

**PROPOSAL TUGAS AKHIR**

**OPTIMISASI JADWAL JARINGAN BUS DI TERMINAL PURABAYA  
MENGUNAKAN ALJABAR MAX-PLUS**

***OPTIMIZATION OF BUS NETWORK SCHEDULING AT  
PURABAYA TERMINAL USING MAX-PLUS ALGEBRA***



Oleh:  
Teosofi Hidayah Agung  
5002221132

**LABORATORIUM ANALISIS, ALJABAR, DAN PEMBELAJARAN  
MATEMATIKA  
DEPARTEMEN MATEMATIKA  
FAKULTAS SAINS DAN ANALITIKA DATA  
INSTITUT TEKNOLOGI SEPULUH NOPEMBER  
SURABAYA  
2024**

# Daftar Isi

## BAB I

<b>PENDAHULUAN</b>	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang . . . . .	1
1.2 Rumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Batasan Masalah . . . . .	2
1.4 Tujuan Penelitian . . . . .	3
1.5 Manfaat Penelitian . . . . .	3

## BAB II

<b>Tinjauan Pustaka</b>	<b>4</b>
2.1 Aljabar Max-Plus . . . . .	4
2.2 Vektor dan Matriks . . . . .	4
2.3 Graf dalam Aljabar Max-Plus . . . . .	6
2.3.1 Graf Berarah Berbobot . . . . .	6
2.3.2 Jalur Terpanjang dalam Graf . . . . .	6
2.3.3 Matriks Adjacency dan Matriks Max-Plus . . . . .	7
2.3.4 Aplikasi Graf Max-Plus dalam Sistem . . . . .	7

## BAB III

<b>METODE PENELITIAN</b>	<b>8</b>
--------------------------	----------

## BAB IV

<b>JADWAL KEGIATAN</b>	<b>9</b>
------------------------	----------

<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>10</b>
-----------------------	-----------

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Bus merupakan salah satu transportasi umum yang paling banyak digunakan oleh masyarakat Indonesia, terutama karena keunggulannya dalam menjangkau berbagai wilayah, baik perkotaan maupun pedesaan. Layanan bus tidak hanya melayani kebutuhan transportasi dalam kota, tetapi juga digunakan secara luas untuk perjalanan antar kota dan antar provinsi, terutama bagi mereka yang ingin bepergian ke kota-kota besar untuk bekerja, atau sebaliknya, pulang ke kampung halaman untuk berkumpul bersama keluarga. Popularitas bus sebagai sarana transportasi publik di Indonesia juga didukung oleh biayanya yang relatif terjangkau serta fleksibilitas rutenya yang mencakup area yang tidak selalu terjangkau oleh moda transportasi lain seperti kereta api atau pesawat (Arum, 2015).

Terminal Purabaya, yang dikenal sebagai salah satu terminal bus terbesar di Asia Tenggara, memegang peranan penting dalam sistem transportasi publik di Surabaya dan sekitarnya. Terminal ini melayani ribuan penumpang setiap harinya, baik dari dalam kota maupun antarprovinsi. Berdasarkan studi mengenai transportasi publik, pengelolaan terminal bus seperti Purabaya membutuhkan perencanaan yang matang untuk memastikan kelancaran operasi, mengurangi waktu tunggu penumpang, dan meningkatkan efisiensi rute bus. Hal ini sejalan dengan kebutuhan untuk terus mengembangkan sistem transportasi yang lebih terintegrasi dan tepat waktu. Kondisi lalu lintas di sekitar terminal juga menjadi tantangan yang signifikan, karena kemacetan sering terjadi akibat kepadatan kendaraan, terutama di area persimpangan yang dilalui rute bus. Hal ini mempengaruhi jadwal kedatangan dan keberangkatan bus, sehingga penting untuk menerapkan sistem yang dapat meningkatkan efisiensi operasional di terminal (Budi, 2018).

