Pembahasan Kuis 1 Pengantar Analisis Fungsional T.A 2024/2025

Teosofi Hidayah Agung
5002221132

Departemen Matematika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Rabu, 9 April 2025

Pembahasan Soal

Soal 1

Jika A subspace dari ℓ^∞ yang terdiri dari semua barisan yang elemen-elemennya nol dan satu, maka dapatkan metrik terinduksi (induced metric) pada A.

Definisi 1

Ruang ℓ^∞ didefinisikan sebagai himpunan semua barisan bilangan real (atau kompleks) $x = (x_n)_{n=1}^\infty$ yang **terbatas**, yaitu:

$$\ell^\infty = \left\{ (x_n)_{n=1}^\infty \,\middle|\, \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty \right\}.$$

Pembahasan Soal

Jawaban:
Misalkan $x_n, y_n \in A$, maka kita dapat didefinisikan fungsi jarak $d : A \times A \to \mathbb{R}$ sebagai berikut:

$$d(x_n, y_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

Lebih lanjut, karena barisan x_n dan y_n adalah barisan yang elemen-elemennya nol dan satu, maka berakibat

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n| = \begin{cases} 0 & \text{jika } x_n = y_n \\ 1 & \text{jika } x_n \neq y_n \end{cases}$$

Pembahasan Soal

Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa d merupakan metrik pada A atau lebih tepatnya disebut **metrik diskrit**. Sehingga

$$d(x_n, y_n) = \begin{cases} 0 & \text{jika } x_n = y_n \\ 1 & \text{jika } x_n \neq y_n \end{cases}$$

merupakan metrik terinduksi pada A.

Pembahasan Soal

Soal 2

Dapatkan barisan yang konvergen ke nol, tetapi bukan anggota dari ℓ^p, $1 \leq p < \infty$. Jelaskan jawaban anda.

Definisi 2

Ruang ℓ^p untuk $1 \leq p < \infty$ didefinisikan sebagai:

$$\ell^p = \left\{ x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \;\middle|\; \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty \right\}.$$

Jawaban:

Perhatikan barisan $x_n = \left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$. Jelas bahwa $x_n \to 0$ ketika $n \to \infty$. Sekarang akan dibuktikan bahwa $x_n \notin \ell^p$ untuk $1 \leq p < \infty$.

Teorema 1

Jika $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, maka untuk x yang cukup besar berlaku $|f(x)| < |g(x)|$

Bukti: Karena $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat N sehingga untuk semua $x > N$ berlaku $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \varepsilon$. Pilih $\varepsilon = 1$, maka terdapat N_1 sehingga untuk semua $x > N_1$ berlaku $\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < 1$. Dengan kata lain, untuk x yang besar berlaku $|f(x)| < |g(x)|$.

Sekarang tinjau untuk $1 \leq p < \infty$ dan dengan L'Hôpital, berlaku

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)^p}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{p\ln(n+1)^{p-1}}{n+1} = \cdots = \lim_{n\to\infty} \frac{p!}{n} = 0$$

Dengan menggunakan Teorema sebelumnya didapatkan bahwa $\ln(n+1)^p < n$ atau $\dfrac{1}{\ln(n+1)^p} > \dfrac{1}{n}$ untuk n yang cukup besar. Karena kedua barisan monoton turun, misalkan saja untuk $n \leq M$ berlaku $\ln(n+1)^p \geq n$, maka

$$S_1 = \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{\ln(n+1)^p} \leq \sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} = S_2$$

Selanjutnya didefinisikan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)^p} = S_1 + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)^p} \tag{1}$$

$$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n} = S_2 + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n} \tag{2}$$

Kemudian dari (1) dan (2) didapatkan hubungan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)^p} > S_1 + \sum_{n=M+1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{n} + S_1 - S_2$$

Pembahasan Soal

Nomor 2

Deret harmonik merupakan deret divergen, oleh karena itu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)^p} > \infty$$

untuk $1 \leq p < \infty$. Dengan demikian menggunakan uji banding biasa, didapat kesimpulan bahwa barisan $x_n = \left(\frac{1}{\ln(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$ konvergen ke nol tetapi bukan anggota dari ℓ^p.

Pembahasan Soal

Soal 3

Diberikan A dan B himpunan bagian dari ruang metrik (X, d). Didefinisikan fungsi D dengan $D(A, B) = \inf\limits_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b)$. Tunjukkan bahwa D tidak mendefinisikan metrik pada himpunan kuasa (power set) dari X. Lebih lanjut, tunjukkan bahwa jika $A \cap B \neq \emptyset$ maka $D(A, B) = 0$.

Definisi 3

Misalkan X merupakan himpunan tak kosong, maka *power set* atau **himpunan kuasa** dari X, dilambangkan dengan $P(X)$ atau 2^X yang merupakan himpunan dari semua himpunan bagian dari X. Dengan kata lain, $P(X) = \{A \,|\, A \subseteq X\}$.

