Klasifikasi PDP

Bentuk umum dari PDP linier order 2 dengan dua variabel adalah

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

dengan $A, B, C, \ldots, G$ dan u adalah fungsi (x, y) dan dapat diturunkan 2 kali pada domain Ω.
Klasifikasi PDP linier order 2 dengan dua variabel:

1. PDP Hiperbolik $B^2 - 4AC > 0$
2. PDP Parabolik $B^2 - 4AC = 0$
3. PDP Eliptik $B^2 - 4AC < 0$

$$A^* = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2$$
$$B^* = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y$$
$$C^* = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2$$
$$D^* = A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y$$
$$E^* = A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y$$
$$F^* = F$$
$$G^* = G$$

Persamaan (3.15) adalah bentuk kanonik dari PDP linier order 2 dengan dua variabel.

$$A^*w_{\xi\xi} + B^*w_{\xi\eta} + C^*w_{\eta\eta} + D^*w_\xi + E^*w_\eta + F^*w = G^*$$

Hiperbolik

Bentuk kanonik PDP hiperbolik adalah

$$w_{\xi\eta} = H_1^*(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta).$$

Langkah-langkah mengubah PDP hiperbolik ke bentuk kanoniknya:

1. Tentukan tipe PDP dengan mengecek
$$B^2 - 4AC > 0 \to \text{PDP hiperbolik}$$
2. Dapatkan persamaan karakteristiknya
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$\to$solusinya $\phi_1(x, y) = c_1$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$\to$solusinya $\phi_2(x, y) = c_2$
sehingga $\xi(x, y) = \phi_1(x, y)$ dan $\eta(x, y) = \phi_2(x, y)$
3. Dapatkan turunan ξ, η terhadap x, y sehingga didapat
$$\xi_x, \xi_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}$$
4. Substitusi hasil no (3) ke persamaan (3.15) untuk mendapatkan
$$A^*, B^*, C^*, D^*, E^*, F^*, \text{ dan } G^*$$
5. Selesaikan hasil no (4) sehingga didapat hasil $w(\xi, \eta)$
6. Transformasi hasil no (5) ke bentuk $u(x, y)$

Parabolik

Bentuk kanonik PDP parabolik adalah

$$w_{\eta\eta} = H_2^*(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta)$$

atau

$$w_{\xi\xi} = H_3^*(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta).$$

Langkah-langkah mengubah PDP parabolik ke bentuk kanoniknya:

1. Tentukan tipe PDP dengan mengecek
$$B^2 - 4AC = 0 \to \text{PDP parabolik}$$
2. Dapatkan persamaan karakteristiknya
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} \to \text{solusinya } \phi_1(x, y) = c_1$$
sehingga $\xi(x, y) = \phi_1(x, y)$ dan $\eta(x, y)$ adalah sebarang fungsi (x, y) dengan catatan
$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$
3. Dapatkan turunan ξ, η terhadap x, y sehingga didapat
$$\xi_x, \xi_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}$$
4. Substitusi hasil no (3) ke persamaan (3.15) untuk mendapatkan
$$A^*, B^*, C^*, D^*, E^*, F^*, \text{ dan } G^*$$
5. Selesaikan hasil no (4) sehingga didapat hasil $w(\xi, \eta)$
6. Transformasi hasil no (5) ke bentuk $u(x, y)$

Eliptik

Langkah-langkah mengubah PDP eliptik ke bentuk kanoniknya:

1. Tentukan tipe PDP dengan mengecek
$$B^2 - 4AC < 0 \to \text{PDP eliptik}$$
2. Dapatkan persamaan karakteristiknya
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - i\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$
$\to$ solusinya $\alpha(x, y) = c_1$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + i\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$
$\to$ solusinya $\beta(x, y) = c_2$
sehingga diperoleh
$$\xi(x, y) = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{dan} \quad \eta(x, y) = \frac{\alpha - \beta}{2i}$$
3. Dapatkan turunan ξ, η terhadap x, y sehingga didapat
$$\xi_x, \xi_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}$$
4. Substitusi hasil no (3) ke persamaan (3.15) untuk mendapatkan
$$A^*, B^*, C^*, D^*, E^*, F^*, \text{ dan } G^*$$
5. Selesaikan hasil no (4) sehingga didapat hasil
$$w(\xi, \eta)$$
6. Transformasi hasil no (5) ke bentuk
$$u(x, y)$$

