Institut Teknologi Sepuluh Nopember

TUGAS AKHIR - KM184801

KONSTRUKSI GRUP LATIN SQUARE PADA ALJABAR MAX-PLUS

MUHAMMAD ZULFIKAR ZUFAR

NRP 06111940000108

Dosen Pembimbing

Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.

NIP 19890911 201404 1 001

Program Sarjana

Departemen Matematika

Fakultas Sains dan Analitika Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2023

TUGAS AKHIR - KM184801

KONSTRUKSI GRUP LATIN SQUARE PADA ALJABAR MAX-PLUS

MUHAMMAD ZULFIKAR ZUFAR

NRP 06111940000108

Dosen Pembimbing

Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.

NIP 19890911 201404 1 001

Program Studi Sarjana

Departemen Matematika

Fakultas Sains dan Analitika Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2023

FINAL PROJECT PROPOSAL - KM184801

LATIN SQUARE GROUP CONSTRUCTION IN MAX-PLUS ALGEBRA

MUHAMMAD ZULFIKAR ZUFAR

NRP 06111940000108

Supervisors

Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.

NIP 19890911 201404 1 001

Bachelor Program

Department of Mathematics

Faculty of Science and Data Analytics

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2023

LEMBAR PENGESAHAN

KONSTRUKSI GRUP LATIN SQUARE PADA ALJABAR MAX-PLUS

TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
memperoleh gelar Sarjana Matematika pada
Program Studi S-1 Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh: **MUHAMMAD ZULFIKAR ZUFAR**
NRP. 06111940000108

Surabaya, Juli 2023
Disetujui oleh Tim Penguji Tugas Akhir:

Pembimbing

1. Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil. (..................)
   NIP. 19890911 201404 1 001

Penguji

1. Dr. Dieky Adzkiya, S.Si, M.Si (..................)
   NIP. 19830517 200812 1 003
2. Drs. Komar Baihaqi, M.Si (..................)
   NIP. 19600229 198803 1 001
3. Drs. I Gst Ngr Rai Usadha, M.Si (..................)
   NIP. 19591121 198903 1 001

Mengetahui
Kepala Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data

Prof. Subchan, Ph.D
NIP. 19710513 199702 1 001

PERNYATAAN ORISINALITAS

Yang bertanda tangan disini:

Nama Mahasiswa / NRP	:	Muhammad Zulfikar Zufar / 06111940000108
Departemen	:	Matematika
Dosen Pembimbing / NIP	:	Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil. / 19890911 201404 1 001

dengan ini menyatakan bahwa Tugas Akhir dengan judul "**KONSTRUKSI GRUP LATIN SQUARE PADA ALJABAR MAX-PLUS**" adalah hasil karya sendiri, bersifat orisinal, dan ditulis dengan mengikuti kaidah penulisan ilmiah.

Bilamana di kemudian hari ditemukan ketidaksesuaian dengan pernyataan ini, maka saya bersedia menerima sanksi sesuai dengan ketentuan yang berlaku di Institut Teknologi Sepuluh Nopember.

Surabaya, 26 Juli 2023

Mengetahui Dosen Pembimbing	Mahasiswa
Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil. NIP. 19890911 201404 1 001	Muhammad Zulfikar Zufar NRP. 06111940000108

ABSTRAK

KONSTRUKSI GRUP LATIN SQUARE PADA ALJABAR MAX-PLUS

Nama Mahasiswa / NRP	:	Muhammad Zulfikar Zufar / 06111940000108
Departemen	:	Matematika FSAD -ITS
Dosen Pembimbing	:	Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.

Abstrak

Aljabar Max-Plus (dinotasikan $\mathbb{R}_{max}$) merupakan suatu struktur semi-ring idempoten yang terdiri pada himpunan $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ dan dikenai dua operasi biner yaitu operasi "*max*" dan "+" yang secara berturut-turut dinotasikan sebagai $\oplus$ dan $\otimes$ (dalam hal ini operasi "*max*" dan "+" secara berturut-beturut berperan sebagai operasi biner penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Pada $\mathbb{R}_{max}$, elemen identitas terhadap operasi perkalian $\otimes$ dan penjumlahan $\oplus$ secara berturut-turut adalah elemen $e := 0$ dan $\epsilon := -\infty$.

Belakangan, penelitian mengenai aljabar-max plus banyak mengkaji mengenai nilai eigen dan vektor eigen pada matriks max-plus , dan juga sinkronisasi sistem pada aljabar max-plus. Adapun dalam penerapannya, penelitian mengenai penerapan aljabar max-plus belakangan ini banyak membahas mengenai penerapan max-plus dalam penjadwalan, signal and image processing, dan juga model antrean. Dan sampai sekarang belum ada penelitian mengenai konstruksi grup pada matriks max-plus, khususnya matriks *latin square*.

Latin square adalah matriks $n \times n$ yang mempunyai entri n karakter yang berbeda, dimana pada tiap kolom dan baris masing-masing karakter hanya muncul sekali. Penelitian mengenai *latin square* belakangan ini banyak mengkaji mengenai banyaknya *latin square* pada sebarang ukuran n, dan juga tranvesal pada *latin square*. Penelitian mengenai penerapan *latin square* belakangan ini banyak membahas mengenai penerapan *latin square* dalam *image encryption algorithm*, *Fast color image encryption scheme*, dan Desain dan Aplikasi untuk S-box.

Penelitian mengenai *latin square* dalam aljabar max-plus sendiri belakangan ini banyak mengkaji mengenai vektor eigen dan nilai eigen untuk *latin square* max-plus.

Misalkan $L_S(n)$ menotasikan suatu himpunan yang menghimpun semua *latin square* max-plus berukuran $n \times n$. Pada tulisan ini akan diinvestigasi mengenai konstruksi grup pada $L_S(n)$. Alasan penulis memilih topik ini ialah karena barisan perpangkatan *latin square* max-plus memiliki suatu sifat periodik yang menarik, yang mana nantinya hal tersebut akan ditunjukkan pada tulisan ini. Dari sifat periodik tersebut, dapat diperoleh suatu tahapan untuk mengkonstruksi grup pada $L_S(n)$.

Kata kunci: *Max-Plus Algebra, Latin Square, Permutation, Group, Symmetric Group*

ABSTRACT

LATIN SQUARE GROUP CONSTRUCTION IN MAX-PLUS ALGEBRA

Student Name / NRP	:	Muhammad Zulfikar Zufar / 06111940000108
Departement	:	Mathematics SCIENTICS - ITS
Advisor	:	Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.

Abstract

Max-Plus Algebra (denoted by $\mathbb{R}_{max}$) is an idempotent semi-ring structure consisting of the set $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ and is subjected to two binary operations, namely the operations "max" and "+" which are denoted respectively $\oplus$ and $\otimes$ (in this case the operations "max" and "+" respectively act as addition and multiplication binary operations on $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). The identity elements for multiplication $\otimes$ and addition $\oplus$ are elements $e := 0$ and $\epsilon := -\infty$, respectively.

Currently, research on max-plus algebra studies a lot about eigenvalues and eigenvectors in max-plus matrices, and also system synchronization in max-plus algebra. As for its application, research on the application of max-plus algebra currently discusses the application of max-plus in scheduling,signal and image processing, and also the queue model. And until now there has been no research on group construction on max-plus matrices, especially the Latin square matrix.

A Latin square is an $n \times n$ matrix that consists of n distinct characters, where each character appears only once in each column and row. Research on the Latin square currently studies a lot on the number of Latin squares, and also transvesal on the latin square. in its application, research on the application of Latin Square currently studies a lot on application of Latin Square on image encryption algorithm, Fast color image encryption scheme, and Design and Application for S-box

Research on Latin square in max-plus algebra itself currently studies a lot about eigenvectors and eigenvalues for latin square max-plus .

Let $L_S(n)$ denote a set that contains all $n \times n$ max-plus Latin squares. In this paper, we will investigate the construction of groups in $L_S(n)$. The reason the author chose this topic is because the power series of max-plus Latin squares exhibits an interesting periodic property, which will be demonstrated in this paper. From this periodic property, a method for constructing groups in $L_S(n)$ can be derived.

Keywords: *Max-Plus Algebra, Latin Square, Permutation, Group, Symmetric Group*

KATA PENGANTAR

Dengan memanjatkan puji syukur kehadirat Allah SWT atas rahmat, taufik, dan hidayah-nya sehingga penulis dapat menyelesaikan tugas akhir dengan judul:

"KONSTRUKSI GRUP *LATIN SQUARE* PADA ALJABAR MAX-PLUS"

sebagai salah satu persyaratan akademis dalam menyelesaikan Program Sarjana Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Analitika Data, Institut Teknologi Sepuluh Nopember Surabaya. Tugas Akhir ini juga juga dimaksudkan untuk menambah wawasan pada Aljabar Max-plus, khususnya pada kajian mengenai sifat keperiodikan pada barisan perpangkatan matriks Aljabar Max-Plus. Penulis menyadari Tugas Akhir ini dapat diselesaikan dengan baik berkat dukungan, bantuan, dan nasihat dari berbagai pihak. Pada kesempatan ini, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada:

1. Kedua orang tua, Mohamad Hakam Adhi dan Ratnaningrum yang telah menghidupi penulis selama ini, dan juga memberikan banyak motivasi pada penulis untuk menyelesaikan Tugas Akhir ini.
2. Bapak Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil. selaku dosen pembimbing, karena bimbingan beliau dan juga pengalaman penulis dalam mengerjakan topik ini telah banyak mendewasakan penulis sebagai seorang matematikawan.
3. Bapak/Ibu dosen pengajar yang tidak bisa penulis sebutkan satu per satu, yang telah memberikan banyak ilmu dan pengalaman yang bermanfaat kepada penulis.

Penulis harapkan saran dan kritik dari pembaca. Akhir kata, semoga Tugas Akhir ini bermanfaat bagi semua pihak yang membacanya.

Surabaya, 18 Juli 2023

Muhammad Zulfikar Zufar

DAFTAR ISI

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Aljabar Max-Plus (dinotasikan $\mathbb{R}_{max}$) merupakan suatu struktur semi-ring idempoten yang terdiri pada himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dan dikenai dua operasi biner yaitu operasi "max" dan "+" yang secara berturut-turut dinotasikan sebagai $\oplus$ dan $\otimes$ (dalam hal ini operasi "max" dan "+" secara berturut-beturut berperan sebagai operasi biner penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$). Pada $\mathbb{R}_{max}$, elemen identitas terhadap operasi perkalian $\otimes$ dan penjumlahan $\oplus$ secara berturut-turut adalah elemen $e := 0$ dan $\epsilon := -\infty$. Perkalian matriks aljabar max-plus sejatinya sama saja dengan perkalian matriks pada aljabar linear biasa, hanya saja pada matriks max-plus operasi penjumlahan dan perkalian yang berlaku adalah operasi $\oplus$ dan $\otimes$ (yakni operasi max dan $+$ secara berturut-turut menggantikan operasi penjumlahan dan perkalian).

Belakangan penelitian mengenai aljabar-max plus banyak mengkaji mengenai nilai eigen dan vektor eigen pada matriks max-plus (Abbas, Umer, Hayat, & Ullah, 2022; Ariyanti, 2022), dan juga sinkronisasi sistem pada aljabar max-plus (Martinez, Kara, & Loiseau, 2022). Adapun dalam penerapannya, penelitian mengenai penerapan aljabar max-plus belakangan ini banyak membahas mengenai penerapan max-plus dalam penjadwalan (Eramo et al., 2022), signal and image processing (Blusseau, Velasco-Forero, Angulo, Bloch, & Angulo, n.d.) , dan juga model antrean (Payu, 2022). Dan sampai sekarang belum ada penelitian mengenai konstruksi grup pada matriks max-plus, khususnya matriks *latin square*.

Latin square adalah matriks $n \times n$ yang mempunyai elemen n karakter yang berbeda, dimana pada tiap kolom dan baris masing-masing karakter hanya muncul sekali (Wallis & George, 2010). Penelitian mengenai *latin square* belakangan ini banyak mengkaji mengenai jumlah dari *latin square* (Mckay & Wanless, 2005), dan juga tranvesal pada *latin square* (Balasubramanian, 1990). Penelitian mengenai penerapan *latin square* belakangan ini banyak membahas mengenai penerapan *latin square* dalam image encryption algorithm (Wang, Su, Xu, Zhang, & Zhang, 2022), Fast color image encryption scheme (Zhou, Zhou, & Gong, 2020), dan Desain dan Aplikasi untuk S-box (Hua, Li, Chen, & Yi, 2021).

Monika dalam (Molnárová, 2005) telah mendefinisikan sifat *almost linear periodic* pada barisan perpangkatan matriks aljabar max-plus. Menggunakan definisi dari *almost linear periodic* tersebut, pada tulisan ini didefinisikan suatu sifat periodik pada matriks aljabar max-plus, yakni suatu matriks aljabar max-plus A dikatakan bersifat periodik apabila barisan perpangkatan dari A memenuhi suatu kondisi khusus dari *almost linear periodic*, dimana kondisi khusus tersebut akan dijelaskan pada tulisan ini. Dari situ dapat dibuktikan bahwa suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ bersifat periodik bila dan hanya bila terdapat $(p, t, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk semua bilangan asli $k \geq t$ berlaku $A^{\otimes k+p} = q^{\otimes p} \otimes A^{\otimes k}$, dan amati bahwasannya apabila $q = 0$ dan $t = 1$ maka untuk semua $k \geq 1$ berlaku $A^{\otimes k+p} = A^{\otimes k}$, yang artinya barisan perpangkatan dari A membentuk suatu grup siklik terhadap operasi $\otimes$, dan pada tulisan ini kedepannya matriks max-plus yang demikian disebut sebagai *anggota grup*.

Misalkan $L_S(n) := \{A_{n\times n} | A_{n\times n} =$ *latin square* $\}$ menotasikan suatu himpunan yang menghimpun semua *latin square* max-plus berukuran $n \times n$ dan $A \in L_S(n)$. Pada tulisan ini akan diinvestigasi mengenai syarat perlu dan cukup dari A merupakan suatu anggota grup, dan juga akan diinvestigasi mengenai konstruksi grup pada $L_S(n)$ yang memuat A.

Alasan penulis memilih topik ini ialah karena *latin square* max-plus memiliki suatu sifat periodik yang menarik, yang mana nantinya hal tersebut akan penulis tunjukkan. Dari sifat periodik tersebut, dapat diturunkan suatu cara untuk mengkonstruksi grup pada $L_S(n)$ yang memuat A, apabila diberikan suatu A di $L_S(n)$.

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah yang dibahas dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana syarat perlu dan cukup untuk suatu *latin square* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ sehingga barisan perpangkatan dari A membentuk grup terhadap operasi $\otimes$?

2. Apabila diberikan suatu $A \in L_S(n)$, bagaimana cara mengkonstruksi semua grup pada $L_S(n)$ yang memuat A ?

1.3 Batasan Masalah

1. Penelitian ini hanya membahas tentang konstruksi grup *latin square* order $n \times n$ dengan entri maksimumnya adalah bernilai 0.

1.4 Tujuan

1. Menjelaskan bagaimana syarat perlu dan cukup untuk suatu *latin square* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ sehingga barisan perpangkatan dari A membentuk grup terhadap operasi $\otimes$.

2. Menjelaskan bagaimana cara mengkonstruksi semua grup pada $L_S(n)$ yang memuat A, apabila diberikan suatu $A \in L_S(n)$.

1.5 Manfaat

Manfaat dari penelitian ini adalah berkembangnya pengetahuan mengenai aljabar max-plus

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Penelitian Terdahulu

Referensi	Penulis	Tahun	Judul	Rangkuman
(Mufid & Subiono, 2014)	Muhammad Syifa'ul Mufid and Subiono	2014	Eigenvalues and eigenvectors of Latin Squares In Max-plus Algebra	Diselesaikan Permasalahan Eigen dari *latin square* pada Aljabar Max-plus dengan Memperhatikan Permutasi dari Angka-angka pada *latin square* Tersebut.
(Farlow, 2009)	Kasie G Farlow	2009	Max-Plus Algebra	Dibahas Mengenai Beberapa Hal Terkait Aljabar Max-plus, dan Salahsatu Hal Menarik yang Dibahas pada Paper ini adalah Aljabar Linear pada Aljabar Max-plus.
(Abbas et al., 2022)	Fazal Abbas and Mubasher Umer and Umar Hayat and Ikram Ullah	2022	Trivial and Nontrivial eigenvectors for *latin squares* in Max-Plus Algebra	Mengkaji Permasalah Eigen pada *Non-Symmetric* Latin Square pada Aljabar Max-plus.

2.2 *Latin Square*

Latin Square adalah matriks $n \times n$ yang mempunyai entri n karakter yang berbeda, dimana pada tiap kolom dan baris masing-masing karakter hanya muncul sekali (Wallis

& George, 2010). Suatu formula eksplisit untuk menghitung banyaknya dari *latin square* berukuran $n \times n$ telah dipublikasi pada tahun 1992 (van Lint & Wilson, 2001), formula tersebut adalah

$$L_n = n! \sum_{A \in B_n} (-1)^{\sigma_0(A)} \binom{per(A)}{n}$$

dimana L_n adalah banyaknya *latin square* berukuran $n \times n$, B_n adalah himpunan semua $matriks - (0,1)$ berukuran $n \times n$, $\sigma_0(A)$ adalah jumlah dari entri 0 pada matriks A, dan $per(A)$ adalah permanent dari matriks A.

