Pada Modul sebelumnya telah dibahas metode untuk menyelesaikan sistem PD linear dimensi-2. Pada subbab ini akan dibahas lebih lanjut mengenai penyelesaian sistem PD linear dimensi-n yang memiliki nilai eigen berulang. Nilai eigen berulang terjadi ketika polinomial karakteristik dari matriks koefisien memiliki akar yang sama, atau terdapat nilai eigen λ_0 yang muncul lebih dari satu kali. Dalam kasus ini yang perlu diperhatikan adalah banyaknya eigen vektor yang bebas linear dari nilai eigen berulang tersebut.

Dibawah ini akan diberikan ulang definisi yang telah dipelajari dalam mata kuliah MATA4113 – Aljabar Linier Elementer II. Definisi ini akan membantu dalam memahami konsep matriks dan penyelesaian sistem PD linear dimensi-n untuk kasus nilai eigen berulang.

Definisi 12.2.
Misalkan λ_0 nilai eigen dari matriks A. Bilangan k terbesar sehingga $(\lambda - \lambda_0)^k$ muncul sebagai faktor dari polinomial karakteristik disebut **multiplisitas aljabar** dari λ_0.

Contoh: Misalkan $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 2)^3(\lambda - 3)^2(\lambda - 4)$. Maka, multiplisitas aljabar dari $\lambda = 2$ adalah 3, $\lambda = 3$ adalah 2, dan $\lambda = 4$ adalah 1.

Definisi 12.3.
Misalkan λ_0 nilai eigen dari matriks A. Banyaknya vektor eigen yang bebas linear dari λ_0 disebut **multiplisitas geometri** dari λ_0.

Contoh: Matriks $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ memiliki salah satu nilai eigen $\lambda = 2$ yang dimana vektor $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ dan $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^T$ merupakan vektor eigennya (saling bebas linear), maka multiplisitas geometri dari $\lambda = 2$ adalah 2.

Multiplisitas aljabar dan geometri secara umum tidak akan selalu sama untuk setiap nilai eigen, dan juga secara intuitif kita bisa tahu bahwa multiplisitas geometri pasti kurang dari atau sama dengan multiplisitas aljabar untuk suatu nilai eigen.

Sebab itu, perlu untuk membagi kasus pada penyelesaian nilai eigen berulang menjadi dua, yaitu ketika multiplisitas geometri sama dengan multiplisitas aljabar dan ketika multiplisitas geometri kurang dari multiplisitas aljabar. Untuk kasus pertama silahkan pahami teorema berikut

Teorema 12.3.
Misalkan A matriks $n \times n$ dengan nilai eigen real $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (tidak harus berbeda) dan $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_n}$ adalah vektor eigen bebas linear korespondennya, maka

$$\mathbf{y_1} = \mathbf{x_1}e^{\lambda_1 t},\ \mathbf{y_2} = \mathbf{x_2}e^{\lambda_2 t},\ \ldots,\ \mathbf{y_n} = \mathbf{x_n}e^{\lambda_n t}$$

merupakan penyelesaian dari sistem $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$. Dengan kata lain, penyelesaian umum dari sistem tersebut adalah

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{x_1}e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{x_2}e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{x_n}e^{\lambda_n t} \tag{12.22}$$

Teorema 12.3 menunjukkan bahwa tidak ada masalah ketika terdapat nilai eigen berulang. Asalkan untuk setiap nilai eigen multiplisitas geometrinya sama dengan multiplisitas aljabarnya, maka langkah-langkah untuk mencari penyelesaian umum dari sistem (12.1) sama seperti yang telah dibahas pada KB 1.

Selanjutnya untuk kasus kedua, akan diberikan sebuah definisi untuk memudahkan pemahaman mengenai nilai eigen yang multiplisitas geometrinya kurang dari multiplisitas aljabar.

Definisi 12.4.
Matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ dikatakan *defektiv* jika dan hanya jika banyaknya vektor eigen yang bebas linear dari A kurang dari n. Secara spesifiknya hal ini terjadi ketika terdapat nilai eigen λ_0 yang multiplisitas geometrinya kurang dari multiplisitas aljabar. Dalam kasus ini, λ_0 disebut nilai eigen yang cacat (*defektiv*).

Pada prinsipnya penyelesaian umum dari sistem PD linear dimensi-n selalu memiliki n buah penyelesaian yang bebas linear, tidak peduli apakah sistem itu *defektiv* atau tidak. Oleh karena itu, pada kasus ini perlu dicari penyelesaian lainnya agar jumlah penyelesaian yang bebas linearnya menjadi n. Dibawah ini adalah teorema yang terkait dengan nilai eigen yang *defektiv*

Teorema 12.4.
Misalkan matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ memiliki nilai eigen λ_0 dengan multiplisitas aljabar $k \geq 2$ dan multiplisitas geometrinya hanya 1, artinya hanya ada satu vektor eigen $\mathbf{x}$ yang berkorespondensi dengan λ_0. Jika $\{\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_{k-1}}\}$ adalah vektor-vektor yang memenuhi

$$(A-\lambda_0 I)\mathbf{v_1} = \mathbf{x}, \quad (A-\lambda_0 I)\mathbf{v_2} = \mathbf{v_1}, \quad \dots, \quad (A-\lambda_0 I)\mathbf{v_{k-1}} = \mathbf{v_{k-2}}$$

maka

$$\begin{aligned}
\mathbf{y_1} &= \mathbf{x}e^{\lambda_0 t}\\
\mathbf{y_2} &= \mathbf{v_1}e^{\lambda_0 t} + \mathbf{x}te^{\lambda_0 t}\\
&\vdots\\
\mathbf{y_k} &= e^{\lambda_0 t}\left(\mathbf{v_{k-1}} + \mathbf{v_{k-2}}t + \cdots + \mathbf{v_1}\frac{t^{k-2}}{(k-2)!} + \mathbf{x}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}\right)
\end{aligned}$$

adalah penyelesaian yang bebas linear dari $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Metode pada Teorema 12.4 dinamakan **generalisasi vektor eigen**. Selanjutnya teorema dibawah ini merupakan generalisasi dari Teorema 12.4.

