

EVALUASI TENGAH SEMESTER GASAL 2024/2025



Departemen Matematika
FSAD

Matakuliah : Kalkulus Peubah Banyak
Hari, Tanggal : Selasa, 10 Desember 2024
Waktu / Sifat : 100 menit / *Tertutup*
Kelas, Dosen : A. Dra. Nur Asiyah, M.Si.
B. Drs. Suhud Wahyudi, M.Si.
C. Drs. Lukman Hanafi, M.Si.
D. Dr. Didik Khusnul Arif S.Si., M.Si.

HARAP DIPERHATIKAN !!!

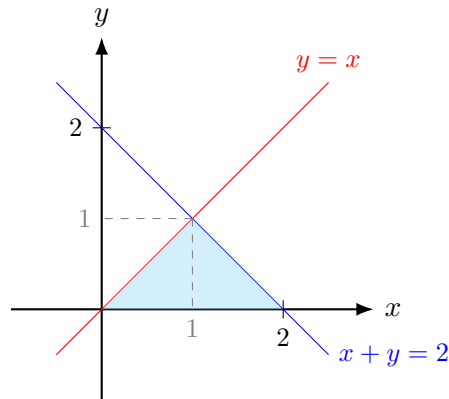
Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Hitung integral berikut ini $\iiint_R dx dy dz$, dengan R adalah daerah integrasi yang dibatasi oleh bidang-bidang $z = \frac{1}{2}x$, $z = 0$, $y = x$, $x + y = 2$, dan $y = 0$. Sketsa batas integrasi R .
2. Dapatkan Volume benda yang dibatasi $z = y$, $y = x^2$, dan $x = y^2$ yang berada dalam oktan pertama. Sketsalah batas permukaan benda tersebut.
3. Gambarkan keping datar homogen yang dibatasi oleh kurva-kurva $x(1 - y) = 1$, $x(1 - y) = 2$, $xy = 1$, dan $xy = 3$. Hitung pula momen inersia terhadap sumbu y . (Petunjuk: transformasi ke koordinat baru (u, v))
4. Dapatkan pusat massa permukaan benda $2z = 8 - x^2 - y^2$, jika densitinya konstan, yang berada dalam silinder $x^2 + y^2 = 3$. Sertai dengan sketsa permukaan benda.

Selamat Mengerjakan Semoga Sukses

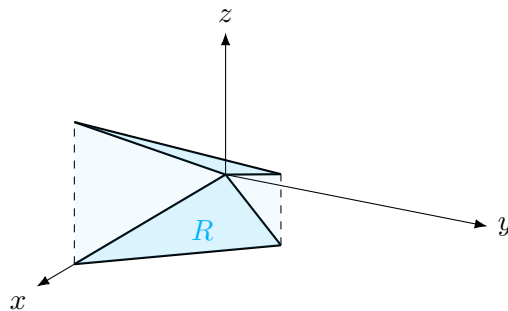
SOLUSI

- Pertama-tama agar lebih mudah dalam mengilustrasikan batas-batas bidang, dapat kita gambar sketsa batas integrasi R di bidang xy terlebih dahulu. Dibawah ini adalah sketsa untuk batas-batas $y = 0$, $y = x$, dan $x + y = 2$.



Jadi untuk bidang- xy , batas-batasnya (dipilih yang termudah untuk diintegrasikan) adalah $y \leq x \leq 2 - y$ dan $0 \leq y \leq 1$.

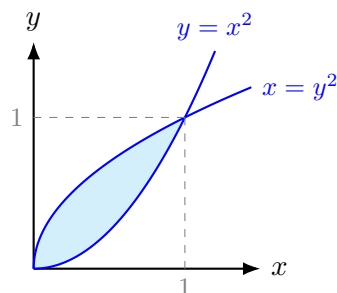
Selanjutnya ketika kita buat bangun ruang nya yang berpotongan dengan bidang $z = \frac{1}{2}x$, berikut adalah sketsa batas integrasi R .



Sehingga integral yang diminta dapat dituliskan sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \iiint_R dx dy dz &= \int_0^1 \int_y^{2-y} \int_0^{\frac{1}{2}x} dz dx dy = \int_0^1 \int_y^{2-y} [z]_0^{\frac{1}{2}x} dx dy = \int_0^1 \left[\frac{1}{4}x^2 \right]_{x=y}^{x=2-y} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{4}(2-y)^2 - \frac{1}{4}y^2 \right) dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{4}(4 - 4y + y^2 - y^2) \right) dy = \int_0^1 (1 - y) dy \\ &= \left[y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- Batas permukaan di bidang- xy dibatasi oleh $y = x^2$ dan $x = y^2$ di oktan pertama.



Dari gambar di atas dapat kita lihat bahwa batas-batasnya adalah $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$ dan $0 \leq x \leq 1$.

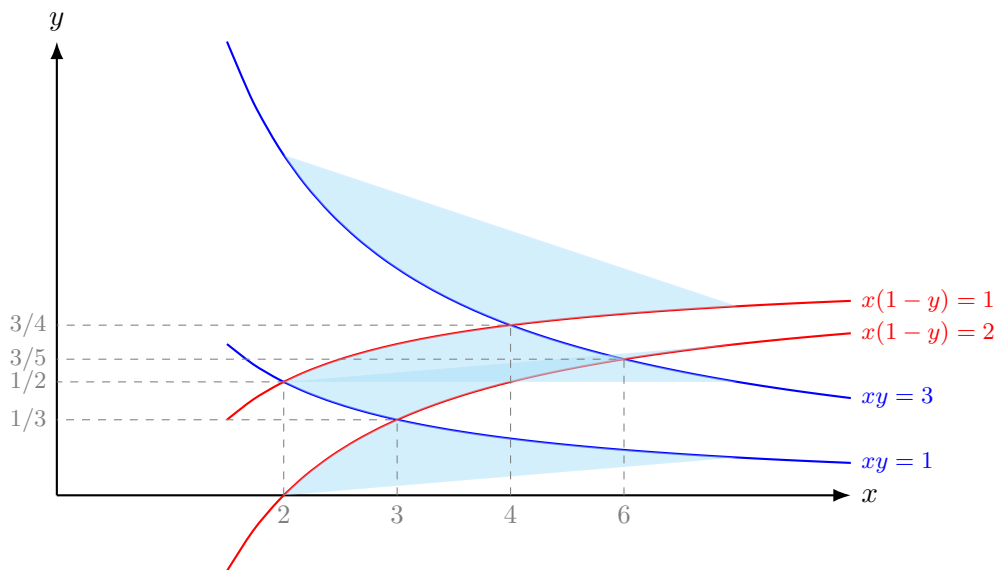
Untuk batas permukaan atasnya adalah $0 \leq z \leq y$. Maka volume benda yang diminta adalah

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} \int_0^y dz \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} [z]_0^y \, dy \, dx = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} y \, dy \, dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} x - \frac{1}{2} x^4 \right) dx = \left[\frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{10} x^5 \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = \frac{3}{20}. \end{aligned}$$

3. Agar lebih mudah dalam memahami persamaan kurva, dapat kita ubah persamaan kurva tersebut menjadi bentuk $y = f(x)$. Sehingga diperoleh

- $x(1 - y) = 1 \implies y = 1 - \frac{1}{x}$
- $x(1 - y) = 2 \implies y = 1 - \frac{2}{x}$
- $xy = 1 \implies y = \frac{1}{x}$
- $xy = 3 \implies y = \frac{3}{x}$

Berikut adalah sketsa daerah yang dibatasi oleh keempat kurva tersebut.



4.