

Analisa Matematis Transformasi Wavelet CDF 5/3 dan CDF 9/7 pada Standar Kompresi Citra JPEG2000

Teosofi Hidayah Agung
5002221132

8 Desember 2025

Ringkasan

Makalah ini membahas secara matematis dan komputasional peran transformasi wavelet Cohen–Daubechies–Feauveau (CDF) 5/3 dan CDF 9/7 sebagai inti skema kompresi citra pada standar JPEG2000. Dimulai dari tinjauan singkat terhadap kekurangan DCT blok 8×8 pada JPEG klasik, dibahas bagaimana representasi multiresolusi dan sifat lokal dari wavelet memungkinkan reduksi artefak *blocking* dan peningkatan *rate-distortion*. Secara khusus, dipaparkan konstruksi filter analisis dan sintesis CDF 5/3 (integer, *reversible*) dan CDF 9/7 (real, *irreversible*), termasuk formulasi skema *lifting* yang efisien secara komputasi. Selanjutnya dianalisis perbandingan kinerja keduanya pada berbagai skenario kompresi lossless dan lossy menggunakan metrik seperti MSE, PSNR, dan SSIM, untuk menunjukkan trade-off antara kompleksitas komputasi, kemampuan kompresi, dan kualitas visual.

Kata Kunci—Wavelet, CDF 5/3, CDF 9/7, JPEG2000, Kompresi Citra, Transformasi Multiresolusi.

1 Pendahuluan

Standar JPEG2000 dikembangkan sebagai penerus JPEG klasik untuk menyediakan kompresi citra yang lebih efisien sekaligus fleksibel terhadap berbagai kebutuhan aplikasi, mulai dari penyimpanan arsip medis hingga distribusi gambar di internet. Berbeda dengan JPEG yang beroperasi pada blok-blok lokal berukuran 8×8 menggunakan DCT, JPEG2000 memanfaatkan transformasi wavelet diskrit (DWT) pada seluruh citra atau pada *tile* berukuran besar sehingga mengurangi artefak pemblokiran dan menghasilkan representasi multiresolusi yang lebih halus.

Di dalam kerangka JPEG2000, keluarga wavelet Cohen–Daubechies–Feauveau (CDF) 5/3 dan CDF 9/7 memainkan peran sentral sebagai pasangan filter analisis dan sintesis biortogonal. Wavelet CDF 5/3 dirancang sebagai transformasi *integer-to-integer* yang *reversible*, sehingga cocok untuk kompresi *lossless*, sedangkan wavelet CDF 9/7 menggunakan koefisien real yang dioptimalkan untuk pemanfaatan energi dan kinerja *rate-distortion* pada kompresi *lossy*.

Makalah ini menitikberatkan pada analisis matematis struktur filter CDF 5/3 dan CDF 9/7, formulasi transformasi wavelet dalam kerangka *subband coding* dan analisis multiresolusi, serta evaluasi kinerja numerik dan visual keduanya pada skenario kompresi citra lossless maupun lossy. Dengan menempatkan CDF 5/3 dan 9/7 dalam konteks teori wavelet yang lebih umum, diharapkan pembaca memperoleh pemahaman yang lebih sistematis mengenai alasan pemilihan kedua transformasi ini dalam standar JPEG2000.

2 Dasar-Dasar Wavelet

Pada bagian ini dibahas landasan teoretis dari transformasi wavelet yang menjadi dasar bagi skema kompresi JPEG2000. Pembahasan mencakup definisi fungsi skala dan fungsi wavelet, struktur filter low-pass dan high-pass yang menyertainya, serta sifat-sifat fundamental seperti dilatasi, translasi, dan orthonormalitas. Pemahaman terhadap konsep dasar ini penting karena seluruh proses dekomposisi multiresolusi dalam JPEG2000 dibangun langsung dari konstruksi matematis wavelet. Dengan demikian, bagian ini memberikan kerangka teoretis yang diperlukan untuk memahami bagaimana transformasi wavelet menghasilkan representasi citra yang efisien untuk keperluan kompresi.

2.1 Fungsi Skala dan Fungsi Wavelet

Secara umum, suatu sistem wavelet dibangun dari sepasang fungsi dasar: fungsi skala (*scaling function*) $\varphi(t)$ dan fungsi wavelet $\psi(t)$. Fungsi skala menghasilkan ruang pendekatan (*approximation space*) yang memuat komponen frekuensi rendah dari sinyal, sedangkan fungsi wavelet menghasilkan ruang detil (*detail space*) yang memuat komponen frekuensi tinggi.

Fungsi skala didefinisikan melalui persamaan rekursif dilatasi-translasi

$$\varphi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \varphi(2t - k), \quad (1)$$

dengan h_k adalah koefisien filter *low-pass*. Fungsi wavelet terkait diberikan oleh

$$\psi(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \varphi(2t - k), \quad (2)$$

dengan g_k adalah koefisien filter *high-pass*. Pasangan $\{h_k\}$ dan $\{g_k\}$ menentukan sifat-sifat penting wavelet seperti *compact support*, regularitas, dan jumlah momen yang hilang.^[1]

2.2 Dilatasi dan Translasi Wavelet

Keluarga fungsi wavelet dibentuk melalui operasi dilatasi dan translasi terhadap $\psi(t)$, yakni

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k), \quad j, k \in \mathbb{Z}, \quad (3)$$

di mana indeks skala j mengatur resolusi (frekuensi) dan indeks translasi k mengatur posisi spasial atau temporal. Untuk pilihan wavelet tertentu, himpunan $\{\psi_{j,k}\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ dapat membentuk basis ortonormal atau biortogonal bagi ruang fungsi $L^2(\mathbb{R})$. Sifat lokalisasi baik di domain waktu dan frekuensi inilah yang menjadikan wavelet unggul dibandingkan transformasi global seperti DFT atau DCT untuk sinyal non-stasioner [1][2].

