Algoritma 12.2.1.
Setelah mengetahui solusi polinomial karakteristiknya terdapat akar kompleks, maka langkah selanjutnya adalah mencari solusi umum dari PD linear homogen dimensi-n. Berikut adalah langkah-langkahnya:

Langkah 1: Misalkan $\boldsymbol{\xi}_{m+1}$ dan $\boldsymbol{\xi}_{m+2}$ masing-masing adalah vektor eigen yang saling konjugat serta berkoresponden dengan pasangan konjugat nilai eigen $r_{m+1} = \alpha + i\beta$ dan $r_{m+2} = \alpha - i\beta$.

Langkah 2: Ambil salah satu dari kedua vektor eigen kemudian pisahkan bagian real dan imajiner. Misalkan $\boldsymbol{\xi}_{m+1} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$.

Langkah 3: Selanjutnya kita bisa dapatkan dua solusi real yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{m+1}(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\cos(\beta t) - \mathbf{v}\sin(\beta t)) \\ \mathbf{x}_{m+2}(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\sin(\beta t) + \mathbf{v}\cos(\beta t)) \end{aligned} \tag{12.1}$$

Dimana sudah merupakan solusi dari pasangan nilai eigen r_{m+1} dan r_{m+2}.

Langkah 4: Jika terdapat vektor eigen kompleks lainnya, maka ulangi langkah 1 sampai 3 untuk mendapatkan semua solusi nilai eigen kompleks. Jika tidak, maka solusi umum dari sistem PD linear homogen dimensi-n adalah

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{12.2}$$

Langkah 5: Jika terdapat syarat awal x_0, maka subtitusi syarat awal tersebut ke dalam solusi umum yang telah didapatkan.

$$\mathbf{x}(x_0) = c_1\mathbf{x}_1(x_0) + c_2\mathbf{x}_2(x_0) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(x_0) \tag{12.3}$$

Langkah 6: Selesaikan persmaan (12.3) untuk mencari konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Catatan 12.2.1.
Jikalau kita memilih vektor eigen $\boldsymbol{\xi}_{m+2} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ yang berkoresponden dengan nilai eigen $r_{m+2} = \alpha - i\beta$, maka solusi umumnya menjadi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{m+1}(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\cos(-\beta t) - (-\mathbf{v})\sin(-\beta t)) \\ &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\cos(\beta t) - \mathbf{v}\sin(\beta t)) \\ \mathbf{x}_{m+2}(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\sin(-\beta t) + (-\mathbf{v})\cos(-\beta t)) \\ &= -e^{\alpha t}(\mathbf{u}\sin(\beta t) + \mathbf{v}\cos(\beta t)) \end{aligned} \tag{12.4}$$

Dapat dilihat bahwa solusi (12.1) dan (12.4) hanya berbeda tanda pada $\mathbf{x}_{m+2}(t)$. Namun karena solusi umum mencakup sebuah sembarang konstanta c_2, maka perbedaan tanda tersebut tidak mempengaruhi solusi umumnya.

Contoh 12.2.1.
Tentukan solusi umum dari

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \tag{12.5}$$

Penyelesaian:
Polinomial karakteristik dari matriks (12.5) adalah

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)((\lambda-2)^2+4). \tag{12.6}$$

Nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2+2i$ dan $\lambda_3 = 2-2i$. Matriks *augmented* dari $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & : & 0 \\ 1 & 1 & 2 & : & 0 \\ 1 & -1 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

Diperoleh $x_1 = -x_3$ dan $x_2 = -x_3$. Ambil $x_3 = 1$ sehingga

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jadi

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

adalah solusi dari (12.5).

Matriks *augmented* dari $(A-(2+2i)I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah

$$\begin{pmatrix} -1-2i & -1 & -2 & : & 0 \\ 1 & 1-2i & 2 & : & 0 \\ 1 & -1 & -2i & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & : & 0 \\ 0 & 1 & i & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

Sehingga $x_1 = ix_3$ dan $x_2 = -ix_3$. Ambil $x_3 = 1$ maka

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan Algoritma 12.2.1 dapat diperoleh

Langkah 1: Perhatikan bahwa $\alpha = 2$ dan $\beta = 2$.

Langkah 2: Pilih vektor eigen $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$, maka $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langkah 3: Dua solusi lainnya adalah

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(2t) - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin(2t)\right) = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

dan

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{2t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(2t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(2t)\right) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Solusi umumnya adalah

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Contoh 12.2.2.

