Quiz 2 Pemodelan Matematika

Teosofi Hidayah Agung - 5002221132

13 November 2024

1. Perhatikan model dengan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = y^2 - x^2 \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dt} = x - xy$$

   Dengan syarat awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 2$, maka:

   a. Tentukan titik stabilitas tak nol dan linierkan model tersebut.

   b. Apakah model tersebut stabil?

   c. Selesaikan bentuk linier dari sistem persamaan diferensial tersebut.

   d. Selesaikan bentuk nonlinier dari sistem persamaan diferensial tersebut secara numerik (Rungge-Kutta).

   e. Tampilkan grafik penyelesaian dari poin (c) dan (d) dalam satu frame.

2. Perhatikan model dengan sistem persamaan diferensial sebagai berikut:

$$\frac{dx}{dt} = 4y - x^2 + 2t \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dt} = x - xy + e^{2t}$$

   Dengan syarat awal $x(0) = 2$ dan $y(0) = 2$, maka:

   a. Tentukan titik stabilitas non-negatif dan linierkan model tersebut.

   b. Apakah model tersebut stabil?

   c. Selesaikan bentuk linier dari sistem persamaan diferensial tersebut.

   d. Selesaikan bentuk nonlinier dari sistem persamaan diferensial tersebut secara numerik (Runge-Kutta).

   e. Tampilkan grafik penyelesaian dari poin (c) dan (d) dalam satu frame.

<u>Solusi</u>:

1.

   a. Titik stabilitas terjadi ketika $\frac{dx}{dt} = 0$ dan $\frac{dy}{dt} = 0$. Dengan mensubstitusi persamaan diferensial, kita dapatkan:

$$
\begin{aligned}
y^2 - x^2 &= 0 \\
x - xy &= 0
\end{aligned}
$$

Titik stabilitas tak nol adalah $(-1,1)$ dan $(1,1)$. Dalam kasus ini kita akan menggunakan titik $(-1,1)$.

b. Linearkan model tersebut terlebih dahulu

$$
J_{(x,y)} = \begin{bmatrix} -2x & 2y \\ 1-y & -x \end{bmatrix}
$$

Substitusi titik stabilitas tak nol $(-1,1)$ ke dalam $J_{(x,y)}$ kita dapatkan:

$$
J_{(-1,1)} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Dapat dilihat bahwa matriks diatas adalah matriks segitiga atas sehingga nilai eigenvalue-nya adalah nilai-nilai pada diagonalnya, yaitu $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 1$. Karena nilai eigenvalue-nya positif maka model tersebut tidak stabil.

c.

- Untuk $\lambda_1 = 2$:

$$
(J - 2I)\mathbf{v}_1 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Dari baris pertama, kita dapatkan $2v_{12} = 0$, sehingga $v_{12} = 1$. Jadi, vektor eigen untuk $\lambda_1 = 2$ adalah $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- Untuk $\lambda_2 = 1$:

$$
(J - 1I)\mathbf{v}_2 = 0 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

Dari baris pertama, kita dapatkan $v_{21} + 2v_{22} = 0$, sehingga $v_{22} = 1$ dan $v_{21} = -2$. Jadi, vektor eigen untuk $\lambda_2 = 1$ adalah $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Solusi umum dari sistem linier ini adalah kombinasi linear dari solusi terkait masing-masing nilai eigen:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{X}(t) &= c_1 e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 \\
&= c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^{t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Substitusi $t = 0$ dan Bentuk Persamaan dengan Syarat Awal:** Untuk $t = 0$, solusi menjadi:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}(0) &= c_1 e^{2\cdot 0}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2 e^{0}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\\ &= c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Berdasarkan syarat awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 2$, kita punya:

$$\mathbf{X}(0) = \begin{bmatrix}x(0)\\y(0)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$$

Jadi, kita tuliskan persamaan:

$$\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} = c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$$

