Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

Diberikan sistem persamaan diferensial non-linier homogen berikut:

$$\frac{dx}{dt} = e^x + y$$
$$\frac{dy}{dt} = \ln(x+1) - y$$

Untuk menemukan titik kesetimbangan, kita cari nilai x dan y yang memenuhi:

$$\frac{dx}{dt} = 0 \quad \text{dan} \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Dari persamaan pertama:

$$e^x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -e^x.$$

Dari persamaan kedua:

$$\ln(x+1) - y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = \ln(x+1).$$

Kemudian kita substitusi $y = -e^x$ ke dalam persamaan kedua, sehingga

$$-e^x = \ln(x+1).$$

Persamaan ini non-linier dan membutuhkan solusi numerik untuk x, namun kita akan fokus pada titik sederhana $x = 0$ dan $y = 0$ untuk analisis lokal.
Selanjutnya di sekitar titik kesetimbangan $(x_0, y_0) = (0, 0)$, kita linearkan sistem dengan menghitung **matriks Jacobian** dari sistem non-linier tersebut. Didefinisikan

$$f(x, y) = e^x + y,$$
$$g(x, y) = \ln(x+1) - y.$$

Maka matriks Jacobian dari sistem persamaan diferensial non-linier adalah

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} \partial f/\partial x & \partial f/\partial y \\ \partial g/\partial x & \partial g/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^x & 1 \\ \frac{1}{x+1} & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Setelah sistem dilinearkan, kita perkenalkan notasi x^* dan y^* sebagai variabel yang menggambarkan penyimpangan kecil dari titik kesetimbangan (x_0, y_0). Dengan demikian, sistem persamaan diferensial linier yang dilinearkan menjadi:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = J(0,0)\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}.$$

Secara eksplisit, sistem linier yang dilinearkan adalah:

$$\frac{dx^*}{dt} = x^* + y^*$$
$$\frac{dy^*}{dt} = x^* - y^*$$

Untuk menyelesaikan sistem linier ini, kita bisa mencari solusi eigen dari matriks Jacobian $J(0,0)$. Eigenvalue yang telah kita hitung adalah:

$$\lambda_1 = \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{2}.$$

Dengan demikian, solusi umum untuk sistem linier yang dilinearkan adalah:

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{\sqrt{2}t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-\sqrt{2}t}.$$

Penjelasan lebih lanjut: - Vektor eigen yang sesuai dengan $\lambda_1 = \sqrt{2}$ adalah $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, sehingga solusinya adalah $c_1 e^{\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. - Vektor eigen yang sesuai dengan $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ adalah $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, sehingga solusinya adalah $c_2 e^{-\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Solusi umum untuk $x^*(t)$ dan $y^*(t)$ adalah:

$$x^*(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} + c_2 e^{-\sqrt{2}t}$$
$$y^*(t) = c_1 e^{\sqrt{2}t} - c_2 e^{-\sqrt{2}t}.$$

Sekarang kita substitusi kondisi awal $x(0) = 0$ dan $y(0) = 1$, yang diterjemahkan menjadi $x^*(0) = 0$ dan $y^*(0) = 1$, untuk menentukan konstanta c_1 dan c_2:

- Dari $x^*(0) = 0$:

$$c_1 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = -c_2.$$

- Dari $y^*(0) = 1$:

$$c_1 - c_2 = 1.$$

Substitusi $c_1 = -c_2$ ke dalam persamaan kedua:

$$-c_2 - c_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad -2c_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad c_2 = -\frac{1}{2}.$$

Sehingga $c_1 = \frac{1}{2}$.

Dengan $c_1 = \frac{1}{2}$ dan $c_2 = -\frac{1}{2}$, solusi akhirnya untuk $x^*(t)$ dan $y^*(t)$ adalah:

$$x^*(t) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{2}t} - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2}t}$$
$$y^*(t) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{2}t} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{2}t}.$$

Solusi ini dapat disederhanakan dengan menggunakan fungsi hiperbolik:

$$x^*(t) = \sinh\left(\sqrt{2}t\right)$$
$$y^*(t) = \cosh\left(\sqrt{2}t\right).$$