Міністерство освіти і науки України

Національний технічний університет України

Теорія поля та кратні інтеграли

Методичні вказівки

до виконання типової розрахункової роботи

з математичного аналізу

для студентів другого курсу

фізико математичного факультету

Рекомендовано Методичною радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ»

Київ

НТУУ «КПІ»

2015

Теорія поля та кратні інтеграли: Метод. вказівки до викон. типової розрахунк. роботи з матем. аналізу для студ. 2 курсу фіз..-мат. ф-ту/ Уклад.: В.В.Дрозд. – К.: НТУУ «КПІ», 2015

Гриф надано Методичною радою фізико-математичного факультету НТУУ «КПІ» (Протокол № від 2015 р.)

Навчальне видання

Теорія поля та кратні інтеграли

Методичні вказівки

до виконання типової розрахункової роботи

з математичного аналізу

для студентів першого курсу

фізико математичного факультету

Укладачі: Дрозд Вячеслав Володимирович

Віповідальний редактор: Вірченко Ніна Опанасівна

Рецензент: Авраменко Людмила Григорівна

Передмова

Методичні вказівки складено до двох розділів математичного аналізу: “Кратні, поверхневі та криволінійні інтеграли” та “Теорія поля”. Вони містять теоретичні питання до колоквіумів, основні означення і формули, які використовуються при розв’язанні задач, розв’язки типових задач, завдання типової розрахункової роботи. Робота виконується у четвертому семестрі і може бути запропонована як студентам фізико–математичного факультету так і студентам факультету інформатики та обчислювальної техніки. Кожен студент готує та здає усно теоретичний матеріал на колоквіумі і у письмовій формі завдання типової роботи, вказані викладачем. Зошит з розв’язаними задачами повинен бути зданий викладачеві, який проводить практичні заняття, до контрольної роботи.

Студент, який не здав колоквіум і типову роботу, не допускається до екзамену, як такий, що не виконав навчальний графік.

1.Кратні інтеграли

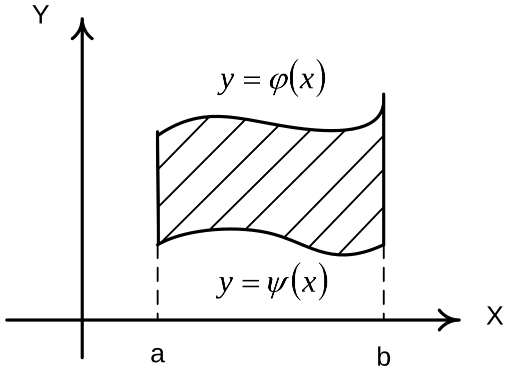
1.1 Подвійні інтеграли

До подвійних інтегралів зводяться задачі про знаходження площ плоских фігур, об’ємів тіл, мас та різних механічних і фізичних характеристик матеріальних об'єктів. Обчислюються подвійні інтеграли зведенням до двохкратних/повторних інтегралів.

Наприклад, якщо треба обчислити $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$, де область інтегрування Ω визначається рівністю

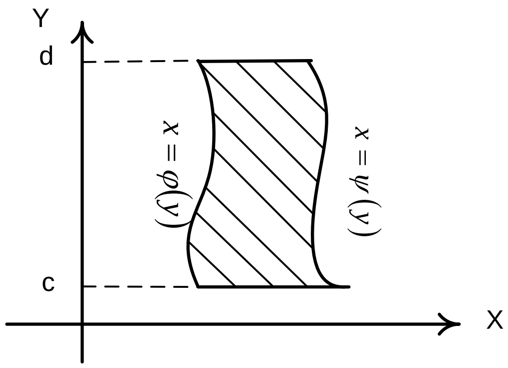
$\Omega = \left\{(x,y) \middle| a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\right\}$,

тобто область має вигляд



то $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy$. (1.1)

Якщо область D має вигляд

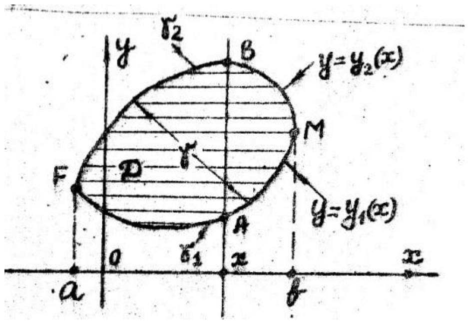


то $\iint\limits_{D} f(x;y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x;y)dx$.

Таким чином, для подвійного інтегралу $\iint_D z(x;y)dxdy$ від функції по області D існує два способи зведення його до повторного інтегралу в залежності від вибору порядку інтегрування по змінній x та y.

Розглянемо правильну область *D,* тобто, область для якої прямі, паралельні осям координат і що проходять через область *D,* перетинають її межу γ не більше ніж в двох точках або є частиною межі області *D.*

I.Спочатку інтегруємо по змінній *y,* а потім по змінній *x.* Це означає, що змінна x змінюється в постійних межах: $a \le x \le b$, де a та b – абсциси крайніх точок P та M проекції області D на вісь OX (мал.2.1).



мал.2.1

Ці точки розділяють межу γ на дві частини: нижню,що задана рівнянням $y = y_1(x)$, та верхню, що задана рівнянням $y = y_2(x)$.

Для отримання меж інтегрування по змінній y роблять так: для $\forall x \in [a; b]$ проводять пряму АВ, паралельну осі *OY.* Ця пряма перетинає межу γ області D в двох точках A і *B.* A – точка входу в область *D,* а B – точка виходу з області D для даного x. Точка A лежить на нижній частині межі, що описана рівнянням $y = y_1(x)$, а точка B - на верхній частині межі, що описана рівнянням $y = y_2(x)$.Отже, для даного $x \in [a; b]$ змінна y змінюється в межах $y_1(x) \le y \le y_2(x)$.

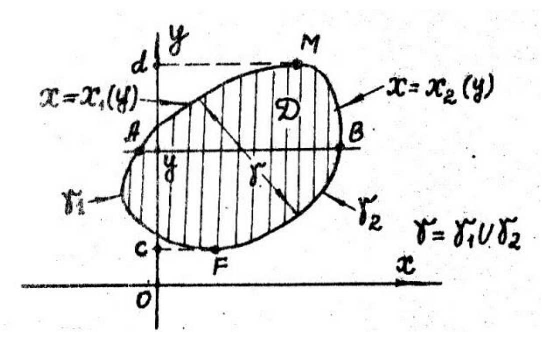
Таким чином, область D можна записати системою нерівностей

$$D: a \le x \le b; y_1(x) \le y \le y_2(x).$$

Для такого запису маємо формулу зведення подвійного інтеграла до повторного :

$$\iint_D z(x; y)\, dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x; y) dy\,. \qquad (1.2)$$

В цій формулі обчислення інтегралів відбувається зправа наліво. При цьому, коли обчислюють інтеграл $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} z(x; y) dy$, то x – вважається сталою.



2.Розглянемо інший порядок інтегрування.

Спочатку інтегруємо по змінній x, а потім по змінній y.

мал. 2.2

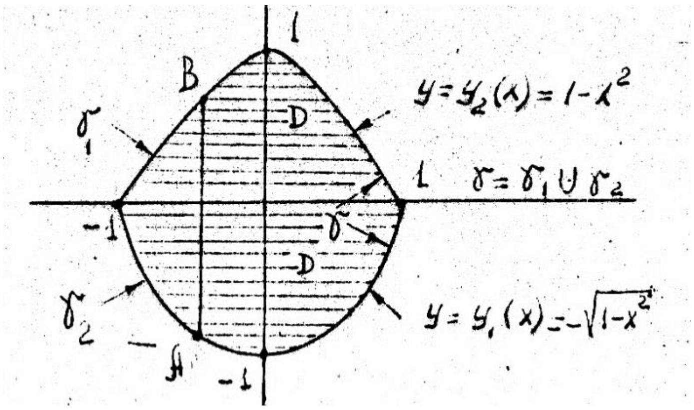
Аналогічні міркування (мал. 2.2) призводять до іншого запису для області D: $c \le y \le d$; $x_1(y) \le y \le x_2(y)$.
Тому маємо другу формулу зведення подвійного інтегралу до повторного:

$$\iint_D z(x;y)\,dxdy = \int_{c}^{d} dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x;y)dx\,. \qquad (1.3)$$

В формулі (1.3) при обчисленні $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} z(x;y)dx$ змінна y вважається сталою.
Зауваження1.1:Якщо область D не є правильною, то її розбивають на n правильних під областей, що не перетинаються D_i, $i = 1,2,\dots,n$, так щоб $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$. За властивістю адитивності подвійного інтегралу маємо

$$\iint_D z(x;y)\,dxdy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{D_i} z(x;y)\,dxdy.$$

Приклад 1.1. Подвійний інтеграл $\iint_D z(x;y)\,dxdy$ звести до повторного інтегралу, розставивши відповідно межі інтегрування, якщо область D обмежена лініями γ_1: $y = 1 - x^2$; γ_2: $y = -\sqrt{1-x^2}$ (мал.2.3)



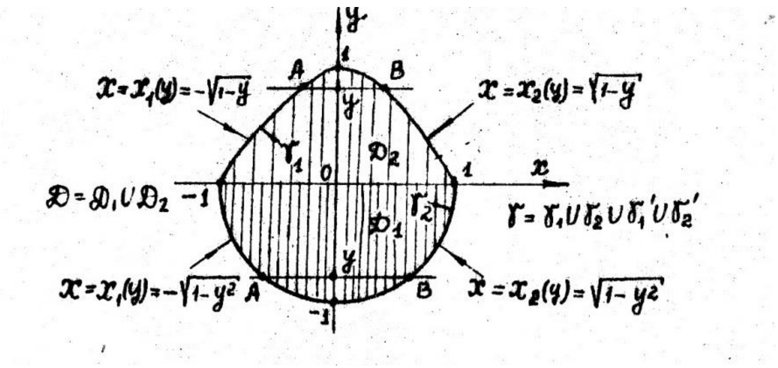
мал. 2.3

Розв′язання:
Використаємо формулу (1.2). Знайдемо абсциси a і b точок перетину параболи $y = 1 - x^2$ та нижньої частини півкола $y = -\sqrt{1-x^2}$. Для цього розв′яжемо рівняння $1 - x^2 = -\sqrt{1-x^2} \leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$.
Таким чином, змінна x змінюється в межах $-1 \le x \le 1$. Для будь-якого значення $x \in [-1;1]$ змінна y змінюється в межах $-\sqrt{1-x^2} \le y \le 1 - x^2$
Подвійний інтеграл за формулою (1.2) зводиться до повторного інтегралу

вигляду

$$\iint_D z(x;y)\,dxdy = \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} z(x;y)dy\,.$$

Використовуємо формулу (1.3). Змінна y змінюється в постійних межах $-1 \le y \le 1$ (мал.2.4). Межі для змінної x знаходять так: для $\forall y \in [-1;1]$ знаходять пряму паралельну осі OX. Ця пряма перетинає межу γ в двох точках A, B (мал. 2.4). Проте з мал. 2.4 можна побачити, що для змінної y з відрізку $[-1;0]$ межі змінної x знаходимо з рівняння $y = -\sqrt{1-x^2}$:
$x_1 = -\sqrt{1-\ y^2};\ \ x_2 = \sqrt{1-\ y^2}.$



мал. 2.4

Для змінної y з відрізку $[0;1]$ змінна x знаходимо з рівняння $y = 1 - x^2$: :
$x_1 = -\sqrt{1-\ y^2};\ \ x_2 = \sqrt{1-\ y^2}.$

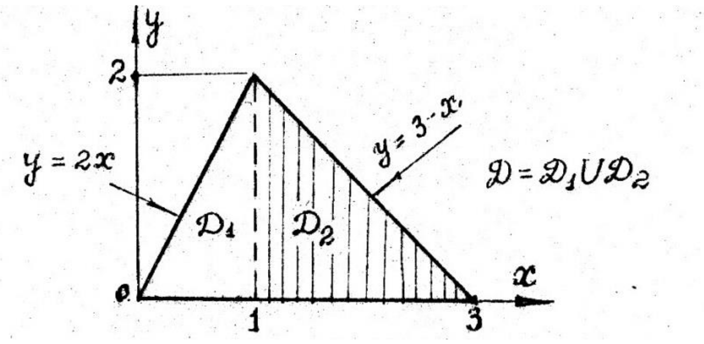
В цьому випадку,в силу властивості адитивності подвійного інтегралу, він зводиться до суми двох повторних інтегралів за формулою

$$\iint_D z(x;y)\,dxdy = \iint_{D_1} z(x;y)\,dxdy + \iint_{D_2} z(x;y)\,dxdy =$$
$$\int_{-1}^{0} dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} z(x;y)dx\ + \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}} z(x;y)dx\,.$$

Приклад 1.2. В інтегралі $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{3-y} z(x;y)dx$ змінити порядок інтегрування.

Розв′язання: За межами змінних інтегрування x і y записуємо область інтегрування D у вигляді нерівності $0 < y < 2$; $\frac{y}{2} \le x \le 3 - y$.

Зобразимо цю область графічно (мал. 2.5)



мал.2.5

З мал. 2.5 видно,що при зворотньому порядку інтегрування (спершу по змінній y, а потім по змінній x) область D необхідно представити у вигляді об′єднання двох областей що не перетинаються D_1 і D_2. Запишемо цю область у вигляді нерівності

$D_1: 0 \le y \le 1;\ 0 \le y \le 2x;\ D_1: 1 \le y \le 3;\ 0 \le y \le 3 - x.$

Користуючись властивістю адитивності подвійного інтегралу і формулою (1.2) для областей D_1 і D_2, отримуємо

$$\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^{3-y} z(x;y)dx = \iint_{D_1} z(x;y)\,dxdy + \iint_{D_2} z(x;y)\,dxdy =$$

$$\int_0^1 dx \int_0^{2x} z(x;y)dy + \int_1^3 dy \int_0^{3-x} z(x;y)dy\,.$$

Приклад1.3. Обчислити $\iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{4-x+y}$, де область Ω обмежена лініями x=0,y=x, $y = 2 - x^2 (x \ge 0)$.

Розв′язання:

Зазначені лінії за умовою $x \ge 0$утворюють криволінійний трикутник з вершинами в точках (0;0),(0;2),(1;1), який і відіграє роль області Ω, при цьому $\Omega = \left\{(x,y)\middle|0 \le x \le 1; x \le y \le 2 - x^2\right\}$.

Отже, $$\iint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{4-x+y} = \int_0^1 dx \int_x^{2-x^2} \frac{dy}{4-x+y} = \int_0^1 \left\{\ln(4-x+y)\Big|_{y=x}^{y=2-x^2}\right\}dx = \int_0^1 \left[\ln(6-x-x^2) - \ln 4\right]dx =$$

$$\int_0^1 \left[\ln(2-x)(3+x) - \ln 4\right]dx = \int_0^1 \left[\ln(2-x) + \ln(3+x) - \ln 4\right]dx = -\ln 4 + x\left[\ln(2-x) + \ln(3+x)\right]\Big|_0^1 -$$

$$\int_0^1 \left[-\frac{x}{2-x} + \frac{x}{3+x}\right]dx = -\ln 4 + \ln 4 - \int_0^1 \left[\frac{x-2+2}{x-2} + \frac{x+3-3}{x+3}\right]dx = -\int_0^1 (1 + \frac{2}{x-2} + 1 - \frac{3}{x+3})dx =$$

$$-(2x + 2\ln\left|x-2\right| - 3\ln\left|x+3\right|)\Big|_0^1 = 8\ln 2 - 3\ln 3 - 2$$

Коли область інтегрування Ω обмежена замкненою лінією $F(x,y)=0$, то рівняння лінії визначає у як неявно задану функцію від х. Якщо з рівняння лінії можна знайти у як двозначну функцію від х

$$y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)\ (x\in[a,b], \varphi_1(x)\le\varphi_2(x)),$$

то подвійний інтеграл обчислюється за формулою (1.1).

Приклад 1.4 Знайти площу фігури Ω, обмеженої кривої $(x-y)^2+2x-1=0$ та прямою $x=-4$.

Розв′язання:

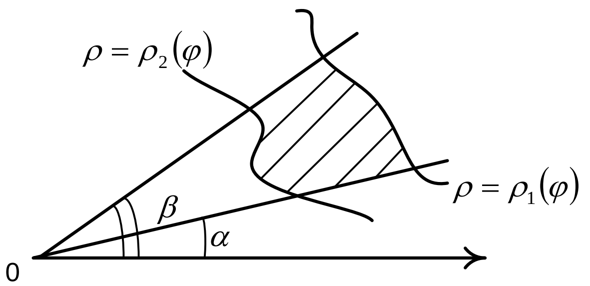
Розв'язуючи рівняння кривої відносно у, маємо $y=x\pm\sqrt{1-2x}(-\infty<x\le\frac{1}{2})$,

тобто в області інтегрування $-4\le x\le\frac{1}{2}, x-\sqrt{1-2x}\le y\le x+\sqrt{1-2x}$.

Отже, $S=\iint\limits_{\Omega}dxdy=\int\limits_{-4}^{\frac{1}{2}}dx\int\limits_{x-\sqrt{1-2x}}^{x+\sqrt{1-2x}}dy=\int\limits_{-4}^{\frac{1}{2}}2\sqrt{1-2x}dx=-\frac{2}{3}(1-2x)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-4}^{\frac{1}{2}}=54$ (кв.од.)

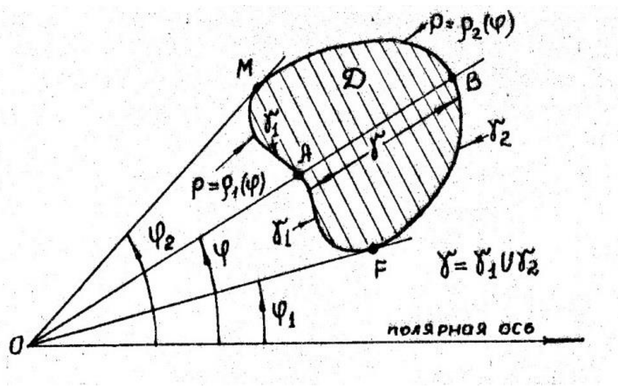
1.2 Подвійний інтеграл в криволінійних координатах

Якщо область D має вигляд



то $\iint\limits_{D}f(x;y)dxdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)\cdot\rho d\rho$.

Детальніше. Розглянемо область D, правильну в радіальному напрямку, тобто будь-який промінь, що виходить з початку координат і проходить через область D, перетинає її межу не більш ніж в двох точках або є частиною межі області D (мал. 2.6).



мал 2.6

Це означає, що область D обмежена променями, що виходять з полюса O (початок координат) під кутами φ_1 та φ_2 до полярної осі (що співпадає OX), а також кривими γ_1 , γ_2 , які можна задати рівняннями $\rho = \rho_1(\varphi)$ та $\rho = \rho_2(\varphi)$ де ρ та φ - полярні координати. Промінь, що виходить з полюса O під кутом φ до полярної осі, $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$, перетинає межу області D в точках A і $B. OA = \rho_1(\varphi), OB = \rho_2(\varphi).$ Аналітично область D задається системою нерівностей $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$: $\rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi)$.

Полярні ρ, φ та декартові $x; y$ координати зв′язані співвідношенням $x = \rho cos\varphi$, $y = \rho sin\varphi$,а формула обчислення подвійного інтегралу в полярних координатах для правильної в радіальному напрямку області D має вигляд

$$\iint_D z(x;y)\,dxdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} z(\rho cos\varphi; \rho sin\varphi)\ \rho d\rho. \qquad (1.4)$$

Приклад1.5. Обчислити $\iint_D (x^2 + y^2)\,dxdy$, де D – область, обмежена кривою $(x^2 + y^2) = 8xy$.

Розв′язання.Переходячи до полярних координат ρ та φ , отримуємо рівняння границі γ області D:

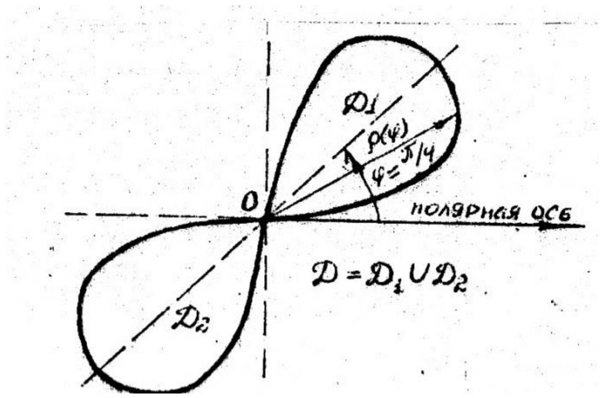
$$(\rho^2 cos^2\varphi + \rho^2 sin^2\varphi) = 8\rho^2 cos\varphi sin\varphi \leftrightarrow \rho^4 = 4\rho^2 sin(2\varphi) \rightarrow \rho = 2\sqrt{sin2\varphi}.$$

Межі зміни φ можна знайти з області визначення функції $\rho = \rho(\varphi)$. Областю визначення функції $\rho = \rho(\varphi)$ є ті значення φ, за яких функція $\rho(\varphi)$ визначена і $\rho(\varphi) \geq 0$. Таким чином, в нашому випадку φ задовольняє нерівність

$$sin2\varphi \geq 0 \leftrightarrow \varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\pi; \frac{3}{2}\pi\right].$$

Відповідно, $D = D_1 \cup D_2$, де D_1, D_2 задаються системами нерівностей (мал. 2.7)

$$D_1: \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 \leq \rho \leq 2\sqrt{sin2\varphi} \end{cases} \qquad D_2: \begin{cases} \pi \leq \varphi \leq \frac{3}{2}\pi; \\ 0 \leq \rho \leq 2\sqrt{sin2\varphi} \end{cases}$$



мал. 2.7

Зважаючи на симетрію підінтегральної функції і області D відносно початку координат з формули (1.4) отримаємо

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dxdy = 2\iint_{D_1}(x^2+y^2)\,dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\sqrt{sin2\varphi}} \rho^3 d\rho$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \frac{\rho^4}{4}\Bigg|_0^{2\sqrt{sin2\varphi}}$$

$$= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2\varphi d\varphi$$

$$= 8\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 2\varphi d\varphi = 8\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-cos4\varphi)d\varphi = 2\pi.$$

Зауваження 1.2. Для узагальненої полярної системи координат зв′язок змінних $\rho, \varphi : x, y$ задається рівностями $x = a\rho cos\varphi$, $y = b\rho sin\varphi$.

Тут змінні ρ, φ мають такий же зміст, що і в полярній системі координат. В цьому випадку формула (1.4) узагальнюється і приймає вигляд

$$\iint_D z(x;y)dxdy = ab\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} z(a\rho cos\varphi; b\rho sin\varphi)\rho d\rho \qquad (1.5)$$

Цю систему координат зручно застосовувати в тому випадку, якщо в рівнянні межі D і в підінтегральну функцію входять вирази

$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^{ki}$, $i = 1,2,\dots,n, k_i -$ раціональні числа.

1.3.Застосування подвійних інтегралів

1.Площа σ плоскої області D обчислюється за формулою

$\sigma = \iint_{\mathrm{D}} dxdy$ (1.6)

2.Об'єм V циліндричного тіла, обмеженого зверху поверхнею $z = f(x;y)$, знизу – частиною площини XOY і бічною поверхнею прямого циліндра, задається формулою

$V = \iint_D f(x;y)dxdy,$ (1.7)

Якщо тіло обмежене двома поверхнями $z = f_1(x;y)$(нижня частина межі тіла), і $z = f_2(x;y)$(верхня частина межі тіла), то

$V = \iint_D (f_2(x;y) - f_1(x;y))dxdy.$

3. Статичні моменти щодо координатних осей і маса плоских областей обчислюються за формулами

$M_x = \iint_D y\gamma(x;y)dxdy;\ M_x = \iint_D x\gamma(x;y)dxdy;$

$M = \iint_D \gamma(x;y)dxdy,$

де $\gamma(x;y)$ - поверхнева щільність маси плоскої області D.

4.Координати центра тяжіння плоскої області D з щільністю маси $\gamma(x;y)$ визначається за формулами

$X_c = {}^{M_y}/_{M};\ Y_c = {}^{M_x}/_{M}.$

5.Моменти інерції плоских областей відносно координатних осей і початку координат обчислюються за допомогою подвійних інтегралів вигляду

$I_x = \iint_D y^2\gamma(x;y)dxdy; I_y = \iint_D x^2\gamma(x;y)dxdy;$

$I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\,\gamma(x;y)dxdy$ – полярний момент інерції;

$I_{xy} = \iint_D xy\gamma(x;y)dxdy$ – відцентровий момент інерції.

Приклад 1.6. Обчислити площу плоскої області, обмежену лінією

$\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3}\right)^2 = x^2$

Розв’язок. Площа плоскої області дається формулою (2.5). З рівняння межі цієї області видно, що в цьому інтегралі для його обчислення зручно перейти до узагальненої полярної системи координат

$x = 2\rho\cos\varphi$; $y = \sqrt{3}\rho\sin\varphi$.

Тоді рівняння межі цієї області буде мати вигляд

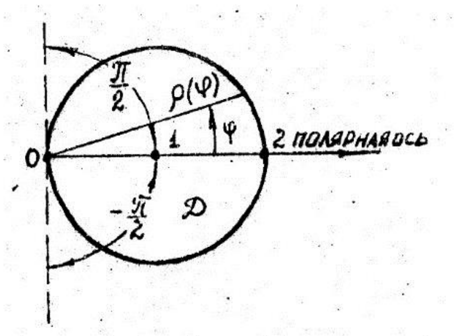
$\left(\frac{4\rho^2 cos^2\varphi}{4} + \frac{3\rho^2 sin^2\varphi}{3}\right)^2 = 4\rho^2 cos^2\varphi \leftrightarrow \rho^4 = 4\rho^2 cos^2\varphi \to \rho = 2\cos\varphi.$

З умови $\rho \geq 0$ визначаються межі інтегрування по змінній φ: $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Вид області зображений на мал.2.8.

Із мал.2.8. і отриманих раніше результатів область D записується у вигляді

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}; \\ 0 \leq \rho \leq 2\cos\varphi\,. \end{cases}$$



Мал.2.8

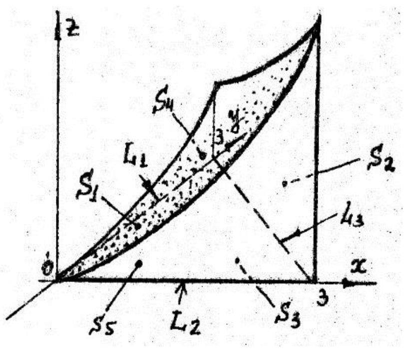
Підставляючи ці межі і в формулу (1.5), де $f = 1$, отримаємо відповідь:

$$\sigma = 2\sqrt{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho d\rho = 2\sqrt{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \frac{\rho^2}{2}\Big|_0^{2\cos\varphi}$$

$$= 4\sqrt{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} cos^2\varphi d\varphi = 2\sqrt{3}\,\pi(\text{кв. од.}).$$

Приклад 1.7. Обчислити об’єм тіла, обмеженого поверхнями $S_1: z = 4x^2 + 2y^2$;

$S_2: x + y = 3$; $S_3: z = 0$; $S_4: x = 0$; $S_5: y = 0$ (мал.2.9).



Розв’язок. Це тіло – циліндричне, тому для обчислення об’єму скористуємося формулою (1.7), де $f(x; y) = 4x^2 + 2y^2$.

$V = \iint_D (4x^2 + 2y^2)dxdy$

Тут область D(S_3), на яку проектується тіло, - трикутник в площині XOY.

Мал.2.9

Ця область обмежена лініями L_1, L_2, L_3 які є слідами площин S_4, S_5, S_2 відповідно. По рівняннях цих площин записуємо рівняння ліній:

$L_1: x = 0, 0 \le y \le 3;$ $L_2: y = 0, 0 \le x \le 2;$

$L_3: x + y = 3, 0 \le y \le 3 \to x = 3 - y, 0 \le y \le 3.$

Звідси випливає, що область D можна задати нерівностями $0 \le y \le 3$;

$0 \le x \le 3 - y$ (див. мал.2.9).

Тому маємо

$V = \int_0^3 dy \int_0^{3-y} \{4x^2 + 2y^2\} dx = \int_0^3 dy \left\{\frac{4}{3}x^3 + 2y^2 x\right\} \Big|_0^{3-y} = \int_0^3 \left\{\frac{4}{3}(3-y)^3 + 2y^2(3-y)\right\} dy = \left\{-\frac{1}{3}(3-y)^4 + 2y^3 - \frac{1}{2}y^4\right\} \Big|_0^3 = \frac{1}{3}81 + 54 - \frac{81}{2} = \frac{162+324-243}{6} = 40{,}5(\text{куб. од.}).$

Якщо з рівняння $F(x, y) = 0$ лінії, яка є межею області Ω, не можна знайти y як явну функцію від x, то в цьому рівнянні можна перейти від координат x, y до нових координат ε, η (здебільшого це полярні чи узагальнені полярні координати) за формулами

$$\left\{\begin{array}{l} x = (\varepsilon, \eta), \\ y = (\varepsilon, \eta) \end{array}\right.$$

За умови,що якобіан

$$y(\varepsilon, \eta) = \begin{vmatrix} x'_\varepsilon & x'_\eta \\ y'_\varepsilon & y'_\eta \end{vmatrix} \neq 0$$

а рівняння $F(x(\varepsilon, \eta), y(\eta, \varepsilon)) = 0$ можна розв’язати відносно, наприклад, η.

Тоді область інтегрування в нових координатах опишеться нерівностями $\alpha \le \varepsilon \le \beta, \eta_1(\varepsilon) \le \eta \le \eta_2(\varepsilon),$ причому

$$\iint_\Omega f(x, y)dxdy = \int_\alpha^\beta d\varepsilon \int_{\eta_1(\varepsilon)}^{\eta_2(\varepsilon)} f(x(\varepsilon, \eta), y(\varepsilon, \eta)) |y(\varepsilon, \eta)| d\varepsilon d\eta$$

де $|y(\varepsilon,\eta)|d\varepsilon d\eta$ - диференціал площі в нових координатах ε,η (у полярних координатах Θ,ρ диференціал площі дорівнює $\rho d\rho d\Theta$).

Приклад 1.8. Знайти масу платівки Ω, обмежені лінією $(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4})^2=y^2$, якщо функція розподілу маси $\gamma(x,y)=x^2$.

Для обчислення інтеграла $\iint\limits_{\Omega}\gamma(x,y)dxdy$, який дорівнює масі платівки Ω, доцільно від декартових координат x,y перейти до узагальнених полярних координат Θ,ρ за формулами:

$$\begin{cases} x=3\rho\cos\Theta \\ y=2\rho\sin\Theta \end{cases}$$

Тоді $\gamma(x,y)=\gamma(3\rho\cos\Theta,2\rho\sin\Theta)=9\rho^2\cos^2\Theta$, а лінія $(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4})^2=y^2$, що обмежує Ω, у нових координатах визначається рівністю $\rho^4=4\rho^2\sin^2\Theta$, тобто $\rho=2|\sin\Theta|$.

Отже, область Ω визначається нерівностями $0\le\Theta\le 2\pi, 0\le\rho\le 2|\sin\Theta|$

$$y(\Theta,\rho)=\begin{vmatrix} x'_\Theta & x'_\rho \\ y'_\Theta & y'_\rho \end{vmatrix}=-6\rho, |y(\Theta,\rho)|=6\rho$$

Звідси $\iint\limits_{\Omega}\gamma(x,y)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\Theta\int\limits_0^{2|\sin\Theta|}9\rho^2\cos^2\Theta 6\rho d\rho$

$$=54\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\Theta d\Theta\int\limits_0^{2|\sin\Theta|}\rho^3 d\rho=54\int\limits_0^{2\pi}\cos^2\Theta\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{2|\sin\Theta|}d\Theta=$$

$$27\int\limits_0^{2\pi}\sin^2 2\Theta(1-\cos 2\Theta)d\Theta=27\int\limits_0^{2\pi}(\sin^2 2\Theta-\sin^2 2\Theta\cos 2\Theta)d\Theta=$$

$$27\int\limits_0^{2\pi}(\frac{1}{2}(1-\cos 4\Theta)-\sin^2 2\Theta\cos 2\Theta)d\Theta=27\pi$$

Завдання 1

Поміняти порядок інтегрування:

1. $\int_0^4 dx\int_{3x^2}^{12x}z(x;y)dy.$

2. $\int_0^1 dx\int_{2x}^{3x}z(x;y)dy$

$3.\int_0^a dx \int_{\frac{a^2-x^2}{2a}}^{\sqrt{a^2-x^2}} z(x;y)dy.$

$4.\int_{a/2}^a dx \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} z(x;y)dy.$

$5.\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{4ax}} z(x;y)dy.$

$6.\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y}} z(x;y)dx.$

$7.\int_0^1 dy \int_{y^2/2}^{\sqrt{3-y^2}} z(x;y)dx.$

$8.\int_0^{\pi} dx \int_0^{sinx} z(x;y)dy.$

$9.\int_0^{R\sqrt{2}/2} dx \int_0^x z(x;y)dy + \int_{R/\sqrt{2}}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} z(x;y)dy.$

$10.\int_{-6}^2 dx \int_{\frac{x^2}{4}-1}^{2-x} z(x;y)dy.$

$11.\int_1^l dx \int_0^{lnx} z(x;y)dy.$

$12.\int_0^{1/\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{1-x^2} z(x;y)dy.$

$13.\int_0^4 dy \int_{4/3}^{\sqrt{25-y^2}} z(x;y)dx.$

$14.\int_0^{9/16} dy \int_y^{\sqrt{y}} z(x;y)dx + \int_{9/16}^{3/4} dy \int_y^{3/4} z(x;y)dx.$

$15.\int_0^1 dy \int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} z(x;y)dx.$

$16.\int_0^1 dx \int_{\frac{1-x^2}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} z(x;y)dy.$

$17.\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{x}} z(x;y)dx + \int_2^4 dx \int_{\sqrt{x-2}}^{\sqrt{x}} z(x;y)dy + \int_4^6 dx \int_{\sqrt{x-2}}^2 z(x;y)dy.$

$18.\int_0^1 dx \int_{x^2}^x z(x;y)dy.$

$19.\int_0^r dy \int_{r-\sqrt{r^2-y^2}}^y z(x;y)dx.$

20.$\int_0^1 dy \int_y^{2-y} z(x;y)dx.$

21.$\int_0^1 dy \int_y^{2-y} z(x;y)dx.$

22.$\int_0^1 dy \int_{3/2}^{2+\sqrt{2y-y^2}} z(x;y)dx.$

23.$\int_1^3 dy \int_{\frac{y+1}{2}}^{\frac{9-y}{2}} z(x;y)dx.$

24.$\int_1^2 dx \int_1^{2x+1} z(x;y)dx + \int_2^3 dx \int_1^{9-3x} z(x;y)dy.$

25.$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} d \int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} z(x;y)dx.$

26.$\int_1^2 dy \int_1^y z(x;y)dx + \int_2^4 dy \int_{y/2}^2 z(x;y)dx.$

27.$\int_0^4 dy \int_0^{y/2} z(x;y)dx + \int_4^6 dy \int_0^{6-y} z(x;y)dx.$

28.$\int_0^1 dy \int_y^{2-y} z(x;y)dx.$

29.$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{x^2}^{4-x^2} z(x;y)dy.$

30.$\int_{-1}^3 dx \int_0^{1+\sqrt{3+2x-x^2}} z(x;y)dy.$

Завдання 2

Знайти площі фігур, обмежених лініями:

Варіант-1

$$1)\, y = \frac{3}{x}, y = 4e^x, y = 3, y = 4.$$

$$2)\, y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0,$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3}x.$$

Варіант-2

1) $x=\sqrt{36-y^2}, x=6-\sqrt{36-y^2}$.

2) $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0$,

$y=0, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$.

Варіант-3

1) $x^2+y^2=72, 6y=-x^2 (y\leq 0)$.

2) $y^2-6y+x^2=0, y^2-8y+x^2=0$,

$\sqrt{3}y=x, y=\sqrt{3}x$.

Варіант-4

1) $x=8-y^2, x=-2y$.

2) $x^2-2x+y^2=0, x^2-4x+y^2=0$,

$y=0, y=x$.

Варіант-5

1) $y=\dfrac{3}{x}, y=8e^x, y=3, \quad y=8$.

2) $y^2-8y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0$,

$y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, y=\sqrt{3}x$.

Варіант-6

1) $y=\dfrac{\sqrt{x}}{2}, y=\dfrac{1}{2x}, x=16$.

2) $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0$,

$y=0, y=x$.

Варіант-7

1) $x=5-y^2, x=-4y$.

2) $y^2-4y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0$,

$x=0, y=x$.

Варіант-8

1) $x^2 + y^2 = 12, -\sqrt{6}y = x^2 \ (y \leq 0).$

2) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 10x + y^2 = 0,$

$y = 0, y = \sqrt{3}x.$

Варіант-9

1) $y = 2\sqrt{3} - \sqrt{12 - x^2},$

$y = \sqrt{12 - x^2}, x \geq 0.$

2) $y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0,$

$y = 0, y = x.$

Варіант-10

1) $y = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}, y = \dfrac{3}{2x}, x = 9.$

2) $y^2 - 2x + x^2 = 0, y^2 - 4x + x^2 = 0,$

$\sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$

Варіант-11

1) $y = \sqrt{24 - x^2}, 2\sqrt{3}y = x^2, x \geq 0.$

2) $y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0,$

$y = \sqrt{3}x, x = 0.$

Варіант-12

1) $y = x^2, y = -x.$

2) $x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0,$

$\sqrt{3}y = x, y = \sqrt{3}x.$

Варіант-13

1) $y = 20 - x^2, y = -8x.$

2) $y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0,$

$y = \sqrt{3}x, x = 0.$

Варіант-14

1) $y=\sqrt{18-x^2}, y=3\sqrt{2}-\sqrt{18-x^2}.$

2) $x^2-2x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0,$

$\sqrt{3}y=x, y=\sqrt{3}x.$

Варіант-15

1) $y=32-x^2, y=-4x.$

2) $y^2-2y+x^2=0, y^2-6y+x^2=0,$

$\sqrt{3}y=x, x=0.$

Варіант-16

1) $y=\dfrac{2}{x}, y=5e^x, y=2, y=5.$

2) $y^2-2x+x^2=0, y^2-4x+x^2=0,$

$y=0, \sqrt{3}y=x.$

Варіант-17

1) $x^2+y^2=36, 3\sqrt{2}y=x^2\,(y\geq 0).$

2) $x^2-2y+y^2=0, x^2-10y+y^2=0,$

$y=\sqrt{3}x, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}.$

Варіант-18

1) $y=3\sqrt{x}, y=\dfrac{3}{x}, x=4.$

2) $y^2-2x+x^2=0, y^2-6x+x^2=0,$

$y=0, \sqrt{3}y=x.$

Варіант-19

1) $y^2=4x, x=\dfrac{8}{y^2+4}.$

2) $x^2-4y+y^2=0, x^2-10y+y^2=0,$

$\sqrt{3}y=x, y=\sqrt{3}x.$

Варіант-20

1) $y=\dfrac{25}{4}-x^2, y=x-\dfrac{5}{2}.$

2) $y^2-8y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0,$

$\sqrt{3}y=x, y=\sqrt{3}x.$

Варіант-21

1) $y=\sqrt{x}, y=\dfrac{1}{x}, x=16.$

2) $x^2-2y+y^2=0, x^2-4y+y^2=0,$

$y=0, y=x.$

Варіант-22

1) $x=5-y^2, x=-4y.$

2) $y^2-2x+x^2=0, y^2-4x+x^2=0,$

$y=0, y=\sqrt{3}x.$

Варіант-23

1) $x=27-y^2, x=-6y.$

2) $x^2-6y+y^2=0, x^2-8y+y^2=0,$

$y=x, x=0.$

Варіант-24

1) $x=4-y^2, x-y+2=0.$

2) $y^2-4x+x^2=0, y^2-8x+x^2=0,$

$y=\sqrt{3}x, y=0.$

Варіант-25

1) $x=y^2, x=\sqrt{2-y^2}.$

2) $x^2-4y+y^2=0, x^2-8y+y^2=0,$

$y=0, y=x.$

Варіант-26

1) $y=\dfrac{3}{2}\sqrt{x}, y=\dfrac{3}{2x}, x=4.$

2) $x^2-4x+y^2=0, x^2-8x+y^2=0,$

$y=\sqrt{3}x, \sqrt{3}y=x.$

Варіант-27

1) $y^2=4-x, y=x+2, y=2, y=-2.$

2) $x^2-4y+y^2=0, x^2-8y+y^2=0,$

$x=0, y=\sqrt{3}x.$

Варіант-28

1) $y=\dfrac{1}{x}, y=6e^x, y=1, y=6.$

2) $x^2-4x+y^2=0, x^2-6x+y^2=0,$

$\sqrt{3}y=x, y=x\sqrt{3}.$

Варіант-29

1) $y=3\sqrt{x}, y=\dfrac{3}{x}, x=9.$

2) $y^2-2y+x^2=0, y^2-10y+x^2=0,$

$x=0, x=\sqrt{3}y.$

Варіант-30

1) $y=11-x^2, y=-10x.$

2) $y^2-6x+x^2=0, y^2-10x+x^2=0,$

$\sqrt{3}y=x, y=\sqrt{3}x.$

Завдання 3.

Варіант №1

Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_0^1 dy \int\limits_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x;y)dx$

Варіант №2

Знайти площу області, обмеженої кривими
$x^2+y^2=1, y=x, y=x\sqrt{3}, x^2+y^2=25, (y\geq 0)$

Варіант №3

Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_{-1}^{1} dy \int\limits_{y^2-1}^{1-y^2} f(x;y)dx$.

Варіант №4

Знайти площу області, обмеженої кривими
$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1, \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=4, y=0, y=x, x>0.$

Варіант №5

Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_{-1}^{0} dx \int\limits_{x}^{x^2} f(x;y)dy$

Варіант №6

Знайти площу області ,обмеженої кривими
$\frac{x^2}{100}+y^2=1, \frac{x^2}{100}+y^2=16, x=0, y=x\sqrt{3}, x>0$.

Варіант №7

Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{2} dy \int\limits_{y}^{\sqrt{8-y^2}} f(x;y)dx$

Варіант №8

Знайти площу області ,обмеженої кривими
$\frac{x^2}{16}+y^2=1, \frac{x^2}{16}+y^2=9, x=0. y=x, x>0.$

Варіант №9

Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{2-x} f(x;y)dy$

Варіант №10

Знайти площу області ,обмеженої кривими
$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1, \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=25, y=0, y=x\sqrt{3}, x>0.$

Варіант №11

Змінити порядок інтегрування $\int_{-1}^{1}dx\int_{0}^{1-x^2}f(x;y)dy$

Варіант №12

Знайти площу області, обмеженої кривою $(x^2+y^2)^2=2(x^2-y^2)$

Варіант №13

Змінити порядок інтегрування $\int_{0}^{1}dy\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y}f(x;y)dx$.

Варіант №14

Знайти площу області, обмеженої кривими $\rho=2, \rho=2(1-\cos\varphi)$,

якщо $\rho>2(1-\cos\varphi)$.

Варіант №15

Змінити порядок інтегрування: $\int_{0}^{1}dx\int_{x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x;y)\,dy$

Варіант №16

Знайти площу області, обмеженою кривою: $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$

Варіант №17

Змінити порядок інтегрування: $\int_{0}^{1}dy\int_{y^2}^{2-y^2}f(x;y)\,dx$.