Dari persamaan vektor di atas, kita dapat menuliskan sistem persamaan skalar sebagai berikut:

$$1 = c_1 - 2c_2$$

$$2 = c_2$$

Dari persamaan kedua, kita langsung peroleh $c_2 = 2$. Substitusikan $c_2 = 2$ ke dalam persamaan pertama:

$$1 = c_1 - 2\cdot 2$$

$$1 = c_1 - 4 \Rightarrow c_1 = 5$$

Dengan $c_1 = 5$ dan $c_2 = 2$, solusi khusus sistem adalah:

$$\mathbf{X}(t) = 5e^{2t}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 2e^{t}\begin{bmatrix}-2\\1\end{bmatrix}$$

yang dapat dituliskan sebagai:

$$\begin{aligned}x(t) &= 5e^{2t} - 4e^{t}\\ y(t) &= 2e^{t}\end{aligned}$$

d. Pertama kita definisikan fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned}f(x, y) &= y^2 - x^2\\ g(x, y) &= x - xy\end{aligned}$$

Formula Runge-Kutta Orde 4 untuk sistem dua persamaan diferensial ini dinyatakan sebagai berikut:

- Untuk $x(t)$:

$$x(t + h) = x(t) + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x})$$

dimana:

$$
\begin{aligned}
k_{1x} &= h \cdot f\big(x(t), y(t)\big) \\
k_{2x} &= h \cdot f\left(x(t) + \frac{k_{1x}}{2}, y(t) + \frac{k_{1y}}{2}\right) \\
k_{3x} &= h \cdot f\left(x(t) + \frac{k_{2x}}{2}, y(t) + \frac{k_{2y}}{2}\right) \\
k_{4x} &= h \cdot f\big(x(t) + k_{3x}, y(t) + k_{3y}\big)
\end{aligned}
$$

- Untuk $y(t)$:

$$y(t+h) = y(t) + \frac{1}{6}\big(k_{1y} + 2k_{2y} + 2k_{3y} + k_{4y}\big)$$

dimana:

$$
\begin{aligned}
k_{1y} &= h \cdot g\big(x(t), y(t)\big) \\
k_{2y} &= h \cdot g\left(x(t) + \frac{k_{1x}}{2}, y(t) + \frac{k_{1y}}{2}\right) \\
k_{3y} &= h \cdot g\left(x(t) + \frac{k_{2x}}{2}, y(t) + \frac{k_{2y}}{2}\right) \\
k_{4y} &= h \cdot g\big(x(t) + k_{3x}, y(t) + k_{3y}\big)
\end{aligned}
$$

Karena telah diketahui nilai awal $t = 0$ kemudian disini kita akan menggunakan nilai $h = 0.1$. Maka kita dapatkan:

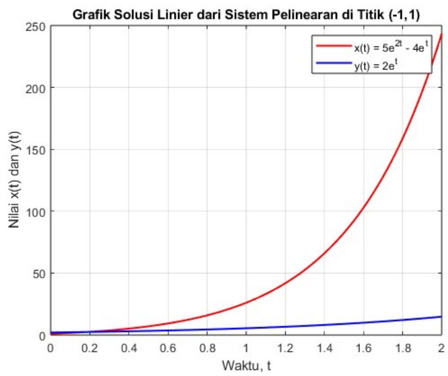
$$
\begin{aligned}
k_{1x} &= 0.1 \cdot f(1{,}2) = 0.1 \cdot (4 - 1) = 0.3 \\
k_{1y} &= 0.1 \cdot g(1{,}2) = 0.1 \cdot (1 - 2) = -0.1 \\
k_{2x} &= 0.1 \cdot f\left(1 + \frac{0.3}{2}, 2 + \frac{-0.1}{2}\right) = 0.1 \cdot f(1.15{,}1.95) = 0.1 \cdot (4 - 1.15) = 0.245 \\
k_{2y} &= 0.1 \cdot g\left(1 + \frac{0.3}{2}, 2 + \frac{-0.1}{2}\right) = 0.1 \cdot g(1.15{,}1.95) = 0.1 \cdot (1 - 1.15) = -0.109 \\
k_{3x} &= 0.1 \cdot f\left(1 + \frac{0.285}{2}, 2 + \frac{-0.015}{2}\right) = 0.1 \cdot f(1.215{,}1.975) = 0.1 \cdot (4 - 1.215) = 0.252 \\
k_{3y} &= 0.1 \cdot g\left(1 + \frac{0.285}{2}, 2 + \frac{-0.015}{2}\right) = 0.1 \cdot g(1.215{,}1.975) = 0.1 \cdot (1 - 1.215) = -0.106 \\
k_{4x} &= 0.1 \cdot f(1.2785{,}1.9785) = 0.1 \cdot (4 - 1.2785) = 0.202 \\
k_{4y} &= 0.1 \cdot g(1.2785{,}1.9785) = 0.1 \cdot (1 - 1.2785) = -0.112
\end{aligned}
$$