Sistem transportasi publik, terutama jaringan bus, memainkan peran penting dalam mobilitas masyarakat urban. Efisiensi dalam pengelolaan dan operasi bus sangat bergantung pada kemampuan untuk mengelola antrian penumpang dan waktu kedatangan bus secara efektif. Dalam konteks ini, aljabar max-plus muncul sebagai alat matematis yang menjanjikan untuk memodelkan dan menganalisis antrian dalam sistem transportasi.

Aljabar max-plus, yang telah dikembangkan lebih lanjut dalam beberapa dekade terakhir, merupakan perluasan dari aljabar biasa yang menggantikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan operasi maksimum dan penjumlahan. Pendekatan ini sangat berguna dalam memodelkan proses yang melibatkan waktu dan urutan, seperti dalam antrian bus, di mana waktu kedatangan dan waktu tunggu merupakan variabel kunci. Sebagai contoh, penelitian terbaru oleh Butkovič (2010) membahas aplikasi aljabar max-plus dalam sistem penjadwalan dan optimasi waktu, termasuk transportasi publik. Melalui pendekatan ini, kita dapat menganalisis dinamika sistem antrian dan mengoptimalkan pengaturan jadwal bus untuk meminimalkan waktu tunggu penumpang serta meningkatkan kepuasan pelanggan (Butkovič, 2010).

Penggunaan aljabar max-plus dalam sistem antrian tidak hanya terbatas pada optimasi jadwal tetapi juga mencakup pengembangan algoritma yang efisien untuk penjadwalan dan pengendalian lalu lintas bus. Penelitian oleh Baccelli et al. (1992) me-

nunjukkan bahwa model max-plus dapat digunakan untuk merepresentasikan interaksi antar kendaraan dalam jaringan transportasi yang kompleks. Dengan memanfaatkan struktur aljabar ini, kita dapat merumuskan solusi yang lebih baik untuk mengatasi masalah antrian, terutama dalam kondisi puncak di mana permintaan penumpang meningkat.

Dengan pertumbuhan populasi dan meningkatnya permintaan akan layanan transportasi publik yang efisien, penelitian lebih lanjut mengenai aplikasi aljabar max-plus dalam antrian bus sangat penting. Penelitian ini tidak hanya bertujuan untuk meningkatkan pemahaman tentang dinamika antrian, tetapi juga untuk memberikan rekomendasi praktis dalam perancangan sistem transportasi yang lebih responsif dan efisien.

## **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang di atas, penelitian ini mengidentifikasi beberapa masalah yang perlu diselesaikan terkait dengan efisiensi sistem antrian bus di terminal bus, terutama dengan menggunakan pendekatan aljabar max-plus. Rumusan masalah yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana memodelkan sistem antrian bus di terminal menggunakan aljabar max-plus?
2. Bagaimana mengoptimalkan jadwal kedatangan dan keberangkatan bus untuk meminimalkan waktu tunggu penumpang menggunakan aljabar max-plus?
3. Bagaimana menerapkan model aljabar max-plus untuk meningkatkan efisiensi operasional dalam kondisi puncak ketika permintaan penumpang meningkat?

Dengan mengatasi rumusan masalah tersebut, penelitian ini bertujuan untuk mengembangkan solusi yang dapat diterapkan pada sistem transportasi publik, khususnya jaringan bus, agar lebih efisien dan tepat waktu.

## **1.3 Batasan Masalah**

Untuk menjaga fokus penelitian dan memperjelas lingkup penelitian ini, terdapat beberapa batasan masalah yang ditetapkan, antara lain:

1. Penelitian ini hanya akan memodelkan sistem antrian bus di terminal bus dengan menggunakan pendekatan aljabar max-plus.
2. Hanya antrian dan jadwal kedatangan/keberangkatan bus yang akan dianalisis, tanpa mempertimbangkan faktor eksternal seperti cuaca, kondisi jalan, atau perubahan kebijakan transportasi.
3. Studi kasus yang digunakan dalam penelitian ini akan difokuskan pada Terminal Purabaya sebagai salah satu contoh terminal bus besar di Indonesia.
4. Simulasi yang dilakukan untuk menguji model max-plus akan menggunakan data sekunder yang tersedia dari laporan transportasi publik dan literatur terkait.

