1. Tinjau persamaan

$$u_{xx} + 2u_{xy} + [1 - q(y)]u_{yy} = 0,$$

   dengan

$$q(y) = \begin{cases} -1, & y < -1, \\ 0, & |y| \leq 1, \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

   (a) Tentukan domain-domain di mana persamaan tersebut bersifat hiperbolik, parabolik, dan eliptik.

   (b) Untuk masing-masing dari tiga domain tersebut, tentukan transformasi kanonik dan bentuk kanoniknya.

   (c) Gambarlah garis karakteristik untuk kasus hiperbolik.

2. Tinjau persamaan

$$u_{xx} - 6u_{xy} + 9u_{yy} = xy^2.$$

   (a) Carilah sistem koordinat (s, t) sehingga persamaan tersebut berbentuk:

$$9v_{tt} = \frac{1}{3}(s - t)t^2.$$

   (b) Carilah solusi umum $u(x, y)$.

   (c) Carilah solusi dari persamaan yang memenuhi kondisi awal:

$$u(x, 0) = \sin x, \quad u_y(x, 0) = \cos x, \quad \text{untuk semua } x \in \mathbb{R}.$$

SOLUSI

1. Diketahui $A = 1$, $B = 2$, $C = 1 - q(y)$

   (a) • Untuk hiperbolik haruslah $B^2 - 4AC > 0$:

   $$B^2-4AC = 2^2-4(1)(1-q(y)) = 4-4+4q(y) = 4q(y) > 0 \Rightarrow q(y) > 0.$$

   Hal ini terjadi untuk $y > 1$. Jadi domain hiperbolik adalah $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 1\}$.

   • Untuk parabolik haruslah $B^2 - 4AC = 0$:

   $$B^2-4AC = 2^2-4(1)(1-q(y)) = 4-4+4q(y) = 4q(y) = 0 \Rightarrow q(y) = 0.$$

   Hal ini terjadi untuk $|y| \le 1$. Jadi domain parabolik adalah $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| \le 1\}$.

   • Untuk eliptik haruslah $B^2 - 4AC < 0$:

   $$B^2-4AC = 2^2-4(1)(1-q(y)) = 4-4+4q(y) = 4q(y) < 0 \Rightarrow q(y) < 0.$$

   Hal ini terjadi untuk $y < -1$. Jadi domain eliptik adalah $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -1\}$.

   (b) Ingat bahwa

   • Hiperbolik terjadi saat $q(y) = 1$ yang artinya persamaan tersebut berbentuk

   $$u_{xx} + 2u_{xy} = 0.$$

   Dari persamaan kuadratik diperoleh

   $$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{2 + \sqrt{4}}{2} = 2,$$
   $$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{2 - \sqrt{4}}{2} = 0.$$

   Kemudian didapatkan hasil integrasi

   $$\xi(x, y) = y - 2x = c_1,$$
   $$\eta(x, y) = y = c_2.$$

   Setelah itu, kita dapatkan turunan

   $$\begin{aligned} &\xi_x = -2, && \eta_x = 0, && \xi_y = 1, && \eta_y = 1, \\ &\xi_{xx} = 0, && \eta_{xx} = 0, && \xi_{xy} = 0, && \eta_{xy} = 0, \\ &\xi_{yy} = 0, && \eta_{yy} = 0. \end{aligned}$$

   Lebih lanjut, substitusi ke dalam variabel transformasi yaitu

   $$A^* = C^* = D^* = E^* = F^* = G^* = 0,$$
   $$B^* = -4$$

Terakhir adalah persamaan kanoniknya yaitu

$$\begin{aligned} A^*w_{\xi\xi} + B^*w_{\xi\eta} + C^*w_{\eta\eta} + D^*w_\xi + E^*w_\eta + F^*w + G^* &= 0 \\ -4w_{\xi\eta} &= 0 \\ w_{\xi\eta} &= 0. \end{aligned}$$