Варіант №18

Знайти площу області, яка обмежена кривими: $x^2+\frac{y^2}{36}=1, x^2+\frac{y^2}{36}=36,$

$y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$, $x>0$

Варіант №19

Змінити порядок інтегрування: $\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)\,dx$.

Варіант №20

Знайти площу області, яка обмежена кривими: $x^2 + \frac{y^2}{16} = 1$, $x^2 + \frac{y^2}{16} = 36$,

Варіант №21

Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{2x}^{6-x} f(x;y)dy$

Варіант №22

Знайти площу області , обмеженої кривими $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$, $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 4$, $y=-x$,

Варіант №23

Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{x}^{\sqrt{2-x^2}} f(x;y)dy$

Варіант №24

Знайти площу області, обмеженої кривими $x^2 + \frac{y^2}{64} = 1$, $x^2 + \frac{y^2}{64} = 4$, $y = x\sqrt{3}$,

$y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $x > 0$.

Варіант №25

Змінити порядок інтегрування $\int\limits_{-1}^{0} dy \int\limits_{y}^{y^2} f(x;y)dx$

Варіант №26

Знайти площу області, обмеженої кривими $x^2+\frac{y^2}{9}=1$,

$x^2+\frac{y^2}{9}=64, y=x, y=x\sqrt{3}, x>0.$

Варіант №27

Змінити порядок інтегрування: $\int_1^2 dx \int_x^{2x} f(x;y)dy$

Варіант №28

Знайти площу області, обмеженої кривими: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=25$, $y=x$,

$y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $x>3$.

Варіант №29

Змінити порядок інтегрування: $\int_0^4 dy \int_y^{8-y} f(x;y)dx$.

Варіант №30

Знайти площу області, обмеженої кривими:

$x^2+\frac{y^2}{9}=1$, $x^2+\frac{y^2}{9}=36$, $x=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, $x>0$.

Варіант №31

Змінити порядок інтегрування: $\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2-x} f(x;y)dy$.

Варіант №32

Знайти площу області, обмеженої кривими: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$, $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=16$, $y=0$,

Завдання 4

Варіант №1

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими

$x^2=ay, x^2+y^2=2a^2, y=0, (a,x>0)$, якщо поверхнева густина $\gamma(x,y)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Варіант №2

Знайти момент інерції відносно осі Оу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $y = x^2, y = \sqrt{x}$, якщо поверхнева густина $\gamma(x, y) = x + y$.

Варіант №3

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 10x, x = 0, y = x\sqrt{3}$, якщо поверхнева густина $\gamma(x; y) = y - x$.

Варіант №4

Знайти момент інерції відносно осі Ох однорідного трикутника, обмеженого прямими $x + y = 1, x = 0, y = 0$.

Варіант №5

Знайти масу пластини ,яка має форму області ,обмеженої кривими $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x, y = 0, y = x,$ якщо поверхнева густина $j(x; y) = xy$.

Варіант №6

Знайти момент інерції відносно осі Оу однорідного трикутника ,обмеженого прямими: $2x + 3y = 1, x = 0, y = 0$.

Варіант №7

Знайти масу пластинки ,яка має форму області ,обмеженої кривими $x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 6x, y = x, x = 0,$ якщо поверхнева густина $j(x; y) = 2x$.

Варіант №8

Знайти центр мас півкола ,обмеженої кривими $y = \sqrt{R^2 - x^2}, y = 0,$ якщо поверхнева густина $j(x; y) = x^2 + y^2$.

Варіант №9

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими

$x^2 + y^2 = 2x$, $x^2 + y^2 = 8x$, $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$, $y = 0$, якщо поверхнева густина $\gamma(x; y) = x + y$.

Варіант №10

Знайти центр мас сектора, обмеженого кривими $x=\sqrt{R^2-y^2}$, $y=x$, $y=-x$, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=\sqrt{x^2=y^2}.$

Варіант №11

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x^2+y^2=2x, x^2+y^2=10x, y=x\sqrt{3}, y=0$, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=2x$.

Варіант №12

Знайти момент інерції відносно осі Ох пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x=1, y=0, y^2=4x(y>0)$, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=x^2+7y.$

Варіант №13

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x^2+y^2=8x, x^2+y^2=20x, y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}, x=0$, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=2y$.

Варіант №14

Знайти момент інерції відносно початку координат пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x^2+y^2=1, x^2+y^2=9, y=x, y=x\sqrt{3}(x>0)$, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=arctg\,\dfrac{y}{x}$.

Варіант №15

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими:

$x^2+y^2=6x$, $x^2+y^2=16x$, $y=x\sqrt{3}$, $y=\dfrac{x}{\sqrt{3}}$, якщо поверхнева густина j(x;y) = 4y

Варіант №16

Знайти момент інерції відносно осі 0x пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x=p$, $y^2=2px$ $(p>0)$, якщо поверхнева густина j(x;y) = x

Варіант №17

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими:

$x^2+y^2 = 10x$, $x^2+y^2 = 12x$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, якщо поверхнева густина j(x;y)= x+|y|

Варіант №18

Знайти момент інерції відносно осі 0y пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x = 2$, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$, якщо поверхнева густина j(x;y)= $\frac{1}{y^2}$

Варіант №19

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими:

$x^2+y^2 = 4x$, $x^2+y^2 = 8x$, $y = x$, $y = - x$, якщо поверхнева густина j(x;y)= 2x+y

Варіант №20

Знайти момент інерції відносно початку координат, яка має форму області, обмеженою кривою $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$, якщо поверхнева густина j(x;y)= 3

Варіант №21

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=4y$, y=0, y=x, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=xy$.

Варіант №22

Знайти момент інерції відносно початку координат пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x=4-y^2, y=x+2,$ якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=x^2y^2$.

Варіант №23

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x^2+y^2=2y,\ x^2+y^2=6y,\ x=0, y=x,$ якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=x+y$.

Варіант №24

Знайти центр мас однорідної пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $y^2=4-x, y^2=2x-5$.

Варіант №25

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=8y$, $y=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=3x$.

Варіант №26

Знайти момент інерції відносно осі $0x$ пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $y=\frac{1}{x}$, $y=2$, $y=4$, $x+y=6$, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=x$.

Варіант №27

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=10y$, $y=0$, $y=x\sqrt{3}$, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=xy$.

Варіант №28

Знайти момент інерції відносно осі Oy пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x=4-y^2$, $x+2y=4$, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=2x+y$.

Варіант №29

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x^2+y^2=2y$, $x^2+y^2=12y$, $x=0$, $y=x\sqrt{3}$, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=2xy$.

Варіант №30

Знайти момент інерції відносно початку координат пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$, $x=4$, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=x^2+y^3$.

Варіант №31

Знайти масу пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $x^2+y^2=4y$, $x^2+y^2=8y$, $x=0$, $y=\frac{x}{\sqrt{3}}$, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=3xy^2$.

Варіант №32

Знайти центр мас однорідної пластинки, яка має форму області, обмеженої кривими $y=-\frac{7}{|x|}$, $y=-8+|x|$, якщо поверхнева густина $\gamma(x;y)=2xy$.

Завдання 5

З допомогою подвійних інтегралів обчислити площі областей, обмежених лініями (1-6):

1. $(y-2x)^2+x^2=1$
2. $(x-2y)^2+y=2; y=1$
3. $y^2(1-x^2)=x^2$
4. $(x^2+y^2)^2=2a^2xy$
5. $(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9})^2=4x^2$
6. $(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4})^2=x^2y$

Побудувати області, площі яких виражаються наведеними далі інтегралами. Обчислити ці площі та змінити порядок інтегрування (7-10):

7. $\int_1^3 dx \int_{-2x}^{3-x^2} dy$

8. $\int_0^a dy \int_{-\sqrt{y^2+a^2}}^{\sqrt{y^2+a^2}} dx$

9. $\int_0^2 dx \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{0} dy$

10. $\int_{-1}^2 dy \int_{-1/2y}^{1-y^2/2} dx$

11. Визначити момент інерції матеріальної фігури, обмеженої лініями $xy=4$ та $xy=5$ відносно прямої $y=x$,вважаючи, що $\gamma(x,y)\equiv 1$.

12.Визначити момент інерції матеріальної фігури,обмеженої однією пелюсткою лемніскати $\rho^2=2a^2\cos 2\Theta(-\frac{\pi}{4}\le\Theta\le\frac{\pi}{4})$ відносно полюса, якщо $\gamma\equiv 1$.

13.Обчислити статичні моменти відносно координатних осей так званого кругового трикутника, утвореного координатними осями та дугою кола $(x-a)^2+(y-a)^2=a^2(0\le x\le a)$, якщо $\gamma(x,y)\equiv 1$

14.Обчислити статичні моменти прямокутного рівнобедреного трикутника, катети якого дорівнюють a, відносно кожної з його сторін $(\gamma(x,y)\equiv 1)$.

15.Обчислити статичний момент однорідної $(\gamma(x,y)\equiv 1)$. плоскої фігури, обмеженої лініями $x=0$ та $y^2=1-x$ відносно осі Oy.

16.Обчислити статичні моменти плоскої фігури, обмеженої лініями $x=y^3, x=0, y=1$ відносно координатних осей, якщо $\gamma(x,y)=k|x|$ (k - коефіцієнт пропорційності).

17. Обчислити статичний момент фігури, обмеженої однією пелюсткою лемніскати $\rho^2=a^2\cos 2\Theta(-\frac{\pi}{4}\le\Theta\le\frac{\pi}{4})$, відносно прямої, що проходить через полюс перпендикулярно до полярної осі, якщо $\gamma\equiv 1$.

Знайти координати центра мас однорідних пластинок, обмежених кривими (18-21):

18. $ay=x^2, x+y=2a(a>0)$.

19. $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}(x\ge 0, y\ge 0)$.

20. $\sqrt{x}+\sqrt{y}=\sqrt{a}, x=0, y=0$.

21. $x^2+y^2=1, x+y=1(x\ge 0, y\ge 0)$.

Знайти маси матеріальних фігур, обмежених лініями (22-24):

22. $y^2-x^2=1, x=-a, x=a(\gamma(x,y)=|xy|)$.

23. $x^2+y^2=\pi^2, x^2+y^2=4\pi^2(\gamma(x,y)=\left|\sin\sqrt{x^2+y^2}\right|)$.

24. $x^2+y^2=1, x=\frac{\sqrt{2}}{2}, x=1(\gamma(x,y)=|y|)$.

З допомогою подвійних інтегралів знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями (25-30):

25. $z=xy, x^2+y^2=1, z=0$

26. $z=x^2+y^2, y=x^2, y=1, z=0$

27. $x=0, y=0, z=0, 2x+3y=12, z=y^{2/12}$

28. $2z = x^2 - y^2, x^2 + y^2 = R^2, z = 0$

29. $z = ae^{-x^2-y^2}, x^2 + y^2 = R^2, z = 0$

30. $x^2 + y^2 = 4a^2, z = x, z = 3x$

Завдання 6

Обчислити площу плоских областей, обмежених кривими.

1. $y^2 = 10x + 25, \;\; y^2 = -6x + 9.$

2. $x^2 + y^2 = 2x; \; x^2 + y^2 = 4x; \;\; y = x; \;\; y = 0$.

3. $x = y; \;\; x = 2y; \;\; x + y = a; \;\; x + 3y = a; \;\; a > 0.$

4. $(y - x)^2 + x^2 = 1.$

5. $\rho \cos \varphi = 1; \;\; \rho = 2$(мається на увазі область, що не містить полюса).

6. $y^2 = ax; \;\; y^2 = bx; \;\; xy = \alpha; \;\; xy = \beta \; (0 < a < b; \;\; 0 < \alpha < \beta).$

7. $x = y^2 - 2y; \;\; x + y = 0.$

8. $y^2 = 4x - x^2; \;\; y^2 = 2x$ (область поза параболою).

9. $y^2 + 2y - 3x + 1 = 0; \;\; 3x - 3y - 7 = 0.$

10. $y = cosx; \;\; y = cos2x; \;\; y = 0$ (область, найближча до початку координат).

11. $x = 4 - y^2; \;\; x + 2y = 4.$

12. $y = 4x - x^2; \;\; y = 2x^2 - 5x.$

13. $y = 2 - x; \;\; y^2 = 4x + 4.$

14. $3y^2 = 25x; \;\; 5x^2 = 9y.$

15. $(x - 2y)^2 + y = 2; \;\; y = 1.$

16. $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2xy.$

17. $(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9})^2 = x^2y.$

18. $(y^2 + x^2)^2 = y^2.$

19. $(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9})^2 = 4x^2.$

20. $\rho = 2(1 - cos\varphi)$; $\rho = 2$ (область поза коордіоїди).

21. $\rho = 2(1 + cos\varphi)$; $\rho = 2cos\varphi$.

22. $y^2 = 4(1 - x)$; $x^2 + y^2 = 4$ (область поза параболою).

23. $x^3 + y^3 = 2xy$.

24. $\rho = 1$; $\rho = \frac{2}{\sqrt{3}}cos\varphi$ (область поза колом $\rho = 1$).

25. $x = 4y - y^2$; $x + y = 6$.

26. $x^2 + y^2 = 25$; $y = x$; $x = 3$; $y = 0$.

27. $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 = 4x$.

28. $y = x$; $y = 2x$; $x^2 + y^2 = 3$.

29. $y^2 = 4ax$; $x + y = 3a$; $y = 0$.

30. $y^2 = 10x + 25$; $y^2 = -6x + 9$.

Завдання 7

Подвійним інтегруванням знайти об'єм тіл, обмежених поверхнями.

1.$z = 1 + x + y$; $x = o$; $x + y = 1$; $z = 0$; $y = 0$.

2. $z = x^2 + y^2$; $y = x^2$; $y = 1$; $z = 0$.

3. $x + y + z = a$; $x^2 + y^2 = R^2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $a \geq R\sqrt{2}$.

4. $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$; $2x + 3y - 12 = 0$; $z = \frac{y^2}{12}$.

5. $y = x^2$; $x = y^2$; $z = 0$; $z = 12 + y - x^2$.

6. $z = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 = x$; $x^2 + y^2 = 2x$; $z = 0$.

7. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$; $x^2 + y^2 = a|x|$; $a > 0$.

8. $x + y + z = a$; $3x + y = a$; $3z + 2y = 2a$; $y = 0$; $z = 0$.

9. $z^2 - x^2 - y^2 = a^2$; $x^2 + y^2 = a^2$.

10. $z^2 = x^2 + y^2$; $x^2 + y^2 + (z - r)^2 = r^2$ (частина кулі, що лежить в середині конуса).

$11. 2z - x^2 - y^2; z = 0; x = 2.$

$12. y^2 + z^2 = x; x = y;$

$13. x^2 + y^2 = 2ax; z = x; z = 3x.$

$14. az = y^2; x^2 + y^2 = r^2; z = 0.$

$15. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; z = \frac{1}{2}c; z \geq \frac{1}{2}c.$

$16. z = a^2 - x^2; y^2 + x^2 = a^2; z = 0.$

$17. 2\left(x^2 + y^2\right) + a^2 z^2 = 2a^2; z = 0; z = 1.$

$18. z = 4 - x^2; y = 5; y = 0; z = 0.$

$19. z = a^2 - x^2; x + y = a; y = 2x' z = 0; y = 0.$

$20. z = 1 - x^2 - y^2; y = x; y = \sqrt{3}x; z = 0.$

(тіло розміщено в I-му октанті).

$21. x^2 + y^2 = 8; x = 0; y = 0; z = 0; x + y + z = 4.$

$22. x = 2y^2; x + 2y + z = 4; y = 0; z = 0.$

$23. x^2 + 4y^2 + z = 1; z = 0.$

$24. z = 5x; x^2 + y^2 = 9; z = 0.$

$25. z = x + y + 1; y^2 = x; x = 1; y = 0; z = 0.$

$26. z = x^2 + y^2; z = x + y.$

$27. z = x + y; \left(x^2 + y^2\right) = 2xy; x \geq 0; y \geq 0.$

$28. z = x^2 - y^2; y = 0; z = 0; x = 1.$

$29. x^2 + z^2 = a^2; y = 0; z = 0; y = x.$

$30. \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; y = \frac{c}{a}x; y = 0; z = 0; a > 0; c > 0$

Задание 8

1. Знайти момент инерції однорідного круга (γ = I) радіуса R відносноно його дотичної.

2. Знайти центр мас меньшої однородної області, обмеженої кривими: $x^2 + y^2 = 9; \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$

3. Знайти центр мас більшої однорідної області, обмеженої лініями:

$x^2+y^2=9; \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=1.$

4. Знайти момент инерції прямокутника зі сторонами a та b относительно точки перетину діагоналей.

5. Знайти статичний момент однорідного полукруга радіуса R відносноно його діаметра.

6. Знайти момент инерції однорідного круга радіуса R відносно його дотичної.

7. Знайти статичний момент однородної плоскої фігури, обмеженої віссю OY та параболою $y^2=1-x$ відносно осі OY.

8. Знайти координату y_c однородної плоскої фігури, обмеженої віссю OY та параболою $y^2=1-x$.

9. Знайти статичні моменти фігури, що лежить в першій чверті, обмежена эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ та координатними осями відносно координатних осей, якщо густина в кожній точці фігури дорівнює $\gamma=\mathrm{KXY}$ (K – коефіциент пропорційності).

10. Знайти статичні моменти відносно координатних осей плоскої фігури з густиною $\gamma=\mathrm{Y}$ та обмеженою лініями: $y=x^3; y=0; \mathrm{x}=1.$

11. Знайти момент інерції I_x плоскої фігури з густиною $\gamma=$X, обмеженою лініями $y=0, x=1, y=x^3$.

12. Знайти статичний момент фігури, обмеженої правою петлею лемніскати $\rho^2=a^2\cos 2\varphi$, відносного прямої, що проходить через полюс перпендикулярно до полярной осі (густина $\gamma=1$).

13. Знайти центр мас однорідної пластинки (γ =1), обмеженої кривими: $ay = x^2; x + y = 2a; a > 0$.

14. Знайти момент інерції відносно осі OY однорідної пластинки (γ =1), обмеженої кривими: $2y = x^2; x + y = 4$.

15. Знайти центр мас однорідної плоскої області

(γ =1), обмеженої кривими: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}; x \geq 0; y \geq 0; x = 0; y = 0.$

16. Знайти відцентровий момент інерції I_{xy} однорідної області з густиною γ =2, обмеженої лініями: $2x = y^2; x + y = 4$.

17. Знайти центр мас однорідної області, обмеженої лініями:

$\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}; x = 0; y = 0; a > 0.$

18. Знайти полярний момент інерції однорідної області з густиною

$\gamma = \frac{1}{4}$, обмеженої лініями: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}; x = 0; y = 0; a > 0.$

19. Знайти масу пластинки з густиною $\gamma = \sqrt{x^2 + y^2}$, обмеженої лініями: $x^2 + y^2 = a^2; x = 0; x = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

20. Знайти статичні моменти прямокутного рівнобедреного трикутника, катети якого дорівнюють a, відносно його катетів.

21. Знайти координату x_c - центра мас однорідної плоскої фігури, обмеженої віссю OY та параболою $y^2 = 1 - x$.

22. Знайти момент инерції I_x пластинки з густиною γ =XY , яка обмжена віссю OY та параболою $y^2 = 1 - x$.

23. Знайти статичні моменти плоскої фігури, обмеженої лініями: $y^3 - x = 0; x = 0; y = 1,$ відносно координатних осей, якщо густина $\gamma = X$.

24. Знайти координати центра мас однорідної плоскої області, обмеженої параболами: $y^2 = 4x + 4; y^2 = -2x + 4.$

25. Знайти момент інерції I_y однорідної плоскої області, обмеженої лініями : $YX = 4; \frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1,$

26. Знайти момент інерції I_y однорідної плоскої області, обмеженої лініями: $x^2 = 4y + 4; x^2 = -2y + 4.$

27. Знайти масу плоскої пластинки з густиною $\gamma = x^2 + y^2$,

обмеженої лініями: x=1; y=1; xy $= \frac{1}{2}$.

28. Знайти центр мас плоскої області, обмеженої лініями: $y^2 = 8x; y = 2x$, з густиною $\gamma = XY$.

29. Знайти координати центра мас нижнього півкруга $x^2 + y^2 \le a^2$, якщо його густина дорівнює $\gamma = x^2 + y^2$.

30. Знайти координати центра мас сектора, обмеженого кривими: $y = x; y = 2x; \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{3} = 1$.

Завдання 9

Знайти об'єми тіл, обмежених поверхнями:

Варіант-1

1) $y = 16\sqrt{2x}, y = \sqrt{2x}, z = 0, x + z = 2.$

2) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, 9z = 2(x^2 + y^2).$

3) $z = 2 - 12(x^2 + y^2), z = 24x + 2.$

Варіант-2

1) $y = 5\sqrt{x}, y = \dfrac{5x}{3}, z = 0, z = 5 + \dfrac{5}{3}\sqrt{x}.$

2) $z = \dfrac{15}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, z = \dfrac{17}{2} - x^2 - y^2.$

3) $z = 10((x-1)^2 + y^2) + 1, z = 21 - 20x.$

Варіант-3

1) $x^2 + y^2 = 2, y = \sqrt{x}, y, z = 0, z = 15x.$

2) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, 15z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

3) $z = 8(x^2 + y^2) + 3, z = 16x + 3.$

Варіант-4

1) $x + y = 2, y = \sqrt{x}, z = 12y, z = 0.$

2) $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, z = 1, x^2 + y^2 \le 60.$

3) $2 - z = 20((x+1)^2 + y^2),$

$z = -40x - 38.$

Варіант-5

1) $x = 20\sqrt{2y}, x = 5\sqrt{2y}, z = 0, z + y = \dfrac{1}{2}.$

2) $3z = \sqrt{16 - 9x^2 - 9y^2}, 2z = x^2 + y^2.$

3) $z = 4 - 14(x^2 + y^2), z = 4 - 28x.$

Варіант-6

1) $y = \dfrac{5\sqrt{y}}{2}, x = \dfrac{5y}{6}, z = 0, z = \dfrac{5}{6}(3 + \sqrt{y}).$

2) $z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, z = 10 - x^2 - y^2.$

3) $z = 28\ \ (x+1)^2 + y^2\ \ + 3, z = 56x + 59.$

Варіант-7

1) $x^2 + y^2 = 2, x = \sqrt{y}, x, z = 0, z = 30y.$

2) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{\dfrac{x^2 + y^2}{99}}.$

3) $z = 32(x^2 + y^2) + 3, z = 3 - 64x.$

Варіант-8

1) $x + y = 2, x = \sqrt{y}, z = 0{,}5z = 12x.$

2) $z = \sqrt{100 - x^2 - y^2}, z = 6,$

$x^2 + y^2 \leq 51.$

3) $z = 4 - 6\ \ (x-1)^2 + y^2\ \ , z = 12x - 8.$

Варіант-9

1) $y = 7\sqrt{2x}, y = 2\sqrt{2x}, z = 0, x + z = \frac{1}{2}.$

2) $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + y^2}, z = \frac{23}{2} - x^2 - y^2.$

3) $z = 2 - 4(x^2 + y^2), z = 8x + 2.$

Варіант-10

1) $y = \frac{5\sqrt{x}}{3}, y = \frac{5x}{9}, z = 0, z = \frac{5(3 + \sqrt{x})}{9}.$

2) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, 6z = x^2 + y^2.$

3) $z = 22\ \ (x-1)^2 + y^2\ \ , z = 44 - 44x.$

Варіант-11

1) $x^2 + y^2 = 8, y = \sqrt{2x}, y, z = 0, z = \frac{15x}{11}.$

2) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \sqrt{80}z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

3) $z = 24(x^2 + y^2) + 1, z = 48x + 1.$

Варіант-12

1) $x + y = 4, y = \sqrt{2x}, z = 3y, z = 0.$

2) $z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}, z = 5, x^2 + y^2 \leq 45.$

3) $z = 2 - 18((x+1)^2 + y^2),$

$z = -36x - 34.$

Варіант-13

1) $x = \frac{5\sqrt{y}}{6}, x = \frac{5y}{18}, z = 0, z = \frac{5(3+\sqrt{y})}{18}$.

2) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \frac{3z}{2} = x^2 + y^2$.

3) $1 - z = 16(x^2 + y^2), z = -32x - 1$.

Варіант-14

1) $x = 19\sqrt{2y}, x = 4\sqrt{2y}, z = 0, z + y = 2$.

2) $z = 6\sqrt{x^2 + y^2}, z = 16 - x^2 - y^2$.

3) $z = 30((x+1)^2 + y^2) + 1$,
$z = 60x + 61$.

Варіант-15

1) $3y = \sqrt{x}, y \leq x, x + y + z = 10$,
$y = 1, z = 0$.

2) $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, \sqrt{63}z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3) $z = 26(x^2 + y^2) - 2, z = -52x - 2$.

Варіант-16

1) $x + y = 4, x = \sqrt{2y}, 5z = 3x, z = 0$.

2) $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, z = 4, x^2 + y^2 \leq 39$.

3) $z = -2((x-1)^2 + y^2) - 1, z = 4x - 5$.

Варіант-17

1) $y = 6\sqrt{3x}, y = \sqrt{3x}, z = 0, x + z = 3$.

2) $z = \sqrt{144 - x^2 - y^2}, 18z = x^2 + y^2$.

3) $z = -2(x^2 + y^2) - 1, z = 4y - 1$.

Варіант-18

1) $x^2 = 1 - y, x + y + z = 3, y, z \geq 0$.

2) $z = 26((x-1)^2 + y^2) - 2, z = 50 - 52x$.

3) $2z = 3\sqrt{x^2 + y^2}, z = \frac{5}{2} - x^2 - y^2$.

Варіант-19

1) $x = y^2, x = 1, x + y + z = 4, z = 0.$

2) $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}, \sqrt{35}z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

3) $z = 30(x^2 + y^2) + 1, z = 60y + 1.$

Варіант-20

1) $x + y = 6, y = \sqrt{3x}, z = 4y, z = 0.$

2) $z = \sqrt{49 - x^2 - y^2}, z = 3, x^2 + y^2 \leq 33.$

3) $z = -16((x+1)^2 + y^2) - 1,$

$z = -32x - 33.$

Варіант-21

1) $x = 7\sqrt{3y}, x = 2\sqrt{3y}, z = 0, z + y = 3.$

2) $z = \sqrt{36 - x^2 - y^2}, 9z = x^2 + y^2.$

3) $z = 2 - 18(x^2 + y^2), z = 2 - 36y.$

Варіант-22

1) $x = \dfrac{5}{3}\sqrt{y}, x = \dfrac{5y}{9}, z = 0, z = \dfrac{5}{9}(3 + \sqrt{y}).$

2) $z = 9\sqrt{x^2 + y^2}, z = 22 - x^2 - y^2.$

3) $z = 24((x+1)^2 + y^2) + 1, z = 48x + 49.$

Варіант-23

1) $x^2 + y^2 = 18, x = \sqrt{3y}, x, z = 0, z = \dfrac{10y}{11}.$

2) $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}, \sqrt{15}z = \sqrt{x^2 + y^2}.$

3) $z = 22\ \ x^2 + y^2\ \ + 3, z = 3 - 44y.$

Варіант-24

1) $x + y = 6, x = \sqrt{3y}, z = \dfrac{4x}{5}, z = 0.$

2) $2z = 21\sqrt{x^2 + y^2}, 2z = 23 - 2x^2 - 2y^2.$

3) $z = 2 - 4((x-1)^2 + y^2), z = 8x - 6.$

Варіант-25

1) $y = \sqrt{15x}, y = \sqrt{15}x, z = 0,$

$z = \sqrt{15}(1 + \sqrt{x}).$

2) $z = \sqrt{\frac{4}{9} - x^2 - y^2}, z = x^2 + y^2.$

3) $z = 22\ \ (x-1)^2 + y^2\ \ + 3, z = 47 - 44x.$

Варіант-26

1) $x^2 + y^2 = 50, y = \sqrt{5x}, y, z = 0, z = \frac{3x}{11}.$

2) $z = 12\sqrt{x^2 + y^2}, z = 28 - x^2 - y^2.$

3) $z = 32((x-1)^2 + y^2) + 3, z = 67 - 64x.$

Варіант-27

1) $x + y = 8, y = \sqrt{4x}, z = 3y, z = 0.$

2) $z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}, z = 5, x^2 + y^2 \leq 45.$

3) $z = 28(x^2 + y^2) + 3, z = 56y + 3.$

Варіант-28

1) $x = 16\sqrt{2y}, x = \sqrt{2y}, z + y = 2, z = 0.$

2) $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}, z = 1, x^2 + y^2 \leq 21.$

3) $z = 4 - 14((x+1)^2 + y^2), z = -28x - 24.$

Варіант-29

1) $y = 15\sqrt{y}, x = 15y, z = 0,$

$z = 15(1 + \sqrt{y}).$

2) $z = \sqrt{64 - x^2 - y^2}, 12z = x^2 + y^2.$

3) $z = 2 - 20(x^2 + y^2), z = 2 - 40y.$

Варіант-30

$1) x^2 + y^2 = 50, x = \sqrt{5y}, x, z = 0, z = \dfrac{6y}{11}.$

$2) 2z = 9\sqrt{x^2 + y^2}, 2z = 11 - 2x^2 - 2y^2.$

$3) z = 8\ \ (x+1)^2 + y^2\ \ + 3, z = 16x + 19.$

Завдання 10

Знайти масу пластинки D з густиною

1. $\mu = y^2, D : x^2 + \dfrac{y^2}{4} \le 1.$
2. $\mu = \dfrac{y}{x}, D : 1 \le \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 2, 0 \le y \le \dfrac{2}{3}x.$
3. $\mu = x^2 y, D : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} \le 1, y \ge 0.$
4. $\mu = \dfrac{7x^2 y}{18}, D : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} \le 1, y \ge 0.$
5. $\mu = \dfrac{8y}{x^3}, D : 1 \le \dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 4, 0 \le y \le \dfrac{x}{2}.$
6. $\mu = 7xy^6, D : \dfrac{x^2}{9} + y^2 \le 1, x \ge 0.$
7. $\mu = 4y^4, D : \dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 1.$
8. $\mu = \dfrac{x}{y}, D : 1 \le \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 4, x \ge 0, y \ge \dfrac{3x}{2}.$
9. $\mu = \dfrac{x}{y}, D : 1 \le \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} \le 4, x \ge 0, y \ge \dfrac{x}{2}.$
10. $\mu = x^3 y, D : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1, x, y \ge 0.$
11. $\mu = 6x^3 y^3, D : \dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 1, x, y \ge 0.$
12. $\mu = \dfrac{x}{y^3}, D : 1 \le \dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 25, 0 \le x \le 2y.$
13. $\mu = x^2 y^2, D : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 1, y \ge 0.$
14. $\mu = 5xy^7, D : \dfrac{x^2}{16} + y^2 \le 1, x, y \ge 0.$
15. $\mu = 30x^3 y^7, D : \dfrac{x^2}{4} + y^2 \le 1, x, y \ge 0.$
16. $\mu = \dfrac{y}{x}, D : 1 \le \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 3, 0 \le y \le \dfrac{2x}{3}.$

17. $\mu = 7x^4y, D : x^2 + \dfrac{y^2}{25} \le 1, y \ge 0.$

18. $\mu = 35x^4y^3, D : x^2 + \dfrac{y^2}{9} \le 1, y \ge 0.$

19. $\mu = \dfrac{7x^2y}{18}, D : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} \le 1, y \ge 0.$

20. $\mu = \dfrac{y}{x^3}, D : 1 \le x^2 + \dfrac{y^2}{16} \le 9, 0 \le y \le 4x.$

21. $\mu = 11xy^8, D : \dfrac{x^2}{9} + y^2 \le 1, x \ge 0.$

22. $\mu = \dfrac{x}{y}, D : 1 \le \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{16} \le 5, x \ge 0, y \ge 2x.$

23. $\mu = \dfrac{x}{y}, D : 1 \le \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} \le 5, x \ge 0, y \ge \dfrac{2x}{3}.$

24. $\mu = x^5y, D : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 1, x, y \ge 0.$

25. $\mu = x^4, D : \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} \le 1.$

26. $\mu = 15x^5y^3, D : x^2 + \dfrac{y^2}{4} \le 1, x, y \ge 0.$

27. $\mu = \dfrac{9x}{y^3}, D : 1 \le \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} \le 36, x \ge 0,$
$2y \ge 3x.$

28. $\mu = 6xy^9, D : \dfrac{x^2}{100} + y^2 \le 4, x, y \ge 0.$

29. $\mu = 105x^3y^9, D : \dfrac{x^2}{16} + y^2 \le 1, x, y \ge 0.$

30. $\mu = \dfrac{27y}{x^5}, D : 1 \le \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} \le 2, 0 \le y \le \dfrac{4x}{3}.$

1.4. Потрійні інтеграли

До потрійних інтегралів зводяться задачі про обчислення об’ємів тіл, мас матеріальних тіл, центра мас, статичних моментів, моментів інерції матеріальних тіл та інші задачі.

Якщо потрібно обчислити потрійний інтеграл $\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz$ за тілом G, яке визначається рівністю

$$G=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in\Omega,\psi_1(x,y)\le z\le\psi_2(x,y)\}$$

У цьому випадку тіло G знизу обмежене поверхнею $z=\psi_1(x,y)$, а згори поверхнею $z=\psi_2(x,y)\big|\Omega=nP_{0xy}G$, то

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\iint\limits_\Omega dxdy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}f(x,y,z)dz \qquad (1.8)$$

коли при цьому

$\Omega=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$, то з (1.8) маємо

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_a^b dx\int\limits_{\varphi_{1(x)}}^{\varphi_2(x)}dy\int\limits_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)}f(x,y,z)dz \qquad (1.9)$$

Для обчислення потрійних інтегралів за тілом G, яке обмежене поверхнею

$$F(x,y,z)=0 \qquad (1.10)$$

такою, що пряма, проведена через довільну внутрішню точку тіла G паралельно осі Oz, перетинає цю поверхню рівно в двох точках, потрібно рівняння (1.10) розв'язати відносно z. Це дасть $z=\psi_1(x,y)$ та $z=\psi_2(x,y)$. Тоді $G=\{(x,y,z)\,|\,(x,y)\in\Omega,\psi_1(x,y)\le z\le\psi_2(x,y)\}$, де $\Omega=np_{0xy}G$. При цьому, якщо $\Omega=\{(x,y)\,|\,a\le x\le B,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$, то потрійний інтеграл обчислюється за формулою (1.9).

Розглянемо більш детальніше. Будемо вважати, що тривимірна область є правильною відносно координатної осі, якщо будь-яка пряма, що паралельна цій осі, перетинає межу цієї облаті не більш ніж у двох точках, або частково належить тій частині межі, що є циліндричною поверхнею.

Якщо область є правильною відносно осі *OZ* та обмежена знизу поверхнею $Z=Z_1(x;y)$, а зверху – поверхнею $Z=Z_2(x;y)$ та проектується в область D, що належить площині XoY (мал. 2.10), то обчислення потрійного інтегралу відбувається за формулою

$$\iiint\limits_G w(x;y;z)dxdydz = \iint\limits_D \left\{ \int\limits_{z_1(x;y)}^{z_2(x;y)} w(x;y;z)dz \right\} dxdy \equiv$$

$$\equiv \iint\limits_D \left\{ \Phi(x;y;z_2(x;y)) - \Phi(x;y;z_1(x;y)) \right\} dxdy \qquad (1.11),$$

де $\Phi(x;y;z)$ – первісна функції $w(x;y;z)$ по змінній z за припущенням, що x, y – сталі.

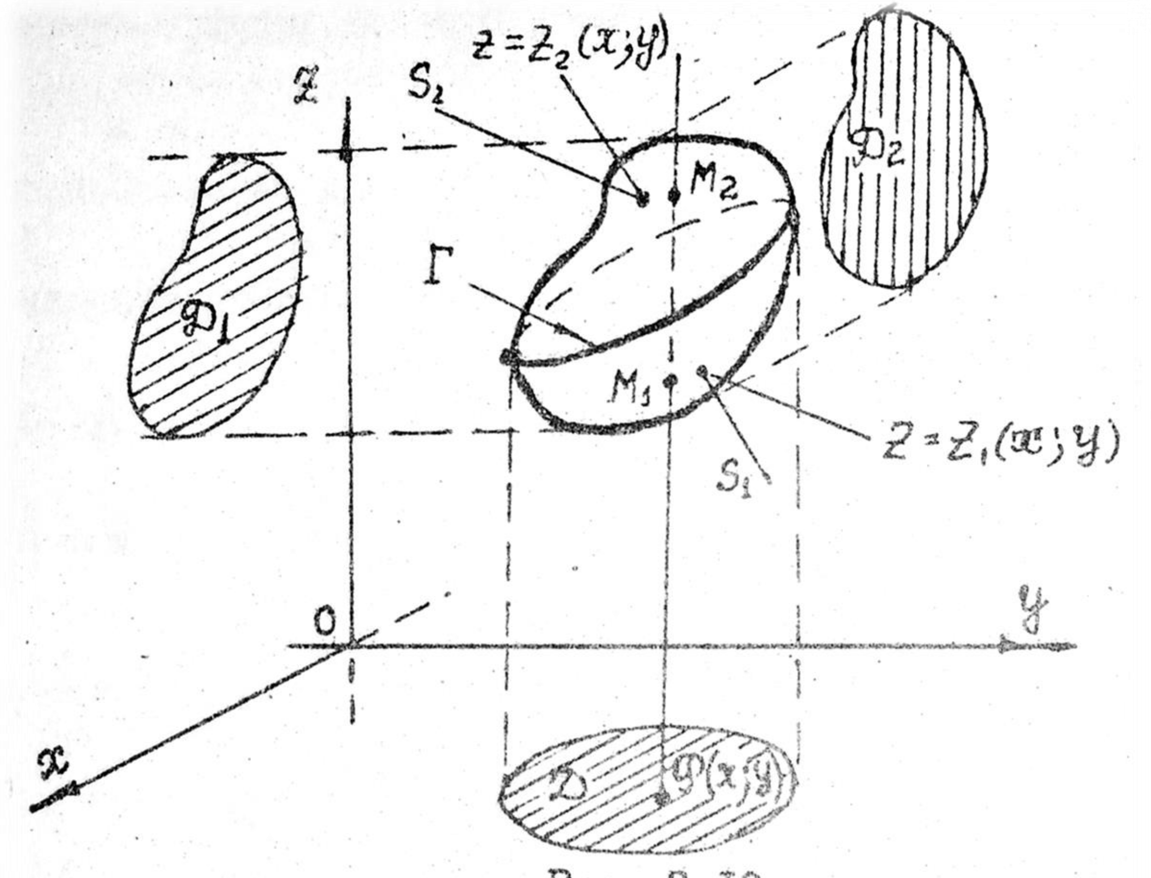


Рис. 2.10

Зауваження 1.3. Якщо область G правильна відносно $OY(OX)$, то обчислення потрійного інтегралу зводиться до обчислення подвійного інтегралу по області $D_1(D_2)$ так само як це було розглянуто раніше (мал. 2.10).

Зауваження 1.4. Якщо область G неправильна відносно координатної, то її розбивають на n правильних відносно цієї осі непересічних підобластей

D_i, $i=1,2,\ldots,n$:

$G = G_1 \cup G_2 \cup \ldots \cup G_n$. Тоді за властивістю адитивності потрійного інтегралу маємо $\iiint\limits_G w(x;y;z)dxdydz = \sum\limits_{i=1}^{n} \iiint\limits_{G_i} w(x;y;z)dxdydz$.

Приклад 1.9. Звести до подвійного інтегралу потрійний інтеграл $\iiint\limits_G w(x;y;z)dxdydz$, якщо область G обмежена поверхнями ,які заданні рівняннями $z = 1 + x^2 + y^2$, $z=5$.

Розв’язок. Тіло обмежене параболоїдом $z = 1 + x^2 + y^2$ і площиною $z=5$ (мал. 2.11.).

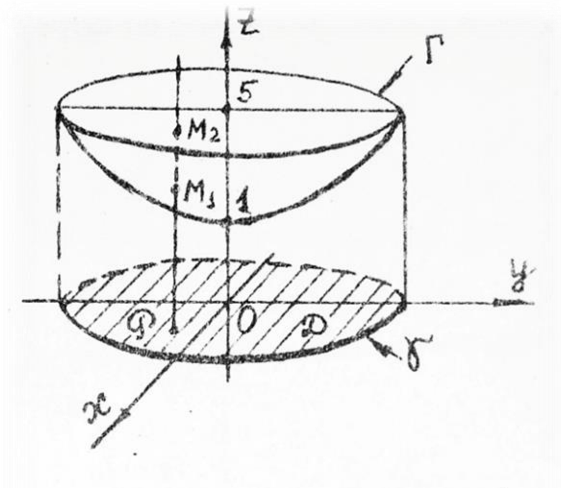


Рис. 2.II

Виключивши z з рівнянь $z = 1 + x^2 + y^2$ і $z=5$, отримуємо рівняння границі γ області D, на яку проектується тіло γ: $x^2 + y^2 = 4$. Це окружність радіуса 2.

Тоді межі вимірювання z такі: $1 + x^2 + y^2 \le z \le 5$, і потрійний інтеграл по області G зводиться до подвійного інтегралу по області $\mathcal{D}$ за формулою (1.11):

$$\iiint\limits_G w(x;y;z)dxdydz = \iint\limits_D \left\{ \int\limits_{1+x^2+y^2}^{5} w(x;y;z)dz \right\} dxdy =$$

$$= \iint\limits_D \left\{ \Phi(x;y;5) - \Phi(x;y;1 + \mathrm{x}^2 + y^2) \right\} dxdy,$$

де $\Phi(x;y;z)$ – первісна по змінній z для функції $w(x;y;z)$.

В отриманому подвійному інтегралі потрібно вибрати такий порядок інтегрування, щоб він просто обчислювався.

Наприклад, можна вибрати такі межі інтегрування для змінних x; y; z:

$$-2 \le x \le 2;$$

$$-\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2} \ ;$$

$$1+x^2+y^2 \le z \le 5 .$$

За попередньою формулою можна записати

$$\iiint\limits_G w(x;y;z)dxdydz = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{1+x^2+y^2}^{5} w(x;y;z)dz .$$

По цій формулі інтеграли обраховуються з права наліво: спочатку обраховують інтеграл по змінній z (вважаючи x; y – сталими), потім по змінний y (вважаючи x – сталою) і, врешті-решт, по змінний x.

1.5. Потрійний інтеграл в циліндричній системі координат

Нехай просторова область G правильна відносно осі OZ і проектується на область D в площині XOY, яка є правильною в радіальному напрямі і яку можна записати в полярних коорінатах ρ; φ за формулами $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$ (див. мал. 2.6 і 2.12).