2.3 Analisis Multiresolusi dan Ruang V_j , W_j

Kerangka *multiresolution analysis* (MRA) memperkenalkan deret ruang pendekatan $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ yang tersusun secara bertingkat

$$\cdots \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset \cdots \subset L^2(\mathbb{R}), \quad (4)$$

di mana setiap V_j mewakili aproksimasi sinyal pada resolusi skala 2^{-j} . Fungsi skala $\varphi(t)$ membentuk basis terurut bagi V_0 , dan basis untuk V_j diperoleh melalui dilatasi dan translasi

$$\varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k). \quad (5)$$

Ruang detil W_j didefinisikan sebagai komplemen ortogonal atau biortogonal dari V_{j+1} di dalam V_j , sehingga berlaku dekomposisi langsung

$$V_j = V_{j+1} \oplus W_{j+1}. \quad (6)$$

Secara intuitif, V_{j+1} memuat informasi skala kasar, sedangkan W_{j+1} memuat detil frekuensi yang hilang ketika berpindah dari resolusi j ke $j+1$. Dengan menerapkan hubungan ini berulang kali, setiap sinyal $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ dapat diekspresikan sebagai kombinasi koefisien aproksimasi pada skala terkasar dan koefisien detil pada berbagai skala yang lebih halus. [1]

2.4 Basis Ruang Hilbert

Dalam konteks wavelet, himpunan fungsi $\{\varphi_{j,k}(t), \psi_{j,k}(t)\}_{j,k \in \mathbb{Z}}$ dapat membentuk basis ortonormal atau biortogonal bagi ruang Hilbert $L^2(\mathbb{R})$. Basis ortonormal memenuhi kondisi

$$\langle \psi_{j,k}, \psi_{j',k'} \rangle = \delta_{j,j'} \delta_{k,k'}, \quad (7)$$

di mana δ adalah fungsi Delta Kronecker. Basis biortogonal melibatkan pasangan fungsi dual yang saling ortogonal satu sama lain. Keuntungan utama dari basis ini adalah kemampuan untuk merepresentasikan sinyal secara efisien dengan sedikit koefisien, terutama untuk sinyal dengan fitur lokal yang kompleks.

2.5 Transformasi Wavelet Diskrit (DWT) 1D dan 2D

Transformasi wavelet diskrit (DWT) merealisasikan kerangka MRA secara komputasi melalui operasi *filter bank* berjenjang. Untuk sinyal diskrit 1D $x[n]$, satu tingkat dekomposisi wavelet menghasilkan koefisien aproksimasi $a_1[n]$ dan detil $d_1[n]$ dengan memfilter $x[n]$ menggunakan filter low-pass $h[k]$ dan high-pass $g[k]$ diikuti operasi *downsampling* dua kali:

$$a_1[n] = \sum_k h[k - 2n] x[k], \quad (8)$$

$$d_1[n] = \sum_k g[k - 2n] x[k]. \quad (9)$$

Proses ini kemudian dapat diulang pada (8) dan (9) untuk menghasilkan dekomposisi beringkat.

Untuk citra 2D, DWT biasanya diterapkan secara terpisah pada baris dan kolom (transformasi separabel). Satu tingkat dekomposisi menghasilkan empat *subband*: *LL* (low-low), *LH* (low-high), *HL* (high-low), dan *HH* (high-high), yang masing-masing merepresentasikan komponen energi frekuensi rendah maupun detil horizontal, vertikal, dan diagonal. Dalam kasus 2D, kita mendefinisikan fungsi skala 2D (Φ) dan tiga fungsi wavelet 2D (Ψ) sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \Phi_{LL}(x, y) &= \varphi(x)\varphi(y), & \Psi_{HL}(x, y) &= \varphi(x)\psi(y), \\ \Psi_{LH}(x, y) &= \psi(x)\varphi(y), & \Psi_{HH}(x, y) &= \psi(x)\psi(y). \end{aligned}$$

Selanjutnya, koefisien DWT 2D diperoleh dengan mengonvolusi citra dengan filter yang sesuai diikuti *downsampling*.

3 Wavelet Cohen-Daubechies-Feauveau

Daubechies menemukan bahwa tidak ada wavelet ortonormal dengan *compact support* yang simetris, kecuali wavelet Haar yang sangat sederhana [3]. Namun Wavelet Haar memiliki keterbatasan dalam hal regularitas dan kemampuan pematatan energi yang mengakibatkan koefisien detil

yang kurang efisien untuk sinyal halus. Untuk mengatasi hal tersebut, Cohen, Daubechies dan Feauveau mengembangkan keluarga wavelet biortogonal Cohen–Daubechies–Feauveau (CDF) yang memungkinkan desain filter simetris dengan *compact support* sambil mempertahankan sifat biortogonalitas, sebuah konsep yang lebih longgar daripada ortonormalitas [4].

3.1 Biortogonal Wavelet

Wavelet biortogonal adalah keluarga wavelet yang tidak harus ortogonal terhadap dirinya sendiri, namun harus ortogonal terhadap *dual wavelet* pasangannya. Secara matematis, sistem biortogonal terdiri dari dua set fungsi:

$$\underbrace{\{\varphi(t), \psi(t)\}}_{\text{analisis}}, \quad \underbrace{\{\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)\}}_{\text{sintesis}},$$

yang memenuhi kondisi biortogonalitas:

$$\langle \varphi(t-m), \tilde{\varphi}(t-n) \rangle = \delta_{m,n}, \quad \langle \psi_{j,k}(t), \tilde{\psi}_{j',k'}(t) \rangle = \delta_{j,j'}\delta_{k,k'}.$$

Biortogonalitas ini menjamin bahwa representasi koefisien pada basis analisis dapat direkonstruksi kembali melalui basis dual secara eksak. Kelebihan utama biortogonal wavelet adalah kemampuannya menghasilkan wavelet simetris dengan *compact support*, suatu sifat yang secara teoritis tidak mungkin dicapai oleh wavelet ortonormal dengan *compact support*. Hal ini membuka ruang bagi desain filter yang lebih fleksibel, dan menjadi landasan bagi konstruksi Cohen-Daubechies-Feauveau.

