1.2 Tentukan Polinomial Taylor orde ke-N di sekitar $x = 0$ untuk fungsi

$$f(x) = \ln(1 + x).$$

Solusi. Kita mulai dengan menghitung turunan-turunan dari $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln(1 + x) \\
f'(x) &= \frac{1}{1 + x} \\
f''(x) &= -\frac{1}{(1 + x)^2} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{2}{(1 + x)^3} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= (-1)^{k-1}\frac{(k-1)!}{(1 + x)^k}
\end{aligned}$$

Dengan demikian, kita punya

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 1, \quad f''(0) = -1, \quad f^{(3)}(0) = 2, \quad f^{(4)}(0) = -6.$$

Sehingga, polinomial Taylor orde ke-N di sekitar $x = 0$ adalah

$$P_N(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k.$$

Sekarang tinjau untuk sebuah nilai eror $\varepsilon > 0$ dan suku terbesar polinomial adalah N. Kita ingin mencari interval $[-r, r]$ sehingga

$$|f(x) - P_N(x)| < \varepsilon.$$

Menggunnakan teorema yang ada pada buku, bisa kita pastikan terdapat $C > 0$ sehingga

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \quad \forall n \in \mathbb{N},\, x \in [-r, r].$$

Selanjutnya diperoleh informasi bahwa

$$|f^{(n)}(x)| = \left|(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1 + x)^n}\right| = \frac{(n-1)!}{|1 + x|^n}$$

Namun karena $-r \leq x \leq r$, maka $1 - r \leq 1 + x \leq 1 + r$. Sehingga untuk persekitaran $x = 0$ dengan $x \in [-r, r]$ berlaku

$$|f^{(n)}(x)| \leq \frac{(n-1)!}{(1 - r)^n}.$$

Jadi dapat kita ambil $C_n = \frac{(n-1)!}{(1-r)^n}$. Subtitusikan $C = C_{N+1} = \frac{N!}{(1-r)^{N+1}}$ ke dalam pertidaksamaan eror, sehingga

$$\begin{aligned}
|f(x) - P_N(x)| &\leq \frac{C}{(N+1)!}|x|^{N+1} \\
&= \frac{N!}{(N+1)!(1-r)^{N+1}}|x|^{N+1} \\
&= \frac{1}{N+1} \cdot \frac{|x|^{N+1}}{(1-r)^{N+1}} \\
&\leq \frac{1}{N+1}\left(\frac{r}{1-r}\right)^{N+1}.
\end{aligned}$$

Untuk mencari r sehingga eror di atas kurang dari ε, kita perlu memenuhi

$$\frac{1}{N+1}\left(\frac{r}{1-r}\right)^{N+1} < \varepsilon.$$

Dari pertidaksamaan di atas, kita peroleh

$$\begin{aligned}
\left(\frac{r}{1-r}\right)^{N+1} &< (N+1)\varepsilon \\
\frac{r}{1-r} &< \sqrt[N+1]{(N+1)\varepsilon} \\
r &< (1-r)\sqrt[N+1]{(N+1)\varepsilon} \\
r + r\sqrt[N+1]{(N+1)\varepsilon} &< \sqrt[N+1]{(N+1)\varepsilon} \\
r\left(1 + \sqrt[N+1]{(N+1)\varepsilon}\right) &< \sqrt[N+1]{(N+1)\varepsilon} \\
r &< \frac{\sqrt[N+1]{(N+1)\varepsilon}}{1 + \sqrt[N+1]{(N+1)\varepsilon}}.
\end{aligned}$$

Jadi, untuk setiap $\varepsilon > 0$ dan suku terbesar polinomial N, kita dapat memilih jari-jari terbesar intervalnya yaitu

$$r = \frac{\sqrt[N+1]{(N+1)\varepsilon}}{1 + \sqrt[N+1]{(N+1)\varepsilon}}$$

Contoh. Ambil beberapa contoh nilai ε dan N.

