Pada Kegiatan Belajar 2 kali ini akan dibahas mengenai penyelesaian sistem PD linear homogen dimensi-n yang memiliki nilai eigen kompleks. Sebagai pengingat, bilangan kompleks biasanya ditulis dalam bentuk $z = x + iy$ dengan $x, y \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$.

Catatan 12.3.
Pada umumnya bilangan real juga merupakan bilangan kompleks ($\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$). Namun pada Kegiatan Belajar ini, bilangan kompleks yang dimaksud adalah bilangan yang memiliki bagian imajiner tak nol ($z = x + iy$, $y \neq 0$).

Selanjutnya akan diberikan sebuah definisi sebagai pendahuluan terkait nilai eigen dan vektor eigen untuk bilangan kompleks.

Definisi 12.1.
Vektor $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ masing-masing disebut bagian real dan bagian imajiner dari sebuah vektor $\boldsymbol{\xi}$ jika $\boldsymbol{\xi}$ dapat ditulis sebagai $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$. Disisi lain, $\overline{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ disebut konjugat dari $\boldsymbol{\xi}$.

Akibat 12.1.
Jika $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ adalah vektor eigen yang berkoresponden dengan nilai eigen kompleks $\lambda = \alpha + i\beta$, maka $\overline{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ adalah vektor eigen yang berkoresponden dengan nilai eigen konjugatnya yaitu $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$.

Definisi 12.1 dan Akibat 12.1 akan digunakan untuk memisalkan suatu vektor eigen yang berkoresponden dengan nilai eigen kompleks. Tinjau sistem (12.1), kemudian misalkan $\lambda = \alpha + i\beta$ dan $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ masing-masing adalah nilai eigen dan vektor eigen dari A, maka salah satu penyelesaian umumnya adalah

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\boldsymbol{\xi} = e^{(\alpha+i\beta)t}(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \tag{12.4}$$

Jika kita mengingat kembali tentang persamaan Euler, maka bentuk $e^{(\alpha+i\beta)t}$ dapat ditulis sebagai

$$e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}e^{i\beta t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t). \tag{12.5}$$

Dari (12.4) dan (12.5) kita dapatkan sebuah penyelesaian kompleks

$$\mathbf{x}(t) = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}). \tag{12.6}$$

Namun pada umumnya kita lebih memfokuskan pada penyelesaian yang bersifat real, sehingga dari (12.6) perlu kita tinjau ulang untuk mencari semua penyelesaian yang bersifat real. Berikut adalah teorema yang akan membantu kita dalam mencari penyelesaian dari sistem (12.1) yang memiliki nilai eigen kompleks

Teorema 12.2.
Misalkan A matriks berukuran $n \times n$ dengan entri-entrinya real. Andaikan $\lambda = \alpha + i\beta\,(\beta \neq 0)$ adalah nilai eigen kompleks dari A dan $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$ adalah vektor eigen yang bersesuaian, dimana $\mathbf{u}$ dan $\mathbf{v}$ adalah komponen real yang masing-masing tak nol. Maka

$$\mathbf{y_1} = e^{\alpha t}(\mathbf{u}\cos\beta t - \mathbf{v}\sin\beta t) \quad \text{dan} \quad \mathbf{y_2} = e^{\alpha t}(\mathbf{u}\sin\beta t + \mathbf{v}\cos\beta t)$$

yang merupakan bagian real dan imajiner dari

$$e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)(\mathbf{u} + i\mathbf{v}) \tag{12.7}$$

merupakan penyelesaian yang bebas linear dari $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Catatan 12.4.
Teorema 12.2 menunjukan bahwa penyelesaian $\mathbf{y_1}$ dan $\mathbf{y_2}$ sudah merupakan satu set penyelesaian yang bebas linear dari nilai eigen kompleks dan konjugatnya.

Sebelumnya pada Modul 11 Kegiatan Belajar 2, telah dijelaskan langkah-langkah penyelesaiannya untuk sistem PD linear homogen dimensi-2. Pada Modul 12 Kegiatan Belajar 2 ini akan dibahas secara lanjut langkah-langkah yang sama namun dengan kasus yang lebih umum yaitu dimensi-n.

