



EVALUASI TENGAH SEMESTER GASAL 2024/2025
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS
PROGRAM SARJANA

M

Matakuliah : Analisis 1
Hari, Tanggal : Kamis, 16 Oktober 2024
Waktu / Sifat : 100 menit / *Closed Book*
Kelas, Dosen :
A. Dr. Mahmud Yunus, M.Si.
B. Drs. Sadjidon, M.Si.
C. Dr. Sunarsini, M.Si.
D. Dr. Rinurwati, M.Si.

HARAP DIPERHATIKAN !!!

Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Pandang $A, B \subseteq \mathbb{R}$ dan fungsi $f : A \rightarrow B$ yang didefinisikan dengan $f(x) = \frac{2x - 3}{x + 1}$. Dapatkan *domain* dan *range* dari f agar f bijektif. Buktikan jawaban Anda.
2. Buktikan dengan Induksi Matematika bahwa jumlah n bilangan ganjil yang pertama adalah n^2 , yaitu $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$ untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.
3. Buktikan bahwa tidak ada bilangan rasional q sehingga $q^2 = 3$.
4. Tunjukkan bahwa:
 - (a) Jika $a \in \mathbb{R}$ dan $0 \leq a < \varepsilon$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $a = 0$.
 - (b) Jika $\mathcal{N}_\varepsilon(a)$ adalah persekitaran- ε dari a dan $x \in \mathcal{N}_\varepsilon(a)$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka $x = a$.
5. Diberikan barisan bilangan real $X = (x_n)$ dengan $x_n = (2 - \frac{1}{n})^2$ untuk semua $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) Tunjukkan bahwa X barisan terbatas.
 - (b) Dapatkan $\inf(X)$ dan $\sup(X)$; dan buktikan jawaban Anda.
 - (c) Dengan menerapkan definisi konvergensi barisan dan hasil bagian (b), buktikan bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup(X)$.

Solusi:

1. Pertama lakukan oret-oretan untuk mendapatkan *domain* dan *range* (Hal ini bertujuan untuk melakukan suatu klaim atau biasa kita kenal sebagai *conjecture*). Dengan menggunakan konsep kalkulus, didapatkan *domain*-nya adalah $A = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dan *range*-nya adalah $B = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Selanjutnya kita perlu buktikan bahwa dengan memilih *domain* dan *range* tersebut, fungsi f menjadi bijektif. Ingat bahwa bijektif adalah gabungan dari sifat Injektif dan sifat Surjektif.

Definisi. *Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan injektif jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dengan $x_1 \neq x_2$ maka $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Atau kita bisa menggunakan kontraposisi dari definisi diatas, yaitu

Definisi. *Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan injektif jika untuk setiap $x_1, x_2 \in A$ dengan $f(x_1) = f(x_2)$ maka $x_1 = x_2$.*

Disini kita perlu mencari apa isi dari A dan B . Dengan menggunakan konsep kalkulus, kita bisa mendapatkan $A = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dan $B = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

Selanjutnya ambil sebarang $x_1, x_2 \in A$. Kemudian misalkan $f(x_1) = f(x_2)$, maka

$$\frac{2x_1 - 3}{x_1 + 1} = \frac{2x_2 - 3}{x_2 + 1}$$

Sebab $x_1, x_2 \neq -1$, maka $x_1 + 1 \neq 0$ dan $x_2 + 1 \neq 0$. Artinya $x_1 + 1$ dan $x_2 + 1$ masing-masing punya invers yaitu $\frac{1}{x_1 + 1}$ dan $\frac{1}{x_2 + 1}$. Dengan demikian, kita bisa mengalikan kedua ruas persamaan di atas dengan $(x_1 + 1)(x_2 + 1)$ sehingga didapatkan

$$\begin{aligned}\frac{2x_1 - 3}{x_1 + 1} \cdot (x_1 + 1)(x_2 + 1) &= \frac{2x_2 - 3}{x_2 + 1} \cdot (x_1 + 1)(x_2 + 1) \\ 2x_1(x_2 + 1) - 3(x_2 + 1) &= 2x_2(x_1 + 1) - 3(x_1 + 1) \\ 2x_1x_2 + 2x_1 - 3x_2 - 3 &= 2x_2x_1 + 2x_2 - 3x_1 - 3 \\ 2x_1 - 3x_2 &= 2x_2 - 3x_1 \\ 2x_1 + 3x_1 &= 2x_2 + 3x_2 \\ 5x_1 &= 5x_2 \\ x_1 &= x_2\end{aligned}$$

didapatkan $x_1 = x_2$. Hal ini mengimplikasikan f adalah fungsi injektif.