Sementara itu formula yang paling akurat untung menghitung batas atas dan bawah dari banyaknya *latin square* berukuran n menghasilkan batas atas dan bawah yang masih sangat jauh. Formula tersebut ialah (yu Shao & Wei, 1992)

$$\prod_{k=1}^{n} (k!)^{n/k} \geq L_n \geq \frac{(n!)^{2n}}{n^{n^2}}$$

Ada banyak aplikasi dari *latin square*, antara lain

- Dalam struktur aljabar, *latin square* dapat dianggap sebagai representasi dari tabel perkalian (tabel cayle) dari suatu quasigrup
- Dalam *error correcting code*, himpunan *latin square* yang memenuhi kriteria tertentu dapat digunakan sebagai error correcting code

2.3 Grup

2.3.1 Definisi Grup

Sebuah grup G adalah sebuah himpunan yang dikenai suatu operasi biner "." Yang mengambil dua elemen di G sebagai input dan suatu elemen di G sebagai output dan memenuhi beberapa sifat berikut (Subiono, 2017)

- Identitas : terdapat elemen identitas $e \in G$ sedemikian sehingga untuk sebarang elemen $g \in G$ berlaku $g.e = e.g = g$
- Invers: untuk setiap elemen $g \in G$ terdapat elemen $g^{-1} \in G$ sedemikian sehingga $g.g^{-1} = g^{-1}.g = e$
- Asosiatifitas: untuk sebarang elemen $f, g, h \in G$ berlaku $(f.g).h = f.(g.h)$

2.3.2 Homomorfisma Grup

Diberikan dua grup $(G, .)$ dan $(H, *)$, Homomorfisma Grup dari G ke H merupakan fungsi $f : G \to H$ sedemikian sehingga untuk sebarang $x, y \in G$, berlaku

$$f(x.y) = f(x) * f(y)$$

dengan kata lain, untuk semua $a, b, c \in G$

$$a.b = c$$

mengakibatkan

$$f(a) * f(b) = f(c)$$

(Subiono, 2017).

Secara intuitif, dapat kita katakan bahwasannya homorfisma grup memetakan suatu grup ke suatu subset pada grup lain yang mempunyai struktur aljabar yang serupa.

Homomorfisma grup yang bijektif disebut sebagai Isomorfisma Grup (Subiono, 2017), dan dua grup G dan H disebut Isomorfik apabila terdapat suatu isomorfisma grup dari G ke H . Secara intuitif dapat kita katakan bahwasannya apabila dua grup G dan H merupakan dua grup yang isomorfik, maka G dan H mempunyai struktur aljabar yang sama persis, dan hanya dapat dibedakan oleh notasi elemen-elemennya dan penamaan grupnya.

2.4 Permutasi

2.4.1 Definisi Permutasi

Permutasi pada himpunan X merupakan sebuah fungsi bijektf pada himpunan X (Subiono, 2017). Himpunan semua permutasi pada suatu himpunan X dinotasikan dengan S_X, dan S_X membentuk grup terhadap operasi komposisi (grup tersebut biasa dinamakan sebagai grup simetri S_X). Permutasi e pada X yang memetakan semua elemen kedirinya sendiri ($e(y) = y$ untuk semua $y \in X$) dapat dinotasikan sebagai $e = ()$, dan e dikatakan sebagai permutasi identitas.

2.4.2 Sikel

Diberikan suatu permutasi $\phi \in S_X$, maka suatu relasi ekivalen pada X yang didefinisikan sebagai berikut: untuk semua $a, b \in X$, a b apabila terdapat $i \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\phi^i(a) = b$, membentuk beberapa klas ekivalen di X, dan masing-masing klas ekivalen tersebut dapat kita katakan sebagai *orbit dari* ϕ (Subiono, 2017).

Suatu Permutasi $\theta \in S_X$ dinamakan *sikel* apabila terdapat tepat satu orbit dari θ dengan kardinalitas lebih dari satu. *Panjang dari sikel* adalah kardinalitas dari orbit terbesar dari sikel tersebut, dan suatu sikel dengan panjang k dapat disebut sebagai $sikel - k$, dan dapat ditulis $(a_1 a_2 ... a_k)$, dimana untuk semua i, a_i adalah elemen dari orbit terbesar dan $\theta^{y-1}(a_1) = \theta(a_y)$ untuk semua $1 \leq y \leq k$ (Subiono, 2017).

Dua sikel dikatakan saling asing apabila tidak terdapat elemen yang termuat dalam kedua sikel tersebut, atau dengan kata lain dua sikel $f := (a_1 ... a_n)$ dan $g := (b_1 ... b_m)$ pada X dikatakan saling asing apabila $a_i \neq b_j$ untuk semua $i \in \{1, ..., n\}$ dan $j \in \{1, ..., m\}$ (Subiono, 2017). sebarang permutasi pada X non-identitas dapat dinyatakan dalam bentuk komposisi beberapa sikel yang saling asing, lebih jelasnya sebarang permutasi non-identitas f pada X dapat dinyatakan sebagai $f = r_1 \circ ... \circ r_m$ dimana $r_1 ... r_m$ merupakan sikel-sikel yang saling asing di X.

2.5 Aljabar Max-Plus

Aljabar Max-Plus (dinotasikan $\mathbb{R}_{max}$) merupakan suatu struktur semi-ring idempoten yang terdiri dari himpunan $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ dan dikenai dua operasi biner yaitu operasi "*max*" dan "+" yang secara berturut-turut dinotasikan sebagai $\oplus$ dan $\otimes$ (dalam hal ini operasi "max" dan "+" secara berturut-beturut berperan sebagai operasi biner penjumlahan dan perkalian pada $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) (Baccelli, 1992). Elemen identitas terhadap operasi perkalian $\otimes$ dan penjumlahan $\oplus$ secara berturut-turut adalah elemen $e := 0$ dan $\epsilon := -\infty$. Yang menarik dari struktur aljabar max-plus ini sendiri adalah tidak adanya elemen invers terhadap operasi penjumlahan $\oplus$ untuk semua elemen selain ϵ pada $\mathbb{R}_{max}$, dan sebaliknya untuk operasi perkalian $\otimes$, semua elemen selain ϵ mempunyai invers terhadap $\otimes$.

2.5.1 Matriks Aljabar Max-Plus sebagai Representasi dari Graf Berarah dan Berbobot

Diberikan suatu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{max}$. **graf komunikasi dari A**, dinotasikan sebagai $G(A)$, merupakan suatu graf berarah dan berbobot dengan verteks $V = \{1, ..., n\}$ dan edge $E = \{(i, j)|a_{ji} \neq \epsilon\}$, dengan bobot untuk edge (i, j) adalah a_{ji} untuk semua $(i, j) \in E$. A dikatakan **tak tereduksi** apabila untuk semua verteks $i, j \in V$, terdapat suatu lintasan dari i ke j (Farlow, 2009).

2.5.2 Nilai Eigen dan Vektor Eigen pada Matriks Aljabar Max-Plus

Diberikan suatu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{max}$, $\mu \in \mathbb{R}_{max}$, dan $v \in \mathbb{R}^{n}_{max}$, dimana pada v terdapat setidaknya satu entri yang tidak sama dengan ϵ. Apabila

$$A \otimes v = \mu \otimes v$$

maka μ disebut sebagai **nilai eigen** dari A dan v merupakan suatu **vektor eigen** yang berkaitan dengan μ dari A (Farlow, 2009).

2.5.3 *Almost Linear Periodic*

Suatu barisan $a^* = \{a^{(k)}|k \in \mathbb{N}\}$ di $\mathbb{R}_{max}$ dikatakan sebagai barisan yang ***almost linear periodic*** apabila terdapat $(p, t, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ sedemikian sehingga untuk semua bilangan asli $d > t$ berlaku $a^{(d+p)} = q^{\otimes p} \otimes a^{(d)}$. Bilangan terkecil p dan q yang memenuhi sifat diatas secara berurutan disebut sebagai ***linear period*** dari a^*, dinotasikan sebagai $lper(a^*)$, dan ***linear factor*** dari a^*, dinotasikan sebagai $lfac(a^*)$. Bilangan terkecil t yang memenuhi sifat diatas untuk $p = lper(a^*)$ dan $q = lfac(a^*)$ disebut sebagai ***linear defect*** dari a^*, dinotasikan sebagai $ldef(a^*)$ (Molnárová, 2005).

Suatu barisan perpangkatan $A^* = \{A^{\otimes k}|k \in \mathbb{N}\}$ untuk suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{max}$ bersifat ***almost linear periodic*** apabila $a^*_{ij} = \{a^{(k)}_{ij}|k \in \mathbb{N}\}$ *almost linear periodic* untuk semua $1 \leq i, j \leq n$ dimana a_{ij} menotasikan entri ke-ij di A. Matriks $lfac(A^*) = (lfac(a^*_{ij})|1 \leq i, j \leq n)$ merupakan matriks ***linear factor* dari** A^*, dan bilangan $ldef(A^*) = max\{ldef(a^*_{ij})|1 \leq i, j \leq n\}$ dan $lper(A^*) = kpk\{lper(a^*_{ij})|1 \leq i, j \leq n\}$ secara berurutan disebut sebagai ***linear defect*** dan ***linear period*** dari A^*. Suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{max}$ dikatakan ***almost linear periodic*** apabila barisan perpangkatannya $A^* = \{A^{\otimes k}|k \in \mathbb{N}\}$ bersifat ***almost linear periodic***. Matriks $lfac(A) = lfac(A^*)$ disebut sebagai matriks ***linear factor*** dari A, dan bilangan $ldef(A) = ldef(A^*)$, $lper(A) = lper(A^*)$ secara berurutan disebut sebagai

linear defect dan ***linear period*** dari A (Molnárová, 2005).

2.5.4 Permutasi Representasi Dari Entri pada Matriks Latin Square Aljabar Max-Plus

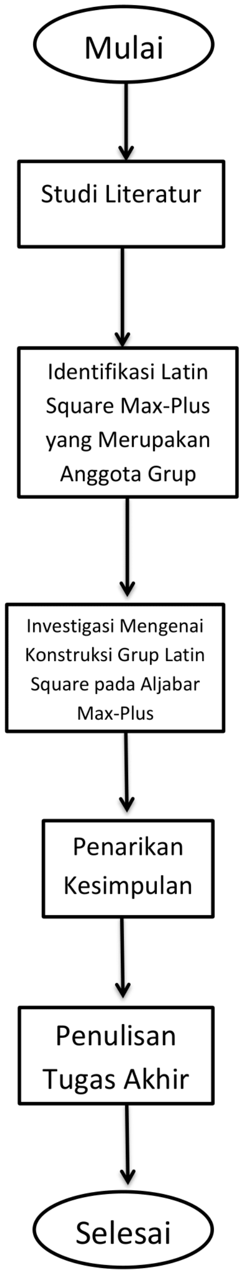
Misalkan sebuah matriks *latin square* L dengan entri max-plus mempunyai sebanyak n entri yang berbeda. Maka untuk tiap entri i dari matriks tersebut, dapat kita peroleh tepat satu permutasi yang merepresentasikan i, dinotasikan sebagai σ_i^L. Sebagai contoh, pandang matriks *latin square* berikut.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Karena -1 terletak pada posisi $(1,2),(2,3),(3,1)$, kita peroleh permutasi representasi dari -1 adalah $\sigma_{-1}^A = (123)$. Dengan cara yang sama dapat kita peroleh juga $\sigma_{-2}^A = (132)$ dan $\sigma_0^A = (1)(2)(3) = ()$ (Mufid & Subiono, 2014). Dalam hal ini $\sigma(A)$ menotasikan himpunan semua permutasi elemen di A, yang artinya $\sigma(A) = \{\sigma_0^A, \sigma_{-1}^A, \sigma_{-2}^A\} = \{(123),(132),()\}$.

BAB III
METODOLOGI

Pada bab ini akan dijelaskan secara umum mengenai urutan pelaksanaan Tugas Akhir dengan langkah-langkah yang dilakukan ditunjukkan pada blok diagram Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Blok Diagram Penelitian.

3.1 Studi Literatur

Sebelum melakukan penelitian inti, penulis terlebih dahulu melakukan studi literatur mengenai kajian-kajian yang terkait.

3.2 Identifikasi Latin Square Max-Plus yang Merupakan Anggota Grup

Pada bagian latar belakang telah dikenalkan mengenai *anggota grup*, yakni suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ merupakan *anggota grup* apabila barisan perpangkatan dari A membentuk suatu grup siklik terhadap operasi $\otimes$, dalam hal ini tentu saja barisan perpangkatan yang dimaksud adalah $< A >:= \{A^{\otimes k} | k \in \mathbb{N}\}$. Pada langkah ini akan dicari syarat perlu dan cukup untuk suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ merupakan anggota grup.

3.3 Investigasi mengenai Konstruksi Grup Latin Square Pada Aljabar Max-Plus

Setelah mengidentifikasi *latin square* max-plus yang merupakan anggota grup, sesuai judul tugas akhir ini, selanjutnya akan diinvetigasi mengenai bagaimana cara mengkonstruksi semua grup *latin square* pada $\mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ yang memuat A apabila diberikan suatu *latin square* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ yang merupakan anggota grup, dalam hal ini istilah *grup latin square* mengacu pada grup yang semua anggotanya merupakan *latin square*.

3.4 Penarikan Kesimpulan

Langkah 3.2 dan 3.3 secara berurutan menjawab rumusan masalah 1 dan 2, artinya ketika sampai pada langkah ini semua rumusan masalah pada tugas akhir ini sudah terjawab, dan pada langkah ini, dirumuskan beberapa kesimpulan berdasarkan hasil-hasil yang telah diperolah pada langkah-langkah sebelumnya.

3.5 Penulisan Tugas Akhir

Hasil yang telah diperoleh dari langkah-langkah sebelumnya ditulis dalam bentuk laporan, dan penulis gunakan sebagai tugas akhir penulis.

BAB IV
PEMBAHASAN

4.1 Sifat Periodik Latin Square pada Aljabar Max-Plus

Definisi 4.1.1. *Diberikan suatu barisan* $a^* = (a^{(k)}; k \in \mathbb{N})$ *di* $\mathbb{R}_{max}$*,* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$*, dan* $(p, t, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}$*.* (p, t, q) *disebut sebagai* ***identitas periodik dari*** a^* *apabila untuk semua bilangan asli* $d \geq t$ *berlaku* $a^{(d+p)} = q^{\otimes p} \otimes a^{(d)}$*, dan serupa seperti hal tersebut,* (p, t, q) *disebut sebagai* ***identitas periodik dari A*** *apabila untuk semua bilangan asli* $d \geq t$ *berlaku* $A^{\otimes d+p} = q^{\otimes p} \otimes A^{\otimes d}$*. Himpunan yang menghimpun semua identitas periodik dari* a^* *disebut sebagai* ***himpunan identitas periodik dari*** a^**, dinotasikan sebagai* $IP(a^*)$*, dan dengan cara yang serupa, himpunan yang menghimpun semua identitas periodik dari* A *disebut sebagai* ***himpunan identitas periodik dari A****, dinotasikan sebagai* $IP(A)$*. Dalam hal ini dapat dikatakan bahwa* a^* ***mempunyai identitas periodik*** *apabila* $IP(a^*) \neq \emptyset$ *dan* ***A mempunyai identitas periodik*** *apabila* $IP(A) \neq \emptyset$*.*

Diberikan suatu barisan *almost linear periodic* $x^* = (x^{(k)}; k \in \mathbb{N}) = (\epsilon, \epsilon, ..., \epsilon, ...)$ di $\mathbb{R}_{max}$. Amati bahwa untuk semua $q \in \mathbb{R}$ dan $d > 1$ berlaku $x^{(d+1)} = q^{\otimes 1} \otimes x^{(d)}$, sehingga $lper(x^*) = 1 = ldef(x^*)$ dan $lfac(x^*) = q$. Karena hal tersebut berlaku untuk semua $q \in \mathbb{R}$ akibatnya $lfac(x^*)$ tidak terdefinisi secara baik, dan hal tersebut nyatanya tidak hanya terjadi pada x^* saja, namun juga pada beberapa barisan lainnya di $\mathbb{R}_{max}$. Karenanya berikut penulis berikan kondisi ekivalen untuk suatu barisan *almost linear periodic* a^* di $\mathbb{R}_{max}$ agar $lfac(a^*)$ terdefinisi secara baik.

Definisi 4.1.2. *Diberikan suatu barisan* a^* *di* $\mathbb{R}_{max}$ *dan* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$*.* a^* *dikatakan sebagai suatu barisan yang* ***uniquely periodic*** *apabila* $IP(a^*) \neq \emptyset$ *dan untuk semua* $(x, y, z), (p, t, q) \in IP(a^*)$ *berlaku* $z = q$*, dan serupa dengan hal tersebut,* A *dikatakan sebagai matriks yang* ***uniquely periodic*** *apabila* $IP(A) \neq \emptyset$ *dan untuk semua* $(x, y, z), (p, t, q) \in IP(A)$ *berlaku* $z = q$*.*

Definisi 4.1.3. *Diberikan suatu matriks* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ *dan suatu barisan* a^* *di* $\mathbb{R}_{max}$ *dimana* $IP(A) \neq \emptyset$ *dan* $IP(a^*) \neq \emptyset$*, dan juga diberikan suatu* $t \in \mathbb{N}$*. Dapat kita katakan bahwa* $a^{(t)}$ ***berada dalam fase periodik*** *apabila terdapat bilangan* $p \in \mathbb{N}$ *dan* $q \in \mathbb{R}$ *dimana* $(p, t, q) \in IP(a^*)$*, dan serupa dengan hal tersebut,* $A^{\otimes t}$ ***berada dalam fase periodik*** *apabila terdapat bilangan* $p \in \mathbb{N}$ *dan* $q \in \mathbb{R}$ *dimana* $(p, t, q) \in IP(A)$*.*

Proposisi 4.1.1. *Diberikan suatu barisan* a^* *di* $\mathbb{R}_{max}$ *dimana* $IP(a^*) \neq \emptyset$*.* a^* *uniquely periodic bila dan hanya bila terdapat* $a^{(d)}$ *pada* a^* *dimana* $a^{(d)}$ *berada dalan fase periodik dan* $a^{(d)} \in \mathbb{R}$*.*

Bukti. Untuk membuktikan $(\Rightarrow)$ akan dibuktikan bentuk kontrapositifnya, yakni apabila pada barisan a^* tidak terdapat $a^{(d)}$ yang berada dalam fase periodik dan $a^{(d)}$ bernilai $\mathbb{R}$, maka a^* tidak *uniquely periodic*.

