

Quiz 2 Pemodelan Matematika

Teosofi Hidayah Agung - 5002221132

13 November 2024

1. Perhatikan model dengan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = y^2 - x^2 \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dt} = x - xy$$

Dengan syarat awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 2$, maka:

- Tentukan titik stabilitas tak nol dan linierkan model tersebut.
- Apakah model tersebut stabil?
- Selesaikan bentuk linier dari sistem persamaan diferensial tersebut.
- Selesaikan bentuk nonlinier dari sistem persamaan diferensial tersebut secara numerik (Runge-Kutta).
- Tampilkan grafik penyelesaian dari poin (c) dan (d) dalam satu frame.

2. Perhatikan model dengan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = 4y - x^2 + 2t \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dt} = x - xy + e^{2t}$$

Dengan syarat awal $x(0) = 2$ dan $y(0) = 2$, maka:

- Tentukan titik stabilitas non-negatif dan linierkan model tersebut.
- Apakah model tersebut stabil?
- Selesaikan bentuk linier dari sistem persamaan diferensial tersebut.
- Selesaikan bentuk nonlinier dari sistem persamaan diferensial tersebut secara numerik (Runge-Kutta).
- Tampilkan grafik penyelesaian dari poin (c) dan (d) dalam satu frame.

Solusi:

1. a. Titik stabilitas terjadi ketika $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Dengan mensubstitusi persamaan diferensial, kita dapatkan:

$$\begin{aligned}y^2 - x^2 &= 0 \\x - xy &= 0\end{aligned}$$

Titik stabilitas tak nol adalah $(-1, 1)$ dan $(1, 1)$. Dalam kasus ini kita akan menggunakan titik $(-1, 1)$.

- b. Linearkan model tersebut terlebih dahulu

$$J_{(x,y)} = \begin{bmatrix} -2x & 2y \\ 1 - y & -x \end{bmatrix}$$

Substitusi titik stabilitas tak nol $(-1, 1)$ ke dalam $J_{(x,y)}$ kita dapatkan:

$$J_{(-1,1)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dapat dilihat bahwa matriks diatas adalah matriks segitiga atas sehingga nilai eigenvalue-nya adalah nilai-nilai pada diagonalnya, yaitu $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 1$. Karena nilai eigenvalue-nya positif maka model tersebut tidak stabil.

- c. • Untuk $\lambda_1 = 2$:

$$(J - 2I)\mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari baris pertama, kita dapatkan $2v_{12} = 0$, sehingga $v_{12} = 1$. Jadi, vektor eigen untuk $\lambda_1 = 2$ adalah $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Untuk $\lambda_2 = 1$:

$$(J - 1I)\mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dari baris pertama, kita dapatkan $v_{21} + 2v_{22} = 0$, sehingga $v_{22} = 1$ dan $v_{21} = -2$. Jadi, vektor eigen untuk $\lambda_2 = 1$ adalah $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solusi umum dari sistem linier ini adalah kombinasi linear dari solusi terkait masing-masing nilai eigen:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 \\ &= c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Substitusi $t = 0$ dan Bentuk Persamaan dengan Syarat Awal:** Untuk $t = 0$, solusi menjadi:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(0) &= c_1 e^{2 \cdot 0} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^0 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Berdasarkan syarat awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 2$, kita punya:

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Jadi, kita tuliskan persamaan:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Dari persamaan vektor di atas, kita dapat menuliskan sistem persamaan skalar sebagai berikut:

$$1 = c_1 - 2c_2$$

$$2 = c_2$$

Dari persamaan kedua, kita langsung peroleh $c_2 = 2$. Substitusikan $c_2 = 2$ ke dalam persamaan pertama:

$$1 = c_1 - 2 \cdot 2$$

$$1 = c_1 - 4 \Rightarrow c_1 = 5$$

Dengan $c_1 = 5$ dan $c_2 = 2$, solusi khusus sistem adalah:

$$\mathbf{X}(t) = 5e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2e^t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

yang dapat dituliskan sebagai:

$$x(t) = 5e^{2t} - 4e^t$$

$$y(t) = 2e^t$$

d. Pertama kita definisikan fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ sebagai berikut:

