Pengantar Analisis Fungsional

Cheatsheet

Normed Spaces

Definisi 2.1 Misalkan X ruang vektor atas $\mathbb{F}$. Suatu fungsi $||\cdot|| : X \to \mathbb{R}$ dikatakan norm di X jika untuk setiap $x, y \in X$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$ berlaku

(i) $||x|| \geq 0$;

(ii) $||x|| = 0 \iff x = 0$;

(iii) $||\alpha x|| = |\alpha| \cdot ||x||$;

(iv) $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Definisi 2.12 Misalkan X adalah ruang vektor dan $\|\cdot\|_1$ serta $\|\cdot\|_2$ adalah dua norma pada X. Norma $\|\cdot\|_2$ *ekuivalen* dengan norma $\|\cdot\|_1$ jika terdapat bilangan $M, m > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap $x \in X$ berlaku

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1.$$

Norm of Some Normed Spaces

1. Norm di $\mathbb{R}^n$ dan $\mathbb{C}^n$ didefinisikan oleh

$$||x|| = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

2. Norm di Ruang l^p didefinisikan oleh

$$||x|| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

3. Norm di Ruang l^∞ didefinisikan oleh

$$||x|| = \sup_j |\xi_j|$$

4. Norm di Ruang $C[a, b]$ didefinisikan oleh

$$||x|| = \max_{t \in J} |x(t)|$$

Inner Products

Definisi 3.3 Misalkan X ruang vektor bernilai kompleks. Suatu fungsi $< \cdot, \cdot >: X \times X \to \mathbb{C}$ dikatakan *inner product* di X jika untuk setiap $x, y, z \in X$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ berlaku

(i) $\langle x, x\rangle \in \mathbb{R}$ dan $\langle x, x\rangle \geq 0$;

(ii) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = 0$;

(iii) $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x, z\rangle + \beta\langle y, z\rangle$;

(iv) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

Some Examples of Inner Product

1. **Inner Product di $\mathbb{R}^n$**
   Untuk $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

2. **Inner Product di $\mathbb{C}^n$**
   Untuk $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{C}^n$,

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

3. **Inner Product di $L^2[a, b]$**
   Untuk fungsi $f, g \in L^2[a, b]$,

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

4. **Inner Product di ℓ^2**
   Untuk barisan $x = (x_1, x_2, \dots)$, $y = (y_1, y_2, \dots) \in \ell^2$,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \overline{y_i}$$

5. **Norma pada ℓ^p dan L^p untuk $p \neq 2$**
   Ruang ℓ^p dan L^p bukan inner product space jika $p \neq 2$, namun normanya didefinisikan sebagai:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}, \quad x \in \ell^p$$

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{1/p}, \quad f \in L^p[a, b]$$

6. **Inner Product di $C[a, b]$**
   Ruang $C[a, b]$ bukan inner product space secara umum, tetapi dapat dilengkapi dengan inner product seperti di $L^2[a, b]$:

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, dx, \quad f, g \in C[a, b]$$

Orthogonal Complements

Definisi 3.31. Sebuah subset A dari sebuah ruang vektor X dikatakan konveks jika untuk sebarang $x, y \in A$ dan $\lambda \in [0,1]$, maka $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.

Teorema 3.32. Jika A adalah subset tak kosong, tertutup, dan konveks dari ruang Hilbert $\mathcal{H}$ dan misalkan $p \in \mathcal{H}$, maka ada secara tunggal $q \in A$ sedemikian sehingga

$$\|p-q\| = \inf\{\|p-a\| : a \in A\}.$$

Teorema 3.34. Misalkan Y adalah subruang vektor tertutup dari ruang Hilbert $\mathcal{H}$. Untuk sebarang $x \in \mathcal{H}$, ada secara tinggal $y \in Y$ dan $z \in Y^{\perp}$ sedemikian sehingga $x = y + z$. Selain itu, $\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2$.