- Parabolik terjadi saat $q(y) = 0$ yang artinya persamaan tersebut berbentuk

  $$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0.$$

  Dari persamaan kuadratik diperoleh

  $$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} = \frac{2}{2} = 1$$

  Kemudian didapatkan hasil integrasi

  $$\xi(x, y) = y - x = c_1$$

  Pilih fungsi $\eta(x, y) = x = c_2$ agar solusinya nanti tunggal. Hal ini dapat dicek menggunakan jacobian

  $$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

  Setelah itu, kita dapatkan turunan

  $$\begin{aligned} &\xi_x = -1, && \eta_x = 1, && \xi_y = 1, && \eta_y = 0, \\ &\xi_{xx} = 0, && \eta_{xx} = 0, && \xi_{xy} = 0, && \eta_{xy} = 0, \\ &\xi_{yy} = 0, && \eta_{yy} = 0. \end{aligned}$$

  Lebih lanjut, substitusi ke dalam variabel transformasi yaitu

  $$\begin{aligned} &A^* = B^* = D^* = E^* = F^* = G^* = 0, \\ &C^* = 1. \end{aligned}$$

  Terakhir adalah persamaan kanoniknya yaitu

  $$\begin{aligned} A^*w_{\xi\xi} + B^*w_{\xi\eta} + C^*w_{\eta\eta} + D^*w_\xi + E^*w_\eta + F^*w + G^* &= 0 \\ w_{\eta\eta} &= 0. \end{aligned}$$

- Eliptik terjadi saat $q(y) = -1$ yang artinya persamaan tersebut berbentuk

  $$u_{xx} + 2u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$$

  Dari persamaan kuadratik diperoleh

  $$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{2 + \sqrt{-4}}{2} = 1 + i, \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{2 - \sqrt{-4}}{2} = 1 - i. \end{aligned}$$

Kemudian didapatkan hasil integrasi

$$\alpha = y - (1+i)x = c_1,$$
$$\beta = y - (1-i)x = c_2.$$

Diperoleh fungsi $\xi(x,y)$ dan $\eta(x,y)$ adalah

$$\xi(x,y) = \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{[y-(1+i)x]+[y-(1-i)x]}{2} = y - x,$$
$$\eta(x,y) = \frac{\alpha-\beta}{2i} = \frac{[y-(1+i)x]-[y-(1-i)x]}{2i} = x.$$

Setelah itu, kita dapatkan turunan

$$\begin{aligned} \xi_x &= -1, & \eta_x &= 1, & \xi_y &= 1, & \eta_y &= 0, \\ \xi_{xx} &= 0, & \eta_{xx} &= 0, & \xi_{xy} &= 0, & \eta_{xy} &= 0, \\ \xi_{yy} &= 0, & \eta_{yy} &= 0. \end{aligned}$$

Lebih lanjut, substitusi ke dalam variabel transformasi yaitu

$$A^* = C^* = 1,$$
$$B^* = D^* = E^* = F^* = G^* = 0.$$

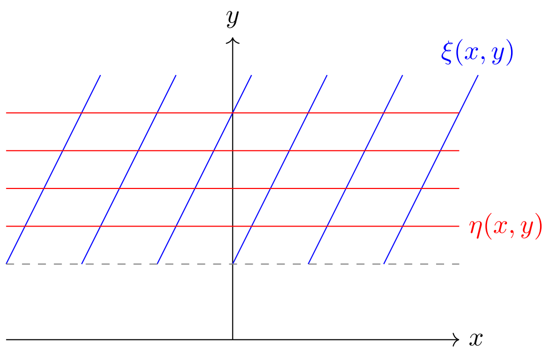
Terakhir adalah persamaan kanoniknya yaitu

$$A^* w_{\xi\xi} + B^* w_{\xi\eta} + C^* w_{\eta\eta} + D^* w_\xi + E^* w_\eta + F^* w + G^* = 0$$
$$w_{\xi\xi} + w_{\eta\eta} = 0.$$

(c) Karakteristik untuk kasus hiperbolik adalah garis-garis yang memenuhi persamaan

$$\xi(x,y) = y - 2x, \quad \eta(x,y) = y$$

untuk $y > 1$. Dengan kata lain, garis-garis tersebut adalah garis-garis yang sejajar dengan garis $y = 2x + c_1$ dan $y = c_2$ untuk $c \in \mathbb{R}$.



