



EVALUASI TENGAH SEMESTER GASAL 2024/2025  
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS  
PROGRAM SARJANA

M

Matakuliah : Analisis Fungsional  
Hari, Tanggal : Kamis, 17 Oktober 2024  
Waktu / Sifat : 100 menit / *Tertutup*  
Dosen : Dr. Mahmud Yunus, M.Si. dan Dr. Sunarsini, S.Si, M.Si

**HARAP DIPERHATIKAN !!!**

Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Diketahui  $(X, d)$  ruang metrik dan  $Y$  himpunan tertutup di  $X$ . Jika  $(X, d)$  ruang metrik lengkap, tunjukkan bahwa  $(Y, d)$  juga ruang metrik lengkap.
2. Misalkan  $V$  suatu ruang vektor bernaorma dan  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  himpunan vektor di  $V$  untuk suatu  $n \in \mathbb{N}$ . Jika terdapat konstanta  $A > 0$  sehingga ketaksamaan

$$A \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k v_k \right\|^2$$

berlaku untuk semua koefisien skalar  $c_1, \dots, c_n$ . Tunjukkan bahwa vektor-vektor  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  adalah bebas linear.

3. Pandang ruang vektor bernaorma  $(C[a, b], \|\cdot\|)$  dengan  $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$  untuk  $f \in C[a, b]$ . Didefinisikan operator  $T : C[a, b] \rightarrow C[a, b]$  dengan

$$(Tf)(x) := \int_a^x f(t) dt.$$

- (a) Tunjukkan bahwa  $T$  adalah operator linear.
- (b) Tunjukkan bahwa  $T$  injektif tetapi tidak surjektif.
- (c) Apakah  $T$  isometri? Berikan penjelasan.

4. Pandang  $V = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} : x_k \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}, \text{ dan hanya berhingga } x_k \text{ tak-nol}\}$ . Tunjukkan bahwa
  - (a)  $V$  merupakan sub-ruang dari  $\ell^1(\mathbb{N})$ ,
  - (b)  $V$  padat di  $\ell^1(\mathbb{N})$ ,
  - (c)  $V$  bukan himpunan tertutup dari  $\ell^1(\mathbb{N})$ .

## SOLUSI

1. Misalkan  $\{y_n\}$  adalah barisan Cauchy di  $Y$ . Karena  $Y \subset X$ , maka setiap suku barisan  $y_n$  adalah elemen di  $X$ . Karena  $(X, d)$  lengkap, maka pasti terdapat  $x \in X$  sehingga  $y_n \rightarrow x$  di  $X$ . Karena  $Y$  tertutup, maka haruslah  $Y$  memuat semua titik limitnya. Karena  $y_n$  konvergen ke  $x$ , maka haruslah  $x \in Y$ . Jadi, setiap barisan Cauchy di  $Y$  konvergen ke elemen di  $Y$ , sehingga  $(Y, d)$  lengkap.
2. Himpunan vektor  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  dikatakan bebas linear jika hanya solusi trivial yang memenuhi persamaan

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0.$$

Misalkan terdapat koefisien skalar  $c_1, c_2, \dots, c_n$  sedemikian sehingga

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan yang diberikan, diperoleh

$$A \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^n c_k v_k \right\|^2 = \|0\|^2 = 0.$$

Karena  $A > 0$ , maka haruslah  $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 = 0$ . Hal ini hanya mungkin terjadi jika setiap  $c_k = 0$  untuk semua  $k = 1, 2, \dots, n$ . Jadi, hanya solusi trivial yang ada, sehingga himpunan vektor  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  adalah bebas linear.

3. (a) Untuk setiap  $f, g \in C[a, b]$  dan skalar  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , kita punya

$$T(\alpha f + \beta g)(x) = \int_a^x (\alpha f(t) + \beta g(t)) dt = \alpha \int_a^x f(t) dt + \beta \int_a^x g(t) dt = \alpha(Tf)(x) + \beta(Tg)(x).$$

Jadi,  $T$  adalah operator linear.

- (b) Untuk menunjukkan bahwa  $T$  injektif, misalkan  $Tf = Tg$  untuk  $f, g \in C[a, b]$ . Maka untuk setiap  $x \in [a, b]$ , kita punya

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x g(t) dt.$$

Menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus, kita dapat menurunkan kedua sisi terhadap  $x$  untuk mendapatkan

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \int_a^x f(t) dt \right) &= \frac{d}{dx} \left( \int_a^x g(t) dt \right) \\ f(x) &= g(x). \end{aligned}$$

Karena ini berlaku untuk semua  $x \in [a, b]$ , maka  $f = g$ . Jadi,  $T$  adalah injektif.