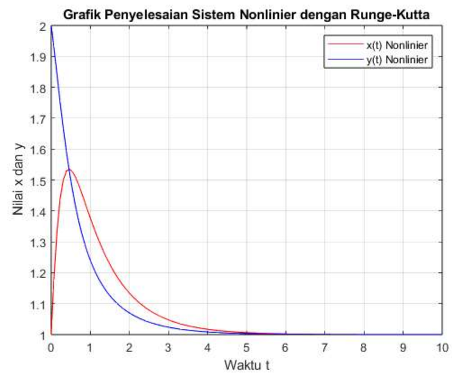
Misalkan kita ingin mencari nilai $x(0.1)$ dan $y(0.1)$, maka kita dapatkan:

$$
\begin{aligned}
x(0.1) &= 1 + \frac{1}{6}(0.3 + 2(0.245) + 2(0.252) + 0.202) = 1.2503 \\
y(0.1) &= 2 + \frac{1}{6}(-0.1 + 2(-0.109) + 2(-0.106) - 0.112) = 1.8929
\end{aligned}
$$

Untuk nilai t yang lain dapat dicari menggunakan rumus iteratif yang telah disebutkan diatas.

e. Berikut adalah grafik penyelesaian dari poin (c) dan (d) menggunakan MATLAB:





2.

a. Karena telah diketahui nilai ketika $t = 0$, maka kita tinjau titik stabilitas non-negatif di $t = 0$. Sehingga kita dapatkan:

$$4y - x^2 = 0$$
$$x - xy + 1 = 0$$

Dengan mensubstitusi $y = \frac{x^2}{4}$ ke persamaan kedua, kita dapatkan:

$$\begin{aligned} x - x\left(\frac{x^2}{4}\right) + 1 &= 0 \\ x - \frac{x^3}{4} + 1 &= 0 \\ 4x - x^3 + 4 &= 0 \\ x^3 - 4x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan menggunakan metode numerik, didapatkan nilai $x = 2.383$ dan $y = 1.42$.
Selanjutnya kita linierkan model tersebut dengan menghitung matriks Jacobian dari model tersebut:

$$\begin{aligned} J_{(x,y)} &= \begin{bmatrix} \pdv{f_1}{x} & \pdv{f_1}{y}\\ \pdv{f_2}{x} & \pdv{f_2}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x & 4\\ 1-y & -x \end{bmatrix} \end{aligned}$$

b. Substitusi titik stabilitas non-negatif ke dalam $J_{(x,y)}$ kita dapatkan:

$$J_{(2.383,1.42)} = \begin{bmatrix} -4.766 & 4 \\ -0.58 & -2.383 \end{bmatrix}$$