Metode Pemisahan Variabel

Bentuk umum PDP order 2 dengan 2 variabel homogen adalah

$$A^*u_{x^*x^*} + B^*u_{x^*y^*} + C^*u_{y^*y^*} + D^*u_{x^*} + E^*u_{y^*} + F^*u = 0$$

dan bentuk kanoniknya adalah

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0$$

diasumsikan solusi dengan pemisah variabel yaitu

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0$$

maka akan diperoleh

$$u_x = X'Y$$
$$u_y = XY'$$
$$u_{xx} = X''Y$$
$$u_{xy} = X'Y'$$
$$u_{yy} = XY''$$

Getaran Dawai

Solusi permasalahan getaran dawai

$$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0$$

dengan kondisi awal

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le \ell$$
$$u_t(x, 0) = g(x), \qquad 0 \le x \le \ell$$

dan batas

$$u(0, t) = 0, \qquad t \ge 0$$
$$u(\ell, t) = 0, \qquad t \ge 0$$

adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right]$$

dengan

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx,$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^\ell g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx.$$

Konduksi Panas

Solusi permasalahan konduksi panas $u_t = ku_{xx}$, $0 < x < \ell$, $t > 0$ dengan kondisi awal dan batas

$$u(x, 0) = f(x), \qquad 0 \le x \le \ell$$
$$u(0, t) = 0, \qquad t \ge 0$$
$$u(\ell, t) = 0, \qquad t \ge 0$$

adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt}$$

dengan

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)dx.$$

Metode Ekspansi Fungsi Eigen

Metode ini dapat digunakan jika permasalahan nonhomogennya berupa **PDP nonhomogen dengan kondisi batas homogen**.
Langkah-langkah metode eigen function expansion.

1. Dapatkan eigen function dari masalah homogen, misal $\phi_n(x)$ = eigen function, maka solusinya adalah
$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(t)\phi_n(x). \qquad (1)$$
2. Bagian nonhomogen dari PDP $(G(x, t))$ diekspansi dari eigen function
$$G(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(t)\phi_n(x). \qquad (2)$$
3. Substitusi ke PDP nonhomogen diperoleh PDB $C_n(t)$.
4. Cari solusi PDB $C_n(t)$.
5. Masukkan kondisi awal dan diperoleh $C_n(0)$ dan $C_n'(0)$.

PD Non-hom Kondisi & Batas Non-hom

Misalkan persamaan diferensial parsial nonhomogen:

$$u_{tt} = c^2u_{xx} + h(x, t)$$

dengan kondisi awal:

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

dan kondisi batas nonhomogen:

$$u(0, t) = p(t), \quad u(\ell, t) = q(t)$$

Langkah-langkah penyelesaian:

1. Pemisahan solusi:
$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t)$$
dengan $v(x, t)$ memenuhi kondisi batas homogen dan $U(x, t)$ mengatasi kondisi batas nonhomogen.
2. Tentukan fungsi $U(x, t)$ agar:
$$U(0, t) = p(t), \quad U(\ell, t) = q(t)$$
Ambil:
$$U(x, t) = p(t) + \frac{x}{\ell}(q(t) - p(t))$$
sehingga kondisi batas homogen diperoleh untuk $v(x, t)$:
$$v(0, t) = 0, \quad v(\ell, t) = 0$$
3. Substitusi ke persamaan utama:
$$v_{tt} - c^2v_{xx} = h(x, t) - U_{tt}(x, t)$$
atau:
$$v_{tt} - c^2v_{xx} = H(x, t)$$
4. Tentukan kondisi awal untuk v:
$$v(x, 0) = f(x) - U(x, 0)$$
$$v_t(x, 0) = g(x) - U_t(x, 0)$$
5. Selesaikan PDP untuk $v(x, t)$ dengan kondisi batas homogen dan sumber baru $H(x, t)$ menggunakan metode *eigen function expansion.*
6. Gabungkan solusi:
$$u(x, t) = v(x, t) + U(x, t)$$

