Nama	:	Teosofi Hidayah Agung
NRP	:	5002221132

31. Pandang sebuah sampel acak berukuran n dari distribusi dengan pdf $f(x;\theta) = 1/\theta$ untuk $0 < x < \theta$ dan 0 lainnya. Misalkan $\hat{\theta}$ dan $\tilde{\theta}$ adalah MLE dan MME dari θ.

    (a) Tunjukkan bahwa $\hat{\theta}$ adalah konsisten dalam MSE.

    (b) Tunjukkan bahwa $\tilde{\theta}$ adalah konsisten dalam MSE.

Solusi:

- Untuk $\hat{\theta}$ didapatkan melalui MLE, maka

$$
\begin{aligned}
L(\theta; x_1, \ldots, x_n) &= \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} = \theta^{-n}, \quad 0 < x_1, \ldots, x_n < \theta \\
\ell(\theta; x_1, \ldots, x_n) &= \ln L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = -n \ln \theta, \quad 0 < x_1, \ldots, x_n < \theta
\end{aligned}
$$

  Jika salah satu $x_i > \theta$, maka $L(\theta; x_1, \ldots, x_n) = 0$. Sehingga haruslah fungsi likelihoodnya tidak akan nol jika $\theta \geq \max(x_1, \ldots, x_n)$. Kemudian untuk memaksimalkan $\ell(\theta; x_1, \ldots, x_n)$, maka perlu untuk meminimalkan θ.

  $\therefore$ Haruslah dipilih $\hat{\theta} = \max(x_1, \ldots, x_n)$.

- Untuk $\tilde{\theta}$ didapatkan melalui MME. Dapat dilihat bahwa $X \sim U(0, \theta)$, maka

$$
E(X) = \frac{\theta}{2} \iff \theta = 2E(X)
$$

  Sehingga $\tilde{\theta} = 2\bar{X}$.

  Teorema 1. *Barisan estimator $\hat{\theta}$ untuk parameter θ dikatakan konsisten dalam MSE jika dan hanya jika estimator tersebut takbias secara asimtotik dan variansnya menuju nol saat $n \to \infty$.*

(a) Karena $\hat{\theta} = \max(x_1, \ldots, x_n)$, maka dapat digunakan order statistik. Dapat dengan mudah didapatkan CDF-nya $F(x) = \int_0^x \frac{1}{\theta} dx = \frac{x}{\theta}$, sehingga CDF untuk $\hat{\theta}$ adalah

$$
F_{\hat{\theta}}(x) = [F(x)]^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n, \quad 0 < x < \theta
$$

Kemudian PDF-nya adalah

$$
f_{\hat{\theta}}(x) = \frac{d}{dx} F_{\hat{\theta}}(x) = \frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}, \quad 0 < x < \theta
$$

Selanjutnya adalah ekspektasi dari $\hat{\theta}$, yaitu

$$
\begin{aligned}
E(\hat{\theta}) &= \int_0^\theta x f_{\hat{\theta}}(x) dx = \int_0^\theta x \left[\frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\right] dx = n \int_0^\theta x^n \theta^{-n} dx \\
&= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta x^n dx = \frac{n}{\theta^n} \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^\theta = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{\theta^{n+1}}{n+1}\right] = \frac{n\theta}{n+1}
\end{aligned}
$$

Karena $\lim_{n\to\infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n\theta}{n+1} = \theta$, maka $\hat{\theta}$ disebut estimator takbias secara asimtotik.

Hal selanjutnya adalah perlu menunjukkan bahwa $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = 0$. Namun sebelumnya, perlu dicari $E(\hat{\theta}^2)$, yaitu

$$\begin{aligned}
E(\hat{\theta}^2) &= \int_0^\theta x^2 f_{\hat{\theta}}(x)dx = \int_0^\theta x^2 \left[\frac{n}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n-1}\right] dx = n\int_0^\theta x^{n+1}\theta^{-n}dx \\
&= \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta x^{n+1}dx = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{x^{n+2}}{n+2}\right]_0^\theta = \frac{n}{\theta^n}\left[\frac{\theta^{n+2}}{n+2}\right] = \frac{n\theta^2}{n+2}
\end{aligned}$$

Sehingga varians dari $\hat{\theta}$ adalah

$$Var(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - [E(\hat{\theta})]^2 = \frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2 = \frac{n\theta^2(n+1)^2 - n^2\theta^2(n+2)}{(n+1)^2(n+2)}$$

dan dapat dengan mudah dicek bahwa $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = 0$.

$\therefore$ $\hat{\theta}$ adalah konsisten dalam MSE.

