

1. Jika  $T : C_{\mathbb{R}}[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  adalah transformasi linier yang didefinisikan oleh:

$$T(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

Tunjukkan bahwa  $T$  kontinu.

**Penyelesaian:**

Ruang  $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$  adalah ruang fungsi kontinu dari  $[0, 1]$  ke  $\mathbb{R}$ , dan dilengkapi dengan norma maksimum:

$$\|f\|_{\infty} = \max_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Kita ingin menunjukkan bahwa terdapat konstanta  $C > 0$  sehingga:

$$|T(f)| = \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq C \|f\|_{\infty}.$$

Untuk semua  $f \in C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ , diperoleh:

$$|T(f)| = \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 \|f\|_{\infty} dx = \|f\|_{\infty}.$$

Sehingga:

$$|T(f)| \leq \|f\|_{\infty}.$$

Dengan kata lain, terdapat konstanta  $C = 1$  sehingga:

$$|T(f)| \leq C \|f\|_{\infty}.$$

Hal tersebut menunjukkan bahwa  $T$  kontinu di  $f(x) = 0$  sehingga dapat disimpulkan  $T$  kontinu di seluruh ruang  $C_{\mathbb{R}}[0, 1]$ .