Teorema 12.5.
Misalkan matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ memiliki nilai eigen λ_0 dengan multiplisitas aljabar $k \geq 2$ dan multiplisitas geometrinya m $(1 \leq m < k)$. Andaikan $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_m}\}$ adalah vektor-vektor eigen bebas yang berkorespondensi dengan λ_0. Maka terdapat $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ (tidak semuanya nol) sehingga jika

$$\mathbf{v_1} = \alpha_1\mathbf{x_1} + \alpha_2\mathbf{x_2} + \cdots + \alpha_m\mathbf{x_m}$$

maka ada tak hingga vektor-vektor $\{\mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \dots, \mathbf{v_{k-m}}\}$ sedemikian sehingga memenuhi

$$(A-\lambda_0 I)\mathbf{v_2} = \mathbf{v_1}, \quad (A-\lambda_0 I)\mathbf{v_3} = \mathbf{v_2}, \quad \dots, \quad (A-\lambda_0 I)\mathbf{v_{k-m}} = \mathbf{v_{k-m-1}}. \tag{12.23}$$

Jika himpunan vektor $\{\mathbf{v_2}, \mathbf{v_3}, \dots, \mathbf{v_{k-m}}\}$ memenuhi (12.23), maka

$$\mathbf{y_1} = \mathbf{x_1}e^{\lambda_0 t}, \quad \mathbf{y_2} = \mathbf{x_2}e^{\lambda_0 t}, \quad \dots \quad, \mathbf{y_m} = \mathbf{x_m}e^{\lambda_0 t}$$

dan

$$\begin{aligned}
\mathbf{y_{m+1}} &= \mathbf{v_2}e^{\lambda_0 t} + \mathbf{v_1}te^{\lambda_0 t}\\
\mathbf{y_{m+2}} &= \mathbf{v_3}e^{\lambda_0 t} + \mathbf{v_2}te^{\lambda_0 t} + \mathbf{v_1}\frac{t^2}{2}e^{\lambda_0 t}\\
&\vdots\\
\mathbf{y_k} &= e^{\lambda_0 t}\left(\mathbf{v_{k-m}} + \mathbf{v_{k-m-1}}t + \cdots + \mathbf{v_1}\frac{t^{k-m}}{(k-m)!}\right)
\end{aligned} \tag{12.24}$$

merupakan penyelesaian yang bebas linear dari $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$.

Selanjutnya akan diberikan algoritma untuk menyelesaikan sistem PD linear dimensi-n yang memiliki nilai eigen dengan kasus multiplisitas geometri kurang dari multiplisitas aljabar. Artinya diharapkan telah menemukan semua vektor eigen yang bebas linear sebelum melanjutkan ke langkah-langkah pada algoritma ini.

Algoritma 12.3.
Definisikan terlebih dahulu $\{\lambda_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ sebagai himpunan nilai eigen yang semuanya berbeda. Setelah mengetahui bahwa sistem PD homogen (12.1) mempunyai nilai eigen *defektiv*, maka langkah-langkah yang dilakukan adalah sebagai berikut:

Langkah 1: Carilah terlebih dahulu penyelesaian untuk nilai eigen λ_i yang tidak cacat dengan menggunakan algoritma yang telah dipelajari pada KB 1 dan KB 2.

Langkah 2: Tentukan nilai eigen *defektiv* λ_i dari matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ yang multiplisitas geometrinya m dan multiplisitas aljabarnya k dengan $m < k$.

Langkah 3: Nyatakan $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \ldots, \mathbf{x_m}\}$ sebagai himpunan vektor eigen untuk λ_i.

Langkah 4: Tentukan sebarang konstanta $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ (tidak boleh semuanya nol) sedimikian sehingga

$$(A - \lambda_i I)\mathbf{v_2} = \alpha_1\mathbf{x_1} + \alpha_2\mathbf{x_2} + \cdots + \alpha_m\mathbf{x_m} \tag{12.25}$$

mempunyai penyelesaian untuk $\mathbf{v_2}$.

Langkah 5: Nyatakan $\mathbf{v}_1$ sebagai $\mathbf{v_1} = \alpha_1\mathbf{x_1} + \alpha_2\mathbf{x_2} + \cdots + \alpha_m\mathbf{x_m}$

Langkah 6: Dapatkan $\mathbf{v_2}$ dengan menyelesaikan persamaan (12.25) dan secara rekursif, tentukan vektor-vektor lain dimana

$$(A - \lambda_i I)\mathbf{v_3} = \mathbf{v_2}, \quad (A - \lambda_i I)\mathbf{v_4} = \mathbf{v_3}, \quad \ldots, \quad (A - \lambda_i I)\mathbf{v_{k-m}} = \mathbf{v_{k-m-1}}$$

Langkah 7: Selanjutnya penyelesaian yang bebas linear untuk λ_i adalah

$$\mathbf{y_1} = \mathbf{x_1}e^{\lambda_i t}, \quad \mathbf{y_2} = \mathbf{x_2}e^{\lambda_i t} \ldots, \quad \mathbf{y_m} = \mathbf{x_m}e^{\lambda_i t} \tag{12.26}$$

dan

$$y_{m+r} = e^{\lambda_i t}\left(\sum_{j=1}^{r} \mathbf{v_j}\frac{t^{k-m-j}}{(k-m-j)!}\right) \tag{12.27}$$

untuk $r = 1, 2, \ldots, (k - m)$.

Langkah 8: Bangun kombinasi linear dari persamaan (12.26) dan (12.27) dengan konstanta sebarang. Sehingga

$$\mathbf{y_{\lambda_i}} = c_1\mathbf{y_1} + c_2\mathbf{y_2} + \cdots + c_k\mathbf{y_k}$$

merupakan salah satu penyelesaian untuk PD homogen (12.1).

Langkah 9: Jika terdapat nilai eigen *defektiv* lainnya, ulangi langkah 2-8. Jika tidak, maka penyelesaian umum dari sistem $\mathbf{y}' = A\mathbf{y}$ adalah

$$\mathbf{y} = \mathbf{y_{\lambda_1}} + \mathbf{y_{\lambda_2}} + \cdots + \mathbf{y_{\lambda_p}} \tag{12.28}$$

dengan $\mathbf{y_{\lambda_i}}$ adalah penyelesaian umum dari nilai eigen λ_i (mempunyai konstanta sebarang sebanyak multiplisitas aljabarnya).

