EVALUASI TENGAH SEMESTER GASAL 2024/2025
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS
PROGRAM SARJANA

Matakuliah	:	Analisis 1
Hari, Tanggal	:	Kamis, 16 Oktober 2024
Waktu / Sifat	:	100 menit / *Closed Book*
Kelas, Dosen	:	A. Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
		B. Drs. Sadjidon, M.Si.
		C. Dr. Sunarsini, M.Si.
		D. Dr. Rinurwati, M.Si.

HARAP DIPERHATIKAN !!!
Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Pandang $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : A \to B$ yang didefinisikan dengan $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$. Dapatkan *domain* dan *range* dari f agar f bijektif. Buktikan jawaban Anda.

2. Buktikan dengan Induksi Matematika bahwa jumlah n bilangan ganjil yang pertama adalah n^2, yaitu $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

3. Buktikan bahwa tidak ada bilangan rasional q sehingga $q^2 = 3$.

4. Tunjukkan bahwa:
   (a) Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a = 0$.
   (b) Jika $\mathcal{N}_\varepsilon(a)$ adalah persekitaran-ε dari a dan $x \in \mathcal{N}_\varepsilon(a)$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x = a$.

5. Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$ dengan $x_n = (2 - \frac{1}{n})^2$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.
   (a) Tunjukkan bahwa X barisan terbatas.
   (b) Dapatkan $\inf(X)$ dan $\sup(X)$; dan buktikan jawaban Anda.
   (c) Dengan menerapkan definisi konvergensi barisan dan hasil bagian (b), buktikan bahwa $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup(X)$.

——o0o——

Solusi:

1. Pertama lakukan oret-oretan untuk mendapatkan *domain* dan *range* (Hal ini bertujuan untuk melakukan suatu klaim atau biasa kita kenal sebagai *conjecture*). Dengan menggunakan konsep kalkulus, didapatkan *domain*-nya adalah $A = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dan *range*-nya adalah $B = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.

   Selanjutnya kita perlu buktikan bahwa dengan memilih *domain* dan *range* tersebut, fungsi f menjadi bijektif. Ingat bahwa bijektif adalah gabungan dari sifat Injektif dan sifat Surjektif.

   Definisi. *Sebuah fungsi* $f : A \to B$ *dikatakan injektif jika untuk setiap* $x_1, x_2 \in A$ *dengan* $x_1 \neq x_2$ *maka* $f(x_1) \neq f(x_2)$.

   Atau kita bisa menggunakan kontraposisi dari definisi diatas, yaitu

   Definisi. *Sebuah fungsi* $f : A \to B$ *dikatakan injektif jika untuk setiap* $x_1, x_2 \in A$ *dengan* $f(x_1) = f(x_2)$ *maka* $x_1 = x_2$.

   Disini kita perlu mencari apa isi dari A dan B. Dengan menggunakan konsep kalkulus, kita bisa mendapatkan $A = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$ dan $B = \mathbb{R}\backslash\{2\}$.
   Selanjutnya ambil sebarang $x_1, x_2 \in A$. Kemudian misalkan $f(x_1) = f(x_2)$, maka

$$\frac{2x_1 - 3}{x_1 + 1} = \frac{2x_2 - 3}{x_2 + 1}$$

   Sebab $x_1, x_2 \neq -1$, maka $x_1 + 1 \neq 0$ dan $x_2 + 1 \neq 0$. Artinya $x_1 + 1$ dan $x_2 + 1$ masing-masing punya invers yaitu $\dfrac{1}{x_1 + 1}$ dan $\dfrac{1}{x_2 + 1}$. Dengan demikian, kita bisa mengalikan kedua ruas persamaan di atas dengan $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}
\frac{2x_1 - 3}{x_1 + 1} \cdot (x_1 + 1)(x_2 + 1) &= \frac{2x_2 - 3}{x_2 + 1} \cdot (x_1 + 1)(x_2 + 1) \\
2x_1(x_2 + 1) - 3(x_2 + 1) &= 2x_2(x_1 + 1) - 3(x_1 + 1) \\
\cancel{2x_1x_2} + 2x_1 - 3x_2 \cancel{- 3} &= \cancel{2x_2x_1} + 2x_2 - 3x_1 \cancel{- 3} \\
2x_1 - 3x_2 &= 2x_2 - 3x_1 \\
2x_1 + 3x_1 &= 2x_2 + 3x_2 \\
5x_1 &= 5x_2 \\
x_1 &= x_2
\end{aligned}$$

   didapatkan $x_1 = x_2$. Hal ini mengimplikasikan f adalah fungsi injektif.