Carilah solusi dari

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 4 \\ -8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \tag{12.7}$$

Dengan syarat awal $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Penyelesaian:

Polinomial karakteristiknya dari matriks A pada (12.7) adalah

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 5 & 4 \\ -8 & 7-\lambda & 6 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1). \tag{12.8}$$

Sehingga didapatkan nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = i$ dan $\lambda_3 = -i$. Selanjutnya matriks *augmented* dari $(A - \lambda 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah

$$\begin{pmatrix} -7 & 5 & 4 & : & 0 \\ -8 & 5 & 6 & : & 0 \\ 1 & 0 & -2 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & : & 0 \\ 0 & 1 & -2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

diperoleh $x_1 = x_2 = 2x_3$. Ambil saja $x_3 = 1$ akibatnya

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jadi

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

adalah solusi dari (12.7). Kemudian, matriks *augmented* dari $(A - iI)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah

$$\begin{pmatrix} -5-i & 5 & 4 & : & 0 \\ -8 & 7-i & 6 & : & 0 \\ 1 & 0 & -i & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & : & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

didapatkan $x_1 = ix_3$ dan $x_2 = (1-i)x_3$. Dengan mengambil $x_3 = 1$ diperoleh

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lakukan yang telah dicontohkan pada Algoritma 12.2.1 sebagai berikut:

Langkah 1: Karena $\lambda_2 = 0 + i$ dan $\lambda_3 = 0 - i$ saling konjugat begitu juga dengan vektor eigen nya yaitu

$$\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} i \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} -i \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Langkah 2: Pilih salah satu vektor eigen, misalnya $\mathbf{x_2}$ sehingga

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

didapat $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langkah 3: Solusi kedua dan ketiga masing-masing adalah

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{0t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) \right) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

dan

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{0t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) \right) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Langkah 4: solusi umumnya adalah

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Langkah 5: Subtitusi syarat awal $\mathbf{y}(0)$ sehingga didapatkan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + c_3 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}.$$

Langkah 6: Selesaikan persamaan menggunakan sembarang metode yang telah anda diketahui. Pada contoh ini akan digunakan metode eliminasi Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & : & 0 \\ 2 & -1 & 1 & : & 3 \\ 1 & 1 & 0 & : & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & : & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Didapat $c_1 = \frac{4}{3}, c_2 = -\frac{1}{3}$ dan $c_3 = -\frac{8}{3}$. Jadi solusi dari (12.7) adalah

$$\mathbf{y} = \frac{4e^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} - \frac{8}{3} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Contoh 12.2.3.
Carilah solusi PD linear orde tiga berikut

$$y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0. \tag{12.9}$$

Penyelesaian:
Persamaan (12.9) dapat diselesaikan menggunakan sistem PD linear homogen dimensi-3. Misalkan

$$\begin{aligned} y_1 = y &\implies y_1' = y' = y_2 \\ y_2 = y' &\implies y_2' = y'' = y_3 \\ y_3 = y'' &\implies y_3' = y''' = 4y'' - 6y' + 4y. \end{aligned}$$

Dengan demikian didapatkan sistem sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{12.10}$$

Dari matriks (12.10) didapatkan nilai eigen $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 + i$ dan $\lambda_3 = 1 - i$. Untuk vektor eigen yang berkoresponden adalah

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Langkah 1: Terlihat bahwa $\boldsymbol{\xi}_2$ dan $\boldsymbol{\xi}_3$ adalah pasangan konjugat.

Langkah 2: Ambil $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$, didapat $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langkah 3: Solusi untuk nilai eigen λ_2 dan λ_3 adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2(x) = e^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(x) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(x) \right) &= \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) - \sin(x) \\ 2\cos(x) \end{pmatrix} e^x \\ \mathbf{y}_3(x) = e^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin(x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(x) \right) &= \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) + \cos(x) \\ 2\sin(x) \end{pmatrix} e^x \end{aligned}$$

Langkah 4: Solusi umum dari (12.9) adalah

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) - \sin(x) \\ 2\cos(x) \end{pmatrix} + c_3 e^x \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) + \cos(x) \\ 2\sin(x) \end{pmatrix}.$$

Ingat bahwa $\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ artinya solusi PD orde tiga ada pada baris pertama solusi umum.
Jadi solusi dari (12.9) adalah