(b) Sebelumnya diketahui $E(X_i) = \theta/2$ dan $Var(X_i) = \theta^2/12$. Dengan cara yang sama seperti bagian (a), didapatkan

$$E(\tilde{\theta}) = E(2\bar{X}) = 2E(\bar{X}) = 2E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)\right) = 2\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \frac{\theta}{2}\right) = \theta$$

Sehingga $\tilde{\theta}$ adalah takbias secara asimtotik. Kemudian varians dari $\tilde{\theta}$ adalah

$$Var(\tilde{\theta}) = 4Var(\bar{X}) = 4\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n Var(X_i)\right) = 4\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \frac{\theta^2}{12}\right) = \frac{\theta^2}{3n}$$

dan dapat dengan mudah dicek bahwa $\lim_{n\to\infty} Var(\tilde{\theta}) = 0$.

$\therefore$ $\tilde{\theta}$ adalah konsisten dalam MSE.

32. Tentukan MLE dari θ dalam sampel acak berukuran n dari distribusi dengan PDF

$$f(x;\theta) = \begin{cases} 2\theta^2 x^{-3}, & \theta \le x \\ 0, & x < \theta;\ 0 < \theta \end{cases}$$

Kemudian tunjukkan bahwa MLE dari θ konsisten.

Solusi:

Fungsi likelihoodnya adalah

$$L(\theta; x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta) = \prod_{i=1}^{n} 2\theta^2 x_i^{-3} = 2^n \theta^{2n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right)^{-3}$$
$$\implies \ell(\theta; x_1, \dots, x_n) = \ln L(\theta; x_1, \dots, x_n) = n \ln 2 + 2n \ln \theta - 3 \sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

Nilai diatas akan berlaku jika $\theta \leq x_i$ untuk $i = 1, \dots, n$ atau $\theta \leq \min(x_1, \dots, x_n)$, jika tidak maka $L(\theta; x_1, \dots, x_n) = 0$. Sehingga untuk memaksimalkan $\ell(\theta; x_1, \dots, x_n)$, maka dapat dipilih $\hat{\theta} = \min(x_1, \dots, x_n)$.

Kemudian menggunakan rumus CDF order statistik, diketahui bahwa

$$F(x) = \int_{\theta}^{x} 2\theta^2 t^{-3} dt = \left[-\frac{\theta^2}{t^2} \right]_{\theta}^{x} = 1 - \frac{\theta^2}{x^2}, \quad \theta \leq x$$

sehingga CDF dari $\hat{\theta}$ adalah

$$F_{\hat{\theta}}(x) = 1 - [1 - F(x)]^n = 1 - \left(\frac{\theta^2}{x^2} \right)^n, \quad \theta \leq x$$

Kemudian PDF dari $\hat{\theta}$ adalah

$$f_{\hat{\theta}}(x) = \frac{d}{dx} F_{\hat{\theta}}(x) = \frac{d}{dx} \left[1 - \left(\frac{\theta^2}{x^2} \right)^n \right] = \frac{2n\theta^2}{x^3} \left(\frac{\theta^2}{x^2} \right)^{n-1}, \quad \theta \leq x$$

Selanjutnya adalah ekspektasi dari $\hat{\theta}$, yaitu

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}) &= \int_{\theta}^{\infty} x f_{\hat{\theta}}(x) dx = \int_{\theta}^{\infty} x \left[\frac{2n\theta^2}{x^3} \left(\frac{\theta^2}{x^2} \right)^{n-1} \right] dx = 2n\theta^2 \int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{x^2} \left(\frac{\theta^2}{x^2} \right)^{n-1} dx \\ &= 2n\theta^{2n} \int_{\theta}^{\infty} x^{-2n} dx = 2n\theta^{2n} \left[\frac{x^{-2n+1}}{-2n+1} \right]_{\theta}^{\infty} = 2n\theta^{2n} \left[0 - \frac{\theta^{-2n+1}}{-2n+1} \right] \\ &= \frac{2n\theta}{2n-1} \end{aligned}$$

Karena $\lim_{n \to \infty} E(\hat{\theta}) = \lim_{n \to \infty} \frac{2n\theta}{2n-1} = \theta$, maka $\hat{\theta}$ disebut estimator takbias secara asimtotik.