3.2 Filter Analisis dan Sintesis

Empat fungsi dasar wavelet biortogonal berkaitan langsung dengan empat filter diskrit FIR: filter low-pass analisis $h[n]$, high-pass analisis $g[n]$, low-pass sintesis $\tilde{h}[n]$, dan high-pass sintesis $\tilde{g}[n]$. Hubungan antara fungsi skala dan wavelet dengan filter seperti yang diberikan oleh persamaan (1) dan (2). Hubungan serupa berlaku bagi fungsi dual $\tilde{\varphi}(x)$ dan $\tilde{\psi}(x)$ dengan filter $\tilde{h}[n]$ dan $\tilde{g}[n]$.

Kondisi biortogonalitas pada domain kontinu ekuivalen dengan syarat *perfect reconstruction* pada domain diskrit, yaitu

$$\sum_n h[n] \tilde{h}[n-2k] = \delta_{0,k}, \quad \sum_n g[n] \tilde{g}[n-2k] = \delta_{0,k}, \quad (10)$$

serta

$$\sum_n h[n] \tilde{g}[n-2k] = 0, \quad \sum_n g[n] \tilde{h}[n-2k] = 0. \quad (11)$$

Dalam representasi diskrit, proses dekomposisi sinyal $f[n]$ dilakukan melalui

$$a_1[k] = \sum_n h[n-2k] f[n], \quad d_1[k] = \sum_n g[n-2k] f[n], \quad (12)$$

sedangkan proses rekonstruksi dilakukan menggunakan filter sintesis

$$\hat{f}[n] = \sum_k \tilde{h}[n-2k] a_1[k] + \sum_k \tilde{g}[n-2k] d_1[k]. \quad (13)$$

Desain Cohen–Daubechies–Feauveau menjamin bahwa kedua operasi ini menghasilkan rekonstruksi sempurna, sekaligus memberikan regularitas tinggi dan simetri filter.

3.3 Formulasi Skema Lifting

Skema lifting merupakan formulasi konstruksi wavelet yang menyederhanakan operasi transformasi menjadi rangkaian langkah lokal: pemisahan (*split*), prediksi (*predict*), dan pembaruan (*update*). Pendekatan ini diperkenalkan oleh Sweldens dan menjadi sangat penting dalam implementasi wavelet CDF karena dapat menurunkan kompleksitas komputasi dan memungkinkan transformasi integer-to-integer.

Lifting dimulai dengan memisahkan sinyal menjadi bagian genap dan ganjil,

$$f_e[k] = f[2k], \quad f_o[k] = f[2k + 1]. \quad (14)$$

Langkah prediksi menggunakan bagian genap untuk memperkirakan bagian ganjil,

$$d[k] = f_o[k] - P(f_e)[k], \quad (15)$$

dan langkah pembaruan menggunakan informasi detil untuk memperbaiki bagian genap,

$$a[k] = f_e[k] + U(d)[k]. \quad (16)$$

Di sini $P(\cdot)$ dan $U(\cdot)$ merupakan operator linear lokal yang ditentukan oleh struktur filter CDF. Skema lifting untuk CDF 5/3 terdiri dari satu tahap prediksi dan satu tahap pembaruan, sedangkan CDF 9/7 memiliki empat tahap lifting dengan koefisien spesifik yang memastikan biorogonalitas dan *perfect reconstruction* tetap terpenuhi.

Formulasi lifting memberikan representasi yang lebih efisien dan stabil dibandingkan implementasi berbasis konvolusi langsung. Selain itu, struktur lifting memungkinkan transformasi integer-to-integer, yang merupakan fitur penting dalam kompresi lossless seperti JPEG2000.

4 Anatomi Skema Kompresi JPEG2000

Bab ini membahas struktur dan tahapan utama yang membentuk proses kompresi JPEG2000 secara lengkap, mulai dari pra-pemrosesan citra hingga pembentukan bitstream akhir. Setiap tahap dijelaskan dari sudut pandang matematis dan operasional untuk memberikan pemahaman menyeluruh mengenai bagaimana transformasi wavelet, kuantisasi, dan pengodean entropi bekerja secara terpadu di dalam standar JPEG2000.

4.1 Pra-pemrosesan dan Partisi Tile

Dalam kerangka matematis JPEG2000, sebuah citra digital dimodelkan sebagai fungsi diskrit dua dimensi:

$$f : \{0, \dots, M-1\} \times \{0, \dots, N-1\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad (17)$$

di mana M dan N masing-masing merepresentasikan tinggi dan lebar citra dalam piksel. Untuk citra grayscale, nilai $f(x, y)$ merepresentasikan intensitas cahaya pada posisi (x, y) , sedangkan untuk citra warna, terdapat tiga fungsi serupa untuk setiap kanal warna (misalnya R, G, B atau Y, Co, Cg).

Representasi ini memungkinkan kita untuk mengaplikasikan teori analisis matematis dan transformasi wavelet secara sistematis pada data citra. Berbeda dengan JPEG klasik yang memproses citra dalam blok-blok kecil 8×8 , JPEG2000 menerapkan konsep *tiling* yang lebih fleksibel. Citra dipartisi menjadi tile-tile tak tumpang tindih berukuran $T_x \times T_y$, di mana setiap tile didefinisikan sebagai:

$$\Omega_{p,q} = \{(x, y) \mid pT_x \leq x < (p+1)T_x, qT_y \leq y < (q+1)T_y\}, \quad (18)$$

untuk indeks tile $0 \leq p < P = \lceil M/T_x \rceil$ dan $0 \leq q < Q = \lceil N/T_y \rceil$.

