

1. Diberikan PDP  $u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} = 0$

- (a) Tunjukkan bahwa  $u(x, y) = f(y - x) + g(y - 2x)$  adalah penyelesaian umum PD.
- (b) Kemudian dari penyelesaian umum (a) tersebut dapatkan penyelesaian khusus yang memenuhi

$$u(x, 0) = x, \quad u_y(x, 0) = 0$$

2. Pandang persamaan  $u_{xx} + 4u_{xy} + u_x = 0$ .

Dapatkan bentuk kanonik dari persamaan tersebut, carilah solusi umum  $u(x, y)$  dan cek hasilnya dengan kembali mensubstitusike PD-nya.

3. Selesaikan PDP getaran dawai berikut dengan metode pemisahan variabel:

$$u_{tt} = 4u_{xx} \quad \text{dimana} \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

dengan kondisi awal dan kondisi batasnya adalah:

$$u(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u_t(x, 0) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi$$

$$u(0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(\pi, t) = 0, \quad t \geq 0$$

### Solusi:

1. (a) Perhatikan bahwa

$$u_x = -f'(y - x) + g'(y - 2x)$$

$$u_y = f'(y - x) + g'(y - 2x)$$

$$u_{xx} = f''(y - x) + 4g''(y - 2x)$$

$$u_{xy} = -f'(y - x) - 2g'(y - 2x)$$

$$u_{yy} = f''(y - x) + g''(y - 2x)$$

Substitusikan ke dalam PDP:

$$\begin{aligned} u_{xx} + 3u_{xy} + 2u_{yy} &= f''(y - x) + 4g''(y - 2x) - 3f'(y - x) - 6g'(y - 2x) \\ &\quad + 2f''(y - x) + 2g''(y - 2x) \\ &= 3f''(y - x) + 6g''(y - 2x) - 3f'(y - x) - 6g'(y - 2x) = 0 \end{aligned}$$

(b) Dari kondisi awal  $u(x, 0) = x$  dan  $u_y(x, 0) = 0$ , kita dapatkan:

$$u(x, 0) = f(-x) + g(-2x) = x \implies -f'(-x) - 2g'(-2x) = 1$$

$$u_y(x, 0) = f'(-x) + g'(-2x) = 0$$

Dari kedua persamaan tersebut, kita dapatkan:

$$g'(-2x) = -1 \implies -2g'(-2x) = 2 \implies g(-2x) = 2x + C_1 \implies g(x) = -x + C_1$$

$$f'(-x) = 1 \implies -f'(-x) = -1 \implies f(-x) = -x + C_2 \implies f(x) = x + C_2$$

Sehingga penyelesaian khususnya adalah:

$$u(x, y) = f(y - x) + g(y - 2x) = (y - x + C_2) + (-y + 2x + C_1) = x + C$$

Namun karena  $x = u(x, 0) = x + C$ , maka  $C = 0$  sehingga solusi khususnya adalah:

$$\boxed{u(x, y) = x}$$

2. Diketahui  $A = 1$ ,  $B = 4$ ,  $D = 1$ , dan  $C = E = F = G = 0$ , dengan persamaan karakteristik:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{4 + \sqrt{16 - 0}}{2} = 4 \implies \xi(x, y) = y - 4x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{4 - \sqrt{16 - 0}}{2} = 0 \implies \eta(x, y) = y$$

Kemudian turunkan  $\xi$  dan  $\eta$ :

$$\xi_x = -4, \quad \xi_{xx} = 0 \quad \xi_{yy} = 0$$

$$\xi_y = 1, \quad \xi_{xy} = 0 \quad \xi_{yy} = 0$$

$$\eta_x = 0, \quad \eta_{xx} = 0$$

$$\eta_y = 1 \quad \eta_{xy} = 0$$

Cari koefisien  $A^*$ ,  $B^*$ ,  $C^*$ ,  $D^*$ ,  $E^*$ ,  $F^*$ , dan  $G^*$ :

$$A^* = 1 \cdot (-4)^2 + 4 \cdot (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 1^2 = 16 - 16 + 0 = 0$$

$$B^* = 2 \cdot 1 \cdot (-4) \cdot 0 + 4 \cdot (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 1 = -16$$

$$C^* = 1 \cdot 0^2 + 4 \cdot 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1^2 = 0$$

$$D^* = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-4) + 0 \cdot 1 = -4$$

$$E^* = 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-4) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$$

$$F^* = 0, \quad G^* = 0$$

Substitusikan ke dalam bentuk kanonik:

$$\begin{aligned} A^* w_{\xi\xi} + B^* w_{\xi\eta} + C^* w_{\eta\eta} + D^* w_{\xi} + E^* w_{\eta} + F^* w &= 0 \\ -16w_{\xi\eta} - 4w_{\xi} &= 0 \end{aligned}$$

