Pembahasan Kuis 2 Pengantar Analisis Fungsional T.A 2024/2025

By Trio Anfung 6 People

Departemen Matematika
Institut Teknologi Sepuluh Nopember

Senin, 2 Juni 2025

Soal 1

Diberikan $c = \{c_n\} \in \ell^\infty$ dan $T_c \in \mathcal{B}(\ell^\infty)$ dengan $T_c(\{x_n\}) = \{c_n x_n\}$. Jika $\inf\{|c_n| : n \in \mathbb{N}\} > 0$ dan $d_n = \frac{1}{c_n}$, maka tunjukkan bahwa $d = \{d_n\} \in \ell^\infty$ dan $T_c T_d = T_d T_c = I$.

Pembahasan Soal

Jawaban:
Diberikan $c = \{c_n\} \in \ell^\infty$, artinya c terbatas maka $\exists M > 0$ sehingga $\sup|c_n| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}$.
Karena $\inf\{|c_n| : n \in \mathbb{N}\} > 0$ maka $\exists m > 0$ sedemikian sehingga

$$|c_n| \geq m, \forall n \in \mathbb{N}$$

Diberikan $d_n = \frac{1}{c_n}$, karena $|c_n| \geq m$ akibatnya $\frac{1}{|c_n|} \leq \frac{1}{m}$ dengan demikian

$$|d| = |d_n| = \frac{1}{|c_n|} \leq \frac{1}{m}$$

artinya $\sup|d_n| < \infty$ sehingga $d = \{d_n\} \in \ell^\infty$.
$\therefore d = \{d_n\} \in \ell^\infty$

Pembahasan Soal

Dari hasil sebelumnya diperoleh $T_c, T_d \in B(\ell^\infty)$. Akan ditunjukkan $T_cT_d = T_dT_c = I$. Dengan definisi $T_c(\{x_n\}) = \{c_nx_n\}$.

$$T_cT_d = T_cT_d(\{x_n\}) = T_c(\{d_nx_n\}) = \{c_nd_nx_n\} = \left\{c_n \cdot \frac{1}{c_n}x_n\right\} = \{x_n\} = I$$

$$T_dT_c = T_dT_c(\{x_n\}) = T_d(\{c_nx_n\}) = \{d_nc_nx_n\} = \left\{\frac{1}{c_n} \cdot c_nx_n\right\} = \{x_n\} = I$$

Diperoleh T_c invertibel dan inversnya adalah T_d.
$\therefore T_cT_d = T_dT_c = I$

Pembahasan Soal

Soal 2

Diberikan $T\colon C_R[0,1] \to \mathbb{R}$ transformasi linear terbatas dengan $T(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$

1. Tunjukkan bahwa $\|T\| \leq 1$.
2. Jika $g \in C_R[0,1]$ dengan $g(x) = 1$ untuk semua $x \in [0,1]$, dapatkan $|T(g)|$ dan $\|T\|$.

Lema 1

Misalkan X dan Y adalah ruang bernorma. Jika $\|\cdot\| : B(X,Y) \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1\},$$

maka $\|\cdot\|$ adalah norma pada $B(X,Y)$.

Jawaban:

1. Karena T operator linear terbatas, norma dari T didefinisikan oleh

$$\begin{aligned} ||T|| &= \sup\{||T(f)||_{\mathbb{R}} : ||f||_{C_{\mathbb{R}}[0,1]} \leq 1\} \\ &= \sup\{|T(f)| : \sup_{x\in[0,1]} \{|f(x)|\} \leq 1\} \\ &= \sup\{|T(f)| : |f(x)| \leq 1, \forall x \in [0,1]\} \\ &= \sup\{|T(f)| : -1 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0,1]\}. \end{aligned}$$

Misalkan $f \in C_{\mathbb{R}}[0,1]$ suatu fungsi sehingga $||f||_{C_{\mathbb{R}}[0,1]} \leq 1$, yang artinya

$$-1 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0,1]$$

Berdasarkan Teorema, berlaku

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 -1\ dx \leq \int_0^1 f(x)\ dx &\leq \int_0^1 1\ dx \\
-1 \leq \int_0^1 f(x)\ dx &\leq 1 \\
-1 \leq T(f) &\leq 1 \\
\implies |T(f)| &\leq 1.
\end{aligned}
$$

Akibatnya, 1 merupakan batas atas dari Himpunan $\{|T(f)| : -1 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0,1]\}$. Berdasarkan definisi, berlaku

$$||T|| = \sup\{|T(f)| : -1 \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0,1]\} \leq 1.$$

2. Kita ketahui bahwa $g(x) = 1, \forall x \in [0,1]$. Dengan menggunakan definisi dari T, kita dapatkan

$$|T(g)| = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x = 1.$$

Dengan begitu, kita dapatkan $|T(g)| = |1| = 1$.
Selanjutnya, perhatikan bahwa norma dari g adalah

$$\|g\| = \sup_{x\in[0,1]} |g(x)| = \sup_{x\in[0,1]} |1| = 1.$$

Ekspresi di atas dapat dinyatakan kembali sebagai $\|g\| \leq 1$. Berdasarkan sifat dari supremum, kita peroleh

$$1 = |T(g)| \leq \sup\{|T(f)| : \|f\| \leq 1\} = \|T\|.$$

Dari jawaban soal (a) dan pertidaksamaan di atas, kita dapatkan bahwa $\|T\| \leq 1$ dan $\|T\| \geq 1$. Dengan demikian, kita dapat simpulkan bahwa $\|T\| = 1$.

Pembahasan Soal

Soal 3

Misalkan $\mathcal{P}$ adalah subspace linear dari $C_c[0,1]$ yang memuat semua fungsi polinomial. Jika $T\colon \mathcal{P} \to \mathbb{C}$ adalah transformasi linear dengan $T(p) = p'(1)$, maka tunjukkan T tidak kontinu.