Hal selanjutnya adalah perlu menunjukkan bahwa $\lim_{n \to \infty} Var(\hat{\theta}) = 0$. Namun sebelumnya, perlu dicari $E(\hat{\theta}^2)$, yaitu

$$\begin{aligned} E(\hat{\theta}^2) &= \int_{\theta}^{\infty} x^2 f_{\hat{\theta}}(x) dx = \int_{\theta}^{\infty} x^2 \left[\frac{2n\theta^2}{x^3} \left(\frac{\theta^2}{x^2} \right)^{n-1} \right] dx = 2n\theta^2 \int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{\theta^2}{x^2} \right)^{n-1} dx \\ &= 2n\theta^{2n} \int_{\theta}^{\infty} x^{-2n+1} dx = 2n\theta^{2n} \left[\frac{x^{-2n+2}}{-2n+2} \right]_{\theta}^{\infty} = 2n\theta^{2n} \left[0 - \frac{\theta^{-2n+2}}{-2n+2} \right] \\ &= \frac{2n\theta^2}{2n-2} \end{aligned}$$

Sehingga varians dari $\hat{\theta}$ adalah

$$Var(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}^2) - [E(\hat{\theta})]^2 = \frac{2n\theta^2}{2n-2} - \left(\frac{2n\theta}{2n-1}\right)^2 = \frac{2n\theta^2(2n-1)^2 - 4n^2\theta^2(2n-2)}{(2n-1)^2(2n-2)}$$

dan dapat dengan mudah dicek bahwa $\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = 0$ (Dilihat dari koefisien pangkat terbesar x yang saling menghilangkan).

$\therefore$ $\hat{\theta}$ adalah konsisten dalam MSE.

33. Pandang sampel acak berukuran n dari distribusi Poisson, $X_i \sim POI(\mu)$. Tentukan $Var(\tilde{\theta})$ dengan $\tilde{\theta} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{\sum X_i}$ dan bandingkan dengan CRLB untuk varians dari estimator takbias $\theta = e^{-\mu}$.
(Petunjuk: Catat bahwa $Y = \sum X_i \sim POI(n\mu)$, kemudian $E(\tilde{\theta})$ dan $Var(\tilde{\theta})$ berelasi dengan MGF dari Y).

Solusi:

Asumsikan $Y = \sum X_i \sim POI(n\mu)$, maka didapatkan

$$\begin{aligned} E(\tilde{\theta}) &= E\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^Y\right) = E\left(e^{Y\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)}\right) = M_Y\left(\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \\ &= e^{n\mu\left(e^{\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)}-1\right)} = e^{n\mu\left(\frac{n-1}{n}-1\right)} = e^{-\mu} \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} E(\tilde{\theta}^2) &= E\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2Y}\right) = E\left(e^{2Y\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)}\right) = M_Y\left(2\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) \\ &= e^{n\mu\left(e^{2\ln\left(\frac{n-1}{n}\right)}-1\right)} = e^{n\mu\left(\left(\frac{n-1}{n}\right)^2-1\right)} = e^{-\mu\left(2-\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Sehingga varians dari $\tilde{\theta}$ adalah

$$Var(\tilde{\theta}) = E(\tilde{\theta}^2) - [E(\tilde{\theta})]^2 = e^{-\mu\left(2-\frac{1}{n}\right)} - e^{-2\mu} = e^{-2\mu}\left(e^{\mu/n}-1\right)$$

Disisi lain, definisikan $\theta = \tau(\mu) = e^{-\mu}$. kemudian CRLB dari θ adalah

$$\begin{aligned} \frac{[\tau'(\mu)]^2}{I(\mu)} &= \frac{[\tau'(\mu)]^2}{nE\left[\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\ell(X;\mu)\right)^2\right]} = \frac{e^{-2\mu}}{nE\left[\left(\frac{\partial}{\partial\mu}\left(X\ln\mu - \mu + \ln(X!)\right)\right)^2\right]} \\ &= \frac{e^{-2\mu}}{nE\left[\left(\frac{X}{\mu}-1\right)^2\right]} = \frac{e^{-2\mu}}{\frac{1}{\mu^2}Var[X]} = \frac{e^{-2\mu}}{\frac{1}{\mu^2}n\mu} = \frac{\mu e^{-2\mu}}{n} \end{aligned}$$

Kemudian $Var(\tilde{\theta})$ bisa kita jabarkan sebagai berikut menggunakan deret Taylor

$$e^{-2\mu}\left(e^{\mu/n}-1\right) = e^{-2\mu}\left(\left(1+\frac{\mu}{n}+\frac{\mu^2}{2n^2}+\dots\right)-1\right) = e^{-2\mu}\left(\frac{\mu}{n}+\frac{\mu^2}{2n^2}+\dots\right)$$
$$= \frac{\mu e^{-2\mu}}{n}\left(1+\frac{\mu}{2n}+\frac{\mu^2}{3!n^2}+\dots\right)$$

Karena suku $\frac{\mu}{2n}, \frac{\mu^2}{3!n^2}, \dots$ selalu bernilai positif, maka didapatkan hubungan

$$Var(\tilde{\theta}) \geq \frac{[\tau'(\mu)]^2}{I(\mu)}$$

34. Pandang sampel acak berukuran n dari distribusi dengan pdf diskrit

$$f(x;p) = p(1-p)^x, \quad x = 0, 1, \dots$$

(a) Tentukan MLE dari p.