Algoritma 12.2.
Setelah mengetahui penyelesaian polinomial karakteristik dari sistem homogen (12.1) terdapat akar kompleks, maka langkah selanjutnya adalah mencari penyelesaian umum dari PD linear homogen dimensi-n. Berikut adalah langkah-langkahnya:

Langkah 1: Pisahkan himpunan nilai eigen menjadi dua kelompok, yaitu nilai eigen real dan kompleks. Misalkan terdapat r nilai eigen real dan s nilai eigen kompleks, maka $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r\}$ dan $\{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s\}$ adalah himpunan nilai eigen real dan kompleks dari matriks A.

Langkah 2: Carilah solusi dari nilai-nilai eigen real dengan menggunakan metode yang telah dijelaskan pada KB 1. Sehingga didapatkan penyelesaian umum dari nilai eigen real adalah

$$\mathbf{x}_{\mathcal{R}} = c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + \cdots + c_r\mathbf{x_r} \tag{12.8}$$

Langkah 3: Selanjutnya untuk nilai eigen kompleks, dapat kita ambil sepasang $\mu = \alpha + i\beta$ dan $\overline{\mu} = \alpha - i\beta$. Kemudian cukup cari vektor eigen $\boldsymbol{\xi}$ yang berkoresponden dengan nilai eigen μ menggunakan $(A - \mu I)\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$

Langkah 4: Dapatkan bagian real dan imajinernya dengan menuliskannya sebagai $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$.

Langkah 5: Selanjutnya kita bisa dapatkan dua penyelesaian real untuk nilai eigen kompleks yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\cos(\beta t) - \mathbf{v}\sin(\beta t)) \\ \mathbf{z}_2(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\sin(\beta t) + \mathbf{v}\cos(\beta t)) \end{aligned} \tag{12.9}$$

Dimana sudah merupakan penyelesaian dari pasangan nilai eigen r dan $\overline{r}$ sesuai dengan Teorema 12.2.

Langkah 6: Jika terdapat vektor eigen kompleks lainnya, maka ulangi langkah 3 sampai 5 untuk mendapatkan semua penyelesaian nilai eigen kompleks lain. Jika tidak ada lagi, maka penyelesaian umumnya adalah kombinasi linear dari (12.8) dan penyelesaian nilai eigen kompleks.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\mathcal{R}} + c_1\mathbf{z}_1(t) + c_2\mathbf{z}_2(t) + \cdots + c_s\mathbf{z}_s(t). \tag{12.10}$$

Catatan 12.5.
Pada langkah 3, jikalau kita menggunakan vektor eigen $\overline{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ yang berkoresponden dengan nilai eigen $\overline{\mu} = \alpha - i\beta$, maka penyelesaian umumnya menjadi

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_1(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\cos(-\beta t) - (-\mathbf{v})\sin(-\beta t)) \\ &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\cos(\beta t) - \mathbf{v}\sin(\beta t)) \\ \mathbf{z}_2(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\sin(-\beta t) + (-\mathbf{v})\cos(-\beta t)) \\ &= -e^{\alpha t}(\mathbf{u}\sin(\beta t) + \mathbf{v}\cos(\beta t)) \end{aligned} \tag{12.11}$$

Dapat dilihat bahwa penyelesaian (12.9) dan (12.11) hanya berbeda tanda pada $\mathbf{z}_2(t)$. Namun karena penyelesaian umum mencakup sebuah sembarang konstanta c_2, maka perbedaan tanda tersebut tidak mempengaruhi penyelesaian umumnya.

