EVALUASI TENGAH SEMESTER
SEMESTER GANJIL 2024/2025
DEPARTEMEN MATEMATIKA - FSAD ITS
PROGRAM SARJANA

Mata kuliah / kode	:	Persamaan Diferensial Biasa (SM234305)
Hari / tanggal	:	Selasa, 15 Oktober 2024
Sifat / waktu	:	Tutup buku - 100 menit
Dosen	:	Drs. I Gusti Ngurah Rai Usadha, M.Si. Dra. Nur Asiyah, M.Si. Dr. Tahiyatul Asfihani, S.Si, M.Si. Amirul Hakam, S.Si., M.Si.

Aturan Pengerjaan:

- Dilarang bekerja sama dalam bentuk apa pun. Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerja sama, dll) yang dilakukan saat ETS akan dikenakan sanksi pembatalan mata kuliah pada semester yang sedang berjalan.
- Dilarang membuka HP, kalkulator, dan sejenisnya. Bobot Nilai Setiap Soal Sama; Kerjakan yang lebih mudah dahulu menurut Anda.

1. Diberikan persamaan diferensial sebagai berikut: $\dfrac{dy}{dx} = ky - ay^2$ dengan k, a adalah konstanta.
   (a) Identifikasi jenis persamaan diferensial tersebut.
   (b) Dapatkan penyelesaian umum PD tersebut.
   (c) Jelaskan perilaku penyelesaian jika $x \to \infty$.

2. Populasi tikus pada suatu tempat mengalami pertumbuhan sebesar 60% per bulan. Di tempat itu juga terdapat kucing yang ada pada daerah tersebut, kucing-kucing tersebut memakan tikus 3 ekor tiap bulan.
   (a) Dapatkan model matematika dari perubahan tikus tiap bulan (dp/dt).
   (b) Dapatkan persamaan populasi ($p(t)$), jika diketahui populasi awal tikus atau $p(0)$ sama dengan 100.

3. Dapatkan penyelesaian umum persamaan diferensial berikut:
$$y'' + 9y = 9\sec^2(3x), \quad 0 \leq x \leq \pi/6$$
   Petunjuk: $\dfrac{d}{dx}(\ln|\tan x + \sec x|) = \sec x$

4. Diberikan PD linear tingkat dua dengan koefisien tidak konstan:
$$x^2y'' - 3xy' + 4y = x^2 - 2x$$
   (a) Ubahlah PD tersebut menjadi PD dengan koefisien konstan.
   (b) Tentukan penyelesaian umum PD tersebut.

SOLUSI

1. (a) Persamaan Diferensial Bernoulli dengan $n = 2$. Sekedar informasi, PD Bernoulli memiliki bentuk umum:
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

   (b) Misalkan $v = y^{1-2} = y^{-1}$, maka
$$\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y^2}(ky - ay^2) = -kv + a$$
sehingga diperoleh persamaan diferensial linear orde satu:
$$\frac{dv}{dx} + kv = a$$
Faktor integrasi dari PD tersebut adalah $e^{\int k dx} = e^{kx}$, sehingga
$$e^{kx}v = \int ae^{kx}dx = \frac{a}{k}e^{kx} + C$$
atau
$$v = \frac{a}{k} + Ce^{-kx}$$
Kembali ke variabel y, diperoleh penyelesaian umumnya:
$$y = \frac{1}{\frac{a}{k} + Ce^{-kx}} = \frac{ke^{kx}}{ae^{kx} + Ck}$$

   (c) Akan dibagi menjadi dua kasus, yaitu $k > 0$ dan $k < 0$.

   - Jika $k > 0$, maka $\lim_{x\to\infty} e^{kx} = \infty$. Sehingga
$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{ke^{kx}}{ae^{kx} + Ck} = \lim_{x\to\infty} \frac{k}{a + Cke^{-kx}} = \frac{k}{a+0} = \frac{k}{a}$$
   - Jika $k < 0$, maka $\lim_{x\to\infty} e^{kx} = 0$. Sehingga
$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} \frac{ke^{kx}}{ae^{kx} + Ck} = 0$$

2. (a) Misalkan p adalah populasi tikus pada waktu t (dalam bulan), artinya dp/dt adalah perubahan populasi tikus tiap bulan. Diketahui bahwa pertumbuhan populasi tikus adalah $3/5p$ (60% per bulan) dan kucing memakan tikus sebanyak 3 ekor tiap bulan, sehingga bisa dituliskan sebagai berikut:
$$\frac{dp}{dt} = \frac{3}{5}p - 3$$

