3. Jika X dalam soal nomor 2 adalah ruang real, buktikan bahwa, secara konvers, relasi yang diberikan menyiratkan bahwa $x \perp y$. Tunjukkan bahwa hal ini mungkin tidak berlaku jika X adalah kompleks. Berikan contoh.

Solusi

Misalkan $x, y \in X$ memenuhi $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$, maka berdasarkan definisi norm berlaku

$$\begin{aligned} \|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\ \|x\|^2 + \|y\|^2 &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ \|x\|^2 + \|y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\ 2\langle x,y\rangle &= 0 \implies \langle x,y\rangle = 0 \end{aligned}$$

Jadi terbukti $x \perp y$.

Misalkan $z, w \in \mathbb{C}$, kemudian pilih $z = -i$ dan $w = -1$. Jelas bahwa

$$\|z+w\|^2 = \left[\sqrt{1^2 + (-1)^2}\right]^2 = 2 = \|-i\|^2 + \|-1\|^2 = \|z\|^2 + \|w\|^2.$$

Namun

$$\langle z, w\rangle = \langle -i, -1\rangle = -i \cdot (\overline{-1}) = i \neq 0.$$

Berarti $z \not\perp w$ untuk $z, w \in \mathbb{C}$.

4. Jika X adalah ruang hasil dalam real, buktikan bahwa kondisi $\|x\| = \|y\|$ berimplikasi $\langle x+y, x-y\rangle = 0$. Apa arti kondisi ini secara geometris jika $X = \mathbb{R}^2$? Apa arti kondisi ini jika X adalah kompleks?

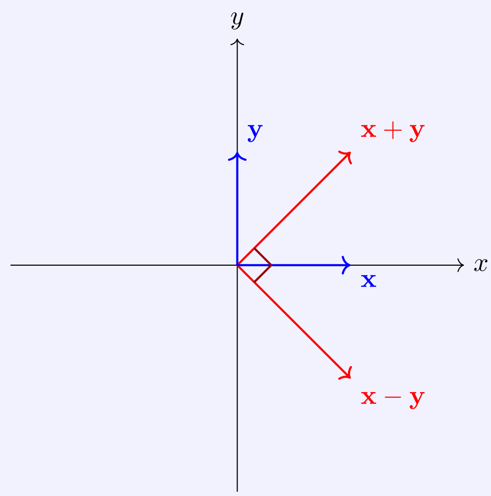
Solusi

Misalkan $x, y \in X$ adalah ruang hasil dalam real.
Jika $\|x\| = \|y\|$, maka berlaku

$$\begin{aligned} \langle x+y, x-y \rangle &= \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle - \langle y, y \rangle \\ &= \langle x, x \rangle - \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 - \|y\|^2 = 0. \end{aligned}$$

Jadi $\langle x+y, x-y \rangle = 0$.

Secara geometris, jika $X = \mathbb{R}^2$, maka $\mathbf{x}$ dan $\mathbf{y}$ membentuk sudut siku-siku.



8. Tunjukkan bahwa dalam ruang hasil dalam (inner product space), $x \perp y$ jika dan hanya jika $\|x + \alpha y\| \geq \|x\|$ untuk semua skalar α.

Solusi

Misalkan $x, y \in X$ adalah ruang hasil dalam.
Jika $x \perp y$, maka $\langle x, y\rangle = 0$.
Maka berlaku

$$\begin{aligned}
\|x+\alpha y\|^2 &= \langle x+\alpha y, x+\alpha y\rangle \\
&= \langle x, x\rangle + \langle x, \alpha y\rangle + \langle \alpha y, x\rangle + \langle \alpha y, \alpha y\rangle \\
&= \|x\|^2 + \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \alpha\langle y, x\rangle + \|\alpha y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 0 + \|\alpha y\|^2 \\
&\geq \|x\|^2.
\end{aligned}$$

Sebaliknya, jika $\|x+\alpha y\| \geq \|x\|$, maka berlaku

$$0 = \|x+\alpha y\|^2 - \|x\|^2 = \|\alpha y\|^2 + \overline{\alpha}\langle x, y\rangle + \alpha\langle y, x\rangle.$$

Dengan memilih $\alpha = 1$ dan $\overline{\alpha} = -1$ kita mendapatkan $\langle x, y\rangle = 0$.
Jadi $x \perp y$.

9. Misalkan V adalah ruang vektor dari semua fungsi kontinu bernilai kompleks pada $J = [a, b]$. Misalkan $X_1 = (V, \|\cdot\|_\infty)$, dengan $\|x\|_\infty = \max\limits_{t\in J} |x(t)|$, dan $X_2 = (V, \|\cdot\|_2)$, dengan

$$\|x\|_2 = \langle x, x\rangle^{1/2}, \qquad \langle x, y\rangle = \int_a^b x(t)\overline{y(t)}\, dt.$$

Tunjukkan bahwa pemetaan identitas $x \mapsto x$ dari X_1 ke X_2 adalah kontinu. (Pemetaan ini bukan homeomorfisme. X_2 tidak lengkap.)