Setiap tile $f_{p,q}$ merupakan restriksi fungsi citra f pada domain tile tersebut:

$$f_{p,q}(x, y) = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \Omega_{p,q}. \quad (19)$$

Keuntungan partisi tile antara lain:

- **Paralelisasi:** Setiap tile dapat diproses secara independen, memungkinkan implementasi paralel untuk mempercepat kompresi.
- **Efisiensi memori:** Transformasi wavelet dapat diterapkan pada satu tile sekaligus, mengurangi kebutuhan buffer memori.
- **Random access:** Dekoder dapat mengakses dan merekonstruksi region tertentu dari citra tanpa harus mendekode keseluruhan file.
- **Fleksibilitas:** Ukuran tile dapat disesuaikan dengan kebutuhan aplikasi—tile besar mengurangi overhead metadata, tile kecil meningkatkan lokalitas akses.

Dalam kasus ekstrem di mana $T_x = M$ dan $T_y = N$, seluruh citra diperlakukan sebagai satu tile tunggal, maksimalkan efisiensi kompresi namun mengorbankan lokalitas akses.

Transformasi wavelet melibatkan operasi konvolusi dengan filter yang memiliki *support* lebih dari satu piksel. Di dekat batas tile, konvolusi ini memerlukan akses ke piksel-piksel di luar domain tile, yang secara teknis tidak terdefinisi. Untuk mengatasi masalah ini, setiap tile diperluas menjadi $f_{p,q}^{\text{ext}}$ menggunakan salah satu teknik berikut: Piksel di luar batas tile dianggap bernilai nol:

$$f_{p,q}^{\text{ext}}(x, y) = \begin{cases} f_{p,q}(x, y) & \text{jika } (x, y) \in \Omega_{p,q}, \\ 0 & \text{jika } (x, y) \notin \Omega_{p,q}. \end{cases} \quad (20)$$

Metode ini sederhana namun dapat memperkenalkan diskontinuitas artifisial di batas tile, yang bermanifestasi sebagai artefak visual setelah kompresi lossy. Piksel di luar batas tile dicerminkan secara simetris terhadap batas:

$$f_{p,q}^{\text{ext}}(x, y) = f_{p,q}(x', y'), \quad (21)$$

dengan

$$x' = \begin{cases} x & \text{jika } 0 \leq x < T_x, \\ 2T_x - 1 - x & \text{jika } x \geq T_x \text{ atau } x < 0, \end{cases} \quad (22)$$

dan serupa untuk y' .

Perpanjangan simetris mempertahankan kontinuitas di batas tile dan merupakan metode yang paling umum digunakan dalam JPEG2000 karena mengurangi artefak batas. Tile diperlakukan sebagai periodik, sehingga piksel di luar batas "melingkar" kembali ke sisi berlawanan:

$$f_{p,q}^{\text{ext}}(x, y) = f_{p,q}(x \bmod T_x, y \bmod T_y). \quad (23)$$

Metode ini berguna ketika tile memiliki struktur periodik alami, namun kurang umum digunakan pada citra natural.

4.2 Transformasi Warna (RCT/ICT)

JPEG2000 mendukung dua jenis transformasi warna utama, yaitu *Reversible Color Transform* (RCT) dan *Irreversible Color Transform* (ICT). Kedua transformasi ini digunakan untuk memisahkan komponen luminans dan krominans sebelum tahap transformasi wavelet, sehingga redundansi antar kanal warna dapat ditekan dan efisiensi kompresi meningkat.

Transformasi warna bekerja pada ruang warna RGB dan menghasilkan tiga komponen baru yang lebih sesuai untuk kompresi, yaitu komponen luminans Y dan dua komponen krominans C_o dan C_g . Komponen luminans membawa sebagian besar informasi visual, sementara dua komponen krominans dapat dikompresi lebih kuat karena sensitivitas persepsi manusia terhadap perubahan warna lebih rendah dibanding perubahan intensitas terang.

4.2.1 Irreversible Color Transform (ICT)

ICT digunakan pada mode kompresi *lossy*. Transformasi ini bersifat tidak dapat dibalik secara eksak karena melibatkan koefisien pecahan real. ICT identik dengan transformasi yang digunakan dalam standar JPEG lama (sering disebut transformasi ke ruang YCbCr), namun dengan koefisien yang lebih tepat secara perceptual.

Transformasi ICT didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Y \\ C_o \\ C_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.299 & 0.587 & 0.114 \\ 0.5 & -0.4187 & -0.0813 \\ -0.1687 & -0.3313 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Transformasi inversnya diberikan oleh:

$$\begin{bmatrix} R \\ G \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1.402 & 0 \\ 1 & -0.3441 & -0.7141 \\ 1 & 0 & 1.772 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ C_o \\ C_g \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Karena menggunakan koefisien pecahan real, ICT tidak mendukung rekonstruksi sempurna dan hanya digunakan pada kompresi lossy dengan wavelet CDF 9/7.

4.2.2 Reversible Color Transform (RCT)

RCT merupakan transformasi warna yang sepenuhnya dapat dibalik (*perfectly reversible*), sehingga digunakan pada mode *lossless*. Transformasi ini bekerja menggunakan operasi bilangan bulat (integer-to-integer transform), sehingga tidak menyebabkan kesalahan pembulatan.

