EVALUASI TENGAH SEMESTER GASAL 2024/2025
DEPARTEMEN MATEMATIKA FSAD ITS
PROGRAM SARJANA

Matakuliah	:	Aljabar Linear
Hari, Tanggal	:	Kamis, 17 Oktober 2024
Waktu / Sifat	:	100 menit / *Tertutup*
Dosen	:	Dr. Mahmud Yunus, M.Si. dan Dr. Sunarsini, S.Si, M.Si

HARAP DIPERHATIKAN !!!
Segala jenis pelanggaran (mencontek, kerjasama, dsb) yang dilakukan pada saat ETS/EAS akan dikenakan sanksi pembatalan matakuliah pada semester yang sedang berjalan.

1. Diketahui (X, d) ruang metrik dan Y himpunan tertutup di X. Jika (X, d) ruang metrik lengkap, tunjukkan bahwa (Y, d) juga ruang metrik lengkap.

2. Misalkan V suatu ruang vektor bernorma dan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ himpunan vektor di V untuk suatu $n \in \mathbb{N}$. Jika terdapat konstanta $A > 0$ sehingga ketaksamaan
$$A\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \left\|\sum_{k=1}^{n} c_k v_k\right\|^2$$
berlaku untuk semua koefisien skalar $c_1, \ldots, c_n$. Tunjukkan bahwa vektor-vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah bebas linear.

3. Pandang ruang vektor bernorma $(C[a, b], \|\cdot\|)$ dengan $\|f\| := \sup\{|f(x)| : x \in [a, b]\}$ untuk $f \in C[a, b]$. Didefinisikan operator $T : C[a, b] \to C[a, b]$ dengan
$$(Tf)(x) := \int_a^x f(t)\, dt.$$
   (a) Tunjukkan bahwa T adalah operator linear.
   (b) Tunjukkan bahwa T injektif tetapi tidak surjektif.
   (c) Apakah T isometri? Berikan penjelasan.

4. Pandang $V = \{\{x_k\}_{k=1}^{\infty} : x_k \in \mathbb{C}, \forall k \in \mathbb{N}, \text{dan hanya berhingga } x_k \text{ tak-nol}\}$. Tunjukkan bahwa
   (a) V merupakan sub-ruang dari $\ell^1(\mathbb{N})$,
   (b) V padat di $\ell^1(\mathbb{N})$,
   (c) V bukan himpunan tertutup dari $\ell^1(\mathbb{N})$.

SOLUSI

1. Misalkan $\{y_n\}$ adalah barisan Cauchy di Y. Karena $Y \subset X$, maka setiap suku barisan y_n adalah elemen di X. Karena (X, d) lengkap, maka pasti terdapat $x \in X$ sehingga $y_n \to x$ di X. Karena Y tertutup, maka haruslah Y memuat semua titik limitnya. Karena y_n konvergen ke x, maka haruslah $x \in Y$. Jadi, setiap barisan Cauchy di Y konvergen ke elemen di Y, sehingga (Y, d) lengkap.

2. Himpunan vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dikatakan bebas linear jika hanya solusi trivial yang memenuhi persamaan
$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0.$$
Misalkan terdapat koefisien skalar $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sedemikian sehingga
$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0.$$
Dengan menggunakan ketaksamaan yang diberikan, diperoleh
$$A \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k=1}^{n} c_k v_k \right\|^2 = \|0\|^2 = 0.$$
Karena $A > 0$, maka haruslah $\sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = 0$. Hal ini hanya mungkin terjadi jika setiap $c_k = 0$ untuk semua $k = 1, 2, \ldots, n$. Jadi, hanya solusi trivial yang ada, sehingga himpunan vektor $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ adalah bebas linear.

3. (a) Untuk setiap $f, g \in C[a, b]$ dan skalar $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, kita punya
$$T(\alpha f + \beta g)(x) = \int_a^x (\alpha f(t) + \beta g(t))\, dt = \alpha \int_a^x f(t)\, dt + \beta \int_a^x g(t)\, dt = \alpha(Tf)(x) + \beta(Tg)(x).$$
Jadi, T adalah operator linear.