Untuk menunjukkan bahwa  $T$  tidak surjektif, kita perlu menemukan fungsi di  $C[a, b]$  yang bukan image dari  $T$ . Misalkan kita ambil fungsi konstan  $h(x) = 1$  untuk setiap  $x \in [a, b]$ . Jika ada  $f \in C[a, b]$  sehingga  $Tf = h$ , maka kita harus memiliki

$$(Tf)(x) = \int_a^x f(t) dt = 1.$$

Namun, ini tidak mungkin karena integral dari fungsi kontinu tidak bisa menjadi konstan kecuali fungsi tersebut adalah nol hampir di mana-mana. Jadi,  $T$  tidak surjektif.

(c)  $T$  dikatakan isometri jika untuk setiap  $f \in C[a, b]$ , berlaku

$$\|Tf\| = \|f\|.$$

Namun, kita punya

$$\|Tf\| = \sup_{x \in [a, b]} |(Tf)(x)| = \sup_{x \in [a, b]} \left| \int_a^x f(t) dt \right|.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga untuk integral, kita dapat memperkirakan

$$\left| \int_a^x f(t) dt \right| \leq \int_a^x |f(t)| dt \leq (b-a)\|f\|.$$

Jadi,

$$\|Tf\| = \sup_{x \in [a, b]} |(Tf)(x)| \leq (b-a)\|f\|.$$

Ini menunjukkan bahwa  $T$  tidak mempertahankan norma secara tepat, sehingga  $T$  bukan isometri.

4. (a) Misalkan  $\{x_k\}, \{y_k\} \in V$  dan  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Selanjutnya kita tahu bahwa hanya berhingga  $x_k$  dan  $y_k$  yang tak-nol, katakanlah sebanyak  $M$  dan  $N$  berturut-turut ( $M, N < \infty$ ). Maka, untuk penjumlahan, kita punya

$$\{x_k\} + \{y_k\} = \{x_k + y_k\},$$

yang juga hanya memiliki paling banyak  $M+N$  suku tak-nol, sehingga  $\{x_k + y_k\} \in V$ . Untuk perkalian skalar, kita punya

$$\alpha\{x_k\} = \{\alpha x_k\},$$

yang juga hanya memiliki paling banyak  $M$  suku tak-nol, sehingga  $\{\alpha x_k\} \in V$ . Oleh karena itu,  $V$  adalah sub-ruang dari  $\ell^1(\mathbb{N})$ .

- (b) Misalkan  $\{y_k\} \in \ell^1(\mathbb{N})$ . Kita ingin menunjukkan bahwa untuk setiap  $\epsilon > 0$ , terdapat  $\{x_k\} \in V$  sedemikian sehingga

$$\|\{y_k\} - \{x_k\}\|_1 < \epsilon.$$

Karena  $\{y_k\} \in \ell^1(\mathbb{N})$  yang dimana elemen tak nol nya berhingga, maka jumlahan atau deret  $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|$  konvergen. Oleh karena itu, terdapat  $N \in \mathbb{N}$  sedemikian sehingga

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |y_k| < \epsilon.$$

Sekarang, kita definisikan  $\{x_k\} \in V$  sebagai

$$x_k = \begin{cases} y_k, & \text{jika } k \leq N, \\ 0, & \text{jika } k > N. \end{cases}$$

Dimana  $\{x_k\}$  hanya memiliki paling banyak  $N$  suku tak-nol, sehingga  $\{x_k\} \in V$ . Selanjutnya, kita hitung norma dari selisihnya:

$$\|\{y_k\} - \{x_k\}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k| = \sum_{k=N+1}^{\infty} |y_k| < \epsilon.$$

Jadi, untuk setiap  $\epsilon > 0$ , kita dapat menemukan  $\{x_k\} \in V$  sedemikian sehingga  $\|\{y_k\} - \{x_k\}\|_1 < \epsilon$ . Oleh karena itu,  $V$  padat di  $\ell^1(\mathbb{N})$ .

- (c) Akan kita tunjukkan dengan kontradiksi. Misalkan  $V$  adalah himpunan tertutup di  $\ell^1(\mathbb{N})$ . Karena  $V$  padat di  $\ell^1(\mathbb{N})$ , maka *closure* dari  $V$  adalah  $\ell^1(\mathbb{N})$  itu sendiri, yaitu  $\overline{V} = \ell^1(\mathbb{N})$ . Jika  $V$  tertutup, maka  $V = \overline{V} = \ell^1(\mathbb{N})$ . Namun, ini bertentangan dengan definisi  $V$  yang hanya berisi deret dengan elemen tak nol berhingga, sedangkan  $\ell^1(\mathbb{N})$  berisi semua deret yang konvergen secara absolut, termasuk yang memiliki elemen tak nol tak berhingga. Oleh karena itu, asumsi bahwa  $V$  adalah himpunan tertutup di  $\ell^1(\mathbb{N})$  adalah salah. Jadi,  $V$  bukan himpunan tertutup dari  $\ell^1(\mathbb{N})$ .