



EVALUASI TENGAH SEMESTER GASAL 2023/2024
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS
PROGRAM SARJANA



Matakuliah : Analisis 1
Hari, Tanggal : Kamis, 19 Oktober 2023
Waktu / Sifat : 100 menit / *Closed Book*
Kelas, Dosen : A. Dr. Sunarsini, M.Si.
B,F Dr. mont. Kistosil Fahim, M.Si.
C. Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
D,G Drs. Sadjidon, M.Si.
E. Dr. Rinurwati, M.Si.

HARAP DIPERHATIKAN !!!

Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Diberikan bilangan real a . Tunjukkan bahwa :

- (a) Jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $0 \leq a < \varepsilon$ maka $a = 0$.
- (b) jika $a \neq 0$ maka $a^2 > 0$.

2. Misal S himpunan bagian tak-kosong dari \mathbb{R} . Jika S terbatas diatas, tunjukkan bahwa

$$\sup(S) = -\inf\{-s : s \in S\}.$$

3. Diberikan himpunan $B \subset \mathbb{R}$ yang tidak kosong dan terbatas dibawah. Jika $v \in \mathbb{R}$ memenuhi sifat untuk setiap $n \in \mathbb{N}$ berlaku:

- (i) $v + \frac{1}{n}$ bukan batas bawah dari B ;
- (ii) $v - \frac{1}{n}$ batas bawah dari B ,

tunjukkan bahwa $\inf(B) = v$.

4. Dengan menggunakan definisi konvergensi barisan, tunjukkan bahwa $\lim(\frac{1}{3^n}) = 0$.

5. Misal (x_n) suatu barisan konvergen, dan diketahui (y_n) suatu barisan dengan sifat bahwa untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat M sehingga $|x_n - y_n| < \varepsilon$ untuk semua $n \geq M$. Apakah hal tersebut berakibat bahwa (y_n) barisan yang konvergen? Berikan penjelasan untuk jawaban Anda.

Nama	: Teosofi Hidayah Agung
NRP	: 5002221132

1. Diketahui $a \in \mathbb{R}$, sehingga akan memenuhi sifat-sifat pada bilangan real.

(a) Asumsikan $a \neq 0$. Maka didapat

$$0 < a < \varepsilon$$

$$a < \varepsilon, a > 0$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dipilih $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}a$ sehingga

$$a < \varepsilon_0, a > 0$$

$$a < \frac{1}{2}a, a > 0 \quad (\text{Kontradiksi})$$

Akibatnya asumsi $a \neq 0$ salah. Jadi haruslah $a = 0$.

(b) Akan dibagi menjadi 2 kasus:

(i) untuk $a > 0$, maka $a \in \mathbb{P}$ dan jelas bahwa $a \cdot a = a^2 \in \mathbb{P}$ (sifat keterurutan)

(ii) untuk $a < 0$, maka $-a \in \mathbb{P}$ sehingga $(-a) \cdot (-a) \in \mathbb{P}$. Secara Pembuktian sifat aljabar di \mathbb{R} , didapatkan $(-a) \cdot (-a) = a^2 \in \mathbb{P}$.

Jadi untuk $a \neq 0$ berlaku $a^2 > 0$.

2. S terbatas diatas berakibat S mempunyai supremum, yaitu $\sup(S)$. Dengan sifat supremum maka $s \leq \sup(S)$, untuk setiap $s \in S$. Akibatnya dapat diperoleh $-\sup(S) \leq -s, \forall s \in S(1)$

Perhatikan bahwa dari (1) dapat disimpulkan $-\sup(S)$ merupakan batas bawah dari $\{-s : s \in S\}$ yang berakibat himpunan tersebut memiliki infimum, yaitu $\inf\{-s : s \in S\}$. Dengan memanfaatkan sifat infimum didapatkan $-\sup(S) \leq \inf\{-s : s \in S\}$ atau dapat ditulis sebagai $\sup(S) \geq -\inf\{-s : s \in S\} \dots\dots\dots (2)$

Ingat kembali bahwa $\inf\{-s : s \in S\} \leq -s, \forall s \in S$ atau $s \leq -\inf\{-s : s \in S\}, \forall s \in S$. Didapatkan fakta bahwa $\inf\{-s : s \in S\}$ merupakan batas atas dari S . Akibatnya diperoleh $\sup(S) \leq -\inf\{-s : s \in S\} \dots\dots\dots (3)$

\therefore Dari (2) dan (3) dapat disimpulkan $\sup(S) = -\inf\{-s : s \in S\}$

3. Dengan menggunakan sifat infimum, dari (i) diperoleh $\inf(B) < v + \frac{1}{n}$ dan dari (ii) diperoleh $v - \frac{1}{n} \leq \inf(B)$. Sehingga didapatkan pertidaksamaan

$$\begin{aligned} v - \frac{1}{n} &\leq \inf(B) < v + \frac{1}{n} \\ -\frac{1}{n} &\leq \inf(B) - v < \frac{1}{n} \\ 0 &\leq |\inf(B) - v| < \frac{1}{n} \end{aligned}$$

Dengan sifat archimedes, didapatkan fakta bahwa $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0$. Dengan demikian didapatkan

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\inf(B) - v| < \frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon \\ 0 &\leq |\inf(B) - v| < \varepsilon \end{aligned}$$

Dengan menggunakan teorema pada soal 1.(a) dapat disimpulkan bahwa $\inf(B) - v = 0$ atau $\inf(B) = v$. **(Terbukti)**

4. Menggunakan definisi $\lim(\frac{1}{3^n}) = 0$ didapatkan untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat bilangan asli $K(\varepsilon)$ sehingga $\forall n \geq K(\varepsilon)$ berlaku $|\frac{1}{3^n} - 0| < \varepsilon$.

Perhatikan bahwa dengan induksi matematika, dapat dibuktikan bahwa $3^n > n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ atau ekuivalen dengan $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{n}$. Dilanjutkan dengan memilih $K(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ didapatkan $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{n} = \frac{1}{1/\varepsilon} = \varepsilon \implies |\frac{1}{3^n} - 0| < \varepsilon$.

Dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $\lim(\frac{1}{3^n}) = 0$ terbukti.

5. Dengan menggunakan definisi konvergensi barisan, dapat dilihat $\forall n \geq M$ berlaku bahwa $|(x_n - y_n) - 0| < \varepsilon$, yang menyatakan bahwa barisan $(x_n - y_n)$ konvergen ke 0. Dengan ekuivalensi definisi dapat juga ditulis $\lim(x_n - y_n) = 0$.

Perhatikan bahwa $y_n = x_n - (x_n - y_n)$, sehingga y_n merupakan hasil operasi barisan konvergen dengan barisan konvergen (didapatkan dari soal bahwa x_n konvergen). Akibatnya dapat disimpulkan

$$\lim(y_n) = \lim(x_n - (x_n - y_n)) = \lim(x_n) - \lim(x_n - y_n) = \lim(x_n) - 0 = \lim(x_n)$$