PROPOSAL TUGAS AKHIR - SM234801

LATIN SQUARE KOMUTATIF ATAS ALJABAR MAX-PLUS

TEOSOFI HIDAYAH AGUNG

NRP 5002221132

Dosen Pembimbing

Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.

NIP 19890911 201404 1 001

Program Sarjana

Departemen Matematika

Fakultas Sains dan Analitika Data

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2025

FINAL PROJECT PROPOSAL - SM234801

COMMUTATIVE LATIN SQUARE OVER MAX-PLUS ALGEBRA

TEOSOFI HIDAYAH AGUNG

NRP 5002221132

Supervisor

Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.

NIP 19890911 201404 1 001

Bachelor Program

Department of Mathematics

Faculty of Scientics

Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Surabaya

2025

LEMBAR PENGESAHAN

Latin Square Komutatif atas Aljabar Max-Plus

Commutative Latin Square over Max-Plus Algebra

PROPOSAL TUGAS AKHIR

Diajukan untuk memenuhi salah satu syarat
memperoleh gelar Sarjana Matematika pada
Program Studi S-1 Matematika
Departemen Matematika
Fakultas Sains dan Analitika Data
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Oleh: **Teosofi Hidayah Agung**
NRP. 5002221132

Menyetujui,
Dosen Pembimbing

Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.
NIP. 19890911 201404 1 001

Mengetahui,
Kepala Program Studi Sarjana
Departemen Matematika FSAD-ITS

Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.
NIP. 19890911 201404 1 001

Surabaya,
Agustus 2025

ABSTRAK

Latin Square Komutatif atas Aljabar Max-Plus

Nama Mahasiswa / NRP	:	Teosofi Hidayah Agung / 5002221132
Departemen	:	Matematika FSAD -ITS
Dosen Pembimbing	:	Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.

Abstrak

Kata kunci:

ABSTRACT

Commutative Latin Square over Max-Plus Algebra

Student Name / NRP	:	Teosofi Hidayah Agung / 5002221132
Departement	:	Mathematics SCIENTICS - ITS
Supervisor	:	Muhammad Syifa'ul Mufid, S.Si., M.Si., D.Phil.

Abstract

Keywords:

DAFTAR ISI

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR TABEL

DAFTAR SIMBOL

α : Sudut serang

β : Sudut slip samping

BAB I
PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang

Pertama kali diperkenalkan oleh Leonhard Euler pada abad ke-18 dalam konteks teka-teki matematika tentang "*36 military officers*" (George, 2017).

1.2 Rumusan Masalah

Rumusan masalah dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Apa saja syarat perlu untuk dua buah *latin square* $A, B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ agar komutatif terhadap operasi $\otimes$?
2. Bagaimana cara membangun pasangan *latin square* komutatif dari $L_S(n)$?

1.3 Batasan Masalah

1.4 Tujuan

1.5 Manfaat

BAB II
TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Hasil Penelitian Terdahulu

2.2 Aljabar Max-Plus

Aljabar max-plus salah satu cabang dari aljabar tropikal yang menggunakan operasi maksimum dan penjumlahan sebagai operasi dasar.

Definisi 2.2.1 (Subiono, 2015)**.** Aljabar max-plus adalah himpunan $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner yaitu:

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \max\{a, b\}, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_{\max} \\ a \otimes b &= a + b, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_{\max} \end{aligned}$$

dengan elemen identitasnya adalah $\varepsilon = -\infty$ untuk operasi $\oplus$ dan 0 untuk operasi $\otimes$.

Selanjutnya $(\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \otimes)$ disebut sebagai semiring max-plus, yaitu suatu struktur aljabar yang memenuhi sifat seperti ring biasa, kecuali tidak memiliki elemen invers untuk operasi $\oplus$.

2.2.1 Matriks Aljabar Max-Plus

Pada aljabar max-plus, matriks juga dapat didefinisikan dengan menggunakan operasi penjumlahan dan perkalian pada aljabar max-plus. Sebuah matriks bisa dianggap sebagai representasi dari suatu sistem diskrit atau graf berarah berbobot, sehingga dapat digunakan untuk memodelkan berbagai permasalahan matematika (Subiono, 2015).

