Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

3.2

4. Tunjukkan jika X dan Y suatu barisan yang sedemikian sehingga X konvergen ke $x \neq 0$ dan XY konvergen, maka Y juga konvergen.

   Jawab:
   Karena $XY = (x_n y_n)$ barisan konvergen, maka dapat diandaikan $\lim(x_n y_n) = z$ dan $\lim(x_n) = x \neq 0$.
   Selanjutnya perhatikan bahwa bahwa limit barisan Y adalah $\lim(y_n) = \lim(\frac{x_n y_n}{x_n})$. Dapat disimpulkan bahwa barisan Y konvergen ke $\frac{z}{x}$.

3.3

7. Misal $x_1 := a > 0$ dan $x_{n+1} = x_n + 1/x_n$ untuk $n \in \mathbb{N}$. Tentukan apakah (x_n) konvergen atau divergen.

   Jawab:
   Andaikan bahwa (x_n) konvergen ke L, sehingga $\lim(x_n) = L$. Menurut teorema ketunggalan limit diperoleh

   $$\begin{aligned}
   \lim(x_n) &= \lim(x_{n+1}) \\
   \lim(x_n) &= \lim(x_n + 1/x_n) \\
   \lim(x_n) &= \lim(x_n) + \lim(1/x_n) \\
   L &= L + 1/L \\
   0 &= 1/L \quad \textbf{(Kontradiksi)}
   \end{aligned}$$

   Jadi harusnlah (x_n) divergen.

3.4

9. Misalkan untuk setiap subbarisan dari $X = (x_n)$ memiliki subbarisan yang konvergen ke 0. Tunjukkan bahwa $\lim X = 0$.

   Jawab:
   Andaikan $\lim(x_n) = L \neq 0$, sehingga untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $K(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n \geq K(\epsilon) \in \mathbb{N}$ berlaku $|x_n - L| < \epsilon$.
   Menurut sebuah teorema, Jika $X = (x_n)$ konvergen ke L maka sebarang barisan bagian dari X juga konvergen ke $L \neq 0$. Namun hal ini kontradiksi bahwa setiap subbarisan dari $X = (x_n)$ memiliki subbarisan yang konvergen ke 0.

   $\therefore$ dapat disimpulkan barisan $X = (x_n)$ konvergen ke 0 atau $\lim X = 0$

3.5

4. Tunjukkan menurut definisi bahwa jika (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy, maka $(x_n + y_n)$ dan $(x_n y_n)$ juga merupakan barisan Cauchy.

   Jawab:
   Menurut definisi, barisan $A = (a_n)$ dikatakan barisan Cauchy jika untuk setiap $\epsilon > 0$, $\exists H(\epsilon) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall n, m \geq H(\epsilon)$ berlaku $|a_n - a_m| < \epsilon$.

(i) Untuk $(x_n + y_n)$ diberikan $\forall n, m \geq H(\epsilon)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| &= |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)| \\ &\leq |x_n - x_m| + |y_n - y_m|\end{aligned}$$

Karena (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy, maka

$$\begin{aligned}&\forall n, m \geq H(\epsilon)_x \Longrightarrow |x_n - x_m| < \epsilon/2 \\ &\qquad\qquad\text{dan} \\ &\forall n, m \geq H(\epsilon)_y \Longrightarrow |y_n - y_m| < \epsilon/2\end{aligned}$$

Sehingga untuk $H(\epsilon) = \sup\{H(\epsilon)_x, H(\epsilon)_y\}$ diperoleh

$$|x_n - x_m| + |y_n - y_m| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

Maka didapat $|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| < \epsilon$ yang dimana merupakan definisi bahwa $(x_n + y_n)$ adalah barisan Cauchy

(ii) Untuk $(x_n y_n)$ diberikan $\forall n, m \geq H(\epsilon)$, maka diperoleh

$$\begin{aligned}|x_n y_n - x_m y_m| &= |x_n y_n - x_m y_n + x_m y_n - x_m y_m| \\ &\leq |x_n y_n - x_m y_n| + |x_m y_n - x_m y_m| \\ &\leq |y_n||x_n - x_m| + |x_m||y_n - y_m|\end{aligned}$$

Sebuah teorema mengatakan *"jika barisan (a_n) konvergen maka barisan itu terbatas"*. Karena (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy, maka sudah tentu barisan itu konvergen juga terbatas. Sehingga didapat $|x_m| \leq M_x$ dan $|y_n| \leq M_y$, lalu dapat diambil $M = \sup\{M_x, M_y\}$ yang berakibat

$$|y_n||x_n - x_m| + |x_m||y_n - y_m| \leq M|x_n - x_m| + M|y_n - y_m|$$

Kembali lagi bahwa (x_n) dan (y_n) adalah barisan Cauchy, maka

$$\begin{aligned}&\forall n, m \geq H(\epsilon)_x \Longrightarrow |x_n - x_m| < \frac{\epsilon}{2M} \\ &\qquad\qquad\text{dan} \\ &\forall n, m \geq H(\epsilon)_y \Longrightarrow |y_n - y_m| < \frac{\epsilon}{2M}\end{aligned}$$

Sehingga untuk $H(\epsilon) = \sup\{H(\epsilon)_x, H(\epsilon)_y\}$ diperoleh

$$M|x_n - x_m| + M|y_n - y_m| < M\left(\frac{\epsilon}{2M}\right) + M\left(\frac{\epsilon}{2M}\right) = \epsilon$$

Maka didapat $|(x_n y_n) - (x_m y_m)| < \epsilon$ yang dimana merupakan definisi bahwa $(x_n y_n)$ adalah barisan Cauchy