EAS GASAL 2023/2024		
	Matakuliah	Geometri Analitik (A,B,C,D)
	Semester	1
	Kredit SKS	3
	Hari, Tanggal	Jumat, 15 Desember 2023
	Waktu	**100 menit**
	Dosen	Drs. I Gst Ngr Rai Usadha, M.Si. Dra, Wahyu Fistia Doctorina, M.Si. Drs. Komar Baihaqi, M.Si. DR. Mont Kistosil Fahim, S.Si, M.Si.

1. Sketsa permukaan $x^2 - y^2 - z^2 = 16$.

2. Dapatkan z_x, z_y, z_{xx}, z_{yy}, dan z_{xy} dari $x^2 + y^2 - z^2 = 4$.

3. Dapatkan hampiran persentase kesalahan maksimum untuk isi kerucut jika tingginya 30 cm terjadi kesalahan pengukuran sebesar 1% dan jari-jari lingkaran alasnya 10 cm dengan kesalahan pengukuran sebesar $\frac{1}{2}$%. Tentukan nilai hampiran ukuran minimum dan maksimum isi kerucut tersebut.

4. Dapatkan persamaan bidang singgung dan garis normal terhadap permukaan $z + 1 = xe^y \cos z$ di titik $(1, 0, 0)$.

5. Kuadrat jarak titik asal ke permukaan $xyz = 1$ adalah $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Dapatkan jarak terpendek dari titik asal ke permukaan $xyz = 1$ tersebut.

