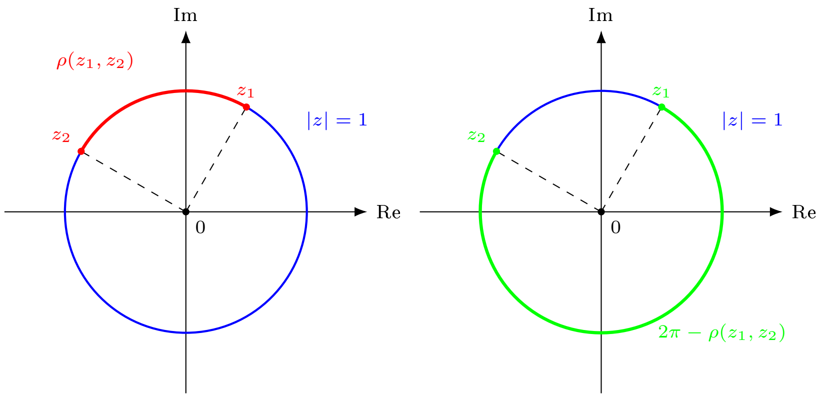
1. **(Contoh Metrik)** Diberikan $X = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, yaitu lingkaran dengan pusat titik 0 dan berjari-jari 1 pada bidang kompleks. Untuk sebarang $z, w \in X$ didefinisikan $\rho(z, w) = 0$ jika $z = w$, $\rho(z, w) = \pi$ jika $z = -w$, dan $\rho(z, w)$ menyatakan panjang busur terpendek yang menghubungkan z dan w jika $z \neq \pm w$. Buktikan bahwa ρ merupakan metrik pada X.

   Bukti. Dari informasi pada soal, didapatkan ilustrasi sebagai berikut



   Sehingga untuk $z, w \in X$ panjang busur terpendek dapat dirumuskan sebagai

$$\rho(z, w) = \min \{|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)|, 2\pi - |\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)|\}, \quad z, w \in X$$

   yang dimana telah memenuhi ketentuan fungsi ρ yang diberikan pada soal. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa ρ memenuhi sifat-sifat metrik.

   (a) **(Positifitas)** Ambil sebarang $z, w \in X$ maka jelas berlaku

$$|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)| \geq 0$$

   dan karena $\text{Arg}(z), \text{Arg}(w) \in [-\pi, \pi]$, akibatnya

$$\begin{aligned} |\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)| &\leq 2\pi \\ 2\pi - |\text{Arg}(z) + \text{Arg}(w)| &\geq 0. \end{aligned}$$

   Jadi $\rho(z, w) \geq 0$.

   (b) Akan dibuktikan bahwa $\rho(z, w) = 0 \iff z = w$.

   - $(\Leftarrow)$ Terbukti dari definisi $\rho(z, w)$.
   - $(\Rightarrow)$ Ambil $z, w \in X$ dan misalkan $\rho(z, w) = 0$, maka berlaku

$$\min \{|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)|, 2\pi - |\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)|\} = 0$$

     Berarti $|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)| = 0$ atau $2\pi - |\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)| = 0$.

- Jelas untuk $|\text{Arg}(z)-\text{Arg}(w)| = 0$ berakibat $\text{Arg}(z) = \text{Arg}(w)$ dan $z = w$.
- Untuk $2\pi - |\text{Arg}(z)-\text{Arg}(w)| = 0$ berlaku $\text{Arg}(z)-\text{Arg}(w) = 2\pi$ (2π atau -2π sama saja untuk bilangan kompleks). Selanjutnya perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}\exp\left[i(\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w))\right] &= \exp(2\pi i)\\ \exp(i\text{Arg}(z))\exp(-i\text{Arg}(w)) &= 1\\ |z|e^{i\text{Arg}(z)}|w|e^{-i\text{Arg}(w)} &= 1\\ z\overline{w} &= 1\\ z &= \frac{1}{\overline{w}}\end{aligned}$$

Karena $|w| = 1$ berakibat $w = \dfrac{1}{\overline{w}}$ sehingga $z = w$.

Jadi $\rho(z,w) = 0 \iff z = w$.

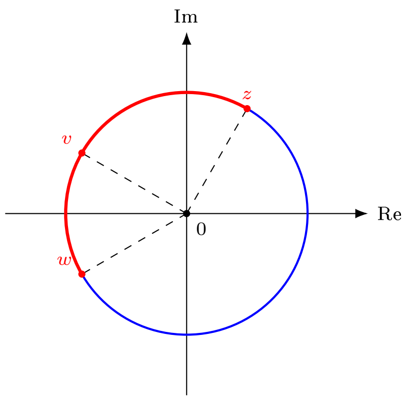
(c) **(Simetri)** Untuk setiap $z, w \in X$ berlaku bahwa

$$\begin{aligned}\rho(z,w) &= \min\left\{|\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)|, 2\pi - |\text{Arg}(z) - \text{Arg}(w)|\right\}\\ &= \min\left\{|\text{Arg}(w) - \text{Arg}(z)|, 2\pi - |\text{Arg}(w) - \text{Arg}(z)|\right\}\\ &= \rho(w,z)\end{aligned}$$

Jadi $\rho(z,w) = \rho(w,z)$.