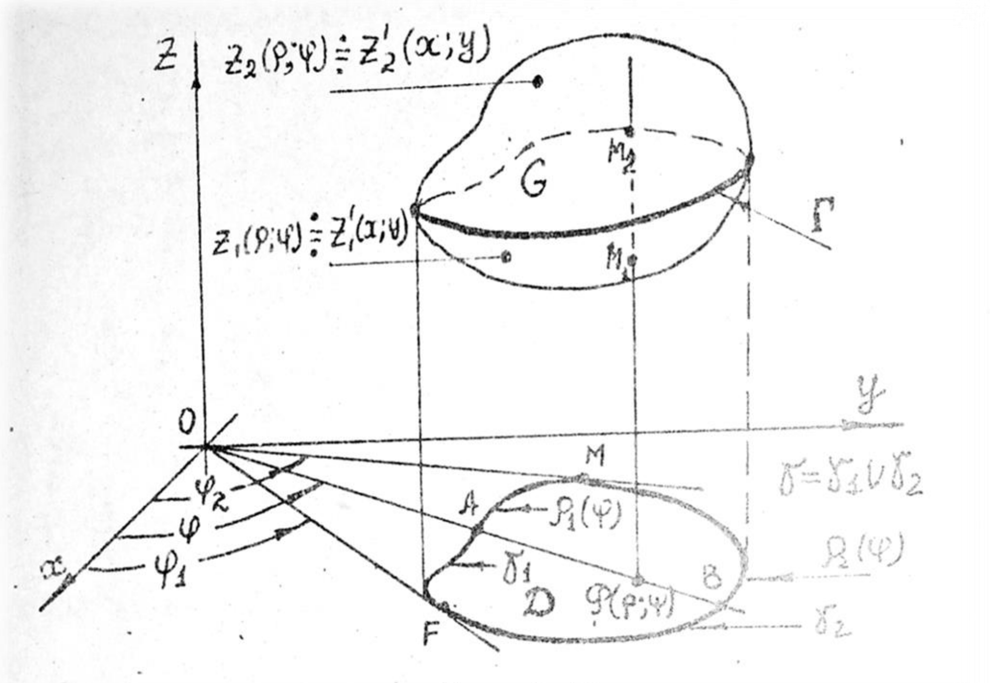


Рис. 2.12

Тоді рівняння нижньої $z_1^{'}(x;y)$ і верхньої $z_2^{'}(x;y)$ поверхонь, які обмежують область *G*, можна записати через змінні ρ і φ у вигляді функцій $z_1(\rho;\varphi)=z_1^{'}(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)$; $z_2(\rho;\varphi)=z_2^{'}(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi)$.

В цьому випадку потрійний інтеграл зводиться до подвійного за формулою

$$\iiint\limits_G w(x;y;z)dxdydz=\iint\limits_D\left\{\int\limits_{z_1(\rho;\varphi)}^{z_2(\rho;\varphi)} w(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi;\mathrm{z})\,\mathrm{dz}\right\}d\rho d\varphi .$$

Скориставшись формулою (1.4) для подвійного інтегралу в полярній системі координат, отримаємо кінцевий вираз для потрійного інтегралу в циліндричній системі координат:

$$\iiint\limits_G w(x;y;z)dxdydz=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} dy\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho d\rho\int\limits_{z_1(\rho;\varphi)}^{z_2(\rho;\varphi)} w(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi;z)dz . \quad (1.11)$$

Зауваження 1.5. Обчислити потрійний інтеграл в циліндричній системі координат $x=\rho\cos\varphi$, $\mathrm{y}=\rho\sin\varphi$, $z=z$ зручно в тому випадку, якщо рівняння $z=z_1^{'}(x;y)$, $z=z_2^{'}(x;y)$ межі області *G* і підінтегральна функція $w(x;y;z)$ містить вираз $(x^2+y^2)^{k_i}$, *i=1,2,...,n*; k_i – раціональні числа.

Якщо ж рівняння межі області *G* і в підінтегральну функцію $w(x;y;z)$ входять вирази $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)^{k_i}$, *i=1,2,...,n,* то для обчислення потрійного інтегралу зручно використовувати узагальнену циліндричну систему координат

$$x=a\rho\cos\varphi,\ \mathrm{y}=b\rho\sin\varphi,\ z=z .$$

При цьому формула (1.11) узагальнюється і набуває вигляду:

$$\iiint\limits_G w(x;y;z)dxdydz=ab\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} dy\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}\rho d\rho\int\limits_{z_1(\rho;\varphi)}^{z_2(\rho;\varphi)} w(a\rho\cos\varphi;b\rho\sin\varphi;z)dz , \quad (1.12)$$

Приклад 1.10. В потрійному інтегралі $\iiint\limits_G w(x;y;z)dxdydz$ перейти в циліндричну систему координат, де область G обмежена поверхнями S_2: $z_2 = 5$ і S_1: $z_1 = 1 + x^2 + y^2$, і показана на мал. 2.11.

<u>Розв'язок</u>. Зручно користовуватись в цьому випадку циліндричною системою координат

$$x = \rho\cos\varphi;\ y = \rho\sin\varphi;\ z = z;\ 0 \le \varphi \le 2\pi. \qquad (1.13)$$

Лінія Γ перетину поверхонь S_1 і S_2 є окружністю

$\begin{cases} z = 5; \\ z = 1 + x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ z = 5 \end{cases}$ радіуса 2, яка в циліндричній системі має вигляд $\rho^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = 4 \Rightarrow \rho^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2; z = 5$. Лінія γ (межа області D в площині XOY) – це та ж окружність, тому межі вимірювання змінної ρ такі: $0 \le \rho \le 2$. У циліндричній системі координат рівняння поверхонь S_1 та S_2 отримуються з рівнянь у декартовій системі координат $(Z = 5; Z = 1 + X^2 + Y^2)$, якщо замість $X;Y;Z$ підставити їх вирази у (1.13).

У результаті отримаємо $S_1 : Z_1 = 1 + \rho^2; S_2 : Z_2 = 5.$ Тоді границі змін Z такі: $1 + \rho^2 \le Z \le 5.$ Сама область G запитується у вигляді нерівностей $0 \le \varphi \le 2\pi; 0 \le \rho \le 2; 1 + \rho^2 \le Z \le 5;$

Формула (1.11) приймає вигляд

$$\iiint\limits_G w(x;y;z)dxdydz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \rho d\rho \int\limits_{1+\rho^2}^5 w(\rho\cos\varphi;\rho\sin\varphi;z)dz \quad (1.14)$$

1.6. Потрійний інтеграл у сферичній системі координат

Нехай просторова область G являється правильною в радіальному направленні, тобто будь-яка пряма, проведенна через початок координат O (полюс сферичної системи координат) та яка проходить через область G, перетинає межу не більше, ніж в двох точках або ж частково лежить на межі області G, якщо ця межа – конічна. Ця область проектується на правильну в радіальному направленні область D в площині XOY (мал.

2.13)

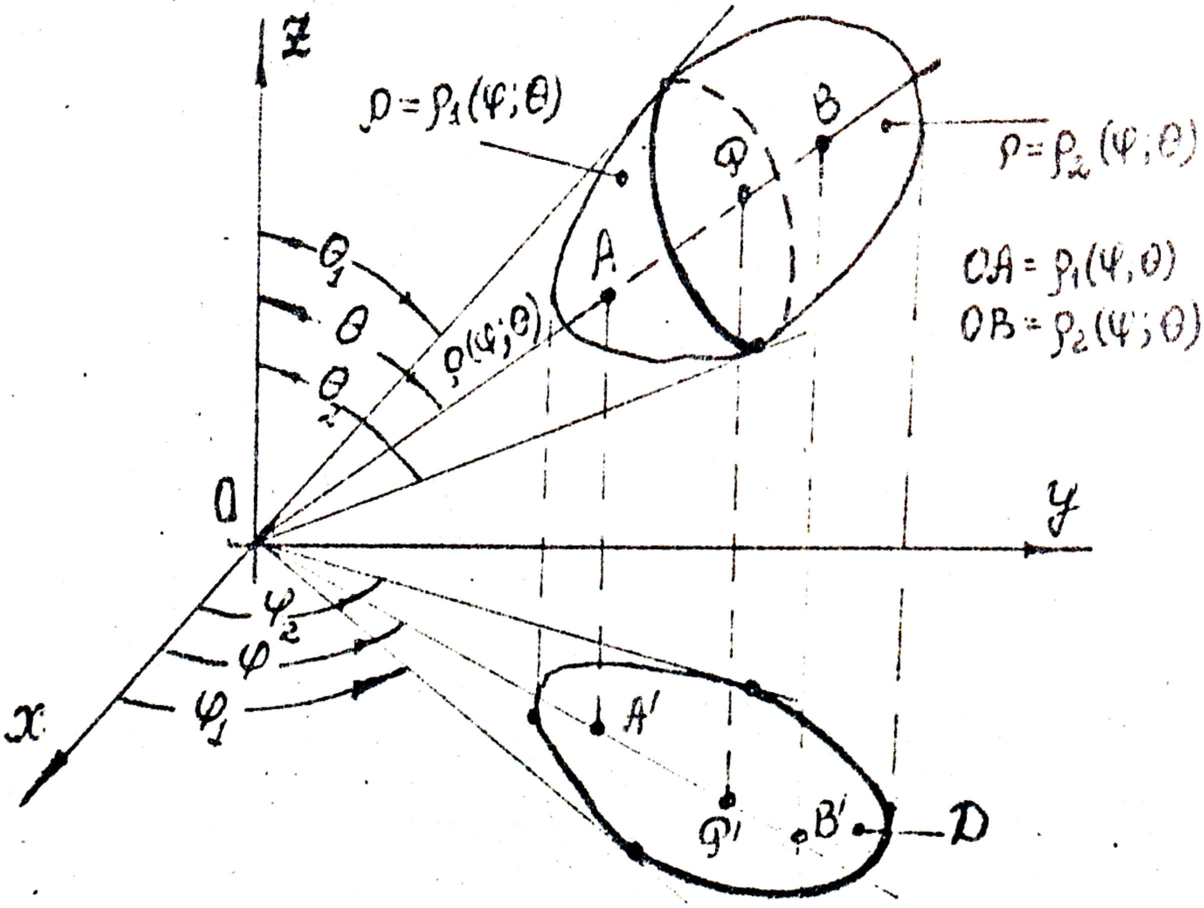


Рис. 2.13

).

Це означає, що область G лежить всередині конуса, що характеризується кутами $\theta_1, \theta_2; \varphi_1, \varphi_2$. У загальному випадку кут θ, а в результаті, і кути θ_1, θ_2 являються функціями кута φ. Кут θ відраховується від додатного направлення осі OZ вниз, а кут φ відраховується в площині XOY від додатного направлення осі OX.

Сама область G обмежена поверхнями, заданими рівняннями $\rho = \rho_1(\varphi;\theta); \rho = \rho_2(\varphi;\theta)$ у сферичній системі координат ρ, φ, θ.

Зв'язок між координатами $X;Y;Z$ будь-якої точки $P \in G$ та її ж координатами ρ, φ, θ у сферичній системі координат задається рівняннями $x = \rho\cos\varphi\sin\theta; y = \rho\sin\varphi\sin\theta; z = \rho\cos\theta.$

Будь-який промінь, який виходить з полюса O та який проходить через точку P, характеризується кутами φ та θ: $\varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2; \theta_1(\varphi) \le \theta \le \theta_2(\varphi)$. Він перетинає межу області G в двох точках A та B (див. мал. 2.13): $OA=\rho_1(\varphi;\theta); OB=\rho_2(\varphi;\theta).$

Аналітично область G задається системою нерівностей $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2;\theta_1(\varphi)\le\theta\le\theta_2(\varphi);\rho_1(\varphi;\theta)\le\rho\le\rho_2(\varphi;\theta).$

У цьому випадку формула для обчислення потрійного інтегралу у сферичній системі координат має вигляд

$$\iiint_G w(x;y;z)dxdydz=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)}\sin\theta d\theta\int_{\rho_1(\varphi;\theta)}^{\rho_2(\varphi;\theta)}w(\rho\cos\varphi\sin\theta;\rho\sin\varphi\sin\theta;\rho\cos\theta)\rho^2d\rho. \quad (1.15)$$

Зауваження 1.6. Сферичну систему координат зручно застосувати у тому випадку, якщо у рівняння межі область G і в підінтегральну функцію входять члени $(x^2+y^2+z^2)^{k_i}, i=1,2,...,n; k_i$ - раціональні числа).

Якщо ж в рівнянні межі області G і в підінтегральну функцію входять вирази вигляду $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^{k_i}, i=1,2,...,n$, то для обчислення потрійного інтегралу зручно використовувати загальну сферичку систему координат $x=a\rho\cos\varphi\sin\theta; y=b\rho\sin\varphi\sin\theta; z=c\rho\cos\theta.$

У цьому випадку формула (1.15) узагальнюється та приймає вигляд

$$\iiint_G w(x;y;z)dxdydz=abc\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int_{\theta_1(\varphi)}^{\theta_2(\varphi)}\sin\theta d\theta\int_{\rho_1(\varphi;\theta)}^{\rho_2(\varphi;\theta)}w(a\rho\cos\varphi\sin\theta;b\rho\sin\varphi\sin\theta;c\rho\cos\theta)\rho^2d\rho.$$
(1.16)

Приклад 1.11. У потрійному інтегралі $\iiint_G w(x;y;z)dxdydz$ перейти до сферичної системи координат, якщо область G є перетином двох куль, поверхнями яких S_1,S_2 задані рівняннями: $S_1: x^2+y^2+z^2+(z^2-R)^2=R^2; S_2: x^2+y^2+z^2=R^2.$

Розв'язок. Область G та її підобласті G_1 та G_2 зображені на мал. 2.14, а та б.

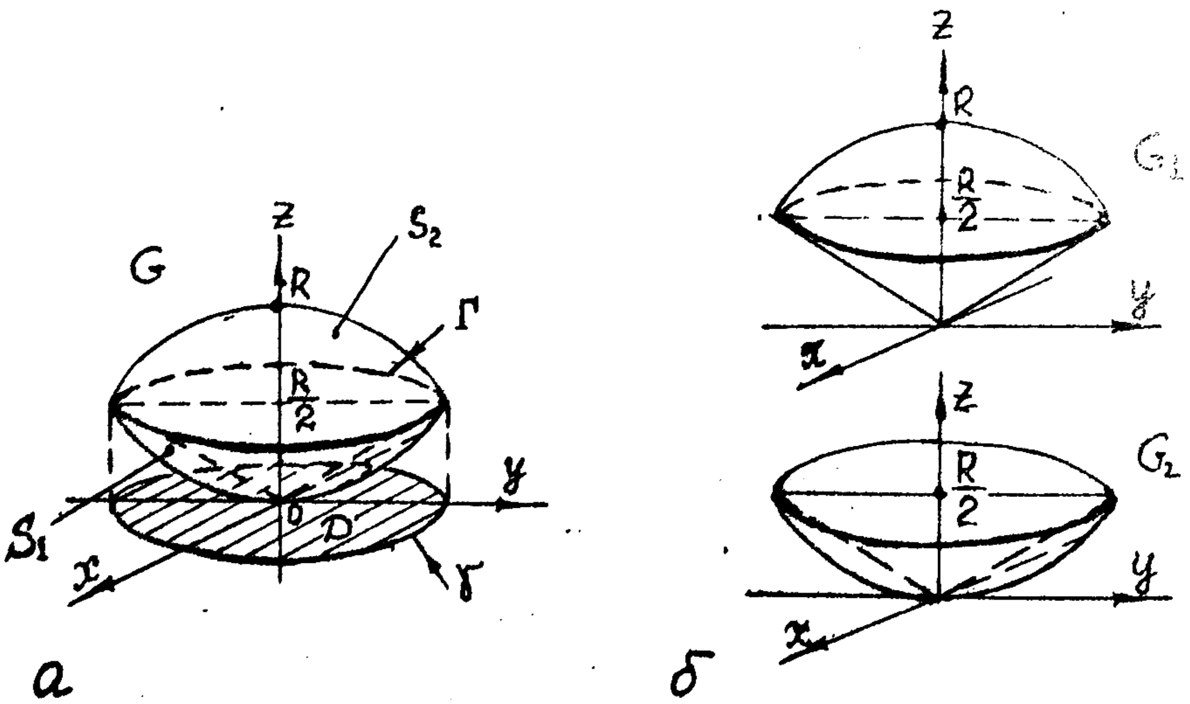


Рис. 2.14

Зручно використовувати сферичну систему координат
$x = \rho\cos\varphi\sin\theta; y = \rho\sin\varphi\sin\theta; z = \rho\cos\theta.$ (1.17)

Знайдемо лінію Γ перетину цих двох поверхонь із системи

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2; \\ x^2+y^2+(z-R)^2=R^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2; \\ x^2+y^2+z^2=2Rz; \end{cases} \Rightarrow R^2-2Rz=0 \Rightarrow z=\frac{R}{2}.$$

Ця плоска лінія та її проекція γ на площину XOY отримується з рівнянь будь-який із двох поверхонь S_1 або S_2, якщо замість z підставити $z=\frac{R}{2}$. У результаті такої підстановки отримуємо $\gamma: x^2+y^2=R^2-\frac{R^2}{4}=\frac{3}{4}R^2.$

Ця окружність радіуса $r=\frac{R\sqrt{3}}{2}$.

Для межі $\Gamma(z=\frac{R}{2})$ та виразу $z=R\cos\theta$ на поверхнях S_1 та S_2 знаходимо кут θ_0 : $\frac{R}{2}=R\cos\theta_0 \Rightarrow \cos\theta_0=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta_0=\frac{\pi}{3}.$

Цей кут ділить область G на дві підобласті G_1 та G_2, яка відрізняється один від одного різними границями інтегрування по змінній ρ. Для $0\le\theta\le\frac{\pi}{3}$, як видно на мал. 2.14, змінна ρ змінюється в границях $0\le\rho\le R$, так як рівняння для $S_2(x^2+y^2+z^2=R^2)$ переходить в рівняння $\rho^2=R^2 \Rightarrow \rho=R$ у сферичній системі координат (1.17).

Для $\frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$ границі по змінній ρ знайдемо, підставляючи перетворення (1.17) в рівняння $x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$ для S_1. У результаті такої підстановки отримуємо

$$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2 \Rightarrow \rho^2-2\rho\cos\theta R=0 \Rightarrow \rho(\rho-2R\cos\theta)=0 \Rightarrow \rho_1=0;\rho_2=2R\cos\theta.$$

Згідно з отриманими результатами, запишемо рівняння областей G_1 та G_2 у вигляді систем нерівностей

$$G_1:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi;\\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{3};\\ 0\le\rho\le R.\end{cases}\qquad G_2:\begin{cases}0\le\varphi\le 2\pi;\\ \frac{\pi}{3}\le\theta\le\frac{\pi}{2};\\ 0\le\rho\le 2R\cos\theta.\end{cases}$$

Користуючись властивістю адитивності потрійного інтегралу, формула (1.15) та рівняння областей G_1 , G_2, отримуємо

$$\iiint\limits_G w(x;y;z)dxdydz=\iiint\limits_{G_1} w(x;y;z)dxdydz+$$

$$+\iiint\limits_{G_2} w(x;y;z)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^R\rho^2 w(a\rho\cos\varphi\sin\theta;b\rho\sin\varphi\sin\theta;c\rho\cos\theta)d\rho+$$

$$+\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta\int\limits_0^{2R\cos\theta}\rho^2 w(a\rho\cos\varphi\sin\theta;b\rho\sin\varphi\sin\theta;c\rho\cos\theta)d\rho.$$

1.7. Застосування потрійних інтегралів

1. Об’єм області G обчислюється за формулою:

$$V=\iiint\limits_G dxdydz.$$

2. Статистичні моменти області G відносно координатних площин XOY, XOZ, YOZ обчислюється за формулами:

$$M_{XY}=\iiint\limits_G \gamma(x;y;z)zdxdydz;$$

$$M_{XZ}=\iiint\limits_G \gamma(x;y;z)ydxdydz;$$

$$M_{YZ} = \iiint\limits_G \gamma(x;y;z)x\,dxdydz.$$

де $\gamma(x;y;z)$ - густина маси в області G.

Маса області G обчислюється за формулою:

$$M = \iiint\limits_G \gamma(x;y;z)dxdydz.$$

3. Координати X_c, Y_c, Z_c центра мас області G обчислюється за формулами:

$$X_c = \frac{M_{YZ}}{M}; Y_c = \frac{M_{XZ}}{M}; Z_c = \frac{M_{XY}}{M}.$$

4. Моменти інерції I_X, I_Y, I_Z відносно осей координат обчислюється за формулами:

$$I_X = \iiint\limits_G (y^2+z^2)\gamma(x;y;z)dxdydz;$$

$$I_Y = \iiint\limits_G (x^2+z^2)\gamma(x;y;z)dxdydz;$$

$$I_Z = \iiint\limits_G (x^2+y^2)\gamma(x;y;z)dxdydz.$$

Полярний момент інерції відносно початку координат обчислюється за формулою:

$$I_0 = \iiint\limits_G (x^2+y^2+z^2)\gamma(x;y;z)dxdydz.$$

Відцентрові моменти інерції обчилюється за формулами:

$$I_{XY} = \iiint\limits_G xy\gamma(x;y;z)dxdydz;$$

$$I_{XZ} = \iiint\limits_G xz\gamma(x;y;z)dxdydz;$$

$$I_{YZ} = \iiint\limits_G yz\gamma(x;y;z)dxdydz.$$

Приклад 1.12. Обчислити об’єм тіла, обмеженими поверхнями $S_1: z = 1 + x^2 + yz; S_2: z = 5$ (див. мал. 2.11).

Розв’язок. Об’єм V області G обчислюється за допомогою інтегралу

$$V=\iiint\limits_G dxdydz.$$

Для обчислення цього інтегралу перейдемо в циліндричну систему координат та скористуємся формулою (1.14), де $w(x;y;z)\equiv 1$. У результаті отримаємо

$$V=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_{1+\rho^2}^5 dz=2\pi\int\limits_0^2\rho d\rho z\,|_{1+\rho^2}^{2}=2\pi\int\limits_0^2(4\rho-\rho^3)d\rho=2\pi(2\rho^2-\frac{1}{4}\rho^4)\,|_0^2=8\pi \text{ (куб. од.).}$$

Приклад 1.13. Обчислити центр ваги області G попереднього прикладу, якщо $\gamma=x^2+y^2$.

Розв'язок. Задача володіє циліндричною симметрією, тобто симметрією відносно осі OZ. Тому $X_c=Y_c=0$, а Z_c необхідно обчислити. Для цього треба обчислити M_{XY} та M.

$$M=\iiint\limits_G(x^2+y^2)\gamma(x;y;z)dxdydz; M_{XY}=\iiint\limits_G(x^2+y^2)\gamma(x;y;z)dxdydz.$$

Як і в попередній задачі, зручно вскористуватися циліндричной системою координат.

У цього випадку користуємося формулой (1.14), где $w=x^2+y^2$ для M та $w=z(x^2+y^2)$ для M_{XY}.

$$M=\iiint\limits_G(x^2+y^2)\gamma(x;y;z)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_{1+\rho^2}^5\rho^2dz=2\pi\int\limits_0^2(4\rho^3-\rho^5)d\rho=2\pi\rho^4(1-\frac{\rho^2}{6})\,|_0^2=\frac{32}{3}\pi;$$

$$M_{XY}=\iiint\limits_G z(x^2+y^2)\gamma(x;y;z)dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^2\rho d\rho\int\limits_{1+\rho^2}^5\rho^2zdz=2\pi\int\limits_0^2\rho^3\frac{1}{2}z^2\,|_{1+\rho^2}^5=\pi\int\limits_0^2(24-2\rho^2-\rho^4)\rho^3d\rho=$$
$$=\pi(6\rho^4-\frac{1}{3}\rho^6-\frac{1}{8}\rho^8)\,|_0^2=\pi(6\cdot 16-\frac{64}{3}-\frac{256}{8})=\frac{128}{3}\pi.$$

$$Z_c=\frac{M_{XY}}{M}=\frac{128\pi\cdot 3}{3\cdot 32\pi}=4 \text{ (лін. О д.).}$$

Відповідь. Центр мас знаходиться в точці (0,0,4).

Приклад 1.14. Обчислити момент інерції I_Z для області G, заданної в попередніх двох прикладах та з площиною маси $\gamma=x^2+y^2$.

Розв'язок. $I_Z=\iiint\limits_G(x^2+y^2)\gamma(x;y;z)dxdydz=\iiint\limits_G(x^2+y^2)^2dxdydz.$

Цей інтеграл зручно обчислити в циліндричній системі координат. Використовуємо формулу (1.14), де $w(x;y;z)=(x^2+y^2)^2=\rho^4$, отримуємо

$$I_Z=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2\rho d\rho\int_{1+\rho^2}^5\rho^4dz=2\pi\int_0^2(4\rho^5-\rho^7)d\rho=2\pi(\frac{2}{3}\rho^6-\frac{\rho^8}{8})|_0^2=2\pi\cdot 26(\frac{2}{3}-\frac{1}{2})=\frac{64}{3}\pi.$$

Приклад 1.15. Знайти об'єм тіла G, обмеженого поверхнями $(x+y+z-1)^2-4z^2=0, x=0, y=0$. З рівняння $(x+y+z-1)^2=0$ маємо $x+y+z-1=\pm 2z$. Це рівняння двох площин $P_1(x+y-z=1)$ та $P_2(x+y+3z=1)$, які відтинають на координатних осях відповідно відрізки I;I;-I (площина P_1) та I;I;$\frac{I}{3}$ (площина P_2). З рівнянь площин маємо $z=x+y-1=\psi_1(x,y)$ та $z=\frac{1}{3}(1-x-y)=\psi_2(x,y)$. Тіло G проектується на Oxy в областьΩ, що визначається рівністю $\Omega=\{(x,y)|0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x\}$. Враховуючи, що площина P_1 обмежує тіло G знизу, а площина P_2 - згори $(\psi_1(x,y)=x+y-1\le\psi_2(x,y)=\frac{1}{3}(1-x-y)$ для $((x,y)\in\Omega)$, маємо

$$G=\left\{(x,y,z)\middle|0\le x\le 1, 0\le y\le 1-x, x+y-1\le z\le\frac{1}{3}(1-x-y)\right\}$$, а тому

$$V_G\iiint dxdydz=\int_0^1dx\int_0^{1-x}dy\int_{x+y-1}^{(1-x-y)/3}dz=\int_0^1dx\int_0^{1-x}\frac{4}{3}(1-x-y)dy=$$
$$\frac{4}{3}\int_0^1\left[(1-x)y-\frac{y^2}{2}\right]\Big|_{y=0}^{y=1-x}dx=\frac{4}{3}\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}dx=\frac{2}{9}$$ (куб.од.)

коли рівняння (1.10) важко чи неможливо розв'язати відносно z або інтегрування в декартових координатах за формулою (1.9) пов'язане з громіздкими обчисленнями, то переходять від декартових координат x,y,z до координат $\varepsilon,\eta,\varsigma$ (це можуть бути циліндричні,узагальнені циліндричні,сферичні,узагальнені сферичні чи інші координати) з допомогою формул

$$\begin{cases} x=x(\varepsilon,\eta,\varsigma), \\ y=y(\varepsilon,\eta,\varsigma), \\ z=z(\varepsilon,\eta,\varsigma) \end{cases}$$

за умови,що якобіан

$$y(\varepsilon,\eta,\varsigma)=\begin{vmatrix} x'_{\varepsilon} & x'_{\eta} & x'_{\varsigma} \\ y'_{\varepsilon} & y'_{\eta} & y'_{\varsigma} \\ z'_{\varepsilon} & z'_{\eta} & z'_{\varsigma} \end{vmatrix} \neq 0$$

Таке перетворення істотно спрощує (за вдалого вибору нових координат $\varepsilon,\eta,\varsigma$) обчислення постійного інтеграла, причому диференціал об'єму в нових координатах дорівнює $|y(\varepsilon,\eta,\varsigma)|d\varepsilon d\mu d\varsigma$.

Рівняння (1.10) поверхні, що обмежує тіло G, у нових координатах має вигляд

$$F(x(\varepsilon,\eta,\varsigma),y(\varepsilon,\eta,\varsigma),z(\varepsilon,\eta,\varsigma))=0 \quad ()$$

Якщо ми зможемо описати тіло G в нових координатах у вигляд рівності

$G=\{(\varepsilon,\eta,\varsigma)|\alpha\le\varepsilon\le\beta,\eta_1(\varepsilon)\le\eta\le\eta_2(\varepsilon),\varsigma_1(\varepsilon,\eta)\le\varsigma\le\varsigma_2(\varepsilon,\eta)\}$, виконавши операції, аналогічні операціям з рівнянням $F(x,y,z)=0$, то

$\iiint\limits_0 f(x,y,z)dxdydz=\int\limits_{\alpha}^{\beta}d\varepsilon\int\limits_{\eta_1(\varepsilon)}^{\eta_2(\varepsilon)}d\eta\int\limits_{\varsigma_1(\varepsilon,\eta)}^{\varsigma_2(\varepsilon,\eta)}\Phi(\varepsilon,\eta,\varsigma)|y(\varepsilon,\eta,\varsigma)|d\varsigma$, де

$\Phi(\varepsilon,\eta,\varsigma)=f(x(\varepsilon,\eta,\varsigma),y(\varepsilon,\eta,\varsigma),z(\varepsilon,\eta,\varsigma))$.

Приклад 1.16. Знайти статичний момент кулі $K: x^2+y^2+z^2\le 2Rz$ відносно площини Oxy, якщо функція розподілу маси в будь-якій точці кулі дорівнює відстані від цієї точки до початку координат.

При обчисленні статичного моменту

$$M_{x,y}=\iiint\limits_K z\gamma(x,y,z)dxdydz$$

Доцільно від декартових координат x,y,z перейти до сферичних координат Θ,r,φ:

$$\begin{cases} x=r\sin\varphi\cos\theta, \\ y=r\sin\varphi\sin\theta, \\ z=r\cos\varphi \end{cases}$$

у даному разі $|y(\theta,r,\varphi)|=r^2\sin\varphi$, а сфера $x^2+y^2+z^2=2Rz$, о обмежує кулю K, в нових координатах має рівняння $r=2R\cos\varphi$. Куля K в нових координатах визначається рівністю

$K=\left\{(\theta,r,\varphi)\middle|0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le r\le 2R\cos\varphi\right\}$, крім того

$\gamma(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=r$, а тому

$$M_{x,y}=\iiint\limits_K z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\pi/2}d\varphi\int\limits_0^{2R\cos\varphi}r\cos\varphi rr^2\sin\varphi dr=$$

$$\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{2R\cos\varphi}z^4dr=\int\limits_0^{2\pi}d\theta\int\limits_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\frac{(2R\cos\varphi)^5}{5}d\varphi=\frac{2^6}{35}\pi R^5.$$

Завдання 11

Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями

1. $x^2+y^2=16; z=0; z+y=2.$
2. $x^2+y^2=R; z=y^2; z=0.$
3. $x^2+y^2=3; z=2-x-y; z=4-x-y.$
4. $z=x^2-y^2; z=0; x^2+y^2=R^2; z\ge 0.$
5. $y^2=z; x+y=2; x=0; z=0.$
6. $x^2+2y^2=1; z=2-x-y; z=0.$
7. $x^2+y^2+z^2=4; x^2+y^2=3z.$
8. $x^2+y^2+z^2=R^2; z=\pm\frac{R}{2}.$
9. $x^2+y^2+z^2=a^2; x^2+y^2=R^2; a>R.$
10. $x^2+y^2=a^2; z-a=\frac{y^2}{a}; z=0; a>0.$
11. $x+y+z=0; x^2+y^2=1; z=0.$
12. $2z=x^2+y^2; y+z=4.$
13. $x^2=y; x^2=4-3y; z=0; z=9.$
14. $4z=y^2; 2x-y=; z=0; x+y=9.$
15. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=1; z\ge 1.$
16. $z^2+x^2=a^2; x+y=\pm a; x-y=\pm a.$
17. $x^2+y^2=az; z=\sqrt{x^2+y^2}.$
18. $z=6\sqrt{x^2+y^2}; z=16-x^2-y^2.$

19. $z=24(x^2+y^2), z=4-28x;$

20. $z=4-14(x^2+y^2),\ z=4-28x;$

21. $z = 8(x^2 + y^2) + 3,\ z = 6x + 3;$

22. $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2},\ 6z = x^2 + y^2;$

23. $z = -2(x^2 + y^2) - 1,\ z = 4y - 1;$

24. $z = 2 - 18(x^2 + y^2),\ z = z = 2 - 44y;$

25. $az = a^2 - x^2 - y^2,\ z = a - x - y,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

26. $z = 3\sqrt{x^2 + y^2},\ z = 10 - x^2 - y^2;$

27. $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2},\ \frac{9}{2}z = x^2 + y^2;$

28. $z = 2 - 12(x^2 + y^2),\ z = 24x + 2;$

29. $z = 26(x^2 + y^2) - 2,\ z = -52x - 2;$

30. $x^2 + y^2 + z^2 = a^2,\ x^2 + y^2 + z^2 = b^2,\ x^2 + y^2 = z^2,\ z \geq 0,\ 0 < a < b.$

Завдання 12

Знайти координати центрів мас однорідних тіл, обмежених поверхнями:

1. $z = x^2 + y^2,\ x + y = 1,\ x = 0, y = 0. z = 0;$

2. $z = x^2 + y^2,\ x + y + z = 0;$

3. $z = \frac{y^2}{2},\ 2x + 3y - 12 = 0,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0;$

4. $z^2 = xy,\ x = 5,\ y = 5,\ z = 0;$

5. $4 = x^2 + y^2,\ y + z = 2,\ z = 0;$

6. $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},\ z \geq 0;$

7. $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2),\ z = H;$

8. $z = 5 - x^2 - y^2, y = 0, z \geq 0;$

9. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,\ z = c,\ c > 0,\ z = 0;$

10. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0, (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0);$

11. $x + 2z = 2,\ y = 3,\ y = 1,\ x = 0,\ z = 0;$

Просторове тіло G в кожній точці характеризується густиною маси $\gamma(x; y; z)$. Знайти масу цього тіла, якщо воно обмежене поверхнями:

12.$x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 6z,\ x = 0, y = 0,\ z = 0,\ \gamma = 10x;$

13. $x^2 + y^2 + z^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 9z,\ x = 0,\ y = 0,\ \gamma = 10z;$

14. $9(x^2 + y^2) = z^2,\ x^2 + y^2 = 4,\ x = 0, y = 0,\ z = 0,\ \gamma = \frac{5(x^2+y^2)}{3};$

15. $x^2 + y^2 = 1,\ x^2 + y^2 = 6z,\ x = 0,\ y = 0,\ z = 0,\ \gamma = 90y;$

16. $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ x^2 + y^2 = 9z^2,\ \gamma = 5z;$

17. $x^2 + y^2 + z^2 = 16,\ x^2 + y^2 = 4,\ (x^2 + y^2 \le 4, z > 0),\ \gamma = |z|;$

18.. $x^2 + y^2 + z^2 = 9,\ x^2 + y^2 = 4,\ \gamma = |z|,\ (x^2 + y^2 \le 4, z \ge 0, x \ge 0,\ y \ge 0).$

19. Визначити момент інерції відносно вісі OZ однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

$x + y + z = a\sqrt{2};\ x^2 + y^2 = a;\ z = 0.$

20. Визначити момент інерції однорідної кулі, радіуса 1 відносно його центру.

21. Визначити момент інерції відносно вісі OZ однорідного тіла, обмеженого поверхнями

$x = 0;\ y = 0;\ z = 0;\ y = a;\ x + z = a.$

22. Знайти момент інерції відносно початку координат однорідного тіла, обмеженого параболоїдом

$z = x^2 + y^2$ і площиною $z = 5$.

Визначити момент інерції відносно вісі OX однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

23. $x = z^2 + y^2;\ x = 2;\ x = 10.$

24. $x^2 + y^2 + z^2 = 2;\ y^2 + z^2 = x^2;\ x \ge 0.$

25. Визначити статичний момент однорідного тіла, обмеженої поверхнями $x^2 + y^2 = z^2;\ z = 1$ відносно площини XOY.

26. Визначити статичний момент відносно площини XOY фігури, обмеженої координатними площинами та поверхностями $z = 4 - x^2$; $2x + y = 4$; $x \geq 0$.

27. Визначити статичний момент кулі $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rx$, відносно площини YOZ. Густина в будь-якій точці кулі рівна квадрату відстані цієї точки до початку координат.

28. Знайти доцентровий момент інерції I_{XZ} однорідного тіла, маси M, обмеженого поверхнями

$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

29. Знайти доцентровий момент інерції I_{YZ} однорідного тіла, маси M, обмеженого поверхнями

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{2z}{c}$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

30. Знайти доцентровий момент інерції I_{YZ} однорідного тіла, маси M, обмеженого поверхнями

$2x = z^2 + y^2$; $x = 2$; $x = 0$.

ЗАВДАННЯ 13

Знайти центр мас однорідного $(\gamma(x,y,z) \equiv 1)$ тіла,обмеженого поверхнями (1-6):

1. $x^2 + y^2 - (z-1)^2 = 0, z = 0$
2. $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z = 0 (z \geq 0)$
3. $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$
4. $x + y + z / 2 = 1, x0, y = 0, z = 0$
5. $2x + y + z = 2, x = 0, y = 0, z = 0$
6. $x + y + z = 1, x + y - z = 1, x = 0, y = 0$
7. Обчислити масу тіла, обмеженого поверхнями $z = b, x^2 + y^2 - a^2 z^2 = 0$, якщо функція розподілу маси в кожній його точці дорівнює відстані від цієї точки до осі Oz
8. Обчислити масу тіла,обмеженого площинами $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = a$, якщо $\gamma(x,y,z) = |x| + |y| + |z|$
9. Обчислити масу частини циліндра $x^2 + y^2 = 2ax$, що міститься між параболоїдом $x^2 + y^2 = 2az$ та площиною Oxy, коли $\gamma(x,y,z) \equiv 1$.

10. Обчислити $\iiint\limits_G xyzdxdydz$, якщо тіло G обмежене поверхнями $x=0, y=0, x^2+y^2+z^2=1(x\geq 0, y\geq 0z\geq 0)$

11. Обчислити $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}dxdydz$, якщо тіло G обмежене поверхнями $x^2+z^2=2y, y=2$

12. Обчислити $\iiint\limits_G xyzdxdydz$, якщо тіло G обмежене поверхнями $y=x^2, x=y^2, z=xy, z=0$

13. Обчислити $\iiint\limits_G z\sqrt{x^2+y^2+z^2}dxdydz$, якщо G : $r^2\leq x^2+y^2+z^2\leq R^2$

14. Обчислити $\iiint\limits_G zdxdydz$, якщо тіло G обмежене поверхнями $z=a, z^2=a^2(x^2+y^2)/R^2$. Обчислити інтеграл і побудувати область інтегрування (15-17):

15. $\int\limits_0^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2x-x^2}} dy \int\limits_0^a z\sqrt{x^2+y^2}dz$

16. $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} (x^2+y^2)dz$

17. $\int\limits_{-1}^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}dz$

З допомогою потрійного інтеграла обчислити об’єм тіл, обмежених поверхнями (18-22):

18. $z^2=x^2+y^2, y=x, y=x^2$

19. $z=xy, z=0, x=0, y=0, x+y=1$

20. $az=x^2+y^2, 2az=a^2-x^2-y^2$

21. $x^2+y^2+z^2=2z, x^2+y^2=z^2$

22. $x^2+y^2=az, x^2+y^2+z^2=2a^2$

23. Обчислити $\iiint\limits_G \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, якщо тіло G обмежене площинами $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$

24. $\iiint\limits_G xyzdxdydz$, якщо тіло G обмежене поверхнями $x=0, y^2+z^2=2Ry, x^2+y^2+z^2=R^2$

25. Обчислити момент інерції кулі $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$ відносно осі Oz, якщо функція розподілу маси в кожній точці кулі дорівнює відстані від цієї точки до початку системи координат.

26. Обчислити статичний момент спільної частини двох куль $x^2+y^2+z^2 \le R^2$ та $x^2+y^2+z^2 \le 2Rz$ відносно площини Oxy, якщо $\gamma(x,y,z) \equiv 1$

27. Обчислити $\iiint\limits_G xyzdxdydz$, якщо тіло G обмежене поверхнями $z=x^2+y^2, x^2+y^2=a^2, z=0$

28. Обчислити $\iiint\limits_G z\sqrt{x+y}dxdydz$, якщо тіло G обмежене поверхнями $z=x^2+y^2, x+y=a, x=0, y=0, z=0$

29. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2-y^2, z=0, y=1,$ якщо $\gamma(x,y,z)=2|z|$

30. Обчислити момент інерції тіла $G: R^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4R^2$ відносно осі Oz, якщо

Завдання 14

Знайти координати центра мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями:

1.

$x=6(y^2+z^2), y^2+z^2=3, x=0.2.$

2.

$y=3\sqrt{x^2+z^2}, x^2+z^2=36, y=0.3.$

3.

$x=7(y^2+z^2), x=28.$

4.

$z=2\sqrt{x^2+y^2}, z=8.$

5.

$z=5(x^2+y^2)x^2+y^2=2, z=0.$

6.

$x = 6\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 9, x = 0.$

7.

$z = 8(x^2 + y^2), z = 32.$

8.

$y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, y = 9.$

9.

$9y = x^2 + z^2, x^2 + y^2 = 4, y = 0.$

10.

$3z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$

11.

$x^2 + z^2 = 6y, y = 8.$

12.

$8x = \sqrt{y^2 + z^2}, x = \frac{1}{2}.$

13.

$2x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 4, x = 0.$

14.

$4y = \sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 16, y = 0.$

15.

$y^2 + z^2 = 8x, x = 2.$

16.

$z = 9\sqrt{x^2 + y^2}, z = 36.$

17.

$z = 3(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 9, z = 0.$

18.

$x = 2\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 4, x = 0.$

19.

$x^2 + z^2 = 4y, y = 9.$

20.

$x = 5\sqrt{y^2 + z^2}, x = 20.$

21.

$y = x^2 + z^2, x^2 + z^2 = 10, y = 0.$ 22.

22.

$y = 3\sqrt{x^2 + z^2}, x^2 + z^2 = 16, y = 0.$

23.

$$y^2 + z^2 = 3x, x = 9.$$

24.

$$y = \sqrt{x^2 + z^2}, y = 4.$$

25.

$$x = y^2 + z^2, y^2 + z^2 = 9, x = 0.$$

26.

$$x, y, z = 0, x + y + z = 3.$$

27.

$$z = 2\sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 9, z = 0.$$

28.

$$x^2 + y^2 = 2z, z = 3.$$

29.

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 4.$$

30.

$$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0.$$

Завдання 15

1.За заданої об'ємної густини заряду $\gamma(x;y;z) \equiv \sqrt{x^2+y^2}$ знайти заряд, розподіленний у тілі, що обмежене поверхнями $z = 4$, $z = x^2+y^2$.

2.Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y=1+x^2$, $z=3x$, $z=0$, $y=5$.

3.Знайти об'єм тіла обмеженого, поверхнями $x=2y^2$, $y=0$, $z=0$,

$x/4+y/2+z/4=1$

4.Знайти об`єм тіла, обмеженого поверхнями $z=0$, $y=x$, $y=x\sqrt{3}$, $z=1-x^2-y^2$

.

5.Знайти обєм тіла, обмеженого поверхнями $z = 2x^2 + y^2 + 1, x + y = 1$ та координатними площинами.

6.Знайти об`єм тіла, обмеженого поверхнями $y = 1 + x^2, z = 3x, z = 0, y = 5$ /перший октант/.

7.Знайти масу однорідного тіла, обмеженого поверхнями $z = 4 - x^2, x = 0, y = 0, z = 0, 2x + y = 4.$

8.Знайти масу однорідного тіла, обмеженого поверхнями $y = x, y = x\sqrt{3}, z = 0, z = 1, x^2 + y^2 = R^2.$

9.Знайти об`єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 0, x^2 = y, y + z = 2.$

10. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями z=5x, $x^2 + y^2 = 9$, $z \geq 0$.