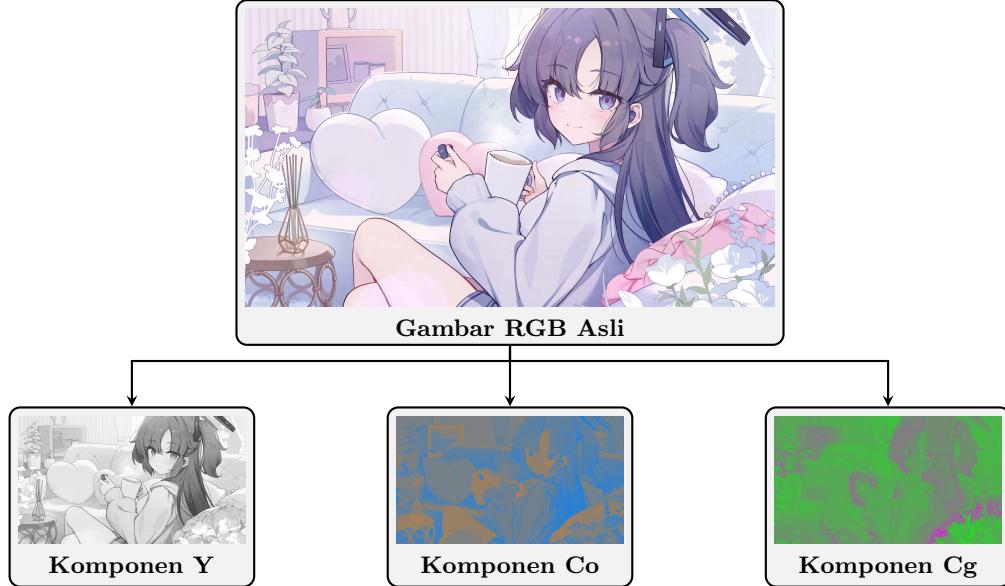
Transformasi RCT didefinisikan sebagai:

$$\begin{aligned} Y &= \left\lfloor \frac{R + 2G + B}{4} \right\rfloor, \\ C_o &= R - G, \\ C_g &= B - G. \end{aligned} \quad (26)$$

Transformasi invers:

$$\begin{aligned} G &= Y - \left\lfloor \frac{C_o + C_g}{4} \right\rfloor, \\ R &= C_o + G, \\ B &= C_g + G. \end{aligned} \quad (27)$$

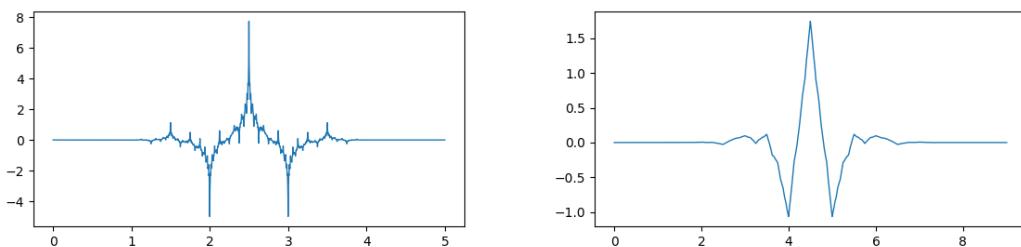
Karena setiap operasi menggunakan aritmetika bilangan bulat, RCT bersifat *reversible* secara eksak dan menjadi komponen kunci dalam skema kompresi lossless JPEG2000 ketika dikombinasikan dengan transformasi wavelet CDF 5/3.



Gambar 1: Gambar RGB dipecah menjadi tiga komponen: Y, Co, dan Cg.

4.3 Dekomposisi Wavelet Multilevel

Transformasi wavelet diskrit dua dimensi (2D-DWT) merupakan tahap utama dalam proses kompresi JPEG 2000. Berbeda dengan JPEG konvensional yang menggunakan DCT blok berukuran 8×8 , pendekatan wavelet bekerja pada seluruh citra sehingga menghindari artefak blok dan sekaligus menghasilkan representasi multiresolusi. Pada JPEG 2000, digunakan dua jenis filter biortogonal, yaitu *CDF 5/3* untuk kompresi lossless dan *CDF 9/7* untuk kompresi lossy. Kedua pasangan filter ini direalisasikan melalui *lifting scheme*.

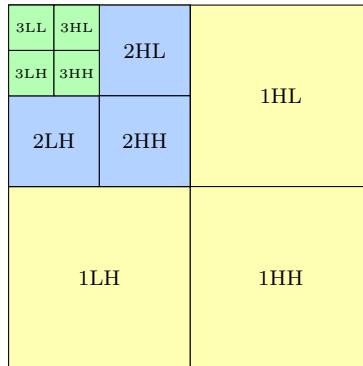


Gambar 2: Struktur filter CDF 5/3 (kiri) dan CDF 9/7 (kanan)

Pada dekomposisi wavelet 2D, citra terlebih dahulu difilter secara satu dimensi (1D-DWT) pada arah baris untuk memperoleh sinyal *low-pass* (L) dan *high-pass* (H). Kemudian proses yang sama diterapkan pada arah kolom sehingga terbentuk empat subband, yaitu:

- **LL** : aproksimasi beresolusi rendah,
- **LH** : detil horizontal (edge vertikal),
- **HL** : detil vertikal (edge horizontal),
- **HH** : detil diagonal.

Subband LL selanjutnya dapat kembali didekomposisi sehingga menghasilkan struktur piramida multilevel. Misalnya pada dekomposisi tiga level, hubungan subband yang terbentuk dapat diilustrasikan sebagai berikut:



Gambar 3: Dekomposisi wavelet 2D bertingkat level tiga

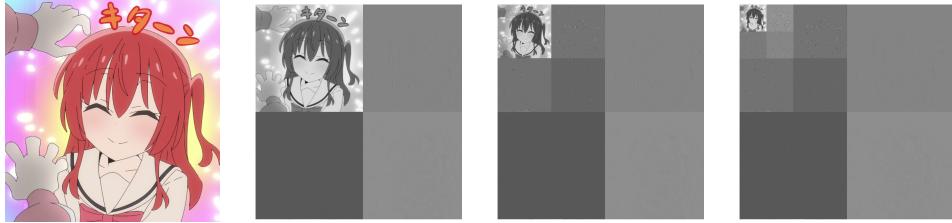
Masing-masing level memberikan representasi pada resolusi yang berbeda. Subband LL pada level tertinggi (misalnya LL_3) menyimpan struktur global citra, sedangkan subband pada level lebih rendah (misalnya LH_1 , HL_1 , HH_1) menyimpan informasi detil berfrekuensi tinggi. Pendekatan multiresolusi ini memungkinkan algoritma JPEG 2000 melakukan *progressive decoding*, *region of interest coding*, dan *scalable bitstream*.