Operator Linear

Suatu operator T dikatakan sebagai **transformasi linier** jika untuk setiap $x, y \in T$ dan setiap skalar α, berlaku:

(a) $T(x+y) = T(x) + T(y)$

(b) $T(\alpha x) = \alpha T(x)$

Transformasi Linear Kontinu

Lemma 4.1. Misalkan X dan Y adalah ruang linear bernorma dan misalkan $T : X \to Y$ adalah sebuah transformasi linear. Pernyataan di bawah ini saling ekuivalen.

(a) T kontinu seragam.

(b) T kontinu.

(c) T kontinu di 0.

(d) Ada sebuah bilangan real positif k sedemikian hingga $\|T(x)\| \le k$ ketika $x \in X$ dan $\|x\| \le 1$.

(e) Ada sebuah bilangan real positif k sedemikian hingga $\|T(x)\| \le k\|x\|, \forall x \in X$.

Lemma 4.3. Jika $\{c_n\} \in \ell^\infty$ dan $\{x_n\} \in \ell^p$, dengan $1 \le p < \infty$, maka $\{c_n x_n\} \in \ell^p$ dan

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n x_n|^p \le |\{c_n\}|_\infty^p \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p.$$

Definisi 4.6. Misalkan X dan Y adalah ruang linear bernorma dan misalkan $T : X \to Y$ adalah transformasi linear. T dikatakan terbatas jika ada sebuah bialng real positif k demikia sehingga $\|T(x)\| \le k\|x\|, \forall x \in X$.

Teorema 4.9. Jika X adalah ruang bernorma berdimensi hingga, Y adalah sebarang ruang bernorma, dan $T : X \to Y$ adalah transformasi linear, maka T kontinu. .

Lemma 4.11. Jika X dan Y adalah ruang linear bernorma dan $T : X \to Y$ adalah transformasi linear kontinu, maka $\ker(T)$ tertutup.

Definisi 4.12. Jika X dan Y adalah ruang bernorma dan $T : X \to Y$ adalah transformasi linear, graf dari T adalah subruang linear $\mathcal{G}(T)$ dari $X \times Y$ didefinisikan sbegai

$$\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) : x \in X\}.$$

Lemma 4.13. Jika X dan Y adalah ruang bernorma dan $T : X \to Y$ adalah transformasi linear, maka $\mathcal{G}(T)$ tertutup.

Lemma 4.14. Misalkan X dan Y adalah ruang linear bernorma dan misalkan $S, T \in B(X,Y)$ dengan $\|S(x)\| \le k_1\|x\|$ dan $\|T(x)\| \le k_2\|x\|, \forall x \in X$. Jika $\lambda \in \mathbb{F}$, maka

(a) $\|(S+T)(x)\| \le (k_1+k_2)\|x\|, \forall x \in X$;

(b) $\|(\lambda S)(x)\| \le |\lambda| k_1 \|x\|, \forall x \in X$;

(c) $B(X,Y)$ adalah subruang linear dari $L(X,Y)$ sehingga $B(X,Y)$ adalah ruang vektor.

Norma dari Operator Linear Terbatas

Lemma 4.15. Misalkan X dan Y adalah ruang bernorma. Jika $\|\cdot\| : B(X,Y) \to \mathbb{R}$ didefinisikan sebagai

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \le 1\},$$

maka $\|\cdot\|$ adalah norma pada $B(X,Y)$.

Definisi 4.16. Misalkan X dan Y adalah ruang linear bernorma dan misalkan $T \in B(X,Y)$. Norma dari T didefinisikan sebagai $\|T\| = \sup\{\|T(x)\| : \|x\| \le 1\}$.

Definisi 4.17. Misalkan $\mathbb{F}^p$ mempunyai norm standar dan misalkan A adalah matriks berukuran $m \times n$ dengan entrinya anggota $\mathbb{F}$. Jika $T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ adalah transformasi linear terbatas yang didefinisikan sebagai $T(x) = Ax$, maka norma dari matriks A didefinisikan sebagai $\|A\| = \|T\|$.