2. Persamaan yang diberikan adalah

$$u_{xx} \; - \; 6\,u_{xy} \; + \; 9\,u_{yy} \; = \; x\,y^2.$$

   (a) Cari sistem koordinat (s, t) sehingga persamaan menjadi

$$9\,v_{tt} \; = \; \tfrac{1}{3}\,(s - t)\,t^2.$$

Di sini kita akan melakukan transformasi perubahan variabel dari (x, y) ke (s, t). Karena koefisien bagian diferensial memenuhi

$$A \; = \; 1, \quad B \; = \; -3, \quad C \; = \; 9 \quad \Longrightarrow \quad B^2 - A\,C \; = \; 9 - 9 \; = \; 0,$$

maka persamaan ini bersifat parabolik, dan karakteristik tunggalnya adalah

$$\frac{dy}{dx} \; = \; -3 \quad \Longrightarrow \quad y + 3\,x = c_1$$

Jadi kita dapat memilih salah satu variabel baru (misalnya s) sebagai

$$s \; = \; y \; + \; 3\,x,$$

dan variabel bebas kedua kita pilih sebagai

$$t \; = \; x.$$

Dengan demikian, kita mendefinisikan

$$\begin{cases} s \; = \; y + 3\,x, \\ t \; = \; x. \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x \; = \; t, \\ y \; = \; s \; - \; 3\,t. \end{cases}$$

Sekarang kita tulis $u(x, y)$ sebagai fungsi $v(s, t)$:

$$u(x, y) \; = \; v\big(s(x, y),\, t(x, y)\big) \; = \; v\big(\,y + 3\,x,\; x\big).$$

Langkah selanjutnya adalah menghitung turunan parsial u_{xx}, u_{xy}, u_{yy} dalam bentuk turunan parsial v_{ss}, v_{st}, v_{tt}.
Hitung dulu turunan pertama

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial v}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial x} \; + \; \frac{\partial v}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial x} \; = \; v_s \cdot 3 \; + \; v_t \cdot 1 \; = \; 3\,v_s \; + \; v_t, \\ u_y &= \frac{\partial v}{\partial s}\,\frac{\partial s}{\partial y} \; + \; \frac{\partial v}{\partial t}\,\frac{\partial t}{\partial y} \; = \; v_s \cdot 1 \; + \; v_t \cdot 0 \; = \; v_s. \end{aligned}$$

Untuk turunan kedua, didapatkan

$$\begin{aligned}
u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\big(3\,v_s + v_t\big) = 3\,\big(v_{ss}\,\tfrac{\partial s}{\partial x} + v_{st}\,\tfrac{\partial t}{\partial x}\big) \;+\; \big(v_{ts}\,\tfrac{\partial s}{\partial x} + v_{tt}\,\tfrac{\partial t}{\partial x}\big) \\
&= 3\,\big(v_{ss}\cdot 3 + v_{st}\cdot 1\big) \;+\; \big(v_{ts}\cdot 3 + v_{tt}\cdot 1\big) \\
&= 9\,v_{ss} \;+\; 3\,v_{st} \;+\; 3\,v_{ts} \;+\; v_{tt} \;=\; 9\,v_{ss} \;+\; 6\,v_{st} \;+\; v_{tt} \\
u_{xy} &= 3\,\big(v_{ss}\,\tfrac{\partial s}{\partial y} + v_{st}\,\tfrac{\partial t}{\partial y}\big) \;+\; \big(v_{ts}\,\tfrac{\partial s}{\partial y} + v_{tt}\,\tfrac{\partial t}{\partial y}\big) \\
&= 3\,\big(v_{ss}\cdot 1 + v_{st}\cdot 0\big) \;+\; \big(v_{ts}\cdot 1 + v_{tt}\cdot 0\big) \\
&= 3\,v_{ss} \;+\; v_{ts} \\
&= 3\,v_{ss} \;+\; v_{st} \\
u_{yy} &= v_{ss}\,\frac{\partial s}{\partial y} + v_{st}\,\frac{\partial t}{\partial y} \\
&= v_{ss}\cdot 1 + v_{st}\cdot 0 \\
&= v_{ss}
\end{aligned}$$