   (b) Untuk menunjukkan bahwa T injektif, misalkan $Tf = Tg$ untuk $f, g \in C[a, b]$. Maka untuk setiap $x \in [a, b]$, kita punya
$$\int_a^x f(t)\, dt = \int_a^x g(t)\, dt.$$
Menggunakan Teorema Fundamental Kalkulus, kita dapat menurunkan kedua sisi terhadap x untuk mendapatkan
$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\, dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x g(t)\, dt\right)$$
$$f(x) = g(x).$$
Karena ini berlaku untuk semua $x \in [a, b]$, maka $f = g$. Jadi, T adalah injektif.
Untuk menunjukkan bahwa T tidak surjektif, kita perlu menemukan fungsi di $C[a, b]$ yang bukan image dari T. Misalkan kita ambil fungsi konstan $h(x) = 1$ untuk setiap $x \in [a, b]$. Jika ada $f \in C[a, b]$ sehingga $Tf = h$, maka kita harus memiliki
$$(Tf)(x) = \int_a^x f(t)\, dt = 1.$$
Namun, ini tidak mungkin karena integral dari fungsi kontinu tidak bisa menjadi konstan kecuali fungsi tersebut adalah nol hampir di mana-mana. Jadi, T tidak surjektif.

(c) T dikatakan isometri jika untuk setiap $f \in C[a,b]$, berlaku

$$\|Tf\| = \|f\|.$$

Namun, kita punya

$$\|Tf\| = \sup_{x\in[a,b]} |(Tf)(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \left| \int_a^x f(t)\,dt \right|.$$

Dengan menggunakan ketaksamaan segitiga untuk integral, kita dapat memperkirakan

$$\left| \int_a^x f(t)\,dt \right| \leq \int_a^x |f(t)|\,dt \leq (b-a)\|f\|.$$

Jadi,

$$\|Tf\| = \sup_{x\in[a,b]} |(Tf)(x)| \leq (b-a)\|f\|.$$

Ini menunjukkan bahwa T tidak mempertahankan norma secara tepat, sehingga T bukan isometri.

4. (a) Misalkan $\{x_k\}, \{y_k\} \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{C}$. Selanjutnya kita tahu bahwa hanya berhingga x_k dan y_k yang tak-nol, katakanlah sebanyak M dan N berturut-turut ($M, N < \infty$). Maka, untuk penjumlahan, kita punya

$$\{x_k\} + \{y_k\} = \{x_k + y_k\},$$

yang juga hanya memiliki paling banyak $M+N$ suku tak-nol, sehingga $\{x_k + y_k\} \in V$. Untuk perkalian skalar, kita punya

$$\alpha\{x_k\} = \{\alpha x_k\},$$

yang juga hanya memiliki paling banyak M suku tak-nol, sehingga $\{\alpha x_k\} \in V$. Oleh karena itu, V adalah sub-ruang dari $\ell^1(\mathbb{N})$.

(b) Misalkan $\{y_k\} \in \ell^1(\mathbb{N})$. Kita ingin menunjukkan bahwa untuk setiap $\epsilon > 0$, terdapat $\{x_k\} \in V$ sedemikian sehingga

$$\|\{y_k\} - \{x_k\}\|_1 < \epsilon.$$

Karena $\{y_k\} \in \ell^1(\mathbb{N})$ yang dimana elemen tak nol nya berhingga, maka jumlahan atau deret $\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|$ konvergen. Oleh karena itu, terdapat $N \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |y_k| < \epsilon.$$

Sekarang, kita definisikan $\{x_k\} \in V$ sebagai

$$x_k = \begin{cases} y_k, & \text{jika } k \leq N, \\ 0, & \text{jika } k > N. \end{cases}$$

Dimana $\{x_k\}$ hanya memiliki paling banyak N suku tak-nol, sehingga $\{x_k\} \in V$. Selanjutnya, kita hitung norma dari selisihnya:

$$\|\{y_k\} - \{x_k\}\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k - x_k| = \sum_{k=N+1}^{\infty} |y_k| < \epsilon.$$

Jadi, untuk setiap $\epsilon > 0$, kita dapat menemukan $\{x_k\} \in V$ sedemikian sehingga $\|\{y_k\} - \{x_k\}\|_1 < \epsilon$. Oleh karena itu, V padat di $\ell^1(\mathbb{N})$.

(c) Akan kita tunjukkan dengan kontradiksi. Misalkan V adalah himpunan tertutup di $\ell^1(\mathbb{N})$. Karena V padat di $\ell^1(\mathbb{N})$, maka *closure* dari V adalah $\ell^1(\mathbb{N})$ itu sendiri, yaitu $\overline{V} = \ell^1(\mathbb{N})$. Jika V tertutup, maka $V = \overline{V} = \ell^1(\mathbb{N})$. Namun, ini bertentangan dengan definisi V yang hanya berisi deret dengan elemen tak nol berhingga, sedangkan $\ell^1(\mathbb{N})$ berisi semua deret yang konvergen secara absolut, termasuk yang memiliki elemen tak nol tak berhingga. Oleh karena itu, asumsi bahwa V adalah himpunan tertutup di $\ell^1(\mathbb{N})$ adalah salah. Jadi, V bukan himpunan tertutup dari $\ell^1(\mathbb{N})$.