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$

$$g(x, y) = x - xy$$

Formula Runge-Kutta Orde 4 untuk sistem dua persamaan diferensial ini dinyatakan sebagai berikut:

- Untuk $x(t)$:

$$x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x})$$

dimana:

$$k_{1x} = h \cdot f(x(t), y(t))$$

$$k_{2x} = h \cdot f\left(x(t) + \frac{k_{1x}}{2}, y(t) + \frac{k_{1y}}{2}\right)$$

$$k_{3x} = h \cdot f\left(x(t) + \frac{k_{2x}}{2}, y(t) + \frac{k_{2y}}{2}\right)$$

$$k_{4x} = h \cdot f(x(t) + k_{3x}, y(t) + k_{3y})$$

- Untuk $y(t)$:

$$y(t+h) = y(t) + \frac{1}{6}(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y})$$

dimana:

$$k_{1y} = h \cdot g(x(t), y(t))$$

$$k_{2y} = h \cdot g\left(x(t) + \frac{k_{1x}}{2}, y(t) + \frac{k_{1y}}{2}\right)$$

$$k_{3y} = h \cdot g\left(x(t) + \frac{k_{2x}}{2}, y(t) + \frac{k_{2y}}{2}\right)$$

$$k_{4y} = h \cdot g(x(t) + k_{3x}, y(t) + k_{3y})$$

Karena telah diketahui nilai awal $t = 0$ kemudian disini kita akan menggunakan nilai $h = 0.1$. Maka kita dapatkan:

$$k_{1x} = 0.1 \cdot f(1, 2) = 0.1 \cdot (4 - 1) = 0.3$$

$$k_{1y} = 0.1 \cdot g(1, 2) = 0.1 \cdot (1 - 2) = -0.1$$

$$k_{2x} = 0.1 \cdot f\left(1 + \frac{0.3}{2}, 2 + \frac{-0.1}{2}\right) = 0.1 \cdot f(1.15, 1.95) = 0.1 \cdot (4 - 1.15) = 0.245$$

$$k_{2y} = 0.1 \cdot g\left(1 + \frac{0.3}{2}, 2 + \frac{-0.1}{2}\right) = 0.1 \cdot g(1.15, 1.95) = 0.1 \cdot (1 - 1.15) = -0.109$$

$$k_{3x} = 0.1 \cdot f\left(1 + \frac{0.285}{2}, 2 + \frac{-0.015}{2}\right) = 0.1 \cdot f(1.215, 1.975) = 0.1 \cdot (4 - 1.215) = 0.252$$

$$k_{3y} = 0.1 \cdot g\left(1 + \frac{0.285}{2}, 2 + \frac{-0.015}{2}\right) = 0.1 \cdot g(1.215, 1.975) = 0.1 \cdot (1 - 1.215) = -0.106$$

$$k_{4x} = 0.1 \cdot f(1.2785, 1.9785) = 0.1 \cdot (4 - 1.2785) = 0.202$$

$$k_{4y} = 0.1 \cdot g(1.2785, 1.9785) = 0.1 \cdot (1 - 1.2785) = -0.112$$

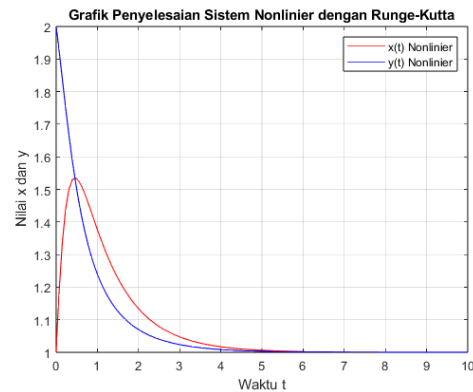
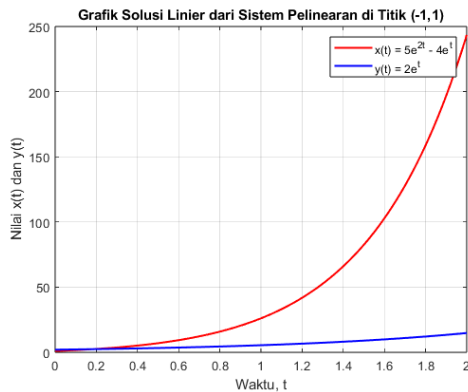
Misalkan kita ingin mencari nilai $x(0.1)$ dan $y(0.1)$, maka kita dapatkan:

$$x(0.1) = 1 + \frac{1}{6}(0.3 + 2(0.245) + 2(0.252) + 0.202) = 1.2503$$

$$y(0.1) = 2 + \frac{1}{6}(-0.1 + 2(-0.109) + 2(-0.106) - 0.112) = 1.8929$$

Untuk nilai t yang lain dapat dicari menggunakan rumus iteratif yang telah disebutkan diatas.

e. Berikut adalah grafik penyelesaian dari poin (c) dan (d) menggunakan MATLAB:



2. a. Karena telah diketahui nilai ketika $t = 0$, maka kita tinjau titik stabilitas non-negatif di $t = 0$. Sehingga kita dapatkan:

$$\begin{aligned} 4y - x^2 &= 0 \\ x - xy + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan mensubstitusi $y = \frac{x^2}{4}$ ke persamaan kedua, kita dapatkan:

$$\begin{aligned} x - x \left(\frac{x^2}{4} \right) + 1 &= 0 \\ x - \frac{x^3}{4} + 1 &= 0 \\ 4x - x^3 + 4 &= 0 \\ x^3 - 4x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode numerik, didapatkan nilai $x = 2.383$ dan $y = 1.42$. Selanjutnya kita linierkan model tersebut dengan menghitung matriks Jacobian dari model tersebut:

$$J_{(x,y)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x & 4 \\ 1 - y & -x \end{bmatrix}$$

- b. Substitusi titik stabilitas non-negatif ke dalam $J_{(x,y)}$ kita dapatkan:

$$J_{(2.383, 1.42)} = \begin{bmatrix} -4.766 & 4 \\ -0.58 & -2.383 \end{bmatrix}$$

Dengan menghitung nilai eigenvalue dari matriks diatas, kita dapatkan nilai eigenvalue-nya adalah $\lambda_1 = 3.5745 + 0.5102i$ dan $\lambda_2 = -3.5745 - 0.5102i$. Karena nilai real dari eigenvalue-nya negatif maka model tersebut stabil.

- c. $\lambda_1 = -3.5745 + 0.5102i$ akan didapat

$$\begin{bmatrix} -4.766 - (-3.5745 + 0.5102i) & 4 \\ -0.42 & -2.383 - (-3.5745 + 0.5102i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan bantuan Matlab akan didapat vektor eigen yaitu

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.9513 \\ 0.2834 + 0.1213i \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.9513 \\ 0.2834 - 0.1213i \end{bmatrix}$$

$$U = e^{\lambda_1 t} v_1$$

$$U = e^{(-3.5745 + 0.5102i)t} \begin{bmatrix} 0.9513 \\ 0.2834 + 0.1213i \end{bmatrix}$$

$$U = e^{-3.5745t} [\cos 0.5102t + i \sin 0.5102t] \begin{bmatrix} 0.9513 \\ 0.2834 + 0.1213i \end{bmatrix}$$

$$U = e^{-3.5745t} \begin{bmatrix} 0.9513(\cos 0.5102t) + i \cdot 0.9513(\sin 0.5102t) \\ 0.2834(\cos 0.5102t) - 0.1213(\sin 0.5102t) + i(0.1213(\cos 0.5102t) + 0.2834(\sin 0.5102t)) \end{bmatrix}$$

Penyelesaian Umum:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \text{Real}(U) + C_2 \text{Im}(U)$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 e^{-3.5745t} \begin{bmatrix} 0.9513(\cos 0.5102t) \\ 0.2834(\cos 0.5102t) - 0.1213(\sin 0.5102t) \end{bmatrix} \\ + C_2 e^{-3.5745t} \begin{bmatrix} 0.9513(\sin 0.5102t) \\ 0.1213(\cos 0.5102t) + 0.2834(\sin 0.5102t) \end{bmatrix}$$

Penyelesaian Khusus:

Dengan syarat awal : $x(0) = 2$ dan $y(0) = 2$, maka

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = C_1 e^{-3.5745(0)} \begin{bmatrix} 0.9513(\cos 0.5102(0)) \\ 0.2834(\cos 0.5102(0)) - 0.1213(\sin 0.5102(0)) \end{bmatrix} \\ + C_2 e^{-3.5745(0)} \begin{bmatrix} 0.9513(\sin 0.5102(0)) \\ 0.1213(\cos 0.5102(0)) + 0.2834(\sin 0.5102(0)) \end{bmatrix}$$

Dari persamaan didapat $C_1 = \frac{2}{0.9513} = 2.10$ dan

$$2.10(0.2834) + 0.1213C_2 = 2 \Rightarrow 0.1213C_2 = 2 - 0.59514 = 1.40486$$

$$C_2 = \frac{1.40486}{0.1213} = 0.001$$

Sehingga didapat $C_2 = 0.001$.

Oleh karena itu penyelesaian khusus persamaan adalah

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = 2.10 e^{-3.5745t} \begin{bmatrix} 0.9513(\cos 0.5102t) \\ 0.2834(\cos 0.5102t) - 0.1213(\sin 0.5102t) \end{bmatrix} \\ + 0.001 e^{-3.5745t} \begin{bmatrix} 0.9513(\sin 0.5102t) \\ 0.1213(\cos 0.5102t) + 0.2834(\sin 0.5102t) \end{bmatrix}$$

- d. Dengan cara yang sama seperti soal sebelumnya, kita dapatkan nilai-nilai yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier secara numerik. Definisikan fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ sebagai berikut:

$$f(x, y) = 4y - x^2 + 2t$$

$$g(x, y) = x - xy + e^{2t}$$

Dengan formula Runge-Kutta Orde 4, kita dapatkan:

$$k_{1x} = 0.1 \cdot f(2, 2) = 0.1 \cdot (8 - 4 + 0) = 0.4$$

$$k_{1y} = 0.1 \cdot g(2, 2) = 0.1 \cdot (2 - 4 + 1) = -0.1$$

$$k_{2x} = 0.1 \cdot f\left(2 + \frac{0.4}{2}, 2 + \frac{-0.1}{2}\right) = 0.1 \cdot f(2.2, 1.95) = 0.1 \cdot (8 - 4.84 + 0.2) = 0.326$$

$$k_{2y} = 0.1 \cdot g\left(2 + \frac{0.4}{2}, 2 + \frac{-0.1}{2}\right) = 0.1 \cdot g(2.2, 1.95) = 0.1 \cdot (2 - 4.4 + 1) = -0.1$$

$$k_{3x} = 0.1 \cdot f\left(2 + \frac{0.363}{2}, 2 + \frac{-0.1}{2}\right) = 0.1 \cdot f(2.1815, 1.95) = 0.1 \cdot (8 - 4.75 + 0.21815) = 0.342$$

$$k_{3y} = 0.1 \cdot g\left(2 + \frac{0.363}{2}, 2 + \frac{-0.1}{2}\right) = 0.1 \cdot g(2.1815, 1.95) = 0.1 \cdot (2 - 4.363 + 1) = -0.1$$

$$k_{4x} = 0.1 \cdot f(2.2425, 1.95) = 0.1 \cdot (8 - 5.03 + 0.2425) = 0.271$$

$$k_{4y} = 0.1 \cdot g(2.2425, 1.95) = 0.1 \cdot (2 - 4.485 + 1) = -0.1$$

Misalkan kita ingin mencari nilai $x(0.1)$ dan $y(0.1)$, maka kita dapatkan:

$$x(0.1) = 2 + \frac{1}{6}(0.4 + 2(0.326) + 2(0.342) + 0.271) = 2.2425$$

$$y(0.1) = 2 + \frac{1}{6}(-0.1 + 2(-0.1) + 2(-0.1) - 0.1) = 1.95$$

Untuk nilai t yang lain dapat dicari menggunakan rumus iteratif yang telah disebutkan diatas.

e. Berikut adalah grafik penyelesaian dari poin (c) dan (d) menggunakan MATLAB:

