

|      |                         |
|------|-------------------------|
| Nama | : Teosofi Hidayah Agung |
| NRP  | : 5002221132            |

28. Misalkan  $X_1$  dan  $X_2$  adalah sampel acak berukuran  $n = 2$  dari distribusi kontinu dengan pdf yang didefinisikan  $f(x) = 2x$  untuk  $0 < x < 1$  dan  $f(x) = 0$  untuk yang lain.

(a) Tentukan pdf marginal dari statistik order terkecil dan terbesar,  $Y_1$  dan  $Y_2$ .

**Solusi:**

Untuk mencari pdf marginal, kita gunakan formula berikut

$$g_k(y_k) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} [F(y_k)]^{k-1} [1 - F(y_k)]^{n-k} f(y_k)$$

Diketahui bahwa  $n = 2$ ,  $f(y_k) = 2y_k$  dan  $F(y_k) = y_k^2$ .

• Untuk  $Y_1$

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= \frac{2!}{((1-1)!(2-1)!) [F(y_1)]^{1-1} [1 - F(y_1)]^{2-1} f(y_1)} \\ &= 2[1 - y_1^2]2y_1 = 4y_1 - 4y_1^3, \quad 0 < y_1 < 1 \end{aligned}$$

• Untuk  $Y_2$

$$\begin{aligned} g_2(y_2) &= \frac{2!}{((2-1)!(2-2)!) [F(y_2)]^{2-1} [1 - F(y_2)]^{2-2} f(y_2)} \\ &= 2[y_2^2]2y_2 = 4y_2^3, \quad 0 < y_2 < 1 \end{aligned}$$

(b) Tentukan pdf bersama dari  $Y_1$  dan  $Y_2$ .

**Solusi:**

Untuk mencari pdf bersama dari  $Y_1$  dan  $Y_2$  kita gunakan formula berikut

$$g(y_1, y_2) = 2!f(y_1)f(y_2), \quad y_1 < y_2$$

Sehingga, kita dapatkan

$$g(y_1, y_2) = 2! \cdot 2y_1 \cdot 2y_2 = 8y_1y_2, \quad 0 < y_1 < y_2 < 1$$

(c) Tentukan pdf dari rentang sampel  $R = Y_2 - Y_1$ .

**Solusi:**

Misalkan  $R = Y_2 - Y_1$  dan  $S = Y_1$ , sehingga  $Y_2 = R + S$ . Disini akan kita transformasikan sampel acak  $(Y_1, Y_2)$  ke  $(R, S)$ .

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial R} & \frac{\partial Y_1}{\partial S} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial R} & \frac{\partial Y_2}{\partial S} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Perhatikan untuk interval variabel sampelnya

$$\begin{aligned} 0 &< y_1 < y_2 < 1 \\ \iff 0 &< s < r + s < 1 \\ \iff 0 &< s < 1 - r \end{aligned}$$

maka pdf bersama dari  $R$  dan  $S$  adalah

$$\begin{aligned} g(r, s) &= g(y_1, y_2) |J| \\ &= 8y_1 y_2 \\ &= 8s(r + s), \quad 0 < s < 1 - r \end{aligned}$$

Sekarang kita akan mencari pdf marginal dari  $R$ .

$$\begin{aligned} g_R(r) &= \int_0^{1-r} 8s(r + s) ds \\ &= 8r \int_0^{1-r} s ds + 8 \int_0^{1-r} s^2 ds \\ &= 8r \left[ \frac{s^2}{2} \right]_0^{1-r} + 8 \left[ \frac{s^3}{3} \right]_0^{1-r} \\ &= 8r \left[ \frac{(1-r)^2}{2} \right] + 8 \left[ \frac{(1-r)^3}{3} \right] \\ &= 4r(1-r)^2 + \frac{8}{3}(1-r)^3 \end{aligned}$$

$\therefore$  pdf dari rentang sampel  $R$  adalah  $g_R(r) = 4r(1-r)^2 + \frac{8}{3}(1-r)^3$ ,  $0 < r < 1$ .

29. Tinjau sampel acak berukuran  $n$  dari distribusi dengan pdf  $f(x) = 1/x^2$  untuk  $1 \leq x < \infty$  dan  $f(x) = 0$  untuk yang lain.

(a) Dapatkan pdf bersama statistik order

**Solusi:**

Untuk mencari pdf bersama dari statistik order berukuran  $n$ , kita gunakan formula berikut

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = n! f(y_1) f(y_2) \dots f(y_n), \quad y_1 < \dots < y_n$$

Sehingga didapatkan pdf bersamanya

$$\begin{aligned} g(y_1, y_2, \dots, y_n) &= n! \left( \frac{1}{y_1^2} \right) \left( \frac{1}{y_2^2} \right) \dots \left( \frac{1}{y_n^2} \right) \\ &= \frac{n!}{(y_1 y_2 \dots y_n)^2}, \quad 1 < y_1 < \dots < y_n < \infty \end{aligned}$$

(b) Dapatkan pdf dari statistik order terkecil,  $Y_1$ .

**Solusi:**

Diketahui  $f(y_k) = \frac{1}{y_k^2}$  dan  $F(y_k) = \int_1^{y_k} \frac{1}{x^2} dx = 1 - \frac{1}{y_k}$ . Kemudian kita gunakan formula berikut

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= \frac{n!}{(1-1)!(n-1)!} [F(y_1)]^{1-1} [1-F(y_1)]^{n-1} f(y_1) \\ &= \frac{n!}{(n-1)!} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{y_1} \right) \right] \left( \frac{1}{y_1^2} \right) \\ &= \frac{n}{y_1^3}, \quad 1 < y_1 < \infty \end{aligned}$$

- (c) Dapatkan pdf dari statistik order terbesar,  $Y_n$ .

**Solusi:**

Dengan cara yang sama, kita dapatkan

$$\begin{aligned} g_n(y_n) &= \frac{n!}{(n-1)!(n-n)!} [F(y_n)]^{n-1} [1-F(y_n)]^{n-n} f(y_n) \\ &= n \left( 1 - \frac{1}{y_n} \right)^{n-1} \left( \frac{1}{y_n^2} \right) \\ &= \frac{n}{y_n^2} \left( 1 - \frac{1}{y_n} \right)^{n-1}, \quad 1 < y_n < \infty \end{aligned}$$

- (d) Dapatkan pdf dari rentang sampel,  $R = Y_n - Y_1$ , untuk  $n = 2$ .

**Solusi:**

Misalkan  $R = Y_n - Y_1$  dan  $S = Y_1$ , sehingga  $Y_2 = R + S$ . Disini akan kita transformasikan sampel acak  $(Y_1, Y_2)$  ke  $(R, S)$ .

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial R} & \frac{\partial Y_1}{\partial S} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial R} & \frac{\partial Y_2}{\partial S} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Perhatikan untuk interval variabel sampelnya

$$\begin{aligned} 1 &< y_1 < y_2 < \infty \\ \iff 1 &< s < r + s < \infty \\ \iff 1 &< s < \infty \end{aligned}$$

maka pdf bersama dari  $R$  dan  $S$  adalah

$$\begin{aligned} g(r, s) &= g(y_1, y_2)|J| \\ &= 2 \left( \frac{1}{y_1^2} \right) \left( \frac{1}{y_2^2} \right) \\ &= 2 \left( \frac{1}{s^2} \right) \left( \frac{1}{(r+s)^2} \right), \quad 1 < s < \infty \end{aligned}$$

Sekarang kita akan mencari pdf marginal dari  $R$ .

$$\begin{aligned} g_R(r) &= 2 \int_1^\infty \frac{1}{s^2(r+s)^2} ds \\ &= 2 \int_1^\infty \frac{2}{r^3(r+s)} + \frac{1}{r^2(r+s)^2} + \frac{1}{r^2 s^2} - \frac{2}{r^3 s} ds \\ &= 2 \left[ \frac{2}{r^3} \ln(r+s) - \frac{1}{r^2(r+s)} - \frac{1}{r^2 s} - \frac{2}{r^3} \ln s \right]_1^\infty \\ &= 2 \left[ \frac{2}{r^3} \ln \left( \frac{r+s}{s} \right) - \frac{1}{r^2(r+s)} - \frac{1}{r^2 s} \right]_1^\infty \\ &= 2 \left[ \frac{2}{r^3} \ln(1) - 0 - 0 - \left( \frac{2}{r^3} \ln(r+1) - \frac{1}{r^2(r+1)} - \frac{1}{r^2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{r^2(r+1)} + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^3} \ln(r+1) \end{aligned}$$

$\therefore$  pdf dari rentang sampel  $R$  adalah  $g_R(r) = \frac{1}{r^2(r+1)} + \frac{1}{r^2} - \frac{2}{r^3} \ln(r+1)$ ,  $1 < r < \infty$ .

- (e) Dapatkan pdf dari median sampel  $Y_r$ , asumsikan  $n$  ganjil sehingga  $r = (n+1)/2$ .

**Solusi:**

Gunakan formula yang sama

$$\begin{aligned} g_r(y_r) &= \frac{n!}{(r-1)!(n-r)!} [F(y_r)]^{r-1} [1-F(y_r)]^{n-r} f(y_r) \\ &= \frac{n!}{\left(\frac{n-1}{2}\right)! \left(\frac{n-1}{2}\right)!} \left[1 - \frac{1}{y_r}\right]^{\frac{n-1}{2}} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{y_r}\right)\right]^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{y_r^2}\right) \\ &= \frac{n!}{\left(\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right)^2} \left(1 - \frac{1}{y_r}\right)^{\frac{n-1}{2}} \left(\frac{1}{y_r}\right)^{\frac{n+3}{2}}, \quad 1 < y_r < \infty \end{aligned}$$

31. Tinjau sampel acak berukuran  $n$  dari distribusi eksponensial,  $X_i \sim \text{EXP}(1)$ . Dapatkan setiap pdf berikut:

- (a) statistik order terkecil,  $Y_1$ .

**Solusi:**

Diketahui bahwa  $f(x) = e^{-x}$  dan  $F(x) = 1 - e^{-x}$ . Maka, kita dapatkan

$$\begin{aligned} g_1(y_1) &= \frac{n!}{(1-1)!(n-1)!} [F(y_1)]^{1-1} [1 - F(y_1)]^{n-1} f(y_1) \\ &= n[1 - (1 - e^{-y_1})]^{n-1} e^{-y_1} \\ &= n[e^{-y_1}]^{n-1} e^{-y_1} \\ &= \frac{n}{e^{ny_1}}, \quad 0 < y_1 < \infty \end{aligned}$$

(b) statistik order terbesar,  $Y_n$ .

**Solusi:**

Dengan cara yang sama, kita dapatkan

$$\begin{aligned} g_n(y_n) &= \frac{n!}{(n-1)!(n-n)!} [F(y_n)]^{n-1} [1 - F(y_n)]^{n-n} f(y_n) \\ &= n(1 - e^{-y_n})^{n-1} e^{-y_n}, \quad 0 < y_n < \infty \end{aligned}$$

(c) rentang sampel,  $R = Y_n - Y_1$ .

**Solusi:**

Misalkan  $R = Y_n - Y_1$  dan  $S = Y_1$ , sehingga  $Y_n = R + S$ . Disini akan kita transformasikan sampel acak  $(Y_1, Y_n)$  ke  $(R, S)$ .

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial R} & \frac{\partial Y_1}{\partial S} \\ \frac{\partial Y_n}{\partial R} & \frac{\partial Y_n}{\partial S} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

Perhatikan untuk interval variabel sampelnya

$$\begin{aligned} 0 &< y_1 < y_n < \infty \\ \iff 0 &< s < r + s < \infty \\ \iff 0 &< s < \infty \end{aligned}$$

Dengan menggunakan formula

$$\begin{aligned} g(y_i, y_j) &= \frac{n!}{(i-1)!(j-i-1)!(n-j)!} [F(y_i)]^{i-1} f(y_i) [F(y_j) - F(y_i)]^{j-i-1} \\ &\quad [1 - F(y_j)]^{n-j} f(y_j), \quad y_i < y_j \end{aligned}$$

maka pdf bersama dari  $R$  dan  $S$  adalah

$$\begin{aligned}
 g(r, s) &= g(y_1, y_n) |J| \\
 &= \frac{n!}{(1-1)!(n-1-1)!(n-n)!} [F(y_1)]^{1-1} f(y_1) [F(y_n) - F(y_1)]^{n-1-1} \\
 &\quad [1 - F(y_n)]^{n-n} f(y_n) \\
 &= \frac{n!}{(n-2)!} e^{-y_1} [(1 - e^{-y_n}) - (1 - e^{-y_1})]^{n-2} e^{-y_n} \\
 &= \frac{n!}{(n-2)!} e^{-y_1} (e^{-y_1} - e^{-y_n})^{n-2} e^{-y_n} \\
 &= \frac{n!}{(n-2)!} e^{-r-2s} (e^{-s} - e^{-r-s})^{n-2}, \quad 0 < s < \infty
 \end{aligned}$$

Dengan demikian pdf dari rentang sampel  $R$  adalah

$$\begin{aligned}
 g_R(r) &= \int_0^\infty \frac{n!}{(n-2)!} e^{-r-2s} (e^{-s} - e^{-r-s})^{n-2} ds \\
 &= \frac{n!}{(n-2)!} e^{-r} \int_0^\infty e^{-2s} (e^{-s} - e^{-r-s})^{n-2} ds \\
 &= \frac{n!}{(n-2)!} e^{-r} \int_0^\infty e^{-2s} (e^{-s} (1 - e^{-r}))^{n-2} ds \\
 &= \frac{n!}{(n-2)!} e^{-r} (1 - e^{-r})^{n-2} \int_0^\infty e^{-2ns} ds \\
 &= \frac{n!}{(n-2)!} e^{-r} (1 - e^{-r})^{n-2} \left[ -\frac{1}{2n} e^{-2ns} \right]_0^\infty \\
 &= \frac{n!}{2n(n-2)!} e^{-r} (1 - e^{-r})^{n-2}
 \end{aligned}$$

$\therefore$  pdf dari rentang sampel  $R$  adalah  $g_R(r) = \frac{n!}{2n(n-2)!} e^{-r} (1 - e^{-r})^{n-2}, \quad 0 < r < \infty$ .

(d)  $r$  statistik pertama,  $Y_1, \dots, Y_r$ .

**Solusi:**

Gunakan formula berikut

$$g(y_1, \dots, y_r) = \frac{n!}{(n-r)!} [1 - F(y_r)]^{n-r} \prod_{i=1}^r f(y_i)$$

sehingga

$$\begin{aligned}
 g(y_1, \dots, y_r) &= \frac{n!}{(n-r)!} [1 - (1 - e^{-y_r})]^{n-r} \prod_{i=1}^r e^{-y_i} \\
 &= \frac{n!}{(n-r)!} e^{-(n-r)y_r} e^{-\sum_{i=1}^r y_i} \\
 &= \frac{n!}{(n-r)!} e^{(r-n)y_r - (y_1 + \dots + y_r)}, \quad 0 < y_1 < \dots < y_r < \infty
 \end{aligned}$$