Subtitusi ke PDP awal

$$\begin{aligned}
u_{xx} \;-\; 6\,u_{xy} \;+\; 9\,u_{yy} &= \big(9\,v_{ss} + 6\,v_{st} + v_{tt}\big) \;-\; 6\,\big(3\,v_{ss} + v_{st}\big) \;+\; 9\,\big(v_{ss}\big) \\
&= 9\,v_{ss} + 6\,v_{st} + v_{tt} \;-\; 18\,v_{ss} - 6\,v_{st} \;+\; 9\,v_{ss} \\
&= \big(9 - 18 + 9\big)\,v_{ss} \;+\; \big(6 - 6\big)\,v_{st} \;+\; v_{tt} \;=\; v_{tt}.
\end{aligned}$$

Dengan demikian, di dalam variabel (s,t) kita peroleh

$$u_{xx} - 6\,u_{xy} + 9\,u_{yy} \;=\; v_{tt}.$$

Sisi kanan persamaan awal adalah $x\,y^2$. Karena $x = t$ dan $y = s - 3\,t$, maka

$$x\,y^2 = t\cdot\big(s - 3\,t\big)^2.$$

Jadi PDE transformasi menjadi

$$v_{tt} \;=\; t\,\big(s - 3\,t\big)^2.$$

Jika kita mengalikan kedua ruas dengan 9, diperoleh bentuk yang diinginkan:

$$9\,v_{tt} \;=\; 9\,t\,\big(s - 3\,t\big)^2.$$

karena inilah bentuk kanonik yang sahih dari transformasi $s = y + 3x,\ t = x$.

(b) Cari solusi umum $u(x,y)$

Karena $v_{tt} = t\,(s - 3\,t)^2$, kita anggap s sebagai parameter konstan saat mengintegrasi terhadap t. Langkah-langkah integrasinya:

$$v_{tt} \;=\; t\,\big(s - 3\,t\big)^2 = t\,\big(s^2 - 6\,s\,t + 9\,t^2\big) \;=\; s^2\,t \;-\; 6\,s\,t^2 \;+\; 9\,t^3.$$

Integrasikan sekali terhadap t:

$$v_t(s,t) = \int \left(s^2\,t \;-\; 6\,s\,t^2 \;+\; 9\,t^3\right) dt = \frac{s^2\,t^2}{2} \;-\; 2\,s\,t^3 \;+\; \frac{9\,t^4}{4} \;+\; A(s),$$

di mana $A(s)$ adalah "konstanta integrasi" yang boleh bergantung pada s, karena kita hanya mengintegrasi terhadap t.

$$v(s,t) = \int v_t(s,t)\; dt = \int \Big(\frac{s^2\,t^2}{2} \;-\; 2\,s\,t^3 \;+\; \frac{9\,t^4}{4} \;+\; A(s)\Big)\, dt.$$

Hitung satu per satu: - $\int \frac{s^2\,t^2}{2}\,dt = \frac{s^2}{2}\cdot\frac{t^3}{3} = \frac{s^2\,t^3}{6}$. - $\int \left(-2\,s\,t^3\right) dt = -2\,s\cdot\frac{t^4}{4} = -\frac{s\,t^4}{2}$. - $\int \frac{9\,t^4}{4}\,dt = \frac{9}{4}\cdot\frac{t^5}{5} = \frac{9\,t^5}{20}$. - $\int A(s)\,dt = A(s)\,t + B(s)$, di mana $B(s)$ adalah konstanta integrasi kedua (boleh bergantung pada s).