(b) Tentukan MLE dari $\theta = \dfrac{1-p}{p}$.

(c) Tentukan CRLB untuk varians dari penaksir tak bias dari θ.

(d) Apakah MLE dari θ adalah UMVUE?

(e) Apakah MLE dari θ konsisten terhadap MSE?

(f) Tentukan distribusi asimtotik MLE θ.

(g) Misalkan $\hat{\theta} = \dfrac{n\bar{X}}{n+1}$. Tentukan fungsi risiko dari $\hat{\theta}$ dan $\bar{X}$ dengan menggunakan fungsi kerugian $L(t;\theta) = \dfrac{(t-\theta)^2}{\theta^2+\theta}$

Solusi:

Diketahui bahwa distribusi diatas merupakan distribusi geometri atas himpunan $\mathbb{N}_0$, sehingga $E(X) = \dfrac{1-p}{p}$ dan $Var(X) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

(a) Tinjau fungsi log-likelihoodnya

$$\ell(p;x_1,\dots,x_n) = \ln L(p;x_1,\dots,x_n) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\ln\left(p(1-p)^{x_i}\right)$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\ln p + \sum_{i=1}^{n}\ln(1-p)^{x_i} = n\ln p + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1-p)$$

Kemudian turunkan terhadap p

$$\frac{\partial}{\partial p}\ell(p;x_1,\dots,x_n) = \frac{n}{p} - \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{1-p} = \frac{n}{p} - \frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$
$$\implies \frac{n}{p} = \frac{1}{1-p}\sum_{i=1}^{n} x_i \implies \frac{1-p}{p} = \bar{x} \implies \hat{p} = \frac{1}{1+\bar{X}}$$

Untuk meyakinkan bahwa $\hat{p}$ adalah MLE, perlu diperiksa apakah $\hat{p}$ memaksimalkan $\ell(p; x_1, \ldots, x_n)$.

$$\frac{\partial^2}{\partial p^2}\ell(p; x_1, \ldots, x_n) = -\frac{n}{p^2} - \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{1}{(1-p)^2} = -\frac{n}{p^2} - \frac{1}{(1-p)^2}\sum_{i=1}^{n} x_i < 0$$

Jadi $\hat{p} = \dfrac{1}{1+\bar{x}}$ adalah MLE dari p.

(b) Dengan menggunakan hasil sebelumnya, maka $\hat{\theta} = \dfrac{1-\hat{p}}{\hat{p}} = \dfrac{1-\frac{1}{1+\bar{X}}}{\frac{1}{1+\bar{X}}} = \bar{X}$.

(c) CRLB dari $\theta = \tau(p) = \dfrac{1-p}{p}$ adalah

$$\frac{[\tau'(p)]^2}{I(p)} = \frac{[\tau'(p)]^2}{-nE\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial p^2}\ell(X;p)\right)\right]} = \frac{(-1/p^2)^2}{nE\left[\frac{1}{p^2} + \frac{X}{(1-p)^2}\right]} = \frac{1/p^4}{\frac{n}{p^2(1-p)}} = \frac{1-p}{np^2}$$

(d) Menggunakan definisi UMVUE, maka tinjau

$$E(\hat{\theta}) = E(\bar{X}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1-p}{p} = \theta$$

Kemudian untuk variansnya adalah

$$Var(\hat{\theta}) = Var(\bar{X}) = Var\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{1-p}{np^2}$$

Karena $Var(\hat{\theta})$ sama dengan CRLB, maka $\hat{\theta}$ adalah UMVUE dari θ.

(e) Dari informasi (d), $\hat{\theta}$ adalah estimator takbias dari θ. Kemudian dapat dilihat bahwa

$$\lim_{n\to\infty} Var(\hat{\theta}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1-p}{np^2} = 0$$

Sehingga $\hat{\theta}$ adalah konsisten dalam MSE.

(f) Dari informasi sebelumnya, dapat disimpulkan menggunakan teorema bahwa untuk n yang cukup besar, distribusi asimtotik dari $\hat{\theta}$ adalah normal dengan rata-rata θ dan variansnya adalah CRLB $\dfrac{1-p}{np^2}$.

$\therefore \hat{\theta} \sim N\left(\theta, \dfrac{1-p}{np^2}\right)$.