Catatan 12.7.
Jika diberikan sebuah syarat awal $\mathbf{y}(t_0)$, maka subtitusikan nilai awal pada persamaan (12.28) dan selesaikan persamaan linear untuk mendapatkan penyelesaian tunggal konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Contoh 12.11.
Tinjau dan carilah penyelesaian umum dari

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{y} \tag{12.29}$$

Penyelesaian:
Polinomial karakteristik dari matriks koefisien (12.29) adalah

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$$

Dapat dilihat bahwa nilai eigen $\lambda = 2$ bermultiplisitas 2, sehingga akan kita cek terlebih dahulu vektor eigennya. Tinjau matriks *augmented* dari sistem persamaan $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, yaitu

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Maka diperoleh $x_1 = -x_3$ dan x_2 bebas (tidak bergantung x_1 maupun x_3). Dapat ditulis sebagai

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{12.30}$$

Dari (12.30) dapat diperoleh informasi bahwa multiplisitas geometri dari $\lambda = 2$ juga 2 dengan vektornya adalah

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Disisi lain, untuk $\lambda = 1$ sudah pasti akan memberikan vektor eigen bermultiplisitas 1. Tinjau $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, yaitu

$$\left(\begin{array}{ccc:c} -1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Maka diperoleh $x_1 = -2x_3$ dan $x_2 = x_3$. Pilih saja $x_3 = 1$ sehingga vektor eigen dari $\lambda = 1$ adalah

$$\mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dari yang telah kita kerjakan sebelumnya, dapat disimpulkan bahwa sistem (12.29) tidak *defektiv*. Sehingga menurut Teorema 12.3, penyelesaian umum dari (12.29) adalah

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

Contoh 12.12.

Carilah penyelesaian umum dari

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -10 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \mathbf{y} \tag{12.31}$$

Penyelesaian:

Polinomial karakteristik dari matriks koefisien (12.31) adalah

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 4 & -10 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)(\lambda+1)^2$$

Didapat informasi nilai eigen $\lambda_1 = 1$ dengan multiplisitas 1 dan $\lambda_2 = -1$ dengan multiplisitas 2. Sehingga kita perlu mengecek multiplisitas geometri dari $\lambda_2 = -1$, karena terdapat kemungkinan multiplisitas geometrinya hanya satu.

Untuk nilai eigen $\lambda_2 = -1$, vektor eigen yang berkorespondensi harus memenuhi $(A+I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, sehingga matriks *augmented* dari sistem persamaan tersebut adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -10 & 0 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Maka diperoleh $x_3 = 0$ dan $x_1 = -x_2$. Pilih saja $x_2 = 1$ sehingga vektor eigennya

$$\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{12.32}$$

Karena $\lambda_2 = -1$ adalah nilai eigen yang *defektiv*, maka gunakan Algoritma 12.3 untuk menyelesaikan sistem (12.31).

Langkah 1: Vektor eigen yang berkorespondensi dengan $\lambda_1 = 1$ haruslah memenuhi $(A-I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, sehingga matriks *augmented* dari sistem persamaan tersebut adalah

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & -10 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -6 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Maka diperoleh $x_1 = x_3$ dan $x_2 = 2x_3$. Kemudian pilih saja $x_3 = 1$ sehingga vektor eigennya

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Jadi

$$\mathbf{y}_{\boldsymbol{\lambda_1}} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

adalah salah satu penyelesaian dari (12.31).

Langkah 2: Jelas bahwa $\lambda_2 = -1$ *defektiv* karena memiliki multiplisitas aljabar 2 dan multiplisitas geometri 1.

Langkah 3: $\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ adalah salah satu vektor eigen $\lambda_2 = -1$.

Langkah 4: Untuk vektor eigen yang hanya 1, maka tentukan saja $\alpha_1 = 1$ dan pastilah

$$(A + I)\mathbf{v_2} = \mathbf{x_2} \tag{12.33}$$

mempunyai penyelesaian.

Langkah 5: Selanjutnya nyatakan $\mathbf{v_1} = \mathbf{x_2}$

Langkah 6: Dari (12.33) diperoleh

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 4 & -10 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Akibatnya, $v_3 = \frac{1}{2}$ dan $v_1 = 1 - v_2$. Pilih $v_2 = 0$ sehingga

$$\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Langkah 7: Penyelesaian yang bebas linear dari $\lambda_2 = -1$ adalah

$$\mathbf{y_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} \quad \text{dan}$$

$$\mathbf{y_3} = \mathbf{v_2}e^{-t} + \mathbf{v_1}te^{-t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{-t}$$

Langkah 8: Didapatkan salah stu penyelesaian dari (12.31) adalah

$$\mathbf{y}_{\boldsymbol{\lambda_2}} = c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{-t} \right)$$

Langkah 9: Jadi, penyelesaian umum dari (12.31) adalah

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{\lambda_1} + \mathbf{y}_{\lambda_2} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} te^{-t} \right)$$

Contoh 12.13.
Tentukan penyelesaian umum untuk sistem PD linear dimensi-3 berikut

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x + y + z \\ \frac{dy}{dt} &= x + 3y - z \\ \frac{dz}{dt} &= 2y + 2z \end{aligned} \tag{12.34}$$

Penyelesaian:
Nyatakan (12.34) dalam bentuk matriks, yaitu

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y} \tag{12.35}$$

Polinomial karakteristik dari matriks koefisien (12.35) adalah

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^3$$

Artunya nilai eigen $\lambda = 2$ bermultiplisitas 3. Vektor eigen yang berkorespondensi dengan $\lambda = 2$ harus memenuhi $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, sehingga matriks *augmented* dari sistem persamaan tersebut adalah

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Maka diperoleh $x_1 = x_3$ dan $x_2 = 0$, jadi vektor eigenya adalah

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ternyata multiplisitas geometri dari $\lambda = 2$ hanya 1, sehingga akan digunakan Algoritma 12.3 untuk menyelesaikannya.

Langkah 1: Karena tidak ada nilai eigen lainnya, maka lewati langkah ini.

Langkah 2: Jelas bahwa $\lambda = 2$ memiliki multiplisitas aljabar 3 dan multiplisitas geometri 1.