- Misalkan $\varepsilon = 0.01$ dan $N = 3$. Maka

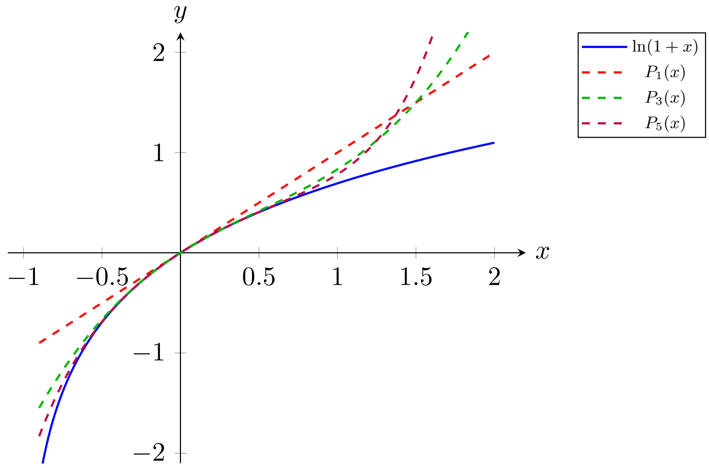
  $$r = \frac{\sqrt[4]{4 \cdot 0.01}}{1 + \sqrt[4]{4 \cdot 0.01}} \approx 0.388.$$

  Jadi, untuk $x \in [-0.388, 0.388]$ berlaku $|\ln(1+x) - P_3(x)| < 0.01$.
- Misalkan $\varepsilon = 0.001$ dan $N = 5$. Maka

  $$r = \frac{\sqrt[6]{6 \cdot 0.001}}{1 + \sqrt[6]{6 \cdot 0.001}} \approx 0.205.$$

  Jadi, untuk $x \in [-0.205, 0.205]$ berlaku $|\ln(1+x) - P_5(x)| < 0.001$.

- Misalkan $\varepsilon = 0.0001$ dan $N = 1$. Maka
$$r = \frac{\sqrt[2]{2 \cdot 0.0001}}{1 + \sqrt[2]{2 \cdot 0.0001}} \approx 0.0139.$$
Jadi, untuk $x \in [-0.0139, 0.0139]$ berlaku $|\ln(1+x) - P_1(x)| < 0.0001$.



1.4 (i) Tentukan sebuah polinomial
$$P(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n$$
sedemikian sehingga
$$\left| \sin x - \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \right| \le 0.1, \quad \forall x \in \left[0, \tfrac{\pi}{2}\right].$$
Solusi. Polinomial Maclaurin untuk fungsi $\sin x$ adalah
$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$
Cukup kita analisa N yang memenuhi pertidaksamaan
$$\frac{x^{2N+3}}{(2N+3)!} \le 0.1, \quad \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$
karena $x \le \frac{\pi}{2}$, maka
$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2N+3}}{(2N+3)!} \le 0.1.$$
Dengan mencoba beberapa nilai N, diperoleh $N = 1$ adalah yang paling kecil sehingga memenuhi pertidaksamaan di atas.
$$\frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{5!} = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^5}{120} \approx 0.0807 \le 0.1.$$

Jadi, polinomial yang diinginkan adalah

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6}.$$

Selanjutnya akan coba kita perluas domain fungsinya menjadi $x \in [0, \pi]$. Dengan cara yang sama, kita peroleh

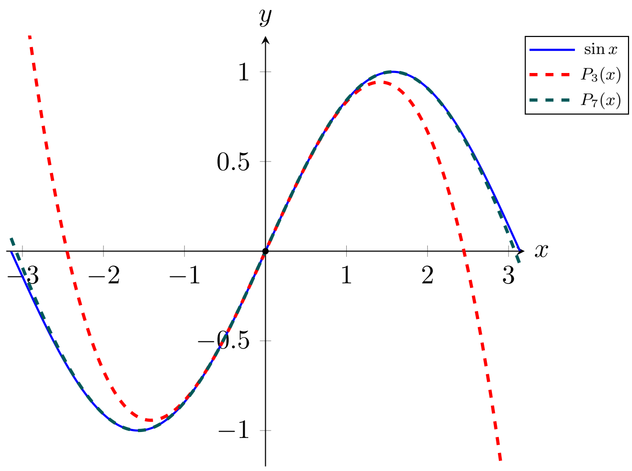
$$\frac{\pi^{2N+3}}{(2N+3)!} \leq 0.1.$$

