Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

2. S menyatakan diameter lubang poros dan B diameter bantalan, dimana S dan B saling independen dengan $S \sim N(1, 0.0004)$ dan $B \sim N(1.01, 0.0009)$.

   (a) Jika poros dan bantalan dipilih secara acak, tentukan probabilitas bahwa diameter poros akan melebihi diameter bantalan.

   Solusi:

   Diketahui bahwa $\mu_S = 1$, $\mu_B = 1.01$, $\sigma_S = 0.02$, dan $\sigma_B = 0.03$. Misalkan $X = B - S \sim N(1 - 1.01, 0.0004 + 0.0009) = N(0.01, 0.0013)$ yang dimana mempresentasikan selisih diameter bantalan dan poros. Karena bantalan harus lebih kecil dari poros, maka selisih bantalan dan poros harus negatif. sehingga

   $$\begin{aligned} P[X < 0] &= P\left[\frac{X - 0.01}{\sqrt{0.0013}} < \frac{0 - 0.01}{\sqrt{0.0013}}\right] \\ &= P\left[Z < \frac{-0.01}{\sqrt{0.0013}}\right] \\ &= P[Z < -0.27735] \\ &= 0.3936 \end{aligned}$$

   $\therefore$ Probabilitas bahwa diameter poros akan melebihi bantalan adalah $39,36\%$.

   (b) Asumsikan variansnya sama $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$, dan carilah nilai σ yang menghasilkan probabilitas non-gangguan sebesar 0.95.

   Solusi:

   Mungkin yang dimaksud soal adalah probabilitas bahwa poros tidak dapat gangguan untuk masuk ke dalam bantalan. Karena diasumsikan variansnya sama, maka $X = B - S \sim N(0.01, 2\sigma^2)$. Sehingga diperoleh persamaan

   $$\begin{aligned} P[X > 0] &= 0.95 \\ P\left[Z > \frac{-0.01}{\sqrt{2\sigma^2}}\right] &= 0.95 \\ 1 - P\left[Z \leq \frac{-0.01}{\sqrt{2\sigma^2}}\right] &= 0.95 \\ P\left[Z \leq \frac{-0.01}{\sqrt{2\sigma^2}}\right] &= 0.05 \\ \frac{-0.01}{\sqrt{2\sigma^2}} &= -1.6449 \\ \sigma &\approx 0.0043 \end{aligned}$$

6. Sebuah komponen baru mulai diletakkan dan tersedia 9 komponen cadangan. Waktu hingga kegagalan dalam satuan hari adalah variabel yang independen , $T_i \sim \text{GAM}(100, 1.2)$.

   (a) Apa jenis distribusi dari $\displaystyle\sum_{i=1}^{10} T_i$?

Solusi:

Disini kita akan gunakan sifat dari fungsi pembangkit momen yang dimana untuk variabel T_i yang independen, maka berakibat $\prod_{i=1}^{n} M_{T_i}(t)$ adalah fungsi pembangkit momen dari $\sum_{i=1}^{n} T_i$. Sehingga kita dapatkan

$$\prod_{i=1}^{10} M_{T_i}(t) = \prod_{i=1}^{10} \left(\frac{1}{1-100t}\right)^{1.2} = \left(\frac{1}{1-100t}\right)^{12}$$

Dapat dilihat bahwa fungsi pembangkit momen tersebut merupakan fungsi pembangkit momen dari distribusi gamma dengan parameter $\theta = 100$ dan $\kappa = 12$.

$\therefore \sum_{i=1}^{10} T_i \sim \text{GAM}(100, 12)$.

(b) Berapa probabilitas bahwa operasi yang sukses dapat dipertahankan setidaknya selama 1.5 tahun? Petunjuk: Gunakan **Teorema 8.3.3** untuk mengubah ke variabel chi-square.

Solusi:

1.5 tahun = 547.5 hari. Misalkan $X = \sum_{i=1}^{10} T_i \sim \text{GAM}(100, 12)$, maka untuk $Y = 2X/100 \sim \chi^2(24)$.

$$\begin{aligned} P[X > 547.5] &= P\left[\frac{2X}{100} > 10.95\right] \\ &= P\left[\chi^2(24) > 10.95\right] \\ &= 0.99 \end{aligned}$$

$\therefore$ Probabilitas bahwa operasi yang sukses dapat dipertahankan setidaknya selama 1.5 tahun adalah 99%.

(c) Berapa banyak cadangan yang dibutuhkan agar dapat diyakini bahwa 95% operasi berhasil selama setidaknya dua tahun?

Solusi:

2 tahun = 730 hari. Dengan informasi yang sama seperti sebelumnya, maka disini kita akan mencari nilai k yang mempresentasikan derajat kebebasan dari distribusi χ^2

$$\begin{aligned} P[X > 730] &= 0.95 \\ P\left[\frac{2X}{100} > 14.6\right] &= 0.95 \\ P\left[\chi^2(k) > 14.6\right] &= 0.95 \\ k &= 25 \end{aligned}$$

$\therefore$ Dibutuhkan 25 cadangan agar dapat diyakini bahwa 95% operasi berhasil selama setidaknya dua tahun.

7. Lima tugas yang independen akan dikerjakan, dimana waktu dalam satuan jam untuk menyelesaikan tugas ke-i diberikan oleh $T_i \sim \text{GAM}(100, \kappa_i)$, dimana $\kappa_i = 3 + i/3$. Berapa probabilitas bahwa lima tugas akan selesai dalam waktu kurang dari 2600 jam?

Solusi:

Diketahui informasi distribusi gamma yang independen. Dengan menggunakan sifat fungsi pembangkit, kita bisa langsung menulis $X = \sum_{i=1}^{5} T_i \sim \text{GAM}\left(100, \sum_{i=1}^{5}(3 + i/3)\right)$ atau $X \sim \text{GAM}(100, 20)$. Sehingga untuk $Y = 2X/100 \sim \chi^2(40)$.

$$\begin{aligned} P[X < 2600] &= P\left[\frac{2X}{100} < 52\right] \\ &= P\left[\chi^2(40) < 52\right] \\ &= 1 - P\left[\chi^2(40) \geq 52\right] \\ &= 1 - 0.1 = 0.9 \end{aligned}$$

$\therefore$ Probabilitas lima tugas akan selesai dalam waktu kurang dari 2600 jam adalah 90%.