

## Contoh Ruang Metrik Lengkap

Buktikan bahwa Ruang Metrik dengan himpunan  $[0, 1] \times [0, 1]$  dan fungsi

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min\{1, \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}\},$$

adalah ruang metrik lengkap.

**Bukti.** Sebelumnya kita tahu bahwa jika  $(X, l)$  merupakan ruang metrik, maka  $(X, \min\{1, l\})$  juga merupakan ruang metrik. Sehingga dapat disimpulkan bahwa  $([0, 1] \times [0, 1], d)$  adalah ruang metrik.

Selanjutnya misalkan barisan  $(\mathbf{x}_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n, y_n)$  adalah barisan Cauchy sehingga untuk setiap  $\varepsilon > 0$  terdapat  $n, m > N$  yang berakibat

$$d(\mathbf{x}_n, \mathbf{x}_m) < \varepsilon$$

Perhatikan Teorema berikut

**Teorema.** Misalkan  $(M, d)$  adalah ruang metrik lengkap, dan misalkan  $X$  adalah subhimpunan dari  $M$ . Subruang  $(X, d)$  adalah ruang metrik lengkap jika dan hanya jika  $X$  adalah subhimpunan tertutup dari  $M$ .

Dari teorema di atas, dapat diingat bahwa  $(\mathbb{R}^2, d)$  adalah ruang metrik lengkap dan  $[0, 1] \times [0, 1]$  adalah subhimpunan tertutup dari  $\mathbb{R}^2$ . Sehingga  $([0, 1] \times [0, 1], d)$  adalah ruang metrik lengkap. ■