Catatan 12.6.
Jika terdapat syarat awal $\mathbf{x}(x_0)$, maka subtitusi syarat awal tersebut ke dalam penyelesaian umum yang telah didapatkan.

$$\mathbf{x}(x_0) = c_1\mathbf{x}_1(x_0) + c_2\mathbf{x}_2(x_0) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(x_0) \tag{12.12}$$

Kemudian selesaikan persmaan (12.12) untuk mencari konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Contoh 12.7.
Tentukan penyelesaian umum dari

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}. \tag{12.13}$$

Penyelesaian:
Polinomial karakteristik dari matriks (12.13) adalah

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)((\lambda-2)^2+4). \tag{12.14}$$

Nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 2+2i$ dan $\lambda_3 = 2-2i$. Karena terdapat nilai eigen kompleks, maka akan digunakan Algoritma 12.2 untuk mencari penyelesaiannya

Langkah 1: $\lambda_1 = 2$ adalah nilai eigen real dan $\{\lambda_2, \lambda_3\}$ adalah himpunan nilai eigen kompleks.

Langkah 2: Untuk menentukan penyelesaian dari nilai eigen real, kita cari matriks *augmented* dari $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & : & 0 \\ 1 & 1 & 2 & : & 0 \\ 1 & -1 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

Diperoleh $x_1 = -x_3$ dan $x_2 = -x_3$. Ambil $x_3 = 1$ sehingga

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jadi

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

adalah penyelesaian untuk nilai eigen real dari (12.13).

Langkah 3: Selanjutnya tersisa sepasang nilai eigen kompleks λ_2 dan λ_3. Matriks *augmented* dari $(A-\lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah

$$\begin{pmatrix} -1-2i & -1 & -2 & : & 0 \\ 1 & 1-2i & 2 & : & 0 \\ 1 & -1 & -2i & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & : & 0 \\ 0 & 1 & i & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

Sehingga $x_1 = ix_3$ dan $x_2 = -ix_3$. Ambil $x_3 = 1$ maka

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4: Perhatikan bahwa $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langkah 5: Dua penyelesaian untuk nilai eigen kompleks adalah

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) \right) = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

dan

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) \right) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Langkah 6: Sehingga penyelesaian umum untuk (12.13) adalah

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Contoh 12.8.
Carilah penyelesaian dari

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 4 \\ -8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \tag{12.15}$$

Dengan syarat awal $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Penyelesaian:
Polinomial karakteristiknya dari matriks A pada (12.15) adalah

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 5 & 4 \\ -8 & 7-\lambda & 6 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)(\lambda^2 + 1). \tag{12.16}$$

Sehingga didapatkan nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = i$ dan $\lambda_3 = -i$. Gunakan Algoritma 12.2 untuk mencari penyelesaiannya

Langkah 1: λ_1 adalah nilai eigen real dan sisanya adalah nilai eigen kompleks.

Langkah 2: Selanjutnya matriks *augmented* dari $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah

$$\begin{pmatrix} -7 & 5 & 4 & : & 0 \\ -8 & 5 & 6 & : & 0 \\ 1 & 0 & -2 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & : & 0 \\ 0 & 1 & -2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

diperoleh $x_1 = x_2 = 2x_3$. Ambil saja $x_3 = 1$ akibatnya

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jadi

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

adalah penyelesaian real dari (12.15).

Langkah 3: Kemudian untuk nilai eigen kompleks, matriks *augmented* dari $(A - iI)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah

$$\begin{pmatrix} -5-i & 5 & 4 & : & 0 \\ -8 & 7-i & 6 & : & 0 \\ 1 & 0 & -i & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & : & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

didapatkan $x_1 = ix_3$ dan $x_2 = (1-i)x_3$. Dengan mengambil $x_3 = 1$ diperoleh

$$\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} i \\ 1-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4: Dapat dilihat bahwa $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langkah 5: Penyelesaian kedua dan ketiga masing-masing adalah

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{0t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\cos(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\sin(t)\right) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

dan

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{0t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\sin(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cos(t)\right) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Langkah 6: Didapatkan penyelesaian umumnya adalah

