

1. Jika $T : C_{\mathbb{R}}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ adalah transformasi linier yang didefinisikan oleh:

$$T(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Tunjukkan bahwa T kontinu.

Penyelesaian:

Ruang $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ adalah ruang fungsi kontinu dari $[0, 1]$ ke \mathbb{R} , dan dilengkapi dengan norma maksimum:

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Kita ingin menunjukkan bahwa terdapat konstanta $C > 0$ sehingga:

$$|T(f)| = \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq C \|f\|_{\infty}.$$

Untuk semua $f \in C_{\mathbb{R}}[0, 1]$, diperoleh:

$$|T(f)| = \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 \|f\|_{\infty} dx = \|f\|_{\infty}.$$

Sehingga:

$$|T(f)| \leq \|f\|_{\infty}.$$

Dengan kata lain, terdapat konstanta $C = 1$ sehingga:

$$|T(f)| \leq C \|f\|_{\infty}.$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa T kontinu di $f(x) = 0$ sehingga dapat disimpulkan T kontinu di seluruh ruang $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$.