   (b) Dapat kita tuliskan ulang persamaan diferensial tersebut menjadi
$$\frac{dp}{dt} - \frac{3}{5}p = -3$$
Faktor integrasi dari PD tersebut adalah $e^{\int -3/5 dt} = e^{-3t/5}$, sehingga
$$e^{-3t/5}p = \int -3e^{-3t/5}dt = 5e^{-3t/5} + C$$

atau

$$p = 5 + Ce^{3t/5}$$

Dengan kondisi awal $p(0) = 100$, diperoleh

$$100 = 5 + C \implies C = 95$$

sehingga persamaan populasi tikus menjadi

$$p(t) = 5 + 95e^{3t/5}$$

3. Pertama kita cari penyelesaian homogen dari persamaan diferensial tersebut, yaitu

$$y'' + 9y = 0$$

dengan karakteristik persamaan $r^2+9 = 0$, sehingga diperoleh $r = \pm 3i$. Dengan demikian, penyelesaian homogen dari PD tersebut adalah

$$y_h = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

Selanjutnya, kita cari penyelesaian partikular dari PD tersebut. Dari petunjuk yang diberikan, kita gunakan metode variasi parameter. Misalkan

$$y_p = L_1(x) \cos 3x + L_2(x) \sin 3x$$

dengan syarat

$$\begin{aligned} L_1'(x) \cos 3x + L_2'(x) \sin 3x &= 0 \\ -3L_1'(x) \sin 3x + 3L_2'(x) \cos 3x &= 9 \sec^2(3x) \end{aligned}$$

persamaan di atas dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1'(x) \\ L_2'(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 9\sec^2(3x) \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan aturan Cramer, diperoleh

$$L_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin 3x \\ 9\sec^2(3x) & 3\cos 3x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix}} = \frac{-9\sin 3x \sec^2(3x)}{3} = -3\tan 3x \sec 3x$$

$$L_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos 3x & 0 \\ -3\sin 3x & 9\sec^2(3x) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos 3x & \sin 3x \\ -3\sin 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix}} = \frac{9\cos 3x \sec^2(3x)}{3} = 3\sec 3x$$

Selanjutnya, kita integralkan $L_1'(x)$ dan $L_2'(x)$:

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \int -3\tan 3x \sec 3x dx = -\int \frac{d}{dx}(\sec 3x) dx = -\sec 3x \\ L_2(x) &= \int 3\sec 3x dx = \ln|\tan 3x + \sec 3x| \end{aligned}$$

sehingga penyelesaian partikular dari PD tersebut adalah

$$y_p = -\sec 3x \cos 3x + \ln|\tan 3x + \sec 3x| \sin 3x = -1 + \ln|\tan 3x + \sec 3x| \sin 3x$$

Dengan demikian, penyelesaian umum dari PD tersebut adalah

$$y = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x + \ln|\tan 3x + \sec 3x| \sin 3x - 1$$

4. (a) PD diatas merupakan PD Cauchy-Euler. Misalkan $x = e^t$, sehingga $t = \ln x$. Dengan demikian, diperoleh

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

dan

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}$$

Substitusi ke dalam PD yang diberikan menghasilkan

$$x^2\left(-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2y}{dt^2}\right) - 3x\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) + 4y = x^2 - 2x$$

atau

$$-\frac{dy}{dt} + \frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 4y = e^{2t} - 2e^t$$

sehingga diperoleh PD dengan koefisien konstan:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2t} - 2e^t$$

(b) Pertama kita cari penyelesaian homogen dari persamaan diferensial tersebut, yaitu

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

dengan karakteristik persamaan $(r-2)^2 = 0$, sehingga diperoleh $r = 2$ (kembar). Dengan demikian, penyelesaian homogen dari PD tersebut adalah

$$y_h = (C_1 + C_2t)e^{2t}$$

Selanjutnya, kita cari penyelesaian partikular dari PD tersebut. Misalkan

$$y_p = Ae^{2t} + Be^t$$

sehingga

$$y_p' = 2Ae^{2t} + Be^t$$

dan

$$y_p'' = 4Ae^{2t} + Be^t$$

Substitusi ke dalam PD menghasilkan

$$(4Ae^{2t} + Be^t) - 4(2Ae^{2t} + Be^t) + 4(Ae^{2t} + Be^t) = e^{2t} - 2e^t$$

atau

$$(4A - 8A + 4A)e^{2t} + (B - 4B + 4B)e^t = e^{2t} - 2e^t$$

sehingga diperoleh

$$0e^{2t} + Be^t = e^{2t} - 2e^t$$

Dari persamaan di atas, diperoleh $B = -2$ dan tidak ada nilai untuk A karena koefisien di depan e^{2t} adalah 0. Oleh karena itu, kita dapat menyimpulkan bahwa

$$y_p = -2e^t$$

Dengan demikian, penyelesaian umum dari PD tersebut adalah

$$y = (C_1 + C_2t)e^{2t} - 2e^t$$

Kembali ke variabel x, diperoleh

$$y = (C_1 + C_2 \ln x)x^2 - 2x$$