Solusi PDP Linier Tingkat Dua dengan Koefisien Konstan

Bentuk umum PDP linier tingkat dua adalah:

$$a\,u_{xx} + b\,u_{xy} + c\,u_{yy} + d\,u_x + e\,u_y + f\,u = g$$

dengan a, b, c, d, e, f, g fungsi-fungsi dari x dan y, atau konstan.
Untuk kasus koefisien konstan, bentuknya menjadi:

$$a\,u_{xx} + b\,u_{xy} + c\,u_{yy} = g(x, y)$$

dengan a, b, c konstan.
Definisikan operator:

$$D = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \mathcal{D} = \frac{\partial}{\partial y},$$
$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad D\mathcal{D} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y},$$
$$\mathcal{D}^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Sehingga operator diferensial:

$$F(D, \mathcal{D}) = aD^2 + bD\mathcal{D} + c\mathcal{D}^2$$

dan bentuk PDP menjadi:

$$F(D, \mathcal{D})u = g(x, y)$$

Penyelesaian umum dari PDP ini adalah:

$$u = u_c + u_p$$

dengan:

- u_c: *penyelesaian komplementer*, yaitu solusi dari persamaan homogen $F(D, \mathcal{D})u = 0$
- u_p: *penyelesaian partikular*, yaitu solusi dari persamaan nonhomogen $F(D, \mathcal{D})u = g(x, y)$

Untuk menyelesaikan bagian homogen:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} = 0$$

gunakan substitusi $u = e^{y+mx}$, maka:

$$u_x = me^{y+mx},$$
$$u_y = e^{y+mx},$$
$$u_{xx} = m^2 e^{y+mx},$$
$$u_{xy} = me^{y+mx},$$
$$u_{yy} = e^{y+mx}$$

Substitusi ke PDE menghasilkan persamaan karakteristik:

$$am^2 + bm + c = 0$$

Dengan solusi m_1, m_2, bentuk umum solusi u_c bergantung pada sifat akarnya:

1. Jika $m_1 \neq m_2$ (real dan berbeda):
$$u_c = f(y + m_1 x) + g(y + m_2 x)$$
2. Jika $m_1 = m_2 = k$ (real dan kembar):
$$u_c = f(y + kx) + x\,g(y + kx)$$
atau
$$u_c = f(y + kx) + y\,g(y + kx)$$
3. Jika $m_1, m_2 = p \pm qi$ (kompleks konjugat):
$$u_c = f(y + (p + qi)x) + g(y + (p - qi)x)$$

Untuk penyelesaian partikularnya:

1. Jika $F(D, \mathcal{D})u = e^{ax+by}$, maka:
$$u_p = \frac{1}{F(D, \mathcal{D})} e^{ax+by} = \frac{e^{ax+by}}{F(a, b)} \quad \text{dengan } F(a, b) \neq 0$$
2. Jika $F(D^2, D\mathcal{D}, \mathcal{D}^2)u = \sin(ax+by)$, maka:
$$u_p = \frac{1}{F(D^2, D\mathcal{D}, \mathcal{D}^2)} \sin(ax + by) = \frac{\sin(ax + by)}{F(-a^2, -ab, -b^2)}$$
dengan $F(-a^2, -ab, -b^2) \neq 0$
3. Jika $F(D^2, D\mathcal{D}, \mathcal{D}^2)u = \cos(ax + by)$, maka:
$$u_p = \frac{1}{F(D^2, D\mathcal{D}, \mathcal{D}^2)} \cos(ax + by) = \frac{\cos(ax + by)}{F(-a^2, -ab, -b^2)}$$
dengan $F(-a^2, -ab, -b^2) \neq 0$
4. Jika $F(D, \mathcal{D})u = x^p y^q$ dengan p, q bilangan bulat positif, maka:
$$u_p = \frac{1}{F(D, \mathcal{D})} x^p y^q$$
   - jika $q < p$, deretkan dalam $\frac{\mathcal{D}}{D}$ sampai $\left(\frac{\mathcal{D}}{D}\right)^q$
   - jika $p < q$, deretkan dalam $\frac{D}{\mathcal{D}}$ sampai $\left(\frac{D}{\mathcal{D}}\right)^p$
5. $\frac{1}{D - a\mathcal{D}} f(x, y) = \int f(x, c - ax)\, dx$ dengan c diganti $y + ax$ setelah integrasi