1. Diberikan PDP $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$

   (a) Tunjukkan bahwa $u(x, y) = f(y - x) + g(y - 2x)$ adalah penyelesaian umum PD.

   (b) Kemudian dari penyelesaian umum (a) tersebut dapatkan penyelesaian khusus yang memenuhi

   $$u(x, 0) = x, \quad u_y(x, 0) = 0$$

2. Pandang persamaan $u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0$.
   Dapatkan bentuk kanonik dari persamaan tersebut, carilah solusi umum $u(x, y)$ dan cek hasilnya dengan kembali mensubtitusike PD-nya.

3. Selesaikan PDP getaran dawai berikut dengan metode pemisahan variabel:

   $$u_{tt} = 4u_{xx} \quad \text{dimana} \quad 0 < x < \pi,\ t > 0$$

   dengan kondisi awal dan kondisi batasnya adalah:

   $$\begin{aligned} u(x,0) &= 0, && 0 \le x \le \pi \\ u_t(x,0) &= x, && 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) &= 0, && t \ge 0 \\ u(\pi,t) &= 0, && t \ge 0 \end{aligned}$$

Solusi:

1. (a) Perhatikan bahwa

   $$\begin{aligned} u_x &= -f'(y-x) + g'(y-2x) \\ u_y &= f'(y-x) + g'(y-2x) \\ u_{xx} &= f''(y-x) + 4g''(y-2x) \\ u_{xy} &= -f'(y-x) - 2g'(y-2x) \\ u_{yy} &= f''(y-x) + g''(y-2x) \end{aligned}$$

   Substitusikan ke dalam PDP:

   $$\begin{aligned} u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} &= f''(y-x) + 4g''(y-2x) - 3f'(y-x) - 6g'(y-2x) \\ &\quad + 2f''(y-x) + 2g''(y-2x) \\ &= 3f''(y-x) + 6g''(y-2x) - 3f'(y-x) - 6g'(y-2x) = 0 \end{aligned}$$

(b) Dari kondisi awal $u(x,0) = x$ dan $u_y(x,0) = 0$, kita dapatkan:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(-x) + g(-2x) = x \implies -f'(-x) - 2g'(-2x) = 1 \\ u_y(x,0) &= f'(-x) + g'(-2x) = 0 \end{aligned}$$

Dari kedua persamaan tersebut, kita dapatkan:

$$\begin{aligned} g'(-2x) = -1 &\implies -2g'(-2x) = 2 \implies g(-2x) = 2x + C_1 \implies g(x) = -x + C_1 \\ f'(-x) = 1 &\implies -f'(-x) = -1 \implies f(-x) = -x + C_2 \implies f(x) = x + C_2 \end{aligned}$$

Sehingga penyelesaian khususnya adalah:

$$u(x,y) = f(y-x) + g(y-2x) = (y - x + C_2) + (-y + 2x + C_1) = x + C$$

Namun karena $x = u(x,0) = x + C$, maka $C = 0$ sehingga solusi khususnya adalah:

$$\boxed{u(x,y) = x}$$

2. Diketahui $A = 1$, $B = 4$, $D = 1$, dan $C = E = F = G = 0$, dengan persamaan karakteristik:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{4 + \sqrt{16 - 0}}{2} = 4 \implies \xi(x,y) = y - 4x \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{4 - \sqrt{16 - 0}}{2} = 0 \implies \eta(x,y) = y \end{aligned}$$

Kemudian turunkan ξ dan η:

$$\begin{aligned} &\xi_x = -4, \quad \xi_{xx} = 0 \quad \xi_{yy} = 0 \\ &\xi_y = 1, \quad \xi_{xy} = 0 \quad \eta_{yy} = 0 \\ &\eta_x = 0, \quad \eta_{xx} = 0 \\ &\eta_y = 1 \quad \eta_{xy} = 0 \end{aligned}$$

Cari koefisien A^*, B^*, C^*, D^*, E^*, F^*, dan G^*:

$$\begin{aligned} A^* &= 1 \cdot (-4)^2 + 4 \cdot (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 1^2 = 16 - 16 + 0 = 0 \\ B^* &= 2 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot 0 + 4 \cdot (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -16 \\ C^* &= 1 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1^2 = 0 \\ D^* &= 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 = -4 \\ E^* &= 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0 \\ F^* &= 0, \quad G^* = 0 \end{aligned}$$

