Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

Tentukan solusi dari sistem persamaan diferensial berikut

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ dan } \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dengan syarat awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 1$.
<u>Solusi</u>:
Cari nilai eigen dari $\boldsymbol{A}$

$$\begin{aligned} \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 &\iff \lambda^2 - 4\lambda + 7 = 0 \\ &\iff \lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-28}}{2} \\ &\iff \lambda = 2 \pm \sqrt{3}i \end{aligned}$$

Kemudian cari vektor eigen dari $\boldsymbol{A}$

- Untuk $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}i$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{0} &\iff \begin{bmatrix} 2-(2+\sqrt{3}i) & -3 \\ 1 & 2-(2+\sqrt{3}i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} -\sqrt{3}i & -3 \\ 1 & -\sqrt{3}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{cases} -\sqrt{3}iv_1 - 3v_2 = 0 \\ v_1 - \sqrt{3}iv_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff v_1 = \sqrt{3}iv_2 \end{aligned}$$

Sehingga vektor eigen untuk $\lambda = 2 + \sqrt{3}i$ adalah $\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix}$.

- Untuk $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}i$

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{0} &\iff \begin{bmatrix} 2-(2-\sqrt{3}i) & -3 \\ 1 & 2-(2-\sqrt{3}i) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{bmatrix} \sqrt{3}i & -3 \\ 1 & \sqrt{3}i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \begin{cases} \sqrt{3}iv_1 - 3v_2 = 0 \\ v_1 + \sqrt{3}iv_2 = 0 \end{cases} \\ &\iff v_1 = -\sqrt{3}iv_2 \end{aligned}$$

Sehingga vektor eigen untuk $\lambda = 2 - \sqrt{3}i$ adalah $\boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} -\sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Sehingga solusi umum dari sistem persamaan diferensial adalah

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= c_1 \boldsymbol{v_1} e^{\lambda_1 t} + c_2 \boldsymbol{v_2} e^{\lambda_2 t} \\
&= c_1 e^{(2+\sqrt{3}i)t} \begin{bmatrix} \sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{(2-\sqrt{3}i)t} \begin{bmatrix} -\sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= c_1 e^{2t} \mathrm{cis}\left(\sqrt{3}t\right) \begin{bmatrix} \sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \mathrm{cis}\left(-\sqrt{3}t\right) \begin{bmatrix} -\sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Dengan syarat awal $x(0) = 1$ dan $y(0) = 1$, maka

$$
\begin{cases} \sqrt{3}ic_1 - \sqrt{3}ic_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 1 \end{cases}
$$

$$
\iff c_1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}, \quad c_2 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}
$$

Sehingga solusi dari sistem persamaan diferensial adalah

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} &= \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) e^{2t} \mathrm{cis}\left(\sqrt{3}t\right) \begin{bmatrix} \sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2\sqrt{3}}\right) e^{2t} \mathrm{cis}\left(-\sqrt{3}t\right) \begin{bmatrix} -\sqrt{3}i \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= e^{2t} \left[\left(\frac{1}{2}\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right) \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right) \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \end{bmatrix} \right] + i\, e^{2t} \left[\left(\frac{1}{2}\sin\left(\sqrt{3}t\right)\right) \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2\sqrt{3}}\cos\left(\sqrt{3}t\right)\right) \begin{bmatrix} -\sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \right]
\end{aligned}
$$

Sketsa kestabilan sistem adalah sebagai berikut