Teorema 4.19. Misalkan X adalah ruang linear bernorma dan misalkan W adalah subruang dari X yang rapat. Misalkan Y adalah ruang Banach dan misalkan $S \in B(W,Y)$.

(a) Jika $x \in X$ dan $\{x_n\}$ serta $\{y_n\}$ adalah barisan di W sedemikian sehingga $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$, maka $\{S(x_n)\}$ dan $S(\{y_n\})$ keduanya konvergen dan $\lim_{n\to\infty} S(x_n) = \lim_{n\to\infty} S(y_n)$.

(b) Ada $T \in B(X,Y)$ sedemikian sehingga $\|T\| = \|S\|$ dan $Tx = Sx, \forall x \in W$.

Definisi 4.20. Misalkan X dan Y adalah ruang linear bernorma dan misalkan $T \in L(X,Y)$. Jika $\|T(x)\| = \|x\|, \forall x \in X$, maka T dikatakan *isometry*.

Lemma 4.23. Misalkan X dan Y adalah ruang linear bernorma dan misalkan $T \in L(X,Y)$. Jika T adalah *isometry*, maka T terbatas dan $\|T\| = 1$.

Definisi 4.24. Jika X dan Y adalah ruang linear bernorma dan T adalah *isometry* dari X pada Y (fungsi pada), maka T dikatakan sebagai *isometric isomorphism* dan X dan Y dikatakan *isometrically isomorphic*.

Teorema 4.25. Jika $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert berdimensi tak hingga atas lapangan $\mathbb{F}$ dengan basis orthonormal $\{e_n\}$, maka ada sebuah *isometry* $T : \mathcal{H} \to \ell^2_{\mathbb{F}}$ sedemikian sehingga $T(e_n) = \tilde{e}_n$, untuk semua $n \in \mathbb{N}$.

Ruang $B(X,Y)$ dan Ruang Dual

Teorema 4.27. Jika X adalah ruang linear bernorma dan Y adalah ruang Banach, maka ruang bernorma $B(X,Y)$ adalah ruang Banach.

Definisi 4.28. Misalkan X adalah ruang bernorma atas lapangan $\mathbb{F}$. Ruang $B(X,\mathbb{F})$ dikatakan sebagai *dual space* (ruang dual) dari X dan dinotasikan sebagai X'.

Corollary 4.29. Jika X adalah ruang vektor bernorma, maka X' adalah ruang Banach.

Teorema 4.31. (Teorema Riesz-Frechet) Jika $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert dan $f \in \mathcal{H}'$, maka ada secara tunggal $y \in \mathcal{H}$ sedemikian sehingga $f(x) = \langle x, y\rangle$ untuk semua $x \in \mathcal{H}$. Lebih lanjut, $\|f\| = \|y\|$.

Teorema 4.32.

(a) Jika $c = \{c_n\} \in \ell^\infty$ dan $\{x_n\} \in \ell^1$, maka $\{c_n x_n\} \in \ell^1$. Jika transformasi linear $f_c : \ell^1 \to \mathbb{F}$ yang didefinisikan sebagai $f_c(\{x_n\}) = \sum_{n=1}^\infty c_n x_n$, maka $f_c \in \left(\ell^1\right)'$ dengan
$$\|f_c\| \le \|c\|_\infty$$

(b) Jika $f \in \left(\ell^1\right)'$, maka ada $c \in \ell^\infty$ sedemikian hingga $f = f_c$ dan $\|c\|_\infty \le \|f\|$.

(c) Ruang $\left(\ell^1\right)'$ *isometrically isomorphic* terhadap ℓ^∞.

Lemma 4.33. Jika X, Y, dan Z adalah ruang linear bernorma dan $T \in B(X,Y)$ dan $S \in B(Y,Z)$, maka $S \circ T \in B(X,Z)$ dan
$$\|S \circ T\| \le \|S\|\|T\|.$$

Notasi Jika X adalah ruang linear bernorma, maka himpunan $B(X,X)$ dari semua operator linear terbatas dari X ke X akan dilambangkan dengan $B(X)$.

