EVALUASI AKHIR SEMESTER GASAL 2024/2025
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS
PROGRAM SARJANA

Matakuliah	:	Analisis 1
Hari, Tanggal	:	Kamis, 12 Desember 2024
Waktu / Sifat	:	100 menit / *Closed Book*
Kelas, Dosen	:	A. Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
		B. Drs. Sadjidon, M.Si.
		C. Dr. Sunarsini, M.Si.
		D. Dr. Rinurwati, M.Si.

HARAP DIPERHATIKAN !!!
Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Dengan menggunakan definisi barisan Cauchy, buktikan bahwa $(x_n) = \left(1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$ adalah barisan Cauchy. (Petunjuk: $2^n \leq (n+1)!$, $\forall n \in \mathbb{N}$).

2. Didefinisikan fungsi g dengan
$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \text{ rasional,} \\ 1, & \text{jika } x \text{ irrasional.} \end{cases}$$
Tunjukkan bahwa $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ tidak ada untuk semua $a \in \mathbb{R}$.

3. Jika $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ suatu fungsi kontinu yang hanya bernilai rasional, tunjukkan bahwa f adalah fungsi konstan.

4. Diberikan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dan $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dua fungsi kontinu pada interval $[0,1]$. Tunjukkan bahwa himpunan $E := \{x \in [0,1] : f(x) = g(x)\}$ mempunyai sifat bahwa jika $(x_n) \subseteq E$ dan $x_n \to x_0$ maka $x_0 \in E$.

5. Diberikan $A = [3, \infty)$ dan fungsi $f : A \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = \frac{1}{2x}$. Buktikan bahwa f kontinu seragam pada A.

—o0o—

Solusi:

1. Misalkan $\epsilon > 0$ dan $m, n \in \mathbb{N}$. Tanpa mengurangi keumuman misalkan $n > m$. Perhatikan bahwa
$$|x_n - x_m| = \left|\frac{1}{(m+1)!} + \frac{1}{(m+2)!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!}\right|.$$
Gunakan petunjuk di soal yaitu
$$2^{k-1} \leq k! \iff \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$$
sehingga
$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!}\right| = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}}$$
Agar lebih mudah dihitung, dapat kita tinjau jumlahan diatas menjadi jumlahan tak hingga
$$\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{2^{k-1}} \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{m-1}}$$
Selanjutnya kita tahu bahwa $m \leq 2^{m-1}$ untuk setiap $m \in \mathbb{N}$, sehingga
$$|x_n - x_m| \leq \frac{1}{2^{m-1}} \leq \frac{1}{m}.$$
Jadi menggunakan sifat Archimedes, pasti $N \in \mathbb{N}$ ada sehingga $1/N < \epsilon$. Jadi dengan mengambil $m > N$ berlaku
$$|x_n - x_m| \leq \frac{1}{m} < \frac{1}{N} < \epsilon.$$
Dengan demikian, barisan (x_n) adalah barisan Cauchy.

2. Misalkan $a \in \mathbb{R}$ dan asumsikan bahwa $\lim_{x\to a} g(x) = L$ untuk suatu $L \in \mathbb{R}$. Kita akan tunjukkan bahwa asumsi ini mengarah pada kontradiksi. Perhatikan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\delta > 0$ sehingga untuk setiap $x \in \mathbb{R}$ dengan $0 < |x - a| < \delta$ berlaku
$$|g(x) - L| < \epsilon.$$
Sekarang, karena himpunan bilangan rasional dan irrasional keduanya padat di $\mathbb{R}$, maka terdapat $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ dengan $0 < |x_1 - a| < \delta$ dan $0 < |x_2 - a| < \delta$ sehingga x_1 rasional dan x_2 irrasional. Oleh karena itu, kita memiliki
$$|g(x_1) - L| = |0 - L| = |L| < \epsilon,$$
dan
$$|g(x_2) - L| = |1 - L| < \epsilon.$$
Dari dua ketidaksetaraan di atas, kita dapat menuliskan
$$|L| < \epsilon \quad \text{dan} \quad |1 - L| < \epsilon.$$
Dengan memilih $\epsilon < \frac{1}{2}$, kita mendapatkan kontradiksi karena tidak mungkin ada nilai L yang memenuhi kedua ketidaksetaraan tersebut secara bersamaan. Oleh karena itu, asumsi awal kita salah, dan kita menyimpulkan bahwa $\lim_{x\to a} g(x)$ tidak ada untuk semua $a \in \mathbb{R}$.

3. Menggunakan kontradiksi, misalkan f tidak konstan. Maka terdapat $x_1, x_2 \in [0, 1]$ dengan $x_1 < x_2$ sehingga $f(x_1) \neq f(x_2)$. Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $f(x_1) < f(x_2)$. Karena f kontinu pada $[0, 1]$, maka berdasarkan Teorema Nilai Antara, untuk setiap y antara $f(x_1)$ dan $f(x_2)$ terdapat $c \in (x_1, x_2)$ sehingga $f(c) = y$. Namun, karena himpunan bilangan irrasional padat di $\mathbb{R}$, kita dapat memilih y sebagai bilangan irrasional antara $f(x_1)$ dan $f(x_2)$. Ini bertentangan dengan asumsi bahwa f hanya bernilai rasional. Oleh karena itu, asumsi awal kita salah, dan kita menyimpulkan bahwa f adalah fungsi konstan.

Solution By: Tetew

4. Perhatikan bahwa himpunan E adalah himpunan titik di mana fungsi f dan g memiliki nilai yang sama. Misalkan (x_n) adalah barisan dalam E yang konvergen ke x_0. Karena f dan g kontinu pada $[0, 1]$, kita punya sifat

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

dan

$$\lim_{n \to \infty} g(x_n) = g(x_0).$$

Namun, karena setiap $x_n \in E$, maka $f(x_n) = g(x_n)$ untuk setiap n. Oleh karena itu,

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{n \to \infty} g(x_n).$$

Dengan menggabungkan hasil-hasil di atas, kita mendapatkan

$$f(x_0) = g(x_0).$$

Ini menunjukkan bahwa $x_0 \in E$. Dengan demikian, himpunan E memiliki sifat bahwa jika $(x_n) \subseteq E$ dan $x_n \to x_0$, maka $x_0 \in E$.

5. Misalkan $\epsilon > 0$. Untuk setiap $x, y \in A$, kita punya

$$|f(x) - f(y)| = \left| \frac{1}{2x} - \frac{1}{2y} \right| = \left| \frac{y - x}{2xy} \right|.$$

Karena $x, y \geq 3$, maka $xy \geq 9$. Oleh karena itu,

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|y - x|}{18}.$$

Untuk memastikan bahwa $|f(x) - f(y)| < \epsilon$, kita dapat memilih $\delta = 18\epsilon$. Maka, jika $|x - y| < \delta$, kita memiliki

$$|f(x) - f(y)| \leq \frac{|y - x|}{18} < \frac{18\epsilon}{18} = \epsilon.$$

Dengan demikian, f adalah kontinu seragam pada A.