Misalkan pada barisan a^* tidak terdapat $a^{(d)}$ yang berada dalam fase periodik dan $a^{(d)}$ bernilai $\mathbb{R}$, artinya semua anggota pada a^* yang berada dalam fase periodik bernilai

ϵ. Sehingga apabila $a^{(t)}$ berada dalam fase periodik, maka untuk semua $d \geq t$ dan $p \in \mathbb{N}$ berlaku $a^{(d)} = \epsilon = a^{(d+p)}$, yang berakibat untuk sebarang dua bilangan riil berbeda q dan r berlaku $a^{(d+p)} = q^{\otimes p} \otimes a^{(d)}$ dan $a^{(d+p)} = r^{\otimes p} \otimes a^{(d)}$. Sampai sini dapat kita pastikan bahwa (p, t, q) dan (p, t, r) merupakan identitas periodik dari a^* sehingga berdasarkan Definisi 4.1.2 kita peroleh bahwa a^* tidak *uniquely periodic*, sehingga $(\Rightarrow)$ terbukti.

Selanjutnya, misalkan pada a^* terdapat $a^{(d)}$ dimana $a^{(d)}$ berada dalam fase periodik dan $a^{(d)} \in \mathbb{R}$, dan misalkan juga (x, y, z) dan (p, t, q) merupakan dua identitas periodik pada a^*. Karena $(x, y, z), (p, t, q) \in IP(a^*)$, dapat dibuktikan bahwa apabila $k = kpk\{x, p\}$ maka $(k, y, z), (k, t, q) \in IP(a^*)$. Selanjutnya, karena terdapat $a^{(d)}$ dimana $a^{(d)}$ berada dalam fase periodik dan $a^{(d)} \in \mathbb{R}$, dapat dipastikan bahwa terdapat tak hingga banyaknya anggota pada a^* yang bernilai riil, sehingga terdapat $a^{(j)}$ yang bernilai riil dimana $j \geq max\{y, t\}$, sehingga dapat kita peroleh

$$a^{(j+k)} = z^{\otimes k} \otimes a^{(j)} \text{ dan } a^{(j+k)} = q^{\otimes k} \otimes a^{(j)}$$

yang berakibat

$$z^{\otimes k} \otimes a^{(j)} = q^{\otimes k} \otimes a^{(j)} \Rightarrow z^{\otimes k} = q^{\otimes k}$$

sehingga $z = q$. Terakhir, karena hal tersebut berlaku untuk sebarang dua identitas periodik dari a^*, berdasarkan definisi dari *uniquely periodic* kita peroleh bahwa a^* *uniquely periodic*, sehingga $(\Leftarrow)$ terbukti. □

Proposisi 4.1.2. *Diberikan suatu barisan almost linear periodic* a^* *di* $\mathbb{R}_{max}$. $lfac(a^*)$ *terdefinisi secara baik bila dan hanya bila* a^* *uniquely periodic.*

Bukti. $(\Leftarrow)$ sudah cukup trivial, sehingga untuk membuktikan proposisi ini hanya perlu dibuktikan $(\Rightarrow)$, dan untuk membuktikan hal tersebut akan dibuktikan bentuk kontrapositifnya, yakni apabila a^* tidak *uniquely periodic* maka $lfac(a^*)$ tidak terdefinisi secara baik.

Misalkan a^* tidak *uniquely periodic*, dan misalkan juga q dan r merupakan dua bilangan riil yang berbeda. Dari definisi mengenai $ldef(a^*)$, mudah dilihat bahwa $a^{(ldef(a^*)+1)}$ berada dalam fase periodik, dan karena a^* tidak *uniquely periodic* menggunakan Proposisi 4.1.1 dapat dipastikan bahwa semua anggota dari a^* yang berada dalam fase periodik bernilai ϵ, sehingga untuk semua $d \geq ldef(a^*) + 1$ berlaku $a^{(d)} = \epsilon = a^{(d+lper(a^*))}$, sehingga $a^{(d+lper(a^*))} = q^{\otimes lper(a^*)} \otimes a^{(d)}$ dan $a^{(d+lper(a^*))} = r^{\otimes lper(a^*)} \otimes a^{(d)}$, sehingga dapat kita pastikan bahwa $(lper(a^*), ldef(a^*)+1, q), (lper(a^*), ldef(a^*)+1, r) \in IP(a^*)$. Selanjutnya, dari definisi mengenai $lfac(a^*)$ mudah dilihat bahwa untuk semua bilangan $s \in \mathbb{R}$,

$$s = lfac(a^*) \text{ apabila } (lper(a^*), ldef(a^*) + 1, s) \in IP(a^*),$$

sehingga tentu saja dapat kita katakan bahwa

$$lfac(a^*) = q \text{ dan } lfac(a^*) = r$$

dan karena diawal telah diketahui bahwa $q \neq r$, akibatnya $lfac(a^*)$ tidak terdefinisi secara baik, sehingga $(\Rightarrow)$ terbukti. □

Dari penjelasan sebelumnya, didapat bahwa pada beberapa barisan *almost linear periodic* a^* di $\mathbb{R}_{max}$, $lfac(a^*)$ tidak terdefinisi secara baik. Karenanya, ada baiknya untuk mendefisinisikan $lfac(a^*)$ sebagai suatu himpunan, dibanding mendefinisikan $lfac(a^*)$ sebagai suatu bilangan riil.

Definisi 4.1.4. *Diberikan suatu barisan almost linear periodic a^* di $\mathbb{R}_{max}$ dan suatu matriks almost linear periodic $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$.* ***Himpunan Linear Factor dari*** *a^*, dinotasikan sebagai $LF(a^*)$, merupakan suatu himpunan yang memuat semua nilai yang mungkin dari $lfac(a^*)$, atau dengan kata lain $LF(a^*) = \{q|(lper(a^*), ldef(a^*)+1, q) \in IP(a^*)\}$, dan analog dengan hal tersebut,* ***Himpunan Linear Factor dari*** *A, dinotasikan sebagai $LF(A)$, merupakan suatu himpunan yang memuat semua matriks max-plus yang mungkin untuk $lfac(A)$, atau dengan kata lain $LF(A) = \{Q|Q \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dan untuk semua $1 \leq i,j \leq n$ berlaku $q_{ij} \in LF(a_{ij}^*)\}$, dimana q_{ij} menotasikan entri ke ij dari Q. Terakhir, apabila $LF(a^*)$ merupakan suatu singleton, misalkan saja $LF(a^*) = \{q\}$, maka dapat kita katakan $lfac(a^*) = q$, dan serupa dengan hal tersebut, apabila $LF(A)$ merupakan suatu singleton, misalkan saja $LF(A) = \{Q\}$, maka dapat kita katakan $lfac(A) = Q$.*

Dari Definisi 4.1.1 dan definisi dari *almost linear periodic*, mudah dilihat bahwa untuk semua barisan a^* di $\mathbb{R}_{max}$, a^* *almost linear periodic* bila dan hanya bila a^* mempunyai identitas periodik, dalam hal ini tentu saja $LF(a^*) \neq \emptyset$ dan untuk semua $r \in LF(a^*)$, $(lper(a^*), ldef(a^*)+1, r)$ merupakan suatu identitas periodik dari a^* (apabila a^* *almost linear periodic*). Dari situ kita peroleh bahwa kondisi $IP(a^*) \neq \emptyset$ mengakibatkan a^* *almost linear periodic*, sehingga berdasarkan definisi dari *uniquely periodic* pada Definisi 4.1.2 kita peroleh

$$a^* \text{ uniquely periodic} \Rightarrow IP(a^*) \neq \emptyset \Rightarrow a^* \text{ almost linear periodic}.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa apabila (p,t,q) merupakan suatu identitas periodik dari a^*, maka p merupakan kelipatan dari $lper(a^*)$ dan $lfac(a^*) = q$ apabila a^* *uniquely periodic*.

Proposisi 4.1.3. *Diberikan suatu barisan a^* di $\mathbb{R}_{max}$ yang almost linear periodic. $LF(a^*) \neq \emptyset$ dan untuk semua $(p,t,q) \in IP(a^*)$, keempat hal berikut berlaku*

(i) $lper(a^*)|p$

(ii) $lfac(a^*) = q$ *bila dan hanya bila* a^* *uniquely periodic*

(iii) $LF(a^*) = \mathbb{R}$ *bila dan hanya bila* a^* *tidak uniquely periodic*

(iv) *apabila* $p = lper(a^*)$ *maka* $t \geq ldef(a^*)+1$

Bukti. Misalkan $(p,t,q) \in IP(a^*)$, dari definisi *almost linear periodic* mudah dilihat bahwa apabila $p = lper(a^*)$ maka $t \geq ldef(a^*)+1$, sehingga (iv) berlaku, dan lagi (ii) merupakan suatu akibat langsung dari Proposisi 4.1.2 yang artinya untuk membuktikan proposisi ini hanya perlu dibuktikan klaim (i) dan (iii).

Seandainya a^* *uniquely periodic* dan $lper(a^*) \nmid p$, artinya terdapat $k \in \mathbb{N}$ dimana $0 < k \times lper(a^*) - p < lper(a^*)$, sehingga apabila $t^+ = max\{t, ldef(a^*)+1\}$ maka

$$a^{(t^+ + k\times lper(a^*))} = lfac(a^*)^{\otimes k\times lper(a^*)} \otimes a^{(t^+)} \text{ dan } a^{(t^+ + p)} = q^{\otimes p} \otimes a^{(t^+)}$$

yang berakibat

$$a^{(t^{+}+k.lper(a^{*}))} - a^{(t^{+}+p)} = (lfac(a^{*})^{\otimes k\times lper(a^{*})} \otimes a^{(t^{+})}) - (q^{\otimes p} \otimes a^{(t^{+})})$$

sehingga

$$a^{(t^{+}+k\times lper(a^{*}))} = (lfac(a^{*})^{\otimes k\times lper(a^{*})} - q^{\otimes p}) \otimes a^{(t^{+}+p)}$$

.

Selanjutnya dimisalkan $x = t^{+} + p$, $r = k \times lper(a^{*}) - p$, dan $h = \frac{lfac(a^{*})^{\otimes k\times lper(a^{*})} - q^{\otimes p}}{r}$, maka kita peroleh

$$a^{(x+r)} = h^{\otimes r} \otimes a^{(x)}$$

dan dari situ dapat dipastikan bahwa untuk semua bilangan asli $d \geq x$ berlaku

$$a^{(d+r)} = h^{\otimes r} \otimes a^{(d)}$$

yang berakibat (r, x, h) merupakan suatu identitas periodik dari a^{*}. Terakhir, karena $0 < k\times lper(a^{*}) - p < lper(a^{*})$ kita peroleh $0 < r < lper(a^{*})$, namun disisi lain berdasarkan definisi dari $lper(a^{*})$ diperoleh juga $lper(a^{*}) \geq r$ sehingga terjadi kontradiksi, yang berarti mustahil $lper(a^{*}) \nmid p$ sehingga klaim (i) terbukti pada kasus dimana a^{*} *uniquely periodic*. Untuk kasus dimana a^{*} tidak *uniquely periodic*, karena semua anggota pada a^{*} yang berada dalam fase periodik bernilai ϵ, terang saja bahwa $lper(a^{*}) = 1$, sehingga klaim (i) juga berlaku pada kasus ini.

Pada pernyataan (iii), menggunakan Proposisi 4.1.2 ($\Rightarrow$) sudah cukup trivial, sehingga untuk membuktikan (iii) cukup dibuktikan ($\Leftarrow$). Misalkan a^{*} tidak *uniquely periodic*, dan misalkan juga q suatu bilangan riil. Dari definisi mengenai $ldef(a^{*})$, mudah dilihat bahwa $a^{(ldef(a^{*})+1)}$ berada dalam fase periodik, dan karena a^{*} tidak *uniquely periodic* menggunakan Proposisi 4.1.1 dapat dipastikan bahwa semua anggota dari a^{*} yang berada dalam fase periodik bernilai ϵ, sehingga untuk semua $d \geq ldef(a^{*}) + 1$ berlaku $a^{(d)} = \epsilon = a^{(d+lper(a^{*}))}$, sehingga $a^{(d+lper(a^{*}))} = q^{\otimes lper(a^{*})} \otimes a^{(d)}$, sehingga dapat kita pastikan bahwa $(lper(a^{*}), ldef(a^{*}) + 1, q) \in IP(a^{*})$. Terakhir, berdasarkan Definisi 4.1.4 tentu saja dapat kita katakan bahwa $q \in LF(a^{*})$, dan karena hal tersebut berlaku untuk semua $q \in \mathbb{R}$ maka sampai sini dapat kita simpulkan bahwa ($\Leftarrow$) benar sehingga (iii) terbukti. $\square$

Diawal telah dijelaskan bahwa definisi ke-periodikan pada matriks max-plus yang digunakan pada tulisan ini mengacu pada suatu kondisi khusus dari *almost linear periodic* pada (Molnárová, 2005), yakni suatu matriks max-plus $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ disebut sebagai matriks max-plus yang bersifat periodik apabila A merupakan matriks yang *almost linear periodic* dan pada $LF(A)$ terdapat suatu matriks $Q \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dimana semua entri pada Q bernilai sama. Dari definisi tersebut dapat ditunjukkan bahwa $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ bersifat periodik bila dan hanya bila A mempunyai identitas periodik, dan selanjutnya juga akan ditunjukkan suatu sifat menarik dari identitas periodik dari A yang analog dengan beberapa sifat dari identitas periodik yang dijelaskan pada Proposisi 4.1.3.

Definisi 4.1.5. *Diberikan suatu $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$. A disebut sebagai matriks max-plus yang bersifat* ***periodik*** *apabila A merupakan suatu matriks max-plus yang almost linear periodic dan pada $LF(A)$ terdapat suatu matriks $R \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dimana semua entri pada R bernilai sama. Apabila A bersifat periodik, nilai dari $ldef(A) + 1$ dan $lper(A)$ secara berurutan disebut sebagai* ***transient dari A*** *dan* ***periode dari A****, dinotasikan sebagai*

$t(A)$ dan $p(A)$. Terakhir, apabila A bersifat periodik, ***himpunan faktor dari A****, dinotasikan sebagai $Q(A)$, merupakan suatu himpunan riil dimana $Q(A) = \{r|r \in LF(a^*_{ij})$ untuk semua $1 \leq i,j \leq n\}$, dalam hal ini apabila $Q(A)$ merupakan suatu singleton, misalkan saja $Q(A) = \{q\}$, maka dapat kita definisikan* ***faktor dari A****, dinotasikan sebagai $q(A)$, sebagai suatu bilangan riil dimana $q(A) = q$.*

Teorema 4.1.6. *Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{max}$. A bersifat periodik bila dan hanya bila A mempunyai identitas periodik.*

Bukti. Misalkan suatu $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{max}$ bersifat periodik. Berdasarkan definisi diperoleh $t(A) = ldef(A) + 1 = max\{ldef(a^*_{ij})\} + 1$, $p(A) = lper(A) = kpk\{lper(a^*_{ij})\}$, sehingga apabila diambil sebarang $q \in Q(A)$ untuk semua $1 \leq i,j \leq n$, berlaku

$$q^{\otimes p(A)} \otimes A^{\otimes t(A)} = \begin{bmatrix} q^{\otimes p(A)} \otimes a_{11}^{\otimes t(A)} & \ldots & \ldots & \ldots & q^{\otimes p(A)} \otimes a_{1n}^{\otimes t(A)} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & q^{\otimes p(A)} \otimes a_{ij}^{\otimes t(A)} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ q^{\otimes p(A)} \otimes a_{n1}^{\otimes t(A)} & \ldots & \ldots & \ldots & q^{\otimes p(A)} \otimes a_{nn}^{\otimes t(A)} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{\otimes t(A)+p(A)} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{1n}^{\otimes t(A)+p(A)} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & a_{ij}^{\otimes t(A)+p(A)} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{\otimes t(A)+p(A)} & \ldots & \ldots & \ldots & a_{nn}^{\otimes t(A)+p(A)} \end{bmatrix} = A^{\otimes t(A)+P(A)}$$

dan menggunakan induksi dapat kita peroleh bahwa untuk semua bilangan asli $d \geq t(A)$ berlaku

$$q^{\otimes p(A)} \otimes A^{\otimes d} = A^{\otimes d+P(A)}$$

sehingga dapat disimpulkan $(p(A), t(A), q)$ merupakan suatu identitas periodik dari A, yang berarti A mempunyai identitas periodik sehingga $(\Rightarrow)$ terbukti.