Definisi 2.2.2 (Baccelli dkk., 1994)**.** Misalkan $A = (a_{ij})$ adalah matriks berukuran $m \times n$ dan $B = (b_{ij})$ adalah matriks berukuran $n \times p$ dengan elemen-elemen dari $\mathbb{R}_{\max}$. Operasi penjumlahan dan perkalian matriks pada aljabar max-plus didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} (A \oplus B)_{ij} &= a_{ij} \oplus b_{ij} = \max\{a_{ij}, b_{ij}\} \\ (A \otimes B)_{ij} &= \bigoplus_{k=1}^{n} a_{ik} \otimes b_{kj} = \max_{1 \le k \le n} \{a_{ik} + b_{kj}\} \end{aligned}$$

Contoh 2.2.1. Misalkan diberikan matriks A dan B sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

Maka, penjumlahan dan perkalian matriks A dan B pada aljabar max-plus adalah:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \max\{2,4\} & \max\{3,0\} \\ \max\{5,2\} & \max\{1,6\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max\{2+4, 3+2\} & \max\{2+0, 3+6\} \\ \max\{5+4, 1+2\} & \max\{5+0, 1+6\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 9 & 7 \end{pmatrix}$$

2.2.2 Polinomial dalam Aljabar Max-Plus

Polinomial adalah suatu ekspresi matematika yang terdiri dari variabel dan koefisien, yang dioperasikan dengan penjumlahan, pengurangan, dan perkalian. Dalam aljabar max-plus, polinomial juga dapat didefinisikan dengan menggunakan operasi maksimum dan penjumlahan pada aljabar max-plus (Burden & Faires, 2010).

Definisi 2.2.3 (Muanalifah dan Sergeev, 2020)**.** Polinomial max-plus atau tropikal adalah sebuah fungsi $x \mapsto p(x)$ yang didefinisikan sebagai

$$p(x) = \bigoplus_{k=0}^{n} a_k \otimes x^{\otimes k} = \max_{0 \le k \le n} \{a_k + kx\},$$

dengan $a_k \in \mathbb{R}_{\max}$ untuk setiap $k = 0, 1, \ldots, n$.

2.2.3 Matriks Linde-de la Puente

Berdasarkan hasil penelitian Linde dan de la Puente (2015), diperoleh bahwa kekomutatifan antara dua matriks tropikal sangat bergantung pada diagonal utama matriks tersebut. Dalam perkembangan selanjutnya, Alhussaini dan Sergeev (2024b) memperkenalkan juga sebuah protokol kriptografi yang terinspirasi dari pertukaran kunci Diffie-Hellman, yang basisnya adalah grup siklik $(\mathbb{Z}_p^*, \times)$ untuk suatu bilangan prima p.

Definisi 2.2.4 (Alhussaini dan Sergeev, 2024a)**.** Untuk setiap bilangan real $r \le 0$ dan bilangan real $k \ge 0$, kita definisikan $[2r, r]_n^k$ sebagai himpunan matriks $A_{n \times n}$ sedemikian sehingga $a_{ii} = k$ untuk semua i dan $a_{ij} \in [2r, r]$ untuk $i \ne j$.

dari definisi di atas diperoleh sebuah teorema penting mengenai kekomutatifan matriks tropikal.

Teorema 2.2.1 (Alhussaini dan Sergeev, 2024b)**.** Misalkan $A \in [2r, r]_n^{k_1}$, $B \in [2s, s]_n^{k_2}$ untuk setiap $r, s \le 0$ dan $a_{ii} = k_1 \ge 0$, $b_{ii} = k_2 \ge 0$. Maka

$$A \otimes B = B \otimes A = k_2 \otimes A \oplus k_1 \otimes B.$$

Contoh 2.2.2. Misalkan diberikan matriks $A \in [-4, -2]_2^3$ dan $B \in [-3, -1]_2^2$ sebagai berikut:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ -3 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -3 & 2 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dengan menggunakan operasi pada aljabar max-plus, diperoleh

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad B \otimes A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sehingga, A dan B komutatif terhadap operasi $\otimes$.

2.3 Permutasi

Dalam aljabar, permutasi ialah suatu fungsi bijektif dari himpunan ke dirinya sendiri. Sebuah permutasi dari himpunan $X = \{1, 2, \ldots, n\}$ biasanya disimbolkan dengan $\sigma : X \to X$, dengan σ bersifat satu-satu dan pada. Himpunan semua permutasi dari X membentuk suatu grup terhadap operasi komposisi fungsi, yang disebut grup simetris pada n elemen yang disimbolkan dengan S_n (Subiono, 2022).

