Algoritma 12.2.1.
Setelah mengetahui solusi polinomial karakteristiknya terdapat akar kompleks, maka langkah selanjutnya adalah mencari solusi umum dari PD linear homogen dimensi-n. Berikut adalah langkah-langkahnya:

Langkah 1: Misalkan $\boldsymbol{\xi}_{m+1}$ dan $\boldsymbol{\xi}_{m+2}$ masing-masing adalah vektor eigen yang saling konjugat serta berkoresponden dengan pasangan konjugat nilai eigen $r_{m+1} = \alpha + i\beta$ dan $r_{m+2} = \alpha - i\beta$.

Langkah 2: Ambil salah satu dari kedua vektor eigen kemudian pisahkan bagian real dan imajiner. Misalkan $\boldsymbol{\xi}_{m+1} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$.

Langkah 3: Selanjutnya kita bisa dapatkan dua solusi real yaitu

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{m+1}(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\cos(\beta t) - \mathbf{v}\sin(\beta t)) \\ \mathbf{x}_{m+2}(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\sin(\beta t) + \mathbf{v}\cos(\beta t)) \end{aligned} \tag{12.1}$$

Dimana sudah merupakan solusi dari pasangan nilai eigen r_{m+1} dan r_{m+2}.

Langkah 4: Jika terdapat vektor eigen kompleks lainnya, maka ulangi langkah 1 sampai 3 untuk mendapatkan semua solusi nilai eigen kompleks. Jika tidak, maka solusi umum dari sistem PD linear homogen dimensi-n adalah

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{12.2}$$

Langkah 5: Jika terdapat syarat awal x_0, maka subtitusi syarat awal tersebut ke dalam solusi umum yang telah didapatkan.

$$\mathbf{x}(x_0) = c_1\mathbf{x}_1(x_0) + c_2\mathbf{x}_2(x_0) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(x_0) \tag{12.3}$$

Langkah 6: Selesaikan persmaan (**??**) untuk mencari konstanta $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

Catatan 12.2.1.
Jikalau kita memilih vektor eigen $\boldsymbol{\xi}_{m+2} = \mathbf{u} - i\mathbf{v}$ yang berkoresponden dengan nilai eigen $r_{m+2} = \alpha - i\beta$, maka solusi umumnya menjadi

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{m+1}(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\cos(-\beta t) - (-\mathbf{v})\sin(-\beta t)) \\ &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\cos(\beta t) - \mathbf{v}\sin(\beta t)) \\ \mathbf{x}_{m+2}(t) &= e^{\alpha t}(\mathbf{u}\sin(-\beta t) + (-\mathbf{v})\cos(-\beta t)) \\ &= -e^{\alpha t}(\mathbf{u}\sin(\beta t) + \mathbf{v}\cos(\beta t)) \end{aligned} \tag{12.4}$$

Dapat dilihat bahwa solusi (**??**) dan (**??**) hanya berbeda tanda pada $\mathbf{x}_{m+2}(t)$. Namun karena solusi umum mencakup sebuah sembarang konstanta c_2, maka perbedaan tanda tersebut tidak mempengaruhi solusi umumnya.

Contoh 12.2.1.
Tentukan solusi umum dari

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{y}. \tag{12.5}$$

Penyelesaian:
Polinomial karakteristik dari matriks (**??**) adalah

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & -2 \\ 1 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)((\lambda-2)^2+4). \tag{12.6}$$

Nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 2+2i$ dan $\lambda_3 = 2-2i$. Matriks *augmented* dari $(A-2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -2 & : & 0 \\ 1 & 1 & 2 & : & 0 \\ 1 & -1 & 0 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & : & 0 \\ 0 & 1 & 1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

Diperoleh $x_1 = -x_3$ dan $x_2 = -x_3$. Ambil $x_3 = 1$ sehingga

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jadi

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

adalah solusi dari (**??**).

Matriks *augmented* dari $(A-(2+2i)I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah

$$\begin{pmatrix} -1-2i & -1 & -2 & : & 0 \\ 1 & 1-2i & 2 & : & 0 \\ 1 & -1 & -2i & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & : & 0 \\ 0 & 1 & i & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

Sehingga $x_1 = ix_3$ dan $x_2 = -ix_3$. Ambil $x_3 = 1$ maka

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Dengan Algoritma **??** dapat diperoleh

Langkah 1: Perhatikan bahwa $\alpha = 2$ dan $\beta = 2$.