11. Знайти масу сферичного шару, обмеженого поверхнями $x^2 + z^2 + y^2 = R_1^2$, $x^2 + z^2 + y^2 = R_2^2$, якщо об'ємна густина маси $\gamma(x; y; z) \equiv x^2 + y^2$.

12.Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y^2 + x^2 = 8$, x=0, y=0, z=0, x+y+z=4.

13.Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 6 - x^2 - y^2$.

14.Знайти момент інерції відносно осі Oz тіла, яка обмежена поверхнями z=a/e, $z = ae^{-x^2 - y^2}$, a>0, якщо об'ємна густина маси $\gamma(x; y; z) \equiv (x^2 + y^2)^{-1}$.

15. Знайти момент інерції однорідного тіла відносно осі Oz, якщо тіло обмежене поверхнями z=0, $x^2 + y^2 = R^2, z = ae^{-(x^2 + y^2)}$, a>0 .

16.Знайти момент інерції відносно початку координат тіла, обмеженого поверхнею $x^2 + y^2 + z^2 = 2x$, якщо об'ємна густина маси цього тіла $\gamma(x; y; z) \equiv (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$.

17. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, якщо об'ємна густина $\gamma(x; y; z) = xyz$.

18. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = 6 - x^2 - y^2$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

19. Знайти момент інерції відносно осі Oz однорідного тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, $z=a$ $(a>0)$

20. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x=\sqrt{y}$, $x=2\sqrt{y}$, $z=0$, $z+y=3$.

21. Знайти момент інерції відносно осі $0z$ однорідного тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2+y^2$, $z=3$.

22. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x+y=4$, $x=\sqrt{y}$, $z=3x$, $z=0$.

23. Знайти момент інерції відносно осі $0z$ однорідного тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$, $z>0$.

24. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x+y=4$, $x=\sqrt{y}$, $z=3x$, $z=0$.

25. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2+z^2=4$, якщо об'ємна густина маси $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

26. Знайти масу тіла ,обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=4, z=\sqrt{x^2+y^2}$, якщо об'ємна густина $j(x;y;z)=z$.

27. Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=16, z=3x, z=0 (z>0)$, якщо об'ємна густина $\gamma(x;y;z)=z$.

28. Знайти центр мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z=0$ $(z>0)$.

29.Знайти момент інерції відносно осі $0z$ однорідного тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=4$, $x^2+y^2=z^2$, $z>0$.

30.Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $az=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Завдання 16

Варіант №1

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y=x^2, y=2x^2, z=0, y+z=1$.

Варіант №2

Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2+z^2=4$, якщо об'ємна густина маси $\gamma(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

Варіант №3

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=4-x^2, x=0, y=0, z=0, 2x+y=4$.

Варіант №4

Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=1, x=0, y=0, z=0, (x>0, y>0, z>0)$, якщо об'ємна густина $\gamma(x;y;z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2.}$

Варіант №5

Знайти об'єм тіла ,обмеженого поверхнями $y^2=x, z=x+y+1, x=1, z=0, y>0.$

Варіант №6

Знайти масу тіла ,обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=4, z=\sqrt{x^2+y^2}$, якщо об'ємна густина $j(x;y;z)=z$.

Варіант №7

Знайти об'єм тіла обмеженого поверхями $z = 5x, x^2 + y^2 = 9, z = 0, z > 0.$

Варіант №8

Знайти масу тіла обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0 (x > 0, y > 0, z > 0)$, якщо об'ємна густина $j(x; y; z) = z.$

Варіант №9

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y = x^2, y = 1, z = 0, x + y + z = 4$.

Варіант №10

Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 16, z = 3x, z = 0 (z > 0)$, якщо об'ємна густина $\gamma(x; y; z) = z$.

Варіант №11

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x = 2y^2, \frac{x}{4} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, y = 0, z = 0$.

Варіант №12

Знайти момент інерції відносно осі Oz однорідного тіла, обмеженого поверхнями $z = 0, x^2 + y^2 = 1, z = \ell^{-x^2 - y^2}$.

Варіант №13

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y = x^2, y = 1, x = 0, z = 0, z = x^2 + y^2$

Варіант №14

Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2, z = 4$, якщо об'ємна густина $\gamma(x; y; z) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Варіант №15

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $y = 1+x^2$, $z = 3-x$, $y = 5$, $z = 0$ $(x>0, y>0, z>0)$.

Варіант №16

Знайти центр мас однорідного тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z = 0$ $(z>0)$.

Варіант №17

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2+y^2+1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

$x = 4$, $y = 4$.

Варіант №18

Знайти масу тіла, обмежену поверхнями $x+y+z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ якщо об'ємна густина $j(x;y;z) = xy$.

Варіант №19

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2 = 8$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$,

$x+y+z = 4$

Варіант №20

Знайти момент інерції відносно осі 0z однорідного тіла, яке обмежене поверхнями $z = \frac{a}{e}$, $z = ae^{-x^2-y^2}$ $(a>0)$.

Варіант №21

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями
$z = 2x^2 + y^2 + 1, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0.$

Варіант №22

Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями
$x^2 + y^2 = 2x, y = 0, z = 0, z = a(a > 0, y > 0),$ якщо об'ємна густина $\gamma(x; y; z) = z\sqrt{x^2 + y^2}$.

Варіант №23

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями
$z = 1 - x^2 - y^2, z = 0, y = x, y = x\sqrt{3}(x > 0).$

Варіант №24

Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями
$x^2+y^2+z^2=a^2, x=0, y=0, z=0 (x>0, y>0, z>0)$, якщо об'ємна густина
$\gamma(x;y;z)=\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}}$.

Варіант №25

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $az=x^2+y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Варіант №26

Знайти масу тіла, обмеженого поверхнями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$, якщо об'ємна густина $\gamma(x;y;z)=xyz$.

Варіант №27

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z=6-x^2-y^2$, $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

Варіант №28

Знайти момент інерції відносно осі Oz однорідного тіла, обмеженого поверхнями $x^2+y^2=R^2$, $z=0$, $z=a$ $(a>0)$

Варіант №29

Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями $x=\sqrt{y}$, $x=2\sqrt{y}$, $z=0$, $z+y=3$.

Варіант №30

Знайти момент інерції відносно осі $0z$ однорідного тіла, обмеженого поверхнями $z=x^2+y^2$, $z=3$.

Завдання 17

Обчислити інтеграли

Варіант-1

1) $\displaystyle\iint\limits_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=2, x=4} y\exp\left(\frac{xy}{2}\right) dxdy.$

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\, dy.$

3) $\displaystyle\iiint\limits_{V:\begin{smallmatrix} x^2+y^2+z^2=4, \\ x,y,z\geq 0\end{smallmatrix}} (x^2+y^2+z^2)dxdydz.$

Варіант-2

1) $\displaystyle\iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=\frac{x}{2}} y^2 \sin\frac{xy}{2}\, dxdy.$

2) $\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{3}}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{1+x^2+y^2}}.$

3) $\displaystyle\iiint\limits_{V:\begin{smallmatrix} z^2=4x^2+4y^2, \\ z=2, y\geq \pm x, z\geq 0\end{smallmatrix}} y\sqrt{x^2+y^2}dxdydz.$

Варіант-3

1) $\displaystyle\iint\limits_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=1, x=2} y\cos xy dxdy.$

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy.$

3) $\displaystyle\iiint\limits_{V:\begin{smallmatrix} 1\leq x^2+y^2\leq 36, \\ y\geq x, x, z\geq 0, z\leq 2\end{smallmatrix}} z^2 dxdydz.$

Варіант-4

1) $\displaystyle\iint\limits_{D:x=0,y=2,y=x} y^2 \exp\ -\frac{xy}{4}\ dxdy.$

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)\,dy.$

3) $\displaystyle\iiint\limits_{V:\substack{x^2+y^2+z^2=32,\\ y^2=x^2+z^2,y\geq 0}} ydxdydz.$

Варіант-5

1) $\displaystyle\iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{2},y=\pi,x=1,x=2} y\sin xydxdy.$

2) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} \sqrt{4-x^2-y^2}\,dy.$

3) $\displaystyle\iiint\limits_{V:\substack{x^2+y^2+z^2=8,\\ x^2=y^2+z^2,x\geq 0}} xdxdydz.$

Варіант-6

1) $\displaystyle\iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},y=\frac{x}{2}} y^2\cos\frac{xy}{2}\,dxdy.$

2) $\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{xy}{x^2+y^2}\,dy.$

3) $\displaystyle\iiint\limits_{V:\substack{4\leq x^2+y^2+z^2=16,\\ y\leq\sqrt{3}x,y,z\geq 0}} ydxdydz.$

Варіант-7

1) $$\iint\limits_{D: y=\ln 3, y=\ln 4, x=\frac{1}{2}, x=1} 4ye^{xy}dxdy.$$

2) $$\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\,dy.$$

3) $$\iiint\limits_{V: \substack{z=\sqrt{8-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{x^2+y^2}, y\geq 0}} ydxdydz.$$

Варіант-8

1) $$\iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=x} 4y^2\sin xydxdy.$$

2) $$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \operatorname{tg}(x^2+y^2)\,dy.$$

3) $$\iiint\limits_{V: \substack{4\leq x^2+y^2+z^2\leq 36, \\ x,z\geq 0, y\geq\sqrt{3}x}} \frac{y^2dxdydz}{x^2+y^2+z^2}.$$

Варіант-9

1) $$\iint\limits_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y\cos xydxdy.$$

2) $$\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}}\,dy.$$

3) $$\iiint\limits_{V: \substack{z=3x^2+3y^2, \\ 0\leq y\leq\sqrt{3}x, z=3}} \frac{y^2zdxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$$

Варіант-10

1) $\iint\limits_{D: x=0, y=2, y=\frac{x}{2}} y^2 \exp\left(-\frac{xy}{8}\right) dxdy.$

2) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dy.$

3) $\iiint\limits_{V: \substack{x^2+y^2+z^2=16, \\ z\geq 0}} \frac{x^2dxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}.$

Варіант-11

1) $\iint\limits_{D: y=\frac{\pi}{4}, y=\frac{\pi}{2}, x=2, x=3} 12y\sin 2xydxdy.$

2) $\int\limits_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{3-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\, dy.$

3) $\iiint\limits_{V: \substack{z=2(x^2+y^2), \\ 0\leq y\leq \frac{x}{\sqrt{3}}, z=18}} \frac{xzdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Варіант-12

1) $\iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=x} y^2 \cos xydxdy. :$

2) $\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} (1+x^2+y^2)\, dy.$

3) $\iiint\limits_{V: \substack{z=x^2+y^2, \\ 0\leq y\leq x, z=4}} \frac{xydxdydz}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}.$

Варіант-13

1) $\iint\limits_{D: y=\ln 2, y=\ln 3, x=4, x=8} y e^{\frac{xy}{4}} dxdy.$

2) $\int\limits_0^2 dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{dy}{1+x^2+y^2}.$

3) $\iiint\limits_{V: \substack{x^2+y^2=4y, \\ y+z=4, z\geq 0}} \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Варіант-14

1) $\iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{2\pi}, y=2x} 4y^2 \sin 2xydxdy.$

2) $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy}{1+\sqrt{x^2+y^2}}.$

3) $\iiint\limits_{V: \substack{x^2+y^2=2x, \\ x+z=2, y\geq 0}} \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Варіант-15

1) $\iint\limits_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\frac{\pi}{4}, x=1, x=2} 2y \cos 2xydxdy.$

2) $\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{\sin\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} dy.$

3) $\iiint\limits_{V: \substack{x^2+y^2=16y, \\ y+z=16, x, z\geq 0}} \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Варіант-16

1) $\iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{2}, y=x} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dxdy.$

2) $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$

3) $\iiint\limits_{V: \substack{x^2+y^2=2x, \\ x+z=2, z\geq 0}} \sqrt{x^2+y^2} dxdydz.$

Варіант-17

1) $$\iint\limits_{D:y=\pi,y=2\pi,x=\frac{1}{2},x=1} y\sin xy\,dxdy.$$

2) $$\int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\cos^2\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3) $$\iiint\limits_{V:\substack{2\le x^2+y^2+z^2\le 8,\\ z^2=x^2+y^2,x,y,z\ge 0}} xy\,dxdydz.$$

Варіант-18

1) $$\iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{\frac{\pi}{2}},y=\frac{x}{2}} y^2\cos 2xy\,dxdy.$$

2) $$\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dy.$$

3) $$\iiint\limits_{V:\substack{x^2+y^2=2y,z=6,\\ x^2+y^2=4y,x,z\ge 0}} \frac{y\,dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Варіант-19

1) $$\iint\limits_{D:y=\ln 3,y=\ln 4,x=\frac{1}{4},x=\frac{1}{2}} 8ye^{4xy}dxdy.$$

2) $$\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{ctg}\sqrt{x^2+y^2}}.$$

3) $$\iiint\limits_{V:\substack{x^2+y^2+z^2=36,\\ y,z\ge 0,y\le -x}} \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz.$$

Варіант-20

1) $\iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{4\pi}{3}}, y=\frac{2x}{3}} 3y^2 \sin\frac{xy}{2}\, dxdy.$

2) $\int\limits_{-3}^{3} dx \int\limits_{-\sqrt{9-x^2}}^{0} \frac{xy}{x^2+y^2}\, dy.$

3) $\iiint\limits_{V: \substack{x^2+y^2=2x, z\geq 0, z=4 \\ x^2+y^2=4x, 0\leq y\leq x}} \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Варіант-21

1) $\iint\limits_{D: y=\pi, y=3\pi, x=\frac{1}{2}, x=1} y\cos xy dxdy.$

2) $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{0} \cos(x^2+y^2) dy.$

3) $\iiint\limits_{V: \substack{1\leq x^2+y^2+z^2\leq 9, \\ y, z\geq 0, x\geq\sqrt{3}y}} \frac{zdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

Варіант-22

1) $\iint\limits_{D: x=0, y=1, y=\frac{x}{2}} y^2 e^{-\frac{xy}{2}} dxdy.$

2) $\int\limits_{-R}^{0} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \sin(x^2+y^2) dy.$

3) $\iiint\limits_{V: \substack{x^2-2x+y^2=0, \\ y, z\geq 0, x+z=2}} \sqrt{x^2+y^2} dxdydz.$

Варіант-23

1) $\displaystyle\iint\limits_{D:y=\frac{\pi}{2},y=\frac{3\pi}{2},x=\frac{1}{2},x=2} y\sin 2xy\,dxdy.$

2) $\displaystyle\int\limits_{-1}^{1} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1+x^2+y^2}\,dy.$

3) $\displaystyle\iiint\limits_{V:\begin{smallmatrix}1\le x^2+y^2\le 16,\\ 0\le y\le x, z\ge 0\end{smallmatrix}} x^2dxdydz.$

Варіант-24

1) $\displaystyle\iint\limits_{D:x=0,y=\sqrt{\pi},y=2x} y^2\cos xy\,dxdy.$

2) $\displaystyle\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}e^{x^2+y^2}dy.$

3) $\displaystyle\iiint\limits_{V:\begin{smallmatrix}x^2+y^2=4y,\\ y+z=4, z\ge 0\end{smallmatrix}} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2+y^2}}.$

Варіант-25

1) $\displaystyle\iint\limits_{D:y=\ln 2,y=\ln 3,x=3,x=6} 6ye^{\frac{xy}{3}}dxdy.$

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{3} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{9-x^2}} \ln(1+x^2+y^2)dy.$

3) $\displaystyle\iiint\limits_{V:\begin{smallmatrix}4\le x^2+y^2+z^2\le 16,\\ 0\le y\le\sqrt{3}x, z\ge 0\end{smallmatrix}} \frac{ydxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

Варіант-26

1) $\displaystyle\iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\pi}, y=x} y^2 \sin\frac{xy}{2}\, dxdy.$

2) $\displaystyle\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int\limits_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} e^{-(x^2+y^2)} dy.$

3) $\displaystyle\iiint\limits_{V: \substack{x^2+y^2=2x, \\ z=3, y, z\geq 0}} z\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz.$

Варіант-27

1) $\displaystyle\iint\limits_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=\frac{3\pi}{2}, x=\frac{1}{2}, x=2} y\cos 2xy\, dxdy.$

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{1} dx \int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \ln\frac{(1+\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dy.$

3) $\displaystyle\iiint\limits_{V: \substack{1\leq x^2+y^2+z^2\leq 4, \\ y\leq x, x, y, z\geq 0}} \frac{xdxdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$

Варіант-28

1) $\displaystyle\iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{\frac{\pi}{2}}, y=x} y^2 e^{-\frac{xy}{8}}\, dxdy.$

2) $\displaystyle\int\limits_{0}^{2} dx \int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2}} \cos\sqrt{x^2+y^2}\, dy.$

3) $\displaystyle\iiint\limits_{V: \substack{x^2=2(y^2+z^2), \\ x=4, x\geq 0}} xdxdydz.$

Варіант-29

1) $\iint\limits_{D: y=\frac{\pi}{2}, y=3\pi, x=1, x=3} 3y \sin xy dx dy.$

2) $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R-x^2}}^{\sqrt{R-x^2}} \sin(x^2 + y^2)\, dy.$

3) $\iiint\limits_{V: \substack{1 \le x^2+y^2+z^2 \le 9, \\ 0 \le y \le x, z \ge 0}} \frac{x dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$

Варіант-30

1) $\iint\limits_{D: x=0, y=\sqrt{2\pi}, y=2x} y^2 \cos\frac{xy}{2} dx dy.$

2) $\int\limits_0^R dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{\operatorname{tg}\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dy.$

3) $\iiint\limits_{V: \substack{z=\sqrt{18-x^2-y^2}, \\ z=\sqrt{x^2+y^2}, x \ge 0}} x dx dy dz.$

Завдання 18

Знайти масу тіла V з густиною μ :

1. $V : 64(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4,$
   $y, z \ge 0; \mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{4}.$
2. $V : x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \le 1,$
   $x \ge 0, \mu = 4|z|.$
3. $V : x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 2z,$
   $x, y \ge 0, z = 0; \mu = 10x.$
4. $V : x^2 + y^2 = \frac{16}{49} z^2, x^2 + y^2 = \frac{4}{7} z,$
   $x, y \ge 0; \mu = 80yz.$
5. $V : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = 4z^2,$
   $x, y \ge 0\ (z \ge 0); \mu = 20z.$

6. $V: 36(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 1,$

$x, z \geq 0; \mu = \dfrac{5(x^2 + y^2)}{6}.$

7. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 16, x^2 + y^2 \leq 4;$

$\mu = 2|z|.$

8. $V: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 8z,$

$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 5x.$

9. $V: x^2 + y^2 = \dfrac{4}{25}z^2, x^2 + y^2 = \dfrac{2}{5}z,$

$x, y \geq 0; \mu = 28xz.$

10. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2,$

$x, y \geq 0\ (z \geq 0); \mu = 6z.$

11. $V: 25(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4,$

$x, y, z \geq 0; \mu = 2(x^2 + y^2).$

12. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 \leq 4,$

$y \geq 0, \mu = |z|.$

13. $V: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 6z,$

$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 90y.$

14. $V: x^2 + y^2 = \dfrac{z^2}{25}, x^2 + y^2 = \dfrac{z}{5},$

$x, y \geq 0; \mu = 14yz.$

15. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 9z^2,$

$x, y \geq 0\ (z \geq 0); \mu = 10z.$

16. $V: 9(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4,$

$x, y, z \geq 0; \mu = \dfrac{5(x^2 + y^2)}{3}.$

17. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 \leq 1;$

$\mu = 6|z|.$

18. $V: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = z,$

$x, y \geq 0, z = 0; \mu = 10y.$

19. $V: x^2 + y^2 = \dfrac{1}{49}z^2, x^2 + y^2 = \dfrac{1}{7}z,$

$x, y \geq 0; \mu = 10xz.$

20. $V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 4z^2,$

$x, y \geq 0\ (z \geq 0); \mu = 10z.$

21. $$V: 16(x^2+y^2)=z^2, x^2+y^2=1,$$ $$x,y,z \geq 0; \mu = 5(x^2+y^2).$$

22. $$V: x^2+y^2+z^2=16, x^2+y^2 \leq 4,$$ $$x \geq 0, \mu = |z|.$$

23. $$V: x^2+y^2=4, x^2+y^2=4z,$$ $$x,y \geq 0, z=0; \mu = 5y.$$

24. $$V: x^2+y^2=\frac{4}{25}z^2, x^2+y^2=\frac{2}{5}z,$$ $$x,y \geq 0; \mu = 80xz.$$

25. $$V: x^2+y^2+z^2=1, x^2+y^2=z^2,$$ $$x,y \geq 0\ (z \geq 0); \mu = 32z.$$

26. $$V: x^2+y^2=z^2, x^2+y^2=4,$$ $$x,y,z \geq 0; \mu = \frac{5(x^2+y^2)}{2}.$$

27. $$V: x^2+y^2+z^2=9, x^2+y^2 \leq 4,$$ $$y \geq 0; \mu = |z|.$$

28. $$V: x^2+y^2=1, x^2+y^2=3z,$$ $$x,y \geq 0, z=0; \mu = 15x.$$

29. $$V: x^2+y^2=\frac{4}{49}z^2, x^2+y^2=\frac{2}{7}z,$$ $$x,y \geq 0; \mu = 20xz.$$

30. $$V: x^2+y^2+z^2=16, x^2+y^2=9z^2,$$ $$x,y \geq 0\ (z \geq 0); \mu = 5z.$$

1.8. Невласні кратні інтеграли

1) Особливість в точці.

Нехай $E \subset \mathbb{R}_m$, E- замкнена вимірна множина, $x_0 \in E$, $B = E \backslash \{x_0\}$, функція $f(x)$ - неперервна на множині B і не є обмеженою на множині E.

Розглянемо послідовність множин E_n, які задовольняють умови:

a) $\forall n\ \ E_n$ вимірна, відкрита;
b) $\forall n\ \ x_0 \in E_n$; **(1.18)**
c) $sup_{x,y \in E_n} |x-y| \xrightarrow{n\to\infty} 0.$

<u>Означення.</u> Невласний інтеграл

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E\setminus E_n} f(x)dx,$$

де E_n – довільна послідовність, що задовольняє **(1.18)**.

Якщо ця границя існує і скінченна, кажуть, що невласний інтеграл збігається. В іншому випадку кажуть, що невласний інтеграл розбігається. Якщо він розбігається, то число

$$\lim_{n\to\infty} \int_{E\setminus U_n} f(x)dx$$

називають головним значенням невласного інтегралу, де $U_n = U(x_0, r_n)$, $r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$ є послідовність відкритих куль.

2) Особливість на межі області.

Нехай послідовність множин $E_n \subset \mathbb{R}_m$, які задовольняють умови:

a) $\forall n \;\; E_n$ вимірна, відкрита;
b) $\forall n \;\; \overline{E_n} \subset E_{n+1}$; **(1.19)**
c) $\bigcup_{\mathrm{n}=1}^{\infty} \mathrm{E_n} = \mathrm{E}$.

Нехай функція $f(x)$ – неперервна та обмежена на множині E.

<u>Означення</u>. Невласний інтеграл

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} f(x)dx,$$

де E_n – довільна послідовність, що задовольняє **(1.19)**.

3) Випадок необмеженої множини.

Нехай E - необмежена множина простору $\mathbb{R}_m$.

Розглянемо послідовність множин E_n, які задовольняють умови:

a) $\forall n \;\; E_n$ вимірна, відкрита;
b) $\forall n \;\; \overline{E_n} \subset E_{n+1} \subset \mathrm{E}$; **(1.20)**
c) $\forall r > 0 \;\; \exists N$ таке, що для $\forall n \geq N \quad E \cap U(0; r) \subset E_n$.

Нехай функція $f(x)$ – неперервна на множині E.

<u>Означення</u>. Невласний інтеграл

$$\int\limits_E f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f(x)dx,$$

де E_n – довільна послідовність, що задовольняє **(1.20)**.

Для всіх невласних кратних інтегралів мають місце властивості:

a) Теорема порівняння: якщо $\forall x \in E \quad 0 \le f(x) \le g(x)$, то з того, що збігається інтеграл $\int_E g(x)dx$ випливає, що збігається інтеграл $\int_E f(x)dx$;
з того, що розбігається інтеграл $\int_E f(x)dx$ випливає, що розбігається інтеграл $\int_E g(x)dx$.

b) Якщо $f(x) \ge 0$ на E, $\exists$ послідовність D_n, що задовольняє умовам **(1.18),** або **(1.19),** або **(1.20)**,

$$\exists \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E\backslash D_n} f(x)dx, \text{ або } \exists \lim_{n\to\infty} \int\limits_{D_n} f(x)dx,$$

то інтеграл $\int_E f(x)dx$ збігається і дорівнює одній з цих границь.

c) Невласний інтеграл збігається тоді і тільки тоді, коли він збігається абсолютно (інтеграл $\int_E f(x)dx$ називається абсолютно збіжним, якщо збігається інтеграл $\int_E |f(x)|dx$).

Приклад 1.17. Обчислити невласний інтеграл $\int_E f(x)dx$, якщо $E = \{(x;y) | x^2 + y^2 \le 1\}$, $f(x;y) = (x^2+y^2)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$.

Розв’язання. Оскільки $f(x;y) \ge 0$, візьмемо в якості послідовності D_n послідовність відкритих куль $U(x_0, r_n)$, де $x_0 = (0;0)$, $r_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Тоді

$$\int\limits_E f(x;y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E\backslash D_n} f(x;y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_{r_n}^{1} \frac{\rho d\rho}{\rho^{2\alpha}}$$

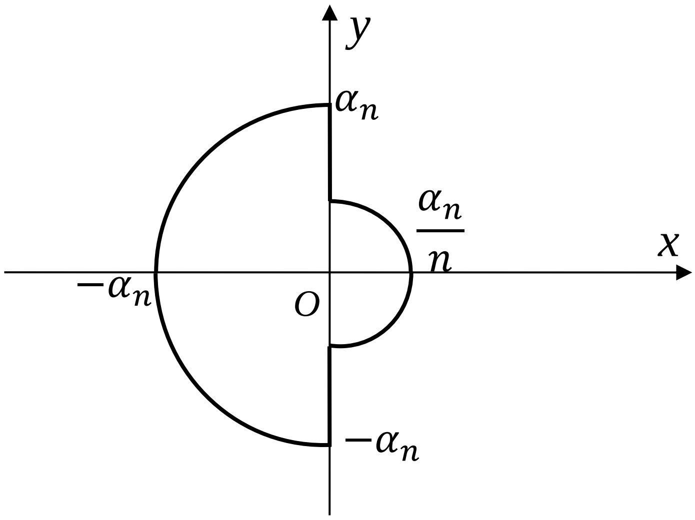
Відповідь: інтеграл дорівнює $\frac{\pi}{1-\alpha}$ при $\propto < 1$; інтеграл розбігається при $\alpha \ge 1$.

Відповідь: інтеграл дорівнює $\frac{\pi}{1-\alpha}$ при $\propto < 1$; інтеграл розбігається при $\alpha \ge 1$.

Приклад 1.18. Показати безпосередньо, що інтеграл $\int_E f(x;y)dxdy$ розбігається та знайти його головне значення, якщо $E = \{(x;y) | x^2 + y^2 \le 1\}$, $f(x;y) =$

$$\begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}, \text{якщо } x \ge 0, \\ -\frac{1}{x^2+y^2}, \text{ якщо } x < 0. \end{cases}$$

Розв’язання. Розглянемо послідовність E_n вигляду



де зліва зображено півколо радіуса $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, а справа – півколо радіуса $\frac{\alpha_n}{n}$. Таким чином

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{E\setminus E_n} f(x;y)dxdy = \lim_{n\to\infty} \left(\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\frac{\alpha_n}{n}}^{1} \frac{d\rho}{\rho} - \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int\limits_{\alpha_n}^{1} \frac{d\rho}{\rho} \right) = +\infty$$

Головне значення цього інтегралу дорівнює

$\lim_{n\to\infty} \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{\alpha_n}^{1} \frac{d\rho}{\rho} - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_{\alpha_n}^{1} \frac{d\rho}{\rho} \right) = 0.$

Завдання 19.

Обчислити або дослідити на збіжність

1.:

$\iint \ln \sqrt{x^2+y^2}\, dxdy$

$$x^2+y^2\geq 1$$

2.:

$$\iint \frac{dxdy}{|x|^p+|y|^q}$$

$$|x|+|y|\geq 1$$

3.:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dxdy}{(1+|x|^p)(1+|y|^q)}$$

4.:

$$\int_0^{\pi} dx \int_0^{x} \ln(\sin(x-y))dy$$

5.:

$$\iint e^{-x^2-y^2}dxdy$$

$$x^2+y^2\geq 1$$

6.:

$$\iint \frac{dxdy}{\sqrt[3]{(x-y)^2}}$$

$$|x|\leq 1, |y|\leq 1$$

7.:

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-x-y} dy$$

8.:

$$\iint \frac{dxdy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$x^2 + y^2 \le y$$

9.:

$$\iint \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

$$x^2 + y^2 \le 1$$

10.:

$$\int_0^1 dy \int_0^{y^2} e^{\frac{x}{y}} dx$$

11.:

$$\iint \frac{1}{(x^2 + y^2)^p} dxdy$$

$$x^2 + y^2 \ge 1$$

12.:

$$\int_0^a dx \int_0^x \frac{dy}{\sqrt{(a-x)(x-y)}}$$ **(a>0)**

13.:

$$\iint \frac{dxdy}{x^4 + y^2}$$

$x \geq 1, y \geq x^2$

14.:

$$\iint \frac{dxdy}{x^p y^q}$$

$xy \geq 1, y \geq 1$

15.:

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \frac{dz}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2}$$

16.:

$$\iint \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^p}$$

$0 \leq x \leq 1$

17.:

$$\int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dy$$

18.:

$$\iint \frac{dxdy}{(x + y)^p}$$

$x - y \geq 1,$
$0 \leq y \leq 1$

19.:

$$\int_1^{+\infty} dy \int_1^{+\infty} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx$$

20.:

$$\iint \frac{dxdy}{\sqrt{|1 - x^2 - y^2|}}$$

$x^2 + y^2 \geq 2$

21.:

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + a^2)^2}$$ **(a>0)**

22:

$$\iint \ln \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdy$$

$x^2 + y^2 \leq 1$

23.:

$$\iint e^{-(x+y)} dxdy$$

$0 < x \leq y$

24.:

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2}\,dy$$

25.:

$$\iint \frac{dxdy}{x^2+y^2}$$

$$y \ge x^2 + 1$$

26.:

$$\iint \frac{dxdy}{x^2+y^2}$$

$$|y| \le x^2,$$
$$x^2 + y^2 \le 1$$

$N27.$ $$\int_0^{\pi} dy \int_0^{y} \ln(\sin(y-x))dx.$$

$N28.$ $$\int_0^{1} dx \int_0^{x^2} \exp(\frac{y}{x})dy.$$

$N29.$ $$\int_0^{a} dy \int_0^{y} \frac{dx}{\sqrt{(a-y)(y-x)}} \qquad (a>0).$$

$N30.$ $$\iint_{y\ge 1,\ \ x\ge y^2} \frac{dxdy}{x^2+y^4}.$$

2. Криволінійні інтеграли

2.1. Криволінійні інтеграли I-го роду

Криволінійні інтеграли I-го роду (за довжиною дуги) виникають,наприклад,при розгляді задачі про обчислення маси матеріальної лінії з нерівномірно розподіленою на нії масою.

Криволінійний інтеграл I-го роду позначається

$$\int\limits_{AB} f(M)dl \qquad (2.1)$$

де AB - лінія інтегрування; $f(M)$ - функція точки M на лінії AB: dl - диференціал дуги лінії. Особливість цього інтеграла полягає в тому, що він не залежить від напряму лінії інтегрування, тобто :

$$\int\limits_{AB} f(M)dl = \int\limits_{BA} f(M)dl$$

Обчислення інтеграла (2.1) зводиться до обчислення визначеного інтеграла залежно від способу задання лінії інтегрування.

1. Якщо AB - гладка лінія,задана параметричним рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t)(\alpha \le t \le \beta), \end{cases}$$

та справджується формула

$$\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}dt \qquad (2.2)$$

2.Якщо лінію (AB) задано рівнянням $y = y(x), a \le x \le b,$ то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x,y(x)\sqrt{1+y'(x)^2}dx\ .$$

3. Якщо лінію (AB) задано рівнянням $x = x(y), c \le y \le d,$ то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{c}^{d} f(x(y),y)\sqrt{x'(y)^2+1}dy$$

4.Якщо лінію (AB) задано рівнянням у полярних координатах $\rho = \rho(\theta), \alpha \le \theta \le \beta$, то

$$\int\limits_{AB} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}d\theta$$

Застосування криволінійного інтеграла першого роду

1) Знаходження довжини гладкої лінії L виконується з допомогою криволінійного інтеграла першого роду за формулою

$$l = \int_L dl.$$

2) Знаходження маси лінії L з розподіленням маси $\gamma(x; y; z)$

виконується з допомогою інтеграла

$$M = \int_L \gamma(x; y; z) dl.$$

3) Статичні моменти лінії L відносно координатних площин (для трьохмірної лінії) і відносно координатних осей для плоских ліній здійснюється по формулах

$$M_{xy} = \int_L z\gamma dl; \quad M_{yz} = \int_L x\gamma dl; \quad M_{xz} = \int_L y\gamma dl.$$

4) Координати центра тяжіння лінії L даються виразами

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{M}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{M}.$$

5) Моменти інерції лінії L відносно координатних осей обчислюються як:

$$I_x = \int_L (y^2 + z^2)\gamma dl; \quad I_y = \int_L (x^2 + z^2)\gamma dl; \quad I_z = \int_L (x^2 + y^2)\gamma dl;$$

$I_0 = \int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$ - полярний момент інерції. Центробіжні моменти інерції можна обчислити за формулою

$$I_{xy} = \int_L xy\gamma dl; \quad I_{xz} = \int_L xz\gamma dl; \quad I_{yz} = \int_L yz\gamma dl.$$

Розглянемо задачу про притягання матеріальної точки матеріальною плоскою лінією.

За законом Ньютона матеріальна точка μ массою m притягає матеріальну точку μ_0 масою m_0 із силою $\overline{F}$, що має напрям $\overline{\mu_0\mu}$, а $\left|\overline{F}\right| = K\frac{mm_0}{r}$, де $r = \left|M_0M\right|$, K - коефіцієнт, залежний од вибору одиниць вимірювання.

Якщо точка μ_0 притягається системою точок $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ з массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то рівнодійна сила притягання обчислюється геометричним додаванням сил притягання окремими точками, тобто

$\overline{F} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F_i}$, де $\overline{F_i}$ - сила притягання точки μ_0 точкою $\mu_i (i = \overline{1,n})$.

Позначивши проекції рівнодійної сили $\overline{F}$ на осі O_x та O_y через x_F та y_F , а кути між векторами $\overline{r_i} = \overline{M_0 M_i}$ та віссю O_x через θ_i, дістанемо

$$x_F = \sum_{i=1}^{n} K \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \cos\theta_i,\ y_F = \sum_{i=1}^{n} K \frac{m_0 m_i}{r_i^2} \sin\theta_i,\ (2.3),$$

де $\left|\overline{r_i}\right| = r_i$.

Нехай $\gamma(x, y)$ - функція розподілу маси на лінії AB, неперервна на ній. Розіб’ємо AB на елементарны частини $\Delta L_1, \Delta L_2, \ldots, \Delta L_n$. Позначимо через Δl_i довжини елементарних частин ΔL_i,

а через Δm_i -маси ΔL_i. Виберемо довільно точки $\mu_i \in \Delta L_i$ і в цих точках зосередимо маси Δm_i елементарних частин ΔL_i.

Урахувавши, що $\Delta m_i \approx \gamma(\mu_i)\Delta l_i$ і скориставшись формулами (2.3), знайдемо наближено координати рівнодійної сили $\overline{F}$:

$$x_F \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{K m_0 \gamma(\mu_i)\Delta l_i}{r_i^2} \cos\theta_i,\ y_F = \sum_{i=1}^{n} \frac{K m_0 \gamma(\mu_i)\Delta l_i}{r_i^2} \sin\theta_i (3.4)$$

Якщо у формулах (3.4) перейти до границі за умови $\max_i \Delta l_i \to 0$ то ці формули стануть точними , а суми заміняться інтегралами :

$$x_F = K m_0 \int_{AB} \frac{\gamma(\mu)\cos\theta}{r^2} dl, y_F = K m_0 \int_{AB} \frac{\gamma(\mu)\sin\theta}{r^2} dl,$$

де $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ $(x, y, x_0, y_0$ - координати точок відповідно μ_i і μ_0),

$$\cos\theta = \frac{x - x_0}{r}; \quad \sin\theta = \frac{y - y_0}{r}.$$

Приклади розв’язування задач

Приклад 2.1. Обчислити $\int\limits_{AB} \frac{dl}{x-y}$, де AB відрізок прямої $y=\frac{1}{2}x-2$ від точки A (0;-2) до точки

B (4;0).

$$\int\limits_{AB} \frac{dl}{x-y} = \int\limits_0^4 \frac{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}{x-\left(\frac{1}{2}x-2\right)}dx = \sqrt{5}\int\limits_0^4 \frac{dx}{x+4} = \sqrt{5}\ln\left|x+4\right| |_0^4 .$$

Приклад 2.2. Обчислити $\int\limits_{AB} \sqrt{2y}dy$, де AB - перша арка циклоїди

$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \ (0\le t\le 2\pi) \end{cases}$$

$$\int\limits_{AB} \sqrt{2y}dl = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2a(1-\cos t)}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}dt = 2a\sqrt{a}\int\limits_0^{2\pi}(1-\cos t)dt = 4\pi a\sqrt{a} .$$

Приклад 2.3. Знайти центр мас $C(x_c, y_c, z_c)$ частини гвинтової лінії $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt \ \ (0\le t\le \pi)$, якщо $\gamma(x,y,z)=\gamma - const$.

$$M = \int\limits_0^{\pi} \gamma\sqrt{a^2\sin^2 t+\cos^2 t+b^2}dt = \gamma\int\limits_0^{\pi}\sqrt{a^2+b^2}dt = \pi\gamma\sqrt{a^2+b^2};$$

$$M_{yz} = \int\limits_0^{\pi} a\cos t\gamma\sqrt{a^2+b^2}dt = a\gamma\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi}\cos tdt = 0;$$

$$M_{xz} = \int\limits_0^{\pi} a\sin t\gamma\sqrt{a^2+b^2}dt = a\gamma\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi}\sin tdt = 2a\gamma\sqrt{a^2+b^2};$$

$$M_{xz} = \int\limits_0^{\pi} bt\gamma\sqrt{a^2+b^2}dt = b\gamma\sqrt{a^2+b^2}\int\limits_0^{\pi}tdt = \frac{1}{2}x^2 b\gamma\sqrt{a^2+b^2};$$

$$x_c = \frac{M_{yz}}{M} = 0, y_C = \frac{M_{xz}}{M} = \frac{2a}{\pi}, z_c = \frac{b\pi}{2}.$$

Приклад 2.4. Знайти силу притягання, з якою дуга астроїди $\begin{cases} x=a\cos^3 t, \\ y=a\sin^3 t, \end{cases}$,

що лежить в першому квадранті , діє на одиницю маси, зосереджену в початку координат, коли функція розподілу маси в кожній точці астроїди дорівнює кубу відстані від цієї точки до початку координат.

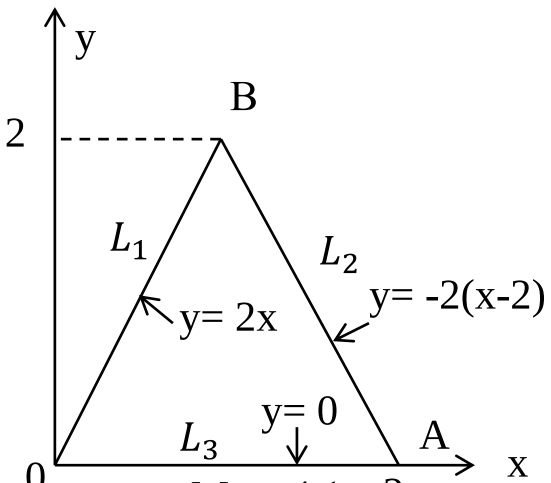
З огляду на симетрію астроїди відносно прямої $y = x$ рівнодійна сила притягання $\overline{F}$ має рівні координати , причому $x_F = Km_0 \int\limits_{AB} \gamma(\mu)\frac{\cos\theta(\mu)}{r^2(\mu)}dl$, де за умовою $m_0 = 1, \gamma(\mu) = r^3(\mu)$.

Крім того, $r(\mu)\cos\theta(\mu) = x = a\cos^3 t$ для $\forall\mu \in AB,\ dl = 3a\cos t\sin t dt\ \left(t \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right.$.

Отже, $x_F = y_F = K\int\limits_{AB} r(\mu)\cos\theta(\mu)dl = 3Ka^2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\sin t dt = \frac{3}{5}Ka^2.$

Приклад 2.5. Знайти $\int_L x^2\, ydl$, де L- границя трикутника з вершинами в точках O(0;0), A(2;0), B(1;2).

Розв'язок: Схематичний малюнок показує шлях інтегрування.



Мал. 4.1

З малюнка 4.1 видно, що шлях інтегрування складається з трьох відрізків L_1, L_2, L_3,заданих різними рівняннями:

L_1: y=2x; $\quad 0 \le x \le 1$;

L_2: y=-2(x-2); $\quad 1 \le x \le 2$;

L_3: y=0; $\quad 0 \le x \le 2$.

(рівняння для ліній L_1, L_2 записані як рівняння прямих ліній, що проходять через точки).

Так як це двомірний випадок, то використаємо властивість адитивності криволінійного інтегралу:

$$\int\limits_L x^2 ydl = \int\limits_{L_1} x^2\, y\, dl + \int\limits_{L_2} x^2 ydl + \int\limits_{L_3} x^2 ydl.$$

Користуючись рівняннями для ліній L_1, L_2, L_3, знаходимо:

$$\int\limits_{L_3} x^2 ydl = \int\limits_0^2 x^2 \cdot 0 dl = 0$$

$$\int_{L_2} x^2\,ydl = -2\int_1^2 x^2(x-2)\sqrt{1+4}\,dx = -2\sqrt{5}\int_1^2 (x^3-2x^2)dx =$$

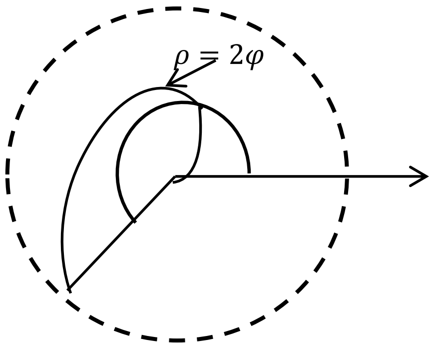
$$= -2\sqrt{5}\left(\frac{x^4}{4}-\frac{2}{3}x^3\right)\Big|_1^2 = -2\sqrt{5}(4-\frac{2}{3}8-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}) = \frac{11\sqrt{5}}{6}$$

$$\int_{L_1} x^2\,ydl = 2\int_0^1 x^3\sqrt{5}\,dx = 2\sqrt{5}\frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Відповідь:

$$\int_L x^2ydl = \frac{11\sqrt{5}}{6}+\frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{7}{3}\sqrt{5}$$

Приклад 2.6. Обчислити масу спіралі Архімеда ρ=2φ, замкнена в середині круга радіуса R з центром в полюсі (мал. 4.4), якщо густина маси спіралі $\gamma = arctg\frac{y}{x}$.



