2. Data berikut terdiri atas pengukuran berat (dalam ons) untuk 60 bola *Major League Baseball*::

5.09	5.08	5.21	5.17	5.07	5.24	5.12	5.16	5.18	5.19
5.26	5.10	5.28	5.29	5.27	5.09	5.24	5.26	5.17	5.13
5.27	5.26	5.17	5.19	5.28	5.28	5.18	5.27	5.25	5.26
5.26	5.18	5.13	5.08	5.25	5.17	5.09	5.16	5.24	5.23
5.28	5.24	5.23	5.23	5.27	5.22	5.26	5.27	5.24	5.27
5.25	5.28	5.24	5.26	5.24	5.24	5.27	5.26	5.22	5.09

Asumsikan bahwa data tersebut merupakan nilai-nilai yang diamati dari sebuah sampel acak yang berasal dari distribusi normal.

(a) Tentukan interval kepercayaan 99% untuk rata-rata berat bola *Major League Baseball*.

(b) Tentukan interval kepercayaan 99% untuk simpangan baku.

7. Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel acak dari distribusi Weibull, $X \sim \text{WEI}(\theta, 2)$.

(a) Tunjukkan bahwa $Q = 2\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i^2/\theta^2 \sim \chi^2(2n)$.

(b) Gunakan Q untuk menentukan batas interval kepercayaan $100\gamma\%$ untuk θ.

(c) Tentukan batas bawah interval kepercayaan $100\gamma\%$ untuk $P(X > t) = \exp\left[-(t/\theta)^2\right]$.

(d) Tentukan batas atas interval kepercayaan $100\gamma\%$ untuk persentil ke-p dari distribusi tersebut.

Solusi:

(a) Diketahui bahwa $X \sim \text{WEI}(\theta, 2)$ memiliki CDF sebagai berikut:

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\theta}\right)^2\right], \quad x > 0$$

Disini akan digunakan metode CDF untuk mencari distribusi dari $Z = \frac{X^2}{\theta^2}$

$$\begin{aligned} P(Z \le z) &= P\left(\frac{X^2}{\theta^2} \le z\right) \\ &= P\left(X^2 \le z\theta^2\right) \end{aligned}$$

Perhatikan karena $X > 0$, maka $X^2 \le z\theta^2$ setara dengan $X \le \theta\sqrt{z}$. Sehingga

$$\begin{aligned} P(Z \le z) &= P\left(X \le \theta\sqrt{z}\right) \\ &= F(\theta\sqrt{z}) \\ &= 1 - \exp\left[-\left(\frac{\theta\sqrt{z}}{\theta}\right)^2\right] \\ &= 1 - \exp\left(-z\right) \end{aligned}$$

Sehingga, CDF dari Z adalah $1 - \exp(-z)$, yang merupakan CDF dari distribusi eksponensial. Dengan demikian, $Z \sim \text{EXP}(1)$.
Selanjutnya untuk $\sum_{i=1}^{n} X_i^2/\theta^2 = \sum_{i=1}^{n} Z_i$ menggunakan sifat MGF yang independen, didapat bahwa $\sum_{i=1}^{n} Z_i \sim \text{GAM}(1, n)$. Yang terakhir dengan menggunakan hubungan antara distribusi gamma dan chi-square, maka $2\sum_{i=1}^{n} Z_i \sim \chi^2(2n)$.

$\therefore Q \sim \chi^2(2n)$.

(b) Interval kepercayaan $100\gamma\%$ untuk θ adalah

$$P\left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n) \leq Q \leq \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)\right) = \gamma$$
$$P\left(\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n) \leq 2\sum_{i=1}^{n} X_i^2/\theta^2 \leq \chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)\right) = \gamma$$
$$P\left(\frac{2\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)} \leq \theta^2 \leq \frac{2\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}\right) = \gamma$$
$$P\left(\sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}} \leq \theta \leq \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}}\right) = \gamma$$

Sehingga, interval kepercayaan $100\gamma\%$ untuk θ adalah

$$\left[\sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}}, \sqrt{\frac{2\sum_{i=1}^n X_i^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}}\right]$$

(c) Dari poin sebelumnya, diketahui bahwa

$$\frac{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_{i=1}^n X_i^2} \leq \frac{1}{\theta^2} \leq \frac{\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_{i=1}^n X_i^2}$$
$$\frac{t^2\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_{i=1}^n X_i^2} \leq \left(\frac{t}{\theta}\right)^2 \leq \frac{t^2\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_{i=1}^n X_i^2}$$
$$-\frac{t^2\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_{i=1}^n X_i^2} \leq -\left(\frac{t}{\theta}\right)^2 \leq -\frac{t^2\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_{i=1}^n X_i^2}$$
$$\exp\left(-\frac{t^2\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_{i=1}^n X_i^2}\right) \leq \exp\left[-\left(\frac{t}{\theta}\right)^2\right] \leq \exp\left(-\frac{t^2\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_{i=1}^n X_i^2}\right)$$

Sehingga, batas bawah interval kepercayaan $100\gamma\%$ untuk $P(X > t) = \exp\left[-(t/\theta)^2\right]$ adalah

$$P(X > t) \geq \exp\left(-\frac{t^2\chi^2_{\frac{1+\gamma}{2}}(2n)}{2\sum_{i=1}^n X_i^2}\right)$$

(d) Persentil ke-p adalah nilai x_p sehingga $P(X \leq x_p) = p$. Dengan kata lain

$$P(X \leq x_p) = p$$
$$1 - \exp\left[-\left(\frac{x_p}{\theta}\right)^2\right] = p$$
$$\exp\left[-\left(\frac{x_p}{\theta}\right)^2\right] = 1 - p$$
$$-\left(\frac{x_p}{\theta}\right)^2 = \ln(1-p)$$
$$\left(\frac{x_p}{\theta}\right)^2 = -\ln(1-p)$$

Karena $x_p \geq 0$, maka $x_p = \theta\sqrt{-\ln(1-p)}$. Kemudian dengan menggunakan hasil dari poin (b), didapat bahwa

$$x_p \leq \sqrt{\frac{-2\ln(1-p)\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{\chi^2_{\frac{1-\gamma}{2}}(2n)}}$$

8. Misalkan sampel acak ukuran n berasal dari distribusi uniform $X_i \sim \mathrm{UNIF}(0,\theta)$, $\theta > 0$, dan $X_{n:n}$ adalah order statistik terbesar.

   (a) Tentukan probabilitas bahwa interval acak $(X_{n:n}, 2X_{n:n})$ memuat θ.

   (b) Tentukan konstanta c sehingga $(X_{n:n}, cX_{n:n})$ adalah interval kepercayaan $100(1-\alpha)\%$ untuk θ.