Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

28. Misalkan X_1 dan X_2 adalah sampel acak berukuran $n = 2$ dari distribusi kontinu dengan pdf yang didefinisikan $f(x) = 2x$ untuk $0 < x < 1$ dan $f(x) = 0$ untuk yang lain.

(a) Tentukan pdf marginal dari statistik order terkecil dan terbesar, Y_1 dan Y_2.

Solusi:

Untuk mencari pdf marginal, kita gunakan formula berikut

$$g_k(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}[F(y_k)]^{k-1}[1-F(y_k)]^{n-k}f(y_k)$$

Diketahui bahwa $n = 2$, $f(y_k) = 2y_k$ dan $F(y_k) = y_k^2$.

- Untuk Y_1

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= \frac{2!}{((1-1)!(2-1)!)}[F(y_1)]^{1-1}[1-F(y_1)]^{2-1}f(y_1) \\ &= 2[1-y_1^2]2y_1 = 4y_1 - 4y_1^3, \quad 0 < y_1 < 1 \end{aligned}$$

- Untuk Y_2

$$\begin{aligned} g_2(y_2) &= \frac{2!}{((2-1)!(2-2)!)}[F(y_2)]^{2-1}[1-F(y_2)]^{2-2}f(y_2) \\ &= 2[y_2^2]2y_2 = 4y_2^3, \quad 0 < y_2 < 1 \end{aligned}$$

(b) Tentukan pdf bersama dari Y_1 dan Y_2.

Solusi:

Untuk mencari pdf bersama dari Y_1 dan Y_2 kita gunakan formula berikut

$$g(y_1, y_2) = 2!f(y_1)f(y_2), \quad y_1 < y_2$$

Sehingga, kita dapatkan

$$g(y_1, y_2) = 2! \cdot 2y_1 \cdot 2y_2 \cdot = 8y_1y_2, \quad 0 < y_1 < y_2 < 1$$

(c) Tentukan pdf dari rentang sampel $R = Y_2 - Y_1$.

Solusi:

Misalkan $R = Y_2 - Y_1$ dan $S = Y_1$, sehingga $Y_2 = R + S$. Disini akan kita transformasikan sampel acak (Y_1, Y_2) ke (R, S).

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Y_1}{\partial R} & \dfrac{\partial Y_1}{\partial S} \\[2ex] \dfrac{\partial Y_2}{\partial R} & \dfrac{\partial Y_2}{\partial S} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Perhatikan untuk interval variabel sampelnya

$$\begin{aligned} & 0 < y_1 < y_2 < 1 \\ \iff & 0 < s < r + s < 1 \\ \iff & 0 < s < 1 - r \end{aligned}$$

maka pdf bersama dari R dan S adalah

$$\begin{aligned} g(r,s) &= g(y_1, y_2)|J| \\ &= 8y_1y_2 \\ &= 8s(r+s), \quad 0 < s < 1 - r \end{aligned}$$

Sekarang kita akan mencari pdf marginal dari R.

$$\begin{aligned} g_R(r) &= \int_0^{1-r} 8s(r+s)ds \\ &= 8r \int_0^{1-r} s\,ds + 8 \int_0^{1-r} s^2 ds \\ &= 8r \left[\frac{s^2}{2}\right]_0^{1-r} + 8 \left[\frac{s^3}{3}\right]_0^{1-r} \\ &= 8r \left[\frac{(1-r)^2}{2}\right] + 8 \left[\frac{(1-r)^3}{3}\right] \\ &= 4r(1-r)^2 + \frac{8}{3}(1-r)^3 \end{aligned}$$

$\therefore$ pdf dari rentang sampel R adalah $g_R(r) = 4r(1-r)^2 + \dfrac{8}{3}(1-r)^3, \quad 0 < r < 1.$

29. Tinjau sampel acak berukuran n dari distribusi dengan pdf $f(x) = 1/x^2$ untuk $1 \le x < \infty$ dan $f(x) = 0$ untuk yang lain.

(a) Dapatkan pdf bersama statistik order

Solusi:

Untuk mencari pdf bersama dari statistik order berukuran n, kita gunakan formula berikut

$$g(y_1, y_2, ..., y_n) = n! f(y_1) f(y_2) \ldots f(y_n), \quad y_1 < \cdots < y_n$$

Sehingga didapatkan pdf bersamanya

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, ..., y_n) &= n! \left(\frac{1}{y_1^2}\right) \left(\frac{1}{y_2^2}\right) \cdots \left(\frac{1}{y_n^2}\right) \\ &= \frac{n!}{(y_1 y_2 \ldots y_n)^2}, \quad 1 < y_1 < \cdots < y_n < \infty \end{aligned}$$

(b) Dapatkan pdf dari statistik order terkecil, Y_1.