Langkah 3: $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ adalah salah satu vektor eigen $\lambda = 2$.

Langkah 4: Tentukan saja $\alpha_1 = 1$ dan pastilah

$$(A-2I)\mathbf{v_2} = \mathbf{x_1} \tag{12.36}$$

mempunyai penyelesaian.

Langkah 5: Nyatakan $\mathbf{v_1} = \mathbf{x_1}$

Langkah 6: Dari (12.36) diperoleh

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Misalkan $v_3 = 0$ berakibat $v_1 = -\frac{1}{2}$ dan $v_2 = \frac{1}{2}$, sehingga

$$\mathbf{v_2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lalu kita lakukan kembali untuk mendapatkan $\mathbf{v_3}$ dengan $(A-2I)\mathbf{v_3} = \mathbf{v_2}$, sehingga

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Misalkan $v_3 = 0$ berakibat $v_1 = \frac{1}{2}$ dan $v_2 = 0$, sehingga

$$\mathbf{v_3} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Langkah 7: Penyelesaian yang bebas linear dari $\lambda = 2$ adalah

$$\mathbf{y_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\mathbf{y_2} = v_2 e^{2t} + v_1 t e^{2t} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{e^{2t}}{2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{2t}$$

$$\mathbf{y_3} = v_3 e^{2t} + v_2 t e^{2t} + v_1 \frac{t^2}{2} e^{2t} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{e^{2t}}{2} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{te^{2t}}{2} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^{2t}$$

Langkah 8: Karena tak ada nilai eigen lainnya, maka satu satunya penyelesaian adalah

$$\mathbf{y}_{\lambda_1} = c_1\mathbf{y_1} + c_2\mathbf{y_2} + c_3\mathbf{y_3}$$

Langkah 9: Penyelesaian umum dari (12.34) adalah

$$
\begin{aligned}
x &= c_1e^{2t} + c_2e^{2t}\left(t - \frac{1}{2}\right) + c_3\frac{e^{2t}}{2}\left(t^2 - t + 1\right)\\
y &= c_2\frac{e^{2t}}{2} + c_3\frac{te^{2t}}{2}\\
z &= c_1e^{2t} + c_2te^{2t} + c_3\frac{t^2e^{2t}}{2}
\end{aligned}
$$

Contoh 12.14.
Tinjau sistem linear homogen berikut dan tentukan penyelesaian untuk nilai awal $x_1(0) = 1, x_2(0) = 3, x_3(0) = 2$

$$
\begin{aligned}
x_1' &= 4x_1 + 3x_2 + x_3\\
x_2' &= -4x_1 - 4x_2 - 2x_3\\
x_3' &= 8x_1 + 12x_2 + 6x_3
\end{aligned}
\tag{12.37}
$$

Penyelesaian:
Bentuk matriks untuk (12.37) adalah

$$
\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 1\\ -4 & -4 & -2\\ 8 & 12 & 6 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad \text{dimana} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix}
\tag{12.38}
$$

Selanjutnya, polinomial karakteristik dari matriks koefisien (12.38) adalah

$$
\begin{vmatrix} 4-\lambda & 3 & 1\\ -4 & -4-\lambda & -2\\ 8 & 12 & 6-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 2)^3
$$

$\lambda_2 = 2$ bermultiplisitas 3. Misal $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3\end{pmatrix}^T$ vektor eigen yang berkorespondensi,maka

$$
\begin{pmatrix} 4 & 3 & 1\\ -4 & -4 & -2\\ 8 & 12 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} \alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3 \end{pmatrix}
$$

Dari persamaan diatas dapat ditinjau bahwa $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ harus memenuhi

$$
\begin{aligned}
2\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 &= 0\\
-4\alpha_1 - 6\alpha_2 - 2\alpha_3 &= 0\\
8\alpha_1 + 12\alpha_2 + 4\alpha_3 &= 0
\end{aligned}
\tag{12.39}
$$

Perhatikan bahwa

$$
\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = -0, \quad \alpha_3 = -2
$$

dan

$$
\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = -3
$$

adalah dua penyelesaian berbeda dari (12.39). Jadi vektor eigen untuk $\lambda = 2$ adalah

$$
\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 1\\ 0\\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 0\\ 1\\ -3 \end{pmatrix}
$$

Karena multiplisitas geometrinya kurang 1 (untuk melengkapkan penyelesaian umum), maka perlu dicari 1 penyelesaian yang bebas linear lagi.

Langkah 1: Tidak ada nilai eigen lainnya, maka lewati langkah ini.

Langkah 2: Nilai eigen $\lambda = 2$ memiliki multiplisitas aljabar 3 dan multiplisitas geometri 2.

Langkah 3: $\{\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2\}$ adalah vektor eigen koresponden untuk $\lambda = 2$.

Langkah 4: Mencari k_1 dan k_2 sehingga

$$\begin{aligned} 2v_1 + 3v_2 + v_3 &= k_1 \\ -4v_1 - 6v_2 - 2v_3 &= k_2 \\ 8v_1 + 12v_2 + 4v_3 &= -2k_1 - 3k_2 \end{aligned} \tag{12.40}$$

mempunyai penyelesaian. Dapat ditinjau bahwa $k_1 = 1$ dan $k_2 = -2$ memenuhi kriteria untuk (12.40).

Langkah 5: Nyatakan $\mathbf{v_1} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Langkah 6: Dari (12.40) diperoleh

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ -4 & -6 & -2 & -2 \\ 8 & 12 & 6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

dan penyelesaian tak trivialnya bisa kita pilih $v_1 = v_2 = 0$ dan $v_3 = 1$ sehingga Didapatkan

$$\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Langkah 7: Penyelesaian yang bebas linear dari $\lambda = 2$ adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{y_1} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} e^{2t} \\ \mathbf{y_2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} e^{2t} \\ \mathbf{y_3} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \end{aligned}$$

Langkah 8: Karena tak ada nilai eigen lainnya, maka satu satunya penyelesaian adalah

$$\mathbf{y}_\lambda = c_1\mathbf{y_1} + c_2\mathbf{y_2} + c_3\mathbf{y_3}$$

Langkah 9: Jadi penyelesaian umum dari sistem (12.37) adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= c_1e^{2t} + c_3te^{2t} \\ x_2 &= c_2e^{2t} - 2c_3te^{2t} \\ x_3 &= -2c_1e^{2t} - 3c_2e^{2t} + (4t+1)c_3e^{2t} \end{aligned} \tag{12.41}$$