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Langkah terakhir adalah subtitusi syarat awal $\mathbf{y}(0)$ sehingga didapatkan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + c_3 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

kemudian selesaikan persamaan menggunakan sembarang metode yang telah anda diketahui. Pada contoh ini akan digunakan metode eliminasi Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & : & 0 \\ 2 & -1 & 1 & : & 3 \\ 1 & 1 & 0 & : & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & : & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Didapat $c_1 = \frac{4}{3}, c_2 = -\frac{1}{3}$ dan $c_3 = -\frac{8}{3}$. Jadi penyelesaian dari (12.15) adalah

$$\mathbf{y} = \frac{4e^{2t}}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} - \frac{8}{3}\begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Contoh 12.9.
Carilah penyelesaian PD linear orde tiga berikut

$$y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0. \tag{12.17}$$

Penyelesaian:
Persamaan (12.17) dapat diselesaikan menggunakan sistem PD linear homogen dimensi-3. Misalkan

$$\begin{aligned} y_1 = y &\implies y_1' = y' = y_2 \\ y_2 = y' &\implies y_2' = y'' = y_3 \\ y_3 = y'' &\implies y_3' = y''' = 4y'' - 6y' + 4y. \end{aligned}$$

Dengan demikian didapatkan sistem sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{12.18}$$

Dari matriks (12.18) didapatkan nilai eigen $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 + i$ dan $\lambda_3 = 1 - i$. Sama seperti contoh sebelumnya, gunakan Algoritma 12.2

Langkah 1: $\lambda_1 = 2$ adalah nilai eigen real dan $\{\lambda_2, \lambda_3\}$ adalah nilai eigen kompleks.

Langkah 2: Untuk nilai eigen real, dapat dicek bahwa

$$\mathbf{y}_1(x) = e^{2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

adalah penyelesaian dari nilai eigen real.

Langkah 3: Tinjau untuk $\lambda_2 = 1 + i$ memiliki eigen vektor

$$\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 + i \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Langkah 4: Didapat $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langkah 5: Penyelesaian untuk nilai eigen λ_2 dan λ_3 adalah

$$\mathbf{y}_2(x) = e^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(x) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(x) \right) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) - \sin(x) \\ 2\cos(x) \end{pmatrix} e^x$$

$$\mathbf{y}_3(x) = e^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin(x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(x) \right) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) + \cos(x) \\ 2\sin(x) \end{pmatrix} e^x$$

Langkah 6: Penyelesaian umum dari (12.17) adalah

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) - \sin(x) \\ 2\cos(x) \end{pmatrix} + c_3 e^x \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) + \cos(x) \\ 2\sin(x) \end{pmatrix}.$$

Ingat bahwa $\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ artinya penyelesaian PD orde tiga ada pada baris pertama penyelesaian umum. Jadi penyelesaian dari (12.17) adalah

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x \cos(x) + c_3 e^x \sin(x).$$

Contoh 12.10.
Diberikan sistem PD linear homogen dimensi-4 berikut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{12.19}$$

Tentukan penyelesaian umum dari sistem PD tersebut.
Penyelesaian:
Nilai eigen dari matriks (12.19) adalah

$$\lambda_1 = i, \quad \lambda_2 = -i, \quad \lambda_2 = 2i, \quad \lambda_2 = -2i$$

Ternyata terdapat dua pasang nilai eigen kompleks yang saling konjugat. Gunakan Algoritma 12.2 untuk mencari penyelesaiannya

Langkah 1: Perhatikan bahwa semua nilai eigen $\lambda_1, ..., \lambda_4$ adalah nilai eigen kompleks.

Langkah 2: Karena tidak ada nilai eigen real, maka langkah ini dilewati.

Langkah 3: Ambil sepasang nilai eigen kompleks pertama, yaitu λ_1 dan λ_2. Selanjutnya dengan menyelesaikan $(A - iI)\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, diperoleh $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Langkah 4: Selanjutnya definisikan $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ sebagai bagian real dan imajiner dari $\boldsymbol{\xi}_1$.

