EVALUASI AKHIR SEMESTER GASAL 2024/2025
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS
PROGRAM SARJANA

Matakuliah	:	Analisis Fungsional
Hari, Tanggal	:	Selasa, 9 Desember 2024
Waktu / Sifat	:	11:00 – 12:40 (100 menit) / *Closed Book*
Dosen	:	Dr. Mahmud Yunus, M.Si. dan Dr. Sunarsini, S.Si, M.Si

HARAP DIPERHATIKAN !!!
Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Pandang ruang vektor $X = C[-1,1]$ dan pemetaan $\|\cdot\|_\infty : X \to \mathbb{R}$ yang didefinisikan dengan $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x\in[-1,1]} \{|f(x)|\}$, serta barisan fungsi yang didefinisikan dengan

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & -1 \le x < -\frac{1}{n}, \\ \frac{1}{2}(nx+1), & -\frac{1}{n} \le x < \frac{1}{n}, \\ 1, & \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

   (a) Tunjukkan bahwa $\|\cdot\|_\infty$ di atas merupakan norma di X.

   (b) Tunjukkan bahwa (f_n) barisan di X yang konvergen dan dapatkan limitnya.

   (c) Apakah $(X, \|\cdot\|_\infty)$ tersebut merupakan ruang Banach? Berikan penjelasan untuk jawaban Anda.

2. Diketahui $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ barisan di ruang Hilbert $L^2[a,b]$ untuk suatu $a, b \in \mathbb{R}$, dan $\{\alpha_k\}_{k=1}^\infty$ barisan di $\ell^2(\mathbb{N})$. Jika $\sum_{k=1}^\infty \alpha_k f_k$ konvergen, tunjukkan bahwa untuk semua $f \in L^2[a,b]$ berlaku

$$\left\langle f, \sum_{k=1}^\infty \alpha_k f_k \right\rangle = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k \langle f, f_k \rangle.$$

3. Pandang $\mathcal{H}$ suatu ruang Hilbert dan G ruang bagian tertutup dari $\mathcal{H}$. Jika $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ adalah basis ortonormal untuk G, tunjukkan bahwa pemetaan $P : \mathcal{H} \to G$ yang didefinisikan dengan

$$Pv = \sum_{k=1}^\infty \langle v, e_k \rangle e_k, \qquad v \in \mathcal{H},$$

adalah proyeksi ortogonal dari $\mathcal{H}$ pada G.

4. Jika $f \in L^2(\mathbb{R})$ mempunyai tumpuan kompak, tunjukkan bahwa $f \in L^1(\mathbb{R})$.

——o0o——

SOLUSI

1. (a) Untuk setiap $f, g \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$, kita buktikan tiga sifat norma:

   - (Positivitas) Karena $|f(x)| \geq 0$ untuk semua $x \in [-1,1]$, maka $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| \geq 0$.
   - (Homogenitas) Jika $\|f\|_\infty = 0$, maka $|f(x)| = 0$ untuk semua x, sehingga $f(x) = 0$ untuk semua x, yaitu f adalah fungsi nol. Sebaliknya, jika f adalah fungsi nol, maka jelas $\|f\|_\infty = 0$.
   - (Skalar) Untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, berlaku

     $$\|\alpha f\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |\alpha f(x)| = |\alpha| \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| = |\alpha|\|f\|_\infty.$$

   - (Ketaksamaan Segitiga) Untuk setiap $x \in [-1,1]$, berlaku

     $$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|.$$

     Mengambil supremum di kedua sisi menghasilkan

     $$\|f+g\|_\infty = \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[-1,1]} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

   Dengan demikian, $\|\cdot\|_\infty$ memenuhi keempat sifat norma.