Misalkan  $z = w_{\xi}$ , maka:

$$z_{\eta} + \frac{1}{4}z = 0 \implies z = f(\xi)e^{-\frac{1}{4}\eta}$$

Integrasikan untuk mendapatkan  $w$ :

$$w = \int z d\xi = \int f(\xi)e^{-\frac{1}{4}\eta} d\xi = F(\xi)e^{-\frac{1}{4}\eta} + H(\eta)$$

Substitusikan kembali  $\xi = y - 4x$  dan  $\eta = y$ :

$$u(x, y) = F(y - 4x)e^{-\frac{1}{4}y} + H(y)$$

Cek hasilnya dengan mensubstitusike dalam PD:

$$\begin{aligned} u_x &= -4F'(y - 4x)e^{-\frac{1}{4}y} \\ u_{xx} &= 16F''(y - 4x)e^{-\frac{1}{4}y} \\ u_{xy} &= -F'(y - 4x)e^{-\frac{1}{4}y} - 4F''(y - 4x)e^{-\frac{1}{4}y} \end{aligned}$$

Terakhir

$$\begin{aligned} u_{xx} + 4u_{xy} + u_x &= 16F''(y - 4x)e^{-\frac{1}{4}y} - 4F'(y - 4x)e^{-\frac{1}{4}y} - 16F''(y - 4x)e^{-\frac{1}{4}y} \\ &\quad - 4F'(y - 4x)e^{-\frac{1}{4}y} = -4F'(y - 4x)e^{-\frac{1}{4}y} = 0 \end{aligned}$$

3. Misalkan:  $u(x, t) = X(x)T(t)$ , kemudian substitusike PDP:

$$X(x)T''(t) = 4X''(x)T(t) \Rightarrow \frac{T''(t)}{4T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda$$

Sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + A_2 e^{-\sqrt{\lambda}x} \\ T(t) &= B_1 e^{2\sqrt{\lambda}t} + B_2 e^{-2\sqrt{\lambda}t} \end{aligned}$$

Perhatikan bahwa untuk  $\lambda \geq 0$  menghasilkan solusi yang trivial yaitu  $u(x, t) = 0$  (Hal ini dapat dilihat dengan mensubstitusike dalam kondisi batas  $u(0, t) = 0$  dan  $u(\pi, t) = 0$ ).

Sehingga untuk  $\lambda < 0$ , diperoleh solusi:

$$X(x) = A_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + A_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

Selanjutnya untuk kondisi batas  $X(0) = 0$  diperoleh  $A_1 = 0$  dan untuk  $X(\pi) = 0$  diperoleh:

$$\sin(\sqrt{-\lambda}\pi) = 0 \Rightarrow \sqrt{-\lambda}\pi = n\pi \Rightarrow -\lambda_n = n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Oleh karena itu, kita dapat menuliskan:

$$X_n(x) = C_n \sin(nx) \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Solusi umum:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) [a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt)]$$

Selanjutnya untuk variabel  $T(t)$  dengan menggunakan asumsi yang sama yaitu  $\lambda < 0$ , kita dapatkan:

$$T(t) = B_1 \cos(2\sqrt{-\lambda}t) + B_2 \sin(2\sqrt{-\lambda}t)$$

Substitusi  $\sqrt{-\lambda} = n$  (dari informasi sebelumnya)

$$T_n(t) = D_n \cos(2nt) + E_n \sin(2nt)$$

Berarti solusi umum untuk  $u(x, t)$  adalah:

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= X_n(x)T_n(t) = C_n \sin(nx) [D_n \cos(2nt) + E_n \sin(2nt)] \\ &= \sin(nx) [a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt)] \end{aligned}$$

dengan  $a_n = C_n D_n$  dan  $b_n = C_n E_n$ . Sehingga

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(nx) [a_n \cos(2nt) + b_n \sin(2nt)]$$

Masukkan kondisi awal  $u(x, 0) = 0$  dan  $u_t(x, 0) = x$

- Untuk  $u(x, 0) = 0$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) = 0 \Rightarrow a_n = 0 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

- Untuk  $u_t(x, 0) = x$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin(nx) = x$$

Dengan menggunakan ortogonalitas fungsi sinus, kita dapatkan

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} x \sin(nx) dx \\ &= \frac{1}{n\pi} [-x \cos(nx) + \sin(nx)]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{n\pi} [-\pi \cos(n\pi) + 1] \\ &= \frac{1}{n\pi} [-\pi(-1)^n + 1] \\ &= \frac{(-1)^{n+1}\pi + 1}{n} \end{aligned}$$

Sehingga solusi khususnya adalah:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\pi + 1}{n} \sin(nx) \sin(2nt)$$