Dengan demikian:

$$v(s,t) = \frac{s^2\,t^3}{6} \;-\; \frac{s\,t^4}{2} \;+\; \frac{9\,t^5}{20} \;+\; A(s)\,t \;+\; B(s).$$

Kita sudah menetapkan

$$s = y + 3\,x, \quad t = x, \quad \text{dan} \quad u(x,y) = v\big(y + 3\,x,\; x\big).$$

Jadi solusi umum $u(x,y)$ adalah:

$$\boxed{u(x,y) \;=\; \frac{\big(y+3\,x\big)^2\,x^3}{6} \;-\; \frac{\big(y+3\,x\big)\,x^4}{2} \;+\; \frac{9\,x^5}{20} \;+\; A\big(y+3\,x\big)\,x \;+\; B\big(y+3\,x\big)\,,}$$

di mana A dan B adalah dua fungsi bebas satu variabel (masing-masing bergantung hanya pada $s = y + 3x$).

(c) Solusi khusus yang memenuhi kondisi awal

$$u(x,0) \;=\; \sin x, \qquad u_y(x,0) \;=\; \cos x, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Kita substitusikan $y = 0$ (oleh karena itu $s = y + 3x = 3x$ dan $t = x$) ke dalam bentuk solusi umum, lalu terapkan kondisi awal untuk menentukan fungsi $A(s)$ dan $B(s)$.

Bila $y = 0$, maka $s = 3x$ dan $t = x$. Dari solusi umum:

$$u(x,0) = \frac{(3x)^2\,x^3}{6} \;-\; \frac{(3x)\,x^4}{2} \;+\; \frac{9\,x^5}{20} \;+\; A(3x)\,x \;+\; B(3x).$$

Hitung suku-suku pangkat x: - $\frac{(3x)^2\,x^3}{6} = \frac{9\,x^2\,x^3}{6} = \frac{9\,x^5}{6} = \frac{3\,x^5}{2}$. - $-\frac{(3x)\,x^4}{2} = -\frac{3\,x^5}{2}$. - $\frac{9\,x^5}{20}$ tetap.

Jadi

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \left(\tfrac{3\,x^5}{2} - \tfrac{3\,x^5}{2} + \tfrac{9\,x^5}{20}\right) + A(3x)\,x + B(3x) \\ &= \frac{9\,x^5}{20} + A(3x)\,x + B(3x). \end{aligned}$$

Tetapi kita ingin $u(x,0) = \sin x$. Dengan demikian:

$$\frac{9\,x^5}{20} + A(3x)\,x + B(3x) = \sin x, \quad \forall\, x.$$

Susun ulang:

$$A(3x)\,x + B(3x) = \sin x - \frac{9\,x^5}{20}.$$

Definisikan $s = 3x$. Maka $x = s/3$. Tuliskan:

$$A(s)\left(\tfrac{s}{3}\right) + B(s) = \sin\!\left(\tfrac{s}{3}\right) - \frac{9\left(\tfrac{s}{3}\right)^5}{20}.$$

Atau

$$\frac{s}{3}\,A(s) + B(s) = \sin\!\left(\tfrac{s}{3}\right) - \frac{9}{20}\,\frac{s^5}{3^5} = \sin\!\left(\tfrac{s}{3}\right) - \frac{9\,s^5}{20 \cdot 243}.$$

Karena $20 \cdot 243 = 4860$, suku polinomialnya menjadi $\frac{9}{4860}\,s^5 = \frac{s^5}{540}$. Jadi secara ringkas:

$$\frac{s}{3}\,A(s) + B(s) = \sin\!\left(\tfrac{s}{3}\right) - \frac{s^5}{540}.$$

Kita tidak dapat mengekstrak $A(s)$ dan $B(s)$ secara unik dari satu persamaan—karena ada dua fungsi tak tentu. Namun, ingat kita masih punya kondisi awal kedua berupa $u_y(x,0)$. Kita akan memanfaatkan itu untuk mendapatkan persamaan tambahan.

