

Nama	: Teosofi Hidayah Agung
NRP	: 5002221132

Seorang pelaut ingin memindahkan kapalnya dari posisi awal  $x(0) = 0$  ke posisi akhir  $x(T) = 10$  dalam waktu sesingkat mungkin. Dinamika kapal diberikan oleh:

$$\dot{x}(t) = v(t), \quad \dot{v}(t) = u(t),$$

dengan:

$$|u(t)| \leq 1.$$

Tujuannya adalah meminimalkan waktu perjalanan:

$$J = \int_0^T 1 \, dt.$$

Gunakan Prinsip Minimum Pontryagin untuk menentukan kontrol optimal  $u(t)$  dan tentukan waktu terminal  $T$ .

## Penyelesaian

### 1. Fungsi Hamiltonian

Fungsi Hamiltonian untuk sistem ini adalah:

$$H = 1 + \lambda_1 \dot{x} + \lambda_2 \dot{v}.$$

Dari persamaan dinamika:

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = u,$$

maka:

$$H = 1 + \lambda_1 v + \lambda_2 u.$$

### 2. Persamaan Adjoin

Persamaan adjoin diberikan oleh:

$$\dot{\lambda}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}.$$

Karena  $H$  tidak secara eksplisit bergantung pada  $x$ , maka:

$$\dot{\lambda}_1 = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0 \implies \lambda_1 \text{ adalah konstan.}$$

Untuk  $\lambda_2$ :

$$\dot{\lambda}_2 = -\frac{\partial H}{\partial v} = -\lambda_1 \implies \lambda_2(t) = -\lambda_1 t + C,$$

dengan  $C$  adalah konstanta integrasi.

### 3. Kondisi Optimalitas

Prinsip Minimum Pontryagin mengharuskan kontrol  $u(t)$  meminimalkan  $H$ :

$$H = 1 + \lambda_1 v + \lambda_2 u.$$

Karena  $|u(t)| \leq 1$ , nilai  $u(t)$  yang meminimalkan  $H$  adalah nilai ekstrem:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{jika } \lambda_2 < 0, \\ -1 & \text{jika } \lambda_2 > 0. \end{cases}$$

Substitusi  $\lambda_2(t) = -\lambda_1 t + C$ :

- Jika  $-\lambda_1 t + C < 0$ , maka  $u(t) = 1$ .
- Jika  $-\lambda_1 t + C > 0$ , maka  $u(t) = -1$ .

#### 4. Dinamika Sistem

Kontrol  $u(t)$  akan terdiri dari dua fase:

1. **Akselerasi Maksimum ( $u = 1$ ):**

$$\dot{v} = 1 \implies v(t) = t + v(0),$$

$$\dot{x} = v \implies x(t) = \frac{1}{2}t^2 + v(0)t + x(0).$$

2. **Deselerasi Maksimum ( $u = -1$ ):**

$$\dot{v} = -1 \implies v(t) = -t + v(T_1),$$

$$\dot{x} = v \implies x(t) = -\frac{1}{2}t^2 + v(T_1)t + x(T_1).$$

#### 5. Kondisi Batas

Kondisi batas adalah:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0, & v(0) &= 0, \\ x(T) &= 10, & v(T) &= 0. \end{aligned}$$

Dari solusi fase akselerasi dan deselerasi:

- Akselerasi terjadi hingga waktu  $T_1$ , dengan  $x(T_1)$  dan  $v(T_1)$  sebagai posisi dan kecepatan saat transisi.
- Deselerasi berlangsung dari  $T_1$  hingga  $T$ , dengan kondisi  $v(T) = 0$ .

Dari persamaan dinamika, solusi waktu optimal diperoleh dengan menyelesaikan:

$$\text{Fase akselerasi: } x(T_1) = \frac{1}{2}T_1^2, \quad v(T_1) = T_1,$$

$$\text{Fase deselerasi: } x(T) = \frac{1}{2}T_1^2 + T_1(T - T_1) - \frac{1}{2}(T - T_1)^2 = 10.$$

Selesaikan sistem untuk mendapatkan  $T_1$  dan  $T$ . Jawabannya adalah:

$$T_1 = 2\sqrt{5}, \quad T = 4\sqrt{5}.$$

#### 6. Kontrol Optimal

Kontrol optimal  $u(t)$  diberikan oleh:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_1, \\ -1 & T_1 \leq t \leq T. \end{cases}$$