Definisi. *Sebuah fungsi $f : A \rightarrow B$ dikatakan surjektif jika untuk setiap $y \in B$ terdapat $x \in A$ sehingga $f(x) = y$.*

Ambil sebarang $y \in B$. Karena B adalah kodomain dari f , maka y dapat dinyatakan sebagai $y = \frac{2x - 3}{x + 1}$ untuk suatu $x \in A$. Dengan demikian, kita bisa mendapatkan x sebagai berikut

$$\begin{aligned}y &= \frac{2x - 3}{x + 1} \\ y(x + 1) &= 2x - 3 \\ yx + y &= 2x - 3 \\ yx - 2x &= -3 - y \\ x(y - 2) &= -3 - y \\ x &= \frac{-3 - y}{y - 2}\end{aligned}$$

Sebab $y \neq 2$, maka $y - 2 \neq 0$. Artinya selalu ada $x \in A$ sehingga $f(x) = y$. Hal ini mengimplikasikan f adalah fungsi surjektif.

\therefore Dengan demikian, f adalah fungsi bijektif.

2. Misalkan $P(n)$ adalah pernyataan bahwa $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$.

- Untuk $n = 1$, maka $P(1)$ adalah $1 = 1^2$ yang dimana adalah pernyataan yang benar.
- Asumsi bahwa $P(k)$ benar untuk suatu $k \in \mathbb{N}$, yaitu $1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1) = k^2$.
- Untuk $n = k + 1$, maka $P(k + 1)$ adalah

$$\underbrace{1 + 3 + 5 + \cdots + (2k - 1)}_{k^2} + (2(k + 1) - 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$$

Dengan demikian, berdasarkan prinsip induksi matematika, kita bisa menyimpulkan bahwa $P(n)$ benar untuk setiap $n \in \mathbb{N}$.

3. Disini kita dapat melakukan pembuktian seperti yang biasanya dilakukan untuk membuktikan tidak ada bilangan rasional p yang memenuhi $p^2 = 2$, yaitu dengan menggunakan kontradiksi.

Asumsikan bahwa q adalah bilangan rasional, maka q dapat dinyatakan sebagai $q = \frac{a}{b}$ dengan $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ dan $\text{fpb}(a, b) = 1$. Sehingga didapatkan

$$q^2 = 3 \iff \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 3 \iff \frac{a^2}{b^2} = 3 \iff a^2 = 3b^2$$

Akibatnya a^2 adalah kelipatan dari 3. Sebab a^2 adalah bilangan bulat, maka a juga adalah kelipatan dari 3. Dengan demikian, a dapat dinyatakan sebagai $a = 3c$ untuk suatu $c \in \mathbb{Z}$. Sehingga didapatkan

$$a^2 = (3c)^2 = 9c^2 = 3b^2 \iff 3c^2 = b^2 \iff b^2$$

Hal ini juga berarti b^2 adalah kelipatan dari 3. Dari sini didapatkan hasil $\text{fpb}(a, b) = 3$ yang bertentangan dengan asumsi bahwa $\text{fpb}(a, b) = 1$.

\therefore Tidak ada bilangan rasional q yang memenuhi $q^2 = 3$.

4. (a) Diketahui $a \in \mathbb{R}$, sehingga akan memenuhi sifat-sifat pada bilangan real. Asumsikan $a \neq 0$. Maka didapat

$$0 < a < \varepsilon$$

$$a < \varepsilon, a > 0$$

Karena berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dipilih $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}a$ sehingga

$$a < \varepsilon_0, a > 0$$

$$a < \frac{1}{2}a, a > 0 \quad (\text{Kontradiksi})$$

Akibatnya asumsi $a \neq 0$ salah. Jadi haruslah $a = 0$.

- (b) Sebelumnya kita harus mengetahui terlebih dahulu definisi dari persekitaran- ε dari a .

Definisi. *Sebuah himpunan $\mathcal{N}_\varepsilon(a)$ disebut sebagai persekitaran- ε dari a jika terdapat $\varepsilon > 0$ sehingga $\mathcal{N}_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$.*

Perhatikan bahwa soal menginginkan untuk setiap $\varepsilon > 0$, maka untuk $x \in \mathcal{N}_\varepsilon(a)$ haruslah $|x - a| < \varepsilon$ memenuhi untuk setiap $\varepsilon > 0$. Sehingga dari informasi pada soal (a), didapatkan $|x - a| = 0$ yang berarti $x = a$.

