



**PROPOSAL TUGAS AKHIR - SM234801**

# **LATIN SQUARE KOMUTATIF ATAS ALJABAR MAX-PLUS**

**TEOSOFI HIDAYAH AGUNG**

NRP 5002221132

Dosen Pembimbing

**Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.**

NIP 19890911 201404 1 001

**Program Sarjana**

Departemen Matematika

Fakultas Sains dan Analitika Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2025



**FINAL PROJECT PROPOSAL - SM234801**

# **COMMUTATIVE LATIN SQUARE OVER MAX-PLUS ALGEBRA**

**TEOSOFI HIDAYAH AGUNG**

NRP 5002221132

Supervisor

**Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.**

NIP 19890911 201404 1 001

**Bachelor Program**

Department of Mathematics

Faculty of Scientics

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2025

# LEMBAR PENGESAHAN

Latin Square Komutatif atas Aljabar Max-Plus

*Commutative Latin Square over Max-Plus Algebra*

## PROPOSAL TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat  
memperoleh gelar Sarjana Matematika pada  
Program Studi S-1 Matematika  
Departemen Matematika  
Fakultas Sains dan Analitika Data  
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh: **Teosofi Hidayah Agung**  
NRP. 5002221132

Menyetujui,  
Dosen Pembimbing

Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.  
NIP. 19890911 201404 1 001

Mengetahui,  
Kepala Program Studi Sarjana  
Departemen Matematika FSAD-ITS

Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.  
NIP. 19890911 201404 1 001

Surabaya,  
Agustus 2025

# ABSTRAK

## Latin Square Komutatif atas Aljabar Max-Plus

Nama Mahasiswa / NRP : Teosofi Hidayah Agung / 5002221132  
Departemen : Matematika FSAD -ITS  
Dosen Pembimbing : Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.

### Abstrak

Persegi Latin berordo  $n$  adalah matriks  $n \times n$  yang memuat  $n$  simbol sehingga setiap simbol muncul tepat satu kali pada setiap baris dan kolom. Dalam penelitian ini, kami mengkaji persegi Latin komutatif yang dikonstruksi dalam kerangka aljabar max-plus, yaitu semiring idempoten pada  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  dengan operasi  $\oplus$  sebagai maksimum dan  $\otimes$  sebagai penjumlahan. Fokus kajian meliputi: (i) perumusan definisi formal “persegi Latin komutatif atas aljabar max-plus” pada himpunan hingga melalui skema normalisasi agar keluaran operasi kembali ke himpunan simbol; (ii) kondisi perlu/cukup bagi eksistensi; (iii) metode konstruksi eksplisit beserta prosedur verifikasi; dan (iv) studi kasus, enumerasi awal, serta sifat-sifat aljabar yang menyertainya. Kontribusi diharapkan pada jembatan antara desain kombinatorial (persegi Latin/kuasigrup) dan aljabar tropis, sekaligus membuka potensi aplikasi pada penjadwalan tropis dan pemodelan sistem kejadian diskret.

**Kata kunci:** *persegi Latin; komutatif; kuasigrup; aljabar max-plus; aljabar tropis; normalisasi*

# ABSTRACT

## Commutative Latin Square over Max-Plus Algebra

Student Name / NRP : Teosofi Hidayah Agung / 5002221132  
Departement : Mathematics SCIENTICS - ITS  
Supervisor : Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.

### Abstract

A Latin square of order  $n$  is an  $n \times n$  array on  $n$  symbols such that each symbol appears exactly once in every row and column. We investigate commutative Latin squares constructed within the max-plus algebra framework, i.e., an idempotent semiring on  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  with  $\oplus$  as maximum and  $\otimes$  as addition. Our focus includes: (i) a formal definition of “commutative Latin squares over max-plus algebra” on finite symbol sets via a normalization scheme so that the operation maps back into the set; (ii) necessary/sufficient conditions for existence; (iii) explicit construction methods together with verification procedures; and (iv) case studies, initial enumeration, and accompanying algebraic properties. The expected contributions lie at the interface of combinatorial design (Latin squares/quasigroups) and tropical algebra, with potential applications to tropical scheduling and discrete-event system modeling.