Dari identitas umum:

$$u(x,y) = v\big(s,y\big) = v\big(y + 3x,\ x\big),$$

kita dapat menurunkan u_y. Tetapi kita sudah menghitung di atas:

$$u_y(x,y) = v_s(s,t)\,\frac{\partial s}{\partial y} + v_t(s,t)\,\frac{\partial t}{\partial y} = v_s(s,t)\cdot 1 + v_t(s,t)\cdot 0 = v_s(s,t).$$

Jadi cukup kita hitung

$$v_s(s,t) = \frac{\partial}{\partial s}\Big[\tfrac{s^2\,t^3}{6} - \tfrac{s\,t^4}{2} + \tfrac{9\,t^5}{20} + A(s)\,t + B(s)\Big].$$

Turunan terhadap s (anggap t konstan) menghasilkan:

$$\begin{aligned} v_s(s,t) &= \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{s^2\,t^3}{6}\right) - \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{s\,t^4}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\left(\tfrac{9\,t^5}{20}\right) + \frac{\partial}{\partial s}\big(A(s)\,t\big) + \frac{\partial}{\partial s}B(s) \\ &= \tfrac{2\,s\,t^3}{6} - \tfrac{t^4}{2} + 0 + A'(s)\,t + B'(s) \\ &= \frac{s\,t^3}{3} - \frac{t^4}{2} + t\,A'(s) + B'(s). \end{aligned}$$

Sekarang kita terapkan $y = 0$, maka $s = y + 3x = 3x$, $t = x$. Dengan $u_y(x, 0) = v_s(3x,\, x)$, kita mesti memenuhi:

$$\begin{aligned} u_y(x,0) &= v_s\big(3x,\ x\big) \\ &= \frac{(3x)\,x^3}{3} \;-\; \frac{x^4}{2} \;+\; x\,A'(3x) \;+\; B'(3x) \\ &= x^4 \;-\; \frac{x^4}{2} \;+\; x\,A'(3x) \;+\; B'(3x) \\ &= \frac{x^4}{2} \;+\; x\,A'(3x) \;+\; B'(3x). \end{aligned}$$

Karena $\frac{(3x)\,x^3}{3} = x^4 \cdot \frac{3}{3} = x^4$. Jadi detailnya:

$$\frac{(3x)\,x^3}{3} = x^4, \quad \text{dan} \quad x^4 - \frac{x^4}{2} = \frac{x^4}{2}.$$

Artinya

$$v_s(3x,\, x) = \frac{x^4}{2} \;+\; x\,A'(3x) \;+\; B'(3x).$$

Kita ingin $u_y(x, 0) = \cos x$. Maka

$$\frac{x^4}{2} \;+\; x\,A'(3x) \;+\; B'(3x) \;=\; \cos x, \quad \forall\, x.$$

Kita gantikan lagi $s = 3x \to x = s/3$. Sehingga

$$\frac{\left(\frac{s}{3}\right)^4}{2} \;+\; \left(\tfrac{s}{3}\right) A'(s) \;+\; B'(s) \;=\; \cos\!\left(\tfrac{s}{3}\right).$$

$$\frac{s^4}{2 \cdot 3^4} + \frac{s}{3}\,A'(s) + B'(s) = \cos\!\left(\tfrac{s}{3}\right).$$

Karena $3^4 = 81$, maka $\frac{s^4}{2 \cdot 81} = \frac{s^4}{162}$. Jadi

$$\frac{s^4}{162} + \frac{s}{3}\,A'(s) + B'(s) = \cos\!\left(\tfrac{s}{3}\right).$$

Kita sudah punya dua persamaan fungsi untuk A dan B (dalam variabel s):

- Dari kondisi $u(x, 0) = \sin x$, diperoleh

$$\frac{s}{3}\,A(s) \;+\; B(s) \;=\; \sin\!\left(\tfrac{s}{3}\right) \;-\; \frac{s^5}{540}, \tag{I}$$

di mana $s = 3x$.

