1. Misalkan $A := \{k : k \in \mathbb{N}, k \leq 20\}, B := \{3k - 1 : k \in \mathbb{N}\}$, dan $C := \{2k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$. Tentukan himpunan:

   (a) $A \cap B \cap C$

   (b) $(A \cap B) \setminus C$

   (c) $(A \cap C) \setminus B$

   Jawab:

   - $A = \{1, 2, 3, \dots, 20\}$
   - $B = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, \dots\}$
   - $C = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, \dots\}$

   (a) $A \cap B = \{2, 5, 8, 11, 14, 17, 20\}$
   $A \cap B \cap C = \{5, 11, 17\}$

9. Misal $A := B := \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$ dan tinjau subhimpunan $C := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$ dari $A \times B$. Apakah himpunan C merupakan fungsi? Jelaskan!
   Jawab:

   Definisi 1. *Misal A dan B adalah himpunan. Maka sebuah fungsi dari A ke B adalah sebuah relasi f atau pasangan terurut di $A \times B$ sedemikian sehingga setiap elemen di A berpasangan dengan tepat satu elemen di B. Notasi $f : A \to B$ menyatakan bahwa f adalah sebuah fungsi dari A ke B. Jika $(a, b) \in f$, maka kita menulis $f(a) = b$.*

   Perhatikan bahwa jika kita ambil $x = 0 \in A$, maka terdapat dua pasangan terurut di C yang memiliki elemen pertama 0, yaitu $(0, 1)$ dan $(0, -1)$.

   Jadi himpunan C bukan merupakan fungsi dari A ke B.

16. Tunjukkan bahwa fungsi f yang didefinisikan sebagai $f(x) = x/\sqrt{x^2 + 1}, x \in \mathbb{R}$, adalah sebuah bijeksi dari $\mathbb{R}$ ke $\{y : -1 < y < 1\}$.
    Jawab:

    Definisi 2. *Sebuah fungsi $f : A \to B$ disebut injektif (atau satu-satu) jika $f(a_1) = f(a_2)$ berakibat $a_1 = a_2$ untuk setiap $a_1, a_2 \in A$.*

    Definisi 3. *Sebuah fungsi $f : A \to B$ disebut surjektif (atau onto) jika untuk setiap $b \in B$ terdapat $a \in A$ sedemikian sehingga $f(a) = b$.*

    Definisi 4. *Sebuah fungsi yang injektif dan surjektif disebut bijeksi.*

    (**Injektif**) Misal $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dan $f(x_1) = f(x_2)$, maka

$$\begin{aligned}
\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} &= \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}} \\
\frac{x_1^2}{x_1^2+1} &= \frac{x_2^2}{x_2^2+1} \\
x_1^2(x_2^2+1) &= x_2^2(x_1^2+1) \\
\cancel{x_1^2x_2^2} + x_1^2 &= \cancel{x_1^2x_2^2} + x_2^2 \\
x_1^2 &= x_2^2 \\
x_1^2 + 1 &= x_2^2 + 1
\end{aligned}$$

    Berarti kita bisa katakan $\sqrt{x_1^2+1} = \sqrt{x_2^2+1}$ (jelas bukan 0). Sehingga kita peroleh

$$\begin{aligned}
f(x_1) &= f(x_2) \\
\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+1}} &= \frac{x_2}{\sqrt{x_2^2+1}} \\
\frac{x_1}{\cancel{\sqrt{x_1^2+1}}} &= \frac{x_2}{\cancel{\sqrt{x_1^2+1}}} \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

(**Surjektif**)

Ganti atau swap x dengan y pada fungsi $f(x)$, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} x &= \frac{y}{\sqrt{y^2+1}} \\ x^2 &= \frac{y^2}{y^2+1} \\ x^2 &= \frac{(y^2+1)-1}{y^2+1} \\ x^2 &= 1 - \frac{1}{y^2+1} \\ \frac{1}{y^2+1} &= 1 - x^2 \\ y^2+1 &= \frac{1}{1-x^2} \\ y^2 &= \frac{1}{1-x^2} - 1 \\ y^2 &= \frac{1-(1-x^2)}{1-x^2} \\ y^2 &= \frac{x^2}{1-x^2} \\ y &= \frac{|x|}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Namun disisi lain kita bahwa x dan y harus sama-sama positif atau negatif dari informasi $x = \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}$. Oleh karena itu

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Ambil sembarang $y \in (-1, 1)$. Definisikan

$$x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Periksa bahwa $f(x) = y$. Pertama hitung x^2 dan $\sqrt{x^2+1}$:

$$x^2 = \frac{y^2}{1-y^2}, \qquad x^2+1 = \frac{y^2}{1-y^2} + 1 = \frac{1}{1-y^2},$$

sehingga $\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$. Maka

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}}{\sqrt{\left(\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\right)^2 + 1}} = \frac{\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}} = y.$$

Jadi setiap $y \in (-1, 1)$ punya setidaknya satu $x \in \mathbb{R}$ (tepatnya $x = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$) dengan $f(x) = y$. Jadi f surjektif.

Dengan demikian karena f injektif dan surjektif, maka f adalah bijeksi.