**Keywords:** *Latin square; commutative; quasigroup; max-plus algebra; tropical algebra; normalization*

## DAFTAR ISI

LEMBAR PENGESAHAN	i
ABSTRAK	ii
ABSTRACT	iii
DAFTAR ISI	iv
DAFTAR GAMBAR	v
DAFTAR TABEL	vi
DAFTAR SIMBOL	vii
BAB I     PENDAHULUAN	1
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Rumusan Masalah .....	1
1.3 Batasan Masalah .....	2
1.4 Tujuan .....	2
1.5 Manfaat .....	2
BAB II    TINJAUAN PUSTAKA	4
2.1 Hasil Penelitian Terdahulu .....	4
2.2 Persegi Latin, Kuasigrup, dan Komutativitas .....	4
2.3 Aljabar Max-Plus .....	4
2.4 Celah Riset dan Arah Penelitian .....	5
2.5 Ringkasan .....	5
BAB III   METODOLOGI	6
3.1 Desain Penelitian .....	6
3.2 Perumusan Masalah dan Model .....	6
3.3 Metode Konstruksi .....	6
3.4 Verifikasi dan Analisis .....	6
3.5 Hasil yang Diharapkan .....	6
3.6 Penulisan Laporan .....	7
DAFTAR PUSTAKA	9

## DAFTAR GAMBAR

## DAFTAR TABEL

Tabel 2.1	Ringkasan Literatur terkait Max-Plus Algebra dan Latin Squares . . .	4
Tabel 3.1	Jadwal Pelaksanaan Penelitian Tugas Akhir . . . . .	8



## DAFTAR SIMBOL

$\alpha$  : Sudut serang

$\beta$  : Sudut slip sampling

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Persegi Latin (Latin square) berordo  $n$  adalah sebuah matriks berukuran  $n \times n$  yang diisi oleh  $n$  simbol sedemikian sehingga setiap simbol muncul tepat satu kali pada setiap baris dan setiap kolom. Struktur kombinatorial ini memainkan peranan penting dalam berbagai bidang, seperti desain eksperimen, teori kode, kriptografi, penjadwalan, dan teori graf. Dari sudut pandang aljabar, setiap persegi Latin berkaitan erat dengan konsep kuasigrup, yakni himpunan beroperasi biner yang tabel Cayley-nya merupakan persegi Latin. Sifat komutatif pada persegi Latin merefleksikan komutativitas operasi yang melandasinya, dan membawa konsekuensi struktural yang khas terhadap simetri dan isotopi.

Di sisi lain, aljabar tropis—khususnya aljabar max-plus—telah menjadi medan kajian yang berkembang pesat. Aljabar max-plus adalah semiring idempoten pada  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  dengan operasi  $a \oplus b = \max\{a, b\}$  dan  $a \otimes b = a + b$ . Kerangka ini telah terbukti efektif untuk memodelkan sistem kejadian diskret, penjadwalan, optimisasi, dan analisis jaringan karena sifat idempotensi dan keteraturan parsial yang kuat. Selain itu, studi pada kerangka tropis juga muncul dalam konteks kriptografi dan protokol kunci publik, yang menyoroti aspek keamanan dan implementasi dalam semiring idempoten ( $?, ?, ?$ ). Meskipun demikian, interaksi antara objek kombinatorial klasik seperti persegi Latin dengan struktur aljabar max-plus relatif belum banyak dieksplorasi, khususnya ketika kita membatasi perhatian pada persegi Latin komutatif.

