

EVALUASI TENGAH SEMESTER GASAL 2023/2024  
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS  
PROGRAM SARJANA



M

Matakuliah : Analisis 1  
Hari, Tanggal : Kamis, 19 Oktober 2023  
Waktu / Sifat : 100 menit / *Closed Book*  
Kelas, Dosen :  
A. Dr. Sunarsini, M.Si.  
B,F Dr. mont. Kistosil Fahim, M.Si.  
C. Dr. Mahmud Yunus, M.Si.  
D,G Drs. Sadjidon, M.Si.  
E. Dr. Rinurwati, M.Si.

HARAP DIPERHATIKAN !!!

Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Diberikan bilangan real  $a$ . Tunjukkan bahwa :
  - (a) Jika untuk setiap  $\varepsilon > 0$  berlaku  $0 \leq a < \varepsilon$  maka  $a = 0$ .
  - (b) jika  $a \neq 0$  maka  $a^2 > 0$ .
  
2. Misal  $S$  himpunan bagian tak-kosong dari  $\mathbb{R}$ . Jika  $S$  terbatas diatas, tunjukkan bahwa
$$\sup(S) = -\inf\{-s : s \in S\}.$$
  
3. Diberikan himpunan  $B \subset \mathbb{R}$  yang tidak kosong dan terbatas dibawah. Jika  $v \in \mathbb{R}$  memenuhi sifat untuk setiap  $n \in \mathbb{N}$  berlaku:
  - (i)  $v + \frac{1}{n}$  bukan batas bawah dari  $B$ ;
  - (ii)  $v - \frac{1}{n}$  batas bawah dari  $B$ ,tunjukkan bahwa  $\inf(B) = v$ .
  
4. Dengan menggunakan definisi konvergensi barisan, tunjukkan bahwa  $\lim(\frac{1}{3^n}) = 0$ .
  
5. Misal  $(x_n)$  suatu barisan konvergen, dan diketahui  $(y_n)$  suatu barisan dengan sifat bahwa untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $M$  sehingga  $|x_n - y_n| < \varepsilon$  untuk semua  $n \geq M$ . Apakah hal tersebut berakibat bahwa  $(y_n)$  barisan yang konvergen? Berikan penjelasan untuk jawaban Anda.

Nama : Teosofi Hidayah Agung
NRP : 5002221132

1. Diketahui  $a \in \mathbb{R}$ , sehingga akan memenuhi sifat-sifat pada bilangan real.

(a) Asumsikan  $a \neq 0$ . Maka didapat

$$0 < a < \varepsilon$$

$$a < \varepsilon, a > 0$$

Karena berlaku untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , dapat dipilih  $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}a$  sehingga

$$a < \varepsilon_0, a > 0$$

$$a < \frac{1}{2}a, a > 0 \quad (\text{Kontradiksi})$$

Akibatnya asumsi  $a \neq 0$  salah. Jadi haruslah  $a = 0$ .

(b) Akan dibagi menjadi 2 kasus:

(i) untuk  $a > 0$ , maka  $a \in \mathbb{P}$  dan jelas bahwa  $a \cdot a = a^2 \in \mathbb{P}$  (sifat keterurutan)

(ii) untuk  $a < 0$ , maka  $-a \in \mathbb{P}$  sehingga  $(-a) \cdot (-a) \in \mathbb{P}$ . Secara Pembuktian sifat aljabar di  $\mathbb{R}$ , didapatkan  $(-a) \cdot (-a) = a^2 \in \mathbb{P}$ .

Jadi untuk  $a \neq 0$  berlaku  $a^2 > 0$ .

2.  $S$  terbatas diatas berakibat  $S$  mempunyai supremum, yaitu  $\sup(S)$ . Dengan sifat supremum maka  $s \leq \sup(S)$ , untuk setiap  $s \in S$ . Akibatnya dapat diperoleh  $-\sup(S) \leq -s, \forall s \in S$  (1)

Perhatikan bahwa dari (1) dapat disimpulkan  $-\sup(S)$  merupakan batas bawah dari  $\{-s : s \in S\}$  yang berakibat himpunan tersebut memiliki infimum, yaitu  $\inf\{-s : s \in S\}$ . Dengan memanfaatkan sifat infimum didapatkan  $-\sup(S) \leq \inf\{-s : s \in S\}$  atau dapat ditulis sebagai  $\sup(S) \geq -\inf\{-s : s \in S\}$  ..... (2)

Ingat kembali bahwa  $\inf\{-s : s \in S\} \leq -s, \forall s \in S$  atau  $s \leq -\inf\{-s : s \in S\}, \forall s \in S$ . Didapatkan fakta bahwa  $\inf\{-s : s \in S\}$  merupakan batas atas dari  $S$ . Akibatnya diperoleh  $\sup(S) \leq -\inf\{-s : s \in S\}$  ..... (3)

∴ Dari (2) dan (3) dapat disimpulkan  $\sup(S) = -\inf\{-s : s \in S\}$

3. Dengan menggunakan sifat infimum, dari (i) diperoleh  $\inf(B) < v + \frac{1}{n}$  dan dari (ii) diperoleh  $v - \frac{1}{n} \leq \inf(B)$ . Sehingga didapatkan pertidaksamaan

$$\begin{aligned} v - \frac{1}{n} &\leq \inf(B) < v + \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} &\leq \inf(B) - v < \frac{1}{n} \\ 0 &\leq |\inf(B) - v| < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Dengan sifat archimedes, didapatkan fakta bahwa  $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ . Dengan demikian didapatkan

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\inf(B) - v| < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon \\ 0 &\leq |\inf(B) - v| < \varepsilon \end{aligned}$$

Dengan menggunakan teorema pada soal 1.(a) dapat disimpulkan bahwa  $\inf(B) - v = 0$  atau  $\inf(B) = v$ . **(Terbukti)**

4. Menggunakan definisi  $\lim(\frac{1}{3^n}) = 0$  didapatkan untuk setiap  $\varepsilon > 0$ , terdapat bilangan asli  $K(\varepsilon)$  sehingga  $\forall n \geq K(\varepsilon)$  berlaku  $|\frac{1}{3^n} - 0| < \varepsilon$ .

Perhatikan bahwa dengan induksi matematika, dapat dibuktikan bahwa  $3^n > n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  atau ekuivalen dengan  $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{n}$ . Dilanjutkan dengan memilih  $K(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$  didapatkan  $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{n} = \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon \implies |\frac{1}{3^n} - 0| < \varepsilon$ .

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa  $\lim(\frac{1}{3^n}) = 0$  terbukti.

5. Dengan menggunakan definisi konvergensi barisan, dapat dilihat  $\forall n \geq M$  berlaku bahwa  $|(x_n - y_n) - 0| < \varepsilon$ , yang menyatakan bahwa barisan  $(x_n - y_n)$  konvergen ke 0. Dengan ekivalensi definisi dapat juga ditulis  $\lim(x_n - y_n) = 0$ .

Perhatikan bahwa  $y_n = x_n - (x_n - y_n)$ , sehingga  $y_n$  merupakan hasil operasi barisan konvergen dengan barisan konvergen (didapatkan dari soal bahwa  $x_n$  konvergen). Akibatnya dapat disimpulkan

$$\lim(y_n) = \lim(x_n - (x_n - y_n)) = \lim(x_n) - \lim(x_n - y_n) = \lim(x_n) - 0 = \lim(x_n)$$