- Dari kondisi $u_y(x, 0) = \cos x$, diperoleh

$$\frac{s^4}{162} \;+\; \frac{s}{3}\,A'(s) \;+\; B'(s) = \cos\!\left(\tfrac{s}{3}\right). \tag{II}$$

Turunkan di kedua ruas:

$$\frac{d}{ds}\Big(\frac{s}{3}\,A(s) + B(s)\Big) = \frac{d}{ds}\Big(\sin\!\left(\tfrac{s}{3}\right) - \tfrac{s^5}{540}\Big).$$

- Orbit kiri:

$$\frac{d}{ds}\Big(\tfrac{s}{3}\,A(s)\Big) + B'(s) = \frac{1}{3}\,A(s) + \frac{s}{3}\,A'(s) + B'(s).$$

- Orbit kanan:

$$\frac{d}{ds}\,\sin\!\big(\tfrac{s}{3}\big) - \frac{d}{ds}\Big(\tfrac{s^5}{540}\Big) = \cos\!\big(\tfrac{s}{3}\big)\cdot\frac{1}{3} \;-\; \frac{5\,s^4}{540} = \frac{1}{3}\,\cos\!\big(\tfrac{s}{3}\big) \;-\; \frac{s^4}{108}.$$

Maka persamaan turunan (I) menjadi:

$$\frac{1}{3}\,A(s) \;+\; \frac{s}{3}\,A'(s) \;+\; B'(s) \;=\; \frac{1}{3}\,\cos\!\big(\tfrac{s}{3}\big) \;-\; \frac{s^4}{108}. \qquad \text{(III)}$$

Persamaan (II) adalah:

$$\frac{s^4}{162} \;+\; \frac{s}{3}\,A'(s) \;+\; B'(s) = \cos\!\big(\tfrac{s}{3}\big).$$

Kurangkan (III) dari (II) untuk menghilangkan $\frac{s}{3}A'(s)+B'(s)$. Kita lakukan

$$\big[\text{(II)}\big] \;-\; \big[\text{(III)}\big]:$$

$$\Big(\tfrac{s^4}{162}+\tfrac{s}{3}A'(s)+B'(s)\Big) - \Big(\tfrac{1}{3}A(s)+\tfrac{s}{3}A'(s)+B'(s)\Big) = \cos\!\big(\tfrac{s}{3}\big) - \Big[\tfrac{1}{3}\cos\!\big(\tfrac{s}{3}\big)-\tfrac{s^4}{108}\Big].$$

Di ruas kiri, $\frac{s}{3}A'(s) + B'(s)$ saling batal:

$$\frac{s^4}{162} \;-\; \frac{1}{3}\,A(s) \;=\; \cos\!\big(\tfrac{s}{3}\big) \;-\; \frac{1}{3}\,\cos\!\big(\tfrac{s}{3}\big) \;+\; \frac{s^4}{108}.$$

$$\frac{s^4}{162} \;-\; \frac{1}{3}A(s) = \frac{2}{3}\,\cos\!\big(\tfrac{s}{3}\big) \;+\; \frac{s^4}{108}.$$

Gabungkan suku s^4:

$$\frac{s^4}{162} \;-\; \frac{s^4}{108} = \frac{1}{3}\,A(s) \;+\; \frac{2}{3}\,\cos\!\big(\tfrac{s}{3}\big).$$

Karena $\frac{1}{162} - \frac{1}{108} = \frac{1}{162} - \frac{1.5}{162} = -\,\frac{0.5}{162} = -\,\frac{1}{324}$, maka

$$-\,\frac{s^4}{324} = \frac{1}{3}\,A(s) \;+\; \frac{2}{3}\,\cos\!\big(\tfrac{s}{3}\big).$$

Kalikan kedua ruas dengan 3:

$$-\,\frac{s^4}{108} = A(s) \;+\; 2\,\cos\!\big(\tfrac{s}{3}\big).$$

Jadi kita peroleh

$$\boxed{A(s) \;=\; -\,\frac{s^4}{108} \;-\; 2\,\cos\!\big(\tfrac{s}{3}\big)\,.} \qquad \text{(IV)}$$