## 1.4 Tujuan Penelitian

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk memberikan solusi yang lebih efisien dalam pengelolaan sistem antrian bus dengan menggunakan metode aljabar max-plus. Secara khusus, penelitian ini bertujuan untuk:

1. Mengembangkan model sistem antrian bus yang menggunakan aljabar max-plus untuk merepresentasikan waktu kedatangan dan keberangkatan bus.
2. Mengoptimalkan jadwal operasional bus di terminal untuk meminimalkan waktu tunggu penumpang.
3. Menganalisis penerapan model aljabar max-plus dalam meningkatkan efisiensi operasional terminal bus, terutama pada saat jam sibuk dengan permintaan penumpang yang tinggi.
4. Memberikan rekomendasi praktis untuk pengelolaan sistem transportasi publik yang lebih efisien berdasarkan hasil analisis dan simulasi.

## 1.5 Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan memberikan beberapa manfaat, baik secara teoritis maupun praktis, di antaranya:

- **Manfaat Teoritis:** Penelitian ini dapat menambah wawasan dan pengetahuan dalam bidang aljabar max-plus, khususnya dalam aplikasinya pada sistem transportasi publik. Model yang dihasilkan juga dapat menjadi dasar bagi penelitian lanjutan dalam bidang optimasi antrian dan penjadwalan.
- **Manfaat Praktis:** Hasil penelitian ini dapat memberikan solusi bagi pengelola terminal bus dalam meningkatkan efisiensi operasional. Dengan penerapan aljabar max-plus, sistem antrian dan jadwal bus dapat dioptimalkan sehingga mengurangi waktu tunggu penumpang dan meningkatkan pengalaman pengguna layanan transportasi publik.
- **Manfaat Kebijakan:** Temuan penelitian ini juga dapat dijadikan sebagai pertimbangan oleh pemerintah atau pihak pengelola transportasi dalam perencanaan dan pengelolaan terminal bus, khususnya untuk meningkatkan efisiensi dan kualitas layanan transportasi publik di Indonesia.

## BAB II

### Tinjauan Pustaka

#### 2.1 Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus adalah perluasan dari aljabar biasa yang menggantikan operasi penjumlahan dan perkalian dengan operasi maksimum dan penjumlahan, Sebagaimana definisi yang diberikan sebagai berikut:

**Definisi 2.1.1.** *Diberikan himpunan  $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$  dengan  $\mathbb{R}$  adalah himpunan bilangan real dan  $\varepsilon \stackrel{\text{def}}{=} -\infty$ . Pada  $\mathbb{R}_\varepsilon$ , didefinisikan dua operasi biner sebagai berikut:*

$$a \oplus b \stackrel{\text{def}}{=} \max\{a, b\}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon \quad (1)$$

$$a \otimes b \stackrel{\text{def}}{=} a + b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_\varepsilon \quad (2)$$

(Baccelli et al., 1992)

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa  $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$  adalah semiring dengan elemen netral  $\varepsilon = -\infty$  dan elemen satuan  $e = 0$ . Untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{R}_\varepsilon$ , berlaku sifat-sifat berikut:

1. **Komutatif** :  $a \oplus b = \max\{a, b\} = \max\{b, a\} = b \oplus a$ .
2. **Asosiatif** :  $(a \oplus b) \oplus c = \max\{\max\{a, b\}, c\} = \max\{a, \max\{b, c\}\} = a \oplus \max\{b, c\} = a \oplus (b \oplus c)$ .
3. **Elemen netral** :  $a \oplus \varepsilon = \max\{a, \varepsilon\} = \max\{a, -\infty\} = a$ .
4. **Elemen satuan** :  $a \otimes e = a + 0 = a$ .
5. **Distributif** :  $a \otimes (b \oplus c) = a \otimes \max\{b, c\} = a + \max\{b, c\} = \max\{a + b, a + c\} = a \oplus b \otimes a \oplus c$ .