(d) **(Ketaksamaan Segitiga)** Misalkan $z, w, v \in X$ dan akan dibuat menjadi dua kasus.

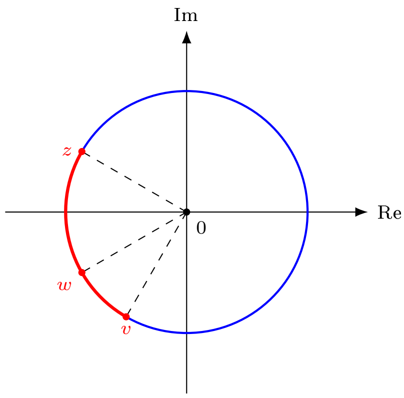
- Untuk $\text{Arg}(z) \leq \text{Arg}(v) \leq \text{Arg}(w)$, dapat diilustrasikan sebagai berikut



Dari ilustrasi diatas berlaku

$$\rho(z,w) = \rho(z,v) + \rho(v,w)$$

- Tanpa mengurangi keumuman, misalkan $\text{Arg}(z) \leq \text{Arg}(w) \leq \text{Arg}(v)$ diilustrasikan sebagai berikut



Dari ilustrasi diatas berlaku

$$\rho(z,w) \le \rho(z,v) + \rho(v,w)$$

Jadi $\rho(z,w) \le \rho(z,v) + \rho(v,w)$ dengan kesamaan terjadi ketika titik v berada diantara busur terpendek z dan w.

$\therefore$ ρ merupakan metrik pada X. $\square$

2. Tunjukan bahwa bola buka $B_r(x)$ adalah himpunan terbuka

Bukti.

Definisi. ***Bola buka*** *dalam ruang metrik* (X,d) *dengan pusat* $x \in X$ *dan jari-jari* $r > 0$ *didefinisikan sebagai himpunan semua titik yang jaraknya dari* x *kurang dari* r.

$$B_r(x) = \{y \in X \mid d(x,y) < r\}$$

Teorema. ***Himpunan Terbuka*** *dalam ruang metrik* (X,d) *adalah himpunan* $U \subseteq X$ *yang memenuhi syarat:*

$$\forall x \in X, \exists \epsilon > 0 \text{ sedemikian sehingga } B_\epsilon(x) \subseteq U$$

Akan dibuktikan bahwa bola buka $B_r(x)$ adalah himpunan terbuka. Ambil sebarang titik $y \in B_r(x)$. Berdasarkan definisi bola buka, ini berarti $d(x,y) < r$. Pilih jari-jari untuk bola buka $B_\epsilon(y)$ yaitu $\epsilon = r - d(x,y)$ dan karena $d(x,y) < r$ untuk setiap $y \in X$, maka jelas bahwa $\epsilon > 0$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $B_\epsilon(y) \subseteq B_r(x)$. Ambil sebarang titik $z \in B_\epsilon(y)$, maka berdasarkan definisi bola buka berlaku $d(y,z) < \epsilon$. Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga pada ruang metrik, diperoleh

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \epsilon = d(x,y) + (r - d(x,y)) = r$$

sehingga $z \in B_r(x)$. Dengan demikian, $B_\epsilon(y) \subseteq B_r(x)$.

$\therefore$ Karena untuk setiap titik $y \in B_r(x)$ terdapat bola buka $B_\epsilon(y)$ yang seluruhnya terletak dalam $B_r(x)$, maka bola buka $B_r(x)$ adalah himpunan terbuka. $\square$

3. Bola-bola terbuka $B_{1/n}(x)$ merupakan basis untuk topologi di suatu ruang metrik. Untuk kasus $\mathbb{R}^n$ (atau $\mathbb{C}^n$) bahkan cukup dengan mengambil bola-bola dengan pusat rasional dan dengan demikian $\mathbb{R}^n$ (dan $\mathbb{C}^n$) adalah terhitung ke-dua.

   Bukti. Misalkan $\mathcal{B} = \{B_{1/n}(x) \mid x \in X, n \in \mathbb{N}\}$. Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{B}$ adalah basis untuk topologi pada ruang metrik (X, d).

   Berdasarkan definisi basis, untuk setiap $x \in X$ dan setiap himpunan terbuka $U(x)$ yang memuat x, harus terdapat $O \in \mathcal{B}$ sehingga $x \in O \subseteq U(x)$.

   Karena $U(x)$ terbuka, terdapat $\epsilon > 0$ sehingga $B_\epsilon(x) \subseteq U(x)$. Dengan Sifat Archimedes, ada $n \in \mathbb{N}$ sehingga $1/n < \epsilon$. Maka $B_{1/n}(x) \subseteq B_\epsilon(x) \subseteq U(x)$ dan $x \in B_{1/n}(x)$.

   Jadi, $\mathcal{B}$ memenuhi definisi basis topologi.

   $\therefore$ Bola-bola terbuka $B_{1/n}(x)$ merupakan basis untuk topologi di ruang metrik. $\square$