   Definisi. *Sebuah fungsi* $f : A \to B$ *dikatakan surjektif jika untuk setiap* $y \in B$ *terdapat* $x \in A$ *sehingga* $f(x) = y$.

   Ambil sebarang $y \in B$. Karena B adalah kodomain dari f, maka y dapat dinyatakan sebagai $y = \dfrac{2x - 3}{x + 1}$ untuk suatu $x \in A$. Dengan demikian, kita bisa mendapatkan x sebagai berikut

$$\begin{aligned}
y &= \frac{2x - 3}{x + 1} \\
y(x + 1) &= 2x - 3 \\
yx + y &= 2x - 3 \\
yx - 2x &= -3 - y \\
x(y - 2) &= -3 - y \\
x &= \frac{-3 - y}{y - 2}
\end{aligned}$$

Sebab $y \neq 2$, maka $y - 2 \neq 0$. Artinya selalu ada $x \in A$ sehingga $f(x) = y$. Hal ini mengimplikasikan f adalah fungsi surjektif.

$\therefore$ Dengan demikian, f adalah fungsi bijektif.

2. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.
   - Untuk $n = 1$, maka $P(1)$ adalah $1 = 1^2$ yang dimana adalah pernyataan yang benar.
   - Asumsi bahwa $P(k)$ benar untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, yaitu $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$.
   - Untuk $n = k + 1$, maka $P(k + 1)$ adalah
   $$\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)}_{k^2} + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

   Dengan demikian, berdasarkan prinsip induksi matematika, kita bisa menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

3. Disini kita dapat melakukan pembuktian seperti yang biasanya dilakukan untuk membuktikan tidak ada bilangan rasional p yang memenuhi $p^2 = 2$, yaitu dengan menggunakan kontradiksi.

   Asumsikan bahwa q adalah bilangan rasional, maka q dapat dinyatakan sebagai $q = \dfrac{a}{b}$ dengan $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dan $\text{fpb}(a, b) = 1$. Sehingga didapatkan
   $$q^2 = 3 \iff \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 3 \iff \frac{a^2}{b^2} = 3 \iff a^2 = 3b^2$$
   Akibatnya a^2 adalah kelipatan dari 3. Sebab a^2 adalah bilangan bulat, maka a juga adalah kelipatan dari 3. Dengan demikian, a dapat dinyatakan sebagai $a = 3c$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}$. Sehingga didapatkan
   $$a^2 = (3c)^2 = 9c^2 = 3b^2 \iff 3c^2 = b^2 \iff b^2$$
   Hal ini juga berarti b^2 adalah kelipatan dari 3. Dari sini didapatkan hasil $\text{fpb}(a, b) = 3$ yang bertentangan dengan asumsi bahwa $\text{fpb}(a, b) = 1$.

   $\therefore$ Tidak ada bilangan rasional q yang memenuhi $q^2 = 3$.

4. (a) Diketahui $a \in \mathbb{R}$, sehingga akan memenuhi sifat-sifat pada bilangan real. Asumsikan $a \neq 0$. Maka didapat

   $$0 < a < \varepsilon$$
   $$a < \varepsilon\ ,\ a > 0$$

   Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dipilih $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}a$ sehingga

   $$a < \varepsilon_0\ ,\ a > 0$$
   $$a < \frac{1}{2}a\ ,\ a > 0 \quad \text{(Kontradiksi)}$$

   Akibatnya asumsi $a \neq 0$ salah. Jadi haruslah $a = 0$.

   (b) Sebelumnya kita harus mengetahui terlebih dahulu definisi dari persekitaran-ε dari a.

   Definisi. *Sebuah himpunan $\mathcal{N}_\varepsilon(a)$ disebut sebagai persekitaran-ε dari a jika terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $\mathcal{N}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$.*

   Perhatikan bahwa soal mengiginkan untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka untuk $x \in \mathcal{N}_\varepsilon(a)$ haruslah $|x - a| < \varepsilon$ memenuhi untuk setiap $\varepsilon > 0$. Sehingga dari informasi pada soal (a), didapatkan $|x - a| = 0$ yang berarti $x = a$.

