8. Tinjau sampel acak berukuran n dari distribusi eksponensial dua parameter, $X_i \sim \text{EXP}(1, \eta)$. Tunjukkan bahwa $S = X_{1:n}$ adalah statistik cukup untuk η dengan menggunakan teorema faktorisasi.

Solusi:

PDF dari distribusi $X \sim \text{EXP}(1, \eta)$ adalah

$$f(x;\eta) = \begin{cases} e^{-(x-\eta)} & , \quad x > \eta \\ 0 & , \quad \text{lainnya} \end{cases}$$

Kemudian definisikan fungsi indikator dari himpunan (η, ∞) sebagai

$$I_\eta(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x > \eta \\ 0 & , \quad x < \eta \end{cases}$$

Sehingga, PDF dari sampel acak $X_1, \ldots, X_n$ adalah

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{x};\eta) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\eta) \\ &= \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i-\eta)} I_\eta(x_i) \\ &= e^{-\sum_{i=1}^{n}(x_i-\eta)} \prod_{i=1}^{n} I_\eta(x_i) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa

$$\prod_{i=1}^{n} I_\eta(x_i) = \begin{cases} 1 & , \quad x_1, \ldots, x_n > \eta \\ 0 & , \quad \text{lainnya} \end{cases} = \begin{cases} 1 & , \quad x_{1:n} > \eta \\ 0 & , \quad \text{lainnya} \end{cases}$$

Dari informasi di atas, didapatkan $\prod_{i=1}^{n} I_\eta(x_i) = 1$ jika dan hanya jika $\min x_i = x_{1:n} > \eta$. Sehingga

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{x};\eta) &= e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i + n\eta} I_\eta(\min x_i) \\ &= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \exp(n\eta)\, I_\eta(\min x_i) \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa fungsi diatas berbentuk $f(\underset{\sim}{x};\eta) = g(T(\underset{\sim}{x} \mid \eta))h(\underset{\sim}{x})$ dengan

$$\begin{aligned} g(T(\underset{\sim}{x} \mid \eta)) &= \exp(n\eta) I_\eta(\min x_i) \\ h(\underset{\sim}{x}) &= \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \end{aligned}$$

Sehingga, $S = T(\underset{\sim}{x}) = X_{1:n}$ adalah statistik cukup untuk η.

9. Tinjau sampel acak berukuran n dari distribusi Weibull, $X_i \sim \text{WEI}(\theta, \beta)$.

(a) Tentukan statistik cukup untuk θ dengan β diketahui, misalkan $\beta = 2$.

(b) Jika β tidak diketahui, dapatkah Anda menemukan statistik cukup tunggal untuk β?

Solusi:

PDF dari distribusi Weibull adalah

$$f(x;\theta,\beta) = \frac{\beta}{\theta^\beta} x^{\beta-1} e^{-(x/\theta)^\beta}, \quad x > 0$$

Dengan $\theta, \beta > 0$.

(a) Dengan $\beta = 2$, maka PDF dari sampel acak $X_1, \ldots, X_n$ adalah

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{x};\theta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i;\theta,2) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2}{\theta^2} x_i e^{-(x_i/\theta)^2} \\ &= \left(\prod_{i=1}^n x_i\right) \frac{2^n}{\theta^{2n}} \exp\left(-\sum_{i=1}^n (x_i/\theta)^2\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n x_i\right) \frac{2^n}{\theta^{2n}} \exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \end{aligned}$$

Dengan teorema faktorisasi diperoleh bahwa

$$\begin{aligned} g(T(\underset{\sim}{x} \mid \theta)) &= \frac{2^n}{\theta^{2n}} \exp\left(-\frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^n x_i^2\right) \\ h(\underset{\sim}{x}) &= \prod_{i=1}^n x_i \end{aligned}$$

Sehingga, $T(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^n x_i^2$ adalah statistik cukup untuk θ.

(b) Dengan β tidak diketahui, maka PDF dari sampel acak $X_1, \ldots, X_n$ adalah

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{x};\theta,\beta) &= \prod_{i=1}^n f(x_i;\theta,\beta) \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{\beta}{\theta^\beta} x_i^{\beta-1} e^{-(x_i/\theta)^\beta} \\ &= \frac{\beta^n}{\theta^{n\beta}} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{\beta-1}\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^n (x_i/\theta)^\beta\right) \end{aligned}$$

Distribusi Weibull termasuk dalam keluarga eksponensial, sehingga dapat ditulis ulang sebagai

$$f(\underset{\sim}{x};\theta,\beta) = \frac{\beta^n}{\theta^{n\beta}} \exp\left((\beta-1)\sum_{i=1}^n \ln x_i - \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{\theta}\right)^\beta\right)$$

Dengan teorema keluarga eksponensial, kita dapat mengidentifikasi statistik cukup sebagai berikut:

$$w_1(\theta, \beta) = \beta - 1 \qquad w_2(\theta, \beta) = -\frac{1}{\theta^\beta}$$

$$T_1(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \qquad T_2(\underset{\sim}{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^\beta$$

Dapat dilihat bahwa β berada di kedua koefisien dari statistik cukup T_1 dan T_2, sehingga tidak ada statistik cukup tunggal untuk β.