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x \cos(x) + c_3 e^x \sin(x).$$

Contoh 12.2.4.
Diberikan sistem PD linear homogen dimensi-4 berikut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{12.11}$$

Tentukan solusi umum dari sistem PD tersebut.
Penyelesaian:
Nilai eigen dari matriks (12.11) adalah

$$\lambda_{1,2} = i, \quad \lambda_{3,4} = -i$$

dan vektor eigen yang berkoresponden dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Langkah 1: Pilih vektor eigen $\boldsymbol{\xi}_1$ dan $\boldsymbol{\xi}_3$ sebagai vektor eigen yang saling konjugat.

Langkah 2: Ambil $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langkah 3: Solusi untuk nilai eigen λ_1 dan λ_3 adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) \right) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_2(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) \right) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{12.12}$$

Langkah 4: Karena terdapat vektor kompleks eigen lain, yaitu $\boldsymbol{\xi}_2$ dan $\boldsymbol{\xi}_4$.

Langkah 5: Ambil $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, maka $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Langkah 6: Solusi untuk nilai eigen λ_2 dan λ_4 adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(t) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_4(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{12.13}$$

Langkah 7: Solusi umum dari (12.11) adalah

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai pengertian sistem PD linear homogen dimensi-n dan penyelesaiannya, kerjakanlah latihan berikut!

1. Diberikan sistem PD linear berikut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & k & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

   Tentukan nilai k agar sistem PD tersebut memiliki nilai eigen kompleks yang bagian imajinernya tak nol.

2. Carilah solusi homogen dari PD linear berikut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

3. Diberikan sebuah sistem PD linear homogen berikut

$$\frac{dx}{dt} = -3x + 2z, \quad \frac{dy}{dt} = x - y, \quad \frac{dz}{dt} = -2x - y$$

   Tentukan solusi umum dari sistem PD tersebut.

4. Carilah solusi umum sistem PD dimensi-4 berikut

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

5. Diberikan suatu sistem tiga pegas dengan dua buah massa yang dirumuskan dalam PD berikut

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2$$
$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2$$

   Jika $m_1 = m_2 = 2$, dan $k_1 = k_2 = k_3 = 6$. Tentukan solusi umum dari sistem PD tersebut.

JAWABAN LATIHAN 12.2

1. Polinomial karakteristik matriks A adalah

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & k & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 15 - 2k).$$

Sehingga agar terdapat nilai eigen kompleks yang bagian imajinernya tak nol, maka haruslah diskriminan dari polinomial $\lambda^2 - 2\lambda - 15 - 2k$ negatif.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-15-2k) = 64 + 8k < 0 \implies k < -8.$$

Jadi nilai k yang memenuhi adalah $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < -8\}$.

2. Nilai eigen dari matriks adalah

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 - 2i, \quad \lambda_3 = 1 + 2i.$$

dan vektor eigen yang berkoresponden dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Selanjutnya didapatkan masing-masing solusi $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ dan $\mathbf{x}_3$ sebagai berikut

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t \\
\mathbf{x}_2(t) &= e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} e^t \\
\mathbf{x}_3(t) &= e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} e^t
\end{aligned}$$

Jadi solusi umum dari sistem PD tersebut adalah

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} e^t.$$

3. Misalkan $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, maka sistem PD tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

Selanjutnya nilai eigen dari matriks tersebut adalah

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1 + \sqrt{2}i, \quad \lambda_3 = -1 - \sqrt{2}i$$

dengan masing-masing vektor eigen

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2}i \\ -1-\sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2}i \\ -1+\sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dari vektor eigen $\boldsymbol{\xi}_2$ dan $\boldsymbol{\xi}_3$ dapat diperoleh solusi kompleks

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\cos(\sqrt{2}t) - \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\sin(\sqrt{2}t)\right) = e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ -\cos(\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 3\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\sin(\sqrt{2}t) + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\cos(\sqrt{2}t)\right) = e^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ -\sin(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 3\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

Sehingga solusi umum dari sistem PD tersebut adalah

$$\mathbf{y}(t) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ -\cos(\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 3\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix} 2\sin(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ -\sin(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 3\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}e^{-t}.$$

