16. Untuk sampel acak berukuran n dari distribusi geometri, $X_i \sim \text{GEO}(p)$. Tentukan MLE dari p dengan memaksimalkan pdf dari statistik cukup $S = \sum X_i$. Apakah ini sama dengan MLE yang biasa? Jelaskan mengapa hasil ini dapat diekspektasikan.

Solusi:

Akan kita cari jenis distribusi dari S. Dengan menggunakan sifat MGF yang independen didapatkan

$$M_S(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t) = \left(\frac{p}{1-(1-p)e^t}\right)^n.$$

Dapat dilihat bahwa S adalah distribusi negatif binomial, $S \sim \text{NB}(n,p)$ dengan n menunjukkan jumlah keberhasilan. Sehingga pdf dari S adalah

$$f_S(s;n,p) = \binom{s-1}{n-1} p^n (1-p)^{s-n}.$$

Dengan s didefinisikan banyaknya percobaan. Kemudian log-likelihood dari S adalah

$$\ell(p;S) = \ln\left(f_S(s;n,p)\right) = \ln\binom{s-1}{n-1} + n\ln(p) + (s-n)\ln(1-p).$$

Kemuadian turunan $\ell(p;S)$ terhadap p adalah

$$\frac{\partial \ell(p;S)}{\partial p} = \frac{n}{p} - \frac{s-n}{1-p} = 0 \iff n - \cancel{np} = sp - \cancel{np} \implies \hat{p} = \frac{n}{S} = \frac{1}{\bar{X}}$$

Disisi lain kita mempunyai PDF dari distribusi geometri sebagai berikut

$$f_X(x;p) = p(1-p)^x$$

Selanjutnya fungsi log-likelihoodnya adalah

$$\ell(p;\underset{\sim}{X}) = n\ln p + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1-p)$$

$$\frac{\partial \ell(p;\underset{\sim}{X})}{\partial p} = \frac{n}{p} - \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1-p}$$

Karena $\dfrac{\partial \ell(p;\underset{\sim}{X})}{\partial p} = 0$, maka

$$\frac{n}{p} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{1-p} \iff n - np = p\sum_{i=1}^n x_i$$

17. Tinjau statistik cukup, $S = X_{1:n}$, untuk distribusi eksponensial dua parameter, $X_i \sim \text{EXP}(1,\eta)$.
    (a) Tunjukkan bahwa S juga lengkap.
    (b) Verifikasi bahwa $X_{1:n} - \frac{1}{n}$ adalah UMVUE dari η.
    (c) Temukan UMVUE dari persentil ke-p.

18. Misalkan $X \sim N(0,\theta)$; $\theta > 0$.

(a) Tunjukkan bahwa X^2 lengkap dan cukup untuk θ.

(b) Tunjukkan bahwa $N(0, \theta)$ bukan keluarga lengkap.

26. Untuk sampel acak $X_i \sim \text{UNIF}(\theta_1, \theta_2)$, tunjukkan bahwa statistik cukup bersama $X_{1:n}$ dan $X_{n:n}$ juga lengkap. Misalkan diinginkan untuk mengestimasi rata-rata $\mu = (\theta_1 + \theta_2)/2$. Carilah UMVUE dari μ. *Petunjuk:* Pertama, carilah nilai ekspetasi $E(X_{1:n})$ dan $E(X_{n:n})$ dan tunjukkan bahwa $(X_{1:n} + X_{n:n})/2$ adalah penaksir tak bias untuk rata-rata.