Penelitian ini memfokuskan diri pada “Latin Square Komutatif atas Aljabar Max-Plus”: merumuskan dan mengkaji cara-cara membangun, mengarakterisasi, serta memverifikasi persegi Latin komutatif yang diturunkan dari operasi max-plus pada himpunan hingga. Secara khusus, kami meninjau skema pelabelan/normalisasi agar hasil operasi max-plus pada pasangan elemen kembali ke himpunan simbol yang terbatas sehingga memenuhi sifat Latin. Kajian ini diharapkan membuka jembatan antara aljabar tropis dan desain kombinatorial, sekaligus menyediakan metode konstruksi baru dengan potensi aplikasi pada penjadwalan berbasis tropis dan pemodelan sistem diskret.

### 1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang diangkat pada penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana merumuskan definisi yang ketat tentang “persegi Latin (komutatif) atas aljabar max-plus” pada himpunan simbol hingga, termasuk mekanisme pelabelan/normalisasi hasil operasi agar tetap berada dalam himpunan tersebut?
2. Kondisi apa yang diperlukan dan/atau cukup bagi eksistensi persegi Latin komutatif berordo  $n$  yang dibangun dari struktur max-plus tertentu (misalnya pada  $S = \{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subset \mathbb{Z}$  atau  $\mathbb{R}$ )?
3. Bagaimana prosedur konstruksi eksplisit (berbasis parameter) untuk menghasilkan keluarga persegi Latin komutatif berordo  $n$  dalam kerangka max-plus, dan bagaimana kompleksitas verifikasi?

4. Sifat-sifat aljabar apa (misalnya identitas netral, idempoten, isotopi/autotopi) yang tetap, berubah, atau muncul khas ketika persegi Latin dibangun melalui operasi max-plus dan normalisasi terkait?
5. Untuk orde kecil hingga menengah, seperti apa hasil enumerasi dan klasifikasi (hingga isotopi/isosimetri) persegi Latin komutatif di bawah skema konstruksi yang diusulkan?

### 1.3 Batasan Masalah

Batasan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut :

1. Himpunan simbol  $S$  yang dipertimbangkan adalah himpunan hingga  $S = \{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subset \mathbb{Z}$  atau  $\mathbb{R}$ , dengan operasi max-plus  $\oplus$  dan  $\otimes$  dibatasi melalui suatu pemetaan normalisasi  $\varphi : S \times S \rightarrow S$  yang dipilih agar sifat Latin terpenuhi.
2. Fokus pada persegi Latin komutatif, yaitu tabel yang simetris terhadap diagonal utama ( $L(i, j) = L(j, i)$ ) dan merefleksikan komutativitas operasi yang melandasinya.
3. Analisis teoretis dilengkapi studi kasus dan verifikasi komputasional untuk orde kecil hingga menengah; penetapan batas orde mengikuti kebutuhan bukti/komputasi dan ketersediaan waktu.
4. Pembahasan diarahkan pada aspek struktur dan konstruksi; aplikasi praktis (misal implementasi industri skala besar) tidak menjadi fokus utama, kecuali disinggung sebagai motivasi.
5. Tidak semua varian aljabar tropis ditinjau; perhatian utama pada semiring max-plus idempoten.

### 1.4 Tujuan

1. Merumuskan definisi formal persegi Latin komutatif atas aljabar max-plus pada himpunan hingga beserta skema normalisasi yang konsisten.
2. Menurunkan kondisi perlu/cukup (ketika memungkinkan) bagi eksistensi dan komutativitas persegi Latin yang dibangun dari struktur max-plus.
3. Mengembangkan metode konstruksi eksplisit dan prosedur verifikasi komputasional untuk menghasilkan dan menguji persegi Latin komutatif berordo  $n$ .
4. Melakukan studi kasus, contoh, serta (bila dimungkinkan) klasifikasi untuk orde kecil hingga menengah, berikut analisis sifat-sifat aljabarnya.
5. Mendiskusikan implikasi dan potensi aplikasi hasil kajian pada penjadwalan tropis dan desain kombinatorial.

### 1.5 Manfaat

1. Kontribusi teoretis pada persilangan antara desain kombinatorial (persegi Latin/kuasigrup) dan aljabar tropis (max-plus), berupa definisi, konstruksi, dan karakterisasi baru.