4.4 Pembentukan Subband dan Code-block Partitioning

Hasil dekomposisi wavelet multilevel menghasilkan sekumpulan subband $\{LL_i, LH_i, HL_i, HH_i\}$ untuk $i = 1, 2, 3, \dots$. JPEG 2000 tidak mengkodekan seluruh subband sebagai satu unit besar, melainkan membaginya menjadi blok-blok kecil yang disebut *code-block*. Setiap code-block dikodekan secara independen menggunakan algoritma EBCOT (Embedded Block Coding with Optimal Truncation).

Untuk kompresi lossy, semua koefisien subband direpresentasikan dalam domain floating-point dan kemudian dikuantisasi. Setelah kuantisasi, setiap subband dipecah menjadi code-block berukuran tipikal 32×32 atau 64×64 . Tujuan pembentukan code-block adalah:

1. memungkinkan pengkodean bertahap berdasarkan bit-plane,
2. meningkatkan efisiensi kompresi,
3. mendukung *region of interest* (ROI) dengan prioritas tertentu,
4. memungkinkan pembuatan bitstream yang skalabel terhadap kualitas maupun resolusi.



Gambar 4: Contoh struktur subband dekomposisi wavelet 2D bertingkat tiga level

Gambar (4) memperlihatkan contoh struktur subband untuk dekomposisi wavelet 2D bertingkat tiga level. Subband level tertinggi (LL_3, LH_3, HL_3, HH_3) berada pada pojok kiri atas, kemudian disusul oleh level kedua (LL_2, LH_2, HL_2, HH_2) dan level pertama (LL_1, LH_1, HL_1, HH_1) yang membentuk struktur piramida multiresolusi.

4.5 Kuantisasi Koefisien Wavelet

Pada domain wavelet, citra pada setiap tile direpresentasikan melalui koefisien aproksimasi skala rendah serta koefisien detil pada berbagai orientasi dan tingkat resolusi. Untuk tile ke- (p, q) , koefisien aproksimasi pada level resolusi terkasar j_0 diberikan oleh

$$W_{\Phi}^{(p,q)}(j_0, m, n) = \sum_{(x,y) \in \Omega_{p,q}^{\text{ext}}} f_{p,q}^{\text{ext}}(x, y) \Phi_{j_0, m, n}(x, y), \quad (28)$$

di mana $\Phi_{j_0, m, n}(x, y)$ adalah fungsi penskalaan dua dimensi pada level j_0 . Koefisien aproksimasi ini merepresentasikan komponen frekuensi-rendah dari tile dan memuat struktur global citra.

Koefisien detil pada level resolusi $j_0 \leq j < J$ serta orientasi $i \in \{H, V, D\}$ (horizontal, vertikal, diagonal) diberikan oleh

$$W_{\Psi^i}^{(p,q)}(j, m, n) = \sum_{(x,y) \in \Omega_{p,q}^{\text{ext}}} f_{p,q}^{\text{ext}}(x, y) \Psi_{j, m, n}^i(x, y), \quad (29)$$

yang menangkap informasi frekuensi-tinggi seperti tepi, tekstur, dan detail halus pada multiskala. Proses kuantisasi selanjutnya akan memanfaatkan struktur spasial dan statistik dari koefisien-koefisien ini.

4.6 Pengodean Tier-1

Setiap blok koefisien $B = \{w_{m,n}\}$ dinormalisasi melalui skala

$$b_{\max} = \left\lceil \log_2 \max_{m,n} |w_{m,n}| \right\rceil,$$

sehingga representasi bit-plane dituliskan sebagai

$$w_{m,n} = \sum_{b=0}^{b_{\max}} \beta_{m,n}^{(b)} 2^b, \quad \beta_{m,n}^{(b)} \in \{0, 1\}.$$

Tier-1 mengodekan setiap bit $\beta_{m,n}^{(b)}$ melalui tiga pass:

1. **Significance-Propagation Pass:** untuk piksel yang belum signifikan tetapi memiliki tetangga signifikan, bit signifikan didefinisikan sebagai

$$s_{m,n}^{(b)} = 1 \iff |w_{m,n}| \geq 2^b.$$

2. **Magnitude-Refinement Pass:** untuk piksel yang sudah signifikan sejak bit-plane sebelumnya, bit magnitude dikodekan sebagai refinemen dari representasi sebelumnya.
3. **Cleanup Pass:** mengode bit yang tidak tercakup oleh dua pass pertama.

Setiap bit dikirimkan ke MQ-coder, yaitu pemodel probabilistik biner adaptif yang menggunakan konteks C sehingga entropi dikurangi melalui estimasi

$$P(\beta_{m,n}^{(b)} = 1 \mid C).$$

MQ-coder menghasilkan rangkaian kompresi optimal secara entropi untuk setiap code-block secara independen.

4.7 Pengodean Tier-2

Tier-1 menghasilkan serangkaian *coding passes* yang masing-masing memiliki kontribusi pengurangan distorsi ΔD dan peningkatan jumlah bit ΔR . Untuk setiap pass k , didefinisikan slope Lagrangian

$$\lambda_k = \frac{\Delta D_k}{\Delta R_k}.$$

Tujuan Tier-2 adalah memilih subset pass $\mathcal{S} \subseteq \{1, \dots, K\}$ yang memaksimalkan penurunan distorsi total

$$\Delta D(\mathcal{S}) = \sum_{k \in \mathcal{S}} \Delta D_k$$

di bawah batasan bitrate

$$\sum_{k \in \mathcal{S}} \Delta R_k \leq R_{\text{target}}.$$

Pemilihan dilakukan dengan mengurutkan pass berdasarkan λ_k secara menurun, kemudian memasukkan pass hingga batas bitrate tercapai. Struktur paket akhir dibentuk secara hierarkis berdasarkan (resolusi \rightarrow precinct \rightarrow code-block \rightarrow pass), sehingga bitstream dapat mendukung progresivitas kualitas maupun resolusi.

