| | | |
|---|---|---|
| Nama | : | Teosofi Hidayah Agung |
| NRP | : | 5002221132 |

Diberikan sistem persamaan diferensial non-homogen sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y + \sin(t)$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x + y + e^t$$

(1) Cari solusi untuk sistem homogen Abaikan terlebih dahulu suku non-homogen ($\sin(t)$ dan $e^t$) untuk menyelesaikan sistem homogen:

$$\frac{dx}{dt} = 3x + 4y$$
$$\frac{dy}{dt} = -2x + y$$

Ini adalah sistem persamaan diferensial homogen linear. Kita akan menggunakan metode **nilai eigen** untuk menyelesaikan sistem ini.

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Cari nilai eigen dari matriks koefisien:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Untuk mencari nilai eigen, kita perlu menghitung determinan $\det(A - \lambda I)$, di mana $\lambda$ adalah nilai eigen dan $I$ adalah matriks identitas:

$$\det\begin{pmatrix} 3-\lambda & 4 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

Hitung determinan:

$$(3-\lambda)(1-\lambda) - (-2)(4) = 0$$
$$(3-\lambda)(1-\lambda) + 8 = 0$$
$$3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 8 = 0$$
$$\lambda^2 - 4\lambda + 11 = 0$$

Gunakan rumus kuadrat untuk menyelesaikan:

$$\lambda = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(11)}}{2(1)}$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 44}}{2}$$

$$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{-28}}{2}$$

$$\lambda = 2 \pm i\sqrt{7}$$

Jadi, nilai eigen adalah $\lambda = 2 \pm i\sqrt{7}$, yang merupakan nilai kompleks. Karena ada bagian kompleks, solusi dari sistem homogen akan memiliki bentuk eksponensial dengan sinus dan kosinus.

Solusi umum dari sistem homogen adalah:

$$\begin{pmatrix} x_h(t) \\ y_h(t) \end{pmatrix} = e^{2t} \begin{pmatrix} C_1 \cos\left(\sqrt{7}t\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{7}t\right) \\ C_3 \cos\left(\sqrt{7}t\right) + C_4 \sin\left(\sqrt{7}t\right) \end{pmatrix}$$

di mana $C_1, C_2, C_3$, dan $C_4$ adalah konstanta.

(2) Solusi khusus untuk bagian non-homogen Sekarang, kita cari solusi khusus untuk suku non-homogen. Untuk persamaan pertama yang memiliki suku $\sin(t)$, kita coba solusi dalam bentuk:

$$x_p(t) = A\sin(t) + B\cos(t)$$

Untuk persamaan kedua yang memiliki suku $e^t$, kita coba solusi dalam bentuk:

$$y_p(t) = Ce^t$$

(3) Substitusi solusi khusus Substitusi $x_p(t)$ dan $y_p(t)$ ke dalam sistem non-homogen:

- Persamaan pertama:
$$\frac{dx_p}{dt} = 3x_p + 4y_p + \sin(t)$$
Hitung turunan $x_p(t)$:
$$\frac{dx_p}{dt} = A\cos(t) - B\sin(t)$$
Substitusi ke dalam persamaan:
$$A\cos(t) - B\sin(t) = 3(A\sin(t) + B\cos(t)) + 4Ce^t + \sin(t)$$
Pisahkan bagian yang bergantung pada $\sin(t)$, $\cos(t)$, dan $e^t$.
- Persamaan kedua:
$$\frac{dy_p}{dt} = -2x_p + y_p + e^t$$
Hitung turunan $y_p(t)$:
$$\frac{dy_p}{dt} = Ce^t$$
Substitusi ke dalam persamaan:
$$Ce^t = -2(A\sin(t) + B\cos(t)) + Ce^t + e^t$$

Baik, kita lanjutkan dengan mencari solusi khusus.

- Persamaan pertama:
$$\frac{dx_p}{dt} = 3x_p + 4y_p + \sin(t)$$
Dengan asumsi solusi khusus:
$$x_p(t) = A\sin(t) + B\cos(t)$$
$$y_p(t) = Ce^t$$
Hitung turunan dari $x_p(t)$:
$$\frac{dx_p}{dt} = A\cos(t) - B\sin(t)$$

Substitusi $x_p(t)$ dan $y_p(t)$ ke dalam persamaan pertama:

$$A\cos(t) - B\sin(t) = 3(A\sin(t) + B\cos(t)) + 4Ce^t + \sin(t)$$

Pisahkan bagian yang mengandung $\sin(t)$, $\cos(t)$, dan $e^t$:

$$A\cos(t) - B\sin(t) = 3A\sin(t) + 3B\cos(t) + 4Ce^t + \sin(t)$$

Sekarang, kita pisahkan menjadi tiga persamaan berdasarkan fungsi yang berbeda:
1. Untuk suku $\sin(t)$:

$$-B = 3A + 1$$
$$B = -3A - 1$$

2. Untuk suku $\cos(t)$:

$$A = 3B$$

3. Untuk suku $e^t$:

$$0 = 4C$$

Dari sini, kita dapatkan $C = 0$.

- Persamaan kedua:

$$\frac{dy_p}{dt} = -2x_p + y_p + e^t$$

Dengan $y_p(t) = 0$ karena $C = 0$, maka persamaan ini disederhanakan menjadi:

$$0 = -2(A\sin(t) + B\cos(t)) + e^t$$

Tidak ada suku $e^t$ di sebelah kiri, sehingga tidak memberikan informasi tambahan.

- Temukan nilai $A$ dan $B$. Dari sistem persamaan yang kita dapatkan:
1. $B = -3A - 1$ 2. $A = 3B$
Substitusi $B = -3A - 1$ ke dalam $A = 3B$:

$$A = 3(-3A - 1)$$
$$A = -9A - 3$$
$$10A = -3$$
$$A = -\frac{3}{10}$$

Substitusi nilai $A$ ke $B = -3A - 1$:

$$B = -3\left(-\frac{3}{10}\right) - 1$$
$$B = \frac{9}{10} - 1$$
$$B = -\frac{1}{10}$$

Solusi khusus adalah:

$$x_p(t) = -\frac{3}{10}\sin(t) - \frac{1}{10}\cos(t)$$
$$y_p(t) = 0$$

(4) Solusi Akhir dari sistem persamaan diferensial adalah gabungan dari solusi homogen dan solusi khusus:

$$x(t) = e^{2t}(C_1\cos\left(\sqrt{7}t\right) + C_2\sin\left(\sqrt{7}t\right)) - \frac{3}{10}\sin(t) - \frac{1}{10}\cos(t)$$
$$y(t) = e^{2t}(C_3\cos\left(\sqrt{7}t\right) + C_4\sin\left(\sqrt{7}t\right))$$