мал. 4.4

Розв'язок.

Рівняння ліній задано в полярній системі координат. Тому вона припускає параметризацію

$x = 2\varphi\ cos\varphi;\ \ y = 2\varphi\ sin\varphi.$ Межі інтегрування по φ знайдемо з рішення системи рівняння для окружності ρ=R і спіралі ρ=2φ. Звідси в точці M маємо рівність величини

ρ: R=2φ_1; $\varphi_1 = \rho/2$.

Щільність маси в полярній системі координат

$$\gamma = arctg\frac{y}{x} = arctg\frac{2\varphi sin\varphi}{2\varphi cos\varphi} = arctg(tg\varphi) = \varphi.$$

Використовуючи першу формулу в (4.8), отримаємо

$\mathrm{M} = \int_L \ arctg\frac{y}{x}dl = \int_0^{\frac{R}{2}}\varphi\sqrt{1+\varphi^2 d\varphi} = \frac{2}{3}(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{R/2} = \frac{2}{3}\left[\left(1+\frac{R^2}{4}\right)-1\right].$
(од. маси).

Завдання 20

Обчислити криволінійні інтеграли 1-го роду (1-9):

1) $\int_C (x+y)dl,$ де C - контур трикутника з вершинами $O(0;0), A(1;0), B(0;1).$

2) $\int_C (x^2+y^2)dl,$ де C - крива $\left\{\begin{matrix} x = a(\cos t + t\sin t), \\ y = a(\sin t - t\cos t)(0 \le t \le 2\pi). \end{matrix}\right\}$.

3) $\int_C \sqrt{x^2+y^2}dl$, де C - коло $x^2+y^2 = ax$.

4) $\int_C |y|dl$, де C - лемніската $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$,

5) $\int_C \left(x^{\frac{4}{3}}+y^{\frac{4}{3}}\right)dl$, де C - астроїда $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$

6) $\int_C xdl,$ де C - частина логарифмічної спіралі $\rho = ae^{K\varphi}, K > 0,$ що міститься всередині кола $\rho = a$.

7) $\int_C \frac{dl}{y^2},$ де C - частина ланцюгової лінії $y = ach\frac{x}{a}, |x| \le a$.

8) $\int_C x^2dl$, де C - коло $\left\{\begin{matrix} x^2+y^2+z^2 = a^2, \\ x+y+z = 0. \end{matrix}\right\}$

9) $\int_C (x^2+y^2+z^2)dl$, де C - частина гвинтової лінії
$x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt (0 \le t \le 2\pi)$.

Знайти масу лінії L , якщо задано функцію розподілу маси $\gamma(\mu)$ (10-17):

10) $L: \left\{\begin{matrix} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} = 1, \\ x \ge 0, y \ge 0, \gamma(\mu) = xy \end{matrix}\right\}$

11)L - астроїда $\left\{\begin{array}{l} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t, \gamma(\mu) = |xy.| \end{array}\right\}$.

12)$\rho = a(1+\cos\theta), \gamma(\mu) = K\sqrt{\rho}(K - \mathrm{co}nst).$

13)$L: \left\{\begin{array}{l} x = at, \\ y = \dfrac{1}{2}at^2, \\ z = \dfrac{1}{3}at^3, (0 \le t \le 1) \end{array}\right\}$.

14)L - частина спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi(\rho \le R), \gamma(\mu) = arctg\dfrac{y}{x}.$

15)L - частина лінії $\left\{\begin{array}{l} x = ae^t\cos t, \\ y = ae^t\sin t, \\ z = at. \end{array}\right\}$ від точки (0;0;0) до точки $A(a;0;0)$.

16)$L: \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = R^2, \\ y \ge 0, \gamma(\mu) = Ky^3, K - const. \end{array}\right\}$.

17)$L: \left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 = R^2, \\ x \ge 0, y \ge 0, \gamma(\mu) = Kx, K - const. \end{array}\right\}$

Знайти координати центра мас лінії L , якщо $\gamma(\mu) = const$ (18-23)

18)$L: \left\{\begin{array}{l} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), (0 \le t \le \pi). \end{array}\right\}$

19)$L: y = chx(0 \le x \le \ln 2)$.

20)$L: \left\{\begin{array}{l} x = e^t\cos t \\ y = e^t\sin t, \\ z = e^t(-\infty < t \le 0) \end{array}\right\}$.

21)$L: y = atg\dfrac{x}{a}$ від точки $A(o;a)$ до точки $B(b;h)$.

22)L - частина параболи $y^2 = 2px$, що відтинається параболою $x^2 = 2py$.

23)L - контур сферичного трикутника $\left\{\begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0. \end{array}\right\}$.

24) Знайти момент інерції відносно осі O_z першого звою гвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt (0 \le t \le 2\pi)$.

25) Знайти силу притягання, з якою діє матеріальне однорідне $(\gamma(x, y) \equiv 1)$ півколо радіуса R на одиницю маси, зосередженої в центрі кола.

26) Знайти силу притягання, з якою діє матеріальна нескінченна однорідна $(\gamma(x, y) \equiv 1)$ пряма на одиницю маси, що міститься на відстані d від прямої.

27) Знайти момент інерції відносно осі O_x одного звою гвинтової лінії $x = a\cos t, y = a\sin t, z = \dfrac{ht}{2\pi} (0 \le t \le 2\pi)$.

28) Знайти момент інерції однорідного $(\gamma(x, y) \equiv 1)$ кола $x^2 + y^2 = a^2$ відносно його діаметра.

29) Знайти статичний момент відносно O_x однорідної $(\gamma(x, y) \equiv 1)$ дуги астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (x \ge 0, y \ge 0)$.

30) Знайти статичний момент відносно осі O_y дуги однорідної $(\gamma(x, y) \equiv 1)$ астроїди $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (x \ge 0, y \ge 0)$.

Завдання 21

1. Обчислити $\int_L xydl$, де L – контур квадрата з вершинами в точках O(0; 0); A(1; 0); B(1; 1); C(0; 1).
2. Обчислити $\int_L \frac{dl}{\sqrt{4+x^2+y^2}}$, де L – відрізок, що з’єднує точки (0; 0) і (1; 2).
3. Обчислити $\int_L (x-y)dl$, де L – коло $\left(x - \frac{a^2}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^4}{4}$. Вказівка: перейти до параметричного задання кривої.

4. Знайти центр тяжіння першої арки циклоїди $x = a(t - sint), y = a(1 - cost)$.
5. Знайти довжину дуги просторової кривої $x = e^t cost; y = e^t sint; z = e^t;\ -\infty < t < 0$.
6. Знайти статичні моменти M_x, M_y однорідної дуги астроїди
   $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$
   $(x \geq 0; y \geq 0)$.

   Вказівка: перейти до параметрическому заданию кривой.

7. Обчислити $\int_L \ x^2ydl$, де L – межа трикутника з вершинами в точках (0; 0); (2; 1); (1; 2).

Знайти масу заданих ліній з густиною $\gamma(x; y; z)$.

8. $L: x = e^{-t}cost; y = e^{-t}sint; z = e^{-t};\ \gamma = z; 0 \leq t \leq 1$.
9. L: відрізок AB, де $A(1; 1; 1)b\ B(4; 4; 4);\ \gamma = xyz$.
10. $L: x^2 + y^2 = by;\ \gamma = x + 2$.

Вказівка: перейти в полярну систему координат.

11. $L: y = ach\frac{x}{a};\ \gamma = \frac{1}{y^2}$.
12. $L: x = acost; y = bsint;\ \gamma = |y|$.
13. $L: y = 2px; 0 \leq x \leq \frac{p}{2};\ \gamma = |y|$.
14. $L: x = at; y = \frac{a}{2}t^2; z = \frac{a}{3}t^3;\ \gamma = \sqrt{\frac{2y}{a}}; 0 \leq t \leq 1$.
15. $L: x = acost; y = asint; z = bt;\ \gamma = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};\ 0 \leq t \leq 2\pi$.
16. $L: x = a(t - sint); y = a(1 - cost);\ \gamma = y^2; 0 \leq t \leq 2\pi$.

Обчислити криволінійні інтеграли першого роду,якщо крива задана параметрично:

17. $\int_L \ xyzdl;\ L: x = t; y = \frac{1}{3}\sqrt{8t^3}; z = \frac{1}{2}t^2; 0 \leq t \leq 1$.
18. $\int_L \ (x^2 + y^2)^n dl;\ L: x = acost; y = asint; 0 \leq t \leq 2\pi$.
19. $\int_L \ \left(x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}\right) dl;\ L: x = acos^3t; y = asin^3t; 0 \leq t \leq 2\pi$.

20. $\int_L (x^2+y^2+z^2)dl; L: x = acost; y = asint; z = bt; 0 \le t \le 2\pi.$

21. $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl; L: x = a(cost + tsint); y = a(sint - tcost);\ 0 \le t \le 2\pi.$

22. $\int_L (x+z)dl;\ L: x = t; y = \frac{3}{\sqrt{2}}t^2; z = t^2;\ 0 \le t \le 1.$

23. $\int_L\ xydl;\ L: x = acht; y = asht;\ \ 0 \le t \le t_0.$

24. $\int_L\ zdl;\ L: x = tcost; y = tsint; z = t;\ 0 \le t \le t_0.$

25. $\int_L\ e^{-x}dl;\ L: x = \ln(1+t^2)\,; y = 2arctgt - t + 3;\ 0 \le t \le 1.$

Обчислити криволінійні інтеграли першого роду, якщо крива задана в полярній системі координат:

26. $\int_L (x^2+y^2)dl\,; L -$ дуга логарифмічної спіралі $\rho = ae^{m\varphi}(m > 0)$ від точки $(a{:}\,0)$ до точки $(ae^{2\pi m}; 0)$.

27. $\int_L (x+y)dl;\ L -$ права пелюстка лемніскати $\rho^2 cos2\varphi$.

28. $\int_L \sqrt{x^2+y^2}\,dl, L -$ коло $\rho = acos\varphi$.

29. $\int_L \frac{dl}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\,; L -$ відрізок гіперболічної спіралі $\rho\varphi = 1;\ \sqrt{3} \le \varphi \le 2\sqrt{2}$.

30. $\int_L (x^2+y^2)dl,$ де $L -$ дуга кола $\rho = asin\varphi,$ що знаходиться між прямими $y = x$ і $y = -x$.

Завдання 22

Знайти довжину дуги кривої:

1. $1)\, y = \ln x, \sqrt{3} \le x \le \sqrt{15}.$
   $2)\, \rho = 3e^{\frac{3\varphi}{4}}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi < \frac{\pi}{2}.$

2. $1)\, y = \frac{x^2}{4} - \frac{\ln x}{2}, 1 \le x \le 2.$
   $2)\, \rho = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi < \frac{\pi}{2}.$

3. $1)\, y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, 0 \le x \le \frac{7}{9}.$
   $2)\, \rho = \sqrt{2}e^{\varphi}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}.$

4.
1) $y=\ln\dfrac{5}{2x},\sqrt{3}\le x\le\sqrt{8}.$
2) $\rho=3e^{\frac{5\varphi}{12}},-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}.$

5.
1) $y=-\ln\cos x,0\le x\le\dfrac{\pi}{6}.$
2) $\rho=5e^{\frac{12\varphi}{5}},-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi<\dfrac{\pi}{2}.$

6.
1) $y=e^{x}+6,\ln\sqrt{8}\le x\le\ln\sqrt{15}.$
2) $\rho=3e^{\frac{3\varphi}{4}},0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}.$

7.
1) $y=2+\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{x-x^2},x\in[\frac{1}{4};1].$
2) $\rho=4e^{\frac{4\varphi}{3}},0\le\varphi<\dfrac{\pi}{3}.$

8.
1) $y=\ln(x^2-1),2\le x\le 3.$
2) $\rho=\sqrt{2}e^{\varphi},0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{3}.$

9.
1) $y=\sqrt{1-x^2}+\arccos x,0\le x\le\dfrac{8}{9}.$
2) $\rho=5e^{\frac{5\varphi}{12}},0\le\varphi<\dfrac{\pi}{3}.$

10.
1) $y=\ln(1-x^2),0\le x\le\dfrac{1}{4}.$
2) $\rho=12e^{\frac{12\varphi}{5}},0\le\varphi<\dfrac{\pi}{3}.$

11.
1) $y=2+\operatorname{ch}x,0\le x\le 1.$
2) $\rho=1-\sin\varphi,-\dfrac{\pi}{2}\le\varphi<-\dfrac{\pi}{6}.$

12.
1) $y=1-\ln\cos x,1\le x\le\dfrac{\pi}{6}.$
2) $\rho=2(1-\cos\varphi),-\pi\le\varphi<-\dfrac{\pi}{2}.$

13.
1) $y=e^{x}+13,\ln\sqrt{15}\le x\le\ln\sqrt{24}.$
2) $\rho=3(1+\sin\varphi),-\dfrac{\pi}{6}\le\varphi\le 0.$

14.
1) $y=\sqrt{x-x^2}-\arccos\sqrt{x},0\le x\le\dfrac{1}{4}.$
2) $\rho=4(1-\sin\varphi),0\le\varphi<\dfrac{\pi}{6}.$

15.
1) $y=2-e^{x},\ln\sqrt{3}\le x\le\ln\sqrt{8}.$
2) $\rho=5(1-\cos\varphi),-\dfrac{\pi}{3}\le\varphi<0.$

16. 1) $y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, 0 \le x \le \frac{15}{16}.$

2) $\rho = 6(1+\sin\varphi), -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0.$

17. 1) $y = 1 - \ln\sin x, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}.$

2) $\rho = 7(1-\sin\varphi), -\frac{\pi}{6} \le \varphi < \frac{\pi}{6}.$

18. 1) $y = 1 - \ln(x^2-1), 3 \le x \le 4.$

2) $\rho = 8(1-\cos\varphi), -\frac{2\pi}{3} \le \varphi \le 0.$

19. 1) $y = \sqrt{x-x^2} - \arccos\sqrt{x}, \frac{1}{9} \le x \le 1.$

2) $\rho = 2\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{3}{4}.$

20. 1) $y = \sqrt{1-x^2} - \arccos x, 0 \le x \le \frac{9}{16}.$

2) $\rho = 2\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{4}{3}.$

21. 1) $y = \ln\sin x, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}.$

2) $\rho = 2\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{5}{12}.$

22. 1) $y = \ln\frac{7}{x}, \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}.$

2) $\rho = 2\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{12}{5}.$

23. 1) $y = \operatorname{ch} x + 3, 0 \le x \le 1.$

2) $\rho = 4\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{3}{4}.$

24. 1) $y = 1 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, 0 \le x \le \frac{3}{4}.$

2) $\rho = 3\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{4}{3}.$

25. 1) $y = \ln\cos x + 2, 0 \le x \le \frac{\pi}{6}.$

2) $\rho = 5\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{12}{5}.$

26. 1) $y = e^x + 26, \ln\sqrt{8} \le x \le \ln\sqrt{24}.$

2) $\rho = 2\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{6}.$

27. 1) $y = \operatorname{ch} x + 3, 0 \le x \le 2.$

2) $\rho = 8\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}.$

28. $1)\, y = \arccos\sqrt{x} - \sqrt{x - x^2} + 4, x \in [0; \frac{1}{2}]$.

$2)\, \rho = 6\cos\varphi, 0 \le \varphi \le \dfrac{\pi}{3}$.

29. $1)\, y = \dfrac{1}{2}\operatorname{ch} 2x + \dfrac{3}{4}, 0 \le x \le 2$.

$2)\, \rho = 2\sin\varphi, 0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{6}$.

30. $1)\, y = e^x + e, \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{15}$.

$2)\, \rho = 8\sin\varphi, 0 \le \varphi < \dfrac{\pi}{4}$.

Завдання 23

1. Знайти масу кривої $x = t\cos t,\ y = t\sin t, z = t, 0 \le t \le 2\pi$ з густиною $\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$.
2. Знайти масу кривої $x = \cos t,\ y = \sin t, z = \sqrt{3}t, 0 \le t \le 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.
3. Знайти масу кривої $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t, z = 2t, 0 \le t \le 2\pi$ з густиною $\mu = z^2(x^2 + y^2)^{-1}$.
4. Знайти масу кривої $x = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\ y = \dfrac{a}{\sqrt{2}}\cos t, z = a\sin t, 0 \le t \le 2\pi$ з густиною $\mu = \sqrt{2y^2 + z^2}$.
5. Знайти масу кривої $x = \frac{1}{2}\cos t,\ y = \frac{1}{2}\cos t, z = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ з густиною $\mu = xyz$.
6. Знайти масу кривої $x = a\cos t,\ y = a\sin t, z = bt, 0 \le t \le 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.
7. Знайти масу кривої $x = t\cos t,\ y = t\sin t, z = t, 0 \le t \le 2\pi$ з густиною $\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$.
8. Знайти масу кривої $x = t, y = \dfrac{3}{\sqrt{2}}t^2,\ z = t^3, 0 \le t \le 1$ з густиною $\mu = x + z$.
9. Знайти масу кривої $x = \dfrac{R}{\sqrt{2}}\cos t,\ y = \dfrac{R}{\sqrt{2}}\cos t, z = R\sin t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ з густиною $\mu = x + y$.
10. Знайти масу кривої $x = a\cos t,\ y = a\sin t, z = bt, 0 \le t \le 2\pi$ з густиною $\mu = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.
11. Знайти масу кривої $x = a\cos t,\ y = a\sin t, z = at, 0 \le t \le 2\pi$ з густиною $\mu = z^2\ \ x^2 + y^2\ \ ^{-1}$.

12. Знайти масу кривої $x = \cos t + t\sin t$,

$y = \sin t - t\cos t, z = 1, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = \sqrt{x^2 + y^2}$.

13. Знайти масу кривої $x = 5\cos t,\ y = 5\sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

14. Знайти масу кривої $x = 4\cos t,\ y = 4\cos t, z = 3\sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

15. Знайти масу кривої $x = 9\cos t,\ y = 9\sin t, z = 9\sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = z^2 \;\; x^2 + y^2 \;\; ^{-1}$.

16. Знайти масу кривої $x = R\cos t,\ y = R\sin t, z = \frac{at}{2\pi}, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

17. Знайти масу кривої $x = \cos t,\ y = \sin t, z = \sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

18. Знайти масу кривої $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t, z = 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = z^2(x^2 + y^2)^{-1}$.

19. Знайти масу кривої $x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t$,

$y = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, z = a\sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = \sqrt{2y^2 + z^2}$.

20. Знайти масу кривої $x = \frac{1}{2}\cos t,\ y = \frac{1}{2}\cos t, z = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ з густиною $\mu = xyz$.

21. Знайти масу кривої $x = t\cos t,\ y = t\sin t, z = t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$.

22. Знайти масу кривої $x = \cos t,\ y = \sin t, z = \sqrt{3}t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

23. Знайти масу кривої $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t, z = 2t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = z^2(x^2 + y^2)^{-1}$.

24. Знайти масу кривої $x = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t,\ y = \frac{a}{\sqrt{2}}\cos t, z = a\sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = \sqrt{2y^2 + z^2}$.

25. Знайти масу кривої $x = \frac{1}{2}\cos t,\ y = \frac{1}{2}\cos t, z = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ з густиною $\mu = xyz$.

26. Знайти масу кривої $x = a\cos t,\ y = a\sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi$ з густиною $\mu = x^2 + y^2 + z^2$.

27. Знайти масу кривої $x = t\cos t,\ y = t\sin t, z = t, 0 \le t \le 2\pi$ з густиною $\mu = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$.

28. Знайти масу кривої $x = t,\ y = \frac{3}{\sqrt{2}}t^2, z = t^3, 0 \le t \le 1$ з густиною $\mu = x + z$.

29. Знайти масу кривої $x = y = \frac{1}{\sqrt{2}a}\cos t,\ z = \frac{\sin t}{a}, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ з густиною $\mu = x + y$.

30. Знайти масу кривої $x = a\cos t,\ y = a\sin t, z = bt, 0 \le t \le 2\pi$ з густиною $\mu = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$.

Завдання 24

Варіант №1

Знайти довжину петлі лінії $x = t^2, y = t - \frac{1}{3}t^3$.

Варіант №2

Знайти заряд, розподілений вздовж кривої $\rho^2 = a^2 \cos 2\varphi$, якщо густина заряду $\gamma(x, y) = y$.

Варіант №3

Знайти довжину однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0$.

Варіант №4

Знайти заряд, розподілений вздовж кривої $y = \ln x, 1 \le x \le 3$, якщо лінійна густина заряду $\gamma(x; y) = x^2$.

Варіант №5

Знайти довжину дуги лінії $x = \frac{1}{3}t^3 - t, y = t^2 + 2$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = 3$.

Варіант №6

Знайти заряд розподілений вздовж кривої $\rho = a(1 + \cos\varphi)$,якщо лінійна густина заряду $j(\rho; \varphi) = \rho^{-\frac{1}{2}}$.

Варіант №7

Знайти довжину дуги астроїди $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t, a > 0.$

Варіант №8

Знайти координати центра ваги однорідної дуги циклоїди $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0, 0 \le t \le 2\Pi.$

Варіант №9

Знайти довжину петлі лінії $x = t^2, y = t - \frac{1}{3}t^3$.

Варіант №10

Знайти заряд, розподілений вздовж кривої $x = t\cos t; y = t\sin t; z = t; 0 \le t \le 2\pi$, якщо лінійна густина заряду $\gamma(x; y; z) = 2z - \sqrt{x^2 + y^2}$.

Варіант №11

Знайти довжину кардіоїди $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.

Варіант №12

Знайти заряд, розподілений вздовж кривої $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t), a > 0, 0 \le t \le 2\pi$, якщо лінійна густина заряду $\gamma(x; y) = y^2$.

Варіант №13

Знайти довжину дуги кривої $y^2 = \frac{2}{3}(x-1)^3$, яка міститься всередині параболи $y^2 = \frac{x}{3}$.

Варіант №14

Знайти заряд, розподілений вздовж кривої $x^2 + y^2 = ax, a > 0$, якщо лінійна густина заряду $\gamma(x; y) = x - y$.

Варіант №15

Знайти довжину дуги кривої $y = \ln \sin x$ від $x_1 = \frac{\pi}{3}$ до $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Варіант №16

Знайти заряд, розподілений вздовж кривої $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$, якщо лінійна

гутина заряду j(x;y) = |y|

Варіант №17

Знайти довжину дуги кривої x = e^t cos t, y = e^t sin t, z = e^t, $-\infty <$ t <0.

Варіант №18

Знайти заряд, розподілений вздовж кривої x = 2cos t , y = 2sin t, $0 \le t < 2\pi$, якщо лінійна гутина заряду j(x;y) = y^2

Варіант №19

Знайти довжину дуги кривої y = arccos √x - $\sqrt{x-x}$ +1, $0 \le x < 0{,}5$.

Варіант №20

Знайти заряд, розподілений вздовж відрізка прямої, який з’єднує точки

А (-1; 0) та В (0; 1), якщо лінійна гутина заряду j(x;y) = $4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}$.

Варіант №21

Знайти довжину дуги кривої $y = 5 + \arcsin x - \sqrt{1-x^2}$, $0 \le x \le 0{,}5$.

Варіант №22

Знайти заряд, розподілений вздовж кривої $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, якщо лінійна густина заряду $\gamma(x;y) = |x| + |y|$.

Варіант №23

Знайти довжину дуги кривої $y = \sqrt{1-x^2} - \arccos x + 4, 0 \le x \le 0{,}5.$

Варіант №24

Знайти заряд, розподілений вздовж кривої $y^2 = 2px$, яка лежить всередині параболи $x^2 = 2py$, якщо лінійна густина заряду $\gamma(x;y) = y$.

Варіант №25

Знайти довжину кардіоїди $\rho = 5(1-\cos\varphi)$.

Варіант №26

Знайти заряд, розподілений вздовж кривої $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$, якщо лінійна густина заряду $\gamma(x;y) = xy$.

Варіант №27

Знайти довжину кардіоїди $\rho = 6(1+\sin\varphi)$.

Варіант №28

Знайти заряд, розподілений вздовж кривої $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = a^2 \\ x = y \end{cases}$, якщо лінійна густина заряду $\gamma(x;y) = 2y^2 + z^2$.

Варіант №29

Знайти довжину кардіоїди $\rho = 3(1-\sin\varphi)$.

Варіант №30

Знайти заряд, розподілений вздовж кривої $x = t$, $y = \frac{1}{2}t^2$, $y = \frac{1}{3}t^3$, $0 \le t \le 1$, якщо лінійна густина заряду $\gamma(x;y;z) = \sqrt{2y}$.

Варіант №31

Знайти довжину дуги кривої $\rho = a\sin^3\frac{\varphi}{3}$.

Варіант №32

Знайти заряд, розподілений вздовж кривої $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, $(a, b > 0, 0 \le t \le 2\pi)$, якщо лінійна густина заряду $\gamma(x;y;z) = (x^2+y^2+z^2)^{-1}$.

2.2. Криволінійні інтеграли 2-го роду

Поняття криволінійного інтеграла 2-го роду (за координатами) виникає, наприклад, при обчисленні роботи силового поля $\overline{F}(\mu) = (P(\mu), Q(\mu), R(\mu))$, якщо точка переміщується вздовж орієнтованої лінії . Він має вигляд

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz. \quad (2.5)$$

Обчислення інтеграла (3.5) зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

Нехай AB - гладка просторова лінія, що визначається параметричними рівняннями $x = x(t), y = y(t), z = z(t) (t \in [t_1, t_2])$, тоді

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{t_1}^{t_2} \left[P(x(t), y(t)z(t)x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t) \right] dt$$
(2.6)

Криволінійні інтеграли 1-го та 2-го родів пов'язані між собою формулою

$$\int_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \int_{AB} (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma)dl,$$

де $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ - напрямні косинуси вектора, який визначає напрям дотичної до лінії АВ в довільній її точці (орієнтація від А до В).

Якщо крива L – плоска та лежить в якійсь координатній площині, наприклад в площині xOy , то в цьому випадку $z = 0$; $\mathrm{R} = 0$ і інтеграл (2.6) приймає вигляд:

$$\int_L \{P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy\} = \int_{t_1}^{t_2} \{P(\mathrm{x(t)};\ \mathrm{y(t)})\,\mathrm{x}'(\mathrm{t}) +$$
$$Q(\mathrm{x(t)};\ \mathrm{y(t)})\mathrm{y}'(\mathrm{t})\}\mathrm{dt}. \qquad (2.7)$$

На площині xOy крива може бути задана явно рівнянням

$$\mathrm{y} = \mathrm{y(x)}, \mathrm{x} \in [\mathrm{x}_1; \mathrm{x}_2]$$

Тоді криволінійний інтеграл (2.7) приводиться до вигляду:

$$\int_L \{P(x;y;z)dx + Q(x;y;z)dy\} = \int_{x_1}^{x_2} \{\mathrm{P}(\mathrm{x};\mathrm{y(x)}) + Q(x;y(x))\,\mathrm{y}'(\mathrm{x})\}\mathrm{dx}. \qquad (2.7^*)$$

Якщо на площині крива L задана в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, то вона може бути задана параметрично з допомогою рівностей:

$\mathrm{x} = \rho(\varphi)\cos(\varphi)$; $\mathrm{y} = \rho(\varphi)\sin(\varphi)$; $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$,

а криволінійний інтеграл (2.6) в цьому випадку зводиться до вигляду

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \{P(\rho(\varphi)cos\varphi; \rho(\varphi)sin\varphi)(\rho'(\varphi)cos\varphi - \rho(\varphi)sin\varphi) +$$

$$+Q(\rho(\varphi)cos\varphi; \rho(\varphi)sin\varphi)(\rho'(\varphi)sin\varphi + \rho(\varphi)cos\varphi)\}dy.$$

Зауваження 2.1. Для криволінійних інтегралів 2-го роду зміна параметра t повинна відповідати вибраному напряму на кривій L.

Зауваження 2.2. В багатьох випадках лінія L в просторі задається в вигляді перетину двох поверхонь: S_1, що задається рівнянням

$F_1(x; y; z) = 0$, і S_2, що задається рівнянням $F_2(x; y; z) = 0$:

L:$\begin{cases} F_1(x; y; z) = 0; \\ F_2(x; y; z) = 0. \end{cases}$

В цьому випадку лінію L потрібно необхідним чином параметризувати,

таким чином, з вигляду рівнянь $F_1(x; y; z) = 0, F_2(x; y; z) = 0$ необхідно задати координати x; y; z даної точки P(x; y; z) на лінії L в вигляді функції, що залежить від параметра t: $x = x(t)$; $y = y(t)$;

$z = z(t)$ так, щоб при підстановці цих функцій в рівняння поверхонь вони перетворювались в тотожність.

Приклад 2.7. Параметризувати лінію перетину прямого кругового циліндра радіуса R і віссю симетрії OZ, заданого рівнянням $x^2 + y^2 == R^2$, з поверхнею гіперболічного параболоїда $z = xy$.

Розв'язок : Просторова лінія L задається в вигляді системи рівнянь

$$L: \begin{cases} x^2 + y^2 = R^2; \\ z = xy. \end{cases}$$

З першого рівняння видно, що воно перетворюється в тотожність, якщо

$x = R\cos t$; $y = R\sin t$. Тоді друге рівняння буде тотожністю, якщо в якості z візьмемо $z = R^2 \sin t \cos t$.

Відповідь: Параметричне рівняння лінії L задається рівняннями:

$x = R\cos t$; $y = R\sin t$; $z = R^2 \sin t \cos t$. $0 \le t \le 2\pi$.

Формули Стокса і Гріна

Знак криволінійного інтеграла другого роду залежить від напрямку обходу по контуру L. За додатній напрямок обходу на кривій L приймається напрямок збільшення параметра t для розімкненої кривої і обхід проти часової стрілки для замкнутої кривої.

Щоб врахувати цей факт криволінійний інтеграл другого роду по замкнутому контурі в додатному напрямку іноді позначають символом

$$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz$$

Теорема Стокса. Якщо функції $P(x;y;z)$, $Q(x;y;z)$, $R(x;y;z)$- неперервні разом з своїми похідними $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial z}$, $\frac{\partial R}{\partial x}$, $\frac{\partial R}{\partial y}$ на поверхні S аж до її границі L, то має місце формула Стокса:

$\oint_L Pdx + Qdy + Rdz = \iint_S (rot\vec{F}, \vec{n})ds <=> \oint(\vec{F}d\vec{r}) = \iint_S \left(rot\vec{F}\cdot\vec{n}\right)ds$ (2.8)

де $rot\vec{F} = \vec{i}\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \vec{j}\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) + \vec{k}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)$; (2.9)

$\vec{n} = \{\cos\alpha; cos\beta; cos\gamma\}$ – одинична нормаль до поверхні S в розглянутій точці, напрямок якої погоджено з додатнім напрямком обходу по замкнутому контурі так: якщо дивитись з кінця вектора $\vec{n}$, то обхід по замкнутому контуру відбувається проти годинникової стрілки:

$\vec{F} = \{P(x;y;z); Q(x;y;z); R(x;y;z)\}$ – векторне поле.

Формула Гріна

Якщо поверхня S – плоска область D координатної площини XOY

$(z = 0; R = 0)$, то теорема і формула Стокса переходять в теорему і формулу Гріна:

$$\oint P(x;y)dx + Q(x;y)du = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy. \qquad (2.10)$$

Якщо функції P(x,y) та Q(x,y) неперервні разом зі своїми частинними похідними в однозв'язній області G, що містить в собі лінію AB, і якщо в D $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, то диференціальна форма
$P(x,y)dx +$
$Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої окалярної функції $U(x,y)$і криволінійни

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} du(x,y) = U(B) - U(A) \quad (2.11)$$

не залежить від форми лінії інтегрування AB ⊂ D.

У такому разі функцію $\mathrm{U(x,y)}$ називають потенціалом векторного поля$\overline{\mathrm{F}} = (\mathrm{P(x,y)}, \mathrm{Q(x,y)})$.

Застосування криволінійних інтегралів

1) Площа плоскої області D, обмеженої замкнутою кривою L, обчислюється за формулою

$$S_D = \frac{1}{2}\oint\limits_L xdy - ydx. \qquad (2.12)$$

Ця формула одержується з формули Гріна, якщо Q=x, P= -y.

2) Обчислення роботи поля $\overrightarrow{F}$,

Фізичний зміст криволінійного інтеграла другого роду заклечається в тому, що числове його значення дорівнює роботі A, створеної силовим полем $\vec{F}$ над матеріальною точкою, що рухається по траєкторії L, і ця робота обчислюється за формулою

$$A = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz.$$

3) Циркуляція векторного поля $\vec{F}$ знаходиться по формулі

$$\text{Ц}\vec{F} = \oint\limits_L Pdx + Qdy + Rdz$$

де L – замкнений контур, що проходить в додатному напрямку.

4) Обчислення потенціалу поля $\vec{F}$.

Умова $rot\vec{F} = 0$ – є необхідна і достатня умова того, що криволінійний інтеграл другого роду не залежить від шляху інтегрування, а залежить лише від початкової $A(x_0; y_0; z_0)$ і кінцевої $B(x; y; z)$ точок інтегрування. В цьому випадку поле $\vec{F} = \{P; Q; R\}$ являється потенційним і його потенціал $u(x; y; z)$ знаходиться за формулою

$$u(x; y; z) = \int\limits_{(x_0;y_0;z_0)}^{(x;y;z)} Pdx + Qdy + Rdz + C. \qquad (2.13)$$

Постійна С, що залежить від вибору точки $A(x_0;y_0;z_0)$, можна брати в вигляді $C=u(x_0;y_0;z_0)$. Ця точка і шлях інтегрування беруться такими, щоб функції $P(x;y;z)$; Q; R були визначені всюди на шляху інтегрування.

Виявляється, інтеграл в (2.13) зручно обчислювати по ламаній лінії, ланки якої паралельні осям координат.

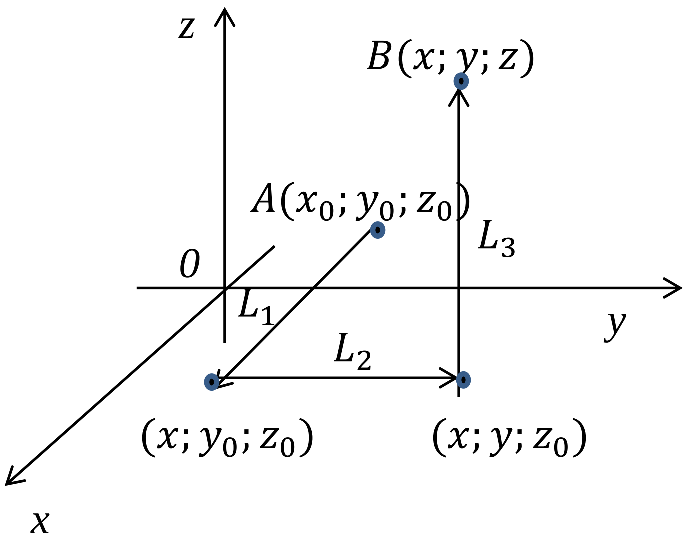
Наприклад, нехай точка $A(x_0;y_0;z_0)$ і поточна точка $B(x;y;z)$ з'єднані ламаною з ланками $L_1;\ L_2;\ L_3$(мал. 4.3):

$$L_1: x_0 \le x_1 \le x;\ y_1 = y_0; z_1 = z_0; dy_1 = dy_0 = dz_1 = 0,$$

$$L_2: y_0 \le y_1 \le y;\ x_1 = x;\ z_1 = z_0; dx_1 = dz_1 = 0,$$

$$L_3: z_0 \le z_1 \le z;\ x_1 = x;\ y_1 = y; dx_1 = dy_1 = 0.$$

Для даної ламаної формула



(2.13) приймає вигляд

$u(x;y;z) = \int_{x_0}^{x} P(x_1;y_0;z_0)dx_1 + \int_{y_0}^{y} Q(x;y_1;z_0)dy_1 + \int_{z_0}^{z} R(x;y;z_1)dz_1$
(2.14)

Приклади розв'язування задач

Приклад 2.8. Обчислити інтеграл

$$I = \int_{\mathrm{AB}} x^2dx + xydy$$

а) вздовж прямої від точки A(1;0) до точки B(0;1);

б) вздовж чверті кола $x = cost, y = sint$ $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$, що сполучає ті самі точки.

У випадку а лінією інтегрування в прямолінійний відрізок між точками A та B, рівняння якого

$y = 1 - x, x \in [x_A = 1;\ x_B = 0]$, а тому

$I = \int_{\mathrm{AB}} x^2dx + xydy$=$\int_A^B [x^2 + x(1-x)(-1)]dx = \int_A^B [2x^2 - x]dx = -\frac{1}{6}$

У випадку $dx = -sintdt,\ dy = costdt, t_A = 0, t_B = \frac{\pi}{2},$ звідси $I = \int_{AB}$

Приклад 2.9. Знайти $u(x, y)$ – потенціал векторного поля

$$\bar{F}(x, y) = (2xy - 5y^3;\ x^2 - 15xy^2 + 6y).$$

$$P(x, y) = 2xy - 5y^3, Q(x, y) = x^2 - 15xy^2 + 6y.$$

Перевіримо умови незалежності криволінійного інтеграла від форми лінії інтегрування:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x - 15y^2, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x - 15y^2, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Знаючи на це, при знаходженні *U*(*x*,*y*) лінією інтегрування візьмемо ламану *ACB,* де *A(0,0), C(*$\bar{x}$*,a), B(*$\bar{x}$*,*$\bar{y}$*).*

Далі, скориставшись формулою (2.11), дістанемо

$U(\bar{x},\bar{y}) - U(0{,}0) = \int_{ACB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AC} P(x, y)\mathrm{dx}+\mathrm{Q}(x, y)dy + \int_{CB} P(x, y)dx + +Q(x, y)dy.$

$\int_{AC} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$

$\int_{AC} (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy = \left| \begin{matrix} AC: y = 0 \\ 0 \leq x \leq \bar{x} \end{matrix} \right| =$

$=\int_0^{\bar{x}} [(2x \cdot 0 - 5 \cdot 0^3) + (x^2 - 15x \cdot a^2 + 6 \cdot 0) \cdot 0]dx = 0.$

$$\int_{CB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

$$= \int_{CB} (2xy - 5y^3)dx + (x^2 - 15xy^2 + 6y)dy = \left| \begin{matrix} CB: x = \bar{x} \\ 0 \le y \le \bar{y} \end{matrix} \right| =$$

$=\int_0^{\bar{y}}[(2\bar{x}\,y - 5y^3)\ \cdot 0 + (\bar{x}^2 - 15\bar{x}y^2 + 6y)dy = (\bar{x}^2y - 5\bar{x}y^3 + 3y^2)|_0^{\bar{y}}=\bar{x}^2\bar{y}$-$5\overline{xy}^3 + 3\bar{y}^2$.

Звідси $U(\bar{x},\bar{y})$= $\bar{x}^2\bar{y}$-$5\overline{xy}^3 + 3\bar{y}^2 + U(0,0)$. Замінивши $\bar{x}$,$\bar{y}$ на x,y (враховуючи, що потенціал U визначається з точністю до сталої, маємо

$$U(x,y) = x^2y - 5xy^3 + 3y^2 + C$$

Приклад 2.10. Знайти площу області, обмеженої астроїдою С:

$$\begin{cases} x = acos^3t \\ y = asin^3t\ (0 \le t \le 2\pi \end{cases}$$

Застосувавши відому формулу, маємо

$$S = \frac{1}{2}\int_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[\ acos^3t \cdot 3sin^2tcost + asin^3t \cdot 3acos^2tsint]dt =$$

$$= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi} cos^2t\,sin^2tdt = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi} sin^2 2tdt = \frac{3}{8}a^2\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}(1 - cos6t)dt =$$

$$= \frac{3}{8}\pi a^2(\text{кв. од.})$$

Приклад 2.11. Знайти $\int_L ydx + xdy$, де L - перша арка циклоїди

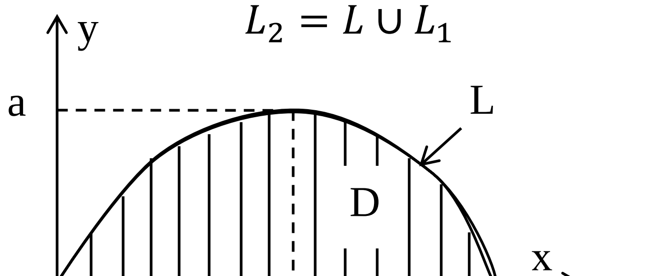
x=a(t-sint); y=a(1-cost), а параметр t міняється в сторону зростання.

Розв'язок: Для обчислення криволінійного інтеграла другого роду на площині (мал.4.2) використаємо другу формулу (2.7).

Для першої арки циклоїди параметр t міняється в межах 0≤t≤2π,

dx=$x'(t)dt = a(1 - cost)dt$;

dy=$y'(t)dt = asint\ dt$.



Підставляючи вирази для x(t), y(t), їх

диференціали і границі інтегрування

по t в формулу (2.7), получаємо

$$\int_L ydx + xdy = a^2 \int_0^{2\pi} \{(1-\cos t)^2 + (t-\sin t)\sin t\}dt =$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} \{1 - 2\cos t + cos^2 t - sin^2 t + t\sin t\}dt = 2\pi - t\cos t \Big|_0^{2\pi} =$$

$$= 2\pi - 2\pi = 0$$

Приклад 2.12 Знайти $\int_L xdy + ydx + zdz$, де L- перший виток еліптичної гвинтової лінії, заданої параметрично рівняннями:

$x = a\cos t;\quad y = b\sin t;\quad z = ct.$

Розв'язок : Перший виток гвинтової лінії вказує на те, що параметр t міняється в межах $0 \le t \le 2\pi$.

$dx = -a\sin t\, dt;\quad dy = b\cos t\, dt;\ dz = cdt.$

Підставляючи знайдені вирази в формулу (2.6), отримаємо

$$\int_L xdy + ydx + zdz = \int_0^{2\pi} (ab\, cos^2 t - ab\, sin^2 t + c^2 t)dt =$$

$$= ab \int_0^{2\pi} \cos 2t + 2\pi^2 c^2 = \frac{ab}{2}\sin 2t \Big|_0^{2\pi} + 2\pi^2 c^2 = 2\pi^2 c^2$$

Відповідь: $\int_L xdy + ydx + zdz = 2\pi^2 c^2$.

Приклад 2.13. Застосувавши формулу Гріна, знайти криволінійний інтеграл $\int_L ydx + x^2 dy$, де L – перша арка циклоїди, що проходиться в додатному напрямку (див. приклад2.11 і мал. 4.2).

Розв'язок : Щоб застосувати формулу Гріна (2.10), необхідно замкнути контур циклоїди L відрізком осі ОХ, замкненим між точками x=0 і x=2π (мал.4.2). Цей відрізок позначимо L_1. Тоді замкнутий контур

L_2складається з контурів L і L_1, таким чином $L_2 = L_1 \cup L$, і криволінійний інтеграл представимо в вигляді

$$\int_L ydx + xdy = -\oint_{L_2} ydx + xdy + \int_{L_1} ydx + xdy.$$

Знак "–" взятий тому, що додатній напрямок обходу по циклоїді L протилежний додатному напрямку обходу по замкнутій лінії L_2 .