Persamaan (I) adalah:

$$\frac{s}{3}\,A(s) \;+\; B(s) = \sin\!\big(\tfrac{s}{3}\big) \;-\; \frac{s^5}{540}.$$

Gantikan $A(s) = -\frac{s^4}{108} - 2\cos\left(\frac{s}{3}\right)$:

$$\frac{s}{3}\left(-\,\tfrac{s^4}{108}\;-\;2\,\cos\!\left(\tfrac{s}{3}\right)\right)\;+\;B(s) = \sin\!\left(\tfrac{s}{3}\right)\;-\;\frac{s^5}{540}.$$

Hitung $\frac{s}{3}\cdot\left(-\frac{s^4}{108}\right) = -\frac{s^5}{324}$, dan $\frac{s}{3}\cdot\left(-2\cos\left(\frac{s}{3}\right)\right) = -\frac{2\,s}{3}\,\cos\!\left(\frac{s}{3}\right)$. Jadi:

$$-\,\frac{s^5}{324}\;-\;\frac{2\,s}{3}\,\cos\!\left(\tfrac{s}{3}\right)\;+\;B(s) = \sin\!\left(\tfrac{s}{3}\right)\;-\;\frac{s^5}{540}.$$

Pindahkan semua suku ke satu sisi untuk mengekspresikan $B(s)$:

$$B(s) = \sin\!\left(\tfrac{s}{3}\right)\;-\;\frac{s^5}{540}\;+\;\frac{s^5}{324}\;+\;\frac{2\,s}{3}\,\cos\!\left(\tfrac{s}{3}\right).$$

Gabungkan $-\frac{s^5}{540} + \frac{s^5}{324}$. Perhatikan:

$$\tfrac{1}{324} - \tfrac{1}{540} = \frac{5-3}{1620} = \frac{2}{1620} = \frac{1}{810}.$$

Jadi

$$-\,\frac{s^5}{540}\;+\;\frac{s^5}{324} = \frac{s^5}{810}.$$

Maka

$$\boxed{B(s) = \sin\!\left(\tfrac{s}{3}\right)\;+\;\frac{s^5}{810}\;+\;\frac{2\,s}{3}\,\cos\!\left(\tfrac{s}{3}\right).} \tag{V}$$

Dengan demikian, kita telah menemukan ekspresi eksplisit untuk $A(s)$ dan $B(s)$. Ringkasnya:

$$\begin{cases} A(s) = -\,\frac{s^4}{108}\;-\;2\,\cos\!\left(\frac{s}{3}\right), \\ B(s) = \sin\!\left(\frac{s}{3}\right)\;+\;\frac{s^5}{810}\;+\;\frac{2\,s}{3}\,\cos\!\left(\frac{s}{3}\right). \end{cases}$$

Ingat kembali bahwa $s = y + 3\,x$.

Perhatikan bahwa solusi umum:

$$u(x,y) = \frac{(y+3x)^2\,x^3}{6} - \frac{(y+3x)\,x^4}{2} + \frac{9\,x^5}{20} + A\big(y{+}3x\big)\,x + B\big(y{+}3x\big).$$

Sekarang masukkan A dan B sesuai (IV) dan (V). Ingat $s = y + 3x$. Maka

$$\boxed{\begin{aligned} u(x,y) \;=\; & \frac{(y+3x)^2\,x^3}{6} \;-\; \frac{(y+3x)\,x^4}{2} \;+\; \frac{9\,x^5}{20} \\ & -\left(\tfrac{(y+3x)^4}{108} + 2\,\cos\!\left(\tfrac{y+3x}{3}\right)\right)x \\ & +\left[\sin\!\left(\tfrac{y+3x}{3}\right)\;+\;\frac{(y+3x)^5}{810}\;+\;\frac{2\,(y+3x)}{3}\,\cos\!\left(\tfrac{y+3x}{3}\right)\right]. \end{aligned}}$$