

Nama	: Teosofi Hidayah Agung
NRP	: 5002221132

Tentukan solusi dari sistem persamaan diferensial berikut

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dengan syarat awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 1$.

Solusi:

Cari nilai eigen dari \mathbf{A}

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \iff \lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0 \\ &\iff \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 28}}{2} \\ &\iff \lambda = 2 \pm \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Kemudian cari vektor eigen dari \mathbf{A}

- Untuk $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}i$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I})\mathbf{v}_1 &= \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 2 - (2 + \sqrt{3}i) & -3 \\ 1 & 2 - (2 + \sqrt{3}i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} -\sqrt{3}i & -3 \\ 1 & -\sqrt{3}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -\sqrt{3}iv_1 - 3v_2 = 0 \\ v_1 - \sqrt{3}iv_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff v_1 = \sqrt{3}iv_2 \end{aligned}$$

Sehingga vektor eigen untuk $\lambda = 2 + \sqrt{3}i$ adalah $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Untuk $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}i$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I})\mathbf{v}_2 &= \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 2 - (2 - \sqrt{3}i) & -3 \\ 1 & 2 - (2 - \sqrt{3}i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} \sqrt{3}i & -3 \\ 1 & \sqrt{3}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{3}iv_1 - 3v_2 = 0 \\ v_1 + \sqrt{3}iv_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff v_1 = -\sqrt{3}iv_2 \end{aligned}$$

Sehingga vektor eigen untuk $\lambda = 2 - \sqrt{3}i$ adalah $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sehingga solusi umum dari sistem persamaan diferensial adalah

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} \\ &= c_1 e^{(2+\sqrt{3}i)t} \begin{bmatrix} \sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{(2-\sqrt{3}i)t} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= c_1 e^{2t} \text{cis}(\sqrt{3}t) \begin{bmatrix} \sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \text{cis}(-\sqrt{3}t) \begin{bmatrix} -\sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dengan syarat awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 1$, maka

$$\begin{cases} \sqrt{3}ic_1 - \sqrt{3}ic_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases}$$

$$\iff c_1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}, \quad c_2 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}$$

Sehingga solusi dari sistem persamaan diferensial adalah

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}} \right) e^{2t} \text{cis}(\sqrt{3}t) \begin{bmatrix} \sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}} \right) e^{2t} \text{cis}(-\sqrt{3}t) \begin{bmatrix} -\sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sketsa kestabilan sistem adalah sebagai berikut