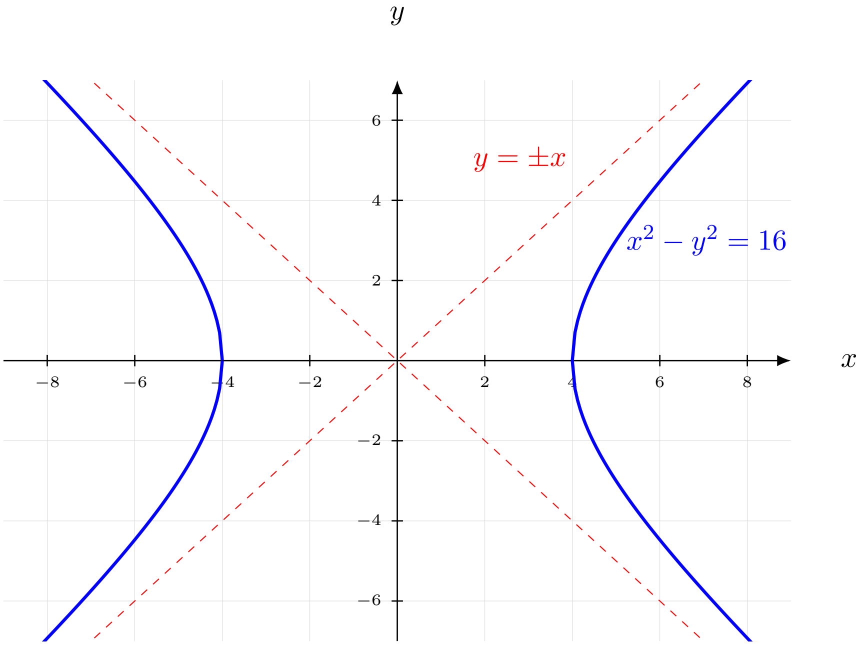
== HARAP JUNJUNG TINGGI KEJUJURAN ==

—o0o—

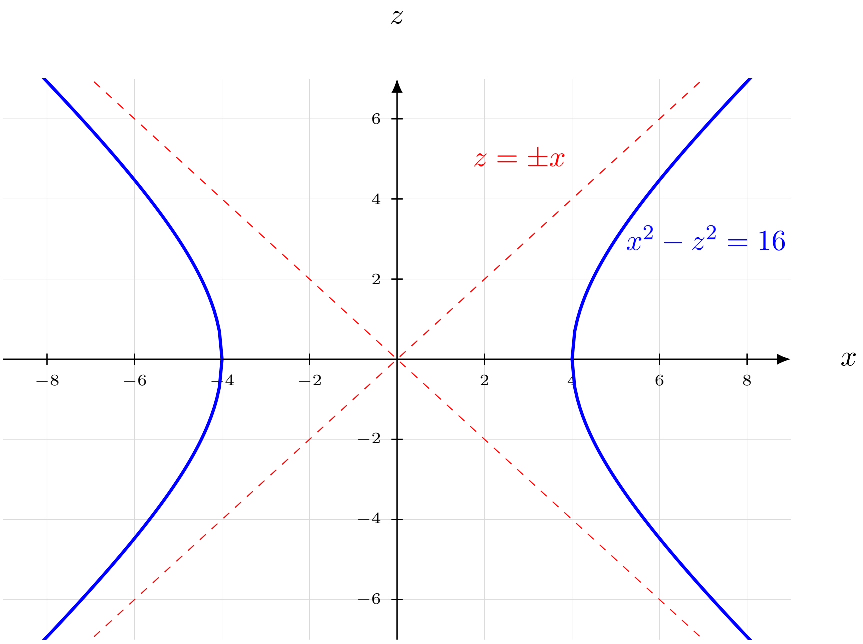
SOLUSI

1. Andaikan kita tidak mengetahui bahwa itu adalah hiperboloid, kita bisa pandang persamaan diatas dalam 3 POV yaitu bidang xy, xz, dan yz.

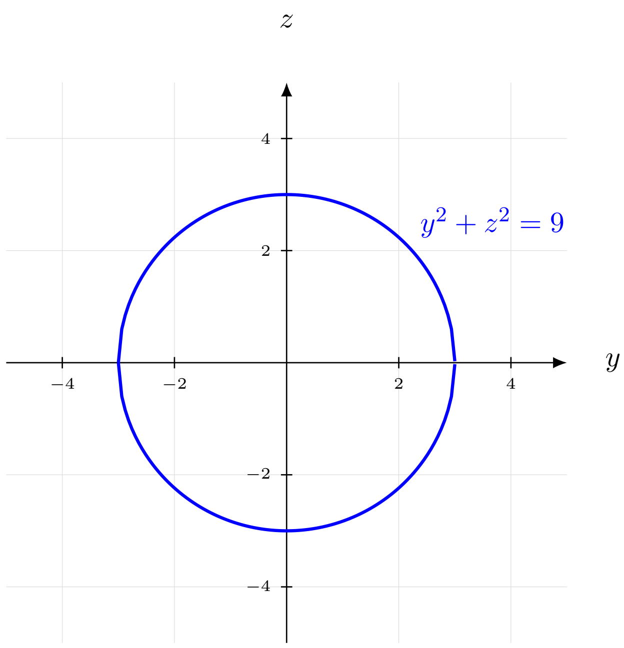
   - Pada bidang xy (jika $z = 0$), maka diperoleh $x^2 - y^2 = 16$, yaitu hiperbola terbuka ke arah sumbu x. Gambarnya seperti berikut.



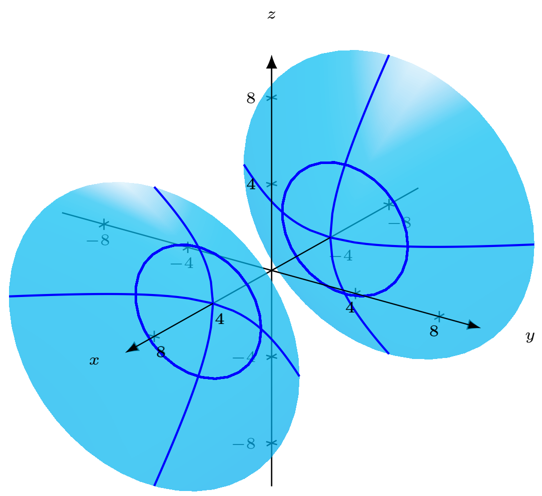
   - Pada bidang xz (jika $y = 0$), maka diperoleh $x^2 - z^2 = 16$, yaitu hiperbola terbuka ke arah sumbu x. Gambarnya seperti berikut.



   - Pada bidang yz (jika $x = 5$ atau $x = -5$), maka diperoleh $-y^2 - z^2 = 16 - 25 = -9 \implies y^2 + z^2 = 9$, yaitu lingkaran dengan jari-jari 3. Gambarnya seperti berikut.



Kemudian jika kita gabungkan ketiga gambar diatas dalam bentuk 3D, maka kita akan mendapatkan gambar berikut.