Langkah 5: Penyelesaian untuk nilai eigen λ_1 dan λ_2 adalah

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) \right) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\mathbf{x}_2(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) \right) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{12.20}$$

Langkah 6: Karena terdapat nilai eigen lain, yaitu λ_3 dan λ_4. Maka perlu untuk mencari vektor eigen $\boldsymbol{\xi}_3$ dengan menyelesaikan $(A - 2iI)\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$, sehingga diperoleh $\boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$.

Langkah 7: Diperoleh $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langkah 8: Penyelesaian untuk nilai eigen λ_3 dan λ_4 adalah

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_3(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} \\
\mathbf{x}_4(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{12.21}$$

Langkah 9: Penyelesaian umum dari (12.19) adalah kombinasi linear dari (12.20) dan (12.21), yaitu

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai pengertian sistem PD linear homogen dimensi-n dan penyelesaiannya, kerjakanlah latihan berikut!

1. Diberikan sistem PD linear berikut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & k & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

   Tentukan nilai k agar sistem PD tersebut memiliki nilai eigen kompleks yang bagian imajinernya tak nol.

2. Carilah penyelesaian homogen dari PD linear berikut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

3. Diberikan sebuah sistem PD linear homogen berikut

$$\frac{dx}{dt} = -3x + 2z, \quad \frac{dy}{dt} = x - y, \quad \frac{dz}{dt} = -2x - y$$

   Tentukan penyelesaian umum dari sistem PD tersebut.

4. Carilah penyelesaian umum sistem PD dimensi-4 berikut

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

5. Diberikan suatu sistem tiga pegas dengan dua buah massa yang dirumuskan dalam PD berikut

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2$$
$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2$$

   Jika $m_1 = m_2 = 2$, dan $k_1 = k_2 = k_3 = 6$. Tentukan penyelesaian umum dari sistem PD tersebut.

JAWABAN LATIHAN 12.2

1. Polinomial karakteristik matriks A adalah

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & k & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 15 - 2k).$$

   Sehingga agar terdapat nilai eigen kompleks yang bagian imajinernya tak nol, maka haruslah diskriminan dari polinomial $\lambda^2 - 2\lambda - 15 - 2k$ negatif.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(-15-2k) = 64 + 8k < 0 \implies k < -8.$$

   Jadi nilai k yang memenuhi adalah $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -8\}$.

2. Nilai eigen dari matriks adalah

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 - 2i, \quad \lambda_3 = 1 + 2i.$$

   dan vektor eigen yang berkoresponden dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   Selanjutnya didapatkan masing-masing penyelesaian $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ dan $\mathbf{x}_3$ sebagai berikut

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t \\ \mathbf{x}_2(t) &= e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} e^t \\ \mathbf{x}_3(t) &= e^t \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} e^t \end{aligned}$$

   Jadi penyelesaian umum dari sistem PD tersebut adalah

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} e^t + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} e^t.$$

3. Misalkan $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, maka sistem PD tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}.$$

   Selanjutnya nilai eigen dari matriks tersebut adalah

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -1 + \sqrt{2}i, \quad \lambda_3 = -1 - \sqrt{2}i$$

dengan masing-masing vektor eigen

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 2-\sqrt{2}i \\ -1-\sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 2+\sqrt{2}i \\ -1+\sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dari vektor eigen $\boldsymbol{\xi}_2$ dan $\boldsymbol{\xi}_3$ dapat diperoleh penyelesaian kompleks

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\cos(\sqrt{2}t) - \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\sin(\sqrt{2}t)\right) = e^{-t}\begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ -\cos(\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 3\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{-t}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\sin(\sqrt{2}t) + \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\cos(\sqrt{2}t)\right) = e^{-t}\begin{pmatrix} 2\sin(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ -\sin(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 3\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

Sehingga penyelesaian umum dari sistem PD tersebut adalah

$$\mathbf{y}(t) = c_1\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{pmatrix} 2\cos(\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ -\cos(\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 3\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}e^{-t} + c_3\begin{pmatrix} 2\sin(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ -\sin(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 3\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}e^{-t}.$$