10. Misalkan $X_1, \ldots, X_n$ adalah sampel acak dari distribusi normal, $X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$.
    (a) Tentukan statistik cukup tunggal untuk μ dengan σ^2 diketahui.
    (b) Tentukan statistik cukup tunggal untuk σ^2 dengan μ diketahui.

Solusi:

Diketahui PDF dari distribusi normal adalah

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Kemudian karena distribusi normal merupakan keluarga eksponensial, maka dapat ditulis ulang sebagai

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}\right) \exp\left(\frac{x\mu}{\sigma^2} - \frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$$

dengan $h(x) = 1$, $c(\mu, \sigma^2) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\dfrac{\mu^2}{2\sigma^2}\right)$, $t_1(x) = x$, $t_2(x) = x^2$, $w_1(\mu, \sigma^2) = \dfrac{\mu}{\sigma^2}$, dan $w_2(\mu, \sigma^2) = -\dfrac{1}{2\sigma^2}$.

(a) Karena σ^2 diketahui, maka hasil diatas menunjukkan bahwa $T_1(\underset{\sim}{x}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i$ adalah statistik cukup tunggal untuk μ, karena μ hanya berada pada koefisien dari T_1.

(b) Karena μ diketahui, maka hasil diatas menunjukkan bahwa σ^2 mempunyai statistik cukup bersama $\left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \sum_{i=1}^{n} x_i\right)$. Hal ini dapat dibayangkan bahwa rumus varians pastilah memperhitungkan kedua statistik cukup tersebut, sehingga tidak ada statistik cukup tunggal untuk σ^2.

11. Tinjau sampel acak berukuran n dari distribusi uniform, $X_i \sim \mathrm{UNIF}(\theta_1, \theta_2)$.
    (a) Tunjukkan bahwa $X_{1:n}$ statistik cukup untuk θ_1, jika θ_2 diketahui.
    (b) Tunjukkan bahwa $X_{1:n}$ dan $X_{n:n}$ statistik cukup secara bersama untuk θ_1 dan θ_2.

Solusi:

Diketahui PDF dari distribusi uniform adalah

$$f(x;\theta_1,\theta_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\theta_2-\theta_1} & , \quad \theta_1 \le x \le \theta_2 \\ 0 & , \quad \text{lainnya} \end{cases}$$

Kemudian definisikan fungsi indikator dari himpunan $[\theta_1, \theta_2]$ sebagai

$$I_{[\theta_1,\theta_2]}(x) = \begin{cases} 1 & , \quad \theta_1 \le x \le \theta_2 \\ 0 & , \quad \text{lainnya} \end{cases}$$

(a) Dengan θ_2 diketahui, maka PDF dari sampel acak $X_1, \ldots, X_n$ adalah

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{x};\theta_1) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1,\theta_2) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_2-\theta_1} I_{[\theta_1,\theta_2]}(x_i) \\ &= \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n} \prod_{i=1}^{n} I_{[\theta_1,\theta_2]}(x_i) \end{aligned}$$

Agar fungsi diatas tak nol, maka haruslah $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge \theta_1$ atau dapat ditulis $\min X_i = \theta_1$. Kemudian dengan teorema faktorisasi

$$\begin{aligned} g(T(\underset{\sim}{x} \mid \theta_1)) &= \frac{I_{[\theta_1,\theta_2]}(\min x_i)}{(\theta_2-\theta_1)^n} \\ h(\underset{\sim}{x}) &= 1 \end{aligned}$$

Sehingga, $X_{1:n}$ adalah statistik cukup untuk θ_1.

(b) Dengan θ_1 dan θ_2 tidak diketahui, maka PDF dari sampel acak $X_1, \ldots, X_n$ adalah

$$\begin{aligned} f(\underset{\sim}{x};\theta_1,\theta_2) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta_1,\theta_2) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta_2-\theta_1} I_{[\theta_1,\theta_2]}(x_i) \\ &= \frac{1}{(\theta_2-\theta_1)^n} I_{[\theta_1,\theta_2]}(x_{1:n}) I_{[\theta_1,\theta_2]}(x_{n:n}) \end{aligned}$$

Sehingga, $X_{1:n}$ dan $X_{n:n}$ adalah statistik cukup secara bersama untuk θ_1 dan θ_2.