Dan untuk sebaliknya, dimisalkan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{max}$ mempunyai identitas periodik, artinya terdapat $(x, y, z) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{R}$ dimana untuk semua bilangan asli $d \geq y$ berlaku

$$z^{\otimes x} \otimes A^{\otimes d} = A^{\otimes d+x}$$

sehingga

$$\begin{bmatrix} z^{\otimes x} \otimes a_{11}^{\otimes d} & \ldots & \ldots & \ldots & z^{\otimes x} \otimes a_{1n}^{\otimes d} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & z^{\otimes x} \otimes a_{ij}^{\otimes d} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ z^{\otimes x} \otimes a_{n1}^{\otimes d} & \ldots & \ldots & \ldots & z^{\otimes x} \otimes a_{nn}^{\otimes d} \end{bmatrix} = z^{\otimes x} \otimes A^{\otimes d} = A^{\otimes d+x}$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}^{\otimes d+x} & \dots & \dots & \dots & a_{1n}^{\otimes d+x} \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & a_{ij}^{\otimes d+x} & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^{\otimes d+x} & \dots & \dots & \dots & a_{nn}^{\otimes d+x} \end{bmatrix}$$

yang berakibat (x, y, z) merupakan identitas periodik dari semua barisan entri A a_{ij}^*, yang artinya A *almost linear periodic*. Terakhir, misalkan pada A terdapat barisan entri a_{ij}^* yang *uniquely periodic* dan terdapat barisan entri a_{kl}^* yang tidak *uniquely periodic*. Pada sebarang barisan entri a_{ij}^* yang *uniquely periodic*, menggunakan Proposisi 4.1.3 dapat kita pastikan bahwa $lfac(a_{ij}^*) = z$, dan pada sebarang barisan entri a_{kl}^* yang tidak *uniquely periodic*, menggunakan Proposisi 4.1.3 dapat kita pastikan bahwa $z \in LF(a_{kl}^*)$, sehingga $z \in LF(a_{fg}^*)$ untuk semua $1 \leq f, g \leq n$ yang artinya berdasarkan Definisi 4.1.5 dapat kita simpulkan bahwa A bersifat periodik, dan menggunakan argumen yang serupa dapat kita buktikan bahwa untuk A yang tidak memenuhi permisalan diatas juga bersifat periodik sehingga $(\Leftarrow)$ terbukti. $\square$

Dari Proposisi 4.1.2 telah dijelaskan bahwa suatu barisan *almost linear periodic* a^* di $\mathbb{R}_{max}$ mempunyai $lfac(a^*)$ yang terdefinisi secara baik bila dan hanya bila a^* *uniquely periodic*. Analog dengan hal tersebut, dapat ditunjukkan bahwa pada matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ yang bersifat periodik, $q(A)$ terdefinisi bila dan hanya bila A *uniquely periodic*.

Proposisi 4.1.4. *Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ yang bersifat periodik. A uniquely periodic bila dan hanya bila terdapat barisan entri a_{ij}^* pada A dimana a_{ij}^* uniquely periodic.*

Bukti. Untuk membuktikan $(\Rightarrow)$, akan dibuktikan kontrapositifnya, yakni apabila pada A semua barisan entrinya merupakan barisan yang tidak *uniquely periodic*, maka A tidak *uniquely periodic*.

Misalkan pada A semua entri barisannya tidak *uniquely periodic*, maka menggunakan Proposisi 4.1.3 dapat kita pastikan bahwa untuk sebarang $r \in \mathbb{R}$ berlaku $r \in LF(a_{ij}^*)$ untuk semua $1 \leq i, j \leq n$, sehingga berdasarkan Definisi 4.1.5 dapat disimpulkan $r \in Q(A)$, dan karena hal tersebut berlaku untuk semua $r \in \mathbb{R}$, maka $Q(A) = \mathbb{R}$. Selanjutnya, ambil sebarang dua bilangan riil berbeda, dan katakanlah kedua bilangan tersebut adalah j dan s, berdasarkan penjelasan sebelumnya kita peroleh $j, s \in Q(A)$, dan dari pembuktian pada Teorema 4.1.6 dapat dipastikan bahwa $(p(A), t(A), j), (p(A), t(A), s) \in IP(A)$ sehingga A tidak *uniquely periodic*, yang berarti $(\Rightarrow)$ telah terbukti.

Selanjutnya, misalkan pada A terdapat barisan entri a_{ij}^* dimana a_{ij}^* *uniquely periodic* dan A tidak *uniquely periodic*. Karena A tidak *uniquely periodic* dan $IP(A) \neq \emptyset$, maka terdapat $(x, y, z), (p, t, q) \in IP(A)$ dimana $z \neq q$. Selanjutnya, karena $(x, y, z), (p, t, q) \in IP(A)$, dari pembuktian pada Teorema 4.1.6 dapat dipastikan bahwa $(x, y, z), (p, t, q) \in IP(a_{ij}^*)$ untuk semua $1 \leq i, j \leq n$, dan dari permisalan diawal telah dipastikan bahwa terdapat barisan entri a_{kl}^* dimana a_{kl}^* *uniquely periodic*, sehingga $(x, y, z), (p, t, q) \in IP(a_{kl}^*)$ dan menggunakan Proposisi 4.1.3 kita peroleh $lfac(a_{kl}^*) = z$ dan $lfac(a_{kl}^*) = q$, yang artinya terjadi kontradiksi sehingga permisalan tertolak. Sampai sini dapat disimpulkan bahwa apabila pada A terdapat barisan entri a_{ij}^* dimana a_{ij}^* *uniquely periodic*, maka haruslah A *uniquely periodic*, sehingga $(\Leftarrow)$ terbukti. $\square$

Proposisi 4.1.5. *Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ yang bersifat periodik. $q(A)$ terdefinisi bila dan hanya bila A uniquely periodic.*

Bukti. Untuk membuktikan ($\Rightarrow$) akan dibuktikan kontrapositifnya, yakni apabila A tidak *uniquely periodic* maka $q(A)$ tidak terdefinisi.

Misalkan A tidak *uniquely periodic*, maka berdasarkan Proposisi 4.1.4 kita peroleh bahwa semua barisan entri a^*_{ij} pada A merupakan barisan yang tidak *uniquely periodic*, artinya untuk semua $r \in \mathbb{R}$, $r \in LF(a^*_{ij})$ untuk semua $1 \leq i, j \leq n$ sehingga berdasarkan Definisi 4.1.5 kita peroleh $r \in Q(A)$, dan karena hal tersebut berlaku untuk semua $r \in \mathbb{R}$ kita peroleh $Q(A) = \mathbb{R}$, yang artinya $Q(A)$ bukanlah suatu *singleton* sehingga berdasarkan Definisi 4.1.5, $q(A)$ tidak terdefinisi yang berarti ($\Rightarrow$) telah terbukti.

Selanjutnya, misalkan A *uniquely periodic* dan $Q(A)$ bukanlah suatu *singleton*. Karena A *uniquely periodic*, menggunakan Proposisi 4.1.4 dapat kita pastikan bahwa terdapat barisan entri a^*_{ij} pada A yang *uniquely periodic*, dan karena $Q(A)$ bukanlah suatu *singleton* maka dapat dipastikan terdapat dua bilangan riil berbeda r dan s dimana $lfac(a^*_{ij}) = r$ dan $lfac(a^*_{ij}) = s$, sehingga terjadi kontradiksi yang artinya permisalan tertolak. Sehingga dapat kita simpulkan bahwa apabila A *uniquely periodic* maka $Q(A)$ haruslah suatu *singleton* atau dengan kata lain $q(A)$ haruslah terdefinisi, sehingga ($\Leftarrow$) terbukti. $\square$

Teorema 4.1.7. *Diberikan suatu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{max}$ yang bersifat periodik. $Q(A) \neq \emptyset$ dan untuk semua $r \in Q(A)$, $(p(A), t(A), r)$ merupakan suatu identitas periodik dari A dan untuk semua $(p, t, q) \in IP(A)$, ketiga hal berikut berlaku*

(i) $p(A)|p$

(ii) $q(A) = q$ *bila dan hanya bila A uniquely periodic*

(iii) $Q(A) = \mathbb{R}$ *bila dan hanya bila A tidak uniquely periodic*

Bukti. Berdasarkan Definisi 4.1.5, mudah dilihat bahwa apabila A bersifat periodik, maka $Q(A) \neq \emptyset$, dan juga dari pembuktian pada Teorema 4.1.6 dapat kita peroleh bahwa untuk semua $r \in Q(A)$, $(p(A), t(A), r)$ merupakan suatu identitas periodik dari A. Selanjutnya, dari pembuktian pada Teorema 4.1.6 juga dapat kita peroleh bahwa apabila $(p, t, q) \in IP(A)$, maka (p, t, q) merupakan suatu identitas periodik dari semua barisan entri pada A, sehingga menggunakan fakta tersebut (i) mudah dibuktikan. Lagi, dari pembuktian pada Proposisi 4.1.5 kita peroleh bahwa apabila A tidak *uniquely periodic* maka $Q(A) = \mathbb{R}$, dan menggunakan Proposisi 4.1.5 mudah dilihat bahwa apabila $Q(A) = \mathbb{R}$ maka A tidak *uniquely periodic*, sehingga sampai sini (iii) telah terbukti, yang artinya untuk membuktikan teorema ini hanya perlu dibuktikan bahwa (ii) benar.

Pada (ii), menggunakan Proposisi 4.1.5 mudah dibuktikan bahwa ($\Rightarrow$) benar, sehingga untuk membuktikan (ii) hanya perlu dibuktikan ($\Leftarrow$). Misalkan A *uniquely periodic*, maka berdasarkan Proposisi 4.1.5 dan Definisi 4.1.5 kita dapati bahwa $q(A)$ terdefinisi dan $q(A) \in Q(A)$, sehingga berdasarkan penjelasan sebelumnya kita peroleh $(p(A), t(A), q(A)) \in IP(A)$. Terakhir, karena A *uniquely periodic* maka terang saja apabila $(p, t, q) \in IP(A)$ maka $q(A) = q$ (karena sebelumnya telah diketahui $(p(A), t(A), q(A)) \in IP(A)$), sehingga ($\Leftarrow$) telah terbukti. $\square$

Diberikan suatu $A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{max}$, berdasarkan Definisi 4.1.2 kita peroleh bahwa apabila A *uniquely periodic* maka $IP(A) \neq \emptyset$, dan juga dari Teorema 4.1.6 kita peroleh $IP(A) \neq \emptyset$ mengakibatkan A bersifat periodik, dan lagi berdasarkan definisi ke-periodikan pada

Definisi 4.1.5 kita dapati bahwa apabila A bersifat periodik maka A *almost linear periodic*, sehingga dapat kita peroleh deret implikasi berikut

$$A \textit{ uniquely periodic} \Rightarrow A \text{ bersifat periodik} \Rightarrow A \textit{ almost linear periodic},$$

dan dari definisi *uniqeuly periodic* yang telah dijelaskan sebelumnya dapat ditunjukkan bahwa semua *latin square* max-plus dengan orde lebih dari 1 sejatinya juga merupakan matriks max-plus yang *uniqeuly periodic.*

Proposisi 4.1.6. *(Molnárová, 2005) Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ yang tak tereduksi dengan nilai eigen λ, maka A bersifat periodik dengan $\lambda \in Q(A)$.*

Proposisi 4.1.7. *Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dengan $n \geq 2$, maka A tak tereduksi bila dan hanya bila $n > 2$ atau semua entri tak diagonalnya bernilai riil.*

Teorema 4.1.8. *Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dengan $n \geq 2$ dan λ merupakan nilai eigen dari A. A uniquely periodic dengan $q(A) = \lambda$.*

Dapat diamati bahwasannya apabila suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ bersifat periodik dengan $t(A) = 1$ dan $0 \in Q(A)$, maka $(< A >, \otimes)$ membentuk grup, dimana $< A >:= \{A^{\otimes k} \| k \in \mathbb{N}\}$. Sehingga terdapat suatu himpunan berhingga $H \subseteq \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ sedemikian sehingga $(H, \otimes)$ membentuk grup dan $A \in H$.

Definisi 4.1.9. *Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, $< A >$ menotasikan suatu himpunan yang memuat semua hasil perpangkatan dari A terhadap operasi $\otimes$, atau dengan kata lain $< A >:= \{A^{\otimes k} | k \in \mathbb{N}\}$.*

Definisi 4.1.10. *Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, maka A disebut sebagai **anggota grup** apabila terdapat suatu himpunan berhingga $H \subseteq \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ sedemikian sehingga $(H, \otimes)$ membentuk grup dan $A \in H$.*

Dari definisi diatas, dapat kita peroleh bahwa untuk semua $X \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, X merupakan anggota grup bila dan hanya bila $(< X >, \otimes)$ membentuk grup. Sehingga untuk semua *latin square* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, apabila A merupakan suatu anggota grup maka terdapat $p \in \mathbb{N}$ sehingga $(p, 1, 0) \in IP(A)$, dan dari Teorema 4.1.8 kita ketahui bahwa A *uniquely periodic*, sehingga menggunakan Teorema 4.1.7 kita peroleh $q(A) = 0$, dan kembali menggunakan Teorema 4.1.8 dapat dipastikan bahwa nilai eigen dari A adalah 0. Syifa'ul dalam (Mufid & Subiono, 2014) telah menunjukkan bahwa nilai eigen dari suatu latin square max-plus sama dengan nilai dari entri maksimum dari latin square tersebut, sehingga untuk memudahkan penulisan, istilah "*latin square*" pada tulisan ini kedepannya selalu mengacu pada latin square dengan orde lebih dari 1 dan entri maksimumnya adalah 0.

Selanjutnya akan ditunjukkan beberapa hal menarik mengenai sifat periodik *latin square* max-plus.

Definisi 4.1.11. *Suatu matriks $P \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dikatakan sebagai **matriks permutasi** apabila pada tiap kolom dan baris pada P terdapat tepat satu entri 0, dan entri tak-0 pada P hanyalah ϵ. Untuk semua matriks permutasi $P \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, **permutasi-0 dari P**, dinotasikan sebagai σ_0^P, merupakan suatu permutasi pada S_n sedemikian sehingga untuk semua $1 \leq i, j \leq n$, apabila $P_{ij} = 0$ maka $\sigma_0^P(i) = j$, dan apabila $y \in S_n$ sedemikian sehingga $\sigma_0^P = y$, maka P dapat dinotasikan dengan $P(y)$. Suatu matriks permutasi $E \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ disebut sebagai **matriks identitas** apabila semua entri diagonalnya bernilai 0. Untuk semua latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, $P(A)$ menotasikan matriks permutasi sedemikian sehingga $\sigma_0^{P(A)} = \sigma_0^A$.*

Proposisi 4.1.8. *Diberikan suatu matriks* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ *dan matriks permutasi* $P \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$*, dengan* $g = \sigma_0^P$*. Untuk semua* $1 \leq i, j \leq n$*,* $(P \otimes A)_{ij} = A_{g(i)j}$ *dan* $(A \otimes P)_{ij} = A_{ig^{-1}(j)}$*.*

Proposisi 4.1.9. *Diberikan suatu latin square* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ *dimana* A *bukan matriks permutasi dan suatu bilangan asli* $k \geq 1$*. Apabila* $\sum(C)$ *menotasikan jumlahan semua entri pada* $C \in \mathbb{R}_{max}^{m\times k}$*, maka kedua hal berikut berlaku*

(i) $\sum(A^{\otimes k+1}) \geq \sum(A^{\otimes k})$

(ii) $\sum(A^{\otimes k+1}) = \sum(A^{\otimes k}) \iff A^{\otimes k+1} = A^{\otimes k} \otimes P(A) = P(A) \otimes A^{\otimes k}$

Bukti. Misalkan $A_{i:}^{\otimes m}$ dan $A_{:j}^{\otimes m}$ secara berurutan menotasikan vektor baris ke-i dan vektor kolom ke-j di $A^{\otimes m}$. Untuk membuktikan proposisi ini terlebih dahulu akan dibuktikan bahwa untuk semua $1 \leq i, j \leq n$ hal berikut berlaku

(0.1) $\sum(A_{i:}^{\otimes k+1}) \neq \epsilon$

(0.2) $\sum(A_{:j}^{\otimes k+1}) \neq \epsilon$

Apabila $n > 2$, dari pembuktian pada Proposisi 4.1.7 dapat kita peroleh bahwa $A^{\otimes k+1}$ tidak memuat entri bernilai ϵ, sehingga jelas saja untuk semua $1 \leq i, j \leq n$, $\sum(A_{i:}^{\otimes k+1})$ dan $\sum(A_{:j}^{\otimes k+1})$ keduanya tidak bernilai ϵ, sehingga pernyataan (0.1) dan (0.2) berlaku pada kasus $n > 2$. Selanjutnya apabila $n = 2$, karena A bukanlah matriks permutasi maka A tidak memuat entri bernilai ϵ, sehingga jelas saja $A^{\otimes k+1}$ tidak memuat entri bernilai ϵ yang berakibat untuk semua $1 \leq i, j \leq n$, $\sum(A_{i:}^{\otimes k+1})$ dan $\sum(A_{:j}^{\otimes k+1})$ keduanya tidak bernilai ϵ, sehingga pernyataan (0.1) dan (0.2) juga berlaku pada kasus $n = 2$, yang artinya pernyataan (0.1) dan (0.2) telah terbukti.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa untuk semua $1 \leq i, j \leq n$ beberapa hal berikut berlaku

(a.1) $\sum(A_{i:}^{\otimes k+1}) \geq \sum(A_{i:}^{\otimes k})$

(a.2) $\sum(A_{:j}^{\otimes k+1}) \geq \sum(A_{:j}^{\otimes k})$.