2. Menyediakan pendekatan konstruktif yang dapat direplikasi untuk membangun persegi Latin komutatif di domain yang tidak konvensional (tropis/idempoten).
3. Bahan awal untuk pengembangan alat verifikasi komputasional persegi Latin dalam kerangka max-plus, berguna untuk eksplorasi orde yang lebih besar.
4. Menambah alternatif model dan inspirasi aplikasi pada penjadwalan, optimisasi diskret, dan desain eksperimen dalam perspektif tropis.
5. Menjadi referensi dan bahan ajar untuk topik terkait aljabar max-plus, kombinatorika, dan struktur aljabar non-klasik.

## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Hasil Penelitian Terdahulu

Penulis	Tahun	Judul	Rangkuman
Muhammad Zulfikar Zufar	2023	Kontruksi Grup Latin Square pada Aljabar Max-Plus	
Muhammad Syifa'ul Mufid and Subiono	2014	Eigenvalues and eigenvectors of Latin Squares In Max-plus Algebra	Diselesaikan Permasalahan Eigen dari <i>latin square</i> pada Aljabar Max-plus dengan Memperhatikan Permutasi dari Angka-angka pada <i>latin square</i> Tersebut.
Kasie G Farlow	2009	Max-Plus Algebra	Dibahas Mengenai Beberapa Hal Terkait Aljabar Max-plus, dan Salahsatu Hal Menarik yang Dibahas pada Paper ini adalah Aljabar Linear pada Aljabar Max-plus.
Fazal Abbas and Mubasher Umer and Umar Hayat and Ikram Ullah	2022	Trivial and Nontrivial eigenvectors for <i>latin squares</i> in Max-Plus Algebra	Mengkaji Permasalahan Eigen pada <i>Non-Symmetric</i> Latin Square pada Aljabar Max-plus.

Tabel 2.1 Ringkasan Literatur terkait Max-Plus Algebra dan Latin Squares

#### 2.2 Persegi Latin, Kuasigrup, dan Komutativitas

Persegi Latin berordo  $n$  adalah matriks  $n \times n$  yang memuat  $n$  simbol sehingga setiap simbol muncul tepat satu kali pada setiap baris dan setiap kolom. Struktur ini berkorespondensi dengan kuasigrup pada himpunan simbol melalui operasi biner yang tabel Cayley-nya adalah persegi Latin. Komutativitas pada persegi Latin dicirikan oleh kesimetrian terhadap diagonal utama, yaitu  $L(i, j) = L(j, i)$  untuk seluruh indeks  $i, j$ .

#### 2.3 Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus didefinisikan pada  $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  dengan  $a \oplus b = \max\{a, b\}$  dan  $a \otimes b = a + b$ . Struktur ini merupakan semiring idempoten dan banyak digunakan pada penjadwalan, optimisasi, dan sistem kejadian diskret. Sejumlah kajian dalam kerangka

tropis juga muncul di bidang kriptografi dan keamanan protokol, yang memperlihatkan relevansi struktur idempoten dalam konteks komputasi dan implementasi (?, ?, ?).

## 2.4 Celah Riset dan Arah Penelitian

Keterhubungan langsung antara persegi Latin (terutama yang komutatif) dengan konstruksi berbasis aljabar max-plus relatif belum dieksplorasi luas. Tantangan utama ialah memastikan hasil operasi biner kembali ke himpunan simbol hingga. Untuk itu, diperlukan skema normalisasi  $\varphi : S \times S \rightarrow S$  yang menjaga sifat Latin (keunikan tiap baris/kolom) sekaligus komutativitas. Pendekatan ini, disertai verifikasi berbantuan komputer dan perbandingan dengan praktik di ranah tropis lainnya (?, ?), menjadi dasar arah penelitian ini, dengan acuan penulisan dari karya-karya terkait (?, ?).