4. Nilai eigen dari matriks adalah

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 1+\sqrt{2}i \quad \lambda_4 = 1-\sqrt{2}i$$

dan vektor eigen yang berkoresponden dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 1-5\sqrt{2}i \\ 0 \\ 1-\sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1+5\sqrt{2}i \\ 0 \\ 1+\sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dengan mudah didapatkan solusi untuk $\mathbf{y}_1$ dan $\mathbf{y}_2$ adalah

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t}, \quad \mathbf{y}_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}e^{5t}$$

dan untuk $\mathbf{y}_3$ dan $\mathbf{y}_4$ karena bilangan kompleks maka solusinya adalah

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\cos(\sqrt{2}t) - \begin{pmatrix} -5\sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\sin(\sqrt{2}t)\right) = e^{t}\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t)+5\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 0 \\ \cos(\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 3\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_4(t) = e^{t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\sin(\sqrt{2}t) + \begin{pmatrix} -5\sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\cos(\sqrt{2}t)\right) = e^{t}\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{2}t)-5\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 0 \\ \sin(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 3\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

Jadi solusi umum dari sistem PD tersebut adalah

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) + 5\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 0 \\ \cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 3\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} e^t + c_4 \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{2}t) - 5\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 0 \\ \sin(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 3\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} e^t.$$

5. Subtitusi nilai variabel yang diketahui sehingga diperoleh sistem PD

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -6x_1 + 3x_2 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= 3x_1 - 6x_2 \end{aligned}$$

Dapat kita misalkan $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1'$, $y_4 = x_2'$, sehingga diperoleh informasi

$$\begin{aligned} y_1' &= x_1' = y_3, \\ y_2' &= x_2' = y_4, \\ y_3' &= x_1'' = -6x_1 + 3x_2 = -6y_1 + 3y_2, \\ y_4' &= x_2'' = 3x_1 - 6x_2 = 3y_1 - 6y_2. \end{aligned}$$

atau jika dituliskan dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

sehingga untuk mencari solusinya dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti contoh-contoh sebelumnya. Nilai eigen dari matriks tersebut adalah

$$\lambda_1 = 3i, \quad \lambda_2 = -3i, \quad \lambda_3 = \sqrt{3}i, \quad \lambda_4 = -\sqrt{3}i$$

dan vektor eigen yang berkoresponden dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ i \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}i \\ -\sqrt{3}i \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}i \\ \sqrt{3}i \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Untuk masing-masing pasangan vektor eigen dapat dikelompokkan yaitu $\boldsymbol{\xi}_1$ dan $\boldsymbol{\xi}_2$ serta $\boldsymbol{\xi}_3$ dan $\boldsymbol{\xi}^{(4)}$. Solusi untuk $\boldsymbol{\xi}_1$ dan $\boldsymbol{\xi}_2$ adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(t) &= e^0 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(3t) - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(3t) \right) = \begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \sin(3t) \\ -3\cos(3t) \\ 3\cos(3t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}_2(t) &= e^0 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \sin(3t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(3t) \right) = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ -\cos(3t) \\ -3\sin(3t) \\ 3\sin(3t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dan untuk $\boldsymbol{\xi}_3$ dan $\boldsymbol{\xi}^{(4)}$ adalah

$$\mathbf{y}_3(t) = e^0 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) - \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ 3\cos(\sqrt{3}t) \\ 3\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_4(t) = e^0 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) + \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ 3\sin(\sqrt{3}t) \\ 3\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

Sehingga solusi umum dari sistem PD tersebut adalah

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \sin(3t) \\ -3\cos(3t) \\ 3\cos(3t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ -\cos(3t) \\ -3\sin(3t) \\ 3\sin(3t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ 3\cos(\sqrt{3}t) \\ 3\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ 3\sin(\sqrt{3}t) \\ 3\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}.$$

Karena yang diminta adalah solusi untuk x_1 dan x_2, maka solusi masing-masingnya adalah

$$x_1(t) = -c_1\sin(3t) + c_2\cos(3t) + c_3\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) - c_4\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t)$$
$$x_2(t) = c_1\sin(3t) - c_2\cos(3t) + c_3\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) - c_4\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t)$$

dengan c_1, c_2, c_3, c_4 sebarang konstanta.

TES FORMATIF

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1. Diberikan sistem PD linear homogen dimensi-3 berikut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

   Banyaknya nilai eigen yang bagian imajinernya tak nol adalah

   (a) 0

   (b) 1

   (c) 2

   (d) 3

2.