Definisi 4.34. Misalkan X, Y, dan Z adalah ruang linear bernorma dab $T \in B(X,Y)$ dan $S \in B(Y,Z)$. Komposisi $S \circ T$ dari S dan T akan dinotasikan sebagai ST dan dinamakan sebagai *product* dari S dan T.

Lemma 4.35. Misalkan X adalah ruang linear bernorma.

(a) $B(X)$ adalah sebuah aljabar dengan identitas dan juga sebuah ring dengan identitas.

(b) Jika $\{T_n\}$ dan $\{S_n\}$ adalah barisan in $B(X)$ sedemikian hingga $\lim_{n\to\infty} T_n = T$ dan $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, maka $\lim_{n\to\infty} S_n T_n = ST$.

Notasi Misalkan X adalah ruang bernorma dan misalkan $T \in B(X)$.

(a) TT akan dinotasikan sebagai T^2, TTT akan dinotasikan sebagai T^3, dan secara umum *product* dari T dengan dirinya sendiri sebanyak n kali akan dinotasikan sebagai T^n.

(b) Jika $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$ dan $p : \mathbb{F} \to \mathbb{F}$ adalah polinomial yang didefinisikan sebagai $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, maka $p(T)$ didefinisikan sebagai $p(T) = a_0 + a_1 T + \cdots + a_n T^n$.

Lemma 4.36. Misalkan X adalah ruang linear bernorma dan $T \in B(X)$. Jika p dan q adalah polinomial dan $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, maka

(a) $(\lambda p + \mu q)(T) = \lambda p(T) + \mu q(T)$;

(b) $pq(T) = p(T)q(t)$.

Invers Operator

Definisi 4.37 Misalkan X adalah ruang linier bernoma. Sebuah operator $T \in B(X)$ dikatakan **invertible** jika ada $S \in B(X)$ sehingga $ST = I = TS$.

Notasi Misalkan X adalah ruang linear bernorma dan $T \in B(X)$ bersifat invertibel. Elemen $S \in B(X)$ yang memenuhi $ST = I = TS$ disebut invers dari T dan dilambangkan dengan T^{-1}.

Lemma 4.38 Jika X adalah ruang linear bernorma dan T_1, T_2 adalah elemen invertibel dari $B(X)$, maka:

(a) T_1^{-1} juga invertibel dengan invers T_1;

(b) $T_1 T_2$ invertibel dengan invers $T_2^{-1} T_1^{-1}$.

Teorema 4.40 Misalkan X adalah ruang Banach. Jika $T \in B(X)$ adalah suatu operator dengan $\|T\| < 1$, maka $I - T$ dapat diinvertkan dan inversnya diberikan oleh $(I-T)^{-1} = \sum_{n=0}^\infty T^n$.

Notasi Derat di Teorema 4.40 kadang disebut Deret *Neumann.*

Akibat 4.42 Misalkan X adalah ruang banach. Himpunan $\mathcal{A}$ yang terdiri dari elemen-elemen yang invertible di dalam $B(X)$ adalah himpunan yang terbuka.

Teorema 4.43 (Teorema Pemetaan Terbuka) Misalkan X dan Y adalah ruang Banach dan $T \in B(X,Y)$ memetakan X ke seluruh Y. Misalkan

$$L = \{T(x) : x \in X \text{ dan } \|x\| \leq 1\},$$

dengan closure $\overline{L}$. Maka:

(a) Terdapat $r > 0$ sedemikian sehingga $\{y \in Y : \|y\| \leq r\} \subseteq \overline{L}$;

(b) $\{y \in Y : \|y\| \leq \frac{r}{2}\} \subseteq L$;

(c) Jika, sebagai tambahan, T bersifat satu-ke-satu (one-to-one), maka terdapat $S \in B(Y,X)$ sehingga $S \circ T = I_X$ dan $T \circ S = I_Y$.