## 2.5 Ringkasan

Tinjauan menunjukkan peluang kontribusi pada definisi, konstruksi, dan karakterisasi persegi Latin komutatif di lingkungan max-plus, serta potensi aplikasi pada penjadwalan tropis dan desain kombinatorial.

## BAB III METODOLOGI

Pada bab ini dijelaskan langkah-langkah pelaksanaan penelitian tugas akhir beserta alur proses dan jadwal kegiatan.

### 3.1 Desain Penelitian

Penelitian bersifat teoretis-konstruktif yang dilengkapi verifikasi komputasional. Targetnya adalah perumusan definisi, penurunan kondisi eksistensi, serta konstruksi eksplisit untuk persegi Latin komutatif atas aljabar max-plus pada himpunan simbol hingga.

### 3.2 Perumusan Masalah dan Model

1. Ditetapkan himpunan simbol hingga  $S = \{a_0, \dots, a_{n-1}\} \subset \mathbb{Z}$  atau  $\mathbb{R}$ .
2. Didefinisikan operasi dasar max-plus  $\oplus, \otimes$  pada  $S$  dan skema normalisasi  $\varphi : S \times S \rightarrow S$  sehingga operasi efektif  $\star$  pada  $S$  diberikan oleh  $(x \star y) := \varphi(x \otimes y)$  atau varian yang relevan.
3. Kriteria Latin: untuk tabel  $L$  berindeks  $0, \dots, n-1$ , setiap baris/kolom memuat tiap simbol tepat sekali. Kriteria komutatif:  $L(i, j) = L(j, i)$ .

### 3.3 Metode Konstruksi

1. **Skema parametris:** tentukan parameter (mis. vektor offset, fungsi pengurutan, atau kelas residu) yang menginduksi  $\varphi$  agar tabel memenuhi sifat Latin.
2. **Algoritme generatif:** bangun  $L$  baris demi baris berdasarkan  $\star$  dan cek keunikan baris/kolom; gunakan pencarian mundur (backtracking) bila perlu.
3. **Komutativitas:** paksa kesimetrian  $L(i, j) = L(j, i)$  selama konstruksi untuk memangkas ruang pencarian.

### 3.4 Verifikasi dan Analisis

1. **Verifikasi Latin:** uji programatik bahwa tiap baris/kolom memuat semua simbol tanpa pengulangan.
2. **Sifat aljabar:** telaah identitas (jika ada), idempoten, dan hubungan isotopi/autotopi.
3. **Studi kasus:** enumerasi untuk orde kecil–menengah; bandingkan pola dan kelas kesetaraan.

### 3.5 Hasil yang Diharapkan

Definisi formal, kondisi eksistensi (perlu/cukup bila memungkinkan), prosedur konstruksi, contoh dan klasifikasi awal, serta diskusi implikasi pada penjadwalan tropis dan desain kombinatorial. Referensi pada praktik tropis di domain lain memberikan konteks metodologis dan justifikasi verifikasi komputasional (?, ?, ?).

### **3.6 Penulisan Laporan**

Penyusunan laporan mengikuti format yang ditetapkan, meliputi Bab I–III pada proposal dan pengembangan lebih lanjut pada naskah akhir.



## JADWAL PENELITIAN

Berikut jadwal pelaksanaan tahap-tahap penelitian tugas akhir yang akan dilakukan selama 3 bulan sesuai dengan metode penelitian.

Tabel 3.1 Jadwal Pelaksanaan Penelitian Tugas Akhir

NO	NAMA KEGIATAN	BULAN											
		1				2				3			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	Studi literatur dan perumusan masalah												
2	Perancangan skema normalisasi dan model operasi												
3	Pengembangan algoritme konstruksi dan verifikasi												
4	Eksperimen dan enumerasi orde kecil-menengah												
5	Analisis hasil dan karakterisasi aljabar												
6	Penyusunan kesimpulan dan saran												
7	Penulisan laporan proposal/TA												

## DAFTAR PUSTAKA