Notasi  $(\mathbb{R}_\varepsilon, \oplus, \otimes)$  bisa ditulis sebagai  $\mathbb{R}_{\max}$  (Subiono, 2015).

#### 2.2 Vektor dan Matriks

Dalam aljabar max-plus, vektor dan matriks didefinisikan dengan menggunakan operasi max-plus, di mana operasi dasar penjumlahan digantikan oleh operasi maksimum ( $\oplus$ ) dan perkalian digantikan oleh penjumlahan biasa ( $\otimes$ ) (Butkovič, 2010; Heidergott et al., 2006; Baccelli et al., 1992). Definisi untuk vektor dan matriks dalam konteks aljabar max-plus dapat dijelaskan sebagai berikut:

Misalkan  $\mathbf{x}$  adalah vektor dalam aljabar max-plus dengan komponen  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Vektor ini didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Jika kita ingin melakukan operasi penjumlahan dua vektor  $\mathbf{x}$  dan  $\mathbf{y}$ , di mana  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ , maka penjumlahan max-plus didefinisikan sebagai berikut (Cassandras and Lafortune, 1999):

$$\mathbf{x} \oplus \mathbf{y} = \begin{pmatrix} \max(x_1, y_1) \\ \max(x_2, y_2) \\ \vdots \\ \max(x_n, y_n) \end{pmatrix}$$

Untuk operasi perkalian skalar max-plus antara skalar  $\lambda$  dan vektor  $\mathbf{x}$ , hasilnya adalah:

$$\lambda \otimes \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda + x_1 \\ \lambda + x_2 \\ \vdots \\ \lambda + x_n \end{pmatrix}$$

Matriks dalam aljabar max-plus juga mengikuti aturan operasi yang sama. Misalkan  $A$  adalah matriks  $m \times n$  dengan entri  $a_{ij}$ . Matriks ini didefinisikan sebagai:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Penjumlahan dua matriks  $A$  dan  $B$ , di mana  $B = (b_{ij})$ , didefinisikan sebagai operasi maksimum elemen demi elemen:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \max(a_{11}, b_{11}) & \dots & \max(a_{1n}, b_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \max(a_{m1}, b_{m1}) & \dots & \max(a_{mn}, b_{mn}) \end{pmatrix}$$

Perkalian matriks max-plus  $A$  dengan vektor  $\mathbf{x}$  didefinisikan menggunakan operasi maksimum dan penjumlahan biasa (dalam konteks aljabar max-plus):

$$(A \otimes \mathbf{x})_i = \bigoplus_{j=1}^n (a_{ij} \otimes x_j) = \max_{j=1}^n (a_{ij} + x_j)$$

Artinya, setiap elemen hasil perkalian matriks-vektor dalam aljabar max-plus diperoleh dengan menjumlahkan entri matriks dan vektor secara biasa, kemudian mengambil nilai maksimum (Subiono and van der Woude, 2000).

Perkalian dua matriks  $A$  dan  $B$  (dengan ukuran yang sesuai) didefinisikan sebagai:

$$(A \otimes B)_{ik} = \bigoplus_{j=1}^n (a_{ij} \otimes b_{jk}) = \max_{j=1}^n (a_{ij} + b_{jk})$$

Operasi ini mirip dengan perkalian matriks biasa, tetapi menggunakan operasi mak-

simum untuk penjumlahan elemen dan operasi penjumlahan biasa untuk perkalian elemen (Butkovič, 2010).

Misalkan kita punya dua matriks  $A$  dan  $B$  berikut dalam aljabar max-plus:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -\infty \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -\infty & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Perkalian matriks  $A \otimes B$  dalam aljabar max-plus adalah:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max(1 + (-\infty), 2 + 0) & \max(1 + 4, 2 + 1) \\ \max(3 + (-\infty), -\infty + 0) & \max(3 + 4, -\infty + 1) \end{pmatrix}$$

Menghitung elemen-elemen:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max(-\infty, 2) & \max(5, 3) \\ \max(-\infty, 3) & \max(7, -\infty) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

## 2.3 Graf dalam Aljabar Max-Plus

Dalam aljabar max-plus, graf berarah berbobot sering digunakan untuk memodelkan berbagai sistem yang melibatkan waktu penundaan atau durasi dalam suatu proses. Graf tersebut digunakan dalam konteks sistem sinkronisasi dan sistem peristiwa diskrit Heidergott et al. (2006).