Застосовуючи формулу (2.10) до криволінійного інтегралу і замкнутого контуру L_2, одержуємо

$$\int_L ydx + xdy = \iint_D (\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y})dx\,dy + \int_{L_1} ydx + xdy =$$

$$= \iint_D 0dx\,dy + \int_{L_1} ydx + xdy \equiv 0.$$

так як на лінії L_1 y=0; dy=0.

Відповідь : $\int_L ydx + xdy = 0$. Цей результат співпадає з результатами прикладу 2.11, де цей інтеграл визначався безпосередньо.

Приклад 2.14. Знайти $\oint ydx + xdy + zdz$, де L – будь-який замкнений контур, що проходиться в додатному напрямку.

Розв'язок: $\vec{F} = \{y; x; z\}$. Функції P=y; Q=x; R=z задовольняють всім умовам теореми Стокса на будь-якій гладкій поверхні S, що натягнута на цей контур. Вирахування $rot\vec{F}$ по формулі (2.9) дає

$$rot\vec{F} = \vec{\imath}\left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial z}\right) + \vec{\jmath}\left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}\right) + \vec{k}(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y}) \equiv 0.$$

Використовуючи цей результат і формулу (2.8), отримуємо відповідь

$$\int_L ydx + xdy + zdz \equiv 0.$$

Приклад 2.15. З'ясувати, що поле $\vec{F} = \{y; x; z\}$ потенційне, і знайти його потенціал $u(x; y; z)$.

Розв'язок. Знаходження $rot\vec{F}$ по (2.9) дає $rot\vec{F} \equiv 0$. Значить поле $\vec{F}$ – потенційне. Його потенціал можна обчислити по (2.14). Так як P=y, Q=x, R=z – неперервні функції всюди в кінцевому просторі, то в якості точки $A(x_0; y_0; z_0)$ можна взяти початок координат (0; 0; 0). В цьому випадку з (2.14) отримуємо

$$u(x; y; z) = \int_0^x 0dx_1 + \int_0^y xdy_1 + \int_0^z z_1dz_1 = xy + \frac{z^2}{2}$$

Зауваження 2.3. Ламану лінію можна взяти і по іншому, але завжди потрібно записувати рівняння її ланок(за типом раніше написаних ланок $L_1;\ L_2;\ L_3$), щоб по цих рівняннях можна було легко записати формули для обрахування $u(x; y; z)$ типу (2.14).

Приклад 2.16. Застосовуючи криволінійний інтеграл, обчислити площу плоскої області D, обмеженою першою аркою циклоїди і частиною осі OX (див. рис. 4.2, приклади 2.11 і 2.13).

Розв'язок. Згідно даним приклад 2.11 і 2.13

$$\sigma_D = \frac{1}{2}\oint xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_{L_+} xdy - ydx + \frac{1}{2}\int_{L_{1+}} xdy - ydx.$$

В цьому інтегралі обхід по замкнутому контуру LUL_1 проходить проти годинникової стрілки, на це вказує знак «+» зверху L чи L_1.

$$\int_{L_{1+}} xdy - ydx = 0, \text{так як на } L_1\ y = 0; dy = 0.$$

Звідси випливає, що

$$\sigma_D = \frac{1}{2}\int_{L_+} xdy - ydx = -\frac{1}{2}\int_{L} xdy - ydx.$$

Знак «-» з'явився через те, що ми перейшли до звичайного обходу першої арки циклоїди для розімкнутої лінії, який протилежний попередньому обходу (для L^+), отже, отримуєм

$$\sigma_D = \frac{1}{2}\int\limits_L ydx - xdy = \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} \{(1-cost)^2 - (t - sint)sint\}\,dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{2\pi} (2 - 2cos2t - tsint)dt = 2\pi a^2 - \frac{a^2}{2}\left(-2\pi + \int\limits_0^{2\pi} costdt\right) =$$

$$= 2\pi a^2 + \pi a^2 = 3\pi a^2.$$

Відповідь: $\sigma_D = 3\pi a^2$ (кв. ед.).

Приклад 2.17. Обчислити роботу сили $\vec{F} = \{y;\ x\}$ при перемещіщенні матеріальної точки по параболі y: $y = x^2 - 2x + 2$ із точки А (-1; 5) в точку В (2; 2).

<u>Розв'язок.</u> Цю задачу можна розв'язати двома способами:

А. Робота А виражається інтегралом:

$$A = \int\limits_L ydx + xdy.$$

Рівняння параболи задано явно, тому $dy = 2(x-1)dx$. Межі змін змінної x вказані в задачі і визначаються абсцисами точок А і В, тобто -1 ≤ x ≤ 2. Враховуючи все це і рівняння параболи, маємо

$$A = \int\limits_{-1}^{2} \{x^2 - 2x + 2 + x(2x-2)\}dx$$

$$= \int\limits_{-1}^{2} (3x^2 - 4x + 2)dx = (x^3 - 2x^2 + 2x)|_{-1}^{2} =$$

$$= 8 - 8 + 4 + 1 + 2 + 2 = 9 \quad \text{(од. роботи)}.$$

Б. Другий спосіб розв'язання базується на тому, що робота в потенціальному полі не залежить від шляху інтегрування і дорівнює рівності значень потенціала в кінцевій і початковій точках. У нас це точки А (-1; 5) і В (2; 2).

Те, що поле $\vec{F} = \{y;\ x\}$ – потенціальне, випливає з умови

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial y} = 1.$$

Тому знайдемо потенціал цього поля, використовуючи (2.14) для двохвимірного випадку, де $x_0 = -1;\ y_0 = 5$.

$$U(x;y) = \int\limits_{-1}^{x} 5dx_1 + \int\limits_{5}^{y} xdy_1 = 5x_1\Big|_{1}^{x} + xy_1\Big|_{5}^{y} = 5x - 5 + xy - 5x = xy - 5.$$

Відповідь: А = U(2; 2) – U(-1; 5) = 4+5+5-5=9 (од. роботи).

Результати обох методів співпадають.

Приклад 2.18. Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{F} = \{y - z; z - x; x - y\}$ вздовж контура L, що задає перетин поверхонь: циліндра $x^2 + y^2 = 4$ і площини $z = 3$. (напрямок обходу відбувається проти часової стрілки, якщо дивитись з додатного напрямку осі OZ), двума способами:

1) Беспосередньо обчислюючи криволінійний інтеграл по замкнутому контуру;
2) За допомогою формули Стокса, попередньо упевневшись, що вона застосовується.

Розв’язок. 1. Безпосереднє обчислення криволінійного інтеграла по замкнутому контуру L.

Контур L – коло радіуса 2 з центром на осі OZ, і що лежить в площині $z = 3$. Тому таку лінію можно параметризувати так;

$$x = 2cos\varphi; y = 2sin\varphi; z = 3\ (dz = 0); 0 \le \varphi \le 2\pi.$$

Збільшення параметра φ відповідає додатному обходу по замкнутому контуру.

В такому випадку маємо

$$\int = \oint \quad (y-z)dx + (z-x)dy + (x-y)dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} \{-2(2sin\varphi - 3)sin\varphi + 2(3 - 2cos\varphi)cos\varphi\}d\varphi$$

$$= -2\int_0^{2\pi} \{2 - 3sin\varphi - 3cos\varphi\}d\varphi = -8\pi.$$

2. Формула Стокса застосовується, так як функції $P = y - z; Q = z - x; R = x - y$ – неперервні разом зі всіма своїми першими частковими похідними скрізь в скінченному просторі R^3.

Тому в якості S можно взяти круг радіуса 2 з центром на осі OZ і який лежить в площині $z = 3$. Нормаллю до такої поверхні є вектор $\vec{n} = \vec{k} = \{0; 0; 1\}$.

За формулою Стокса маємо

$$\int = \oint \quad (y-z)dz + (z-x)dy + (x-y)dzz$$

$$= \iint_S \left(rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\right)ds = \iint_S (rot\,\vec{F})_z ds \equiv$$

$$\equiv \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) ds = -2\iint_S ds = -2\cdot 4\pi = -8\pi.$$

Відповідь: $\int = -8\pi$.

Завдання 25

Знайти роботу сили $\vec{F}$ при переміщенні матеріальної точки вздовж лінії L від точки M до точки N.

1. $\vec{F} = \vec{\imath}(x^2 - 2y) + \vec{\jmath}(y^2 - 2x)$, $L -$ відрізок MN від $M(-4;0)$ до $N(0;2)$.
2. $\vec{F} = \vec{\imath}(x^2 + 2y) + \vec{\jmath}(y^2 + 2x)$, $L: 2 - \frac{x^2}{8} = y$; $M(-4;0)$; $N(0;2)$.
3. $\vec{F} = \vec{\imath}x^3 - \vec{\jmath}y^3$, $L: x^2 + y^2 = 4\ (x \geq 0; y \geq 0)$; $M(2;0)$; $N(0;2)$.
4. $\vec{F} = \vec{\imath}x^2y - \vec{\jmath}y$, L: відрізок MN: $M(-1;0)$; $N(0;1)$.

5.

$\vec{F} = \vec{i}(x+y) + \vec{j}(x-y);\ \ L\!:\ x^2 + \frac{y^2}{9} =$
$1\ \ (x \geq 0;\ y \geq 0);\ \ M(1;0);\ \ N(0;3).$

6. $\vec{F} = (x^2 + y^2)(\vec{i} + 2\vec{j});\ \ L\!:\ x^2 + y^2 = R^2\ \ (y \geq 0);\ \ M(R;0);\ \ N(-R;0).$

7. $\vec{F} = \vec{i}(x + y\sqrt{x^2+y^2} + \vec{j}\left(y - x\sqrt{x^2+y^2}\right);\ \ L\!:\ x^2 + y^2 = 1\ (y \geq$
$0);\ \ M(1;0);\ \ N(1;0).$

8. $\vec{F} = \vec{i}(xy - x) - \vec{j}\frac{x^2}{2};\ \ L\!:\ y = 2\sqrt{x};\ \ M(0;0);\ \ N(1;0).$

Обчислити $\int_L\ Pdx + Qdy + Rdz$, якщо крива L задана параметрично:

9. $L\!:\ x = t;\ y = t^2;\ \ z = t^3;\ \ 2 \leq t \leq 3;\ \ P = e^{xy};\ \ Q = sinx;\ \ R = \frac{xy}{z}.$

10. $L\!:\ x = e^t;\ \ y = e^{-t};\ \ z = t^2;\ \ 0 \leq t \leq 1;\ \ P = xy;\ \ Q = x^2 z;\ \ R =$
$xyz.$

11. $L\!:\ x = t^3;\ \ y = t;\ \ z = t^2;\ \ 2 \leq t \leq 3;\ \ P = \frac{yz}{x};\ \ Q = e^y;\ \ R = sinz.$

12. $L\!:\ x = t^3 + t^2;\ \ y = \sqrt{1+t^2};\ \ z = e^{t^2};\ -1 \leq t \leq 1;$

13. Обчислити $\int_L\ cosxdx + e^{-y}dy + z^2dz$, де L – відрізок прямої від точки (-1; 2;4) до точки (6; 0; -2).

14. Обчислити $\int_L\ 2xydx + (x^2 + 2yz)dy + (y^2 + 1)dz$, де L – відрізок прямої від точки (0; 0; 0) до точки (1; 1; 1).

15. $\int_L\ 2xyz^3dx + (x^2z^2 + 2y)dy + 3x^2yz^2dz$, де L – відрізок прямої від точки (1; 2; 3) до точки (10; 20; 30).

Обчислити за допомогою криволінійних інтегралів площі фігур, обмежених замкнутими
лініями:

16. Кардіоїдою $x = a(2cost - cos2t);\ \ y = a(2sint - sin2t).$

17. Петлею декартового листа $x = \frac{3t}{1+t^3};\ \ y = \frac{3t^2}{1+t^2}.$

18. Петлею $9y^2 = 4x^3 - x^4.$

19. Петлею $y^2 = x^2 - x^4.$

20. Лемніскатою Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2).$

21. Астроїдою $x = acos^3t;\ \ y = asin^3t.$

Обчислити інтеграли по заданих кривих L, застосовуючи формулу Гріна:

22. $\oint (x = y)dx - (x - y)dy$, де $L -$ еліпс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

23. $\oint (xy + x + y)dx + (xy + x - y)dy$, де $L -$ коло $x^2 + y^2 = ax$.

24. $\oint 2(x^2 + y^2)dx + (x + y)^2 dy$,

де L –

контур трикутника з вершинами в точках $A(1;1)$; $B(2;2)$; $C(1;3)$.

25. $\oint y^2 dx - x^2 dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = by$.

В задачах 26-30 показати, що інтеграл не залежить від форми шляху і обчислити інтеграли:

В задачах 26-30 показать, что интеграл не зависит от формы пути и вычислить интегралы:

26. $\int_{(0;0)}^{(1;2)} (yx)dx + \frac{x^2 - y^2}{2} dy$.

27. $\int_{(1;-1)}^{(1;1)} (x - y)(dy - dx)$.

28. $\int_{(-2;-1)}^{(3;0)} (x^4 + 4xy^3)dx + (6x^2y^2 - 5y^4)dy$.

29. $\int_{(0;0)}^{(2;4)} (x^2 + y^2)\,(xdx - ydy)$.

30. $\int_{(-1;1)}^{(2;2)} \left(\frac{1}{y} - \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{x}{y^2}\right) dy$.

(шлях інтегрування не проходить через початок координат).

Завдання 26

Обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{F}$={P;Q;R} вздовж замкнутого контура L, що проходить в додатному напрямку.

Обчислювати потрібно

а). безпосередньо обчислюючи криволінійний інтеграл і

б). за допомогою формули Стокса:

1. $\vec{F} = \{xy, x, y^2\}$; $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ z = y. \end{cases}$

2. $\vec{F} = \{x, z^2, y\};\ L: \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{4} = 1; \\ z = 2x - y - 1. \end{cases}$

3. $\vec{F} = \{7z, -x, yz\};\ L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 6; \\ z = \frac{1}{3}. \end{cases}$

4. $\vec{F} = \{xz, x, z^2\};\ L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 1; \\ z = y. \end{cases}$

5. $\vec{F} = \{x - 2z, x + 3y + z, 5x + y\};\ L: \begin{cases} x + y + z = 1; \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$

6. $\vec{F} = \{x^2 - yz, y^2 - zx, z^2 - xy\};\ L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 5; \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$

7. $\vec{F} = \{y + z, z + x, x + y\};\ L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2; \\ z = 2. \end{cases}$

8. $\vec{F} = \{y^2, z^2, x^2\};\ L: \begin{cases} x + y + z = 3; \\ x = 0; y = 0; z = 0. \end{cases}$

9. $\vec{F} = \{2yz, xz, yz\};\ L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 16; \\ z = 3. \end{cases}$

10. $\vec{F} = \{y, x^2, -z\};\ L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ z = 3. \end{cases}$

11. $\vec{F} = \{x, z^2, y\};\ L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 4; \\ z = y. \end{cases}$

12. $\vec{F} = \{4y, -3z, y\};\ L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 16; \\ 4 - x - y = z. \end{cases}$

13. $\vec{F} = \{y - z, z - x, x - y\}; L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 9; \\ z = x. \end{cases}$

14. $\vec{F} = \{-y, xz, 2\};\ \ L: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9; \\ z = 4. \end{cases}$

15. $\vec{F} = \{xz, yz, z^2 - 1\};\ \ L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2; \\ z = 4. \end{cases}$

16. $\vec{F} = \{xy^2, -yx^2, 3z^2\};\ \ L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2; \\ z = 2. \end{cases}$

17. $\vec{F} = \{0, yz, z^2 - y^2\}; L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1; \\ z = 0. \end{cases}$

18. $\vec{F} = \{x + 2y, y - z, z + x\};\ \ L: \begin{cases} z = x^2 + y^2; \\ z = 9. \end{cases}$

19. $\vec{F} = \{x, y + z, z - y\}; L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1; \\ x = 2. \end{cases}$

20. $\vec{F} = \{x - y, x + y, z + x\};\ \ L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2; \\ z = 2. \end{cases}$

21. $\vec{F} = \{x + z, y + z, z - x - y\}; L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4; \\ z = 1. \end{cases}$

22. $\vec{F} = \{y, -x, z\};\ \ L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2; \\ z = 4. \end{cases}$

23. $\vec{F} = \{y, -x, z\};\ \ L: \begin{cases} z = x^2 + y^2; \\ z = 9. \end{cases}$

24. $\vec{F} = \{xyz, -x^2z, 3\}$; $L: \begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}; \\ z = 2. \end{cases}$

25. $\vec{F} = \{xy, -x^2, 3z\}; L: \begin{cases} z^2 + y^2 + x^2 = 1; \\ y = 0. \end{cases}$

26. $\vec{F} = \{x + y, z + y, 2x + 2z\}; L: \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 6; \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$

27. $\vec{F} = \{x + y + z, 2z, y - 7z\}; L: \begin{cases} 2x + 3y + z = 6; \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$

28. $\vec{F} = \{4z, x - y - x, 3y + 2z\}; L: \begin{cases} -2x + y + z - 4 = 0; \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$

29. $\vec{F} = \{2z - x, x + 2z, 3z\}; L: \begin{cases} x + 4y + z = 4; \\ x = 0, y = 0, z = 0. \end{cases}$

30. $\vec{F} = \{xy^2, -yx^2 + z, 2zy\}$; $L: \begin{cases} x^2 + y^2 = z; \\ z = 4. \end{cases}$

Завдання 27

Обчислити криволінійні інтеграли 2-го роду /1-10/

1) $\oint_C \; ydx - xdx$, *де С- еліпс* $x = acost, y = bsint$
2) $\int_{OA} xdy + ydx$, *де ОА- парабола, вісь якої* $Oy, O(0,0), A(1,2)$
3) $\int_C \; (x^2 + y^2)dx + (x^2 - y^2)dy$, *де С:* н $= 1 - |1 - x|, 0 \leq x \leq 2$
4) $\int_C \; (2a - y)dx + xy$, *де С- арка циклоїди* $x = a(t - sint), y = a(1 - cost), 0 \leq t \leq 2\pi$
5) $\int_c \; \frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}$, *де С коло* $x^2 + y^2 = a^2$
6) $\int_{AB} sinydx + sinxdy$, *де АВ-відрізок прямої між* $A(0, \pi)$ та $B(\pi, a)$.

7) $\oint_C (x+y)dx+(x-y)dy$, *де С- еліпс* $\frac{\square^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

8) $\int_C (y^2-z^2)dx+2yzdy-x^2dz$, *де С-лінія* $x=t, y=t^2, z=t^3$ $(a \leq t \leq 1)$ *має орієнтацію, що відповідає зростанню t.*

9) $\int_C ydx+zdy+xdz$, *де С-частина гвинтової лінії* $z=acosy, y=asint, z=bt$ $(0 \leq t \leq 2\pi$ з орієнтацією, що відповідає зростанню t.

10) $\int_C (y^2-z^2)dx+(z^2-x)dy+(x^2-y^2)dz$, *де С-лінія, яка обмежує ту частину сфери* $(x^2+y^2+z^2)=1$, *для якої* $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$, *з такою орієнтацією, що зовнішня поверхня цієї частини лишається зліва.*

За допомогою криволінійного інтеграла обчислити площі плоских фігур, що їх обмежують такі замкнені лінії (11-17):

11) *Еліпс* $x=acost, y=bsint, a \leq t \leq 2\pi$.
12) *Кардіоїда* $x=a(2cost-cos2t), y=a(2sint-sin2t)$.
13) *Петля декартового листа* $x^3+y^3=3axy(a>0)$.

Вказівка. *Ввести параметр t за допомогою співвідношення y=tx. Тоді* $x=\frac{3at}{t^3-1}, y=\frac{3at^2}{t^3-1}$.

14) *Петля* $(x+y)^3=axy$ *(Див. вказівку до задачі 13)).*

15) *Лемніската Бернуллі* $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$.

Вказівка. *Перейти до параметричних рівнянь з параметром φ за допомогою співвідношення* $y=xtg\varphi$.

16) *Петля* $9y^2=4x^3-x^4$.

17) *Лінія* $\rho=acos\varphi+b$ (равлик Паскаля) $a>0, b>0$.

Обчислити інтеграли за формулою Гріна (18-22):

18) $\oint_\Gamma (xy^2dy-x^2ydx$, де Γ – коло $x^2+y^2=a^2$.

19) $\oint_\Gamma (x+y)dx-(x-y)dy$, *де Г- еліпс* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

20) $\int_\Gamma 2(x^2+y^2)dx+(x+y)^2dy$, *де Г-контур трикутника з вершинами в точках A(1;1),*

B(2;2), C(1;3).

21) $\int_{\Gamma}\ (x+y+xy)dx+(\,xy+x-y)dy$, *де Г-коло* $\ x^2+y^2=ax$.

22) $\oint_{\Gamma}\ e^x[(1-cosy)dx-(y-siny)dy]$,
де $\Gamma -$ контур, що обмежує область $D=\{(x;y)|\ 0\le x\le\pi,\ \ 0\le y\le sinx\}$

Знайти фінкцію $U(x,y)$ за її повним диференціалом

$$23)\ du=\frac{ydx-xdy}{3x^2-2xy+3y^2}$$

$$24)\ du=(2x^3-xy^2)dx+(2y^3-x^2y)dy$$

$$25) du=e^ydx+(xe^y-2y)dy$$

$$26)\ du=(2xcosy-y^2sinx)dx+(2ycosx-x^2siny)dy$$

27) Обчислити роботу сталої сили $\bar{F}$, що має напрям додатньої півосі $0x$, приклад

матеріальної точки, яка рухається по дузі кола x^2+y^2
$=R^2$, розміщений в правому квадраті

28) Обчислити роботу з переміщення матеріальної точки по прямій $x=at,y=$
$bt,z=$
ct від точки $A(a,b,c)$ до точки $B(2a,2b,2c)$, виконуваного силою, модуль якої обер

пропорційний до відстані від точки M прикладання сили до площини $0xy$, в напр

напряму $\overline{OM}$.

29)Довести, що робота сили $\bar{F}=$
$(2xy;x^2)$не задежить від шляху, по якому переміщується матеріальна точка прикл

Обчислити роботу даної сили при переміщенні матеріальної точки з положення
A(1;0) в положення B(0;3)

30) Обчислити роботу при переміщенні матеріальної точки вздовж дуги еліпса
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в першому квадраті, якщо той за модулем дорівнює відстані від
точки еліпса до його центра і напрямлена до центра еліпса.

Завдання 28

1. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=(x^2-2y)\mathbf{i}+\ \ +(y^2-2x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-4,0)$ до точки $N(0,2)$.

2. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=(x^2+2y)\mathbf{i}+\ +(y^2+2x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-4,0)$ до точки $N(0,2)$.
3. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=(x^2+2y)\mathbf{i}+\ +(y^2+2x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y=2-\dfrac{x^2}{8}$ від точки $M(-4,0)$ до точки $N(0,2)$.
4. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=(x+y)\mathbf{i}+\ +2x\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=4\ (y\geq 0)$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(-2,0)$.
5. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}-y^3\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=4(x,y\geq 0)$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,2)$.
6. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=(x+y)\mathbf{i}+\ +(x-y)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y=x^2$ від точки $M(-1,1)$ до точки $N(1,1)$.
7. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=x^2y\mathbf{i}-y\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(-1,0)$ до точки $N(0,1)$.
8. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=(2xy-y)\mathbf{i}+\ +(x^2+x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=9(y\geq 0)$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(-3,0)$.
9. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=(x+y)\mathbf{i}+\ +(x-y)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж еліпса $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1(x,y\geq 0)$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,3)$.
10. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=1$ $(y\geq 0)$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(-1,0)$.
11. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=(x^2+y^2)\mathbf{i}+\ +(x^2-y^2)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кривої $L:\begin{cases}x, & 0\leq x\leq 1,\\ 2-x, & 1\leq x\leq 2\end{cases}$, від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,0)$.
12. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=2$ $(y\geq 0)$ від точки $M(\sqrt{2},0)$ до точки $N(-\sqrt{2},0)$.
13. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=xy\mathbf{i}+2y\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=1$ $(x,y\geq 0)$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(-1,0)$.
14. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж еліпса $2x^2+y^2=1$ $(y\geq 0)$ від точки $M\ \ \dfrac{1}{\sqrt{2}},0$ до точки $N\ \ -\dfrac{1}{\sqrt{2}},2$.
15. Знайти роботу сили $\mathbf{F}=(x^2+y^2)\mathbf{i}+\ +(2x^2+2y^2)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2+y^2=R^2\ (y\geq 0)$ від точки $M(R,0)$ до точки $N(-R,0)$.

16. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (y\sqrt{x^2+y^2} + \quad +x)\mathbf{i} + (y - x\sqrt{x^2+y^2})\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 1$ $(y \geq 0)$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(-1,0)$.
17. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = x^2y\mathbf{i} - xy^2\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $(x, y \geq 0)$ $x^2 + y^2 = 4$ від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,2)$.
18. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (y\sqrt{x^2+y^2} + \quad +x)\mathbf{i} + (y - \sqrt{x^2+y^2})\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж параболи $8y = 16 - x^2$ від точки $M(4,0)$ до точки $N(0,4)$.
19. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = y^2\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $(x, y \geq 0)$ $x^2 + y^2 = 9$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(0,3)$.
20. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x+y)^2\mathbf{i} - \quad -(x^2+y^2)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,1)$.
21. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x^2+y^2)\mathbf{i} + \quad +y^2\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(2,0)$ до точки $N(0,2)$.
22. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = x^2\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 9$ $(x, y \geq 0)$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(0,3)$.
23. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (y^2 - y)\mathbf{i} + \quad +(2xy + x)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кола $x^2 + y^2 = 9$ $(y \geq 0)$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(0,3)$.
24. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x+y)\mathbf{i} + \quad +(x-y)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж кривої $y = \sin x$ від точки $M(\pi,0)$ до точки $N(0,0)$.
25. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (xy - y^2)\mathbf{i} + \quad +x\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж параболи $y = 2x^2$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(1,2)$.
26. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж відрізка MN від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,3)$.
27. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = 2(xy - x)\mathbf{i} + \quad +x^2\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж $y = 2\sqrt{x}$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(1,2)$.
28. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = y\mathbf{j} - x\mathbf{i}$ при переміщенні вздовж еліпса $(x, y \geq 0)$ $x^2 + \dfrac{y^2}{9} = 1$ від точки $M(1,0)$ до точки $N(0,3)$.
29. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = x\mathbf{j} - y\mathbf{i}$ при переміщенні вздовж $y = x^3$ від точки $M(0,0)$ до точки $N(2,8)$.
30. Знайти роботу сили $\mathbf{F} = (x^2 - y^2)\mathbf{i} + \quad +(x^2+y^2)\mathbf{j}$ при переміщенні вздовж еліпса $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ $(y \geq 0)$ від точки $M(3,0)$ до точки $N(-3,0)$.

Завдання 29

Знайти функцію за її диференціалом:

1. $$du = \quad e^y + 2(2x+1)\sin 2x \quad dx + \\ + \quad xe^y + 2y \quad dy.$$

2. $$du = \quad e^y + 2x \quad dx + \\ + \quad xe^y + 4(4y+2)\cos 4y \quad dy.$$

3. $$du = \quad xy^2 + \operatorname{arctg}\frac{x}{3} \quad dx + \quad x^2 y + \sin y \quad dy.$$

4. $$du = \quad x\sqrt{y} + \cos x \quad dx + \\ +\left(\frac{x^2}{4\sqrt{y}} + \ln\frac{y+1}{5}\right)dy.$$

5. $$du = \quad x^3 y^4 + e^x(6x+1) \quad dx + \\ + \quad y^3 x^4 + y\sqrt{y^2+2} \quad dy.$$

6. $$du = \quad x\cos y + \frac{x}{x^2+1} \quad dx - \\ - \quad \frac{1}{2}x^2 \sin y + \operatorname{arctg}\frac{x+1}{3} \quad dy.$$

7. $$du = \quad x \operatorname{arctg} y + \ln\frac{x+1}{2} \quad dx + \\ +\left(\frac{x^2}{2(y^2+1)} + \sin 3y\right)dy.$$

8. $$du = \quad x\sin y + e^x(8x+4) \quad dx + \\ + \quad \frac{1}{2}x^2\cos y + \operatorname{tg}(y+1) \quad dy.$$

9. $$du = \quad e^y + 2xe^{x^2} \quad dx + \quad xe^y + \arccos\frac{y}{7} \quad dy.$$

10. $$du = \quad \sqrt{xy} + \frac{1}{3x+5} \quad dx + \\ +\left(\frac{1}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \arcsin\frac{y}{6}\right)dy.$$

11. $$du = \quad x\cos y + 3(3x+3)\cos 3x \quad dx + \\ + \quad \frac{1}{2}x^2 \sin y + e^{-y} \quad dy.$$

12. $$du = \ (xy)^3 + \ln\frac{x+1}{4} \ \ dx + \\ + \ \frac{3}{4}x^4y^2 + y\sin y^2 \ \ dy.$$

13. $$du = \ (xy)^2 + \frac{x}{x^2+1} \ \ dx + \\ + \ \frac{2}{3}x^3y + \operatorname{arctg}\frac{y}{2} \ \ dy.$$

14. $$du = \ e^y + 2(2x+1)\sin 2x \ \ dx + \\ + \ xe^y + 2y \ \ dy.$$

15. $$du = \ \sqrt{xy} + \frac{1}{3x+5} \ \ dx + \\ +\left(\frac{1}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{y}} + \arcsin\frac{y}{6}\right)dy.$$

16. $$du = \ x\sqrt{y+1} + \operatorname{arctg}\frac{x+1}{5} \ \ dx + \\ +\left(\frac{x^2}{4\sqrt{y+1}} + \frac{y^2}{y+1}\right)dy.$$

17. $$du = \ x\cos y^2 + 2x\sin x^2 \ \ dx + \\ + \ yx^2\sin y^2 + (3y+4)e^y \ \ dy.$$

18. $$du = \ e^y + 2(2x+1)\sin 2x \ \ dx + \\ + \ xe^y + 2y \ \ dy.$$

19. $$du = \ e^{x+y} + \frac{2x}{x^2+1} \ \ dx + \\ + \ e^{x+y} + 3(3y+5)\sin 3x \ \ dy.$$

20. $$du = \ \sqrt{x^3(y+1)} + 2(2x+7)\cos 2x \ \ dx + \\ +\left(\frac{\sqrt{x^5}}{5\sqrt{y+1}} + e^{-y}\right)dy.$$

21. $$du = \left(\arccos y + \frac{x^2}{x+2}\right)dx + \\ +\left(\frac{x}{\sqrt{1-y^2}} + (4y+5)e^y\right)dy.$$

22. $$du = \ \operatorname{arctg} y + \ln\frac{x+1}{6} \ \ dx + \\ +\left(\frac{x}{1+y^2} + \frac{y^3}{y^2+2}\right)dy.$$

23. $$du = \ e^y + 2x\sqrt{x^2+1}\ \ dx + \\ + \ xe^y + \arcsin\frac{x}{8}\ \ dy.$$

24. $$du = \ (xy)^{\frac{4}{3}} + \operatorname{arctg}\frac{x+1}{9}\ \ dx - \\ - \ \frac{4}{7}x^2(xy)^{\frac{1}{3}} + 4y^3\sin y^4\ \ dy.$$

25. $$du = \left(\cos y + \frac{x^2+2}{x^2+1}\right)dx + \\ + \ -x\sin y + \arccos\frac{y}{10}\ \ dy.$$

26. $$du = \ \ln(y+1) + 2x\ln(2x+1)\ \ dx + \\ +\left(\frac{x}{y+1} + \operatorname{tg}^2 y\right)dy.$$

27. $$du = \ 2^y + 2x\arccos\frac{x}{5}\ \ dx + \\ +\left(x2^y\ln 2 + \frac{1}{2\sqrt{y}}e^{\sqrt{y}}\right)dy.$$

28. $$du = \ e^y + \cos 3x\ \ dx + \\ + \ xe^y + 5y\ \ dy.$$

29. $$du = \ \cos y + (2x+1)e^x\ \ dx + \\ + \ -x\sin y + 2y\ \ dy.$$

30. $$du = \ e^y + 2(2x+1)\sin 2x\ \ dx + \\ + \ xe^y + 2y\ \ dy.$$

3. Визначення характеру векторного поля

Якщо $rot\vec{F} = 0$, то поле є потенціальним і його потенціал $u(x,y,z)$ визначається криволінійним інтегралом(2.13), (2.14). При цьому

$$\vec{F} = -grad\ u = -\vec{\imath}\frac{\partial u}{\partial x} - \vec{\jmath}\frac{\partial u}{\partial y} - \vec{k}\frac{\partial u}{\partial z}.$$

Якщо поле $\vec{F}$ задовольняє умові $div\vec{F} = 0$, то воно є трубчастим (соленоїдальним).

Якщо для поля $\vec{F}$ виконуються дві умови $rot\vec{F} = 0$ і $div\vec{F} = 0$, то воно є гармонічним і його потенціал $u(x,y,z)$ задовольняє рівнянню Лапласа:

$$div(grad\, u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Приклад 3.1. Дати характеристику векторному полю $\vec{E} = \frac{e^{\vec{r}}}{r^3}$, де

$\vec{r} = \vec{\imath}x + \vec{\jmath}y + \vec{k}z$, радіус-вектор точки $P(x, y, z)$, в якій розглядається поле; $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$—відстань від початку координат, де розміщений заряд e, до точки спостереження $P(x, y, z)$.

<u>Розв'язок.</u> Потрібно перевірити, чи виконується умова $rot\vec{\mathrm{E}} = 0$ або $div\vec{\mathrm{E}} = 0$, або обидва одночасно.

А. Перевіримо, чи поле соленоїдальне. Для цього обчислимо

$$div\vec{\mathrm{E}} = e\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right\}.$$

Розглянемо $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}\right) = \frac{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3} - \frac{3}{2}2x^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}{(x^2+y^2+z^2)^3} = \frac{y^2+z^2-2x^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$.

Так як x, y, z входять симетрично в $\vec{E}$, то $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right) = \frac{x^2+z^2-2y^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}$;

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right) = \frac{x^2+y^2-2z^2}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^5}}.$$

Додаючи всі три похідні, отримуємо $div\vec{\mathrm{E}} = 0$. Звідси слідує, що поле — соленоїдальне.

Б. Обчислимо $rot\vec{\mathrm{E}} = \vec{\imath}e\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{y}{r^3}\right)\right) + \vec{\jmath}e\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right) + \vec{k}e\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^3}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^3}\right)\right)$;

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(r^{-3}) = -3r^4\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{-3x}{r^5};$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(r^{-3}) = \frac{-3y}{r^5};$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r^3}\right) = \frac{\partial}{\partial z}(r^{-3}) = \frac{-3z}{r^5}.$$

Підставивши ці похідні в вираз для $rot\vec{\mathrm{E}}$, отримуємо $rot\vec{\mathrm{E}} = 0$.

Звідси слідує, що поле—потенціальне і воно має потенціал $u(x, y, z)$ такий, що $\vec{\mathrm{E}} = -grad\, u$.

Так як це поле ще й трубчасте($div\vec{\mathrm{E}} = 0$), то воно—гармонічне.

Знайдемо потенціал цього поля за формулою (2.13).

$$u(x, y, z) = \int\limits_{(1;0;0)}^{(x;y;z)} (\vec{\mathrm{E}}; dr) = \frac{1}{2} \int\limits_{(1;0;0)}^{(x;y;z)} \left(\frac{e}{r^3}\right) d(x^2 + y^2 + z^2) =$$

$$= \quad e \int\limits_{(1;0;0)}^{(x;y;z)} \frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{2\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} = -\frac{e}{r} \mathrm{I}_{(1;0;0)}^{(x;y;z)} = e - \frac{e}{r}\ , (c = e).$$

Таким чином, потенціал його поля описується функцією

$$u(x, y, z) = -\frac{e}{r} \equiv -\frac{e}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

Це потенціал кулонівського поля, створюваного зарядом e, що розташований в початку координат. $\vec{\mathrm{E}} = -grad\,(-\frac{e}{r})$—напруженість електричного поля.

Функція $u = \frac{e}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}$ описує потенціал кулонівського поля, яке створює заряд e, розташований в точці $(x_0; y_0; z_0)$.

Завдання 30

Перевірити, що поле $\vec{F}$ є потенціальним і знайти його потенціал.

1. $\vec{F} = \{yz; xz; xy\}$.
2. $\vec{F} = \{2x + 3yz; 2y + 3xz; 2z + 3xy\}$.
3. $\vec{F} = \{2xy + z; x^2 + z; x + y\}$.
4. $\vec{F} = \left\{\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}; \frac{y}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}; \frac{z}{\sqrt{1+x^2+y^2+z^2}}\right\}$.
5. $\vec{F} = \{2xy + z^2; 2yz + x^2; 2zx + y^2\}$.
6. $\vec{F} = \{2y; 2x + 1; 8z\}$.
7. $\vec{F} = \{4x + 4y + 8z; 2y + 4x + 6z; 6y + 8z\}$.
8. $\vec{F} = \{x^2 + y + 2z;\ y^2 + z + x;\ z^2 + y + 2x\}$.

9. $\vec{F} = \{2y + yz + 2x + zx + 1; 8z + xy\}$.

10. $\vec{F} = \{2x + 10z; 2y + 8z; 10x + 8y + 2z\}$.

11. $\vec{F} = \left\{\frac{2x}{x^2+y^2}; \frac{2y}{x^2+y^2} + 2z; 2y\right\}$.

12. $\vec{F} = \{y + z; x + z; x + y\}$.

13. $\vec{F} = \{2xy + 3z^2; 4yz + x^2; 6xz + 2y^2\}$.

14. $\vec{F} = \{y + z + yz; x + z + xz; x + y + xy\}$.

15. $\vec{F} = \left\{\frac{2x}{x^2+y^2} + yz; \frac{2y}{x^2+y^2} + xz; xy\right\}$.

16. $\vec{F} = \{4y + z; 2y + 4x; 2z + x\}$.

17. $\vec{F} = \left\{\frac{2x}{x^2+y^2}; 2z; \frac{2z}{x^2+y^2} + 2y\right\}$.

18. $\vec{F} = \{x^2 + z; 2yz^2; 2zy^2 + x\}$.

19. $\vec{F} = \{2x(y^2 + z^2); 2y(x^2 + z^2); 2z(x^2 + y^2)\}$.

20. $\vec{F} = \{y + z; x + 2z; 2y + x\}$.

21. $\vec{F} = \{2xy; x^2 + 2yz; y^2\}$.

22. $\vec{F} = \{y^2 + 8zx; 2xy + 2z^2 + 4zy + 4x^2\}$.

23. $\vec{F} = \{2xyz; x^2z; x^2y\}$.

24. $\vec{F} = \{8x - 5yz; 8y - 5xz; 8z - 5xy\}$.

25. $\vec{F} = \{y^2z; 2xyz; xy^2\}$.

26. $\vec{F} = \{ye^{xy}; xe^{xy}; 2z\}$.

27. $\vec{F} = \{2x + 2y + z; 2x + 6y + 2z; x + 2y + 2z\}$.

28. $\vec{F} = \{yze^{xy}; xze^{xy}; e^{xy}\}$.

29. $\vec{F} = \{2x + y + 5z; x + 4z; 5x + 4y\}$.

30. $\vec{F} = \left\{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + z^2; \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}; 2zx\right\}$.

Завдання 31

1) Знайти роботу поля $\vec{F} = \left(x^2 + 2xy; xy - y^2\right)$при переміщенні вздовж параболи $y = x^2$ від точки A(3;9) до точки B(1;1).

2) Показати, що поле $\vec{F} = \frac{x\vec{j} - y\vec{i}}{x^2 + y^2}$ потенціальне, та знайти його потенціал.

3) Знайти роботу вектора $\vec{F} = \left(\frac{1}{x}; -\frac{1}{y}\right)$ вздовж кривої $x = a\cos t, y = a\sin t, 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$ від точки A(a;0) до точки B(0;a).

4)Показати ,що поле $\overline{F}=(yz;xz;xy)$ потенціальне ,знайти його потенціал.

5) Знайти роботу поля $\overline{F}=(xy;yz,zx)$ вздовж кривої $x=\cos t, y=\sin t, z=1$ від точки $A(1;0;1)$ до точки $B(0;1;1)$.

6) Показати ,що поле $\overline{F}=(2x+3yz;2y+3xz;2z+3xy)$ потенціальне ,та знайти його потенціал.

7) Знайти роботу сили $\overline{F}=(x^2y;x^3)$ вздовж контура ,обмеженого кривими $y^2=x, y=x^2$, при обході проти годинникової стрілки.

8) Показати ,що поле $\overline{F}=(2xy+z;x^2+z;x+y)$ потенціальне ,та знайти його потенціал.

9) Знайти роботу поля $\overline{F}=(x^2-2xy;2xy+y^2)$ вздовж кривої $y=x^2$ від точки А (1;1) до точки В (2;4).

10) Показати, що поле $\overline{F}=(2xy+z^2;2yz+x^2;2zx+y^2)$ потенціально, та знайти його потенціал.

11) Знайти роботу поля $\overline{F}=((x-y)^2;(x+y)^2)$ вздовж ламаної ОАВ, де О(0;0), А(2;0), В(4;2).

12) Показати, що поле $\overline{F}=(2y;2x+1;8z)$ потенціальне, та знайти його потенціал.

13) Знайти роботу поля $\overline{F}=(2a-y;x)$ вздовж кривої $x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t), a>0, 0\le t\le 2\pi$ в напрямку зростання параметру.

14) Показати, що поле $\overline{F}=(4x+4y+8z;2y+4x+6z;6y+8x)$ потенціальне, та знайти його потенціал.

15) Знайти роботу поля **F** = $(-x^2y; xy^2)$ вздовж кривої $x^2+y^2=R^2$ проти годинникової стрілки.

16) Показати, що поле **F** = $(x^2+y+2z; y^2+z+x; z^2+y+2x)$ потенціальне та знайти його потенціал.

17) Знайти роботу поля **F** = $(x^2- y^2; xy)$ вздовж відрізка АВ від А (1;0) до В (3;4).

18) Показати, що поле **F** = (2y+yz; 2x+zx; 8z+yx) потенціальне та знайти його потенціал.

19) Знайти роботу поля **F** = (y; -(y+x²)) вздовж кривої y = 2x-x² від точки A (2;0) до B (0;0).

20) Показати, що $\overline{F}$ =(2x+10z; 2y+8z; 10x+8y+2z) потенціальне , та знайти його потенціал.

21) Знайти роботу сили $\overline{F} = (-xy^2; x^2y)$,вздовж кривої $x = \sqrt{\cos t}, y = \sqrt{\sin t}$ в напрямку зростання параметру.

22) Показати, що поле $\overline{F} = (y + z; x = z; x + y)$ потенціальне, та знайти його потенціал.

23) Знайти роботу поля $\overline{F} = (y; z; x)$ вздовж кривої $x = a\cos t, y = a\sin t, z = 6t, 0 \le t \le 2\Pi$ в напрямку зростання параметру.

24) Показати, що поле $\overline{F} = (2xy + 3z^2; 4yz + x^2; 6xz + 2y^2)$ потенціальне, та знайти його потенціал.

25) Знайти роботу поля $\overline{F} = (x^2; y; \cos z)$ вздовж кривої $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = 2t$, $a > 0$ від точки $A(a;0;0)$ до точки $B(0;-a;3\pi)$.