5. (a) Barisan dikatakan terbatas jika dia terbatas di atas dan terbatas di bawah. Sekarang perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku

$$\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 > 0$$

Sehingga didapatkan bahwa (x_n) terbatas di bawah oleh 0.
Selanjutnya, perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &> 0 \\ -\frac{1}{n} &< 0 \\ 0 < 2 - \frac{1}{n} &< 2 \\ \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 &< 4 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan bahwa (x_n) terbatas di atas oleh 4.

$\therefore$ Barisan X adalah barisan terbatas.

(b) Untuk mencari $\inf(X)$ dan $\sup(X)$, kita perlu menggunakan konsep kalkulus kembali seperti menggunakan limit dsb. Dari hasil analisa, dapat kita klaim bahwa $\inf(X) = 1$ dan $\sup(X) = 4$.

Sekarang kita akan buktikan klaim tersebut.

- Pertama kita akan buktikan bahwa $\inf(X) = 1$.

  Teorema. *Misalkan H adalah himpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$. Sebuah bilangan $a \in \mathbb{R}$ dikatakan sebagai infimum dari H jika*
  i. $a \leq x$ untuk setiap $x \in H$.
  ii. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $x \in H$ sehingga $a \leq x < a + \varepsilon$.

  Menggunakan teorema di atas, diperoleh
  i. Untuk setiap $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, berlaku

  $$\frac{1}{n} \leq 1 \iff 2 - \frac{1}{n} \geq 1 \iff \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 \geq 1$$

  Sehingga 1 adalah batas bawah dari barisan X.
  ii. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dengan mudah kita pilih $x = 1 \in X$ sehingga $1 \leq x < 1 + \varepsilon$.

  $\therefore$ Terbukti $\inf(X) = 1$.

- Kedua kita akan buktikan bahwa $\sup(X) = 4$.

  Teorema. *Misalkan H adalah himpunan tak kosong dari $\mathbb{R}$. Sebuah bilangan $b \in \mathbb{R}$ dikatakan sebagai supremum dari H jika*
  i. $b \geq x$ untuk setiap $x \in H$.
  ii. Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $x \in H$ sehingga $b - \varepsilon < x \leq b$.

  Menggunakan teorema di atas, diperoleh
  i. Dari hasil (a), jelas bahwa 4 adalah batas atas dari barisan X.

ii. Dengan sifat Archimedes, didapatkan untuk setiap $\varepsilon > 0$ selalu terdapat $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Informasi tersebut dapat digunakan sebagai berikut

$$\left(2 - \frac{1}{n_\varepsilon}\right)^2 = 4 - \frac{4}{n_\varepsilon} + \frac{1}{n_\varepsilon^2} > 4 - \frac{4}{n_\varepsilon}$$

Pilih $n_\varepsilon = \dfrac{4}{\varepsilon}$, sehingga

$$4 - \frac{4}{n_\varepsilon} > 4 - \varepsilon$$

Hal ini menunjukkan terdapat $x = \left(2 - \frac{1}{n_\varepsilon}\right)^2 \in X$ sehingga $4 - \varepsilon < x \leq 4$.

$\therefore$ Terbukti $\sup(X) = 4$.

(c) Ingat tentang definisi konvergensi barisan

Definisi. *Sebuah barisan* (x_n) *dikatakan konvergen ke* $a \in \mathbb{R}$ *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *terdapat* $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *sehingga untuk setiap* $n \geq N_\varepsilon$ *berlaku* $|x_n - a| < \varepsilon$.

Dari hasil sebelumnya, kita sudah mengetahui bahwa $\sup(X) = 4$. Sehingga kita bisa klaim bahwa $\lim_{n\to\infty} x_n = 4$.

Sekarang akan kita buktikan klaim tersebut. Perhatikan bahwa

$$|x_n - 4| = \left|\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 - 4\right| = \left|\frac{1}{n^2} - \frac{4}{n}\right| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n} < \frac{4}{n}$$

Pilih $N_\varepsilon = \dfrac{4}{\varepsilon}$, sehingga untuk setiap $n \geq N_\varepsilon$ berlaku

$$|x_n - 4| < \varepsilon$$

Sehingga berdasarkan definisi konvergensi barisan, didapatkan $\lim_{n\to\infty} x_n = 4$.