Klasifikasi PDP

Bentuk umum dari PDP linier order 2 dengan dua variabel adalah

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

dengan $A, B, C, \ldots, G$ dan u adalah fungsi (x, y) dan dapat diturunkan 2 kali pada domain Ω.
Klasifikasi PDP linier order 2 dengan dua variabel:

1. PDP Hiperbolik $B^2 - 4AC > 0$
2. PDP Parabolik $B^2 - 4AC = 0$
3. PDP Eliptik $B^2 - 4AC < 0$

$$\begin{aligned}
A^* &= A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2 \\
B^* &= 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + 2C\xi_y\eta_y \\
C^* &= A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2 \\
D^* &= A\xi_{xx} + B\xi_{xy} + C\xi_{yy} + D\xi_x + E\xi_y \\
E^* &= A\eta_{xx} + B\eta_{xy} + C\eta_{yy} + D\eta_x + E\eta_y \\
F^* &= F \\
G^* &= G
\end{aligned}$$

Hiperbolik

Bentuk kanonik PDP hiperbolik adalah

$$w_{\xi\eta} = H_1^*(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta).$$

Langkah-langkah mengubah PDP hiperbolik ke bentuk kanoniknya:

1. Tentukan tipe PDP dengan mengecek
$$B^2 - 4AC > 0 \rightarrow \text{PDP hiperbolik}$$
2. Dapatkan persamaan karakteristiknya
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$\rightarrow \text{solusinya } \phi_1(x, y) = c_1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$
$$\rightarrow \text{solusinya } \phi_2(x, y) = c_2$$
sehingga $\xi(x, y) = \phi_1(x, y)$ dan $\eta(x, y) = \phi_2(x, y)$
3. Dapatkan turunan ξ, η terhadap x, y sehingga didapat
$$\xi_x, \xi_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}$$
4. Substitusi hasil no (3) ke persamaan (3.15) untuk mendapatkan
$$A^*, B^*, C^*, D^*, E^*, F^*, \text{ dan } G^*$$
5. Selesaikan hasil no (4) sehingga didapat hasil $w(\xi, \eta)$
6. Transformasi hasil no (5) ke bentuk $u(x, y)$

Parabolik

Bentuk kanonik PDP parabolik adalah

$$w_{\eta\eta} = H_2^*(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta)$$

atau

$$w_{\xi\xi} = H_3^*(\xi, \eta, w, w_\xi, w_\eta).$$

Langkah-langkah mengubah PDP parabolik ke bentuk kanoniknya:

1. Tentukan tipe PDP dengan mengecek
$$B^2 - 4AC = 0 \rightarrow \text{PDP parabolik}$$
2. Dapatkan persamaan karakteristiknya
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{2A} \rightarrow \text{solusinya } \phi_1(x, y) = c_1$$
sehingga $\xi(x, y) = \phi_1(x, y)$ dan $\eta(x, y)$ adalah sebarang fungsi (x, y) dengan catatan
$$J = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0$$
3. Dapatkan turunan ξ, η terhadap x, y sehingga didapat
$$\xi_x, \xi_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}$$
4. Substitusi hasil no (3) ke persamaan (3.15) untuk mendapatkan
$$A^*, B^*, C^*, D^*, E^*, F^*, \text{ dan } G^*$$
5. Selesaikan hasil no (4) sehingga didapat hasil $w(\xi, \eta)$
6. Transformasi hasil no (5) ke bentuk $u(x, y)$

Eliptik

Langkah-langkah mengubah PDP eliptik ke bentuk kanoniknya:

1. Tentukan tipe PDP dengan mengecek
$$B^2 - 4AC < 0 \rightarrow \text{PDP eliptik}$$
2. Dapatkan persamaan karakteristiknya
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - i\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$
$$\rightarrow \text{solusinya } \alpha(x, y) = c_1$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + i\sqrt{4AC - B^2}}{2A}$$
$$\rightarrow \text{solusinya } \beta(x, y) = c_2$$
sehingga diperoleh
$$\xi(x, y) = \frac{\alpha + \beta}{2} \quad \text{dan} \quad \eta(x, y) = \frac{\alpha - \beta}{2i}$$
3. Dapatkan turunan ξ, η terhadap x, y sehingga didapat
$$\xi_x, \xi_y, \xi_{xx}, \xi_{xy}, \xi_{yy}, \eta_x, \eta_y, \eta_{xx}, \eta_{xy}, \eta_{yy}$$
4. Substitusi hasil no (3) ke persamaan (3.15) untuk mendapatkan
$$A^*, B^*, C^*, D^*, E^*, F^*, \text{ dan } G^*$$
5. Selesaikan hasil no (4) sehingga didapat hasil
$$w(\xi, \eta)$$
6. Transformasi hasil no (5) ke bentuk
$$u(x, y)$$

Metode Pemisahan Variabel

Bentuk umum PDP order 2 dengan 2 variabel homogen adalah

$$A^*u_{x^*x^*} + B^*u_{x^*y^*} + C^*u_{y^*y^*} + D^*u_{x^*} + E^*u_{y^*} + F^*u = 0$$

dan bentuk kanoniknya adalah

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = 0$$

diasumsikan solusi dengan pemisah variabel yaitu

$$u(x, y) = X(x)Y(y) \neq 0$$

maka akan diperoleh

$$\begin{aligned}
u_x &= X'Y \\
u_y &= XY' \\
u_{xx} &= X''Y \\
u_{xy} &= X'Y' \\
u_{yy} &= XY''
\end{aligned}$$

Getaran Dawai

Solusi permasalahan getaran dawai

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0$$

dengan kondisi awal dan batas

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \ell \\
u_t(x, 0) &= g(x), & 0 \leq x \leq \ell \\
u(0, t) &= 0, & t \geq 0 \\
u(\ell, t) &= 0, & t \geq 0
\end{aligned}$$

adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right)\left[a_n \cos\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right) + b_n \sin\left(\frac{cn\pi}{\ell}t\right)\right]$$

dengan

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx,$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi c}\int_0^\ell g(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx.$$

Konduksi Panas

Solusi permasalahan konduksi panas $u_t = ku_{xx}, \ 0 < x < \ell, \ t > 0$ dengan kondisi awal dan batas

$$\begin{aligned}
u(x, 0) &= f(x), & 0 \leq x \leq \ell \\
u(0, t) &= 0, & t \geq 0 \\
u(\ell, t) &= 0, & t \geq 0
\end{aligned}$$

adalah

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) e^{-\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 kt}$$

dengan

$$a_n = \frac{2}{\ell}\int_0^\ell f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{\ell}x\right) dx.$$