Langkah 2: Pilih vektor eigen $\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$, maka $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langkah 3: Dua solusi lainnya adalah

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(2t) - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(2t) \right) = \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix}$$

dan

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{2t} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(2t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(2t) \right) = \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}$$

Langkah 4: Solusi umumnya adalah

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 e^{2t} \begin{pmatrix} -\sin(2t) \\ \sin(2t) \\ \cos(2t) \end{pmatrix} + c_3 e^{2t} \begin{pmatrix} \cos(2t) \\ -\cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Contoh 12.2.2.
Carilah solusi dari

$$\mathbf{y}' = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 4 \\ -8 & 7 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} \tag{12.7}$$

Dengan syarat awal $\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}^T$.
Penyelesaian:
Polinomial karakteristiknya dari matriks A pada (**??**) adalah

$$\begin{vmatrix} -5-\lambda & 5 & 4 \\ -8 & 7-\lambda & 6 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-2)(\lambda^2+1). \tag{12.8}$$

Sehingga didapatkan nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = i$ dan $\lambda_3 = -i$. Selanjutnya matriks *augmented* dari $(A - \lambda 2I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah

$$\begin{pmatrix} -7 & 5 & 4 & : & 0 \\ -8 & 5 & 6 & : & 0 \\ 1 & 0 & -2 & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & : & 0 \\ 0 & 1 & -2 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

diperoleh $x_1 = x_2 = 2x_3$. Ambil saja $x_3 = 1$ akibatnya

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Jadi

$$\mathbf{y}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

adalah solusi dari (**??**). Kemudian, matriks *augmented* dari $(A - iI)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ adalah

$$\begin{pmatrix} -5-i & 5 & 4 & : & 0 \\ -8 & 7-i & 6 & : & 0 \\ 1 & 0 & -i & : & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -i & : & 0 \\ 0 & 1 & 1-i & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}.$$

didapatkan $x_1 = ix_3$ dan $x_2 = (1-i)x_3$. Dengan mengambil $x_3 = 1$ diperoleh

$$\mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} i \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lakukan yang telah dicontohkan pada Algoritma **??** sebagai berikut:

Langkah 1: Karena $\lambda_2 = 0 + i$ dan $\lambda_3 = 0 - i$ saling konjugat begitu juga dengan vektor eigen nya yaitu

$$\mathbf{x_2} = \begin{pmatrix} i \\ -1+i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathbf{x_3} = \begin{pmatrix} -i \\ -1-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Langkah 2: Pilih salah satu vektor eigen, misalnya $\mathbf{x_2}$ sehingga

$$\mathbf{x_2} = \mathbf{u} + i\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

didapat $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langkah 3: Solusi kedua dan ketiga masing-masing adalah

$$\mathbf{y}_2(t) = e^{0t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) \right) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

dan

$$\mathbf{y}_3(t) = e^{0t}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) \right) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

Langkah 4: solusi umumnya adalah

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Langkah 5: Subtitusi syarat awal $\mathbf{y}(0)$ sehingga didapatkan

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c_1 + c_3 \\ 2c_1 - c_2 + c_3 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}.$$

Langkah 6: Selesaikan persamaan menggunakan sembarang metode yang telah anda diketahui. Pada contoh ini akan digunakan metode eliminasi Gauss-Jordan.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & : & 0 \\ 2 & -1 & 1 & : & 3 \\ 1 & 1 & 0 & : & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & \frac{4}{3} \\ 0 & 1 & 0 & : & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & : & -\frac{8}{3} \end{pmatrix}.$$

Didapat $c_1 = \frac{4}{3}, c_2 = -\frac{1}{3}$ dan $c_3 = -\frac{8}{3}$. Jadi solusi dari (**??**) adalah

$$\mathbf{y} = \frac{4e^{2t}}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ -\cos(t) - \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} - \frac{8}{3} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) + \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Contoh 12.2.3.
Carilah solusi PD linear orde tiga berikut

$$y''' - 4y'' + 6y' - 4y = 0. \tag{12.9}$$

Penyelesaian:
Persamaan (**??**) dapat diselesaikan menggunakan sistem PD linear homogen dimensi-3. Misalkan

$$\begin{aligned} y_1 = y &\implies y_1' = y' = y_2 \\ y_2 = y' &\implies y_2' = y'' = y_3 \\ y_3 = y'' &\implies y_3' = y''' = 4y'' - 6y' + 4y. \end{aligned}$$

Dengan demikian didapatkan sistem sebagai berikut

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}. \tag{12.10}$$

Dari matriks (**??**) didapatkan nilai eigen $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 + i$ dan $\lambda_3 = 1 - i$. Untuk vektor eigen yang berkoresponden adalah

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1-i \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Langkah 1: Terlihat bahwa $\boldsymbol{\xi}_2$ dan $\boldsymbol{\xi}_3$ adalah pasangan konjugat.