4.8 Invers DWT dan Rekonstruksi Citra

Sifat lokalisasi dari transformasi wavelet per-tile memungkinkan proses rekonstruksi citra dilakukan secara lokal. Rekonstruksi tile ke- (p, q) pada domain spasial diperoleh dari koefisien aproksimasi dan detil sebagai berikut:

$$\hat{f}_{p,q}(x, y) = W_{\Phi}^{(p,q)}(j_0, \cdot, \cdot) \Phi_{j_0}(x, y) + \sum_{j=j_0}^{J-1} \sum_{i \in \{H, V, D\}} W_{\Psi^i}^{(p,q)}(j, \cdot, \cdot) \Psi_j^i(x, y), \quad (30)$$

dengan Φ_{j_0} dan Ψ_j^i merupakan fungsi penskalaan dan wavelet pada level j . Proses ini bersifat linear dan mendukung rekonstruksi sempurna pada konstruksi biortogonal.

Setelah seluruh tile direkonstruksi, citra global diperoleh dengan menyusun kembali semua tile sesuai posisi spasialnya:

$$\hat{f}(x, y) = \hat{f}_{p,q}(x, y), \quad (x, y) \in \Omega_{p,q}. \quad (31)$$

Dengan demikian, setiap tile dapat diproses, dikodekan, dan didekodekan secara independen. Pendekatan ini tidak hanya memberikan fleksibilitas tinggi dalam pengaturan memori dan akses data, tetapi juga memungkinkan pemrosesan citra berskala besar secara efisien pada sistem kompresi berbasis wavelet.

5 Perbandingan JPEG dan JPEG2000 Berdasarkan MSE, PSNR, dan SSIM

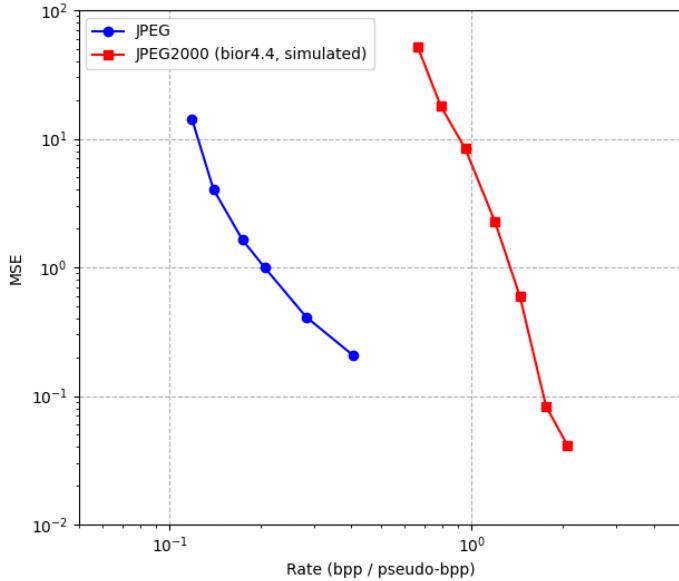
Pada bagian ini dilakukan evaluasi kuantitatif terhadap performa JPEG dan JPEG2000 menggunakan tiga metrik objektif, yaitu Mean Squared Error (MSE), Peak Signal-to-Noise Ratio (PSNR), dan Structural Similarity Index (SSIM). Pengujian dilakukan pada beberapa variasi bitrate, baik melalui perubahan parameter kualitas JPEG maupun variasi faktor kuantisasi pada simulasi JPEG2000 berbasis transformasi wavelet CDF 9/7. Hasil pengujian divisualisasikan pada grafik MSE–Rate, PSNR–Rate, dan SSIM–Rate.

5.1 Analisis MSE terhadap Bitrate

Metrik MSE mengukur rata-rata kuadrat selisih antara citra asli dan citra terkompresi:

$$\text{MSE} = \frac{1}{HW} \sum_{x=0}^{H-1} \sum_{y=0}^{W-1} (I(x, y) - \hat{I}(x, y))^2. \quad (32)$$

Berikut adalah hasil pengamatan dari grafik MSE terhadap bitrate:



Gambar 5: Grafik MSE terhadap Bitrate untuk JPEG dan JPEG2000

Dari grafik (5) diperoleh beberapa observasi penting:

- Kurva JPEG menurun secara perlahan. Pada bitrate rendah ($\approx 0.10\text{--}0.25$ bpp), MSE JPEG berada di rentang sekitar 12 hingga 0.25. Penurunan ini lambat karena pemrosesan blok DCT 8×8 menghasilkan *blocking artifact* yang signifikan.
- Kurva JPEG2000 menurun jauh lebih cepat. Pada rentang bitrate menengah hingga tinggi ($\approx 0.7\text{--}2.0$ bpp), MSE JPEG2000 turun drastis dari sekitar 30 menjadi sekitar 0.04.
- Secara keseluruhan, MSE JPEG2000 selalu lebih rendah daripada JPEG untuk semua bitrate, yang berarti tingkat distorsi lebih kecil.

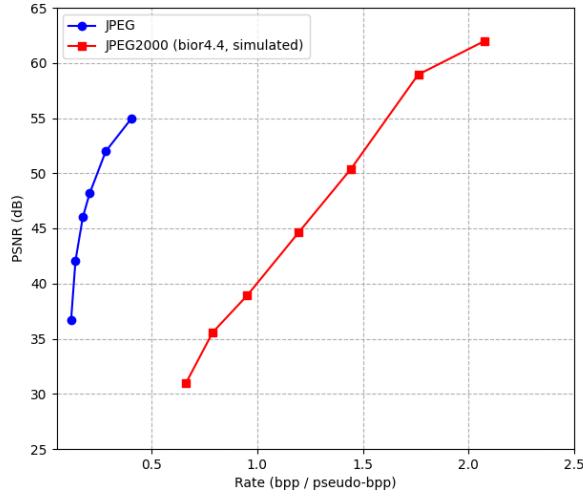
Perbedaan karakter kurva tersebut mencerminkan bahwa JPEG kehilangan informasi penting pada bitrate rendah karena sifat transformasi berbasis blok, sedangkan JPEG2000 lebih efisien berkat dekomposisi multiresolusi pada DWT.