(g) Fungsi risiko didefinisikan sebagai $R_T(\theta) = E\left[L(T,\theta)\right]$ dengan T suatu estimator.

- Fungsi risiko dari $\bar{X}$ adalah

$$R_{\bar{X}}(\theta) = E\left[\frac{(\bar{X}-\theta)^2}{\theta^2+\theta}\right] = \frac{1}{\theta^2+\theta}E\left[\left(\bar{X}-\theta\right)^2\right]$$

Sekarang perhatikan bahwa $E(\bar{X}) = \theta$ yang akibatnya $\text{Bias}(\bar{X}) = E(\bar{X}) - \theta = 0$. Hal ini berarti bahwa $\bar{X}$ adalah estimator takbias dari θ. Sehingga

$$R_{\bar{X}}(\theta) = \frac{1}{\theta^2+\theta} Var(\bar{X}) = \frac{1}{\theta^2+\theta} \cdot \frac{1-p}{np^2} = \frac{1}{np(\theta+1)}$$

Agar menjadi fungsi yang hanya mengandung θ, subtitusi $p = \dfrac{1}{1+\theta}$. Jadilah

$$R_{\bar{X}}(\theta) = \frac{1}{n}$$

- Fungsi risiko dari $\hat{\theta}$ adalah

$$R_{\hat{\theta}}(\theta) = E\left[\frac{(\hat{\theta}-\theta)^2}{\theta^2+\theta}\right] = \frac{1}{\theta^2+\theta} E\left[\left(\hat{\theta}-\theta\right)^2\right]$$

Kembali lagi akan dirumuskan bias dari $\hat{\theta}$, yaitu

$$\text{Bias}(\hat{\theta}) = E(\hat{\theta}) - \theta = E\left(\frac{n\bar{X}}{n+1}\right) - \theta = \frac{n\theta}{n+1} - \theta = -\frac{\theta}{n+1}$$

Kemudian didapatkan

$$\begin{aligned} R_{\hat{\theta}}(\theta) &= \frac{1}{\theta^2+\theta}\left[Var(\hat{\theta}) + (\text{Bias}(\hat{\theta}))^2\right] = \frac{1}{\theta^2+\theta}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 Var(\bar{X}) + \frac{\theta^2}{(n+1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{\theta^2+\theta}\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 \cdot \frac{\theta(1+\theta)}{n} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{\theta^2+\theta}\left[\frac{n\theta(1+\theta)}{(n+1)^2} + \frac{\theta^2}{(n+1)^2}\right] \\ &= \frac{1}{\theta^2+\theta}\left[\frac{n\theta+(n+1)\theta^2}{(n+1)^2}\right] \\ &= \frac{n+(n+1)\theta}{(\theta+1)(n+1)^2} \end{aligned}$$

35. Tentukan distribusi asimtotik MLE dari p dalam sampel acak berukuran n dari distribusi $X_i \sim BIN(1,p)$.

Solusi:

Diketahui bahwa distribusi $BIN(1,p)$ adalah distribusi Bernoulli dengan pdf

$$f(x;p) = p^x(1-p)^{1-x},\ x = 0,1$$

Sehingga fungsi log-likelihoodnya adalah

$$\ell(p; x_1, \ldots, x_n) = \ln L(p; x_1, \ldots, x_n) = \ln \left(\prod_{i=1}^{n} p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \right) = \sum_{i=1}^{n} \ln \left(p^{x_i}(1-p)^{1-x_i} \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + \sum_{i=1}^{n} (1-x_i) \ln(1-p) = \sum_{i=1}^{n} x_i \ln p + \ln(1-p) \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right)$$

Kemudian turunkan terhadap p

$$\frac{\partial}{\partial p} \ell(p; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{1}{1-p} \left(n - \sum_{i=1}^{n} x_i \right) = \frac{1}{p} \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{1-p} + \frac{1}{1-p} \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

$$\iff \frac{1}{p\cancel{(1-p)}} \sum_{i=1}^{n} x_i = \frac{n}{\cancel{1-p}} \iff p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \implies \hat{p} = \bar{X}$$

Selanjutnya karena $E(\hat{p}) = p$ dan $Var(\hat{p}) = \dfrac{p(1-p)}{n}$, maka $\hat{p}$ adalah estimator takbias dari p dan efisien secara asimtotis. Kemudian distribusi asimtotik dari $\hat{p}$ adalah normal dengan rata-rata p dan variansnya adalah CRLB $\dfrac{p(1-p)}{n}$.

$$\hat{p} \sim N \left(p, \frac{p(1-p)}{n} \right)$$