Karena pembuktian untuk (a.1) dan (a.2) analog, untuk membuktikan kedua pernyataan tersebut cukup dibuktikan salahsatunya, dan dalam pembuktian yang akan dibuktikan adalah (a.1). Misalkan $g := \sigma_0^A$, $N := \{1, 2, ..., n\}$,dan $i \in N$, maka untuk semua $l \in N$ hal berikut berlaku

$$(A_{i:}^{\otimes k+1})_{g(l)} = (A_{i:}^{\otimes k} \otimes A)_{g(l)} = \bigoplus_{m\in N} (A_{i:}^{\otimes k})_m \otimes A_{mg(l)} = (\bigoplus_{m\in N-\{l\}} (A_{i:}^{\otimes k})_m \otimes A_{mg(l)}) \oplus ((A_{i:}^{\otimes k})_l \otimes A_{lg(l)})$$

$$= (\bigoplus_{m\in N-\{l\}} (A_{i:}^{\otimes k})_m \otimes A_{mg(l)}) \oplus (A_{i:}^{\otimes k})_l \geq (A_{i:}^{\otimes k})_l$$

sehingga

$$\sum(A_{i:}^{\otimes k+1}) = \sum_{m\in N} (A_{i:}^{\otimes k+1})_m = \sum_{m\in N} (A_{i:}^{\otimes k+1})_{g(m)} \geq \sum_{m\in N} (A_{i:}^{\otimes k})_{g(m)} = \sum(A_{i:}^{\otimes k})$$

.

Karena pertidaksamaan tersebut berlaku untuk semua $i \in N$, maka (a.1) telah terbukti.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa untuk semua $i, j \in N$ beberapa hal berikut berlaku

(b.1) $\sum(A_{i:}^{\otimes k+1}) = \sum(A_{i:}^{\otimes k}) \iff A_{i:}^{\otimes k+1} = A_{i:}^{\otimes k} \otimes P(A)$

(b.2) $\sum(A_{:j}^{\otimes k+1}) = \sum(A_{:j}^{\otimes k}) \iff A_{:j}^{\otimes k+1} = P(A) \otimes A_{:j}^{\otimes k}$.

Karena pembuktian untuk (b.1) dan (b.2) analog, untuk membuktikan kedua pernyataan tersebut cukup dibuktikan salahsatunya, dan dalam pembuktian ini yang akan dibuktikan adalah (b.1). ($\Leftarrow$) pada (b.1) cukup trivial, sehingga yang dibuktikan hanyalah ($\Rightarrow$), dan untuk membuktikan hal tersebut akan dibuktikan kontrapositifnya.

Misal $A_{l:}^{\otimes k+1} \neq A_{l:}^{\otimes k} \otimes P(A)$, maka apabila kita partisi N kedalam dua himpunan, yakni

- $S := \{r | r \in N \text{ dan } (A_{l:}^{\otimes k+1})_{g(r)} = (A_{l:}^{\otimes k})_r\}$
- $S^C = N - S$

maka $S^C \neq \emptyset$. Selanjutnya amati bahwa untuk semua $t \in S^C$, karena $(A_{l:}^{\otimes k+1})_{g(t)} \neq (A_{l:}^{\otimes k})_t$, maka

$$(A_{l:}^{\otimes k+1})_{g(t)} = (A_{l:}^{\otimes k} \otimes A)_{g(t)} = \bigoplus_{m \in N} (A_{l:}^{\otimes k})_m \otimes A_{mg(t)} = (\bigoplus_{m \in N-\{t\}} (A_{l:}^{\otimes k})_m \otimes A_{mg(t)}) \oplus ((A_{l:}^{\otimes k})_t \otimes A_{tg(t)})$$

$$= (\bigoplus_{m \in N-\{t\}} (A_{l:}^{\otimes k})_m \otimes A_{mg(t)}) \oplus (A_{l:}^{\otimes k})_t > (A_{l:}^{\otimes k})_t$$

sehingga menggunakan fakta dari (0.1) dapat kita peroleh

$$\sum(A_{l:}^{\otimes k+1}) = \sum_{m \in N} (A_{l:}^{\otimes k+1})_m = \sum_{m \in N} (A_{l:}^{\otimes k+1})_{g(m)} = \sum_{r \in S} (A_{l:}^{\otimes k+1})_{g(r)} + \sum_{h \in S^C} (A_{l:}^{\otimes k+1})_{g(h)}$$

$$> \sum_{r \in S} (A_{l:}^{\otimes k+1})_{g(r)} + \sum_{h \in S^C} (A_{l:}^{\otimes k})_h = \sum_{r \in S} (A_{l:}^{\otimes k})_r + \sum_{h \in S^C} (A_{l:}^{\otimes k})_h = \sum(A_{l:}^{\otimes k})$$

sehingga kontrapositif dari ($\Rightarrow$) terbukti, yang berarti (b.1) benar.

Terakhir kita akan buktikan dua hal yang menjadi fokus utama dalam proposisi ini, yakni

(i) $\sum(A^{\otimes k+1}) \geq \sum(A^{\otimes k})$

(ii) $\sum(A^{\otimes k+1}) = \sum(A^{\otimes k}) \iff A^{\otimes k+1} = A^{\otimes k} \otimes P(A) = P(A) \otimes A^{\otimes k}$

.

Menggunakan (a.1) mudah diperoleh bahwa

$$\sum(A^{\otimes k+1}) = \sum_{m\in N}(\sum(A^{\otimes k+1}_{m:})) \geq \sum_{m\in N}(\sum(A^{\otimes k}_{m:})) = \sum(A^{\otimes k})$$

sehingga pernyataan (i) telah terbukti. Selanjutnya, mudah dilihat bahwa ($\Leftarrow$) cukup trivial, sehingga untuk membuktikan (ii) cukup dibuktikan bahwa ($\Rightarrow$) benar, dan untuk membuktikan ($\Rightarrow$) akan ditunjukkan bahwa kontrapostifnya benar, yakni

$$A^{\otimes k+1} \neq A^{\otimes k} \otimes P(A) \text{ atau } A^{\otimes k+1} \neq P(A) \otimes A^{\otimes k} \Rightarrow \sum(A^{\otimes k+1}) \neq \sum(A^{\otimes k}).$$

Seandainya $A^{\otimes k+1} \neq A^{\otimes k} \otimes P(A)$, maka apabila N kita partisi kedalam dua himpunan, yakni

- $H := \{r | r \in N \text{ dan } A^{\otimes k+1}_{r:} = A^{\otimes k}_{r:} \otimes P(A)\}$
- $H^C = N - H$

maka $H^C \neq \emptyset$. Selanjutnya amati bahwa untuk semua $l \in H^C$, dari (b.1) kita peroleh $\sum(A^{\otimes k+1}_{l:}) \neq \sum(A^{\otimes k}_{l:})$, dan menggunakan (a.1) kita peroleh pertidaksamaan $\sum(A^{\otimes k+1}_{l:}) > \sum(A^{\otimes k}_{l:})$, sehingga berangkat dari fakta $\sum(A^{\otimes k+1}) \neq \epsilon$ yang telah dinyatakan pada bagian awal pembuktian ini, kita peroleh pertidaksamaan berikut

$$\sum(A^{\otimes k+1}) = \sum_{m\in N}(\sum(A^{\otimes k+1}_{m:})) = \sum_{r\in H}(\sum(A^{\otimes k+1}_{r:})) + \sum_{h\in H^C}(\sum(A^{\otimes k+1}_{h:}))$$

$$> \sum_{r\in H}(\sum(A^{\otimes k+1}_{r:})) + \sum_{h\in H^C}(\sum(A^{\otimes k}_{h:})) = \sum_{r\in H}(\sum(A^{\otimes k}_{r:})) + \sum_{h\in H^C}(\sum(A^{\otimes k}_{h:})) = \sum(A^{\otimes k})$$

yang artinya $\sum(A^{\otimes k+1}) \neq \sum(A^{\otimes k})$, dan tanpa mengurangi keumuman dapat kita simpulkan bahwa kontrapostif dari ($\Rightarrow$) benar, sehingga pernyataan (ii) terbukti. $\square$

Proposisi 4.1.10. *Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{max}$ dan suatu bilangan $k \in \mathbb{N}$. $A^{\otimes k}$ berada dalam fase periodik bila dan hanya bila $A^{\otimes k+1} = A^{\otimes k} \otimes P(A) = P(A) \otimes A^{\otimes k}$*

Bukti. Mudah dibuktikan bahwa proposisi ini berlaku pada kasus dimana A merupakan matriks permutasi, sehingga yang perlu dibuktikan adalah proposisi ini juga berlaku pada kasus dimana A bukan suatu matriks permutasi. ($\Leftarrow$) sudah cukup trivial, sehingga hanya perlu dibuktikan ($\Rightarrow$).

Seandainya $A^{\otimes k}$ berada dalam fase periodik dan $A^{\otimes k+1} \neq A^{\otimes k} \otimes P(A)$. Karena $A^{\otimes k}$ berada dalam fase periodik dan $q(A) = 0$, artinya terdapat $m \in \mathbb{N}$ dimana $A^{\otimes k+m} = A^{\otimes k}$. Dilain sisi karena $A^{\otimes k+1} \neq A^{\otimes k} \otimes P(A)$, menggunakan Proposisi 4.1.9 dapat kita peroleh $\sum(A^{\otimes k+1}) \neq \sum(A^{\otimes k})$ sehingga

$$\sum(A^{\otimes k+1}) > \sum(A^{\otimes k})$$

dan lagi, juga menggunakan Proposisi 4.1.9 mudah dibuktikan bahwa $\sum(A^{\otimes k+m}) \geq \sum(A^{\otimes k+1})$ sehingga

$$\sum(A^{\otimes k+m}) > \sum(A^{\otimes k}) \Rightarrow A^{\otimes k+m} \neq A^{\otimes k}$$

yang artinya terjadi kontradiksi, sehingga pengandaian tertolak. Tanpa mengurangi keumuman dapat kita simpulkan bahwa ($\Rightarrow$) adalah benar, yang berarti proposisi ini telah terbukti. $\square$

Proposisi 4.1.11. *Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{max}$. $p(A)$ merupakan bilangan asli terkecil sedemikian sehingga $(\sigma_0^A)^{\circ p(A)} = ()$.*

Bukti. Ambil suatu $k \in \mathbb{N}$ dimana $k \geq t(A)$ dan $A^{\otimes k}$ berada dalam fase periodik.

Dari Teorema 4.1.7 kita peroleh $(p(A), t(A), q(A)) \in IP(A)$, dan karena $k \geq t(A)$ kita dapati

$$A^{\otimes k+p(A)} = q(A)^{\otimes p(A)} \otimes A^{\otimes k}$$

dan lagi karena bahasan *latin square* disini telah dibatasi pada *latin square* dengan entri maksimum 0, artinya $q(A) = 0$ sehingga

$$A^{\otimes k+p(A)} = q(A)^{\otimes p(A)} \otimes A^{\otimes k} = A^{\otimes k}.$$

Selanjutnya amati bahwa karena $A^{\otimes k}$ berada dalam fase periodik, menggunakan Proposisi 4.1.9 kita dapati

$$A^{\otimes k+p(A)} = A^{\otimes k} \otimes P(A)^{\otimes p(A)} \Rightarrow A^{\otimes k} = A^{\otimes k+p(A)} = A^{\otimes k} \otimes P(A)^{\otimes p(A)}$$

sehingga $P(A)^{\otimes p(A)}$ haruslah merupakan suatu matriks identitas, dan dari definisi 4.1.11 $P(A)$ dapat kita nyatakan sebagai $P(\sigma_0^A)$ sehingga $P(\sigma_0^A)^{\circ\otimes p(A)}$ merupakan suatu matriks identitas. Menggunakan Proposisi 4.1.8, karena $P(\sigma_0^A)^{\circ\otimes p(A)}$ merupakan suatu matriks identitas dapat kita peroleh bahwa $(\sigma_0^A)^{\circ p(A)} = ()$, sehingga apabila $|\sigma_0^A|$ menotasikan bilangan asli terkecil dimana $(\sigma_0^A)^{\circ|\sigma_0^A|} = ()$, kita dapatkan

$$|\sigma_0^A| \text{ membagi } p(A) \Rightarrow p(A) \geq |\sigma_0^A|.$$

Selanjutnya, karena $|\sigma_0^A|$ merupakan bilangan asli terkecil dimana $(\sigma_0^A)^{\circ|\sigma_0^A|} = ()$, maka menggunakan Proposisi 4.1.8 kita peroleh $P(A)^{\otimes|\sigma_0^A|}$ merupakan matriks identitas, dan lagi karena $A^{\otimes k}$ berada dalam fase periodik kita dapati

$$A^{\otimes k} = A^{\otimes k} \otimes P(A)^{|\sigma_0^A|} = A^{\otimes k+|\sigma_0^A|} \Rightarrow A^{\otimes k+|\sigma_0^A|} = 0^{\otimes|\sigma_0^A|} \otimes A^{\otimes k}$$

dan menggunakan induksi dapat kita peroleh bahwa $(|\sigma_0^A|, k, 0) \in IP(A)$. Terakhir, karena $(|\sigma_0^A|, k, 0) \in IP(A)$, berdasarkan Teorema 4.1.7 kita peroleh bahwa

$$p(A) \text{ membagi } |\sigma_0^A| \Rightarrow |\sigma_0^A| \geq p(A)$$

sehingga, karena sebelumnya telah diketahui bahwa $p(A) \geq |\sigma_0^A|$, maka dapat disimpulkan $p(A) = |\sigma_0^A|$ sehingga proposisi ini terbukti. $\square$

Definisi 4.1.12. *Diberikan suatu matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{max}$ dan $l_1, l_2, ..., l_m$ merupakan semua nilai dari semua entri pada A dimana $||l_k||$ menotasikan jumlah entri di A dengan nilai l_k. Apabila $H \subseteq \mathbb{R}_{max} \times \mathbb{N}$ merupakan suatu himpunan dimana $H = \{(l_i, ||l_i||) | 1 \leq i \leq m\}$ maka dapat kita katakan bahwa H merupakan* ***himpunan penyusun dari A*** *dan* ***A disusun oleh H****, dalam hal ini H dapat dinotasikan sebagai $H_P(A)$. Terakhir, dapat dikatakan bahwa* ***barisan perpangkatan A berubah susunan di*** *$A^{\otimes k}$ apabila $H_P(A^{\otimes k}) \neq H_P(A^{\otimes k-1})$.*

Teorema 4.1.13. *Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ dan suatu bilangan $k \in \mathbb{N}$. Ketiga hal berikut saling ekivalen*

(i) $A^{\otimes k+1} = A^{\otimes k} \otimes P(A) = P(A) \otimes A^{\otimes k}$

(ii) $A^{\otimes k}$ *berada dalam fase periodik*

(iii) barisan perpangkatan A tidak berubah susunan di $A^{\otimes k+1}$

Bukti. Mudah dibuktikan bahwa teorema ini berlaku pada kasus dimana A merupakan matriks permutasi, sehingga akan dibuktikan bahwa teorema ini juga berlaku pada kasus dimana A bukanlah matriks permutasi.

Proposisi 4.1.10 telah menunjukkan bahwa ((i) $\iff$ (ii)) adalah benar, dan untuk membuktikan teorema ini akan dibuktikan bahwa pernyataan

(a) (i) bila dan hanya bila (iii)

adalah benar. Mudah diamati bahwa ($\Rightarrow$) pada (a) merupakan suatu hal yang trivial, sehingga untuk membuktikan (a) hanya perlu dibuktikan ($\Leftarrow$), dan untuk membuktikan hal tersebut akan dibuktikan bentuk kontrapositifnya, yakni

$$A^{\otimes k+1} \neq A^{\otimes k} \otimes P(A) \text{ atau } A^{\otimes k+1} \neq P(A) \otimes A^{\otimes k} \Rightarrow H_P(A^{\otimes k+1}) \neq H_P(A^{\otimes k}).$$

Seandainya $A^{\otimes k+1} \neq A^{\otimes k} \otimes P(A)$, maka berdasarkan Proposisi 4.1.9 kita peroleh

$$\sum(A^{\otimes k+1}) = \sum(A^{\otimes k} \otimes A^{\otimes 1}) > \sum(A^{\otimes k}) \Rightarrow H_P(A^{\otimes k+1}) \neq H_P(A^{\otimes k})$$

sehingga tanpa mengurangi keumuman dapat kita simpulkan bahwa kontrapositif dari ($\Leftarrow$) benar, yang berarti (a) telah terbukti. □

4.2 Syarat Perlu dan Cukup untuk Grup Latin Square pada Aljabar Max-Plus

Apabila suatu *latin square* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ merupakan suatu anggota grup, terang saja $A = A^{\otimes 1}$ berada dalam fase periodik. Dari fakta sederhana tersebut dapat diperoleh beberapa kondisi ekivalen sederhana untuk *latin square* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ merupakan anggota grup.

Teorema 4.2.1. *Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$. Empat pernyataan berikut saling ekivalen*

(i) A anggota grup

(ii) A berada dalam fase periodik

(iii) barisan perpangkatan A tidak berubah susunan di $A^{\otimes 2}$

(iv) $A^{\otimes 2} = A \otimes P(A) = P(A) \otimes A$

Bukti. Mudah dilihat bahwa (*i*) dan (*ii*) merupakan dua kondisi yang ekivalen, dan menggunakan Teorema 4.1.13 mudah diperoleh bahwa (*ii*),(*iii*), dan (*iv*) merupakan tiga kondisi yang saling ekivalen, sehingga sampai sini teorema ini telah terbukti. □

Definisi 4.2.2. *$H \subseteq \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ disebut sebagai* ***grup latin square*** *apabila $(H, \otimes)$ membentuk grup dan semua elemen di H merupakan latin square.*

Selanjutnya akan diberikan suatu himpunan yang dapat membantu kita dalam mengkonstruksi semua grup *latin square* yang memuat A, apabila diberikan *latin square* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ yang merupakan anggota grup.

Definisi 4.2.3. *Diberikan suatu latin square $E_{ls} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$. E_{ls} disebut sebagai* ***latin square identitas*** *apabila $E_{ls}^{\otimes 2} = E_{ls}$, dan apabila suatu latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ merupakan suatu anggota grup, $E_{ls}(A)$ menotasikan elemen identitas dari $(< A >, \otimes)$, dan $E_{ls}(A)$ disebut sebagai* ***latin square identitas yang bertautan dengan A****.*

Dapat diamati bahwa untuk semua *latin square* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, berdasarkan Teorema 4.2.1, semua elemen di $< A >$ juga merupakan *latin square*, sehingga $E_{ls}(A)$ pastilah merupakan suatu *latin square* identitas, dan sebaliknya, dapat dipastikan juga bahwa untuk semua *latin square* identitas $E_{ls} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, E_{ls} merupakan elemen identitas dari $< X >$, dimana X merupakan suatu *latin square* pada $\mathbb{R}_{max}^{n\times n}$.

Dari definisi diatas, apabila suatu latin square $E_{ls} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ merupakan suatu latin square identitas maka $E_{ls}^{\otimes 2} = E_{ls}$ yang mengakibatkan E_{ls} merupakan suatu anggota grup, sehingga berdasarkan Teorema 4.2.1, $E_{ls} = E_{ls}^{\otimes 2} = E_{ls} \otimes P(E_{ls})$. Akibatnya $P(E_{ls})$ merupakan suatu matriks identitas yang berarti $\sigma_0^{E_{ls}} = ()$, atau dengan kata lain semua entri diagonal pada E_{ls} bernilai 0.

Definisi 4.2.4. *Diberikan suatu latin square identitas $E_{ls} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, $F(E_{ls})$ menotasikan suatu himpunan yang menghimpun semua latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ sedemikian sehingga E_{ls} merupakan latin square identitas yang bertautan dengan A.*

Dapat ditunjukkan bahwasannya apabila diberikan suatu *latin square* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ yang merupakan anggota grup, $F(E_{ls}(A))$ merupakan grup *latin square* terbesar yang memuat A, atau dengan kata lain apabila G merupakan suatu grup *latin square* yang memua A, maka $G \leq F(E_{ls}(A))$.

Proposisi 4.2.1. *Diberikan suatu latin square identitas $E_{ls} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$. Suatu latin square $X \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ merupakan anggota dari $F(E_{ls})$ bila dan hanya bila terdapat matriks permutasi $P \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ sedemikian sehingga $X = E_{ls} \otimes P = P \otimes E_{ls}$.*

Bukti. $(\Rightarrow)$ Misalkan $X \in F(E_{ls})$, maka berdasarkan Definisi 4.2.4 dapat kita peroleh bahwa X merupakan suatu anggota grup dan terdapat $k \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $X^{\otimes k} = e$,yang berarti berdasarkan Teorema 4.2.1 diperoleh $E_{ls} = X^{\otimes k} = P(X) \otimes X^{\otimes k-1} = ... = (P(X))^{\otimes k-1} \otimes X$, dan dengan cara yang serupa dapat diperoleh pula $E_{ls} = X \otimes (P(X))^{\otimes k-1}$.

Karena $P(X)^{\otimes k-1}$ merupakan suatu matriks permutasi, maka terdapat suatu matriks permutasi $P' \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ sedemikian sehingga $P(X)^{\otimes k-1} \otimes P' = P' \otimes P(X)^{\otimes k-1} = E$, dimana E merupakan suatu matriks identitas pada $\mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, sehingga kita peroleh $X \otimes E = E_{ls} \otimes P'$ dan $E \otimes X = P' \otimes E_{ls}$, dan karena $X \otimes E$ dan $E \otimes X$ jelas saja keduanya sama dengan X, maka $X = E_{ls} \otimes P' = P' \otimes E_{ls}$, sehingga $(\Rightarrow)$ terbukti.

$(\Leftarrow)$ Cukup trivial. □

Teorema 4.2.5. *Untuk semua latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ yang merupakan anggota grup, $F(E_{ls}(A))$ merupakan grup latin square terbesar yang memuat A.*

Bukti. Jika $H \subseteq \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ merupakan suatu grup latin square yang memuat A, maka pastilah $E_{ls}(A)$ merupakan suatu elemen identitas pada H dan juga berdasarkan Teorema 4.2.1 dapat kita pastikan bahwa semua anggota di H merupakan suatu latin square yang merupakan anggota grup. Sehingga untuk semua $X \in H$, karena $E_{ls}(A)$ merupakan satu-satunya elemen identitas pada H maka haruslah $E_{ls}(A)$ juga merupakan suatu latin square identitas yang bertautan dengan X, sehingga $X \in F(E_{ls}(A))$ yang berarti $H \subseteq F(E_{ls}(A))$, sehingga yang perlu dilakukan untuk membuktikan proposisi ini hanyalah membuktikan bahwa $F(E_{ls}(A))$ membentuk grup terhadap operasi $\otimes$.

Dari penjelasan sebelumnya mudah disimpulkan bahwa $F(E_{ls}(A))$ pastilah memenuhi aksioma identitas dan invers, dan karena operasi $\otimes$ pada $\mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ jelas bersifat asosiatif, maka $(F(E_{ls}(A)), \otimes)$ pastilah juga memenuhi sifat asosiatif, sehingga aksioma yang perlu dibuktikan hanyalah aksioma tertutup. Ambil sebarang $R, S \in F(E_{ls}(A))$, dari Proposisi 4.2.1 dapat kita pastikan bahwa terdapat matriks permutasi sedemikian sehingga $R = E_{ls}(A) \otimes P_R = P_R \otimes E_{ls}(A)$ dan $S = E_{ls}(A) \otimes P_S = P_S \otimes E_{ls}(A)$, yang berarti $R \otimes S = E_{ls} \otimes P_R \otimes E_{ls} \otimes P_S = E_{ls} \otimes E_{ls} \otimes P_R \otimes P_S = e \otimes P_R \otimes P_S$ dan dengan cara yang serupa didapat $R \otimes S = P_R \otimes P_S \otimes E_{ls}$, sehingga berdasarkan Proposisi 4.2.1 dapat kita simpulkan bahwa $R \otimes S = P_R \otimes P_S \otimes e = e \otimes P_R \otimes P_S$ merupakan suatu anggota pada $F(E_{ls}(A))$ (karena hasil kali $\otimes$ terhadap dua matriks permutasi pasti juga menghasilkan suatu matriks permutasi), sehingga $F(E_{ls}(A))$ memenuhi aksioma tertutup. □

Sampai sini, kita telah mengetahui suatu cara untuk mengkonstruksi semua grup *latin square* yang memuat A apabila diberikan suatu *latin square* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ yang merupakan anggota grup, yakni dengan terlebih dahulu mengkonstruksi $F(E_{ls}(A))$, dan selanjutnya konstruksi semua subgrup pada $F(E_{ls}(A))$ yang memuat A. Namun kekurangan dari cara tersebut ialah dalam beberapa kasus, merupakan suatu hal yang sukar untuk mengkonstruksi $F(E_{ls}(A))$, dan kalaupun $F(E_{ls}(A))$ sudah berhasil dikonstruksi, mengkonstruksi semua subgrup pada $F(E_{ls}(A))$ yang memuat A juga bukanlah hal yang mudah. Karenanya akan ditunjukkan suatu grup yang iso-anti morfik terhadap $F(E_{ls}(A))$, namun disisi lain anggota-anggotanya lebih mudah untuk dikomputasi dibandingkan $F(E_{ls}(A))$.

Definisi 4.2.6. *Diberikan dua grup $(G, \circ)$ dan $(G', *)$. Suatu fungsi $f : G \to G'$ merupakan suatu **antimorfisma** apabila untuk semua $a, b \in G$, $f(a\circ b) = f(b)*f(a)$, dan suatu fungsi antimorfisma yang bijektif disebut sebagai **iso-anti morfisma**. G dikatakan **antimorfik** terhadap G' apabila terdapat antimorfisma yang memetakan G ke G', dan juga G dan G' dikatakan sebagai dua grup yang **iso-antimorfik** apabila terdapat iso-anti morfisma yang memetakan G ke G'.*

Dari definisi diatas, kita dapati bahwa suatu fungsi yang merupakan antimorfisma belum tentu suatu homomorfisma. Namun meskipun begitu, terdapat beberapa sifat menarik yang sama-sama dimiliki oleh antimorfisma dan homomorfisma.

Proposisi 4.2.2. *Diberikan dua grup A dan B, dan $f : A \to B$ merupakan suatu antimorfisma. Apabila $G \subseteq A$ merupakan suatu subgrup dari A, maka $f(G) := \{f(x)|x \in G\}$ merupakan suatu subgrup dari B.*

Bukti. Misal $\circ$ dan $*$ secara berurutan merupakan operasi yang dikenakan pada grup A dan B, maka untuk semua $f(a), f(b) \in f(G)$, berdasarkan definisi dari antimorfisma diperoleh $f(a) * f(b) = f(b \circ a)$, dan karena G merupakan grup, maka $b \circ a \in G$ sehingga

$f(a) * f(b) \in f(G)$, yang berarti $(f(G), *)$ merupakan suatu himpunan yang tertutup. Selanjutnya amati bahwa untuk sebarang $f(a) \in f(G)$, $f(a) * f(a^{\circ -1}) = f(a^{\circ -1} \circ a) = f(0_A) = f(a \circ a^{\circ -1}) = f(a^{\circ -1}) * f(a)$, dimana 0_H menotasikan elemen identitas pada grup H. Dapat dibuktikan bahwa $f(0_A) = 0_B$ sehingga $f(a) * f(a^{\circ -1}) = 0_B = f(a^{\circ -1}) * f(a)$ yang artinya $f(G)$ memenuhi aksioma invers. Terakhir, karena terang saja $f(G) \subseteq B$ dan sebelumnya telah dipastikan bahwa $(f(G), *)$ merupakan suatu himpunan yang tertutup dan memenuhi aksioma invers, maka $f(G) \leq B$ yang berarti proposisi ini telah terbukti. □

Proposisi 4.2.3. *Diberikan dua grup A dan B, dan $f : A \to B$ merupakan suatu antimorfisma. Apabila f injektif, maka f^{-1} merupakan suatu antimorfisma yang injektif.*

Bukti. Misalkan f injektif, maka jelas f^{-1} juga merupakan suatu fungsi yang injektif, sehingga yang perlu dilakukan hanyalah membuktikan bahwa f^{-1} merupakan suatu antimorfisma.

Ambil sebarang $f(r), f(s) \in f(A)$, dan misalkan $\circ$ dan $*$ secara berurutan merupakan operasi yang dikenakan pada A dan B, maka $f^{-1}(f(r) * f(s)) = f^{-1}(f(s \circ r)) = s \circ r = f^{-1}(f(s)) \circ f^{-1}(f(r))$, sehingga terbukti bahwa f^{-1} merupakan suatu antimorfisma. □

Dari dua proposisi diatas, dapat kita peroleh suatu sifat dari iso-anti morfisma yang dapat membantu kita dalam mengkonstruksi semua grup *latin square* yang memuat A, apabila diberikan suatu *latin square* $A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{max}$ yang merupakan anggota grup.

Teorema 4.2.7. *Diberikan dua grup A dan B, dan $f : A \to B$ merupakan suatu iso-anti morfisma. Untuk semua $G \subseteq A$, G grup bila dan hanya bila $f(G) := \{f(x) | x \in G\}$ grup.*

Bukti. Akibat langsung dari Proposisi 4.2.2 dan Proposisi 4.2.3 □

Dapat ditunjukkan bahwa $F(E_{ls})$ dan $Z(\sigma(E_{ls}))$ merupakan dua grup yang iso-anti morfik.

Definisi 4.2.8. *Diberikan suatu grup $(G, *)$ dan $H \subseteq G$. **Zentrum dari H**, dinotasikan sebagai $Z(H)$, merupakan suatu subset pada G yang memuat semua anggota pada G yang berkomutasi dengan semua anggota pada H, atau dengan kata lain $Z(H) = \{x | x \in G$ dan $x * a = a * x$ untuk semua $a \in H$ $\}$.*

Proposisi 4.2.4. *Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{max}$. untuk semua $\beta \in S_n$, $\beta \in Z(\sigma(A))$ bila dan hanya bila $P(\beta) \otimes A = A \otimes P(\beta)$.*

Bukti. Untuk membuktikan proposisi ini, hanya akan dibuktikan pernyataan $(\Rightarrow)$, dan pembuktian untuk $(\Leftarrow)$ dapat diperoleh dengan membalik proses pembuktian $(\Rightarrow)$.

Misal $\beta \in Z(\sigma(A))$. Ambil sebarang $\alpha \in \sigma(A)$ dan $1 \leq i \leq n$, maka amati bahwa $(\alpha \circ \beta^{\circ -1})(i) = (\beta^{\circ -1} \circ \alpha)(i)$, sehingga $A_{\beta^{\circ -1}\alpha(\beta^{\circ -1}(i))} = A_{\beta^{\circ -1}\beta^{\circ -1}(\alpha(i))}$. Karena $\alpha \in \sigma(A)$, kita peroleh persamaan berikut

$$A_{i\alpha(i)} = A_{\beta^{\circ -1}(i)\alpha(\beta^{\circ -1}(i))} = A_{\beta^{\circ -1}(i)\beta^{\circ -1}(\alpha(i))},$$

dan menggunakan Proposisi 4.1.8 dapat diperoleh

$$(P(\beta) \otimes A)_{\beta^{\circ -1}(i)\alpha(i)} = A_{\beta(\beta^{\circ -1}(i))\alpha(i)} = A_{i\alpha(i)} = A_{\beta^{\circ -1}(i)\beta^{\circ -1}(\alpha(i))} = (A \otimes P(\beta))_{\beta^{\circ -1}(i)\alpha(i)}.$$

Karena hal tersebut berlaku untuk semua $\alpha \in \sigma(A)$ dan $1 \leq i \leq n$, dapat disimpulkan $(P(\beta) \otimes A) = (A \otimes P(\beta))$, sehingga $(\Rightarrow)$ terbukti. □

Definisi 4.2.9. *Diberikan suatu latin square identitas $E_{ls} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$.* ***transformasi permutasi-0*** *terhadap $F(E_{ls})$, dinotasikan sebagai f_p, merupakan suatu fungsi $f_p : F(E_{ls}) \to Z(\sigma(E_{ls}))$ yang didefinisikan sebagai $f_p(X) = \sigma_0^X$ untuk semua $X \in F(E_{ls})$, dan* ***transformasi latin square*** *terhadap $Z(\sigma(E_{ls}))$, dinotasikan sebagai f_{ls}, merupakan suatu fungsi $f_{ls} : Z(\sigma(E_{ls})) \to F(E_{ls})$ yang didefinisikan sebagai $f_{ls}(y) = e \otimes P(y)$ untuk semua $y \in Z(\sigma(E_{ls})))$. Untuk semua subset $G \subseteq F(E_{ls})$, $f_p(G)$ menotasikan suatu himpunan yang didefinisikan sebagai $f_p(G) = \{f_p(g)|g \in G\}$, dan untuk semua subset $G' \subseteq Z(\sigma(E_{ls}))$, $f_{ls}(G')$ merupakan suatu himpunan yang didefinisikan sebagai $f_{ls}(G') = \{f_{ls}(g')|g' \in G'\}$.*

Proposisi 4.2.5. *Untuk semua latin square identitas $E_{ls} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, transformasi permutasi-0 pada $F(E_{ls})$ merupakan suatu bijeksi.*

Bukti. Untuk menunjukkan bahwa f_p merupakan suatu bijeksi, akan dibuktikan bahwa $f_p(F(E_{ls})) = Z(\sigma(E_{ls}))$ dan juga f_p merupakan suatu injeksi.

Ambil sebarang $X \in F(E_{ls})$. Menggunakan Proposisi 4.2.1 dapat kita pastikan bahwa terdapat matriks permutasi $P \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ sedemikian sehingga $X = E_{ls} \otimes P = P \otimes E_{ls}$, dan juga menggunakan Proposisi 4.1.8 dapat kita peroleh $\sigma_0^X = \sigma_0^{E_{ls}\otimes P} = \sigma_0^P \circ \sigma_0^{E_{ls}} = \sigma_0^P \circ () = \sigma_0^P$ sehingga $P = P(X)$, yang berarti $X = E_{ls} \otimes P(X) = P(X) \otimes E_{ls}$. Selanjutnya, karena $P(X) = P(\sigma_0^X)$, dari Proposisi 4.2.4 didapat $\sigma_0^X \in Z(\sigma(E_{ls}))$ sehingga $f_{ls}(X) = \sigma_0^X \in Z(\sigma(E_{ls}))$. Karena hal tersebut berlaku untuk semua $X \in F(E_{ls})$, kita peroleh $f_p(F(E_{ls})) \subseteq Z(\sigma(E_{ls}))$. Selanjutnya ambil sebarang $\alpha \in Z(\sigma(E_{ls}))$, dari Proposisi 4.2.4 kita peroleh $E_{ls} \otimes P(\alpha) = P(\alpha) \otimes E_{ls}$ sehingga $E_{ls} \otimes P(\alpha) \in F(E_{ls})$, dan dari pembahasan sebelumnya dapat disimpulkan $\sigma_0^{E_{ls}\otimes P(\alpha)} = \sigma_0^{P(\alpha)} = \alpha$ sehingga $\alpha = \sigma_0^{E_{ls}\otimes P(\alpha)} = f_p(E_{ls} \otimes P(\alpha)) \in f_p(F(E_{ls}))$, dan karena hal tersebut berlaku untuk semua $\alpha \in Z(\sigma(E_{ls}))$ akibatnya $f_{ls}(F(E_{ls})) \subseteq Z(\sigma(E_{ls}))$. Sampai sini telah kita peroleh $Z(\sigma(E_{ls})) \subseteq f_p(F(E_{ls}))$ dan $f_p(F(E_{ls})) \subseteq Z(\sigma(E_{ls}))$ sehingga dapat dipastikan $f_p(F(E_{ls})) = Z(\sigma(E_{ls}))$.