Subtitusikan nilai awal pada (12.41), akibatnya didapatkan sebuah SPL

$$\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ c_2 &= 3 \\ -2c_1 - 3c_2 + c_3 &= 2 \end{aligned}$$

Maka diperoleh $c_1 = 1, c_2 = 3, c_3 = 13$ sehingga penyelesaian khusus dari (12.37) adalah

$$\begin{aligned} x_1 &= e^{2t} + 13te^{2t} \\ x_2 &= 3e^{2t} - 26te^{2t} \\ x_3 &= -2e^{2t} - 9e^{2t} + 13(4t+1)e^{2t} \end{aligned}$$

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai pengertian sistem PD linear homogen dimensi-n dan penyelesaiannya, kerjakanlah latihan berikut!

1. Tinjau sistem PD linear homogen berikut

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 11 & 6 & 18 \\ 9 & 8 & 18 \\ -9 & -6 & -16 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

   (a) Tentukan multiplisitas aljabar dan geometri untuk setiap nilai eigen dari sistem.

   (b) Dari poin (a), bagaimana bentuk penyelesaian umum dari sistem tersebut?

2. Diberikan sistem PD linear homogen berikut

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} &= 4x + 6y - z \\ \dfrac{dy}{dt} &= -x - 2y + z \\ \dfrac{dz}{dt} &= -2x - 8y + 4z \end{cases}$$

   (a) Tentukan penyelesaian umum dari sistem tersebut.

   (b) Jika diberikan kondisi awal $x(0) = 0$, $y(0) = 12$, $z(0) = 6$, tentukan penyelesaian khususnya.

3. Diberikan sistem PD linear homogen berikut

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ 5 & 1 & -5 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

   Buktikan bahwa $\mathbf{y_3} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} t + \dfrac{1}{50} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^t$ adalah penyelesaian dari sistem tersebut.

4. Tentukan penyelesaian umum untuk

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

5. Diberikan sebuah sistem sebagai berikut

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y_1}{dt^2} &= -2y_1 + 2y_2 \\ \dfrac{d^2y_2}{dt^2} &= 4y_1 - 4y_2 \end{cases}$$

   Tentukan penyelesaian umum dari sistem tersebut.

JAWABAN

1. (a) Polinomial karakteristik untuk matriks koefisien adalah

$$\begin{vmatrix} 11-\lambda & 6 & 18 \\ 9 & 8-\lambda & 18 \\ -9 & -6 & -16-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = (\lambda+1)(\lambda-2)^2$$

Sehingga nilai eigen $\lambda_1 = -1$ dan $\lambda_2 = 2$ dengan multiplisitas aljabar masing-masing 1 dan 2.

- Vektor eigen dari $\lambda_1 = -1$ dapat dicari dengan menyelesaikan $(A+I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 12 & 6 & 18 & 0 \\ 9 & 9 & 18 & 0 \\ -9 & -6 & -15 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Maka diperoleh $x_1 = -x_3$ dan $x_2 = -x_3$. Ambil $x_3 = -1$ sehingga

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

merupakan vektor eigen dari $\lambda_1 = -1$.

- Vektor eigen dari $\lambda_2 = 2$ dapat dicari dengan menyelesaikan $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 6 & 18 & 0 \\ 9 & 6 & 18 & 0 \\ -9 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dengan memisalkan x_2 dan x_3 sebagai variabel bebas, maka diperoleh $x_1 = -\frac{2}{3}x_2 - 2x_3$. Dapat kita tulis

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x_2 - 2x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dapat dipilih $x_2 = 3$ dan $x_3 = 1$, sehingga kita mempunyai dua vektor eigen dari $\lambda_2 = 2$ yaitu

$$\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dari definisi multiplisitas aljabar dan geometri, kita dapat menyimpulkan bahwa

- $\lambda_1 = -1$ memiliki multiplisitas aljabar 1 dan multiplisitas geometri 1.
- $\lambda_2 = 2$ memiliki multiplisitas aljabar 2 dan multiplisitas geometri 2.

(b) Karena multiplisitas aljabar dan geometrinya sama untuk setiap nilai eigen, maka berdasarkan Teorema 12.3 dapat disimpulkan bahwa penyelesaian umum sistem adalah

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

2. (a) Pertama kita perlu mengubah sistem tersebut kedalam bentuk matriks, yaitu

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 4 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -8 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

Selanjutnya polinomial karakteristik dari matriks adalah $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 2)^3$. Kemudian bisa kita dapatkan vektor eigen dengan menyelesaikan $(A - 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & \vdots & 0 \\ -1 & -4 & 1 & \vdots & 0 \\ -2 & -8 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Maka diperoleh $x_1 = -x_3$ dan $x_2 = \frac{1}{2}x_3$. Ambil $x_3 = 2$ sehingga didapatkan vektor eigen

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Terlihat bahwa matriks tersebut *defective* karena hanya memiliki satu vektor eigen. Oleh sebabnya, akan digunakan Algoritma 12.3 untuk menyelesaikannya.

Langkah 1: Karena hanya ada satu nilai eigen, maka lewati langkah ini.

Langkah 2: Nilai eigen $\lambda = 2$ memiliki multiplisitas aljabar 3 dan multiplisitas geometri 1.

Langkah 3: $\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen dari $\lambda = 2$.

Langkah 4: Dapat dipilih $\alpha_1 = 1$ dan pastilah

$$(A - 2I)\mathbf{v_2} = \mathbf{x_1}$$

mempunyai penyelesaian.