Jawaban:
Untuk membuktikan bahwa D tidak mendefinisikan metrik pada himpunan kuasa dari X, kita perlu menunjukkan bahwa D tidak memenuhi salah satu aksioma metrik. Misalkan $A, B \in 2^X$ dengan $A \neq B$ namun $A \cap B \neq \emptyset$. Dengan kata lain terdapat x sehingga $x \in A$ dan $x \in B$. Oleh karenanya diperoleh

$$D(A, B) = \inf_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a, b) \leq d(x, x) = 0$$

Disisi lain, d merupakan metrik pada X sehingga $d(a, b) \geq 0$ untuk semua $a, b \in X$. Dengan demikian, kita dapat menyimpulkan bahwa

$$D(A, B) = 0, \text{ jika } A \cap B \neq \emptyset$$

atau terdapat $A, B \in 2^X$ dengan $A \neq B$ tetapi $D(A, B) = 0$. Hal ini tidak memenuhi aksioma metrik yang menyatakan bahwa $d(a, b) = 0$ jika dan hanya jika $a = b$. Oleh karena itu, D tidak mendefinisikan metrik pada himpunan kuasa dari X.

Pembahasan Soal

Soal 4

Jika (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy di ruang metrik (X, d), tunjukkan bahwa (a_n), dimana $a_n = d(x_n, y_n)$, konvergen. Berikan contoh ilustrasinya.

Definisi 4

Barisan (x_n) di ruang metrik (X, d) disebut **barisan Cauchy** jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat K sehingga untuk semua $m, n > K$ berlaku $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Jawaban:
Misalkan (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy di ruang metrik (X, d). Secara definisi (x_n) artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat K_1 sehingga untuk semua $m, n > K_1$ berlaku

$$d(x_m, x_n) < \varepsilon/2.$$

Demikian juga (y_n) Cauchy artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat K_2 sehingga untuk semua $m, n > K_2$ berlaku

$$d(y_m, y_n) < \varepsilon/2.$$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa (a_n) konvergen di $\mathbb{R}$ dengan menggunakan fakta bahwa setiap barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ pasti konvergen, maka cukup ditunjukkan bahwa (a_n) adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$.

Perhatikan bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ dapat dipilih $K = \sup\{K_1, K_2\}$ sehingga untuk semua $m, n > K$ berlaku

$$\begin{aligned}
|a_m - a_n| &= |d(x_m, y_m) - d(x_n, y_n)| \\
&\leq |d(x_m, x_n) + d(x_n, y_m) - d(y_m, y_n)| \\
&\leq |d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) + d(y_n, y_m) - d(y_m, y_n)| \\
&\leq d(x_m, x_n) + d(y_m, y_n) \\
&< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon
\end{aligned}$$

Hal diatas menunjukkan bahwa (a_n) adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$ terhadap metrik Euclidean. Oleh karena itu, (a_n) konvergen di $\mathbb{R}$.

Untuk ilustrasinya misalkan kita bekerja di ruang metrik $(\mathbb{R}, d)$ dengan $d(x,y) = |x-y|$, dan ambil:

$$x_n = 1 + \frac{1}{n} \quad \text{dan} \quad y_n = 3 - \frac{1}{n}$$

Keduanya adalah barisan Cauchy di $\mathbb{R}$, karena $(x_n) \to 1$ dan $(y_n) \to 3$
Sekarang lihat:

$$a_n = d(x_n, y_n) = |x_n - y_n| = \left| \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(3 - \frac{1}{n}\right) \right| = \left| -2 + \frac{2}{n} \right| = 2 - \frac{2}{n} \to 2$$

Barisan $a_n = d(x_n, y_n)$ konvergen ke 2.

Pembahasan Soal

Nomor 4

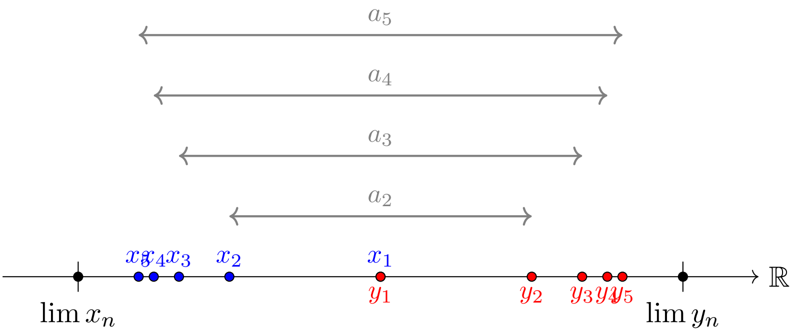

Figure: Ilustrasi barisan Cauchy (x_n) dan (y_n) di $\mathbb{R}$, serta jarak $a_n = d(x_n, y_n)$.