff x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2 \implies d(v_1, v_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_1 - x_1| + |y_1 - y_1| = 0$. (**definit**)

(c) $d(v_1, v_2) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| = d(v_2, v_1)$. (**simetri**)

(d) Misalkan $v_3 = \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} d(v_1, v_2) &= |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| \\ &= |(x_1 - x_3) + (x_3 - x_2)| + |(y_1 - y_3) + (y_3 - y_2)| \\ &\leq |x_1 - x_3| + |x_3 - x_2| + |y_1 - y_3| + |y_3 - y_2| \\ &= d(v_1, v_3) + d(v_3, v_2) \quad (\textbf{ketaksamaan segitiga}) \end{aligned}$$

Jadi, $(\mathbb{R}^2, d)$ adalah ruang metrik.

—o0o—