Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

Diberikan sistem persamaan diferensial non-linear non-homogen:

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + y + 2t,$$
$$\frac{dy}{dt} = y^2 - x + t^2.$$

Matriks Jacobian dari sistem tersebut adalah:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & 1 \\ -1 & 2y \end{bmatrix}.$$

Pada titik keseimbangan $(0, 0)$, diperoleh:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mencari nilai eigen dengan menyelesaikan:

$$\det(J - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0.$$

Solusi:

$$\lambda = \pm i.$$

Vektor eigen untuk $\lambda = i$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}.$$

Vektor eigen untuk $\lambda = -i$:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Solusi umum homogen:

$$\mathbf{x}_h(t) = c_1 e^{it} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} + c_2 e^{-it} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}.$$

Dengan identitas Euler $e^{it} = \cos(t) + i\sin(t)$, solusi homogen dalam bentuk real:

$$\mathbf{x}_h(t) = \begin{bmatrix} c_1 \cos(t) + c_2 \sin(t) \\ c_1 \sin(t) - c_2 \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Rumus solusi partikulir:

$$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t) \int \Phi^{-1}(t) \mathbf{g}(t)\, dt,$$

dengan:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}, \quad \Phi^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Bagian non-homogen:

$$\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} 2t \\ t^2 \end{bmatrix}.$$

Perkalian:

$$\Phi^{-1}(t)\mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2t \\ t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2t\cos(t) - t^2 \sin(t) \\ 2t \sin(t) + t^2 \cos(t) \end{bmatrix}.$$

Integrasi:

$$\int (2t\cos(t) - t^2\sin(t))\,dt = t^2\cos(t), \quad \int (2t\sin(t) + t^2\cos(t))\,dt = t^2\sin(t).$$

Solusi partikulir:

$$\mathbf{x}_p(t) = \Phi(t)\begin{bmatrix} t^2\cos(t) \\ t^2\sin(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t^2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Solusi lengkap dari sistem adalah:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_h(t) + \mathbf{x}_p(t) = \begin{bmatrix} c_1\cos(t) + c_2\sin(t) + t^2 \\ c_1\sin(t) - c_2\cos(t) \end{bmatrix}.$$