4. Nilai eigen dari matriks adalah

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 1+\sqrt{2}i \quad \lambda_4 = 1-\sqrt{2}i$$

dan vektor eigen yang berkoresponden dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 1-5\sqrt{2}i \\ 0 \\ 1-\sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} 1+5\sqrt{2}i \\ 0 \\ 1+\sqrt{2}i \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Dengan mudah didapatkan penyelesaian untuk $\mathbf{y}_1$ dan $\mathbf{y}_2$ adalah

$$\mathbf{y}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}e^{t}, \quad \mathbf{y}_2(t) = \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}e^{5t}$$

dan untuk $\mathbf{y}_3$ dan $\mathbf{y}_4$ karena bilangan kompleks maka penyelesaiannya adalah

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\cos(\sqrt{2}t) - \begin{pmatrix} -5\sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\sin(\sqrt{2}t)\right) = e^{t}\begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t)+5\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 0 \\ \cos(\sqrt{2}t)+\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 3\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_4(t) = e^{t}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\sin(\sqrt{2}t) + \begin{pmatrix} -5\sqrt{2} \\ 0 \\ -\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}\cos(\sqrt{2}t)\right) = e^{t}\begin{pmatrix} \sin(\sqrt{2}t)-5\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 0 \\ \sin(\sqrt{2}t)-\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 3\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix}$$

Jadi penyelesaian umum dari sistem PD tersebut adalah

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} e^{5t} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{2}t) + 5\sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 0 \\ \cos(\sqrt{2}t) + \sqrt{2}\sin(\sqrt{2}t) \\ 3\cos(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} e^t + c_4 \begin{pmatrix} \sin(\sqrt{2}t) - 5\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 0 \\ \sin(\sqrt{2}t) - \sqrt{2}\cos(\sqrt{2}t) \\ 3\sin(\sqrt{2}t) \end{pmatrix} e^t.$$

5. Subtitusi nilai variabel yang diketahui sehingga diperoleh sistem PD

$$\begin{aligned} \frac{d^2x_1}{dt^2} &= -6x_1 + 3x_2 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} &= 3x_1 - 6x_2 \end{aligned}$$

Dapat kita misalkan $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1'$, $y_4 = x_2'$, sehingga diperoleh informasi

$$\begin{aligned} y_1' &= x_1' = y_3, \\ y_2' &= x_2' = y_4, \\ y_3' &= x_1'' = -6x_1 + 3x_2 = -6y_1 + 3y_2, \\ y_4' &= x_2'' = 3x_1 - 6x_2 = 3y_1 - 6y_2. \end{aligned}$$

atau jika dituliskan dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ y_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -6 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

sehingga untuk mencari penyelesaiannya dapat dilakukan dengan cara yang sama seperti contoh-contoh sebelumnya. Nilai eigen dari matriks tersebut adalah

$$\lambda_1 = 3i, \quad \lambda_2 = -3i, \quad \lambda_3 = \sqrt{3}i, \quad \lambda_4 = -\sqrt{3}i$$

dan vektor eigen yang berkoresponden dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ i \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}i \\ -\sqrt{3}i \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_4 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}i \\ \sqrt{3}i \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Untuk masing-masing pasangan vektor eigen dapat dikelompokkan yaitu $\boldsymbol{\xi}_1$ dan $\boldsymbol{\xi}_2$ serta $\boldsymbol{\xi}_3$ dan $\boldsymbol{\xi}_4$. Penyelesaian untuk $\boldsymbol{\xi}_1$ dan $\boldsymbol{\xi}_2$ adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(t) &= e^0 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(3t) - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(3t) \right) = \begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \sin(3t) \\ -3\cos(3t) \\ 3\cos(3t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{y}_2(t) &= e^0 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \sin(3t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(3t) \right) = \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ -\cos(3t) \\ -3\sin(3t) \\ 3\sin(3t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

dan untuk $\boldsymbol{\xi}_3$ dan $\boldsymbol{\xi}_4$ adalah

$$\mathbf{y}_3(t) = e^0 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) - \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) \right) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ 3\cos(\sqrt{3}t) \\ 3\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{y}_4(t) = e^0 \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \sin(\sqrt{3}t) + \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(\sqrt{3}t) \right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ 3\sin(\sqrt{3}t) \\ 3\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}$$