Akibat 4.44 (Teorema Graf Tertutup) Jika X dan Y adalah ruang banach dan T adalah transformasi linier dari X ke Y sehingga $\mathcal{G}(T)$, graf dari T, tertutup, maka T kontinu.

Akibat 4.45 (Teorema isomorfisma Banach) Jika X adalah ruang banach dan $T \in B(X)$ adalah satu-satu dan memetakan X ke X maka T invertible.

Lemma 4.46 Jika X adalah ruang linier bernorma dan $T \in B(X)$ invertible, maka untuk semua $x \in X$ berlaku $||T(x)|| \geq ||T^{-1}||^{-1}||x||$.

Lemma 4.47 Jika X adalah ruang banach dan $T \in B(X)$ mempunyai properti bahwa ada $\alpha > 0$ sehingga $||T(x)|| \geq \alpha||x||$ untuk semua $x \in X$, maka $\mathrm{Im}(T)$ adalah himpunan tertutup.

Teorema 4.48 Misalkan X adalah ruang banach dan misalkan $T \in B(X)$. Pernyataan di bawah ini ekivalen:

(a) T invertible

(b) $\mathrm{Im}(T)$ rapat di X dan ada $\alpha > 0$ sehingga $||T(x)|| \geq \alpha||x||$ untuk semua $x \in X$.

Akibat 4.49 Misalkan X Ruang Banach dan $T \in B(X)$. Operator T tidak *invertible* jika dan hanya jika $\mathrm{Im}(T)$ tidak rapat di X atau terdapat barisan $\{x_n\} \in X$ dengan $||x_n|| = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ tetapi $\lim\limits_{n\to\infty} T(x_n) = 0$.

Some Useful Inequality

Pertidaksamaan Hölder

Untuk $p > 1$, $q > 1$, dan $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^q\right)^{1/q}$$

Pertidaksamaan Cauchy–Schwarz

Kasus khusus dari Hölder ketika $p = q = 2$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j \eta_j| \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^2\right)^{1/2}$$

Pertidaksamaan Minkowski

Untuk $p \geq 1$,

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} |\xi_j + \eta_j|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{m=1}^{\infty} |\eta_m|^p\right)^{1/p}$$

The Adjoint of an Operator

Teorema 5.1 Misalkan $\mathcal{H}$ dan $\mathcal{K}$ merupakan ruang kompleks Hilbert dan $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$. Ada tunggal operator $T^* \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ sehingga $(Tx, y) = (x, T^*y)$ $\forall x \in \mathcal{H}$ dan $\forall y \in \mathcal{K}$.

Definisi 5.2 Jika $\mathcal{H}$ dan $\mathcal{K}$ merupakan ruang kompleks Hilbert dan $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$, operator T^* yang dikonstruksi di teorema 5.1 disebut adjoint dari T.

Definisi 5.4 Jika $A = [a_{i,j}] \in M_{mn}(\mathbb{F})$, maka matriks $[\overline{a_{i,j}}]$ disebut adjoint dari A dan dinotasikan dengan A^*.

Lemma 5.8 Misalkan $\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ dan $\mathcal{L}$ merupakan ruang kompleks Hilbert. Misalkan $R, S \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ dan $T \in B(\mathcal{K}, \mathcal{L})$, serta $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, maka

1. $(\mu R + \lambda S)^* = \overline{\mu} R^* + \overline{\lambda} S^*$;

2. $(TR)^* = r^*T^*$

Teorema 5.10 Misalkan $\mathcal{H}$ dan $\mathcal{K}$ merupakan ruang kompleks Hilbert dan $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

1. $(T^*)^* = T$

2. $||T^*|| = ||T||$

3. Fungsi $f : B(\mathcal{H}, \mathcal{K}) \to B(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ yang didefinisikan sebagai $f(R) = R^*$ kontinu.