Dengan menghitung nilai eigenvalue dari matriks diatas, kita dapatkan nilai eigenvalue-nya adalah $\lambda_1 = 3.5745 + 0.5102i$ dan $\lambda_2 = -3.5745 - 0.5012i$. Karena nilai real dari eigenvalue-nya negatif maka model tersebut stabil.

c. $\lambda_1 = -3.5745 + 0.5102i$ akan didapat

$$\begin{bmatrix} -4.766 - (-3.5745 + 0.5102i) & 4 \\ -0.42 & -2.383 - (-3.5745 + 0.5102i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan bantuan Matlab akan didapat vektor eigen yaitu

$$v_1 = \begin{bmatrix} 0.9513 \\ 0.2834 + 0.1213i \end{bmatrix} \quad \text{dan} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0.9513 \\ 0.2834 - 0.1213i \end{bmatrix}$$

$$U = e^{\lambda t} v_1$$

$$U = e^{(-3.5745 + \ .5102i)t} \begin{bmatrix} 0.9513 \\ 0.2834 + 0.1213i \end{bmatrix}$$

$$U = e^{-3.5745t} [\cos 0.5102t + i \sin 0.5102t] \begin{bmatrix} 0.9513 \\ 0.2834 + 0.1213i \end{bmatrix}$$

$$U = e^{-3.5745t} \begin{bmatrix} 0.9513(\cos 0.5102t) + i \cdot 0.9513(\sin 0.5102t) \\ 0.2834(\cos 0.5102t) - 0.1213(\sin 0.5102t) + i\big(0.1213(\cos 0.5102t) + 0.2834(\sin 0.5102t)\big) \end{bmatrix}$$

Penyelesaian Umum:

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = C_1 \mathrm{Real}(U) + C_2 \mathrm{Im}(U)$$

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \quad C_1 e^{-3.5745} \begin{bmatrix} 0.9513(\cos 0.5102t) \\ 0.2834(\cos 0.5102t) - 0.1213(\sin 0.5102t) \end{bmatrix} + C_2 e^{-3.5745} \begin{bmatrix} 0.9513(\sin 0.5102t) \\ 0.1213(\cos 0.5102t) + 0.2834(\sin 0.5102t) \end{bmatrix}$$

Penyelesaian Khusus:

Dengan syarat awal : $x(0) = 2$ dan $y(0) = 2$, maka

$$\begin{bmatrix} x(0) \\ y(0) \end{bmatrix} = C_1 e^{-3.5745(0)} \begin{bmatrix} 0.9513\big(\cos 0.5102(0)\big) \\ 0.2834\big(\cos 0.5102(0)\big) - 0.1213\big(\sin 0.5102(0)\big) \end{bmatrix} + C_2 e^{-3.5745(0)} \begin{bmatrix} 0.9513\big(\sin 0.5102(0)\big) \\ 0.1213\big(\cos 0.5102(0)\big) + 0.2834\big(\sin 0.5102(0)\big) \end{bmatrix}$$

Dari persamaan didapat $C_1 = \frac{2}{0.9513} = 2.10$ dan

$$2.10(0.2834) + 0.1213C_2 = 2 \Rightarrow 0.1213C_2 = 2 - 0.59514 = 1.40486$$

$$C_2 = \frac{1.40486}{0.1213} = 0.001$$

Sehingga didapat $C_2 = 0.001$.

Oleh karena itu penyelesaian khusus persamaan adalah

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = & \quad 2.10e^{-3.5745t} \begin{bmatrix} 0.9513(\cos 0.5102t) \\ 0.2834(\cos 0.5102t) - 0.1213(\sin 0.5102t) \end{bmatrix} \\ + & \quad 0.001e^{-3.5745t} \begin{bmatrix} 0.9513(\sin 0.5102t) \\ 0.1213(\cos 0.5102t) + 0.2834(\sin 0.5102t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

d. Dengan cara yang sama seperti soal sebelumnya, kita dapatkan nilai-nilai yang diperlukan untuk menyelesaikan persamaan nonlinier secara numerik. Definisikan fungsi $f(x, y)$ dan $g(x, y)$ sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= 4y - x^2 + 2t \\ g(x, y) &= x - xy + e^{2t} \end{aligned}$$