   (b) Klaim bahwa barisan (f_n) konvergen ke fungsi f yang didefinisikan sebagai

   $$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{1}{2}, & x = 0, \\ 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

   Selanjutnya bagi kasus untuk setiap $x \in [-1,1]$:

   - Jika $x < 0$, maka pilih $N = \lceil -\frac{1}{x} \rceil$. Maka untuk setiap $n \geq N$, $x < -\frac{1}{n}$. Oleh karena itu, untuk semua $n \geq N$, $f_n(x) = 0 = f(x)$.
   - Jika $x = 0$, maka untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = \frac{1}{2} = f(0)$.
   - Jika $x > 0$, maka pilih $N = \lceil \frac{1}{x} \rceil$. Maka untuk setiap $n \geq N$, $x > \frac{1}{n}$. Oleh karena itu, untuk semua $n \geq N$, $f_n(x) = 1 = f(x)$.

   Dengan demikian, terbukati bahwa untuk $n \to \infty$, $f_n(x) \to f(x)$ untuk setiap $x \in [-1,1]$.

(c) Ruang $(X, \|\cdot\|_\infty)$ bukan merupakan ruang Banach karena terdapat barisan (f_n) di X yang konvergen ke fungsi f yang tidak kontinu pada $x = 0$, sehingga $f \notin X$. Oleh karena itu, X tidak lengkap terhadap norma $\|\cdot\|_\infty$.

2. Pertama-tama definsikan deret parsial

$$S_N = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k.$$

Karena $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k$ konvergen, maka barisan (S_N) konvergen ke suatu elemen $S = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k \in L^2[a,b]$. Dapat dituliskan sebagai $\|S_N - S\|_{L^2} \to 0$ saat $N \to \infty$.

Selanjutnya perhatikan bahwa untuk setiap $f \in L^2[a,b]$, berlaku

$$\langle f, S_N \rangle = \left\langle f, \sum_{k=1}^{N} \alpha_k f_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \langle f, f_k \rangle$$

dan

$$\langle f, S \rangle = \left\langle f, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k \right\rangle.$$

Kemudian akan dibuktikan bahwa $\langle f, S_N \rangle \to \langle f, S \rangle$ saat $N \to \infty$. Dengan menggunakan Ketaksamaan Cauchy-Schwarz, perhatikan bahwa

$$|\langle f, S_N \rangle - \langle f, S \rangle| = |\langle f, S_N - S \rangle| \leq \|f\|_{L^2} \|S_N - S\|_{L^2}.$$

Karena $\|S_N - S\|_{L^2} \to 0$ saat $N \to \infty$, maka $|\langle f, S_N \rangle - \langle f, S \rangle| \to 0$ saat $N \to \infty$. Dengan demikian, diperoleh

$$\left\langle f, \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f_k \right\rangle = \lim_{N\to\infty} \langle f, S_N \rangle = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \alpha_k \langle f, f_k \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \langle f, f_k \rangle.$$

3. Untuk setiap $v \in \mathcal{H}$, kita perlu menunjukkan bahwa Pv adalah proyeksi ortogonal dari v pada G. Pertama-tama, perhatikan bahwa $Pv \in G$ karena merupakan kombinasi linear dari elemen basis ortonormal $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Selanjutnya, kita perlu menunjukkan bahwa $v - Pv$ ortogonal terhadap setiap elemen di G. Untuk setiap $g \in G$, dapat dituliskan sebagai

$$g = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j,$$

untuk beberapa koefisien $\beta_j \in \mathbb{R}$. Maka,

$$\langle v - Pv, g\rangle = \left\langle v - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle e_k, \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j e_j \right\rangle.$$

Menggunakan linearitas dan ortonormalitas basis, diperoleh

$$\langle v - Pv, g\rangle = \langle v, g\rangle - \sum_{k=1}^{\infty} \langle v, e_k\rangle \beta_k = 0.$$

Dengan demikian, $v - Pv$ ortogonal terhadap setiap elemen di G, sehingga Pv adalah proyeksi ortogonal dari $\mathcal{H}$ pada G.