Langkah 5: Nyatakan $\mathbf{v_1} = \mathbf{x_1}$

Langkah 6: Kemudian diperoleh

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & \vdots & -2 \\ -1 & -4 & 1 & \vdots & 1 \\ -2 & -8 & 2 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & -1 \\ 0 & 2 & -1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Maka diperoleh $v_1 = -1 - v_3$ dan $v_2 = \frac{1}{2}v_3$ dengan v_3 bebas. Untuk $v_3 = 2$ diperoleh

$$\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Dilanjutkan dengan mencari $\mathbf{v_3}$ dengan $(A - 2I)\mathbf{v_3} = \mathbf{v_2}$, sehingga

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & -1 & \vdots & -3 \\ -1 & -4 & 1 & \vdots & 1 \\ -2 & -8 & 2 & \vdots & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & \vdots & -3 \\ 0 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Maka diperoleh $v_1 = -3 - v_3$ dan $v_2 = \frac{1}{2}v_3 + \frac{1}{2}$ dengan v_3 bebas. Untuk $v_3 = 1$ diperoleh

$$\mathbf{v_3} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Langkah 7: Penyelesaian yang bebas linear dari $\lambda = 2$ adalah

$$\mathbf{y_1} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$
$$\mathbf{y_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}$$
$$\mathbf{y_3} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2}e^{2t} + \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} te^{2t} + \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

Langkah 8: Penyelesaian satu-satunya dari sistem adalah

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y_1} + c_2\mathbf{y_2} + c_3\mathbf{y_3}$$

Langkah 9: Terakhir ubah persamaan dalam bentuk variabel x, y, z, sehingga diperoleh

$$x = -2c_1e^{2t} + c_2\left(-2t - 3\right)e^{2t} + c_3\left(-t^2 - 3t - 4\right)e^{2t}$$
$$y = c_1e^{2t} + c_2\left(-t + 1\right)e^{2t} + c_3\left(-\frac{t^2}{2} + t + 1\right)e^{2t}$$
$$z = 2c_1e^{2t} + c_2\left(2t + 2\right)e^{2t} + c_3\left(t^2 + 2t + 1\right)e^{2t}$$

(b) Subtitusikan $t = 0$ pada penyelesaian umum, sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} -2c_1 - 3c_2 - 4c_3 &= 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 &= 12 \\ 2c_1 + 2c_2 + c_3 &= 6 \end{aligned}$$

Dapat dicek bahwa $c_1 = 54, c_2 = -60, c_3 = 18$ adalah solusi dari SPL tersebut. Maka penyelesaian khusus dari sistem tersebut adalah

$$x = -108e^{2t} + (-2t - 3) - 60e^{2t} + 18(-t^2 - 3t - 4)e^{2t}$$
$$y = 54e^{2t} + (-t + 1) - 60e^{2t} + 18(-\frac{t^2}{2} + t + 1)e^{2t}$$
$$z = 108e^{2t} + (2t + 2) - 60e^{2t} + 18(t^2 + 2t + 1)e^{2t}$$

3. Untuk membuktikan bahwa $\mathbf{y_3}$ adalah penyelesaian dari sistem, maka cukup subtitusikan saja kedalam persamaan sistem.

- Ruas Kiri:

$$\mathbf{y_3'} = \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}t + \frac{1}{50}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}\right)e^t + \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}t + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right)e^t$$
$$= \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}6\\7\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{50}\begin{pmatrix}14\\23\\0\end{pmatrix}\right)e^t$$

- Ruas Kanan:

$$A\mathbf{y_3} = \begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\5 & 1 & -5\\-3 & 4 & 0\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}t + \frac{1}{50}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}\right)e^t$$
$$= \left[\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\5 & 1 & -5\\-3 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\5 & 1 & -5\\-3 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{50}\begin{pmatrix}2 & 2 & -3\\5 & 1 & -5\\-3 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\3\\0\end{pmatrix}\right]e^t$$
$$= \left[\begin{pmatrix}2+2+-3\\5+1-5\\-3+4+0\end{pmatrix}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}2+4+0\\5+2+0\\-3+8+0\end{pmatrix} + \frac{1}{25}\begin{pmatrix}8+6+0\\20+3-0\\-12-12+0\end{pmatrix}\right]e^t$$
$$= \left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\frac{t^2}{2} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}6\\7\\5\end{pmatrix} + \frac{1}{50}\begin{pmatrix}14\\23\\0\end{pmatrix}\right)e^t$$

Karena ruas kiri sama dengan ruas kanan, maka $\mathbf{y_3}$ adalah penyelesaian dari sistem tersebut.

4. Karena matriks diatas merupakan matriks segitiga atas, maka dengan mudah kita dapatkan bahwa nilai eigennya adalah entri-entri pada diagonal utamanya, yaitu $\lambda = 1$ dengan multiplisitas aljabar 4.

   Setelah menyelesaikan $(A - I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, diperoleh bahwa hanya terdapat dua vektor eigen yaitu

$$\mathbf{x_1} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{x_2} = \begin{pmatrix}0\\0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

   Dapat disimpulkan bahwa matriks ini *defektiv* sehingga perlu menggunakan Algoritma 12.3 untuk menyelesaikannya.

   Langkah 1: Karena hanya ada satu nilai eigen, maka lewati langkah ini.

   Langkah 2: Nilai eigen $\lambda = 1$ memiliki multiplisitas aljabar 4 dan multiplisitas geometri 2.

   Langkah 3: $\{\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}\}$ adalah vektor eigen dari $\lambda = 1$.

   Langkah 4: Tinjau bahwa

$$\left(\begin{array}{cccc|c}0 & 3 & 1 & 2 & \alpha_1\\0 & 0 & 2 & 4 & 0\\0 & 0 & 0 & 0 & -2\alpha_2\\0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_2\end{array}\right)$$

mempunyai penyelesaian ketika $\alpha_2 = 0$ dan untuk α_1 bisa dipilih bebas, misal $\alpha_1 = 3$.