Solusi:

Diketahui $f(y_k) = \dfrac{1}{y_k^2}$ dan $F(y_k) = \displaystyle\int_1^{y_k} \frac{1}{x^2}dx = 1 - \frac{1}{y_k}$. Kemudian kita gunakan formula berikut

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= \frac{n!}{(1-1)!(n-1)!}[F(y_1)]^{1-1}[1-F(y_1)]^{n-1}f(y_1) \\ &= \frac{n!}{(n-1)!}\left[1-\left(1-\frac{1}{y_1}\right)\right]\left(\frac{1}{y_1^2}\right) \\ &= \frac{n}{y_1^3}, \quad 1 < y_1 < \infty \end{aligned}$$

(c) Dapatkan pdf dari statistik order terbesar, Y_n.

Solusi:

Dengan cara yang sama, kita dapatkan

$$\begin{aligned} g_n(y_n) &= \frac{n!}{(n-1)!(n-n)!}[F(y_n)]^{n-1}[1-F(y_n)]^{n-n}f(y_n) \\ &= n\left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{y_n^2}\right) \\ &= \frac{n}{y_n^2}\left(1-\frac{1}{y_n}\right)^{n-1}, \quad 1 < y_n < \infty \end{aligned}$$

(d) Dapatkan pdf dari rentang sampel, $R = Y_n - Y_1$, untuk $n = 2$.

Solusi:

Misalkan $R = Y_n - Y_1$ dan $S = Y_1$, sehingga $Y_2 = R + S$. Disini akan kita transformasikan sampel acak (Y_1, Y_2) ke (R, S).

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Y_1}{\partial R} & \dfrac{\partial Y_1}{\partial S} \\ \dfrac{\partial Y_2}{\partial R} & \dfrac{\partial Y_2}{\partial S} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Perhatikan untuk interval variabel sampelnya

$$\begin{aligned} & 1 < y_1 < y_2 < \infty \\ \iff & 1 < s < r + s < \infty \\ \iff & 1 < s < \infty \end{aligned}$$

maka pdf bersama dari R dan S adalah

$$
\begin{aligned}
g(r,s) &= g(y_1,y_2)|J| \\
&= 2\left(\frac{1}{y_1^2}\right)\left(\frac{1}{y_2^2}\right) \\
&= 2\left(\frac{1}{s^2}\right)\left(\frac{1}{(r+s)^2}\right), \quad 1 < s < \infty
\end{aligned}
$$

Sekarang kita akan mencari pdf marginal dari R.

$$
\begin{aligned}
g_R(r) &= 2\int_1^\infty \frac{1}{s^2(r+s)^2} ds \\
&= 2\int_1^\infty \frac{2}{r^3(r+s)} + \frac{1}{r^2(r+s)^2} + \frac{1}{r^2 s^2} - \frac{2}{r^3 s} ds \\
&= 2\left[\frac{2}{r^3}\ln(r+s) - \frac{1}{r^2(r+s)} - \frac{1}{r^2 s} - \frac{2}{r^3}\ln s\right]_1^\infty \\
&= 2\left[\frac{2}{r^3}\ln\left(\frac{r+s}{s}\right) - \frac{1}{r^2(r+s)} - \frac{1}{r^2 s}\right]_1^\infty \\
&= 2\left[\frac{2}{r^3}\ln(1) - 0 - 0 - \left(\frac{2}{r^3}\ln(r+1) - \frac{1}{r^2(r+1)} - \frac{1}{r^2}\right)\right] \\
&= \frac{1}{r^2(r+1)} + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^3}\ln(r+1)
\end{aligned}
$$

$\therefore$ pdf dari rentang sampel R adalah $g_R(r) = \dfrac{1}{r^2(r+1)} + \dfrac{1}{r^2} - \dfrac{2}{r^3}\ln(r+1), \quad 1 < r < \infty.$

(e) Dapatkan pdf dari median sampel Y_r, asumsikan n ganjil sehingga $r = (n+1)/2$.

Solusi:
Gunakan formula yang sama

$$
\begin{aligned}
g_r(y_r) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!}[F(y_r)]^{r-1}[1-F(y_r)]^{n-r} f(y_r) \\
&= \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)!\left(\frac{n-1}{2}\right)!}\left[1-\frac{1}{y_r}\right]^{\frac{n-1}{2}}\left[1-\left(1-\frac{1}{y_r}\right)\right]^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{y_r^2}\right) \\
&= \frac{n!}{\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2}\left(1-\frac{1}{y_r}\right)^{\frac{n-1}{2}}\left(\frac{1}{y_r}\right)^{\frac{n+3}{2}}, \quad 1 < y_r < \infty
\end{aligned}
$$

31. Tinjau sampel acak berukuran n dari distribusi eksponensial, $X_i \sim \mathrm{EXP}(1)$. Dapatkan setiap pdf berikut:

(a) statistik order terkecil, Y_1.