Dengan mencoba beberapa nilai N, diperoleh $N = 3$ adalah yang paling kecil sehingga memenuhi pertidaksamaan di atas.

$$\frac{\pi^9}{9!} = \frac{\pi^9}{362880} \approx 0.0926 \leq 0.1.$$

Jadi, polinomial yang diinginkan adalah

$$P(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040}.$$



(ii) Gunakan hasil tersebut untuk mencari nilai hampiran dari

$$\int_0^1 \sin(x^4)\, dx,$$

dengan galat (error) paling banyak 0.1.

Solusi. Untuk $x \in [0, 1]$ kita punya $x^4 \in [0, 1] \subset [0, \pi/2]$, sehingga

$$\left|\sin(x^4) - P_4(x^4)\right| \leq \frac{(\pi/2)^5}{5!} \approx 0.0796926, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Maka galat integral terbatasi oleh

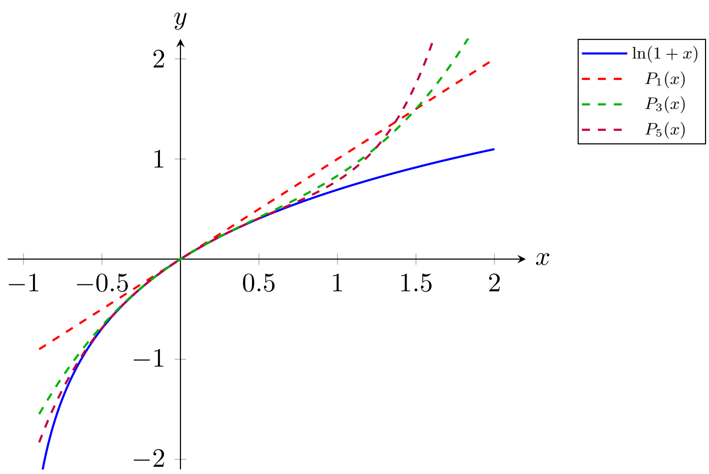
$$\left|\int_0^1 \left(\sin(x^4) - P_4(x^4)\right) dx\right| \leq \int_0^1 0.0796926\, dx = 0.0796926 < 0.1.$$

Hitung integral aproksimasi:

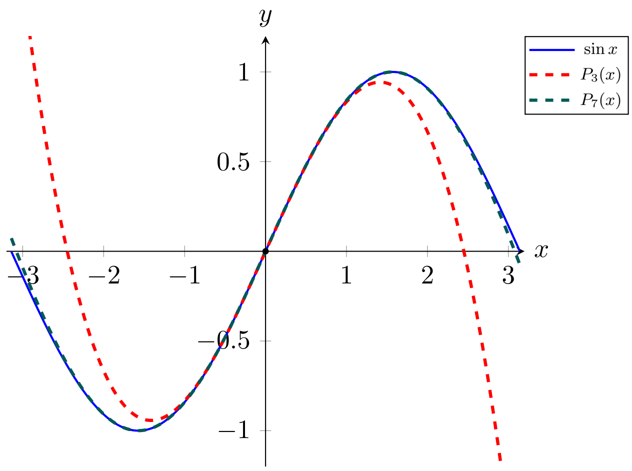
$$\int_0^1 P_4(x^4)\,dx = \int_0^1 \left(x^4 - \frac{x^{12}}{6}\right) dx = \frac{1}{5} - \frac{1}{78} = \frac{73}{390} \approx 0.1871795.$$

Jadi diperoleh

$$\int_0^1 \sin(x^4)\,dx \approx 0.1871795 \pm 0.1$$



y
x
2
1
−1
−2
−1
−0.5
0.5
1
1.5
2
$\ln(1+x)$
$P_1(x)$
$P_3(x)$
$P_5(x)$



y
x
1
0.5
−0.5
−1
−3
−2
−1
1
2
3
$\sin x$
$P_3(x)$
$P_7(x)$