EVALUASI TENGAH SEMESTER GASAL 2023/2024
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS
PROGRAM SARJANA

Matakuliah	:	Aljabar 1
Hari, Tanggal	:	Rabu, 18 Oktober 2023
Waktu / Sifat	:	100 menit / *Closed Book*
Kelas, Dosen	:	A. Prof. Dr. Drs. Subiono, MS
		B. Dian Winda S., M.Si
		C. Soleha, M.Si

HARAP DIPERHATIKAN !!!
Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Diberikan $a \in \mathbb{R}$ dan $n = \dfrac{\sqrt{3-|a-1|}+\sqrt{|a-1|-3}}{a+2} + \dfrac{1+2a}{a-3}$. Tentukan digit terakhir dari nilai n^{2023}.

2. Diberikan grup siklik $\langle a \rangle$ dan $\langle b \rangle$ masing-masing mempunyai orde 8 dan 20. Tentukan semua generator dari masing-masing grup siklik tersebut.

3. Tunjukkan bahwa bila G adalah suatu grup yang belum tentu komutatif dan $a, b \in G$, maka $|ab| = |ba|$ dan $|aba^{-1}| = |b|$.

4. Diberikan $S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3) = \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \det(A) \neq 0 \text{ dan } a, b, c \in \mathbb{Z}_3 \right\}$, $(S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3), \cdot)$ grup dan $H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| d \in \mathbb{Z}_3 \right\}$ subgrup dari $S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$.

   (a) Tentukan banyaknya koset kanan/koset kiri dari H dalam grup $S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$ yang berbeda.

   (b) Tentukan semua koset kanan dari H dalam grup $S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$ yang berbeda.

   (c) Tentukan semua koset kiri dari H dalam grup $S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$ yang berbeda.

   (d) Dari hasil (b) dan (c), apakah H subgrup normal dari $S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$? Jelaskan.

—o0o—

Solusi:

1. Ingat akan 2 hal berikut yang pernah dipelajari di Kalkulus:

   - $\sqrt{f(x)}$ terdefinisi, jika $f(x) \geq 0$.
   - $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ terdefinisi untuk $g(x) \neq 0$.

   Sehingga untuk $\sqrt{3-|a-1|}$ dan $\sqrt{|a-1|-3}$, didaptkankan dua pertidaksamaan

   $$3-|a-1| \geq 0 \Longrightarrow |a-1| \leq 3 \tag{1}$$
   $$|a-1|-3 \geq 0 \Longrightarrow |a-1| \geq 3 \tag{2}$$

   Dari (1) dan (2) diperoleh $|a-1| = 3$ Sehingga nilai a yang memenuhi adalah $a = -2$ atau $a = 4$. Dapat di cek bahwa $a = -2$ tidak memenuhi sebab membuat penyebut menjadi 0. Sehingga $a = 4$ adalah solusi satu-satunya.

   $$n = \frac{\sqrt{3-|4-1|}+\sqrt{|4-1|-3}}{4+2} + \frac{1+2(4)}{4-3} = 9$$

   Perhatikan bahwa untuk menentukan digit terakhir suatu bilangan, dapat digunakan konsep ~~grup~~[1] $(\mathbb{Z}_{10}, \cdot)$. Dimana untuk $[9]_{10}$ berorde 2 pada grup tersebut.

   $$([9]_{10})^{2023} = ([9]_{10})^{2022} \cdot [9]_{10} = ([9]_{10}^2)^{1011} \cdot [9]_{10} = ([1]_{10})^{1011} \cdot [9]_{10} = [9]_{10}$$

   $\therefore$ Digit terakhir 9^{2023} adalah 9.

2. Ingat kembali bahwa grup siklik adalah grup yang dibangun oleh hanya satu elemen. Cara termudah untuk menentukan generator dari grup siklik adalah dengan mencari elemen ordenya sama dengan orde grupnya[2]. Maka generator masing-masing grup siklik adalah

   - Himpunan generator dari $\langle a \rangle$ adalah $\{a^1, a^3, a^5, a^7\}$.
   - Himpunan generator dari $\langle b \rangle$ adalah $\{b^1, b^3, b^7, b^9, b^{11}, b^{13}, b^{17}, b^{19}\}$.