Terakhir, apabila $A, B \in F(E_{ls})$ sedemikian sehingga $f_p(A) = f_p(B)$, maka berdasarkan definisi dari F_p, A dan B mempunyai permutasi-0 yang sama, dan lagi sebelumnya telah didapat bahwa semua elemen di $F(E_{ls})$ merupakan hasil dari suatu permutasi baris di E_{ls}, yang artinya A dan B merupakan hasil suatu permutasi baris pada E_{ls}, sehingga dapat kita pastikan $A = B$, dan karena hal tersebut berlaku untuk semua $A, B \in F(E_{ls})$, terbukti bahwa f_p injektif. □

Proposisi 4.2.6. *Untuk semua latin square identitas $E_{ls} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$, transformasi permutasi-0 pada $F(E_{ls})$ merupakan suatu antimorfisma.*

Bukti. Ambil sebarang $A, B \in F(E_{ls})$. Sebelumnya telah ditunjukkan bahwa $(F(E_{ls}), \otimes)$ membentuk grup sehingga $A \otimes B \in F(E_{ls})$, yang berarti $A \otimes B$ merupakan hasil dari suatu permutasi baris sekaligus permutasi kolom pada E_{ls}, akibatnya $\sigma_0^{A\otimes B} \in \sigma(A \otimes B)$. Selanjutnya karena nilai dari entri pada A dan B adalah kurang dari atau sama dengan 0, dapat kita pastikan bahwa untuk semua $1 \le i, k \le n$, apabila

$$(A \otimes B)_{i\sigma_0^{A\otimes B}(i)} = \bigoplus_{y=1}^{n} A_{iy} \otimes B_{y\sigma_0^{A\otimes B}(i)} = A_{ik} \otimes B_{k\sigma_0^{A\otimes B}(i)}$$

maka $A_{ik} = B_{k\sigma_0^{A\otimes B}(i)} = 0$, yang artinya $k = \sigma_0^A(i)$, sehingga $B_{\sigma_0^A(i)\sigma_0^{A\otimes B}(i)} = 0$. Karena

$B_{\sigma_0^A(i)\sigma_0^{A\otimes B}(i)} = 0$, kita peroleh

$$(\sigma_0^B \circ \sigma_0^A)(i) = \sigma_0^B(\sigma_0^A(i)) = \sigma_0^{A\otimes B}(i)$$

dan karena persaman tersebut berlaku untuk semua $1 \leq i \leq n$, dapat kita simpulkan

$$f_p(A \otimes B) = \sigma_0^{A\otimes B} = \sigma_0^B \circ \sigma_0^A = f_p(B) \circ f_p(A)$$

sehingga terbukti bahwa transformasi permutasi-0 pada $F(E_{ls})$ merupakan suatu antimorfisma. □

Teorema 4.2.10. *Diberikan suatu latin square identitas $E_{ls} \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$. Transformasi permutasi-0 terhadap $F(E_{ls})$ dan Transformasi latin square terhadap $Z(\sigma(E_{ls}))$ merupakan dua fungsi yang saling invers, dan keduanya merupakan suatu iso-anti morfisma.*

Bukti. Teorema tersebut dapat dibuktikan dengan menunjukkan tiga hal, yakni f_p merupakan suatu bijeksi dan antimorfisma, dan juga f_{ls} merupakan invers dari f_p, dan karena dua hal pertama tersebut telah dibuktikan pada dua proposisi sebelumnya, yang perlu dilakukan hanyalah membuktikan bahwa $f_{ls} = (f_p)^{-1}$, dan untuk membuktikan hal tersebut hanya perlu ditunjukkan bahwa $f_{ls}(f_p(X)) = X$ untuk semua $X \in F(E_{ls})$.

Ambil sebarang $X \in F(E_{ls})$, amati bahwasannya

$$f_{ls}(f_p(X)) = f_{ls}(\sigma_0^X) = E_{ls} \otimes P(\sigma_0^X)$$

dan dari pembuktian pada Proposisi 4.2.5 dapat kita peroleh $E_{ls} \otimes P(\sigma_0^X) = x$, sehingga menggunakan persamaan diatas diperoleh $f_{ls}(f_p(X)) = X$. Karena hal tersebut berlaku untuk semua $X \in F(E_{ls})$ terbukti bahwa f_{ls} merupakan invers dari f_p. □

Dari fakta bahwa f_p merupakan suatu iso-anti morfisma, berdasarkan Teorema 4.2.7 kita dapati bahwa untuk semua $G \subseteq F(E_{ls})$, G grup bila dan hanya bila $f_p(G)$ juga grup, yang berarti apabila diberikan suatu *latin square* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ yang merupakan anggota grup, maka salahsatu cara untuk mengkonstruksi semua grup *latin square* yang memuat A ialah dengan mengkonstruksi semua subgrup pada $Z(\sigma(E_{ls}(A)))$ yang memuat $f_p(A) = \sigma_0^A$, lalu subgrup-subgrup hasil konstruksi tersebut ditransformasikan ke $F(E_{ls})$ menggunakan transformasi latin square, dan grup-grup yang dihasilkan oleh transformasi tersebut merupakan semua grup *latin square* yang memuat A.

Algoritma 4.2.1. *Algoritma berikut mengambil suatu latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ yang merupakan anggota grup sebagai input, dan memberikan suatu koleksi S yang memuat semua grup latin square yang memuat A sebagai output*

1. *Ambil suatu latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{n\times n}$ yang merupakan anggota grup sebagai input*

2. *Konstruksi $\sigma(E_{ls}(A))$*

3. *Konstruksi $Z(\sigma(E_{ls}(A)))$*

4. *Konstruksi suatu koleksi S' yang menghimpun semua subgrup pada $Z(\sigma(E_{ls}(A)))$ yang memuat $f_p(A)$, atau dengan kata lain $S' := \{G | G \leq Z(\sigma(e(A))) \wedge f_p(A) \in G\}$*

5. *Konstruksi suatu koleksi S yang menghimpun hasil transformasi latin square dari semua elemen pada S', atau dengan kata lain $S := \{f_{ls}(G)|G \in S'\}$.*

6. *S merupakan koleksi semua grup latin square yang memuat A*

Beberapa kesulitan dalam menggunakan algoritma diatas adalah mengkonstruksi $E_{ls}(A)$,$\sigma(E_{ls}(A))$ dan $Z(\sigma(E_{ls}(A)))$. Karenanya penulis akan berikan beberapa fakta yang dapat memudahkan kita dalam mengkonstruksi ketiga hal tersebut.

Proposisi 4.2.7. *Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{max}$ yang merupakan anggota grup. $E_{ls}(A) = P((\sigma_0^A)^{\circ -1}) \otimes A = A \otimes P((\sigma_0^A)^{\circ -1})$ dan $\sigma(E_{ls}(A)) = \{(\sigma_0^A)^{\circ -1} \circ \alpha | \alpha \in \sigma(A)\}$.*

Bukti. Karena A anggota grup, dari Proposisi 4.1.11 kita peroleh $A^{1+p(A)} = A$, sehingga berdasarkan definisi dari $E_{ls}(A)$ kita peroleh $A^{\otimes p(A)} = E_{ls}(A)$. Dari Teorema 4.2.1 kita peroleh $E_{ls}(A) = A^{\otimes p(A)} = P(A) \otimes A^{\otimes p(A)-1} = ... = P(A)^{\otimes p(A)-1} \otimes A$, sehingga menggunakan Proposisi 4.1.11 dapat kita peroleh $E_{ls}(A) = P(A)^{\otimes p(A)-1} \otimes A = P(\sigma_0^A)^{\otimes p(A)-1} \otimes A = P((\sigma_0^A)^{\circ p(A)-1}) \otimes A$. Terakhir, dari Proposisi 4.1.11 kita peroleh bahwa $p(A)$ merupakan bilangan terkecil sedemikian sehingga $(\sigma_0^A)^{\circ p(A)} = ()$, yang berarti dapat dipastikan bahwa $(\sigma_0^A)^{\circ p(A)-1} = (\sigma_0^A)^{\circ -1}$ sehingga $e(A) = P((\sigma_0^A)^{\circ p(A)-1}) \otimes A = P((\sigma_0^A)^{\circ -1}) \otimes A$, dan dengan cara yang serupa dapat kita peroleh juga $E_{ls}(A) = A \otimes P((\sigma_0^A)^{\circ -1})$.

Selanjutnya dimisalkan $\alpha = \sigma_0^A$. Untuk semua $\beta \in \sigma(A)$, berdasarkan definisi dari $\sigma(A)$ dapat dipastikan bahwa terdapat c yang merupakan nilai dari suatu entri pada A dan juga $\beta = \sigma_c^A$, sehingga untuk semua $1 \leq i \leq n$ berlaku $\beta(i) = c$. Selanjutnya, dari hasil sebelumnya kita peroleh $E_{ls}(A) = A \otimes P((\sigma_0^A)^{\circ -1}) = A \otimes P(\alpha^{\circ -1})$, sehingga berdasarkan Proposisi 4.1.8, untuk semua $1 \leq i \leq n$ kita dapatkan $A_{i\beta(i)} = (A \otimes P(\alpha^{\circ -1}))_{i\alpha^{-1}(\beta(i))} = E_{ls}(A)_{i\alpha^{\circ -1}(\beta(i))}$. Lagi, karena sebelumnya telah diketahui bahwa untuk semua $1 \leq i \leq n$ berlaku $\beta(i) = c$, maka $A_{i\beta(i)} = c$, sehingga $c = A_{i\beta(i)} = E_{ls}(A)_{i\alpha^{\circ -1}(\beta(i))}$, dan karena dapat dipastikan bahwa c juga merupakan nilai dari suatu entri pada $E_{ls}(A)$, dapat disimpulkan $\alpha^{\circ -1} \circ \beta = \sigma_c^{E_{ls}(A)} \in \sigma(E_{ls}(A))$. Terakhir, sampai sini dapat kita simpulkan bahwa $\{g^{\circ -1} \circ \alpha | \alpha \in \sigma(A)\} \subseteq \sigma(E_{ls}(A))$, dan karena $\{g^{\circ -1} \circ \alpha | \alpha \in \sigma(A)\}$ dan $\sigma(E_{ls}(A))$ keduanya mempunyai kardinalitas yang sama, dapat disimpulkan $\sigma(E_{ls}(A)) = \{g^{\circ -1} \circ \alpha | \alpha \in \sigma(A)\} = \{(\sigma_0^A)^{\circ -1} \circ \alpha | \alpha \in \sigma(A)\}$.

□

Definisi 4.2.11. *Misalkan S_n menotasikan himpunan semua permutasi pada $\{1, ..., n\}$, dan diberikan suatu sikel $\alpha \in S_n$, suatu permutasi $x = \theta_1 \circ ... \circ \theta_m \in S_n$ dimana $\theta_1, ..., \theta_m$ merupakan sikel-sikel yang saling asing, dan suatu $H \subseteq S_n$. α dikatakan sebagai **sikel pada x** apabila terdapat $1 \leq i \leq m$ sedemikian sehingga $\alpha = \theta_i$, dan **himpunan sikel pada x**, dinotasikan sebagai $C(x)$, merupakan suatu himpunan yang memuat semua sikel pada x. Terakhir, **himpunan sikel pada H**, dinotasikan sebagai $C(H)$, merupakan suatu himpunan yang memuat semua sikel pada semua anggota dari H, atau dengan kata lain $C(H) := \{c | c \in C(h) \wedge h \in H\}$.*

Proposisi 4.2.8. *Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{max}$. untuk semua $\beta \in Z(\sigma(A))$, $C(\beta) \subseteq C(\sigma(A))$.*

Bukti. Ambil sebarang $\beta \in Z(\sigma(A))$ dan $1 \leq i \leq n$. Karena A merupakan suatu latin square, dapat kita ambil suatu $\alpha \in \sigma(A)$ sedemikian sehingga $\beta(i) = \alpha(i)$. Amati bahwasannya karena $\alpha \in \sigma(A)$ dan $\beta \in Z(\sigma(A))$, dapat kita peroleh

$$A_{i\alpha(i)} = A_{\beta(i)\alpha(x(i))} \Rightarrow A_{i\alpha(i)} = A_{\beta(i)\beta(\alpha(i))}.$$

Karena hal diatas berlaku untuk semua $1 \leq i \leq n$ dan $\alpha \in \sigma(A)$, kita dapati bahwa untuk semua $1 \leq r, s \leq n$

$$A_{rs} = A_{\beta(r)\beta(s)}$$

sehingga untuk semua $1 \leq i \leq n$ dan $m \in \mathbb{N}$

$$A_{i\beta(i)} = A_{\beta(i)\beta^{\circ 2}(i)} = ... = A_{\beta^{\circ m}(i)\beta^{\circ m+1}(i)}.$$

Dari hal diatas, kita dapati bahwa apabila diambil sebarang $\theta \in C(\beta)$, l anggota dari orbit terbesar pada θ, dan $\xi \in \sigma(A)$ sedemikian sehingga $\theta(l) = x(l) = \xi(l)$, maka untuk semua $m \in \mathbb{N}$

$$A_{l\theta(l)} = A_{l\beta(l)} = A_{\beta(l)\beta^{\circ 2}(l)} = ... = A_{\beta^{\circ m}(l)\beta^{\circ m+1}(l)} = A_{\theta^{\circ m}(l)\theta^{\circ m+1}(l)}$$

dan karena $\xi \in \sigma(A)$

$$A_{l\xi(l)} = A_{\xi^{\circ m}(i)\xi^{\circ m+1}(i)}.$$

Dari dua hal diatas, menggunakan induksi dapat dibuktikan untuk semua $k \in \mathbb{N}$, apabila $\theta^{\circ k}(l) = \xi^{\circ k}(l)$ maka $\theta^{\circ k+1}(l) = \xi^{\circ k+1}(l)$, dan karena sebelumnya telah diketahui bahwa $\theta(l) = \xi(l)$, dapat disimpulkan bahwa $\theta^{\circ k}(i) = \xi^{\circ k}(i)$ untuk semua $k \in \mathbb{N}$, yang berarti $\theta \in C(\beta) \subseteq C(\sigma(A))$. Dan karena hal tersebut berlaku untuk semua $\theta \in C(\beta)$, dapat disimpulkan bahwa $C(\beta) \subseteq C(\sigma(A))$. $\square$

Berikut penulis berikan beberapa contoh dalam pengkonstruksian $\sigma(A)$ dan $Z(\sigma(A))$.

Contoh 4.2.1. Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}^{4\times 4}_{max}$ dimana,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ -3 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Dapat diperiksa bahwa $\sigma(A) = \{(), (1234), (13)(24, (1432)\}$, yang berarti $C(\sigma(A)) = \{(1234), (13), (24), (1432)\}$, dan juga $\sigma(A)$ membentuk suatu grup komutatif, yang mengakibatkan $\sigma(A) \subseteq Z(\sigma(A))$. Selanjutnya dimisalkan terdapat $\alpha \in Z(\sigma(A)) - \sigma(A)$, maka berdasarkan Proposisi 4.2.8, $C(\alpha) \subseteq C(\sigma(A))$, dan juga dapat diamati bahwa semua sikel pada $C(\sigma(A))$ mempunyai panjang 4 atau 2. Sehingga dapat dipastikan bahwasannya kardinalitas dari $C(\alpha)$ tidak mungkin lebih dari 2 , atau dengan kata lain $|C(\alpha)| \leq 2$. Disisi lain, apabila $|C(\alpha)| = 0$, maka $\alpha = () \in \sigma(A)$ sehingga mustahil $|C(\alpha)| = 0$. Sampai sini kita dapatkan dua kemungkinan untuk kardinalitas dari $C(\alpha)$, yaitu $|C(\alpha)| = 1$ atau $|C(\alpha)| = 2$.

- Apabila $|C(\alpha)| = 1$, maka x sama dengan salahsatu dari (1234) dan (1432). Namun mudah dilihat bahwa dua kemungkinan tersebut merupakan sikel di $\sigma(A)$, sehingga mustahil $|C(\alpha)| = 1$.
- Apabila $|C(\alpha)| = 2$, maka satu-satunya kemungkinan adalah $\alpha = (13)(24)$, yang artinya $\alpha \in \sigma(A)$. Sehingga mustahil $|C(\alpha)| = 2$

Sampai sini dapat disimpulkan bahwa α yang demikian tidak mungkin ada, sehingga haruslah $Z(\sigma(A)) = \sigma(A)$.