4. $||T^*T|| = ||T||^2$

Lemma 5.11 Misalkan $\mathcal{H}$ dan $\mathcal{K}$ adalah ruang Hilbert kompleks dan misalkan $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$.

(a) $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Im} T^*)^{\perp}$;

(b) $\operatorname{Ker} T^* = (\operatorname{Im} T)^{\perp}$;

(c) $\operatorname{Ker} T^* = \{0\}$ jika dan hanya jika $\operatorname{Im} T$ rapat dalam $\mathcal{K}$.

Akibat 5.12 Misalkan $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H})$. Pernyataan di bawah ini bersifat ekuivalen.

(a) *T invertible.*

(b) $\operatorname{Ker} T^* = \{0\}$ dan ada $\alpha > 0$ sedemikian sehingga $\|T(x)\| \geq \alpha\|x\|$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

Lemma 5.14 Jika $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H})$ *invertible*, maka T^* juga *invertible* dengan $(T^*)^{-1} = \left(T^{-1}\right)^*$.

Operator Normal, Self-adjoint, dan Unitary

Definisi 5.15

(a) Jika $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H})$, maka T adalah operator normal jika
$$TT^* = T^*T.$$

(b) Matriks persegi A dikatakan normal jika
$$AA^* = A^*A.$$

Akibat 5.20 Misalkan $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H})$ adalah operator normal. Pernyataan di bawah ini bersifat ekuivalen.

(a) *T invertible.*

(b) Ada $\alpha > 0$ sedemikian hingga $\|T(x)\| \geq \alpha\|x\|$, $\forall x \in \mathcal{H}$.

Definisi 5.21

(a) Misalkan $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H})$, maka T dikatakan *self-adjoint* jika $T = T^*$.

(b) Jika A adalah matriks persegi, maka A dikatakan *self-adjoint* jika $A = A^*$.

Lemma 5.25 Misalkan $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert kompleks dan $\mathcal{S}$ adalah himpunan operator *self-adjoint* di $B(\mathcal{H})$.

(a) Jika α dan β adalah bilangan real dan $T_1, T_2 \in S$, maka $\alpha T_1 + \beta T_2 \in S$.

(b) $\mathcal{S}$ adalah subset tertutup dari $B(\mathcal{H})$.

Lemma 5.26 Misalkan $\mathcal{H}$ adalah sebuah ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H})$.

(a) TT^* dan TT^* adalah *self-adjoint*.

(b) T= R+iS dengan R dan S adalah *self-adjoint*.

Definisi 5.27

(a) Jika $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert kompleks dan $T \in B(\mathcal{H})$, maka T dikatakan *unitary* jika $TT^* = T^*T = I$.

(b) Jika A adalah matriks persegi, maka A dikatakan sebagai *unitary* jika $AA^* = A^*A = I$.

Lemma 5.31 Misalkan $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert kompleks dan $\mathcal{U}$ adalah himpunan operator *unitary* di $B(\mathcal{H})$.

(a) Jika $U \in \mathcal{U}$, maka $U^* \in \mathcal{U}$ dan $\|U\| = \|U^*\| = 1$.

(b) Jika $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, maka U_1U_2 dan U^{-1} juga elemen di $\mathcal{U}$.

(c) $\mathcal{U}$ adalah subset tertutup dari $B(\mathcal{H})$.

Lemma 5.29 Jika X adalah ruang hasil kali dalam dan $S, T \in B(X)$ sedemikian hinga $\langle Sz, z\rangle = \langle Tz, z\rangle$, $\forall z \in X$, maka $S = T$.

Teorema 5.30 Misalkan $\mathcal{H}$ adalah ruang Hilbert kompleks dan misalkan $T, U \in B(\mathcal{H})$.

(a) $T^*T = I$ jika dan hanya jika T adalah *isometry*.

(b) U adalah *unitary* jika dan hanya jika U adalah *isometry* dari $\mathcal{H}$ ke $\mathcal{H}$.