Langkah 2: Ambil $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$, didapat $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langkah 3: Solusi untuk nilai eigen λ_2 dan λ_3 adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2(x) &= e^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos(x) - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(x) \right) = \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) - \sin(x) \\ 2\cos(x) \end{pmatrix} e^x \\ \mathbf{y}_3(x) &= e^x \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \sin(x) + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(x) \right) = \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) + \cos(x) \\ 2\sin(x) \end{pmatrix} e^x \end{aligned}$$

Langkah 4: Solusi umum dari (**??**) adalah

$$\mathbf{y}(x) = c_1 e^{2x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + c_2 e^x \begin{pmatrix} -\sin(x) \\ \cos(x) - \sin(x) \\ 2\cos(x) \end{pmatrix} + c_3 e^x \begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) + \cos(x) \\ 2\sin(x) \end{pmatrix}.$$

Ingat bahwa $\mathbf{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \end{pmatrix}$ artinya solusi PD orde tiga ada pada baris pertama solusi umum.
Jadi solusi dari (**??**) adalah

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^x \cos(x) + c_3 e^x \sin(x).$$

Contoh 12.2.4.
Diberikan sistem PD linear homogen dimensi-4 berikut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} \tag{12.11}$$

Tentukan solusi umum dari sistem PD tersebut.
Penyelesaian:
Nilai eigen dari matriks (**??**) adalah

$$\lambda_{1,2} = i, \quad \lambda_{3,4} = -i$$

dan vektor eigen yang berkoresponden dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Langkah 1: Pilih vektor eigen $\boldsymbol{\xi}_1$ dan $\boldsymbol{\xi}_3$ sebagai vektor eigen yang saling konjugat.

Langkah 2: Ambil $\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, maka $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Langkah 3: Solusi untuk nilai eigen λ_1 dan λ_3 adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) \right) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_2(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) \right) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{12.12}$$

Langkah 4: Karena terdapat vektor kompleks eigen lain, yaitu $\boldsymbol{\xi}_2$ dan $\boldsymbol{\xi}_4$.

Langkah 5: Ambil $\boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}$, maka $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dan $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Langkah 6: Solusi untuk nilai eigen λ_2 dan λ_4 adalah

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_3(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin(t) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \\ \mathbf{x}_4(t) &= \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(t) \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{12.13}$$

Langkah 7: Solusi umum dari (**??**) adalah

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}.$$

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai pengertian sistem PD linear homogen dimensi-n dan penyelesaiannya, kerjakanlah latihan berikut!

1. Diberikan sistem PD linear berikut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & k & 5 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

   Tentukan nilai k agar sistem PD tersebut memiliki nilai eigen kompleks yang bagian imajinernya tak nol.

2. Carilah solusi homogen dari PD linear berikut

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

3. Diberikan sebuah sistem PD linear homogen berikut

$$\frac{dx}{dt} = -3x + 2z, \quad \frac{dy}{dt} = x - y, \quad \frac{dz}{dt} = -2x - y$$

   Tentukan solusi umum dari sistem PD tersebut.

4. $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

5. Diberikan suatu sistem tiga pegas dengan dua buah massa yang dirumuskan dalam PD berikut

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2 x_2 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} &= k_2 x_1 - (k_2 + k_3)x_2 \end{aligned}$$

   Jika $m_1 = m_2 = \frac{1}{2}$, $k_1 = k_3 = 2$, dan $k_2 = 6$. Tentukan solusi umum dari sistem PD tersebut.

JAWABAN LATIHAN 12.2

1. Polinomial karakteristik matriks A adalah

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -3 \\ 0 & -3-\lambda & 2 \\ 0 & k & 5-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 15 - 2k).$$

   Sehingga agar terdapat nilai eigen kompleks yang bagian imajinernya tak nol, maka haruslah diskriminan dari polinomial $\lambda^2 - 2\lambda - 15 - 2k$ negatif.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^{-}4(1)(-15-2k) = 64 + 8k < 0 \implies k < -8.$$

   Jadi nilai k yang memenuhi adalah $\{x \in \mathbf{R} \,|\, x < -8\}$.

2. Nilai eigen dari matriks koefisien adalah

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1 - 2i, \quad \lambda_3 = 1 + 2i.$$

   dan vektor eigen yang berkoresponden dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. .

4. Nilai eigen dari matriks koefisien adalah

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 5, \quad \lambda_3 = 1 + \sqrt{2}i \quad \lambda_4 = 1 - \sqrt{2}i$$

   dan vektor eigen yang berkoresponden dengan nilai eigen tersebut adalah

$$\boldsymbol{\xi}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{9}{2} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1-5\sqrt{2}}{3} \\ 0 \\ \frac{-1-\sqrt{2}i}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\xi}^{(4)} = \begin{pmatrix} \frac{1+5\sqrt{2}}{3} \\ 0 \\ \frac{-1+\sqrt{2}i}{3} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5. .