Solusi:

Diketahui bahwa $f(x) = e^{-x}$ dan $F(x) = 1 - e^{-x}$. Maka, kita dapatkan

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= \frac{n!}{(1-1)!(n-1)!}[F(y_1)]^{1-1}[1-F(y_1)]^{n-1}f(y_1) \\ &= n[1-(1-e^{-y_1})]^{n-1}e^{-y_1} \\ &= n[e^{-y_1}]^{n-1}e^{-y_1} \\ &= \frac{n}{e^{ny_1}}, \quad 0 < y_1 < \infty \end{aligned}$$

(b) statistik order terbesar, Y_n.

Solusi:
Dengan cara yang sama, kita dapatkan

$$\begin{aligned} g_n(y_n) &= \frac{n!}{(n-1)!(n-n)!}[F(y_n)]^{n-1}[1-F(y_n)]^{n-n}f(y_n) \\ &= n(1-e^{-y_n})^{n-1}e^{-y_n}, \quad 0 < y_n < \infty \end{aligned}$$

(c) rentang sampel, $R = Y_n - Y_1$.

Solusi:
Misalkan $R = Y_n - Y_1$ dan $S = Y_1$, sehingga $Y_n = R + S$. Disini akan kita transformasikan sampel acak (Y_1, Y_n) ke (R, S).

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial Y_1}{\partial R} & \dfrac{\partial Y_1}{\partial S} \\ \dfrac{\partial Y_n}{\partial R} & \dfrac{\partial Y_n}{\partial S} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Perhatikan untuk interval variabel sampelnya

$$\begin{aligned} & 0 < y_1 < y_n < \infty \\ \iff & 0 < s < r + s < \infty \\ \iff & 0 < s < \infty \end{aligned}$$

Dengan menggunakan formula

$$\begin{aligned} g(y_i, y_j) = & \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!}[F(y_i)]^{i-1}f(y_i)[F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1} \\ & [1 - F(y_j)]^{n-j}f(y_j), \quad y_i < y_j \end{aligned}$$

maka pdf bersama dari R dan S adalah

$$\begin{aligned}
g(r,s) &= g(y_1,y_n)|J| \\
&= \frac{n!}{(1-1)!(n-1-1)!(n-n)!}[F(y_1)]^{1-1}f(y_1)[F(y_n)-F(y_1)]^{n-1-1} \\
&\quad [1-F(y_n)]^{n-n}f(y_n) \\
&= \frac{n!}{(n-2)!}e^{-y_1}[(1-e^{-y_n})-(1-e^{-y_1})]^{n-2}e^{-y_n} \\
&= \frac{n!}{(n-2)!}e^{-y_1}(e^{-y_1}-e^{-y_n})^{n-2}e^{-y_n} \\
&= \frac{n!}{(n-2)!}e^{-r-2s}(e^{-s}-e^{-r-s})^{n-2}, \quad 0<s<\infty
\end{aligned}$$

Dengan demikian pdf dari rentang sampel R adalah

$$\begin{aligned}
g_R(r) &= \int_0^\infty \frac{n!}{(n-2)!}e^{-r-2s}(e^{-s}-e^{-r-s})^{n-2}ds \\
&= \frac{n!}{(n-2)!}e^{-r}\int_0^\infty e^{-2s}(e^{-s}-e^{-r-s})^{n-2}ds \\
&= \frac{n!}{(n-2)!}e^{-r}\int_0^\infty e^{-2s}(e^{-s}(1-e^{-r}))^{n-2}ds \\
&= \frac{n!}{(n-2)!}e^{-r}(1-e^{-r})^{n-2}\int_0^\infty e^{-2ns}ds \\
&= \frac{n!}{(n-2)!}e^{-r}(1-e^{-r})^{n-2}\left[-\frac{1}{2n}e^{-2ns}\right]_0^\infty \\
&= \frac{n!}{2n(n-2)!}e^{-r}(1-e^{-r})^{n-2}
\end{aligned}$$

$\therefore$ pdf dari rentang sampel R adalah $g_R(r) = \dfrac{n!}{2n(n-2)!}e^{-r}(1-e^{-r})^{n-2}, \quad 0<r<\infty.$

(d) r statistik pertama, $Y_1,...,Y_r$.

Solusi:

Gunakan formula berikut

$$g(y_1,...,y_r) = \frac{n!}{(n-r)!}[1-F(y_r)]^{n-r}\prod_{i=1}^{r}f(y_i)$$

sehingga

$$\begin{aligned}
g(y_1,...,y_r) &= \frac{n!}{(n-r)!}[1-(1-e^{-y_r})]^{n-r}\prod_{i=1}^{r}e^{-y_i} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}e^{-(n-r)y_r}e^{-\sum_{i=1}^{r}y_i} \\
&= \frac{n!}{(n-r)!}e^{(r-n)y_r-(y_1+...+y_r)}, \quad 0<y_1<\cdots<y_r<\infty
\end{aligned}$$