Substitusikan ke dalam bentuk kanonik:

$$\begin{aligned} A^* w_{\xi\xi} + B^* w_{\xi\eta} + C^* w_{\eta\eta} + D^* w_\xi + E^* w_\eta + F^* w = 0 \\ -16 w_{\xi\eta} - 4 w_\xi = 0 \end{aligned}$$

Misalkan $z = w_\xi$, maka:

$$z_\eta + \frac{1}{4} z = 0 \implies z = f(\xi) e^{-\frac{1}{4}\eta}$$

Integrasikan untuk mendapatkan w:

$$w = \int z \, d\xi = \int f(\xi) e^{-\frac{1}{4}\eta} d\xi = F(\xi) e^{-\frac{1}{4}\eta} + H(\eta)$$

Substitusikan kembali $\xi = y - 4x$ dan $\eta = y$:

$$u(x, y) = F(y - 4x) e^{-\frac{1}{4}y} + H(y)$$

Cek hasilnya dengan mensubtitusike dalam PD:

$$\begin{aligned} u_x &= -4F'(y - 4x) e^{-\frac{1}{4}y} \\ u_{xx} &= 16F''(y - 4x) e^{-\frac{1}{4}y} \\ u_{xy} &= -F'(y - 4x) e^{-\frac{1}{4}y} - 4F''(y - 4x) e^{-\frac{1}{4}y} \end{aligned}$$

Terakhir

$$\begin{aligned} u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 16F''(y - 4x) e^{-\frac{1}{4}y} - 4F'(y - 4x) e^{-\frac{1}{4}y} - 16F''(y - 4x) e^{-\frac{1}{4}y} \\ - 4F'(y - 4x) e^{-\frac{1}{4}y} = -4F'(y - 4x) e^{-\frac{1}{4}y} = 0 \end{aligned}$$

3. Misalkan: $u(x, t) = X(x)T(t)$, kemudian subtitusike PDP:

$$X(x)T''(t) = 4X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 e^{\sqrt{\lambda} x} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda} x} \\ T(t) &= B_1 e^{2\sqrt{\lambda} t} + B_2 e^{-2\sqrt{\lambda} t} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk $\lambda \geq 0$ menghasilkan solusi yang trivial yaitu $u(x, t) = 0$ (Hal ini dapat dilihat dengan mensubtitusike dalam kondisi batas $u(0, t) = 0$ dan $u(\pi, t) = 0$).

Sehingga untuk $\lambda < 0$, diperoleh solusi:

$$X(x) = A_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + A_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

Selanjutnya untuk kondisi batas $X(0) = 0$ diperoleh $A_1 = 0$ dan untuk $X(\pi) = 0$ diperoleh:

$$\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\pi = n\pi \implies -\lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Oleh karena itu, kita dapat menuliskan:

$$X_n(x) = C_n \sin(nx) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Solusi umum:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\left[a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt)\right]$$

Selanjutnya untuk variabel $T(t)$ dengan menggunakan asumsi yang sama yaitu $\lambda < 0$, kita dapatkan:

$$T(t) = B_1 \cos(2\sqrt{-\lambda}t) + B_2 \sin(2\sqrt{-\lambda}t)$$

Subtitusi $\sqrt{-\lambda} = n$ (dari informasi sebelumnya)

$$T_n(t) = D_n \cos(2nt) + E_n \sin(2nt)$$

Berarti solusi umum untuk $u(x,t)$ adalah:

$$\begin{aligned} u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) &= C_n \sin(nx)\left[D_n \cos(2nt) + E_n \sin(2nt)\right] \\ &= \sin(nx)\left[a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt)\right] \end{aligned}$$

dengan $a_n = C_n D_n$ dan $b_n = C_n E_n$. Sehingga

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx)\left[a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt)\right]$$

Masukkan kondisi awal $u(x,0) = 0$ dan $u_t(x,0) = x$

- Untuk $u(x,0) = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) = 0 \implies a_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

- Untuk $u_t(x,0) = x$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin(nx) = x$$

Dengan menggunakan ortogonalitas fungsi sinus, kita dapatkan

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx)\, dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[-x\cos(nx) + \sin(nx)\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[-\pi \cos(n\pi) + 1\right] \\ &= \frac{1}{n\pi} \left[-\pi(-1)^n + 1\right] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\pi + 1}{n} \end{aligned}$$

Sehingga solusi khususnya adalah:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\pi + 1}{n} \sin(nx)\sin(2nt)$$