5.2 Analisis PSNR terhadap Bitrate

PSNR adalah fungsi logaritmik dari MSE dan didefinisikan sebagai:

$$\text{PSNR} = 10 \log_{10} \left(\frac{255^2}{\text{MSE}} \right). \quad (33)$$

Berikut adalah hasil pengamatan dari grafik PSNR terhadap bitrate:



Gambar 6: Grafik PSNR terhadap Bitrate untuk JPEG dan JPEG2000

Hasil pengamatan dari grafik (6) dapat dirangkum sebagai berikut:

- JPEG hanya mencapai kisaran 36–55 dB. PSNR meningkat seiring bitrate, tetapi peningkatannya terbatas oleh keterbatasan transformasi DCT.
- JPEG2000 mampu mencapai 60 dB atau lebih. Bahkan pada bitrate menengah (≈ 1.2 bpp), PSNR JPEG2000 telah melampaui 50 dB dan mendekati 62 dB pada bitrate tinggi.
- Kurva JPEG2000 lebih linear dan stabil, menandakan struktur representasi wavelet lebih efisien dalam meminimalkan distorsi.

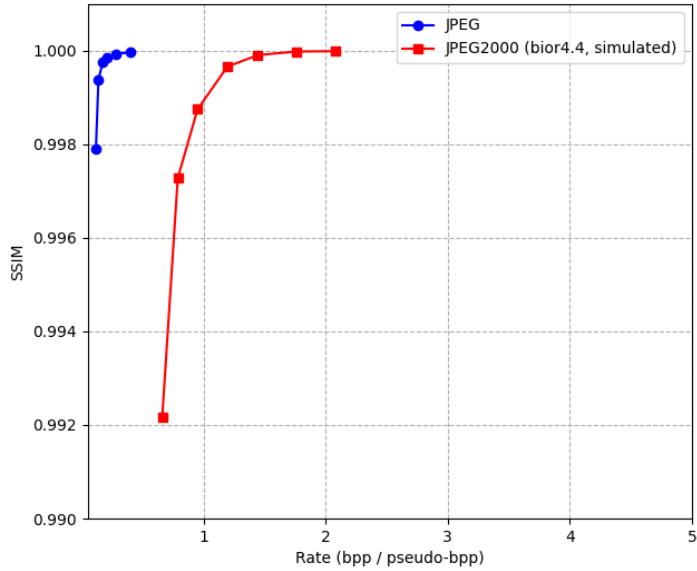
Dengan demikian, JPEG2000 memiliki keunggulan sekitar 5–10 dB dibandingkan JPEG pada bitrate yang sebanding.

5.3 Analisis SSIM terhadap Bitrate

SSIM mengukur kesamaan struktural antara citra asli dan citra terkompresi. SSIM didefinisikan oleh:

$$\text{SSIM}(I, \hat{I}) = \frac{(2\mu_I\mu_{\hat{I}} + C_1)(2\sigma_{I\hat{I}} + C_2)}{(\mu_I^2 + \mu_{\hat{I}}^2 + C_1)(\sigma_I^2 + \sigma_{\hat{I}}^2 + C_2)}. \quad (34)$$

Berikut adalah hasil pengamatan dari grafik SSIM terhadap bitrate:



Gambar 7: Grafik SSIM terhadap Bitrate untuk JPEG dan JPEG2000

Hasil (7) yang diperoleh menunjukkan:

- SSIM JPEG berada pada rentang 0.998–1.000. Nilai ini tinggi, tetapi masih dipengaruhi oleh *blocking artifact*.
- SSIM JPEG2000 meningkat sangat cepat dan mencapai nilai di atas 0.999 pada bitrate menengah, lalu mendekati 1.000 untuk bitrate tinggi. Ini menunjukkan bahwa struktur visual citra berhasil dipertahankan dengan sangat baik.
- Kurva SSIM JPEG2000 lebih stabil, terutama pada mode mendekati lossless.

Secara umum, SSIM JPEG2000 selalu lebih tinggi dibanding JPEG, menunjukkan kemampuan mempertahankan struktur, tepi, dan tekstur citra yang lebih baik.

6 Kesimpulan

Transformasi wavelet biortogonal, khususnya keluarga Cohen–Daubechies–Feauveau, memberikan dasar matematis yang efektif untuk kompresi citra modern seperti JPEG2000. CDF 5/3 terbukti optimal untuk kompresi *lossless* karena mendukung transformasi berbasis bilangan bulat dan memiliki kompleksitas komputasi yang rendah. Sebaliknya, CDF 9/7 menawarkan performa *lossy* terbaik pada bit-rate rendah berkat regularitasnya yang tinggi dan kemampuan pemanfaatan energi yang superior. Dibandingkan JPEG berbasis DCT, penggunaan wavelet pada JPEG2000 menghasilkan representasi multiresolusi tanpa artefak blok dan mendukung fleksibilitas penyandian yang lebih luas. Dengan demikian, pemilihan antara CDF 5/3 dan CDF 9/7 bergantung pada kebutuhan aplikasi: akurasi rekonstruksi untuk *lossless* atau efisiensi kompresi untuk *lossy*.

Pustaka

- [1] K. L. C. Ole Christensen, *Approximation Theory: From Taylor Polynomials to Wavelets* (Applied and Numerical Harmonic Analysis). Birkhäuser Boston, 2004, ISBN: 9780817636005; 0817636005; 2004043741; 9782004043740.
- [2] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing, 3 edition*. Academic Press, 2009, ISBN: 0123743702; 9780123743701.
- [3] I. Daubechies, “Orthonormal bases of compactly supported wavelets,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **jourvol** 41, **number** 7, **pages** 909–996, 1988.
- [4] A. Cohen, I. Daubechies dan J. C. Feauveau, “Biorthogonal bases of compactly supported wavelets,” *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **jourvol** 45, **pages** 485–560, 1992.