Sehingga penyelesaian umum dari sistem PD tersebut adalah

$$\mathbf{y}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\sin(3t) \\ \sin(3t) \\ -3\cos(3t) \\ 3\cos(3t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos(3t) \\ -\cos(3t) \\ -3\sin(3t) \\ 3\sin(3t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ \sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) \\ 3\cos(\sqrt{3}t) \\ 3\cos(\sqrt{3}t) \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ -\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ 3\sin(\sqrt{3}t) \\ 3\sin(\sqrt{3}t) \end{pmatrix}.$$

Karena yang diminta adalah penyelesaian untuk x_1 dan x_2, maka penyelesaian masing-masingnya adalah

$$\begin{aligned} x_1(t) &= -c_1 \sin(3t) + c_2 \cos(3t) + c_3\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) - c_4\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \\ x_2(t) &= c_1 \sin(3t) - c_2 \cos(3t) + c_3\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}t) - c_4\sqrt{3}\cos(\sqrt{3}t) \end{aligned}$$

dengan c_1, c_2, c_3, c_4 sebarang konstanta.

RANGKUMAN

- Solusi untuk setiap pasangan nilai eigen kompleks λ dan $\overline{\lambda}$ adalah bagian real ($\mathbf{u}$) dan imajiner ($\mathbf{v}$) dari vektor eigennya ($\boldsymbol{\xi} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$).

- Penyelesaian umum dari sistem PD linear homogen (12.1) yang memiliki nilai eigen kompleks adalah

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{\mathcal{R}} + c_1\mathbf{z}_1(t) + c_2\mathbf{z}_2(t) + \cdots + c_s\mathbf{z}_s(t).$$

  Dengan $\mathbf{x}_{\mathcal{R}}$ adalah penyelesaian untuk nilai eigen real dan $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \ldots, \mathbf{z}_n$ adalah penyelesaian untuk nilai eigen kompleks.

TES FORMATIF

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1. Diberikan sistem PD linear homogen dimensi-3 berikut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -3 \\ -3 & 3 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \mathbf{x}.$$

   Banyaknya nilai eigen yang bagian imajinernya tak nol adalah...

   A. 0
   B. 1
   C. 2
   D. 3

2. Sistem PD berikut

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

   memiliki salah satu penyelesaian yaitu...

   A. $e^t \begin{pmatrix} 1 + 2\cos t \\ 1 + \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$

   B. $e^t \begin{pmatrix} 2 + 2\cos t \\ 2 + \cos t \\ 2 + \cos t + \sin t \end{pmatrix}$

   C. $e^t \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

   D. $e^t \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 1 + \cos t \\ \cos t + \sin t \end{pmatrix}$

3. Diberikan sistem PD linear homogen sebagai berikut

$$\frac{dx}{dt} = 3x - 4y - 2z$$
$$\frac{dy}{dt} = -5x + 7y - 8z$$
$$\frac{dz}{dt} = -10x + 13y - 8z$$

   Penyelesaian umum dari sistem PD tersebut adalah...

   A. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 3t + \sin 3t \\ \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 3t - \sin 3t \\ \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$

B. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{t} \begin{pmatrix} \cos 3t + \sin 3t \\ \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix} + c_3 e^{t} \begin{pmatrix} \cos 3t + \sin 3t \\ \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$

C. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

D. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \\ -\cos 3t \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos 3t \\ \cos 3t \\ \sin 3t \end{pmatrix}$

4. Diberikan PD linear orde 3 sebagai berikut

$$y''' - 9y'' + 25y' - 25y = 0$$

dengan $y(0) = 2, y'(0) = 0, y''(0) = 0$. Penyelesaian dari PD tersebut adalah...

