EAS **GASAL 2023/2024**	**Mata Kuliah**	: Aljabar 1
	Semester	: Gasal
	Hari/Tgl	: Rabu/13 Desember 2023
	Waktu/Sifat	: 100 menit/Tutup
	Dosen	: Prof. Subiono, MS; Dian Winda S., M.Si; Soleha M.Si;

HARAP DIPERHATIKAN !!!
Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan sesuai dengan aturan akademik yang berlaku di ITS

1. Diberikan homomorfisma $\theta : \mathbb{Z}_{24} \to S_8$ di mana $\theta([1]_{24}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$. Dapatkan $\ker(\theta)$ dan $\theta([10]_{24})$. Jelaskan!
2. Diberikan suatu grup siklik G dan N adalah sebarang subgroup normal dari G. Maka tunjukkan bahwa grup faktor G/N adalah grup siklik.
3. (a) Tentukan semua anggota dari $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$.
   (b) Apakah $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) \cong \mathbb{U}(12)$? Jelaskan jawaban Anda.
4. Diberikan grup $\mathbb{U}(8)$ dengan $H_1 = \{[1]_8, [3]_8\}$ dan $H_2 = \{[1]_8, [7]_8\}$ adalah subgrup dari $\mathbb{U}(8)$. Tunjukkan bahwa $\mathbb{U}(8)$ adalah jumlah langsung (*internal direct product*) dari H_1 dan H_2. Jelaskan!

Solusi:

1. Karena θ adalah homomorfisma, maka jelas memenuhi $\theta(a+b) = \theta(a) \circ \theta(b)$. Sehingga dari "sebiji" informasi diatas, bisa didapatkan

   - $\theta([2]_{24}) = \theta([1]_{24} + [1]_{24}) = \theta([1]_{24}) \circ \theta([1]_{24}) = \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix}$
   - $\theta([3]_{24}) = \theta([2]_{24} + [1]_{24}) = \theta([2]_{24}) \circ \theta([1]_{24}) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$
   - $\theta([4]_{24}) = \theta([3]_{24} + [1]_{24}) = \theta([3]_{24}) \circ \theta([1]_{24}) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$

   Dengan cara yang sama untuk semua elemen di $\mathbb{Z}_{24}$, bisa didapatkan relasi sebagai berikut

   - $\theta([0]_{24}) = \theta([4]_{24}) = \theta([8]_{24}) = \theta([12]_{24}) = \theta([16]_{24}) = \theta([20]_{24}) = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$
   - $\theta([1]_{24}) = \theta([5]_{24}) = \theta([9]_{24}) = \theta([13]_{24}) = \theta([17]_{24}) = \theta([21]_{24}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
   - $\theta([2]_{24}) = \theta([6]_{24}) = \theta([10]_{24}) = \theta([14]_{24}) = \theta([18]_{24}) = \theta([22]_{24}) = \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix}$
   - $\theta([3]_{24}) = \theta([7]_{24}) = \theta([11]_{24}) = \theta([15]_{24}) = \theta([19]_{24}) = \theta([23]_{24}) = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}$

   Karena identitas grup S_8 adalah $\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}$, maka $\ker(\theta) = \{[0]_{24}, [4]_{24}, [8]_{24}, [12]_{24}, [16]_{24}, [20]_{24}\}$. Kemudian dari informasi diatas dapat dilihat bahwa $\theta([10]_{24}) = \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix}$.

2. Karena G adalah grup siklik, maka $G = \langle a \rangle = \{e, a, a^2, \ldots\}$ untuk suatu $a \in G$. Kemudian dengan menggunakan definisi grup faktor/kuasi, didapatkan elemen dari G/N adalah $\{N, N_a, N_{a^2}, N_{a^3}, \ldots\}$. Lalu dapat ditinjau kembali bahwa $G/N = \langle N_a \rangle$ yang dimana N_a adalah generator untuk grup faktor G/N. Sehingga terbukti bahwa G/N adalah grup siklik.

3. (a) $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$ adalah grup yang himpunannya adalah fungsi $\varphi : \mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{12}$ yang bersifat isotomorfik (bijektif dan homomorfik) dan operasinya terhadap kompsisi fungsi.
   Dari contoh soal pada slide materi Prof. Subiono Nomor 2, trik yang diberikan secara tersirat adalah mencari bilangan asli apa saja yang relatif prima dengan 12[1]. Terdapat 4 bilangan yang relatif prima dengan 12, yaitu 1, 5, 7, dan 11. Sehingga defisikan fungsi isomorfisma φ sebagai berikut

[1]Untuk $\mathbb{Z}_n$ secara umum dicari bilangan apa saja yang relatif prima dengan n

- $\varphi_1(x) = [x]_{12}$
- $\varphi_5(x) = 5[x]_{12}$
- $\varphi_7(x) = 7[x]_{12}$
- $\varphi_{11}(x) = 11[x]_{12}$

$\therefore$ $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) = \{\varphi_1, \varphi_5, \varphi_7, \varphi_{11}\}$.

(b) Karena $|\operatorname{Aut}(\mathbb{Z}_{12})| = 4$ dan $|\mathbb{U}(12)| = 4$, maka kita buat spekulasi bahwa kedua grup saling isotomorfik. Cara menunjukkan keisomorfikan antara dua grup adalah dengan mencari suatu fungsi homomorfisma dan bijektif yang memetakan elemen satu grup $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$ ke elemen grup $\mathbb{U}(12)$ atau sebaliknya.

Sebenarnya soal ini berhubungan dengan trik sebelumnya yaitu mencari bilangan yang relatif prima dengan 12, seperti halnya anggota dari $\mathbb{U}(12)$.

Jadi kita definisikan saja fungsi $\Theta : \text{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) \to \mathbb{U}(12)$ sebagai $\Theta(\varphi_i) = i$ untuk $i \in \mathbb{U}(12)$. Dengan demikian, Θ pastilah isomorfisma antara $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{12})$ dan $\mathbb{U}(12)$[2].

$\therefore$ $\text{Aut}(\mathbb{Z}_{12}) \cong \mathbb{U}(12)$.

4. Kita mulai dengan menuliskan ulang definisi dari hasil kali langsung dalam.

Definisi. *grup G adalah hasil kali langsung dalam dari H_1 dan H_2 jika memenuhi kondisi berikut*

(1) H_1 dan H_2 adalah subgrup normal dari G.

(2) $H_1 \cap H_2 = \{e\}$.

(3) $G = H_1H_2 = \{h_1h_2 \,|\, h_1 \in H_1, h_2 \in H_2\}$.

Karena $\mathbb{U}(8)$ komutatif, maka subgrupnya pastilah normal. Jadi H_1 dan H_2 adalah subgrup normal dari $\mathbb{U}(8)$. Kemudian dengan mudah diperoleh bahwa $H_1 \cap H_2 = \{[1]_8\}$ yang merupakan identitas dari $\mathbb{U}(8)$. Selanjutnya tinjau

$$H_1H_2 = \{[1]_8 \cdot [1]_8, [1]_8 \cdot [7]_8, [3]_8 \cdot [1]_8, [3]_8 \cdot [7]_8\} = \{[1]_8, [7]_8, [3]_8, [5]_8\} = \mathbb{U}(8)$$

Sehingga $\mathbb{U}(8)$ adalah *internal direct product* dari H_1 dan H_2.

[2]Jika mau dibuktikan keisomorfikan silahkan tambahin sendiri:D