Contoh 3.8. Selesaikan masalah getaran dawai

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, \quad t > 0$$

dengan kondisi awal dan batas

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \ell, \\ u_t(x,0) &= g(x), && 0 \le x \le \ell, \\ u(0,t) &= 0, && t \ge 0 \\ u(\ell,t) &= 0, && t \ge 0. \end{aligned} \tag{3.151}$$

Penyelesaian:
Misal solusinya adalah $u(x,t) = X(x)T(t) \neq 0$, maka PDP menjadi

$$XT'' - c^2 X''T = 0 \Rightarrow c^2 X''T = XT'' \Rightarrow \frac{X''}{X} = \frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda \tag{3.152}$$

sehingga diperoleh 2 PDB yaitu

$$\frac{X''}{X} = \lambda \tag{3.153}$$

$$\frac{1}{c^2}\frac{T''}{T} = \lambda \tag{3.154}$$

dengan kondisi batas

$$\begin{aligned} u(0,t) &= 0, & u(\ell,t) &= 0 & & \\ X(0)T(t) &= 0, & X(\ell)T(t) &= 0, & T(t) &\neq 0 \\ X(0) &= 0, & X(\ell) &= 0. & & \end{aligned} \tag{3.155}$$

Selesaikan persamaan (3.153) dengan $X(0) = 0$ dan $X(\ell) = 0$, amati kondisi ketika $\lambda > 0$, $\lambda = 0$, dan $\lambda < 0$.

a.) Saat $\lambda > 0$ maka

$$X'' - \lambda X = 0 m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow (m + \sqrt{\lambda})(m - \sqrt{\lambda}) = 0 \Rightarrow m_1 = -\sqrt{\lambda}, \quad m_2 = \sqrt{\lambda}$$

$$\Rightarrow X(x) = Ae^{-\sqrt{\lambda}x} + Be^{\sqrt{\lambda}x} \tag{3.156}$$

Untuk kondisi batas $X(0) = 0$ diperoleh $A + B = 0$ atau $A = -B$. Untuk kondisi batas $X(\ell) = 0$ maka

$$\begin{aligned} Ae^{-\sqrt{\lambda}\ell} + Be^{\sqrt{\lambda}\ell} &= 0 \\ -Be^{-\sqrt{\lambda}\ell} + Be^{\sqrt{\lambda}\ell} &= 0 \\ B(e^{\sqrt{\lambda}\ell} - e^{-\sqrt{\lambda}\ell}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.157}$$

Diperoleh $B = 0$ dan $A = 0$, sehingga solusi menjadi trivial karena $X(x) = 0$.

b.) Saat $\lambda = 0$ maka

$$X'' = 0 \Rightarrow X(x) = A + Bx \tag{3.158}$$

Untuk kondisi batas $X(0) = 0$ diperoleh $A = 0$, dan untuk $X(\ell) = 0$ maka $B\ell = 0$, didapat $B = 0$ sebab $\ell \neq 0$. Sehingga $X(x) = 0$, yang mengakibatkan solusinya menjadi trivial.

c.) Saat $\lambda < 0$ maka

$$X'' - \lambda X = 0 m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m^2 = -(-\lambda) = -\lambda \Rightarrow m = \pm i\sqrt{-\lambda}, \quad \lambda < 0 \text{ atau } -\lambda > 0$$

$$X(x) = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x) \tag{3.159}$$

Untuk kondisi batas $X(0) = 0$ diperoleh $A = 0$, dan untuk $X(\ell) = 0$ maka $B\sin(\sqrt{-\lambda}\ell) = 0$. Agar solusinya tak trivial maka $B \neq 0$ dan $\sin(\sqrt{-\lambda}\ell) = 0$. Perhatikan bahwa

$$\sin(\sqrt{-\lambda}\ell) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\ell = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

atau

$$-\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \tag{3.160}$$

Dalam hal ini λ_n adalah *eigen value* dan $\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)$ dengan $n = 1, 2, 3, \ldots$ adalah *eigen function*. Sehingga diperoleh

$$X_n(x) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{3.161}$$

Selesaikan persamaan (3.154) dengan $\lambda < 0$, maka

$$T'' - \lambda c^2 T = 0 \Rightarrow m^2 - \lambda c^2 = 0 \Rightarrow m^2 = \lambda c^2 < 0 \Rightarrow m = \pm ic\sqrt{-\lambda}$$

$$T(t) = C\cos(c\sqrt{-\lambda}t) + D\sin(c\sqrt{-\lambda}t) \tag{3.162}$$

Substitusi $\sqrt{-\lambda} = \frac{n\pi}{\ell}$ maka diperoleh

$$T_n(t) = C_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + D_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) \tag{3.163}$$

dengan C_n, D_n adalah konstanta sebarang. Oleh karena itu, solusi PDP-nya adalah:

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= B_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[C_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + D_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right] \\ &= \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right] \end{aligned} \tag{3.164}$$

dimana $a_n = B_nC_n$, $b_n = B_nD_n$, dan $n = 1, 2, 3, \ldots$, sehingga didapat

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right]. \tag{3.165}$$

Masukkan kondisi awal $u(x,0) = f(x)$ dan $u_t(x,0) = g(x)$:

- Untuk $u(x,0) = f(x)$ maka

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = f(x) \quad \to \text{Deret Fourier Sinus}$$

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \tag{3.166}$$

- Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[a_n\cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n\sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right] \\ u_t &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[-a_n\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)\sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)\cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right] \end{aligned}$$

  sehingga untuk $u_t(x,0) = g(x)$ didapat

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) = g(x) \quad \to \text{Deret Fourier Sinus}$$

$$b_n\left(\frac{cn\pi}{\ell}\right) = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$

$$\Rightarrow b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^{\ell} g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \tag{3.168}$$

Jadi solusi permasalahan getaran dawai $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0,\ 0 < x < \ell,\ t > 0$ dengan kondisi awal dan batas

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), & 0 \le x \le \ell \\ u_t(x,0) &= g(x), & 0 \le x \le \ell \\ u(0,t) &= 0, & t \ge 0 \\ u(\ell,t) &= 0, & t \ge 0 \end{aligned}$$

adalah

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[a_n\cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n\sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right]$$

dengan

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx \qquad \text{dan} \qquad b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^{\ell} g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx$$