A. $y = e^{5x} + 2e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x$

B. $y = e^{5x} + 4e^{2x} \cos x - 3e^{2x} \sin x$

C. $y = e^{5x} - 7e^{2x} \sin x + e^{2x} \cos x$

D. $y = e^{5x} + e^{x} \cos x - 7e^{x} \sin x$

5. Perhatikan sistem PD dengan nilai awal berikut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Penyelesaian sistem PD diatas adalah...

A. $\mathbf{x}(t) = e^{t} \begin{pmatrix} \sin t - \cos t \\ 2\cos t - \sin t \\ 2\cos t + \sin t \end{pmatrix}$

B. $\mathbf{x}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

C. $\mathbf{x}(t) = e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{t} \begin{pmatrix} \sin t \\ \sin t + \cos t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$

D. $\mathbf{x}(t) = 2e^{-2t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{t} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ -\sin t \end{pmatrix}$

6. Diberikan PD linear orde 3 sebagai berikut

$$x''' - 7x'' + 18x' - 12x = 0$$

Penyelesaian umum untuk x'' adalah...

A. $x''(t) = c_1 + c_2 e^{3t} \cos \sqrt{3}t + c_3 e^{3t} \sin \sqrt{3}t$

B. $x''(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{3t} \cos 3t + c_3 e^{3t} \sin 3t$

C. $x''(t) = c_1e^{2t} + c_2e^t\cos\sqrt{3}t + c_3e^t\sin\sqrt{3}t$

D. $x''(t) = c_1e^t + c_2e^{3t}\cos\sqrt{3}t + c_3e^{3t}\sin\sqrt{3}t$

7. Dibawah ini yang **bukan** merupakan penyelesaian dari sistem PD linear homogen dimensi-4 yang mempunyai nilai eigen kompleks konjugat adalah...

   A. $\begin{pmatrix} 2\cos t \\ \cos t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t}$

   B. $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos t \\ 0 \\ 2\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{t}$

   C. $\begin{pmatrix} 2\cos t + \sin t \\ 2\sin t \\ 2\cos t \\ 2\sin t \end{pmatrix} e^{-3t}$

   D. $\begin{pmatrix} 2\cos t \\ 2\sin t \\ -2\cos t \\ -2\sin t \end{pmatrix} e^{t}$

8. Salah satu penyelesaian untuk

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

   A. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{2t} + e^{4t} \begin{pmatrix} \sin t \\ 0 \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

   B. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + e^{4t} \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\cos t \\ 2\sin t + 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

   C. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} e^{2t} + e^{t} \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 2\cos t \\ 2\sin t + 2\cos t \\ 0 \end{pmatrix}$

   D. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$

9. $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \sin(4t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(4t)$ merupakan penyelesaian dari sistem $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ dengan matriks $A =$...

   A. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

   B. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 4 & 3 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

   C. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

   D. $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

10. Diberikan PD orde 4 sebagai berikut

$$y^{(4)} + 7y'' + 10y = 0$$

   Dengan kondisi awal $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 3$. Penyelesaian untuk y''' adalah...

   A. $\frac{5\sqrt{5}}{3} \sin \sqrt{5}t - 5 \cos \sqrt{5}t - \frac{8\sqrt{2}}{3} \sin \sqrt{2}t - 4 \cos \sqrt{2}t$
   B. $\frac{5}{2} \sin \sqrt{5}t - 2 \cos \sqrt{5}t - \frac{8\sqrt{2}}{3} \sin \sqrt{2}t + 2 \cos \sqrt{2}t$
   C. $\frac{\sqrt{5}}{3} \sin \sqrt{5}t - 4 \cos \sqrt{5}t + 8 \sin \sqrt{2}t - 4 \cos \sqrt{2}t$
   D. $5 \sin \sqrt{5}t - 3 \cos \sqrt{5}t - 8\sqrt{2} \sin \sqrt{2}t - \cos \sqrt{2}t$

KUNCI JAWABAN:

1. C
2. B
3. A
4. C
5. D
6. D
7. A
8. B
9. A
10. A