2. Diketahui $z^2 = x^2 + y^2 - 4$ atau bisa kta tulis $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$. Agar lebih mudah, cukup kita turunkan secara implisit untuk persamaan $z^2 = x^2 + y^2 - 4$.

   Ketika diturunkan secara implisit terhadap x, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(z^2) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 + y^2 - 4) \\ 2z\frac{\partial z}{\partial x} &= 2x + 0 - 0 \\ z_x &= \frac{x}{z} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}. \end{aligned}$$

   Ketika diturunkan secara implisit terhadap y, diperoleh

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(z^2) &= \frac{\partial}{\partial y}(x^2 + y^2 - 4) \\ 2z\frac{\partial z}{\partial y} &= 0 + 2y - 0 \\ z_y &= \frac{y}{z} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}. \end{aligned}$$

Kemudian, kita turunkan z_x terhadap x untuk mendapatkan z_{xx}.

$$\begin{aligned} z_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{z}\right) \\ &= \frac{z \cdot 1 - x \cdot z_x}{z^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2-4} - x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2-4}}}{x^2+y^2-4} \\ &= \frac{(x^2+y^2-4)-x^2}{(x^2+y^2-4)^{3/2}} \\ &= \frac{y^2-4}{(x^2+y^2-4)^{3/2}} \end{aligned}$$

Selanjutnya, kita turunkan z_y terhadap y untuk mendapatkan z_{yy}.

$$\begin{aligned} z_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{z}\right) \\ &= \frac{z \cdot 1 - y \cdot z_y}{z^2} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+y^2-4} - y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-4}}}{x^2+y^2-4} \\ &= \frac{(x^2+y^2-4)-y^2}{(x^2+y^2-4)^{3/2}} \\ &= \frac{x^2-4}{(x^2+y^2-4)^{3/2}} \end{aligned}$$

Terakhir, kita turunkan z_x terhadap y atau z_y terhadap x untuk mendapatkan z_{xy}.

$$\begin{aligned} z_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{z}\right) \\ &= \frac{z \cdot 0 - x \cdot z_y}{z^2} \\ &= \frac{-x\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2-4}}}{x^2+y^2-4} \\ &= \frac{-xy}{(x^2+y^2-4)^{3/2}} \end{aligned}$$

3. Diketahui tinggi kerucut $h = 30\,\text{cm}$ dan jari-jari lingkaran alasnya $r = 10\,\text{cm}$. Kemudian diketahui pula kesalahan pengukuran tinggi kerucut $\Delta h = 0.01h = 0.3\,\text{cm}$ dan kesalahan pengukuran jari-jari lingkaran alasnya $\Delta r = 0.005r = 0.05\,\text{cm}$. Isi kerucut dapat dihitung dengan rumus
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h.$$
Dengan menggunakan diferensial total, maka diperoleh
$$\Delta V \approx dV = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h.$$
Selanjutnya, kita hitung turunan parsialnya.
$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{1}{3}\pi \cdot 2r \cdot h = \frac{2}{3}\pi r h, \\ \frac{\partial V}{\partial h} &= \frac{1}{3}\pi r^2. \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned}\Delta V \approx dV &= \frac{2}{3}\pi rh\Delta r + \frac{1}{3}\pi r^2\Delta h \\ &= \frac{2}{3}\pi(10)(30)(0.05) + \frac{1}{3}\pi(10)^2(0.3) \\ &= 10\pi + 10\pi = 20\pi\,\text{cm}^3.\end{aligned}$$

Volume kerucut sebenarnya adalah

$$V = \frac{1}{3}\pi(10)^2(30) = 1000\pi\,\text{cm}^3.$$

Jadi, agar isi kerucut tersebut minimum dan maksimum, maka

$$\begin{aligned}V_{\text{min}} &= V - \Delta V = 1000\pi - 20\pi = 980\pi\,\text{cm}^3, \\ V_{\text{max}} &= V + \Delta V = 1000\pi + 20\pi = 1020\pi\,\text{cm}^3.\end{aligned}$$