5. (a) Barisan dikatakan terbatas jika dia terbatas di atas dan terbatas di bawah. Sekarang perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku

$$\left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 > 0$$

Sehingga didapatkan bahwa (x_n) terbatas di bawah oleh 0.
Selanjutnya, perhatikan bahwa untuk setiap $n \in \mathbb{N}$, berlaku

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} &> 0 \\ -\frac{1}{n} &< 0 \\ 0 < 2 - \frac{1}{n} &< 2 \\ \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 &< 4 \end{aligned}$$

Sehingga didapatkan bahwa (x_n) terbatas di atas oleh 4.

\therefore Barisan X adalah barisan terbatas.

- (b) Untuk mencari $\inf(X)$ dan $\sup(X)$, kita perlu menggunakan konsep kalkulus kembali seperti menggunakan limit dsb. Dari hasil analisa, dapat kita klaim bahwa $\inf(X) = 1$ dan $\sup(X) = 4$.

Sekarang kita akan buktikan klaim tersebut.

- Pertama kita akan buktikan bahwa $\inf(X) = 1$.

Teorema. Misalkan H adalah himpunan tak kosong dari \mathbb{R} . Sebuah bilangan $a \in \mathbb{R}$ dikatakan sebagai infimum dari H jika

- $a \leq x$ untuk setiap $x \in H$.
- Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $x \in H$ sehingga $a \leq x < a + \varepsilon$.

Menggunakan teorema di atas, diperoleh

- Untuk setiap $n \geq 1, n \in \mathbb{N}$, berlaku

$$\frac{1}{n} \leq 1 \iff 2 - \frac{1}{n} \geq 1 \iff \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 \geq 1$$

Sehingga 1 adalah batas bawah dari barisan X .

- Untuk setiap $\varepsilon > 0$, dapat dengan mudah kita pilih $x = 1 \in X$ sehingga $1 \leq x < 1 + \varepsilon$.

\therefore Terbukti $\inf(X) = 1$.

- Kedua kita akan buktikan bahwa $\sup(X) = 4$.

Teorema. Misalkan H adalah himpunan tak kosong dari \mathbb{R} . Sebuah bilangan $b \in \mathbb{R}$ dikatakan sebagai supremum dari H jika

- $b \geq x$ untuk setiap $x \in H$.
- Untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $x \in H$ sehingga $b - \varepsilon < x \leq b$.

Menggunakan teorema di atas, diperoleh

- Dari hasil (a), jelas bahwa 4 adalah batas atas dari barisan X .

- ii. Dengan sifat Archimedes, didapatkan untuk setiap $\varepsilon > 0$ selalu terdapat $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga $\frac{1}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Informasi tersebut dapat digunakan sebagai berikut

$$\left(2 - \frac{1}{n_\varepsilon}\right)^2 = 4 - \frac{4}{n_\varepsilon} + \frac{1}{n_\varepsilon^2} > 4 - \frac{4}{n_\varepsilon}$$

Pilih $n_\varepsilon = \frac{4}{\varepsilon}$, sehingga

$$4 - \frac{4}{n_\varepsilon} > 4 - \varepsilon$$

Hal ini menunjukkan terdapat $x = \left(2 - \frac{1}{n_\varepsilon}\right)^2 \in X$ sehingga $4 - \varepsilon < x \leq 4$.

\therefore Terbukti $\sup(X) = 4$.

- (c) Ingat tentang definisi konvergensi barisan

Definisi. *Sebuah barisan (x_n) dikatakan konvergen ke $a \in \mathbb{R}$ untuk setiap $\varepsilon > 0$, terdapat $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ sehingga untuk setiap $n \geq N_\varepsilon$ berlaku $|x_n - a| < \varepsilon$.*

Dari hasil sebelumnya, kita sudah mengetahui bahwa $\sup(X) = 4$. Sehingga kita bisa klaim bahwa $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$.

Sekarang akan kita buktikan klaim tersebut. Perhatikan bahwa

$$|x_n - 4| = \left| \left(2 - \frac{1}{n}\right)^2 - 4 \right| = \left| \frac{1}{n^2} - \frac{4}{n} \right| \leq \frac{1}{n^2} + \frac{4}{n} < \frac{4}{n}$$

Pilih $N_\varepsilon = \frac{4}{\varepsilon}$, sehingga untuk setiap $n \geq N_\varepsilon$ berlaku

$$|x_n - 4| < \varepsilon$$

Sehingga berdasarkan definisi konvergensi barisan, didapatkan $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4$.