26) Показати, що поле $\overline{F} = (x + y + yz; x + z + xz; x + y + xy)$ потенціальне, та знайти його потенціал.

27) Знайти роботу поля $F = (-y^2(x^{5/3} + y^{5/3})^{-1}; x^2(x^{5/3} + y^{5/3}))$ вздовж кривої $x = R\cos^3 t$, $y = R\sin^3 t$ від точки $A(R;0)$ до точки $B(0;R)$.

28) Показати, що поле $\overline{F} = (4y + z; 2y + 4x; 2z + x)$ потенціальне, та знайти його потенціал.

29) Знайти роботу поля $\overline{F} = (y^2 - z^2; 2yz; -x^2)$ вздовж кривої $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, $0 \le t \le 1$ в напрямку зростання параметру.

30) Показати, що поле $\overline{F} = (x^2 + z; 2yz^2; 2zy^2 + x)$ потенціальне, та знайти його потенціал.

31) Знайти роботу поля $\overline{F} = (y; 2x)$ вздовж контура ромба, сторони якого є прямі $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = \pm 1$, $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = \pm 1$ (обхід контура проти годинникової стрілки).

32) Показати, що поле $\overline{F} = (y + z; x + 2z; 2y + x)$ потенціальне, та знайти його потенціал.

4. ПОВЕРХНЕВІ ІНТЕГРАЛИ

4.1. Поверхневі інтеграли 1-го роду

Формули зведення поверхневого інтеграла до подвійного

Довільна гладка двостороння поверхня S може бути задана або параметрично:

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases} \qquad (4.1)$$

M(x,y,z)$\epsilon S \Leftrightarrow (u,v)\epsilon\Delta$.

Або явно

$$z = z(x,y), (x,y)\epsilon D_{xy} \subset x0y. \qquad (4.2)$$

Або неявно

$$F(x,y,z)=0 \qquad (4.3)$$

Відповідно поверхневий інтеграл 1-го роду $\iint_S f(x,y,z)ds$ *можна звести до подвійного інтеграла так.*

Для поверхні, яку задано параметрично

$$\iint_S f(x,y,z)ds = \iint_D f(x(u,v);y(u,v);z(u,v))\sqrt{EG-F^2}dudv \quad (4.4)$$

Де $F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$.

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \ G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2$$

Для поверхні, яку задано явно

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2}\,dxdy \qquad (4.5)$$

$$E = 1+\left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2, G = 1+\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2, F = \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y}.$$

Для поверхні, яку задано неявно маємо:

Або

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{xy}} f(x,y,z(x,y))\frac{|grad\ F|}{|F_z'|}dxdy$$

Де $|grad\ F| = \sqrt{(F_x')^2 + (F_y')^2 + (F_z')^2}$,

І в подвійному інтегралі, який маємо в правій частині потрібно виключити z виходячи з рівності

F(x,y,z)=0,

Або

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{xz}} f(x;y(x,y);z)\frac{|grad\ F|}{|F_y'|}dxdz$$

Де D_{xz}*-проекція поверхні на площину 0xz, і в правій частині слід виключити y виходячи з рівності*

F(x,y,z)=0

Або

$$\iint\limits_S f(x,y,z)ds = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(x,y);y;z)\frac{|grad\ F|}{|F_x'|}dydz$$

Де D_{yz}*-проекція поверхні на площину 0yz, і в правій частині слід виключити x, виходячи з рівності*

F(x,y,z)=0 .

Застосування поверхневих інтегралів

Площа 6 поверхні S знаходиться за формулою:

$$6 = \iint\limits_S ds$$

Приклад 4.1.1. Обчислити площу частини конуса $10z^2 = x^2 + y^2$, що знаходиться між площинами $z = 1$; $z = 5$.

Розв'язок. Формула для обчислення площі поверхні S – поверхневий інтеграл першого роду $\vartheta = \iint_S dS$. Так як частина конуса знаходиться між площинами

$z = 5$ і $z = 1$, тоді із рівняння поверхні конуса виразимо z як функцію змінних x, y у вигляді

$z = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{10}}$

Область D, на яку проектується поверхня частини конуса – кільце внутрішнього $\sqrt{10}$ та зовнішнього $5\sqrt{10}$ радіусів.

$z_x = \frac{x}{\sqrt{10(x^2+y^2)}}$; $z_y = \frac{y}{\sqrt{10(x^2+y^2)}}$.

Підставляючи z_x і z_y у формулу (3.2), де f=1, маємо

$$\sigma = \iint_S ds = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}dxdy = \sqrt{\frac{11}{10}}\iint_D dxdy = \sqrt{\frac{11}{10}}S_D$$

Де S_D – площа кільця. Ця площа рівна різниці площин двох кіл:

$S_D = \pi\{(5\sqrt{10})^2 - (\sqrt{10})^2\} = 240\pi$

Відповідь:$\sigma = 24\pi\sqrt{110}$.

Обчислення маси поверхні

Нехай $\gamma(x, y, z)$ - густина розподілу маси на поверхні S (поверхнева густина) і поверхня S – двостороння, кусково-гладка і вимірна. Розіб'ємо S на частини $\mathrm{S} = \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{S}_{\mathrm{n}}$, так, що S_i і S_j не мають спільних внутрішніх точок, якщо $i \neq j$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, а межа відокремлює всі частини S_i одну від одної,- кусково-гладка. При цьому усі S_i повинні бути вимірними. Позначимо через $\mu(S_i)$ площу S_i, $i = \overline{1,n}$. На кожній множині S_i розглянемо довільну точку M_i з координатами (x_i, y_i, z_i):

$$M_i(x_i, y_i, z_i) \in S_i$$

Розглянемо суму $\sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i, y_i, z_i)\mu(S_i)$ за умови, що $\max_{1 \le i \le n} \mu(S_i) \to 0$, не залежала від того, яким чином поверхню розбито на частини S_i, $i = \overline{1, n}$, та від того, яким чином вибрано точки $M_i \in S_i$. У цьому разі зазначена границя і є інтегралом $\iint_S \gamma(x, y, z)ds$, тоді за умови $\max_{1 \le i \le n} \mu(S_i) \to 0$ кожний член $\gamma(M_i)\mu(S_i)$ прямує до маси частини поверхні S_i, а вся сума – до маси поверхні S.

Отже, якщо існує інтеграл $\iint_S \gamma(x, y, z)ds$, масу *m(S)* поверхні S з густиною $\gamma(x, y, z)$ можна обчислити за формулою:

$$m(S) = \iint_S \gamma(x, y, z)ds \qquad \textbf{(4.6)}$$

<u>Приклад 4.1.2</u>: Визначити масу півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rx$, $0 \le x \le R$, якщо її поверхнева густина в точці пропорційна до її відстані від початку координат.

<u>Розв'язання</u>: Нехай *k*– заданий коефіцієнт пропорційності, тоді густина розподілу маси на півсфері **(рис. 4.1)** обчислюється за формулою $\gamma(x, y, z) = k\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Звідси $m(S) = k\iint_S \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}ds$.

Враховуючи, що $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz = (x - R)^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$, для S маємо:

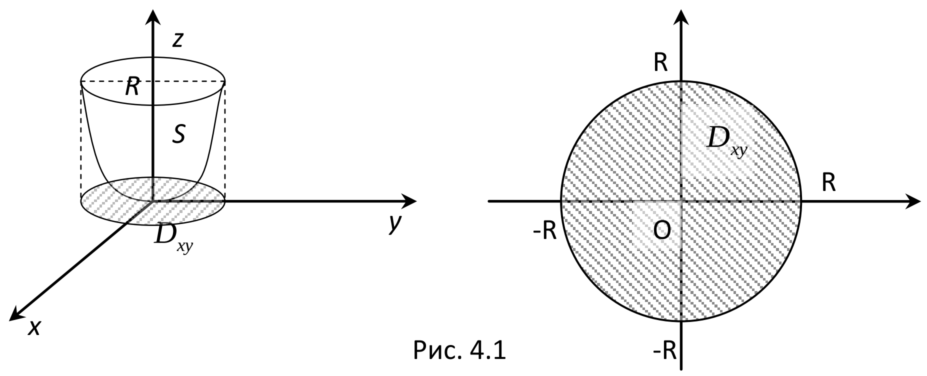


Рис. 4.1

$F'_x = 2(x-R)$, $F'_y = 2y$, $F'_z = 2z$;

$|gradF| = \sqrt{2(x-R)^2 + y^2 + z^2} = 2R.$

Отже, $m(S) = k\iint\limits_{D_{yz}} \sqrt{2Rx}\,\frac{2Rdzdy}{2|x-R|} = kR\sqrt{2R}\iint\limits_{D_{yz}} \frac{\sqrt{x}}{R-x}dydz.$

Виключаючи з рівності $(x-R)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ змінну *x,* дістанемо $x = R - \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}$, оскільки $x \le R$. Перейдемо до полярної системи координат: $y = \rho\cos\varphi$, $z = \rho\sin\varphi$, $|I| = \rho$.

Рівняння кола, що обмежує множину D_{yx} знаходимо змінну *x*, виключаючи з системи $\begin{cases} x = R, \\ (x-R)^2 + y^2 + z^2 = R^2 \end{cases}$;

$y^2 + z^2 = R^2 \Rightarrow \rho = R$,

Таким чином,

$$m(S) = k\iint\limits_S \sqrt{x^2+y^2+z^2}dS = kR\sqrt{2R}\iint\limits_{D_{yz}} \frac{\sqrt{R-\sqrt{R^2-y^2-z^2}}}{\sqrt{R^2-y^2-z^2}}dydz = kR\sqrt{2R}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^R \rho\frac{\sqrt{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d\rho =$$

$$= -\pi k(2R)^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^R \frac{\sqrt{R-\sqrt{R^2-\rho^2}}}{\sqrt{R^2-\rho^2}}d(R^2-\rho^2) = -\pi k(2R)^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^R \frac{\sqrt{R-t}}{t}tdt = \pi(2R)^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^R (R-t)^{\frac{1}{2}}d(R-t) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi kR^3$$

Де $t = \sqrt{R^2-\rho^2}$.

Відповідь: $m(S) = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi kR^3$.

Механічні моменти поверхні

Так само, як і масу, можна обчислювати статичні моменти поверхні *S:*

$$M_l^{[k]} = \iint\limits_S \gamma(x,y,z) r_l^k(x,y,z)dS, \qquad \textbf{(4.7)}$$

де $r_l(x,y,z)$ - відстань від точки $M(x,y,z)\in S$ до об'єкта l, відносно якого обчислюється момент $M_l^{[k]}$; k- степінь момента ($k=0,1,2,\ldots$).

У частинному випадку маса $m(S)=M_l^{[0]}$ для довільного l; статичні моменти (моменти першого степеня)

$$M_l = M_l^{[1]} = \iint_S \gamma(x,y,z) r_l(x,y,z) dS, \qquad \textbf{(4.8)}$$

І моменти інерції (моменти другого степеня)

$$I_l = M_l^{[2]} = \iint_S \gamma(x,y,z) r_l^{\,2}(x,y,z) dS, \qquad \textbf{(4.9)}$$

Наприклад, момент інерції поверхні відносно початку координат

$$I_O = \iint_S \gamma(x,y,z)(x^2+y^2+z^2) dS,$$

або відносно осі Oz

$$I_Z = \iint_S \gamma(x,y,z)(x^2+y^2) dS,$$

Звідси, зокрема, дістають тотожність

$$I_X + I_Y + I_Z = 2I_O,$$

Статичний момент відносно площини xOy

$$M_{xy} = \iint_S z\gamma(x,y,z) dS;$$

Відносно осі Ox

$$M_X = \iint_S \gamma(x,y,z)\sqrt{z^2+y^2}\, dS, \text{ тощо.}$$

З допомогою статичних моментів можна дістати формули для обчислення координат центра тяжіння поверхні:

$$x_c = \frac{M_{yz}}{m(S)}; \quad y_c = \frac{M_{xz}}{m(S)}; \quad z_c = \frac{M_{xy}}{m(S)}; \qquad \textbf{(4.10)}$$

Зауважимо, що коли поверхня S однорідна , тобто $\gamma(x,y,z) \equiv \gamma - const,$ то скорочуючи сталу γ у правих частинах співвідношень **(4.10)**, маємо:

$$x_c = \frac{\iint\limits_S x dS}{\iint\limits_S dS}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_S y dS}{\iint\limits_S dS}; \quad z_c = \frac{\iint\limits_S z dS}{\iint\limits_S dS}; \qquad \textbf{(4.11)}$$

(для однорідної поверхні S)

Приклад 4.1.3. Знайти центр тяжіння (рис 4.2) конічної поверхні

$z^2 = x^2 + y^2$ $\quad (y \geq 0, z \in [0; H])$, якщо її густина в кожній точці $M(x,y,z)$ визначається за формулою $\gamma(M) = 1 + z^2$.

Розв'язання. Враховуючи, що $z \geq 0$, запишемо рівняння поверхні у вигляді

$z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

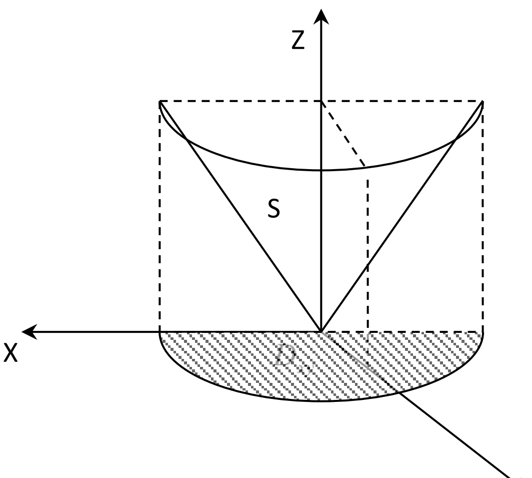


Рис. 4.2

Тоді

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 2;$$

$$m(S) = \iint\limits_S \sqrt{1 + z^2} dS = \sqrt{2} \iint\limits_{D_{xy}} (1 + x^2 + y^2) dxdy =$$

$$= \begin{vmatrix} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi, |I| = \rho \end{vmatrix} = \sqrt{2}\int\limits_0^{\pi} d\varphi \int\limits_0^{H} \rho(1 + \rho^2) d\rho = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi H^2 (H^2 + 2).$$

$$M_{yz} = \iint\limits_S x(1 + z^2) dS = \sqrt{2}\iint\limits_{D_{xy}} x(1 + x^2 + y^2) dxdy = 0$$

$$M_{xz} = \iint\limits_S y(1 + z^2) dS = \sqrt{2}\int\limits_0^{\pi} \sin\varphi d\varphi \int\limits_0^{H} \rho^2 (1 + \rho^2) d\rho = 2\sqrt{2}(\rho^{\frac{3}{3}} + \rho^{\frac{5}{5}})\Bigg|_0^H = \frac{2\sqrt{2}}{15} H^3 (3H^3 + 5).$$

$$M_{xy} = \iint_S z(1+z^2)dS = \sqrt{2}\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^H \rho^2(1+\rho^2)d\rho = \frac{\sqrt{2}}{15}\pi H^3(3H^2+5).$$

<u>**Відповідь:**</u> $C(0;\frac{3H(3H^2+5)}{15\pi(H^2+2)};\frac{4H(3H^2+5)}{15\pi(H^2+2)})$ - центр тяжіння поверхні.

Сили, що діють у полі матеріальної поверхні

Нехай, як і раніше, $\gamma(x,y,z)$ - густина розподілу маси на поверхні S, $A(x_0,y_0,z_0)$- матеріальна точка маси m_0, яка не належить поверхні S. Потрібно знайти силу $\vec{F}_A$, з якою точка притягається поверхнею S. Точка A приягається довільною точкою $M(x,y,z)$із силою $\vec{F}_A(M)$, яка співнапрямлена з вектором $\overrightarrow{AM}$, причому $\left|\vec{F}_A(M)\right| = \gamma_0 \frac{m_0 m}{r^2(M)}$, де γ_0- гравітаційна стала, m- маса точки M і $r(M) = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$.

Напрямні косинуси сили $\vec{F}_A$ знаходяться за формулами

$$\cos\alpha = \frac{x-x_0}{r(M)}; \quad \cos\beta = \frac{y-y_0}{r(M)}; \quad \cos\gamma = \frac{z-z_0}{r(M)};$$

Звідси $\vec{F}_A = \left|\vec{F}_A\right|(\cos\alpha;\cos\beta;\cos\gamma) = \gamma_0 m_0 (\frac{x-x_0}{r^3(M)};\frac{y-y_0}{r^3(M)};\frac{z-z_0}{r^3(M)})$. **(4.12)**

Якщо маємо систему матеріальних точок $M_1, M_2, ..., M_n$, то на точку A діють сили $\vec{F}_A(M_1), \vec{F}_A(M_2), ..., \vec{F}_A(M_n)$, рівнодійна яких є сила $\vec{F}_A(\sum \ ) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_A(M_i)$.

У випадку неперервно розподіленої на поверхні S маси, що поверхню можна розбити на частини ділянки ΔS_i (тобто $S = \bigcap_{i=1} \Delta S_i$ і $\Delta S_i \bigcap \Delta S_j$ не містять внутрішніх точок цих множин, якщо $i \neq j$) маса кожної частини ΔS_i знаходиться за формулою $m(\Delta S_i) = \gamma(x_i,y_i,z_i)\mu(\Delta S_i)$, де $\mu(\Delta S_i)$- площа, а $M_i(x_i,y_i,z_i)$- деяка точка множини ΔS_i. Тоді сила , з якою точка A притягається ділянкою ΔS_i матеріальної поверхні S, наближено дорівнює $\vec{F}_A(\Delta S_i) = \gamma_0 m_0 \gamma(M_i)\mu(\Delta S_i)(\frac{x_i - x_0}{r^3(M_i)}; \frac{y_i - y_0}{r^3(M_i)}; \frac{z_i - z_0}{r^3(M_i)})$.

Підсумовуючи $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_A(\Delta S_i)$, дістаємо інтегральну суму поверхневого інтеграла 1-ого роду за кожною з координат. Очевидно, що ця сума за умови $\max_{1\le i\le n} \mu(\Delta S_i) \to 0$ прямує до рівнодійної сили, з якою точка A притягається до поверхні S . Водночас за кожною з координат відповідна сума збігається до поверхневого інтеграла (якщо такий існує) 1-ого роду:

$$\vec{F}_A = \gamma_0 m_0 (a_x; a_y; a_z),$$

де

$$a_x = \iint_S \frac{x - x_0}{r^3(M)} \gamma(x; y; z) dS;$$

$$a_y = \iint_S \frac{y - y_0}{r^3(M)} \gamma(x; y; z) dS; \qquad \textbf{(4.13)}$$

$$a_z = \iint_S \frac{z - z_0}{r^3(M)} \gamma(x; y; z) dS;$$

Де γ_0 - гравітаційна стала; m_0- маса точки $A(x_0; y_0; z_0)$; $\gamma(x; y; z)$- поверхнева густина на поверхні S у точці $M(x; y; z)$ $r(M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$.

Приклад 4.1.4. Нехай S – матеріальна однорідна поверхня ($\gamma - const$), що є бічною поверхнею прямого кругового циліндра радіусом R і висотою H. Знайти силу $\vec{F}_0$, з якою поверхня S притягає матеріальну точку масою m , що міститься в центрі основи циліндра.

Розв’язання. Виберемо систему координат таким чином, щоб її центр збігався з точкою, згаданою в умові, а вісь аплікат – із віссю циліндра. Тоді рівняння поверхні S матиме вигляд:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ 0 \le z \le H \end{cases}$$

Гравітаційний потенціал поверхні

Сила,з якою матеріальна точка $A(x_0,y_0,z_0)$ масою m_0 притягається до іншої матеріальної точки $M(x,y,z)$ масою m, знаходиться за формулою /4.12/. Поділивши всі частини цієї рівності на m_0, дістанемо, я неважко помітити, вектор, кожна координата якого є частинна похідна відповідно за x_0, y_0 і z_0 функції

$$W_A\left(M\right) = \gamma_0 \frac{m}{r(M)}\ W_A(M) = \gamma_0 \frac{m}{r(M)}, \text{ де } r(M) = \left|\overline{AM}\right|$$

Ця функція називається гравітаційним потенціалом поля тяжіння точки М у точці А. Інакше кажучи, $\overline{F}_A(M) = m_0 grad W_A(M)$.

Повторюючи наведені на с.33 міркування для $\overline{F_A}(M)$, дістанемо формулу для обчислення гравітаційного потенціалу поверхні S у точці А (точніше кажучи гравітаційного потенціалу поля тяжіння цієї матеріальної поверхні):

$$W_A = \gamma_0 \iint_S \frac{\gamma(x,y,z)dS}{\sqrt{\left(x-x_0\right)^2 + \left(y-y_0\right)^2 + \left(z-z_0\right)^2}}. \qquad /4.13/$$

де $\gamma(x,y,z)$ - густина розподілу маси на поверхні S.

Приклад 4.1.5 За тих самих умов, що й у попередньому прикладі 3, знайти гравітаційний потенціал поверхні S у центрі основи даного циліндра.

Розв'язання. Виберемо систему координат таку саму, як і в попередньому прикладі 3. Тоді, задаючи поверхню S параметрично

$$x = R\cos t,\ y = R\sin t,\ z = z \quad \left(0 \le t \le 2\pi,\ 0 \le z \le H\right),$$

маємо

$$W_0 = \gamma_0\gamma \iint_0 \frac{dS}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \gamma_0\gamma R \int_0^{2\pi} dt \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{z^2+R^2}} = 2\pi\gamma_0\gamma R \ln\left(z + \sqrt{z^2+R^2}\right)\Big|_0^H =$$

$$= 2\pi\gamma_0\gamma R \ln\left(\frac{H}{2} + \sqrt{\left(\frac{H}{R}\right)^2 + 1}\right)$$

Відповідь. $W_0 = 2\pi\gamma_0\gamma R \ln\frac{H+l}{R}$, де γ_0 - гравітаційна стала; γ - стала густини бічної поверхні циліндра.

ЗАВДАННЯ 32

Знайти момент інерції поверхні S відносно таких об'єктів /1-9/:

1/ Вісь Ox, якщо S – сегмент сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$, який відтинається площиною $z=H$ $(H<R)$ і $\gamma(x,y,z)\equiv 1$.

2/ Вісь Oz, якщо S – параболоїд $2z=x^2+y^2$ $(z\le 1)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)\equiv 1$.

3/ Площина xOy якщо S – частина еліпсоїда

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ $(z\ge 0)$ з поверхневою густиною $\rho(x,y,z)=z$

4/ Початок координат , якщо S – повна поверхня куба $\max\{|x|,|y|,|z|\}=a>0$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)\equiv 1$

5/ Початок координат, якщо S – частина площини $x+y+z=1$ $(x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0)$ з поверхневою густиною $\gamma\equiv 1$.

6/ Початок координат , якщо S – поверхня циліндра $x^2+y^2=R^2,\ 0\le z\le H$ з поверхневою густиною $\gamma\equiv 1$.

7/ Вісь Oz, якщо S – однорідна півсфера $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z\ge 0, \gamma\equiv \cos t\ne 1)$

8/ Координатні осі, якщо S – частина конічної поверхні

$z^2=\frac{H}{R}\left(x^2+y^2\right)$ $(z\le H)$ зі сталою поверхневою густиною γ

9/ Пряма (l) $\frac{x}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-b}{0}$, якщо S – частина однорідної поверхні конуса.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0(z\in[0,c],\gamma-const)$$

Знайти центр мас поверхні S з густиною $\gamma=\gamma(x;y;z)$ розподілу маси на ній /10-15/

10/ S - сегмент,який відтинає площину $z=H$ на кулі

$$x^2+y^2+z^2=R^2(H<R:\gamma-const)$$

11/ S - параболічна оболонка $az=x^2+y^2(0\le z\le a,\gamma=1)$

12/ S - частина конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$, яка відтинається від нього поверхнею $x^2+y^2=ax, \gamma - const$

13/ S - поверхня $z=a^2-x^2-y^2$, за умов $x\ge 0, y\ge 0, x+y\le 0, a>0, \gamma - const$

14/ S - частина конуса $Rz=H\sqrt{x^2+y^2}\ \left(x^2+y^2\le R^2, \gamma=1\right)$

15/ S - верхня частина поверхні кулі $x^2+y^2+z^2=a^2$, якщо $\gamma(x,y,z)$ дорівнює a/відстані точки поверхні до осі Oz/ її квадрату.

Визначити масу поверхні S за таких умов /16-20/:

16/ S - параболічна оболонка $2z=x^2+y^2(0\le z\le 2), \gamma=z$

17/ S - частина поверхні кулі $x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$ з поверхневою густиною $\gamma(x,y,z)=x/a$

18/ S - поверхня кулі $x^2+y^2+z^2=R^2$ з поверхневою густиною, що дорівнює a/відстані від точки поверхні до фіксованого діаметра;/квадрату цієї відстані.

19/ S - поверхня конуса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0(0\le z\le c)$ з поверхневою густиною, що дорівнює відстані від точки поверхні до осі Oz.

20/ S - повна поверхня куба $\max\{x,y,z\}=2, \min\{x,y,z\}=0$ з поверхневою густиною $\gamma=xyz$.

Визначити силу, з якою точка А масою m_0 притягається до кожного з тіл /21-25/:

21/ Однорідна матеріальна сфера радіуса R, якщо А міститься а/поза сферою; б/на сфері

22/ Матеріальна конічна поверхня S

$$z=\frac{H}{R}\sqrt{x^2+y^2} \quad \left(x^2+y^2\le R^2\right)$$

з густиною розподілу маси, що дорівнює відстані до вершини; точка А міститься у вершині конуса.

23/ Однорідна матеріальна зрізана конічна поверхня S

$$x=\rho\cos t,\ \ y=\rho\sin t,\ \ z=\rho \quad \left(0\le t\le 2\pi,\ 0<b\le\rho\le a\right),$$

якщо A міститься а/ у вершині конуса; б/ у центрі більшої основи.

24/Однорідна матеріальна сфера радіуса R, якщо A міститься а/на сфері; б/ усередині сфери.

25/Однорідна матеріальна конічна поверхня S

$$az = h\sqrt{x^2 + y^2} \quad (z \le h),$$

якщо A збігається а/з вершиною конуса; б/з центор основи конуса.

Знайти гравітаційний потенціал поля тяжіння матеріальної поверхні S у точці A, за таких умов /26-30/:

26/ S – конус

$$z = \frac{h}{a}\sqrt{x^2 + y^2} \quad \left(x^2 + y^2 \le a^2\right)$$

з поверхневою густиною, яка дорівнює відстані до вершини конуса; точка A збігається з цією вершиною.

27/ S – однорідна сфера; точка A знаходиться а/ всередині; б/ на S.

28/ S – однорідний зрізаний конус

$$x = \rho\cos t,\ \ y = \rho\sin t,\ \ z = \rho \quad \left(0 \le t \le 2\pi,\ \ 0 < a \le \rho \le b\right),$$

точка A збігається з вершиною конічної поверхні.

29/ S – однорідний конус

$$zR = H\sqrt{x^2 + y^2} \quad (z \le H),$$

точка A збігається а/ з вершиною S; б/ з центром основи конуса.

30/ S – однорідна сфера; точка A міститься а/зовні S; б/ на S.

Завдання 33

1. Знайти $\iint_s\ (2x + z)ds$, де S – поверхня $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \ge 0$

2. Знайти $\iint_s\ x^2\, ds$, де S – бічна поверхня конуса $z^2 = x^2 + y^2, 0 \le z \le 2$

3. Знайти $\iint_s\ (x + y + z)ds$, де S – поверхня куба $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$

4. Знайти масу частини однорідної поверхні $2z = x^2 + y^2$, вирізаної

з неї поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, y=0; y=x (I октант).

5. Знайти $\iint_s (6x + 4y + 3z)ds$, де S – частина площини x+y+z=1, що лежить в I октанті.

6. Знайти $\iint_s yds$, де S – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, що лежить в I октанті.

7. Знайти $\iint_s \frac{ds}{(1+x+z)^2}$, де S – частина площини x+y+z=1, що лежить в I октанті. (x>0 , y>0 , z>0)

8. Знайти площу частини поверхні $2z = x^2 + y^2$, вирізаної

з неї поверхнями $x^2 + y^2 = 3$, y=0; y=$\sqrt{3}$x (I октант).

9. Знайти момент інерції однорідної півсфери радіуса R відносно осі симетрії.

10. Знайти координати центра мас однорідної поверхні параболоїда Место для формулы. ,

обмеженого площиною Z=1.

11. Знайти масу однорідної канонічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \leq z \leq 1$

12. Знайти площу однорідної півсфери радіуса R

13. Знайти масу бічної поверхні конуса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ $(0 \leq z \leq b)$, якщо щільність поверхні в кожній точці дорівнює відстані від цієї точки до осі oz

14. Знайти $\iint_s (x^2 + y^2)ds$, де S-частина поверхні $z^2 = x^2 + y^2, 0 \leq z \leq 1$

15. Знайти площу поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, що лежить всередині параболоїда $x^2 + y^2 = 2z$

16. Знайти площу поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 4$,що лежить всередині циліндра $x^2 + y^2 = 2y$.

17. Знайти масу поверхні сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, якщо щільність поверхні у кожній її точці $\gamma = x^2 + y^2$.

18. Знайти момент інерції поверхні параболоїда обертання $2z = x^2 + y^2$, відсіченою площиною $z = I$, відносно осі Oz.

19. Знайти координати центру тяжіння частини однорідної площини $z = x$, обмеженою площинами $y = 0$, $x = 0$, $x + y = I$.

20. Знайти площу поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, вирізаної з неї циліндром $x^2 + y^2 = 1$, $z > 0$.

21. Обчислити $\iint_s \sqrt{x^2 + y^2} ds$, де S - бокова поверхня конуса $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $0 \le z \le R$

22. Обчислити $\iint_s (x + y + z) ds$, де S – напівсфера$\sqrt{R^2 - y^2 - x^2}$

23. Знайти масу конічної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$; $0 \le z \le 1$, якщо її щільність в кожній точці пропорціональна відстані від цієї точки до осі конуса.

24. Обчислити $\iint_s xyz\, ds$, де S – частина поверхні $z = x^2 + y^2$ яка відсічена площиною $z = 1$

25. Обчислити $\iint_s z\, ds$, де S – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ яка лежить в I октанті.

26. Знайти момент інерції бокової поверхні конуса $z^2 = x^2 + y^2$, яка відсічена площинами $z = 0$, $z = H$ відносно осі $O z$.

27. Знайти площу частини поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, вирізаною з неї поверхнею $2x = x^2 + y^2$.

28. Знайти центр тяжіння напівсфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $z \ge 0$, якщо поверхнева щільність маси пропорційна аплікаті z точки напівсфери.

29. Знайти площу частини поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, вирізаною з неї поверхнею $2y = x^2 + y^2$

30. Знайти площу частини циліндричної поверхні $4x = z^2$, вирізаної циліндром $4x = z^2$ і площиною $x = 1$

Завдання 34

Варіант №1

Знайти площу частини поверхні $2z = x^2 + y^2$, яка відтинається від неї поверхнею $x^2 + y^2 = 1$.

Варіант №2

Знайти центр ваги частини однорідної поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z > 0$.

Варіант №3

Знайти площу частин поверхні 2z=$x^2 + y^2$,яка обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = 1, y = x\sqrt{3}, x = y\sqrt{3}, x > 0$.

Варіант №4

Знайти цент мас частини однорідної поверхні 2x+y+4z=4 ,обмеженої площинами x=0,y=0,z=0.

Варіант №5

Знайти площу частини поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, яка відтинається поверхнею $z^2 = 2y$.

Варіант №6

Знайти центр мас однорідної поверхні $2z = x^2 + y^2$,яка обмежена площиною $z = 2$.

Варіант №7

Знайти площу частини поверхні $z^2 = x^2 + y^2$,яка відтинається поверхнею $z^2 = 4x$.

Варіант №8

Знайти масу частини поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 4$,яка обмежена координатними площинами $(x > 0, y > 0, z > 0)$,якщо поверхнева густина $j(x; y; z) = x$.

Варіант №9

Знайти площу частини поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, яка відтинається поверхнею $z^2 = -6x$.

Варіант №10

Знайти заряд, розподілений на частині поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9, z > 0$, якщо поверхнева густина $\gamma(x; y; z) = x + y + z$.

Варіант №11

Знайти площу частини поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, яка відтинається поверхнею $z^2 = -8y$.

Варіант №12

Знайти центр ваги півсфери $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z > 0$, якщо поверхнева густина $\gamma(x; y; z) = z$.

Варіант №13

Знайти площу частини поверхні $2z = x^2 + y^2$, яка відтинається поверхнями $x^2 + y^2 = 9, y = 0, y = x\sqrt{3}, x > 0$.

Варіант №14

Знайти масу частини поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, яка відтинається площиною $z = 1 (z > 0)$, якщо поверхнева густина $\gamma(x; y; z) = x^2 + y^2$.

Варіант №15

Знайти площу частини поверхні $2z = x^2+y^2$, яка відтинається поверхнями $x^2+y^2 = 1$, $x^2+y^2 = 4$, $x>0$, $y>0$.

Варіант №16

Знайти масу частини поверхні $x^2+y^2 +z^2=R^2$, яка відтинається поверхнями $y = 0$, $y = x\sqrt{3}$, $z = 0$ ($x>0$, $z>0$), якщо поверхнева густина $j(x;y;z) = z^2$

Варіант №17

Знайти площу частини поверхні $2z = x^2+y^2$, яка відтинається поверхнями $x^2+y^2 = 4$, $x = 0$, $x = y\sqrt{3}$, $x>0$.

Варіант №18

Знайти масу частини поверхні $x^2+y^2 = z^2$, яка відтинається поверхнями $x^2+y^2 = 1$, $z = 0$ ($z>0$), якщо поверхнева густина $j(x;y;z) = x^2(x^2+y^2)^{-1}$

Варіант №19

Знайти площу частини поверхні $2z= x^2 + y^2$, яка відтинається поверхнею $z^2 = x^2 + y^2$.

Варіант №20

Знайти момент інерції відносно осі 0z частини однорідної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, яка відтинається площинами z=1, z=-1.

Варіант №21

Знайти площу частини поверхні $2z = x^2 + y^2$, яка відтинається поверхнею $x^2 + y^2 + z^2 = 3$.

Варіант №22

Знайти момент інерції відносно осі 0z частини однорідної поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, яка відтинається площиною $z = 0, z > 0$.

Варіант №23

Знайти площу частини поверхні $2z = x^2 + y^2$, яка відтинається площиною $z = 2$.

Варіант №24

Знайти заряд, розподілений на частині поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, яка відтинається поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $y = x, y = x\sqrt{3}$, якщо поверхнева густина заряду $\gamma(x; y; z) = e^{-x^2-y^2}$.

Варіант №25

Знайти площу частини поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, яка відтинається поверхнями $x^2 + y^2 = 1$, $y = x$, $y = x\sqrt{3}$, $x > 0$, $z > 0$.

Варіант №26

Знайти заряд, розподілений на частині поверхні $2z = x^2 + y^2$, яка відтинається поверхнями $y = x\sqrt{3}$, $x = y\sqrt{3}$, $x^2 + y^2 = 1$, $x > 0$, якщо поверхнева густина заряду $\gamma(x;y;z) = x^2 + y^2$.

Варіант №27

Знайти площу частини поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, яка відтинається поверхнею $x^2 + y^2 = 2x$.

Варіант №28

Знайти масу частини поверхні $x + y + z = 1$, яка лежить в першому октанті, якщо поверхнева густина

$$\gamma(x;y;z) = \frac{1}{(1+x+z)^2}.$$

Варіант №29

Знайти площу частини поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, яка відтинається поверхнею $x^2 + y^2 = 1$, $z > 0$.

Варіант №30

Знайти масу частини поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, яка відтинається поверхнями $x^2 + y^2 = \frac{\pi^2}{4}$, $y = x$, $x = y\sqrt{3}$, $x > 0$, якщо поверхнева густина заряду $\gamma(x;y;z) = \sin\sqrt{x^2 + y^2}$.

Варіант №31

Знайти площу частини поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, яка відтинається поверхнею $2z = x^2 + y^2$, $z > 0$.

Варіант №32

Знайти центр мас однорідної поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, якщо $0 \le z < 1$.

Завдання 35.

Знайти масу частини поверхні Ω, обмеженої поверхнею S, з густиною $\mu = \mu_0$:

1. $\Omega : z^2 = 2px,$
   $S : \{0 < z < a, \beta z < y < \alpha z\}.$
2. $\Omega : z^2 = 2px, S : \{y^2 = 2qx, x = a\}.$
3. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, S : \{z = 0\}.$
4. $\Omega : x^2 + y^2 = R^2, S : \{x^2 + z^2 = R^2\}.$
5. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = R^2, S : \{z = 0\}.$

6. $\Omega : x^2 + y^2 = R^2,$
$S : \{z \pm x = 0, x, y > 0\}.$

7. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = R^2,$
$S : \{a \le z \le a\sqrt{2}\}.$

8. $\Omega : x^2 + y^2 = \pm ax,$
$S : \{x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}.$

9. $\Omega : x^2 + y^2 = 2z, S : \{z \le 1\}.$

10. $\Omega : x^2 + y^2 = 2ax, S : \{z^2 = 2a(2a - x)\}.$

11. $\Omega : x^2 + y^2 = 2z, S : \{z \le 1\}.$

12. $\Omega : x^2 + y^2 = 2ax,$
$S : \{x^2 + y^2 = z^2, z = 0\}.$

13. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$
$S : \ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, a > b \ .$

14. $\Omega : x^2 + y^2 = z, S : \{0 \le z \le 1\}.$

15. $\Omega : x^2 + y^2 = 2az, S : \{x^2 + y^2 = a^2\}.$

16. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$
$S : \{x^2 + y^2 \ge \pm ax\}.$

17. $\Omega : x^2 + y^2 = z^2, S : \{y^2 + z^2 = 2az\}.$

18. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$
$S : \{(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)\}.$

19. $\Omega : x^2 + y^2 = z^2, S : \{0 \le z < 4\}.$

20. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$
$S : \{x, y, z \ge 0, x + y \le a\}.$

21. $\Omega : x^2 + y^2 = z^2, S : \{0 \le z \le 1\}.$

22. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$
$S : \{x^2 + y^2 = R^2, R \le a\}.$

23. $\Omega : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z^2}{c^2}, S : \{0 \le z \le b\}.$

24. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$
$S : \{z^2 = x^2 + y^2\}.$

25. $\Omega : x^2 - y^2 = 2az, S : \{x^2 + y^2 = a^2\}.$

26. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, S : \{\rho = a \sin 3\varphi\}.$

27. $\Omega : x^2 + y^2 = 2az, S : \{x^2 + y^2 = z^2\}.$

28. $\Omega : x^2 + y^2 = z^2, S : \{y^2 + z^2 = R^2\}$.

29. $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 = a^2, S : \{z \geq 0\}$.

30. $\Omega : x^2 + y^2 = z^2, S : \{z^2 = 2py\}$.

4.2. Поверхневі інтеграли 2-го роду

Розглянемо орієнтовану двосторонню поверхню S у тривимірному просторі, задану явно рівнянням $z = \varphi(x, y)$. Вибір напряму нормалі до поверхні задає сторону /орієнтацію/ на поверхні, якщо нормаль до поверхні, якщо нормаль до поверхні утворює гострий кут з додатнім напрямом осі Oz, тоді її орт

$$\bar{n}^0 = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{\left(-\varphi'_x, -\varphi'_y, -1\right)}{\sqrt{1 + \left(\varphi'_x\right)^2 + \left(\varphi'_y\right)^2}}$$

/у противному разі знак перед вектором нормалі треба змінити на протилежний/. Нехай у кожній точці $M(x, y, z)$ поверхні S означені достатньо гладкі функції $X = X(x, y, z), Y = Y(x, y, z), Z = Z(x, y, z)$. Тоді поверхневий інтеграл 2-го роду по орієнтованій поверхні S

$$\iint_S \left[X(x, y, z)dydz + Y(x, y, z)dxdz + Z(x, y, z)\right]. \quad /4.15/$$

Очевидно, що в частинному випадку можна розглядати інтеграли

$$\iint_S X(x, y, z)dydz, \iint_S Y(x, y, z)dx, dz, \iint_S Z(x, y, z)dxdy. \quad /4.16/$$

Обчислення інтеграла /4.15/ можна звести до обчислення поверхневого !-го роду, якщо /4.15/ записати так:

$$\iint_S \left[X(x, y, z)\cos\alpha + Y(x, y, z)\cos\beta + Z(x, y, z)\cos\gamma\right] dS, \quad /4.17/$$

де dS - диференціал площі поверхні S.

Зауважимо,що в разі застосування формули /4.17/ при обчисленні інтеграла /4.15/ інтеграл /4.17/ потрібно зводити обчислення подвійного інтеграла по проекції S на одну з координатних площин /позначимо проекції S на координатні площини xOy, yOz, xOz відповідно $S_{x,y}, S_{yz}, S_{x,z}$. Здебільшого простіше безпосередньо записати /4.15/ через подвійний інтеграл. Наприклад, якщо S задано рівнянням $z = \varphi(x, y)$, то

$$\iint\limits_{S}\left[X(x,y,z)dydz+Y(x,y,z)dxdz+Z(x,y,z)dxdy\right]=$$

$$\pm\iint\limits_{S_{xy}}\left[-X(x,y,\varphi(x,y))\varphi_x'(x,y)-Y\left(x,y,\varphi(x,y)\right)\cdot\varphi_y'(x,y)+Z\left(x,y,\varphi(x,y)\right)\cdot 1\right]dxdy. \quad /4.18/$$

При цьому перед інтегралом записують знак «+», якщо нормаль $\bar{n}$ до поверхні S утворює з віссю Oz гострий кут $(\cos\gamma=\cos(\bar{n};\bar{k})>0)$,або знак «-», якщо цей кут тупий $(\cos\gamma=0)$.

За аналогією до /4.18/ інтеграл /4.15/ можна записати через подвійний інтеграл по проекції S на інші координатні площини.

Якщо поверхневий інтеграл 2-го роду має вигляд /4.16/, то зручніше користуватися формулами

$$\iint\limits_{S:X=\Psi(y,z)} X(x,y,z)dydz=\pm\iint\limits_{S_{yz}} X\left(\Psi(y,z),y,z\right)dydz. \quad /4.19/$$

При цьому,кут між нормаллю до S і ортом осі Ox гострий /тупий/, то записують перед останнім інтегралом знак «+»/-/,тобто $\cos\alpha=\cos(\bar{n};\bar{i})>0(\cos\alpha<0)$.

Аналогічно маємо :

$$\iint\limits_{S:y=\eta(x,z)} Y(x,y,z)dxdz=\pm\iint\limits_{S_{xz}} Y\left(x,\eta(x,z),z\right)dxdz. \quad /4.20/$$

Вибираємо знак «+»/-/, якщо $\cos\beta=\cos(\bar{n};\bar{j})>0(\cos\beta<0)$.

$$\iint\limits_{S:z=\varphi(x,y)} Z(x,y,z)dxdy=\pm\iint\limits_{S_{xy}} Z\left(x,y,\varphi(x,y)\right)dxdy. \quad /4.21/$$

Вибираємо знак «+»/-/, якщо $\cos\gamma=\cos(\bar{n};\bar{k})>0(\cos\gamma<0)$.