3. Misalkan $a, b \in G$ dengan G grup.

   - Agar jawaban kita mendapat nilai sempurna, perlu dituliskan pembuktian yang lengkap pula. Pertama andaikan $|ab| = n$, maka

   $$\begin{aligned}
   (ab)^n &= e \\
   \underbrace{(ab)(ab)\cdots(ab)}_{n} &= e \\
   a\underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{n-1}b &= e \\
   \underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{n-1}b &= a^{-1} \\
   \underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{n-1} &= a^{-1}b^{-1} \\
   \underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{n-1} &= (ba)^{-1} \\
   \underbrace{(ba)\cdots(ba)}_{n} &= e \\
   (ba)^n &= e
   \end{aligned}$$

[1] Mungkin saja konsep seperti ini kurang tepat, namun setidaknya pendekatan inilah yang dapat kita hubungkan melalui materi aljabar yang sudah kita pelajari

[2] Bisa didapatkan dengan mencari pangkat elemen yang relatif prima dengan orde grup

—o0o—

Dari hasil di atas didapatkan $|ba| = k_1 n$ dengan $k_1 = 1, 2, 3, \ldots$.

Kedua andaikan $|ba| = m$, maka

$$
\begin{aligned}
(ba)^m &= e \\
\underbrace{(ba)(ba)\cdots(ba)}_{m} &= e \\
b\,\underbrace{(ab)\cdots(ab)}_{m-1}\,a &= e \\
\underbrace{(ab)\cdots(ab)}_{m-1}\,a &= b^{-1} \\
\underbrace{(ab)\cdots(ab)}_{m-1} &= a^{-1}b^{-1} \\
\underbrace{(ab)\cdots(ab)}_{m-1} &= (ab)^{-1} \\
\underbrace{(ab)\cdots(ab)}_{m} &= e \\
(ab)^m &= e
\end{aligned}
$$

Dari hasil di atas didapatkan $|ab| = k_2 m$ dengan $k_2 = 1, 2, 3, \ldots$.

Alhasil kita dapatkan $n = k_2 m \longrightarrow n = k_2(k_1 n) \longrightarrow k_1 = k_2 = 1$. Sehingga didapatkan kesimpulan $|ab| = |ba|$.

- Dengan cara yang sama, seperti yang dilakukan pada poin pertama.
  Andaikan $|aba^{-1}| = n$, maka

$$
\begin{aligned}
(aba^{-1})^n &= e \\
\underbrace{(aba^{-1})(aba^{-1})\cdots(aba^{-1})}_{n} &= e \\
ab(a^{-1}a)b(a^{-1}a)\cdots(a^{-1}a)ba^{-1} &= e \\
a\,\underbrace{bb\cdots b}_{n}\,a^{-1} &= e \\
a^{-1}a\,\underbrace{bb\cdots b}_{n}\,a^{-1}a &= a^{-1}a \\
b^n &= e
\end{aligned}
$$

Dari hasil di atas didapatkan $|b| = k_1 n$.

Kemudian andaikan $|b| = m$, maka dengan cara yang sama didapatkan $|aba^{-1}| = k_2 m$. Disini nantinya berakibat $k_1 = k_2 = 1$. $\therefore |aba^{-1}| = |b|$.

4. Perhatikan bahwa $|\mathbb{Z}_3| = 3$ dan agar $\det(A) \neq 0$, maka $a, c \neq 0$. Dengan menggunakan kaidah perkalian akan ada $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$ elemen dalam $S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$.[3]

$$
\begin{aligned}
S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3) \quad = \quad & \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \right. \\
& \left. \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}
$$

$$
H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.
$$

[3] Lebih jelasnya bisa dilihat di web Prof. Bi disini

—o0o—

(a) Menggunakan teorema Lagrange, banyak kosetnya adalah

$$|S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3) : H| = \frac{|S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)|}{|H|} = \frac{12}{3} = 4$$

(b) Koset kanan dari H dalam $S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$ adalah

- Untuk $g_1 = I$, maka $Hg_1 = H$.
- Untuk $g_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, maka $Hg_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$.
- Untuk $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, maka $Hg_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.
- Untuk $g_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, maka $Hg_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$

(c) Koset kiri dari H dalam $S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$ adalah

- Untuk $g_1 = I$, maka $g_1H = H$.
- Untuk $g_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, maka $g_2H = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$..
- Untuk $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, maka $g_3H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.
- Untuk $g_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, maka $g_4H = \left\{ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right\}$.

(d) Dapat dilihat bahwa koset kiri dan kanan dari H dalam $S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$ sama. Sehingga H merupakan subgrup normal dari $S_{2\times 2}(\mathbb{Z}_3)$.

-*Teosofi Hidayah Agung*

—o0o—