Contoh 4.2.2. Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{4\times 4}$ dimana,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Dapat diperiksa bahwa $\sigma(A) = \{(), (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, yang berarti $C(\sigma(A)) = \{(12), (34), (13)(24), (14), (23)\}$, dan juga $\sigma(A)$ membentuk suatu grup komutatif, yang mengakibatkan $\sigma(A) \subseteq Z(\sigma(A))$. Selanjutnya dimisalkan terdapat $\alpha \in Z(\sigma(A)) - \sigma(A)$, maka berdasarkan Proposisi 4.2.8, $C(\alpha) \subseteq C(\sigma(A))$, dan juga dapat diamati bahwa semua sikel pada $C(\sigma(A))$ mempunyai panjang 2. Sehingga dapat dipastikan bahwasannya kardinalitas dari $C(\alpha)$ tidak mungkin lebih dari 2 , atau dengan kata lain $|C(\alpha)| \leq 2$. Disisi lain, apabila $|C(\alpha)| = 0$, maka $\alpha = () \in \sigma(A)$ sehingga mustahil $|C(x)| = 0$. Sampai sini kita dapatkan dua kemungkinan untuk kardinalitas dari $C(\alpha)$, yaitu $|C(\alpha)| = 1$ atau $|C(\alpha)| = 2$.

- Apabila $|C(\alpha)| = 1$, maka α sama dengan salah satu dari anggota pada $C(\alpha)$. Namun dapat diperiksa bahwa tak ada satupun anggota pada $C(\alpha)$ yang juga merupakan anggota dari $Z(\sigma(A))$, sehingga tidak mungkin $C(\alpha)$ mempunyai kardinalitas 1.

- Apabila $|C(\alpha)| = 2$, maka terdapat dua sikel saling asing $\xi, \theta \in C(\sigma(A))$ sedemikian sehingga $\alpha = \xi \circ \theta$. Namun dapat dibuktikan juga bahwasannya untuk semua dua sikel yang saling asing $\gamma, \theta \in C(\sigma(A))$, $\gamma \circ \theta \in \sigma(A)$, sehingga $\alpha = \xi \circ \theta \in \sigma(A)$, dan karena sebelumnya telah dijelaskan bahwa $\alpha \in Z(\sigma(A)) - \sigma(A)$, maka $\alpha \notin \sigma(A)$ sehingga terjadi kontradiksi.

Sampai sini dapat disimpulkan bahwa x yang demikian tidak mungkin ada, sehingga haruslah $Z(\sigma(A)) = \sigma(A)$.

Contoh 4.2.3. Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{5\times 5}$ dimana,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 & -4 \\ -4 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ -3 & -4 & 0 & -1 & -2 \\ -2 & -3 & -4 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Dapat diperiksa bahwa $\sigma(A) = \{(12345), (13524), (14253), (15432), ()\}$, yang berarti $C(\sigma(A)) = \{(12345), (13524), (14253), (15432)\}$, dan juga $\sigma(A)$ membentuk suatu grup komutatif, yang mengakibatkan $\sigma(A) \subseteq Z(\sigma(A))$. Selanjutnya dimisalkan terdapat $\alpha \in Z(\sigma(A)) - \sigma(A)$, maka berdasarkan Proposisi 4.2.5, $C(\alpha) \subseteq C(\sigma(A))$, dan juga dapat diamati bahwa semua sikel pada $C(\sigma(A))$ mempunyai panjang 5. Sehingga dapat dipastikan bahwasannya kardinalitas dari $C(\alpha)$ tidak mungkin lebih dari 1 , atau dengan kata lain $|C(\alpha)| = 1$ atau $|C(\alpha)| = 0$. Namun dapat diamati bahwa apabila $|C(\alpha)| = 0$, maka $\alpha = () \in \sigma(A)$ sehingga mustahil $|C(\alpha)| = 0$, dan juga apabila $|C(\alpha)| = 1$, mudah diamati pastilah $\alpha \in \sigma(A)$, sehingga jugalah mustahil $|C(\alpha)| = 1$.

Sampai sini dapat kita pastikan bahwa α yang demikian mutahil adanya, sehingga haruslah $Z(\sigma(A)) = \sigma(A)$.

Untuk menutup bagian ini, penulis akan berikan beberapa contoh untuk mendemonstrasikan hasil-hasil yang telah dijelaskan sebelumnya.

Contoh 4.2.4. Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{4\times 4}$ dimana,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & -3 \\ -3 & -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Dapat diperiksa bahwa

$$A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

sehingga $A^{\otimes 2}$ bukanlah suatu *latin square* yang berarti $A^{\otimes 2} \neq A \otimes P(A)$ (karena $A \otimes P(A)$ merupakan suatu *latin square*). Sehingga berdasarkan Teorema 4.2.1 dapat disimpulkan bahwa A bukanlah suatu anggota grup, yang berarti tidak ada satupun grup *latin square* pada $\mathbb{R}_{max}^{4\times 4}$ yang memuat A.

Contoh 4.2.5. Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{4\times 4}$ dimana,

$$A = \begin{bmatrix} -14 & -20 & 0 & -7 \\ -20 & -14 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -20 \\ -7 & 0 & -20 & -14 \end{bmatrix}$$

Dapat diperiksa bahwa

$$A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -14 & -20 \\ -7 & 0 & -20 & -14 \\ -14 & -20 & 0 & -7 \\ -20 & -14 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

Dapat diamati bahwa $H_P(A^{\otimes 2}) = H_P(A)$, sehingga barisan perpangkatan A tidak berubah susunan di $A^{\otimes 2}$, yang artinya berdasarkan Teorema 4.2.1 dapat kita pastikan bahwa A merupakan anggota grup. Selanjutnya, untuk mendemontrasikan Algoritma 4.2.1, kita akan konstruksi semua grup *latin square* yang memuat A,

1. Masukkan A sebagai input

2. Berdasarkan Proposisi 4.2.4 kita peroleh $E_{ls}(A) = P((\sigma_0^A)^{-1}) \otimes A$, sehingga

$$E_{ls}(A) = \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon & 0 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 0 & \epsilon & \epsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -14 & -20 & 0 & -7 \\ -20 & -14 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -20 \\ -7 & 0 & -20 & -14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -7 & -14 & -20 \\ -7 & 0 & -20 & -14 \\ -14 & -20 & 0 & -7 \\ -20 & -14 & -7 & 0 \end{bmatrix}$$

dan juga kita peroleh $\sigma(E_{ls}(A)) = \{(\sigma_0^A)^{-1} \circ \alpha | \alpha \in \sigma(A)\}$, dan karena $\sigma(A)$ merupakan suatu grup terhadap operasi komposisi kita peroleh $\sigma(E_{ls}(A)) = \sigma(A)$

3. Dari Contoh 4.2.2 kita peroleh $Z(\sigma(E_{ls}(A))) = \{(12)(34), (13)(24), (14)(23), ()\} = \sigma(A)$

4. Mudah didapat $S' = \{\{(13)(24), ()\}, \{(13)(24), (12)(34), (14)(23), ()\}\}$

5. Misalkan $a = \{(13)(24), ()\}$ dan $b = \{(13)(24), (12)(34), (14)(23), ()\}$, maka $S' = \{a, b\}$, maka kita peroleh $S = \{f_{ls}(a), f_{ls}(b)\} = \{\{P(k) \otimes e(A) | k \in a\}, \{P(l) \otimes e(A) | l \in b\}\}$, atau lebih jelasnya

$$f_{ls}(a) = \{ \begin{bmatrix} -14 & -20 & 0 & -7 \\ -20 & -14 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -20 \\ -7 & 0 & -20 & -14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -7 & -14 & -20 \\ -7 & 0 & -20 & -14 \\ -14 & -20 & 0 & -7 \\ -20 & -14 & -7 & 0 \end{bmatrix} \}$$

$$f_{ls}(b) = \{ \begin{bmatrix} -14 & -20 & 0 & -7 \\ -20 & -14 & -7 & 0 \\ 0 & -7 & -14 & -20 \\ -7 & 0 & -20 & -14 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -7 & 0 & -20 & -14 \\ 0 & -7 & -14 & -20 \\ -20 & -14 & -7 & 0 \\ -14 & -20 & 0 & -7 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -20 & -14 & -7 & 0 \\ -14 & -20 & 0 & -7 \\ -7 & 0 & -20 & -14 \\ 0 & -7 & -14 & -20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -7 & -14 & -20 \\ -7 & 0 & -20 & -14 \\ -14 & -20 & 0 & -7 \\ -20 & -14 & -7 & 0 \end{bmatrix} \}$$

6. Telah kita peroleh S yang merupakan suatu koleksi semua grup latin square yang memuat A

Contoh 4.2.6. Diberikan suatu latin square $A \in \mathbb{R}_{max}^{5\times 5}$ dimana,

$$A = \begin{bmatrix} -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 \\ 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 \\ -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 \\ -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 \\ -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 \end{bmatrix}$$

Dapat diperiksa bahwa

$$A^{\otimes 2} = \begin{bmatrix} -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 \\ -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 \\ 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 \\ -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 \\ -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 \end{bmatrix}$$

Dapat diamati bahwa $H_P(A^{\otimes 2}) = H_P(A)$, sehingga barisan perpangkatan A tidak berubah susunan di $A^{\otimes 2}$, yang artinya berdasarkan Teorema 4.2.1 dapat kita pastikan bahwa A merupakan anggota grup. Selanjutnya, untuk mendemontrasikan Algoritma 4.2.1, kita akan konstruksi semua grup *latin square* yang memuat A,

1. Masukkan A sebagai input

2. Berdasarkan Proposisi 4.2.4 kita peroleh $E_{ls}(A) = P((\sigma_0^A)^{-1}) \otimes A$, sehingga

$$E_{ls}(A) = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & 0 & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & 0 & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon & 0 \\ 0 & \epsilon & \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 \\ 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 \\ -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 \\ -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 \\ -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 \\ -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69- \\ -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 \\ -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 \\ -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 \end{bmatrix}$$

dan juga kita peroleh $\sigma(e(A)) = \{(\sigma_0^A)^{-1} \circ \alpha | \alpha \in \sigma(A)\}$, dan karena $\sigma(A)$ merupakan suatu grup terhadap operasi komposisi kita peroleh $\sigma(e(A)) = \sigma(A)$

3. Dari Contoh 4.2.3 kita peroleh $Z(\sigma(e(A))) = \{(12345), (13524), (14254), (15432), ()\} = \sigma(A)$

4. Mudah didapat $S' = \{\{(12345), (13524), (14254), (15432), ()\}\} = \{\sigma(A)\}$

5. Dari S', kita peroleh $S = \{f_{ls}(\sigma(A))\} = \{\{P(k) \otimes e(A) | k \in \sigma(A)\}\}$, atau lebih jelasnya

$$f_{ls}(\sigma(A)) = \{ \begin{bmatrix} -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 \\ 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 \\ -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 \\ -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 \\ -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 \\ -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 \\ 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 \\ -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 \\ -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 \\ -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 \\ -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 \\ 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 \\ -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 \\ -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 \\ -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 \\ -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 \\ 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 \\ -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 & -75.69 \\ -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 & -33.21 \\ -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 & -17.3 \\ -17.3 & -33.21 & -75.69 & -98.56 & 0 \end{bmatrix}\}$$

6. Telah kita peroleh S yang merupakan suatu koleksi semua grup latin square yang memuat A

BAB V
KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan pada Bab 4, dapat ditarik kesimpulan sebagai berikut

1. Syarat perlu dan cukup untuk suatu *latin square* A agar merupakan anggota grup terhadap operasi $\otimes$ dapat dilihat dari barisan perpangkatannya. Secara umum misalkan $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ merupakan suatu *latin square*, berdasarkan Teorema 4.2.1 A merupakan suatu anggota grup *latin square* bila dan hanya bila $A^{\otimes 2} = A \otimes P(A) = P(A) \otimes A$, dimana $P(A)$ merupakan suatu matriks permutasi yang dibentuk dari elemen 0 di A.

2. Diberikan suatu *latin square* $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$, untuk mengkonstruksi semua grup *latin square* yang memuat A dapat dilakukan dengan tahapan-tahapan yang terdapat pada Algoritma 4.2.1.

Berdasarkan pembahasan sebelumnya, berikut merupakan saran untuk penelitian selanjutnya

1. Mengkaji sifat-sifat aljabar dari grup *latin square*, seperti sifat komutatif, sifat kenormalan, dan lain-lain.

2. Mengenumerasi semua grup *latin square* yang mungkin pada $\mathbb{R}_{max}^{n \times n}$.

DAFTAR PUSTAKA

Abbas, F., Umer, M., Hayat, U., & Ullah, I. (2022, 5). Trivial and nontrivial eigenvectors for latin squares in max-plus algebra. *Symmetry 2022, Vol. 14, Page 1101*, *14*, 1101. doi: 10.3390/SYM14061101

Ariyanti, G. (2022, 12). A note on the solution of the characteristic equation over the symmetrized max-plus algebra. *BAREKENG: Jurnal Ilmu Matematika dan Terapan*, *16*, 1347-1354. doi: 10.30598/BAREKENGVOL16ISS4PP1347-1354

Baccelli, F. F. (1992). *Synchronization and linearity : an algebra for discrete event systems*. Wiley.

Balasubramanian, K. (1990, 4). On transversals in latin squares. *Linear Algebra and its Applications*, *131*, 125-129. doi: 10.1016/0024-3795(90)90378-P

Blusseau, S., Velasco-Forero, S., Angulo, J., Bloch, I., & Angulo, J. (n.d.). Morphological adjunctions represented by matrices in max-plus algebra for signal and image processing.

Eramo, V., Fiori, T., Lavacca, F. G., Valente, F., Baiocchi, A., Ciabuschi, S., . . . Cavallini, E. (2022, 1). A max plus algebra based scheduling algorithm for supporting time triggered services in ethernet networks. *Comput. Commun.*, *198*, 85-97. doi: 10 .1016/J.COMCOM.2022.11.014

Farlow, K. G. (2009). *Max-plus algebra.*

Hua, Z., Li, J., Chen, Y., & Yi, S. (2021, 3). Design and application of an s-box using complete latin square. *Nonlinear Dynamics*, *104*, 807-825. doi: 10.1007/ S11071-021-06308-3/FIGURES/9

Martinez, C., Kara, R., & Loiseau, J.-J. (2022, 11). Systems synchronisation in max-plus algebra: a controlled invariance perspective - in memoriam Édouard wagneur.

Mckay, B. D., & Wanless, I. M. (2005). On the number of latin squares. *Annals of Combinatorics*, *9*, 335-344. doi: 10.1007/s00026-005-0261-7

Molnárová, M. (2005, 7). Generalized matrix period in max-plus algebra. *Linear Algebra and Its Applications*, *404*, 345-366. doi: 10.1016/j.laa.2005.02.033

Mufid, M. S., & Subiono. (2014). *Eigenvalues and eigenvectors of latin squares in max-plus algebra* (Vol. 20).

Payu, M. F. R. (2022). Max-plus algebra model on inaportnet system ships service scheme nurwan, et.al max-plus algebra model on inaportnet system. *MAX-PLUS ALGEBRA MODEL ON INAPORTNET SYSTEM SHIPS SERVICE SCHEME*, *16*, 147-156. doi: 10.30598/barekengvol16iss1pp147-156

Subiono. (2017). *Aljabar : Sebagai suatu pondasi matematika.*

van Lint, J. H., & Wilson, R. M. R. M. (2001). A course in combinatorics. , 602.

Wallis, W. D., & George, J. C. (2010, 9). Introduction to combinatorics. *Introduction to Combinatorics*. doi: 10.1201/B12336

Wang, X., Su, Y., Xu, M., Zhang, H., & Zhang, Y. (2022, 1). A new image encryption algorithm based on latin square matrix. *Nonlinear Dynamics*, *107*, 1277-1293. doi: 10.1007/S11071-021-07017-7/TABLES/7

yu Shao, J., & Wei, W. (1992). A formula for the number of latin squares. *Discrete Mathematics*, *110*, 293.

Zhou, J., Zhou, N.-R., & Gong, L.-H. (2020, 11). Fast color image encryption scheme based on 3d orthogonal latin squares and matching matrix. *Optics and Laser Technology*, *131*, 106437. doi: 10.1016/J.OPTLASTEC.2020.106437

BIODATA PENULIS

Penulis dilahirkan di Surabaya, 30 Mei 2001. Penulis telah menempuh pendidikan formal yaitu di TK Islam Al Azhar 11 Mulyosari, SD Sekolah Alam Insan Mulia Surabaya (SAIMS), SMP Luqman Al Hakim Surabaya dan SMAN 16 Surabaya. Setelah lulus dari SMA tahun 2019, Penulis diterima di Departemen Matematika FSAD - ITS pada tahun 2019 dan terdaftar dengan NRP 06111940000108.

Di Departemen Matematika Penulis sempat aktif di beberapa kegiatan Seminar yang diselenggarakan oleh Departemen, menjadi staff Question Maker Olimpiade Matematika ITS (OMITS) tahun 2021 dan 2022, dan beberapa kali aktif sebagai Asisten Dosen Matematika Dasar. Penulis juga sempat mengikuti beberapa kompetisi matematika, beberapa diantaranya pernah meraih Perak dalam Mathematical Analysis and Geometry Day (MagD-Day) ITB 2022,menjadi Kontingen Olimpiade Nasional Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Perguruan Tinggi (ONMIPA-PT) tahun 2022 bidang Matematika, dan juga menjadi semifinalis Sanata Dharma Calculus League (Sadhar CalL) 2022.