### 2.3.1 Graf Berarah Berbobot

Sebuah graf  $G = (V, E)$  terdiri dari:

- Himpunan simpul (vertices)  $V$ , yang mewakili entitas atau kejadian dalam sistem.
- Himpunan sisi (edges)  $E$ , yang menghubungkan dua simpul dengan bobot tertentu yang sering merepresentasikan waktu atau durasi.

Setiap sisi  $e_{ij} \in E$  memiliki bobot  $w_{ij}$ , yang di dalam aljabar max-plus digunakan untuk mengukur waktu yang diperlukan untuk transisi dari satu kejadian ke kejadian lainnya Baccelli et al. (1992).

### 2.3.2 Jalur Terpanjang dalam Graf

Salah satu aplikasi utama dari aljabar max-plus dalam graf adalah mencari \*\*jalur terpanjang\*\* antara dua simpul. Jalur terpanjang antara simpul  $i$  dan simpul  $j$  dalam graf berarah berbobot dapat dihitung menggunakan perkalian matriks max-plus Heidergott et al. (2006). Jalur terpanjang ini mewakili waktu maksimum yang dibutuhkan untuk mencapai simpul tujuan dari simpul asal dalam sebuah proses diskrit.

Formulasi umum jalur terpanjang dalam aljabar max-plus adalah:

$$(A^k)_{ij} = \max_{1 \leq l \leq n} (a_{il} + a_{lj})$$

dimana  $A$  adalah matriks bobot yang merepresentasikan graf berbobot.



### 2.3.3 Matriks Adjacency dan Matriks Max-Plus

Dalam graf berarah berbobot, matriks adjacency digunakan untuk merepresentasikan hubungan antar simpul. Setiap entri  $a_{ij}$  dalam matriks ini mewakili bobot pada sisi dari simpul  $i$  ke simpul  $j$ , dan jika tidak ada sisi, maka bobotnya adalah elemen netral dalam aljabar max-plus, yaitu  $-\infty$  Baccelli et al. (1992).

Untuk menghitung jalur terpanjang antar simpul, perkalian matriks max-plus dilakukan sebagai berikut:

$$(A \otimes A)_{ij} = \max_k (a_{ik} + a_{kj})$$

Operasi ini serupa dengan perkalian matriks biasa, namun menggunakan operasi aljabar max-plus.

### **BAB III**

### **METODE PENELITIAN**

## **BAB IV**

### **JADWAL KEGIATAN**

## DAFTAR PUSTAKA

- Arum, S. . S. (2015). Analisa tarif angkutan umum berdasarkan biaya operasional kendaraan, atp dan wtp. *Jurnal Media Teknik Sipil*, 12(2).
- Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., and Quadrat, J.-P. (1992). *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley.
- Budi, A. S. (2018). Perencanaan busway untuk mendukung bus rapid transit antara terminal purabaya sampai terminal joyoboyo.
- Butkovič, P. (2010). *Max-Linear Systems: Theory and Algorithms*. Springer, London.
- Cassandras, C. and Lafortune, S. (1999). *Introduction to Discrete Event Systems*. Kluwer Academic Publisher.
- Heidergott, B., Olsder, G., and van der Woude, J. (2006). *Max Plus at Work: Modelling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*. Princeton University Press.
- Subiono (2015). *Aljabar Min-Max Plus dan Terapannya*. Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya, Indonesia. Available at: subiono2008@matematika.its.ac.id.
- Subiono and van der Woude, J. (2000). Power algorithms for  $(\max,+)$ - and bipartite  $(\min,\max,+)$ -systems. *Discrete Event Dynamic Systems: Theory and Applications*, 10(4):369–389.