Contoh 2.3.1. Misalkan diberikan himpunan $X = \{1, 2, 3\}$. Salah satu permutasi dari himpunan X adalah fungsi σ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\sigma(1) = 2, \quad \sigma(2) = 3, \quad \sigma(3) = 1$$

atau dapat dituliskan dalam bentuk sebuah matriks berikut

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2.3.1 Sikel

Misalkan τ adalah permutasi pada himpunan $X = \{1, 2, \ldots, n\}$. Untuk suatu elemen $i_1 \in X$, perhatikan barisan $(i_1,\ \tau(i_1),\ \tau^2(i_1),\ \ldots)$. Karena himpunan X berhingga, terdapat bilangan $k \geq 1$ sehingga $\tau^k(i_1) = i_1$. Himpunan

$$\mathcal{O}_\tau(i_1) = \{\, i_1,\ \tau(i_1),\ \tau^2(i_1),\ \ldots,\ \tau^{k-1}(i_1) \,\}$$

disebut *orbit* dari τ yang melalui i_1. Orbit menggambarkan lintasan elemen i_1 di bawah penerapan berulang dari permutasi τ (Subiono, 2022).

Definisi 2.3.1. Jika orbit $\mathcal{O}_\tau(i_1)$ memuat lebih dari satu elemen, maka orbit tersebut disebut *sikel* dari permutasi τ. Dalam notasi siklus, sikel tersebut dituliskan sebagai

$$(i_1\ i_2\ \ldots\ i_k),$$

yang menyatakan bahwa

$$\tau(i_j) = i_{j+1} \quad \text{untuk } 1 \leq j < k, \qquad \tau(i_k) = i_1.$$

Teorema 2.3.1 (Subiono, 2022)**.** Setiap permutasi $\tau \in S_n$ dapat dituliskan sebagai hasil komposisi dari sikel-sikel yang saling asing.

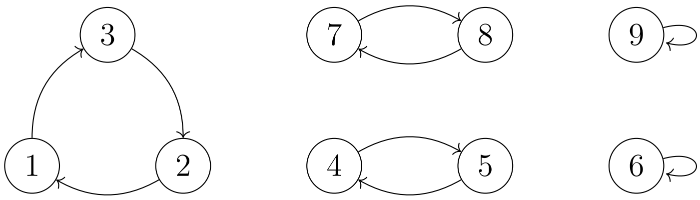
Dengan menggunakan notasi sikel, permutasi akan lebih ringkas untuk dituliskan dan dipahami.

Contoh 2.3.2. Misalkan diberikan permutasi $\tau \in S_9$ yang didefinisikan

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 8 & 7 & 9 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Dengan menggunakan notasi sikel, permutasi τ dapat dituliskan sebagai

$$\tau = (1\ 3\ 2)(4\ 5)(6)(7\ 8)(9).$$



Gambar 2.1 Diagram sikel dari permutasi τ

2.3.2 Matriks Permutasi

Setiap permutasi $\sigma \in S_n$ dapat kita representasikan dalam bentuk matriks permutasi $P_\sigma \in \mathbb{R}^{n\times n}$ yang elemen-elemennya hanya terdiri dari 0 dan 1, dengan aturan sebagai berikut:

$$(P_\sigma)_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jika } i = \sigma(j), \\ 0, & \text{lainnya.} \end{cases} \quad \forall i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Dalam konteks aljabar max-plus, matriks permutasi juga dapat didefinisikan dengan cara yang serupa, di mana elemen-elemen matriks hanya terdiri dari $-\infty$ dan 0 yang merepresentasikan identitas dan elemen nol dalam aljabar max-plus.

Definisi 2.3.2 (Farlow, 2009)**.** Misalkan $\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ adalah suatu permutasi, maka matriks permutasi max-plus $P_\sigma = [p_{ij}]$ didefinisikan sebagai

$$p_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{jika } i = \sigma(j), \\ -\infty, & \text{lainnya.} \end{cases}$$

Contoh 2.3.3. Misalkan diberikan permutasi $\sigma = (1\ 3\ 2) \in S_3$. Maka, matriks permutasi max-plus P_σ adalah

$$P_\sigma = \begin{pmatrix} -\infty & -\infty & 0 \\ 0 & -\infty & -\infty \\ -\infty & 0 & -\infty \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.3.2 (Farlow, 2009)**.** Sebuah matriks $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\max}$ memiliki invers kanan jika dan hanya jika terdapat suatu permutasi σ serta nilai-nilai $\lambda_i > \varepsilon$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sehingga