Langkah 5: Didapat $\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Langkah 6: Dari informasi sebelumnya, kita dapatkan

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & \vdots & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Agar dapat konsisten dengan vektor selanjutnya, maka haruslah $v_3 = v_4 = 0$. Didapat $v_2 = 1$ dan dapat dipilih $v_1 = 2$, sehingga

$$\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Selanjutnya kita cari $\mathbf{v_3}$ dengan $(A - I)\mathbf{v_3} = \mathbf{v_2}$, sehingga

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 & \vdots & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 2 & \vdots & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Didapat $v_2 = \frac{1}{2}$, $v_3 = \frac{1}{2} - 2v_3$ dan v_1, v_4 bebas. Dapat dipilih $v_1 = v_4 = 1$, sehingga

$$\mathbf{v_3} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Langkah 7: Penyelesaian yang bebas linear dari $\lambda = 1$ adalah

$$\mathbf{y_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t$$

$$\mathbf{y_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t$$

$$\mathbf{y_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} te^t$$

$$\mathbf{y_4} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^t$$

Langkah 8: Nyatakan penyelesaian dalam bentuk

$$\mathbf{y}_\lambda = c_1 \mathbf{y_1} + c_2 \mathbf{y_2} + c_3 \mathbf{y_3} + c_4 \mathbf{y_4}$$

Langkah 9: Yang terakhir, penyelesaian umum dari sistem adalah

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_3 \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} te^t \right)$$
$$+ c_4 \left(\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{t^2}{2} e^t \right)$$

5. Ubah sistem orde 2 tersebut dengan permisalan sebagai berikut

$$\begin{aligned} x_1' &= y_1' = x_3 \\ x_2' &= y_2' = x_4 \\ x_3' &= y_1'' = -2y_1 + 2y_2 \\ x_4' &= y_2'' = 4y_1 - 4y_2 \end{aligned}$$

Sehingga diperoleh sebuah sistem yang melibatkan matriks 4×4 sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \\ x_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

Dapat dicek bahwa akan didapatkan persamaan karakteristik $\det(A - \lambda I) = \lambda^2(\lambda^2 + 6)$, sehingga nilai eigennya adalah $\lambda = 0$ dan $\lambda = \pm\sqrt{6}i$.

Sekarang kita perhatikan terlebih dahulu nilai eigen $\lambda = 0$ yang mempunyai multiplisitas aljabar 2. Dengan menyelesaikan $(A - 0I)\mathbf{z} = \mathbf{0}$, diperoleh bahwa vektor eigen dari $\lambda = 0$ adalah

$$\mathbf{z_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Artinya matriks ini *defektif* dan perlu menggunakan Algoritma 12.3 untuk menyelesaikannya.

Langkah 1: Terdapat nilai eigen lainnya, yaitu $\lambda = \pm\sqrt{6}i$ yang merupakan bilangan kompleks sehingga kita akan gunakan metode yang ada pada KB 2.

Pertama-tama kita cari vektor eigennya dengan menyelesaikan $(A - \sqrt{6}iI)\mathbf{z} = \mathbf{0}$. Kemudian dapat dicek bahwa akan diperoleh vektor eigen

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{pmatrix} i\sqrt{6} \\ -2\sqrt{6}i \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -6 \\ 12 \end{pmatrix}}_{\mathbf{u}} + i \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ -2\sqrt{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}}$$

Jadi solusi untuk $\lambda = \pm\sqrt{6}i$ adalah

$$\mathbf{z_1} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}\sin(\sqrt{6}t) \\ 2\sqrt{6}\sin(\sqrt{6}t) \\ -6\cos(\sqrt{6}t) \\ 12\cos(\sqrt{6}t) \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{z_2} = \begin{pmatrix} \sqrt{6}\cos(\sqrt{6}t) \\ -2\sqrt{6}\cos(\sqrt{6}t) \\ 6\sin(\sqrt{6}t) \\ -12\sin(\sqrt{6}t) \end{pmatrix}$$

atau kombinasi linear dari keduanya, yaitu

$$\mathbf{x_{\pm i\sqrt{6}}} = c_1 \begin{pmatrix} -\sqrt{6}\sin(\sqrt{6}t) \\ 2\sqrt{6}\sin(\sqrt{6}t) \\ -6\cos(\sqrt{6}t) \\ 12\cos(\sqrt{6}t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sqrt{6}\cos(\sqrt{6}t) \\ -2\sqrt{6}\cos(\sqrt{6}t) \\ 6\sin(\sqrt{6}t) \\ -12\sin(\sqrt{6}t) \end{pmatrix}$$

Langkah 2: $\lambda = 0$ memiliki multiplisitas aljabar 2 dan multiplisitas geometri 1.

Langkah 3: $\mathbf{z_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ adalah vektor eigen dari $\lambda = 0$.

Langkah 4: Dapat dipilih $\alpha_1 = 1$ dan pastilah

$$(A - 0I)\mathbf{v_2} = \mathbf{z_1}$$

mempunyai penyelesaian.

Langkah 5: Nyatakan $\mathbf{v_1} = \mathbf{z_1}$

Langkah 6: Kemudian diperoleh

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

Maka didapatkan $v_1 = v_2$ dan $v_3 = v_4 = 1$, sehingga untuk $v_2 = 1$ diperoleh

$$\mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Langkah 7: Penyelesaian yang bebas linear dari $\lambda = 0$ adalah

$$\mathbf{z_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{z_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t$$

Langkah 8: Kombinasi linear untuk penyelesaian $\lambda = 0$ adalah

$$\mathbf{x_0} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t \right)$$

Langkah 9: Jadi penyelesaian umum dari sistem adalah

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} t \right) + c_3 \begin{pmatrix} -\sqrt{6}\sin(\sqrt{6}t) \\ 2\sqrt{6}\sin(\sqrt{6}t) \\ -6\cos(\sqrt{6}t) \\ 12\cos(\sqrt{6}t) \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \sqrt{6}\cos(\sqrt{6}t) \\ -2\sqrt{6}\cos(\sqrt{6}t) \\ 6\sin(\sqrt{6}t) \\ -12\sin(\sqrt{6}t) \end{pmatrix}$$

Kembali ke permintaan pada soal, kita hanya perlu menyebutkan penyelesaian untuk y_1 dan y_2. Sehingga cukup dengan 2 baris pertama dari penyelesaian umum diatas.

$$y_1 = c_1 + c_2(1+t) - c_3\sqrt{6}\sin(\sqrt{6}t) + c_4\sqrt{6}\cos(\sqrt{6}t)$$
$$y_2 = c_1 + c_2(1+t) + c_3(2\sqrt{6}\sin(\sqrt{6}t)) - c_4(2\sqrt{6}\cos(\sqrt{6}t)).$$

RANGKUMAN

- Jika sebuah sistem PD linear dimensi-n memiliki beberapa nilai eigen kembar namun banyaknya vektor eigen yang bebas linear sama seperti dimensi matriksnya, maka penyelesaian untuk sistem tersebut berbentuk

$$\mathbf{y} = c_1\mathbf{y_1}e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{y_2}te^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{y_n}t^{n-1}e^{\lambda_n t}$$

  dengan $\{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n\}$ adalah nilai eigen yang tidak semuanya berbeda dan $\{\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2}, \ldots, \mathbf{y_n}\}$ adalah vektor eigen yang berkorespondensi.