Dengan formula Runge-Kutta Orde 4, kita dapatkan:

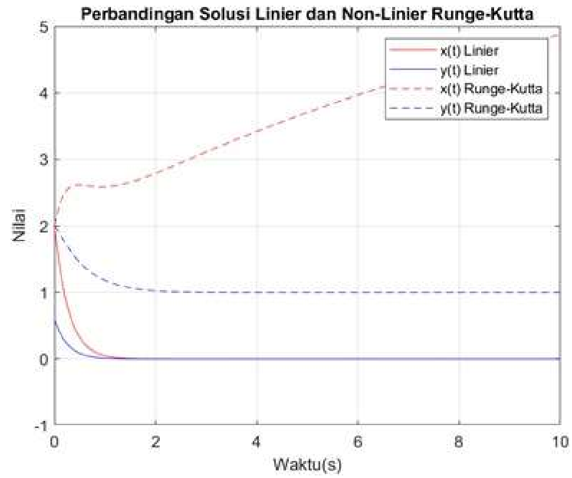
$$\begin{aligned} k_{1x} &= 0.1 \cdot f(2,2) = 0.1 \cdot (8 - 4 + 0) = 0.4 \\ k_{1y} &= 0.1 \cdot g(2,2) = 0.1 \cdot (2 - 4 + 1) = -0.1 \\ k_{2x} &= 0.1 \cdot f\left(2 + \frac{0.4}{2}, 2 + \frac{-0.1}{2}\right) = 0.1 \cdot f(2.2,1.95) = 0.1 \cdot (8 - 4.84 + 0.2) = 0.326 \\ k_{2y} &= 0.1 \cdot g\left(2 + \frac{0.4}{2}, 2 + \frac{-0.1}{2}\right) = 0.1 \cdot g(2.2,1.95) = 0.1 \cdot (2 - 4.4 + 1) = -0.1 \\ k_{3x} &= 0.1 \cdot f\left(2 + \frac{0.363}{2}, 2 + \frac{-0.1}{2}\right) = 0.1 \cdot f(2.1815,1.95) = 0.1 \cdot (8 - 4.75 + 0.21815) = 0.342 \\ k_{3y} &= 0.1 \cdot g\left(2 + \frac{0.363}{2}, 2 + \frac{-0.1}{2}\right) = 0.1 \cdot g(2.1815,1.95) = 0.1 \cdot (2 - 4.363 + 1) = -0.1 \\ k_{4x} &= 0.1 \cdot f(2.2425,1.95) = 0.1 \cdot (8 - 5.03 + 0.2425) = 0.271 \\ k_{4y} &= 0.1 \cdot g(2.2425,1.95) = 0.1 \cdot (2 - 4.485 + 1) = -0.1 \end{aligned}$$

Misalkan kita ingin mencari nilai $x(0.1)$ dan $y(0.1)$, maka kita dapatkan:

$$\begin{aligned} x(0.1) &= 2 + \frac{1}{6}(0.4 + 2(0.326) + 2(0.342) + 0.271) = 2.2425 \\ y(0.1) &= 2 + \frac{1}{6}(-0.1 + 2(-0.1) + 2(-0.1) - 0.1) = 1.95 \end{aligned}$$

Untuk nilai t yang lain dapat dicari menggunakan rumus iteratif yang telah disebutkan diatas.

e. Berikut adalah grafik penyelesaian dari poin (c) dan (d) menggunakan MATLAB:



Perbandingan Solusi Linier dan Non-Linier Runge-Kutta
x(t) Linier
y(t) Linier
x(t) Runge-Kutta
y(t) Runge-Kutta
Nilai
Waktu(s)
5
4
3
2
1
0
-1
0
2
4
6
8
10