Lema 2

T dikatakan tidak terbatas jika $\exists p \in \mathcal{P}$ sehingga $\forall k > 0$ berlaku $||T(p)|| > k||p||$.

Jawaban:
Ambil sembarang $k > 0$. Pilih $p_n(x) = x^n$ untuk $n > k$, $x \in [0,1]$. Maka:

$$p_n'(x) = nx^{n-1}, \quad \|p_n\| = \sup\{|p_n(x)| : x \in [0,1]\} = 1.$$

Selanjutnya:

$$\|T(p_n)\| = |p_n'(1)| = |n(1)^{n-1}| = n > k = k \cdot \|p_n\|.$$

Jadi, T tidak terbatas.
Sehingga dengan menggunakan Lema 2 dapat disimpulkan T tidak kontinu

Soal 4

Jika $a = \{a_n\} \in \ell^1$ dan $\{x_n\} \in c_0$, tunjukkan bahwa $\{a_n x_n\} \in \ell^1$ dan transformasi linear $f_a\colon c_0 \to \mathbb{C}$ dengan $f_a(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ kontinu dengan $\|f_a\| \leq \|\{a_n\}\|_{\ell^1}$.

Jawaban:
Diketahui bahwa $\{a_n\} \in \ell^1$ dan $\{x_n\} \in c_0$ dimana

$$c_0 := \left\{ (x_n) \mid \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$$

Jelas barisan $a_n x_n$ merupakan barisan kompleks juga, selanjutnya akan ditunjukkan bahwa deret mutlak suku-sukunya akan konvergen. Perhatikan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x_n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \cdot |x_n| \leq ||x_n|| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| \cdot \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

Karena $\{x_n\} \in c_0 \subset \ell^\infty$ maka $\exists M > 0$ sehingga $|x_n| \leq M$, disisi lain ingat bahwa $\{a_n\} \in \ell^1$ yang mempunyai sifat $\sum |a_n| < \infty$ atau deret $\sum |a_n|$ konvergen.
$\therefore$ Terbukti bahwa $a_n x_n \in \ell^1$

Pembahasan Soal

Nomor 4

Dapat dilihat bahwa f_a transformasi linear sebab untuk $\{x_n\}$, $\{y_n\} \in c_0$, dan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ diperoleh

$$f_a(\alpha\{x_n\} + \beta\{y_n\}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \sum a_n x_n + \beta \sum a_n y_n = \alpha f_a(x) + \beta f_a(y)$$

Terakhir untuk $||f_a||$ dapat ditulis

$$\|f_a\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f_a(x)|$$

sehingga dari informasi diatas, ambil $x = \{x_n\} \in c_0$ dengan $\|x\|_\infty = \sup_n |x_n| \leq 1$, maka

$$|f_a(x)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n \right| \leq \sum |a_n x_n| \leq \sum |a_n| \cdot |x_n| \leq \sup |x_n| \cdot \sum |a_n| \leq \sum |a_n| = ||a_n||_1$$

$\therefore$ Terbukti bahwa $\|f_a\| \leq \|\{a_n\}\|_1$

Soal 5

1. Jika $(x_1, x_2, x_3, \ldots) \in \ell^2$, tunjukkan $(0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \ldots) \in \ell^2$.
2. Jika $T \colon \ell^2 \to \ell^2$ transformasi linear dengan

$$T(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4, \ldots),$$

   Tunjukkan bahwa T kontinu.

Jawaban:

1. Perhatikan bahwa $(x_1, x_2, x_3, \cdots) \in l^2$, yang berakibat

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty.$$

Perhatikan pula bahwa $|x_i|^2 \geq 0$ untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Akibatnya, berlaku

$$\sum_{i=1}^{\infty} |x_{2i-1}|^2 < \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty \implies \sum_{i=1}^{\infty} 15|x_{2i-1}|^2 = 15 \sum_{i=1}^{\infty} |x_{2i-1}|^2 < \infty.$$

Pembahasan Soal

Nomor 5

Berdasarkan Teorema, berlaku

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} 15|x_{2i-1}|^2 &< \infty \\ \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 + 15|x_{2i-1}|^2 &< \infty \\ 16|x_1|^2 + |x_2|^2 + 16|x_3|^2 + |x_4|^2 + \cdots &< \infty \\ 0^2 + |4x_1|^2 + |x_2|^2 + |4x_3|^2 + |x_4|^2 + \cdots &< \infty. \end{aligned}$$

Demikian dari definisi, terbukti bahwa $(0, 4x_1, x_2, 4x_3, x_4 \cdots) \in l^2$.

Jawaban:

2. Untuk membuktikan kontinu, dapat dibuktikan bahwa ada $k \in \mathbb{R}^+$ sehingga $||T(x)|| \leq k||x||$ untuk semua $x \in X$. Ambil sebarang $(x_n) \in l^2$, sehingga

$$\begin{aligned}
||T(x)||_2^2 &= \sqrt{0^2 + |4x_1|^2 + |x_2|^2 + |4x_3|^2 + \dots}^2 \\
&= 16|x_1|^2 + |x_2|^2 + 16|x_3|^2 + \dots \\
&\leq 16|x_1|^2 + 16|x_2|^2 + 16|x_3|^2 + \dots \\
&= 16(|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \dots) \\
&= 16\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 = 16||x||_2^2 \iff ||T(x)||_2 \leq 4||x||^2
\end{aligned}$$

Karena ada $k = 4$ yang memenuhi $||T(x)||_2 \leq k||x||^2$ untuk semua $x \in l^2$. Dengan demikian T kontinu pada l^2.