$$A = P_\sigma \otimes D(\lambda),$$

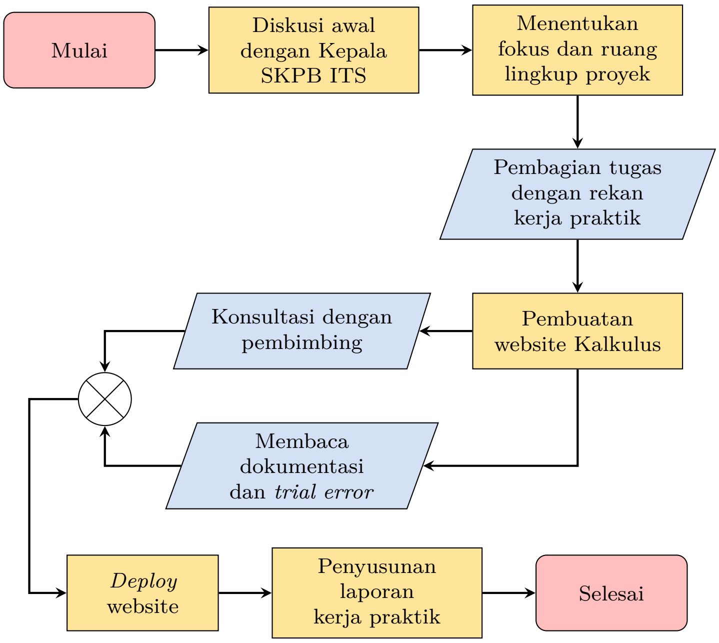
dengan $D(\lambda)$ adalah matriks diagonal max-plus dengan entri diagonal $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$

2.4 *Latin Square*

Latin square adalah susunan $n \times n$ larik yang diisi dengan n simbol berbeda, sehingga setiap simbol muncul tepat satu kali pada setiap baris dan setiap kolom.

BAB III
METODOLOGI

Pada bab ini dijelaskan langkah-langkah pelaksanaan penelitian tugas akhir beserta alur proses dan jadwal kegiatan.



Gambar 3.1 Alur Proses Penelitian Tugas Akhir

JADWAL PENELITIAN

Berikut jadwal pelaksanaan tahap-tahap penelitian tugas akhir yang akan dilakukan selama 3 bulan sesuai dengan metode penelitian.

Tabel 3.1 Jadwal Pelaksanaan Penelitian Tugas Akhir

NO	NAMA KEGIATAN	BULAN											
		1				2				3			
		1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
1	Studi literatur dan perumusan masalah												
2	Perancangan skema normalisasi dan model operasi												
3	Pengembangan algoritme konstruksi dan verifikasi												
4	Eksperimen dan enumerasi orde kecil–menengah												
5	Analisis hasil dan karakterisasi aljabar												
6	Penyusunan kesimpulan dan saran												
7	Penulisan laporan proposal/TA												

DAFTAR PUSTAKA

Alhussaini, S., & Sergeev, S. (2024a). On implementation of stickel's key exchange protocol over max-min and max-T semirings. akibateprint.iacr.org/2024/519 (cit. on p. 3).

Alhussaini, S., & Sergeev, S. (2024b). On the security of the initial tropical stickel protocol and its modification based on linde-de la puente matrices. akibateprint.iacr.org/2024/1598 (cit. on p. 3).

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., & Quadrat, J.-P. (1994). Synchronization and linearity - an algebra for discrete event systems. *The Journal of the Operational Research Society*, *45*. https://doi.org/10.2307/2583959 (cit. on p. 2).

Burden, R. L., & Faires, J. D. (2010). *Burden/faires, numerical analysis, 9th edition - instructor's solutions manual*. libgen . li / file . php ? md5 = 6ad19221a2bb7198a0bc999f11dcc3f3 (cit. on p. 3).

Farlow, K. G. (2009, April 27). *Max-plus algebra* [Master's Thesis]. Virginia Polytechnic Institute dan State University. (Cit. on p. 5).

George, W. D., John Clay; Wallis. (2017). *Introduction to combinatorics* (2nd ed.). CRC press, Taylor & Francis. libgen . li / file . php ? md5 = 23ad576ccf36cb0274631b42d4ee655c (cit. on p. 1).

Linde, J., & de la Puente, M. (2015). Matrices commuting with a given normal tropical matrix. *Linear Algebra and its Applications*, *482*, 101–121. https://doi.org/doi.org/10.1016/j.laa.2015.04.032 (cit. on p. 3).

Muanalifah, A., & Sergeev, S. (2020). Modifying the tropical version of stickel's key exchange protocol. *Applications of Mathematics*, *65*, 727–753. https://doi.org/10.21136/AM.2020.0325-19 (cit. on p. 3).

Subiono. (2015). *Aljabar min-max plus dan terapannya* [Available at: subiono2008@matematika.its.ac.id]. Jurusan Matematika, Institut Teknologi Sepuluh Nopember. (Cit. on p. 2).

Subiono. (2022). *Aljabar: Suatu pondasi matematika*. ITS Press. (Cit. on p. 4).