- Jika sebuah matriks dikatakan *defektif*, maka diperlukan metode generalisasi vektor eigen untuk menentukan vektor eigen sebanyaknya kurangnya dari matriks tersebut.

- Misalkan nilai eigen λ memiliki multiplisitas aljabar m dan multiplisitas geometri k, maka $m - k$ penyelesaian yang lain dapat dicari menggunakan rumus

$$y_i = e^{\lambda t}\left(\sum_{j=1}^{i} \mathbf{v_j}\frac{t^{i-j}}{(i-j)!}\right)$$

  untuk $i = 1, 2, \ldots, m - k$ dengan $\mathbf{v_j}$ didapatkan dari generalisasi vektor eigen.

Tes Formatif

1. Berikut yang merupakan kriteria matriks dapat langsung dikatakan *defektif* adalah...
   (a) Matriks simetri ($A = A^T$)
   (b) Semua nilai eigennya sama/berulang
   (c) Multiplisitas aljabar lebih besar dari multiplisitas geometrinya
   (d) Multiplisitas geometri lebih besar dari multiplisitas aljabarnya

2. Diberikan sistem PD dimensi-3 berikut

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -6 & -4 & -7 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}$$

   Salah satu penyelesaian dari sistem tersebut adalah...
   (a) $\mathbf{y} = e^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ -t+3 \\ t-2 \end{pmatrix}$
   (b) $\mathbf{y} = te^{3t} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (c) $\mathbf{y} = e^{t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
   (d) $\mathbf{y} = e^{3t} \begin{pmatrix} t^2-1 \\ -t+5 \\ t^2-4 \end{pmatrix}$

3. Diberikan PD orde-3 berikut

$$x''' - 11x'' + 24x' + 36x = 0$$

   Jika $x(0) = -11$, $x'(0) = 16$, dan $x''(0) = 0$, maka solusi untuk $x'(t)$ adalah...
   (a) $x'(t) = (1-2t)e^{6t} - 12e^{-t}$
   (b) $x'(t) = (4-12t)e^{6t} + 12e^{-t}$
   (c) $x'(t) = (12-72t)e^{6t} - 12e^{-t}$
   (d) $x'(t) = -432te^{6t} + 12e^{-t}$

4. Diberikan penyelesaian umum dari sebuah sistem PD dimensi-3 berikut:

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} e^{-t} + c_3 \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}$$

   Pasangan konstanta c_1, c_2, c_3 sehingga penyelesaian khususnya $\mathbf{y}(1) = \begin{pmatrix} 9e^{-1}+10e \\ -16e^{-1} \\ 32e^{-1}+2e \end{pmatrix}$ adalah...

(a) $c_1 = 9, c_2 = \frac{1}{2}, c_3 = 2$

(b) $c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = 3, c_3 = \frac{3}{2}$

(c) $c_1 = 4, c_2 = 0, c_3 = 1$

(d) $c_1 = 3, c_2 = 4, c_3 = 0$

5. Penyelesaian umum dari sistem

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x + 9y + 9z \\ \dfrac{dy}{dt} = 19y + 18z \\ \dfrac{dz}{dt} = 9y + 10z \end{cases}$$

adalah...

(a) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}$

(b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{28t}$

(c) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) e^{t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{28t}$

(d) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{3t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{3t}$

6. Penyelesaian umum untuk

$$\mathbf{z}' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 9 \\ 6 & -3 & 0 & 6 \\ -4 & -4 & -3 & -4 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{z}$$

adalah...

(a) $\mathbf{z}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{2t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{z}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-t} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{z}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-2t} \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e^{3t} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{z}(t) = e^{-t}\begin{pmatrix}-2\\-3\\2\\1\end{pmatrix} + e^{-2t}\begin{pmatrix}-3\\-6\\4\\2\end{pmatrix} + e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} + e^{4t}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}$

Perhatikan sistem PD berikut untuk menjawab soal nomor 7-10.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix}-2 & 0 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 1 & -2\\ -2 & 2 & -2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\mathbf{x}$$

7. Banyaknya nilai eigen yang berbeda dari matriks tersebut adalah...
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4
8. Total multiplisitas geometri dari matriks tersebut adalah...
   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4
9. Salah satu penyelesaian dari sistem tersebut adalah...
   (a) $\mathbf{x} = te^{-2t}\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}$
   (b) $\mathbf{x} = te^{-2t}\begin{pmatrix}3\\0\\4\\2\end{pmatrix}$
   (c) $\mathbf{x} = e^{-2t}\begin{pmatrix}6t\\3\\4t-1\\1\end{pmatrix}$
   (d) $\mathbf{x} = e^{-2t}\begin{pmatrix}6\\3\\4\\2\end{pmatrix}$
10. Penyelesaian umum dari sistem tersebut adalah...
   (a) $\mathbf{x} = e^{-2t}\begin{pmatrix}1 & 3 & t+2 & t^2+2t+2\\ 1 & 0 & t+2 & t^2+2t+1\\ 0 & 4 & 1 & t+4\\ 0 & 2 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\\c_4\end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{x} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & 3 & t+2 & \frac{t^2}{2}+t+2 \\ 1 & 0 & t+2 & \frac{t^2}{2}+t+1 \\ 0 & 4 & 1 & t+4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$

(c) $\mathbf{x} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & 3 & t+2 & t+2 \\ 1 & 0 & t+2 & t+1 \\ 0 & 4 & 1 & t+4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$

(d) $\mathbf{x} = e^{-2t} \begin{pmatrix} 1 & 3 & t+2 & \frac{t^2}{2}+2t+2 \\ 1 & 0 & t+2 & \frac{t^2}{2}+2t+1 \\ 0 & 4 & 1 & t+4 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix}$

KUNCI JAWABAN:

1. C
2. A
3. B
4. A
5. B
6. C
7. A
8. B
9. D
10. D