4. Untuk mendapatkan persamaan bidang singgung, kita mulai dengan menurunkan secara implisit persamaan

$$z + 1 = xe^y\cos z.$$

Ketika diturunkan terhadap x, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}(z+1) &= \frac{\partial}{\partial x}(xe^y\cos z) \\ \frac{\partial z}{\partial x} &= e^y\cos z + xe^y(-\sin z)\frac{\partial z}{\partial x} \\ z_x &= e^y\cos z - xe^y\sin z\cdot z_x \\ z_x(1 + xe^y\sin z) &= e^y\cos z \\ z_x &= \frac{e^y\cos z}{1 + xe^y\sin z}.\end{aligned}$$

Ketika diturunkan terhadap y, diperoleh

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}(z+1) &= \frac{\partial}{\partial y}(xe^y\cos z) \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= xe^y\cos z + xe^y(-\sin z)\frac{\partial z}{\partial y} \\ z_y &= xe^y\cos z - xe^y\sin z\cdot z_y \\ z_y(1 + xe^y\sin z) &= xe^y\cos z \\ z_y &= \frac{xe^y\cos z}{1 + xe^y\sin z}.\end{aligned}$$

Selanjutnya, kita substitusi titik $(1,0,0)$ ke dalam z_x dan z_y.

$$\begin{aligned}z_x(1,0,0) &= \frac{e^0\cos 0}{1 + 1e^0\sin 0} = \frac{1\cdot 1}{1 + 1\cdot 0} = 1, \\ z_y(1,0,0) &= \frac{1e^0\cos 0}{1 + 1e^0\sin 0} = \frac{1\cdot 1\cdot 1}{1 + 1\cdot 0} = 1.\end{aligned}$$

Dengan demikian, persamaan bidang singgung di titik $(1,0,0)$ adalah

$$\begin{aligned}z - z_0 &= z_x(x - x_0) + z_y(y - y_0) \\ z - 0 &= 1(x - 1) + 1(y - 0) \\ z &= x + y - 1.\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan persamaan garis normal, kita gunakan vektor normal dari bidang singgung, yaitu $\langle -z_x, -z_y, 1\rangle = \langle -1, -1, 1\rangle$. Dengan demikian, persamaan parametris garis normal di titik $(1, 0, 0)$ adalah

$$\begin{cases} x &= 1 - t, \\ y &= 0 - t, \\ z &= 0 + t, \end{cases} \implies x - 1 = y = -z.$$

5. Diketahui permukaan $xyz = 1$ dan jarak kuadrat titik asal ke permukaan tersebut adalah $d^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Kita ingin meminimalkan d^2 dengan syarat $xyz = 1$. Kita gunakan metode Lagrange, yaitu dengan mendefinisikan fungsi

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = d^2 + \lambda(xyz - 1) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda(xyz - 1).$$

Kemudian kita hitung turunan parsialnya dan setarakan dengan nol.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= 2x + \lambda yz = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= 2y + \lambda xz = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= 2z + \lambda xy = 0, \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= xyz - 1 = 0. \end{aligned}$$

Dari persamaan pertama, kedua, dan ketiga, kita dapatkan

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{2x}{yz}, \\ \lambda &= -\frac{2y}{xz}, \\ \lambda &= -\frac{2z}{xy}. \end{aligned}$$

Dengan menyamakan ketiga persamaan di atas, kita peroleh

$$\begin{aligned} -\frac{2x}{yz} &= -\frac{2y}{xz} \implies x^2 = y^2, \\ -\frac{2y}{xz} &= -\frac{2z}{xy} \implies y^2 = z^2, \\ -\frac{2z}{xy} &= -\frac{2x}{yz} \implies z^2 = x^2. \end{aligned}$$

Dari sini, kita dapatkan $x^2 = y^2 = z^2$ atau $|x| = |y| = |z|$. Namun dengan mempertimbangkan syarat $xyz = 1$, maka akan ada 4 kemungkinan nilai (x, y, z), yaitu

$$(1, 1, 1), \quad (-1, -1, 1), \quad (-1, 1, -1), \quad (1, -1, -1).$$

Dengan menggunakan turunan kedua, kita dapatkan

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} &= 2, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} &= 2, \end{aligned}$$

Karena $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} > 0$ dan $\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} > 0$, maka keempat titik tersebut adalah titik minimum. Artinya jarak terpendek dari titik asal ke permukaan $xyz = 1$ adalah

$$d = \sqrt{d^2} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}.$$