1. Diberikan PDP $u_x - 2u = x$
   (a) Dapatkan penyelesaian umum PDP tersebut.
   (b) Jika diberikan syarat batas: $u(0, y) = y$. Dapatkan penyelesaian partikular PDP tersebut.
   (c) Jika diberikan syarat batas: $u(x, 0) = \frac{3}{4} - \frac{x}{2}$. Tunjukkan PDP tersebut tidak mempunyai penyelesaian.

2. Dapatkan penyelesaian PDP berikut dengan menggunakan metode Lagrange:
$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = xy$$

3. Dapatkan penyelesaian PDP berikut dengan menggunakan metode karakteristik:
$$u_x + u_y = -\frac{1}{2}u$$
dengan kondisi awal $u(x, 0) = 1$.

4. Dapatkan penyelesaian PDP berikut dengan menggunakan metode pemisahan variabel:
$$u_x + 2u_y = 0 \quad \text{jika} \quad u(0, y) = 3e^{-2y} - 4e^{y}$$

<u>SOLUSI</u>

1. (a) Kalikan seluruh persamaan dengan faktor integrasi e^{-2x}:
$$e^{-2x}u_x - 2e^{-2x}u = xe^{-2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dx}(e^{-2x}u) = xe^{-2x}$$
Integralkan kedua ruas:
$$e^{-2x}u = \int xe^{-2x}\,dx$$
Gunakan integrasi parsial:
$$\int xe^{-2x}\,dx = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + f(y)$$
Sehingga:
$$e^{-2x}u = -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + f(y)$$
Kalikan dengan e^{2x}:
$$u(x, y) = f(y)e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

(b) Substitusi $x = 0$:

$$u(0, y) = f(y) - \frac{1}{4}$$

Sehingga:

$$f(y) = y + \frac{1}{4}$$

Penyelesaian partikular:

$$u(x, y) = \left(y + \frac{1}{4}\right) e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$$

(c) Substitusi $y = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(0)e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} - \frac{x}{2} &= f(0)e^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \\ f(0) &= e^{2x} \end{aligned}$$

Hal ini kontradiksi karena fungsi f bergantung pada y saja. Sehingga tidak ada penyelesaian untuk syarat batas ini.

2. Karakteristik:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{du}{xy}$$

Dari $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$, diperoleh:

$$x\,dx = y\,dy \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}y^2 + C \quad \Rightarrow \quad x^2 - y^2 = k$$

Dari $\frac{dx}{y} = \frac{du}{xy}$, didapatkan:

$$du = x\,dx \quad \Rightarrow \quad u = \frac{1}{2}x^2 + f(x^2 - y^2)$$

Jadi solusi umum:

$$u(x, y) = \frac{1}{2}x^2 + f(x^2 - y^2)$$

3. Karakteristik:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{-\frac{1}{2}u}$$

Dari $\frac{dx}{1} = \frac{dy}{1}$:

$$x - y = k$$

Dari $\frac{du}{-\frac{1}{2}u}$:

$$\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}ds \quad \Rightarrow \quad \ln u = -\frac{1}{2}s + C \quad \Rightarrow \quad u = A(k)e^{-\frac{1}{2}s}$$

Sehingga:

$$u(x,y) = f(x-y)e^{-\frac{1}{2}x}$$

Gunakan syarat $u(x,0) = 1$:

$$f(x)e^{-\frac{1}{2}x} = 1 \quad \Rightarrow \quad f(x) = e^{\frac{1}{2}x}$$

Maka:

$$u(x,y) = e^{-\frac{1}{2}y}$$

4. Misalkan solusi berbentuk:

$$U(x,y) = X(x)Y(y)$$

Maka persamaan menjadi:

$$X'Y + 2XY' = 0 \Rightarrow \frac{X'}{X} = -2\frac{Y'}{Y}$$

Pisahkan variabel:

$$\frac{X'}{2X} = -\frac{Y'}{Y} = \lambda$$

Maka diperoleh dua persamaan diferensial biasa (PDB):

(a) $\frac{X'}{X} = 2\lambda \Rightarrow X(x) = C_1e^{2\lambda x}$

(b) $\frac{Y'}{Y} = -\lambda \Rightarrow Y(y) = C_2e^{-\lambda y}$

Sehingga solusi umum:

$$U(x,y) = C_1C_2e^{2\lambda x}e^{-\lambda y} = Ae^{\lambda(2x-y)}$$

Dengan $A = C_1C_2$, maka superposisi solusi umum:

$$U(x,y) = A_1e^{\lambda_1(2x-y)} + A_2e^{\lambda_2(2x-y)}$$

Gunakan syarat batas $u(0,y) = 3e^{-2y} - 4e^{y}$. Maka:

$$U(0,y) = A_1e^{-\lambda_1 y} + A_2e^{-\lambda_2 y} = 3e^{-2y} - 4e^{y}$$

Dapat dilihat bahwa:

$$\lambda_1 = 2, \quad A_1 = 3; \qquad \lambda_2 = -1, \quad A_2 = -4$$

Maka solusi partikular:

$$U(x,y) = 3e^{2(2x-y)} - 4e^{-1(2x-y)} = 3e^{4x-2y} - 4e^{-2x+y}$$