Приклади розв’язування задач

Приклад 4.2.1 Обчислити

$I=\int_S\ [xdydz+(y+z)dxdz+(z-y)dxdy]$, якщо S – зовнішня сторона частини поверхні кулі $x^2+y^2+z^2=1$, яка розміщена у першому октанті.

Розв’язання. 1-й спосіб.

Розглянемо I як суму трьох інтегралів і обчислимо кожен з них окремо, застосувавши формули (4.19)-(4.21):

$I_1 = \iint_S (x-y)dxdy = \left| \begin{matrix} S: z = +\sqrt{1-x^2-y^2} \\ cos(\widehat{\bar{n},\bar{k}}) = 0 \end{matrix} \right| = \iint_{S_{xy}} \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - y\right)dxdy =$

$= \left| \begin{matrix} x2+y2+z2 = 1 \Rightarrow \rho = 1 \\ \left.\begin{matrix} x = \rho cos\varphi \\ y = \rho sin\varphi \end{matrix}\right\}, dxdy = \rho d\rho d\varphi \\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right| =$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \rho\left(\sqrt{1-\rho^2} - \rho sin\varphi\right)d\rho = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\, d(1--\rho^2) -$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin\varphi c'\varphi \int_0^1 \rho^2 d\rho = -\frac{\pi}{6}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1 + \frac{1}{3}cos\varphi|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}.$

$I_2 = \iint_3 xdydz = \left| \begin{matrix} S: x = \pm\sqrt{1-y^2-z^2} \\ cos(\widehat{\bar{n},\bar{\imath}}) \end{matrix} \right| = +\iint_{S_{yz}} \sqrt{1-y^2-z^2}\, xdydz =$
$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \sqrt{1-\rho^2}\, \rho d\rho = \frac{\pi}{6}$

$I_3 = \iint_3 (y+z)dxdz = \left| \begin{matrix} S: y = \pm\sqrt{1-x^2-z^2} \\ cos(\widehat{\bar{n},\bar{\jmath}}) > 0 \end{matrix} \right| = +\iint_{S_{xz}} \left(\sqrt{1-x^2-z^2} + z\right)dxdz =$
$= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}; \quad I = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{\pi}{2}.$

2-й спосіб

При обчисленні I скористаємося формулою |4.18|:

$S: z = +\sqrt{1-x^2-z^2} = \varphi(x,y); \qquad \varphi'_x = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}; \qquad \varphi'_y = \frac{-y}{c};$

$I = +\iint_{S_{xy}} \left[-x\,\frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \left(y + \sqrt{1-x^2-y^2}\right)\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \left(\sqrt{1-x^2-y^2} - y\right)\cdot 1\right] dy =$

$= \iint_{S_{xy}} \left[\frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}} + \sqrt{1-x^2-y^2}\right] dxdy = \iint_{S_{xy}} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = \int_o^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 \frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} =$
$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\int_0^1 (1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\, d(1-\rho^2) = -\frac{\pi}{2}(1-\rho^2)^{-\frac{1}{2}}\ \mathrm{I}_0^1 = \frac{\pi}{2}.$

Приклад 4.2.2. Обчислити $\iint_S zdxdy$, якщо S – зовнішня сторона еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Розв’язання. Зручніше вирішити це рівняння відносно z. Маємо:

$z = \pm c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} \quad dxdy = \cos\gamma\, ds \quad \{ds > 0$ завжди$\}$. Звідси видно, що для $S - \cos\gamma < 0 \quad dxdy$ береться зі знаком “-“, а

$$z = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}.$$

Таким чином:

$$\iint\limits_{S} zdxdy = \iint\limits_{S+} zdxdy + \iint\limits_{S-} zdxdy = \iint\limits_{D} c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$$
$$+\iint [-c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}(-dxdy)] = 2c\iint\limits_{D} \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$$

Область D обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ в площині XOY. Для знаходження подвійного інтеграла по цій області зручно користуватися полярною системою координат:

$x = a\rho cos\varphi$

$y = b\rho sin\varphi$

$D: 0 \leq \varphi \leq 2\pi; 0 \leq \rho \leq 1$

Тоді:

$$\iint\limits_{S} zdxdy = 2c\int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{1} ab\rho\sqrt{1-\rho^2}\, d\rho = -2abc * 2\pi * \frac{1}{3}(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}\pi abc$$

Потік вектора через поверхню

Поверхневі інтеграли 2-го роду в застосуваннях описують потік векторного поля і є глобальною характеристикою поля. Стаціонарне векторне поле означене в тривимірному просторі, якщо в кожній його точці *M(x,y,z)* визначено вектор

$\bar{F}$=*(X(M), Y(M), Z(M))=(X(x,y,z), Y(x,y,z) Z(x,y,z)).*

Внесемо в це поле орієнтовану поверхню *S* і нехай задає поле швидкостей рідини, яка ухається через *S* у точці *M(x,y,z)* поверхні *S* побудуємо дотичну площину і замінимо *S* в околі точки *M,* елементарною плоскою областю (паралелограм, площа якого ΔS). Припустимо, що швидкість рідини однакова в усіх точках $\tilde{S}$ і дорівнює $\bar{F}$*(M).* Нехай за одиницю часу кожна частинка рідини перемістилася з початку в кінець вектора $\bar{F}$. Тоді кількість рідини, що протікає за одиницю часу через $\tilde{S}$, за числовим значенням збігається з об`єм ΔV паралелепіпеда, побудованого на $\tilde{S}$ і $\bar{F}$ з висотою *H:* $\Delta V = H\Delta S = (np_{\bar{n}}\bar{F})\Delta S = (\bar{F}, \bar{n}^{\circ})\Delta S$.

Тоді потік поля $\bar{F}$ через S $\Pi=\iint_s (\bar{F},\bar{n}^{\circ})dS$ є кількість рідини, що протікає через S за одиницю часу.

Нагадаємо, що $dxdy=|\cos\gamma|dS$; $dydz=|\cos\alpha|dS$; $dxdz=|\cos\beta|dS$. Тоді, означивши вектор $\overline{dS}=(dxdz,dxdz,dxdy)$, дістанемо , що потік векторного поля обчислюється з допомогою поверхневого інтеграла другого роду:

$\Pi=\iint_s (\bar{F},\bar{n}^{\circ})dS=\iint_s \bar{F}\,\overline{dS}=\iint_s [x(x,y,z)dydz+Y(x,y,z)dxdz+Z(x,y,z)dxdy]$.

Прклад 4.2.3 Визначити потік векторного поля $\bar{F}=x\bar{\imath}+(y+z)\bar{\jmath}+(z-y)\bar{k}$ через зовнішню сторону частини поверхні кулі $x^2+y^2+z^2=1$, яка розміщена в першому октанті.

Нехай S: $x^2+y^2+z^2-1\equiv\Phi(x,y,z)=0$;

$\bar{n}=(\Phi'_x,\Phi'_y,\Phi'_z)=2(x,y,z)$

$\bar{n}^{\circ}=\frac{x,y,z)}{+\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; $\bar{F}\bar{n}^{\circ}=\frac{(x,y+z,z-y)(x,y,z)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(x^2+y^2+zy+z^2-zy)=$
$=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

$\Pi=\iint_s (\bar{F},\bar{n}^{\circ})dS=\iint_s \sqrt{x^2+y^2+z^2}dS$

$$=\left|\begin{array}{c} S: z=\sqrt{1-x^2+y^2}, \\ \cos(\widehat{\bar{n},\bar{k}})>0, \\ dS=\sqrt{1+(z'_x)^2+\left(z'_y\right)^2}dxdy=\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2+y^2}} \end{array}\right|=+$$

$$\iint_{S_{xy}}\sqrt{x^2+y^2+(1-x^2+y^2)}\frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}=$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^1\frac{\rho d\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{\pi}{2}$$

Останній поверхневий інтеграл можна обчислити простіше, якщо скористатися сферичними координатами. Маємо рівняння поверхні кулі $x^2+y^2+z^2=1\Rightarrow\rho=1$, підінтегральна функція $x^2+y^2+z^2=$
$=x^2+y^2+(1-x^2-y^2)=1$ і елемент площі поверхні
$dS=\rho^2\cos\theta d\varphi d\theta=\cos\theta d\varphi d\theta(\varphi,\theta\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right])$:

$$\Pi=\iint_s \sqrt{x^2+y^2+z^2}dS=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta=\frac{\pi}{2}\sin\theta\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

Прклад 4.2.4 Знайти потік векторного поля $\bar{F}=(\frac{x^2}{a^2}-z^2,0,\frac{y^2}{b^2})$ через зовнішню сторону частини конічної поверхні $z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}(0,b>0)$, розміщеної в першому октанті $(0\leq z\leq 1)$:

$$\Pi=\iint_s\left[\left(\frac{x^2}{a^2}-z^2\right)dydz+\frac{y^2}{b^2}dxdy\right]=\left|\begin{array}{c} S: z=+\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}, \\ \cos(\widehat{\bar{n},\bar{k}})<0, \\ z'_x=\frac{x}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}} \end{array}\right|=$$

$$= -\iint_{S_{xy}} \left[-\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \frac{x}{a^2\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}}} + \frac{y^2}{b^2} \right] dxdy =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = a\rho\cos\varphi & \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \rho^2 \left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2} \right) \\ & y = b\rho\sin\varphi \\ dxdy = ab\rho d\rho d\varphi, & z = 1{:}\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \rho = 1 \end{matrix} \right| =$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 ab\rho \left[\frac{b^2}{a} \rho^2 sin^2\varphi cos\varphi + \rho^2 sin^2\varphi \right] d\rho =$$

$$-b^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\varphi d sin\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho -$$

$$-ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2\varphi d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho = -\frac{b^3}{4} \frac{sin^3\varphi}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{ab}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-cos2\varphi}{2} d\varphi = -\frac{b^2}{12} - \frac{ab}{4}\frac{\pi}{4} = -\frac{b}{4}\left(\frac{a\pi}{4} + \frac{b^3}{3} \right)$$

П<0, тобто вектор поля $\bar{F}$ має напрям, протилежний напряму вектора $\bar{n}$ (рідина «втікає всередину» поверхні).

Завдання 36

Обчислити поверхневі інтеграли 2-го роду (1-30):

1) $\iint_S z^2dxdy - zdydz$, де S – внутрішня сторона частини поверхні $x^2+y^2+z^2=a^2$, розміщеної в || октанті.
2) $\iint_S zdxdy - (x-z)dydz$, де S – зовнішня сторона частини поверхні $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$, розміщеної в | октанті.
3) $\iint_S (x-z)dydz - z^2dxdy$, де S – внутрішня сторона частини поверхні $z=x^2+y^2 (0< z < a)$, розміщеної в ||| октанті.
4) $\iint_S (y-z^2)dxdz - (x-z^2)dydz$, де S – зовнішня сторона частини поверхні
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2 (0 \le z \le 1)$, розміщеної в ||| октанті.
5) $\iint_S (z^2-y^2)dxdy - z^2dydz$, де S – зовнішня сторона частини поверхні $x^2+y^2+z^2=1$.
6) $\iint_S zdxdy - (x^2+z^2)dxdz$, де S – внутрішня сторона частини поверхні $x^2+y^2+z^2=a^2$ $(z > 0)$
7) $\iint_S xzdydz - (x^2-z)dxdy$, де S – внутрішня сторона частини поверхні $2z = x^2 + y^2$
$(0 \le z \le a)$
8) $\iint_S \left(\frac{x^2}{a^2} - z^2 \right) dydz - \frac{y^2}{b^2} dxdz$, де S – внутрішня сторона частини поверхні $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $(z < 0)$
9) $\iint_S zdxdy - (x^2-y^2)dydz$, де S – зовнішня сторона частини поверхні $x^2+y^2+z^2= a^2$, розміщеної в || октанті.

10) $\iint_S \left(\frac{y^2}{b^2}-z\right)dxdy+\frac{z^2}{c^2}dxdz$, де S – зовнішня сторона частини поверхні
$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, розміщеної в ||| октанті.

11) $\iint_S (x^2-y)dydz-z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона частини поверхні
$z^2=3x^2+y^2 (0\le z\le 1)$

12) $\iint_S (\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2})dydz-z^2dxdy$, де S – внутрішня сторона частини поверхні $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ розміщеної в | октанті.

13) $\iint_S zdxdy-(x-z)dydz$, де S – зовнішня сторона частини поверхні $z^2=\frac{x^2}{y^2}+y^2$, розміщеної в | октанті $(0\le z\le a)$.

14) $\iint_S \left(\sqrt{z}+x\right)dxdy-z^2dydz$, де S – зовнішня сторона частини поверхні $x^2+y^2+z^2=R^2 (z>0)$.

15) $\iint_S \left(\sqrt{z}-y\right)dxdy-zdxdz$, де S – зовнішня сторона частини поверхні $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ розміщеної в || октанті $(0\le z\le 1)$.

16) $\iint_S zdxdy-xdydz+xdzdx$, де S – зовнішня сторона частини поверхні $z=x^2+y^2$ розміщеної в | октанті $(0\le z\le 1)$.

17) $\iint_S \left(\frac{z^2}{c^2}-1\right)dxdy+\frac{y^2}{b^2}dxdz$, де S – зовнішня частина поверхні $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ розміщена в | октанті.

18) $\iint_S \left(x-\sqrt{z}\right)dydz+z^2dxdy$, де S – внутрішня частина поверхні $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} (0\le z\le 1)$

19) $\iint_S (\frac{y^2}{b^2}-z^2)dydz-zdxdy$, де S – зовнішня частина поверхні $x^2+y^2+z^2=R^2$ розміщена в IV октанті.

20) $\iint_S (x^2-xz)dydz-zdxdy$, де S – частина поверхні $z=x^2+y^2$ розміщена в IV октанті.

21) $\iint_S \left(\frac{z^2}{c^2}-x^2\right)dxdz+\frac{y^2}{b^2}dxdy$, де S – зовнішня частина поверхні $z=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{b^2} (0\le z\le c)$

22) $\iint_S \left(\sqrt{z}+z^2\right)dxdy+(x-z)dxdz$, де S – внутрішня частина поверхні $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\ (z>0)$.

23) $\iint_S xdydz+z^2dxdy$, де S – зовнішня частина поверхні $z=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{b^2} (0\le z\le 1)$

24) $\iint_S \left(\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dydx+zdxdy$, де S – зовнішня сторона частини поверхні $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ розміщеної в | та || октантах.

25) $\iint_S \left(x-\sqrt{z}\right)dydz+(x^2-z^2)dxdy$, де S – внутрішня сторона частини поверхні $x^2+y^2+z^2=R^2$ розміщеної в || октанті.

26) $\iint_S \ xydydz-(z^2-y^2)dxdy$, де S – зовнішня сторона частини поверхні $2z^2=x^2+y^2$ розміщеної в ||| октанті.

27) $\iint_S \ (\frac{x^2}{a^2}-z^2)dxdy-xzdydz$, де S – внутрішня сторона частини поверхні $z=\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{b^2}$ розміщеної в | октанті *(*$0\le z\le 1$*)*.

28) $\iint_S \left(\frac{z^2}{c^2}-zy\right)dxdy-\frac{x^2}{a^2}dydz$, де S – внутрішня сторона частини поверхні $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \ \ (z\ge 0)$

29) $\iint_S \left(x-\sqrt{z}\right)dydz+z^2dxdy-yzdxdz$, де S – зовнішня сторона поверхні кулі $x^2+y^2+z^2=R^2 \ (z<0)$

30) $\iint_S \left(\frac{y^2}{b^2}-1\right)dydz+\left(\sqrt{x}-z^2\right)dxdy$, де S – зовнішня сторона частини поверхні $z^2=\frac{x^2}{a^2}--\frac{y^2}{b^2}$ $(0<z<1)$.

Завдання 37

Визначити потік векторного поля $\vec{F}$=(X(x,y,z) , Y(x,y,z) , Z(x,y,z)) через зовнішню сторону поверхні S (31-60)

1. $\vec{F}=\left(\frac{x^2}{a^2}-z^2,0,z\right), S\colon z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}, (0<z<1);$ (II октант).

2. $\vec{F}=(xy,z^2-1,0)\ , S\colon x^2+y^2+z^2=1$ (I, II октанти).

3 . $\vec{F}=\left(0,\frac{y^2}{b^2}-1,z\right)\ , S\colon z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ (I октант).

4. $\vec{F}=\left(\frac{y^2}{b^2}-z,0,\frac{z^2}{c^2}\right)\ , S\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (I октант).

5. $\vec{F}=\left(\sqrt{z}-x,xy,0\right), S\colon 2z^2=x^2+y^2\ , 0<z<\sqrt{2}$ (II октант).

6. $\vec{F}=\left(0,\frac{y^2}{b^2},z^2\right)\ , S\colon z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ , (0<z<1)$

7. $\vec{F}=\left(\frac{x^2}{a^2},0,z^2-1\right)\ , S\colon z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ , (0<z<1)$

8. $\vec{F}=\left(0,x^2-z^2,\sqrt{2}\right), S\colon z=x^2+y^2\ , 0<z<1$ (I, II октанти).

9. $\vec{F}=\left(0,\frac{x^2}{a^2}-z^2,\frac{y^2}{b^2}\right)\ , S\colon z^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\ , 0<z<1$

10. $\vec{F}=\left(\sqrt{2},x-y,0\right), S\colon 4z^2=x^2+y^2\ , 0<z<2$ (I октант).

11. $\vec{F}=\left(\frac{z^2}{c^2},0,\frac{x^2}{a^2}-1\right)\ , S\colon \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ (II октант).

12. $\vec{F} = \left(x - \sqrt{z}, yz, z^2\right), S: z = x^2 + y^2 + z^2 = 1, z < 0$

13. $\vec{F} = \left(0, \frac{x^2}{a^2} - 1, \frac{z^2}{c^2}\right), S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ (II октант).

14. $\vec{F} = \left(\sqrt{z}, x - y, z\right), S:\ z^2 = x^2 + y^2, 0 < z < a$

15. $\vec{F} = (x^2 - y^2, 0, z), S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z < 0$

16. $\vec{F} = \left(0, \frac{y^2}{b^2} - 1, zy\right), S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ z > 0$ (I октант).

17. $\vec{F} = \left(0, z^2, \frac{x^2}{a^2} - 1\right), S: z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, 0 < z < 1$

18. $\vec{F} = \left(\sqrt{z} - x, 0, y + z^2\right), S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z < 0$ (I октант).

19. $\vec{F} = \left(z, \frac{y^2}{b^2} - z, 0\right), S: z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, 0 < z < 1$ (II октант).

20. $\vec{F} = \left(\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}, 0, 1\right), S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ z > 0$

21. $\vec{F} = \left(\sqrt{z} - y, \sqrt{z}, 0\right), S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z < 0$ (III октант).

22. $\vec{F} = \left(0, \frac{x^2}{a^2} - z^2, \frac{y^2}{b^2}\right), S: z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, 0 < z < 1$

23. $\vec{F} = \left(0, \frac{x^2}{a^2} - z, z\right), S: z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, 0 < z < 1$ (II октант).

24. $\vec{F} = \left(x - y, \sqrt{z} - x^2, 0\right), S: z^2 = x^2 + y^2, 0 < z < 1$ (III октант).

25. $\vec{F} = \left(0, \frac{y^2}{b^2} - z, z\right), S: z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, 0 < z < 1$ (II октант).

26. $\vec{F} = \left(\frac{z^2}{c^2}, 0, \frac{x^2}{a^2} - z\right), S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ z < 0$

27. $\vec{F} = (x^2 - y^2, 0, z^2), S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z < 0$

28. $\vec{F} = (0, x^2 - z^2, yz), S: z^2 = x^2 + y^2, 0 < z < a$

29 . $\vec{F} = \left(z, 0, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right), S: z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}, 0 < z < 1$ (II октант).

30. $\vec{F} = \left(0, \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2}, z\right), S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\ z < 0$

Завдання 38

Обчислити поверхневі інтеграли 2-го роду:

1. $\iint_s (y-z)dydz+(z-x)dxdz+(x-y)dxdy$

Де S – зовнішня сторона конічної поверхні $z^2=x^2+y^2$, $0\le z\le H$

2. $\iint_S \frac{dxdz}{x}+\frac{dxdz}{y}+\frac{dxdz}{z}$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

3. $\iint_s xdxdz+ydydz+zdxdy$, де S – трикутник, утворений перетином площини $x-y-z=I$ з координатними площинами (нормаль зовнішня).

4. $\iint_s zdxdy$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

5. $\iint_s x^2dydz+y^2dxdz+z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона частини сфери

$x^2+y^2+z^2=a^2$, яка лежить в I октанті.

6. $\iint_s xzdxdz+yzdydz+xydxdy$, де S – нижня сторона трикутника, утвореного перетином площини $x+y+z=a$ з координатними площинами.

7. $\iint_s xdydz+ydxdz+zdxdy$, де S – зовнішня сторона сфери $x^2+y^2+z^2=R^2$

8. $\iint_s x^3dydz$, де S – верхня сторона верхньої половини еліпсоїда

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

9. $\iint_s z^2dxdy$, де S – зовнішня сторона еліпсоїда $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{4}=1$.

10. $\iint_s xdxdz+zdxdy-xdydz$, , де S – верхня сторона поверхні $z^2=x^2+y^2$, $0\le z\le R$

11. $\iint_s zdxdy-zdxdz$, де S – нижня сторона поверхні $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(0\le z\le 1)$ яка лежить в I октанті.

12. $\iint_s xydxdy$, де S – нижня сторона трикутника $x+2y+z=1$; $x, y, z=0$.

13. $\iint_s (z+x)dxdy$, де S – верхня сторона поверхні $z^2=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$; $0\le z\le 1$

14. $\iint_s (x-z^2)dxdz$, де S – нижня сторона поверхні $z^2=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}$.

15. $\iint_S \;zdxdy$, де S – верхня сторона поверхні $z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\,(0\le z\le 1)$ яка лежить в I октанті

16. $\iint_S \;zdxdy - xdydz$, де S – верхня сторона поверхні $z^2=x^2+y^2, (0\le z\le a)$

17. $\iint_S \;2xdydz + ydxdz + zdxdy$, де S – трикутник, утворений перетином площини $x+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}=1$ з координатними площинами (нормаль внутрішня)

18. $\iint_S \;(x+xy^2)dydz$, де S – нижня частина поверхні $z^2=x^2+y^2\;(z\ge 0)$ яка вирізана площиною $z=I$.

19. $\iint_S \;(x+z)dydz+(y+\;z)dxdz$, де S – зовнішня частина верхньої напівсфери $x^2+y^2+z^2=4, z\ge 0$.

20. $\iint_S \;zdxdy + xdydz$, де S – зовнішня частина поверхні $x^2+y^2=I$, яка вирізана площинами $z=0, z=2$.

21. $\iint_S \;x^2dydz+y^2dxdz$, де S – зовнішня сторона поверхні напівсфери $x^2+y^2+z^2=a^2; z\ge 0$.

22. $\iint_S \;2xdydz+5ydxdz+5zdxdy$, де S – нижня сторона частини площини $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+z=1$, яка лежить в I октанті.

23. $\iint_S \;xdydz+4ydxdz+5zdxdy$, де S – нижня сторона поверхні $x+2y+\frac{z}{2}=1$

24. $\iint_S \;xdydz+4ydxdz+5zdxdy$, де S – нижня сторона поверхні $x+2y+\frac{z}{2}$, яка лежить в I октанті.

25. $\iint_S \;(x^3+xy^2)dydz$, де S - внутрішня частина поверхні $x^2+y^2=I$, яка вирізана площинами $z=0; z=3$

26. $\iint_S \;xdydz+ydxdz+(z-2)dxdy$, де S – нижня частина поверхні $z^2=x^2+y^2$ яка вирізана площиною $z=I$

27. $\iint_S \;xdydz$, де S – внутрішня частина еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

28. $\iint_S \;y^2dydz$, де S – зовнішня частина еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

29. $\iint_s x^3 dydz$, де S – верхня частина поверхні конуса $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{H^2} z^2$; $0 \le z \le H$

30. $\iint_s z^2 dxdy$, де S – верхня частина поверхні параболоїда $z = \frac{H}{R^2}(x^2 + y^2)$; $z \le H$

Завдання 39

Варіант №1

Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (y - z; z - x; x - y)$ через зовнішню частину поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, 0<z<H.

Варіант №2

Знайти потік векторного поля $\vec{F} = (3x + y; 2y + 5z; 3x - z)$ через замкнену поверхню, утворену площинами $3x - 2y + 2z = 6, z = 0, y = 0, x = 0.$

Варіант №3

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (0; y; z)$ через верхню сторону частини поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0, y > 0$.

Варіант №4

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (xy; yz; xz)$ через зовнішню сторону поверхні тіла ,обмеженого поверхнями $x = 0, y = 0, z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1, (x > 0, y > 0, z > 0)$.

Варіант №5

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (2x - \sqrt{z}; 0; z)$ через зовнішню сторону частини поверхні $z = x^2 + y^2, 0 \le z < 1.$

Варіант №6

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (x; 0; z)$ через зовнішню сторону поверхні тіла ,обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 2x, 2x = z, 4x = z.$

Варіант №7

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (-z;0;x^2 - z)$ через зовнішню частину поверхні $z = x^2 + y^2;0 \le z < 1$.

Варіант №8

Знайти потік векторного поля $\overline{F}(x - y^2 z; z^3;4z - y)$ через зовнішню сторону поверхні тіла ,обмеженого поверхнями $x + 2y + z = 4, x = 2y^2, z = 0, y = 0, y > 0.$

Варіант №9

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (x^2 - z^2;0;z)$ через зовнішню частину поверхні $z^2 = x^2 + y^2, 0 \le z \le 3.$

Варіант №10

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (x - z^2 y; xz; z + xy)$ через зовнішню сторону поверхні тіла, обмеженого поверхнями $x = 0, x = 1, y = 0, y = 2, z = 0, z = x^2 + y^2$.

Варіант №11

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (x; y + z; z - y)$ через зовнішню сторону частини поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x > 0, y > 0, z > 0$.

Варіант №12

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (3x + zy; zx^2;2z + \sin x)$ через зовнішню сторону поверхні тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2, x + y = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

Варіант №13

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (2x; x; z)$ через зовнішню сторону частини поверхні $z = x^2 + y^2, 0 \le z \le 2$.

Варіант №14

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (x + y; y + z; x + y)$ через зовнішню сторону поверхні тіла, обмеженого поверхнями $y = 4 - x^2, y = x^2 + 2, z = -1, z = 2.$.

Варіант №15

Знайти потік векторного поля **F** = $(0; 2y-\sqrt{z}; z)$ через зовнішню сторону частини поверхні $z = x^2+y^2$, $0 \le z < 4$.

Варіант №16

Знайти потік векторного поля **F** = (x+4y; y+3z; z+5x) через зовнішню сторону поверхні тіла, обмеженого поверхнями z = 0, 2y= x^2+y^2, z = 4-x^2-y^2.

Варіант №17

Знайти потік векторного поля **F** = (y^2-z^2; 0; z^2) через зовнішню сторону частини поверхні $z^2 = x^2+y^2$, 0 ≤ z < 5.

Варіант №18

Знайти потік векторного поля **F** = (0; xy; 0) через зовнішню сторону поверхні тіла, обмеженого поверхнями z = 0, x = 0, y = 0, x+y+z = 1.

Варіант №19

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (z; -x; x)$ через внутрішню сторону частини поверхні $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z < 4$.

Варіант №20

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (x + e^z; e^{x+z}; z + e^x)$ через зовнішню сторону поверхні тіла, обмеженого поверхнями z=0, z=2-$\sqrt{x^2 + y^2}$, z>0.

Варіант №21

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (y; y; 0)$ через внутрішню сторону частини поверхні $x^2 + y^2 + z^2 = 4, z > 0, y > 0.$

Варіант №22

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (xz; 0; y)$ через зовнішню сторону поверхні тіла, обмеженого поверхнями $x^2 + y^2 = 1, y = 0, z = 1, z = 0, y = x, x > 0.$

Варіант №23

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (x^3 + xy^2; 0; 0)$ через внутрішню сторону частини поверхні $x^2 + y^2 = 1,$ яка відтинається площинами $z = 0, z = 2.$

Варіант №24

Знайти потік векторного поля $\overline{F} = (4x^3; 4y^3; -6z^4)$ через зовнішню сторону поверхні тіла, обмеженого поверхнями $z = 0, z = 3, x^2 + y^2 = 4.$

Варіант №25

Знайти потік векторного поля $\overline{F}=(x;0;z)$ через внутрішню сторону частини поверхні $x^2+y^2=1$, яка відтинається площинами $z=0$, $z=4$.

Варіант №26

Знайти потік векторного поля $\overline{F}=(3x;\sin^2 z;y+2)$ через зовнішню сторону поверхні тіла, обмеженого поверхнями $z=x+y+1$, $x=1$, $y=0$, $z=0$, $x=y^2$.

Варіант №27

Знайти потік векторного поля $\overline{F}=(x^2;-y^2;z^2)$ через внутрішню сторону частини поверхні $x^2+y^2+z^2=16$, $x>0$, $y>0$, $z>0$.

Варіант №28

Знайти потік векторного поля $\overline{F}=(\cos z;x;xyz)$ через зовнішню сторону поверхні тіла, обмеженого поверхнями $x=0$, $y=0$, $z=0$, $z=1-x-y$.

Варіант №29

Знайти потік векторного поля $\overline{F}=(-x;y;12x)$ через верхню сторону частини поверхні $2x+3y+z=1$, яка лежить у першому квадранті.

Варіант №30

Знайти потік векторного поля $\overline{F}=(10x;\sin z;x+y)$ через зовнішню сторону поверхні тіла, обмеженого поверхнями $y=x^2$, $y=1$, $z=0$, $x=0$, $z=x^2+y^2$.

Варіант №31

Знайти потік векторного поля $\overline{F}=(2x;3y;4z)$ через нижню сторону частини поверхні $x+2y+3z=6$, яка знаходиться у першому октанті.

Варіант №32

Знайти потік векторного поля $\overline{F}=(x;z;-y)$ через зовнішню сторону поверхні тіла, обмеженого поверхнями $z=2(x^2+y^2)$, $z=4-2(x^2+y^2)$.

Завдання40

Знайти потік векторного поля крізь частину поверхні S (нормаль зовнішня):

1 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x, y, z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 2 \ . \end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a} = (x, y, z), S : \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a}(x^2, x, xz), S : \begin{cases} z = x^2 + y^2, x, y \geq 0, \\ (0 \leq z < 1). \end{cases}$$

2 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x, y, -z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 4 \ . \end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a} = (0, y, z), S : \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (2x, 0, z), S : \begin{cases} z = 3x^2 + 2y^2 + 1, \\ x^2 + y^2 = 4 \ (z > 0). \end{cases}$$

3 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x, y, 2z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 3 \ . \end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a} = (2x, y, z), \begin{cases} S : x + y + z = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (2x, 2y, z), S : y = x^2, y = 4x^2, \\ y = 1, x \geq 0 \ (0 < z \leq y).$$

4 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x, y, z^3), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 1 \ . \end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a} = (x, 3y, 2z), \begin{cases} S : x + y + z = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (x^2, y, z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (z > 0). \end{cases}$$

5 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x, y, xyz), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 0 < z < 5 \ . \end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a} = (2x, 3y, 0), S : \begin{cases} x + y + z = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (z + y, y, -x), S : \begin{cases} x^2 + z^2 = 2y, \\ (0 \leq y < 2). \end{cases}$$

6 варіант:

$$1)\,\mathbf{a}=(x-y,x+y,z^2),S:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ 0<z<2\ .\end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a}=(x,y,z),S:\begin{cases}\dfrac{x}{2}+y+z=1,\\ x,y,z>0\ .\end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a}=(x,-x-2y,y),S:x^2+y^2=1,$$
$$x+2y+3z=6\ (z>0).$$

7 варіант:

$$1)\,\mathbf{a}=(x+y,y-x,xyz),S:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ 0<z<4\ .\end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a}=(x,2y,z),S:\begin{cases}\dfrac{x}{2}+y+z=1,\\ x,y,z>0\ .\end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a}=(x^2,y^2,z^2),S:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=2,\\ (z>0).\end{cases}$$

8 варіант:

$$1)\,\mathbf{a}=(x^3+xy^2,y^3+x^2y,z^2),$$
$$S:x^2+y^2=1,\ \ 0<z<3\ .$$

$$2)\,\mathbf{a}=(0,y,3z),S:\begin{cases}\dfrac{x}{2}+y+z=1,\\ x,y,z>0\ .\end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a}=(1+\sqrt{z},4y-\sqrt{x},xy),$$
$$S:z^2=4(x^2+y^2),(0\le z<3).$$

9 варіант:

$$1)\,\mathbf{a}=(x,y,\sin z),S:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ 0<z<5\ .\end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a}=(x,y,z),S:\begin{cases}x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1,\\ x,y,z>0\ .\end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a}=(z,-4y,2x),S:\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ (0\le z<1).\end{cases}$$

10 варіант:

$$1)\,\mathbf{a}=(x,y,1),S:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ 0<z<1\ .\end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a}=(2x,y,z),S:\begin{cases}x+\dfrac{y}{2}+\dfrac{z}{3}=1,\\ x,y,z>0\ .\end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a}=(y^2x,z^2y,x^2z),$$
$$S:x^2+y^2+z^2=1\ (z>0).$$

11 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x + xy^2, y - yx^2, z - 3),$$
$$S : x^2 + y^2 = z^2 \quad 0 \le z < 1 \ .$$

$$2)\,\mathbf{a} = (3x, 0, 2z), S : \begin{cases} x + \dfrac{y}{2} + \dfrac{z}{3} = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (x^2, y^2, z^2), S : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

12 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (y, -x, 1), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ 0 \le z < 4 \ . \end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a} = (2x, 3y, z), S : \begin{cases} \dfrac{x}{3} + y + \dfrac{z}{2} = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (z, x, -z), S : \begin{cases} 4z = x^2 + y^2, \\ (0 \le z < 4). \end{cases}$$

13 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (xy, -x^2, 3), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ 0 \le z < 1 \ . \end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a} = (x, 3y, -z), S : \begin{cases} \dfrac{x}{3} + y + \dfrac{z}{2} = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (zx + y, xy - z, x^2 + yz),$$
$$S : x^2 + y^2 = 2, (0 \le z < 1).$$

14 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (xz, yz, z^2 - 1), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ 0 \le z < 4 \ . \end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a} = (-2x, y, 4z), S : \begin{cases} \dfrac{x}{3} + y + \dfrac{z}{2} = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (y^2 x, x^2 y, z), S : x^2 + y^2 = 1,$$
$$x, y \ge 0 \ (0 \le z < 1).$$

15 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (y^2x, -yx^2, 1), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ 0 \le z < 5 \ . \end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a} = (x, -y, 6z), S : \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + z = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (e^y + 2x, x - y, 2z - 1),$$
$$S : x + 2y + z = 2, x, y = 0 \ (z > 0).$$

16 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (xz + y, yz - x, z^2 - 2),$$
$$S : x^2 + y^2 = z^2 \quad 0 \le z < 3 \ .$$

$$2)\,\mathbf{a} = (2x, 5y, 5z), S : \begin{cases} \dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + z = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (3x^2, -2x^2y, 2xz - z),$$
$$S : x^2 + y^2 = 1 \ (0 \le z < 1).$$

17 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (xyz, -x^2z, 3), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ 0 \le z < 2 \ . \end{cases}$$

$$2)\,\mathbf{a} = (x^2, y^2, 2z), S : \begin{cases} 2x + \dfrac{y}{2} + z = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (x^2, x, xz), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{1}{4}, \\ (0 \le z < 2). \end{cases}$$

18 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x + xy, y - x^2, z - 1),$$
$$S : x^2 + y^2 = z^2 \quad 0 \le z < 3 \ .$$

$$2)\,\mathbf{a} = (2x, y, -2z), S : \begin{cases} 2x + \dfrac{y}{2} + z = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\,\mathbf{a} = (xy, yz, zx), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (0 \le z < 1). \end{cases}$$

19 варіант:

$$1)\mathbf{a} = (x+y, y-x, z-2),$$
$$S : x^2 + y^2 = z^2 \quad 0 \le z < 2 \ .$$

$$2)\mathbf{a} = (x, y, 2z), S : \begin{cases} 2x + \dfrac{y}{2} + z = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\mathbf{a} = (xy, yz, zx), S : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ (x, y, z > 0). \end{cases}$$

20 варіант:

$$1)\mathbf{a} = (x, y, z-2), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ 0 \le z < 1 \ . \end{cases}$$

$$2)\mathbf{a} = (-x, y, 12z), S : \begin{cases} 2x + \dfrac{y}{2} + z = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\mathbf{a} = (z, yz, -xy), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ (0 \le z < 1). \end{cases}$$

21 варіант:

$$1)\mathbf{a} = (x + xz, y, z - x^2),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ \ z > 0 \ .$$

$$2)\mathbf{a} = (x, 3y, 8z), S : \begin{cases} x + 2y + \dfrac{z}{2} = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\mathbf{a} = (x^2, x, xz), S : z^2 = x^2 + y^2,$$
$$x, y \ge 0 \ (0 \le z < 1).$$

22 варіант:

$$1)\mathbf{a} = (x, y + yz^2, z - zy^2),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \quad z > 0 \ .$$

$$2)\mathbf{a} = (x, -y, 6z), S : \begin{cases} x + 2y + \dfrac{z}{2} = 1, \\ x, y, z > 0 \ . \end{cases}$$

$$3)\mathbf{a} = (x^2, x, xz), S : \begin{cases} z^2 = x^2 + y^2, x \ge 0, \\ (0 \le z < 1). \end{cases}$$

23 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x+z, y+z, z-x-y),$$
$$S: x^2+y^2+z^2 = 4 \quad z>0 \;.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (x, 2y, 5z), S: \begin{cases} x+2y+\dfrac{z}{2} = 1, \\ x, y, z > 0 \;. \end{cases}$$
$$3)\,\mathbf{a} = (3x^2, -2x^2y, 1-2x),$$
$$S: x^2+y^2 = 1 \; (0 \le z < 1).$$

24 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x+xy, y-x^2, z),$$
$$S: x^2+y^2+z^2 = 1 \; (z>0).$$
$$2)\,\mathbf{a} = (x, 4y, 5z), S: \begin{cases} x+2y+\dfrac{z}{2} = 1, \\ x, y, z > 0 \;. \end{cases}$$
$$3)\,\mathbf{a} = (\sqrt{z}+1+x, 2x+y, x+z),$$
$$S: z^2 = x^2+y^2 \; (0 \le z < 1).$$

25 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x+z, y, z-x),$$
$$S: x^2+y^2+z^2 = 1 \; (z>0).$$
$$2)\,\mathbf{a} = (x, y, z), \begin{cases} S: 2x+3y+z = 1, \\ x, y, z > 0 \;. \end{cases}$$
$$3)\,\mathbf{a} = (y^2+xz, yx-z, yz+x),$$
$$S: x^2+y^2 = 1 \; (0 \le z < \sqrt{2}).$$

26 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x, y+yz, z-y^2),$$
$$S: x^2+y^2+z^2 = 1 \; (z>0).$$
$$2)\,\mathbf{a} = (2x, y, z), S: \begin{cases} 2x+3y+z = 1, \\ x, y, z > 0 \;. \end{cases}$$
$$3)\,\mathbf{a} = (y^2+6x, e^z-2y+x, x+y-z),$$
$$S: x^2+y^2 = z^2 \; (1 \le z < 3).$$

27 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x - y, x + y, z),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1\ (z > 0).$$
$$2)\,\mathbf{a} = (2x, 3y, z), \begin{cases} S : 2x + 3y + z = 1, \\ x, y, z > 0\ . \end{cases}$$
$$3)\,\mathbf{a} = (y, 2zy, 2z^2), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 - z, \\ (z > 0). \end{cases}$$

28 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x + xz^2, y, z - zx^2),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 9\ (z > 0).$$
$$2)\,\mathbf{a} = (2x, 3y, 4z), S : \begin{cases} 2x + 3y + z = 1, \\ x, y, z > 0\ . \end{cases}$$
$$3)\,\mathbf{a}(x^2, x, xz), S : \begin{cases} z = x^2 + y^2, x, y \geq 0, \\ (0 \leq z < 1). \end{cases}$$

29 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x + y, y - x, z),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 4\ (z > 0).$$
$$2)\,\mathbf{a} = (x, 9y, 8z), \begin{cases} S : x + 2y + 3z = 1, \\ x, y, z > 0\ . \end{cases}$$
$$3)\,\mathbf{a} = (x^2, x, xz), S : \begin{cases} z = x^2 + y^2, y \geq 0, \\ (0 \leq z < 4). \end{cases}$$

30 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x + xy^2, y - yx^2, z),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 9\ (z > 0).$$
$$2)\,\mathbf{a} = (8x, 11y, 17z), \begin{cases} S : x + 2y + 3z = 1, \\ x, y, z > 0\ . \end{cases}$$
$$3)\,\mathbf{a} = (-x, 2y, yz), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ (0 \leq z < 4). \end{cases}$$

5.СКАЛЯРНІ ТА ВЕКТОРНІ ПОЛЯ

5.1Диференціальній операції першого порядку

Позначимо через Ω область в n – вимірному просторі (n≥2).

Говорять , що в
Ω означено скалярне (векторне)поле ,якщо в кожній точці MϵΩ означе на скалярна (векторна функція точки u=u(M) , ($\vec{F} = \vec{F}(M)$)

Фізичні приклади скалярних полів : поле температур у довільному тілі ; поле густини заряду на довільній поверхні або в суцільному середовищі ;поле густини маси в довільному тілі.

Фізичні приклади векторних полів : електричне поле системи електричних зарядів , що характеризуються в кожній точці вектором напруженості $\vec{E}$; магнітне поле , яке утворене електричним струмом і характеризується в кожній точці вектором магнітної індукції $\vec{B}$; поле тяжіння яке утворене системою мас і характеризується в кожній точці вектором сили тяжіння $\vec{F}$, що діє в цій точці на одиничну масу ; поле швидкостей руху рідини , що описується в кожній точці вектором швидкості $\vec{V}$.

Фізичні скалярні та векторні поля не залежать від вибору системи координат : величина $u(M)$ є лише функцією точки M і , можливо часу (нестаціонарні поля) , а вектор $\vec{F}(M)$ повністю визначається своїм модулем $\left|\vec{F}(M)\right|$ і напрямом.

Якщо в просторі введено декартову систему координат , то стаціонарне скалярне поле описується функцією n змінних

$u = u(M) = u(\vec{x}) = u(x_1, \dots, x_n)$, де $(x_1, \dots, x_n)$ - - координати точки M вбо II радіус-вектора $\vec{u} = \vec{x} = \overrightarrow{OM}$ у вибраній системі координат .

Аналогічно для векторного поля , наприклад , у тривимірному просторі

$\vec{F}(M)$=(X(x,y,z) Y(x,y,z) , Z(x,y,z)) $\vec{F}(M) = \mathrm{X(x, y, z)}\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{Y(x, y, z)}\vec{\mathrm{j}} + \mathrm{Z(x, y, z)}\vec{\mathrm{k}}$

Найпростішою характеристикою скалярного поля є лінії рівня $u(x, y) = C$ в R_3 ,поверхні рівня $u(x, y, z) = C$, або аквіопетеціальні поверхні , в R_3 і гіперповерхні рівня

$u(x_1, \dots, x_n) = \mathrm{C}$ в $R_n (n > 3)$.

Зручною геометричною характеристикою векторного поля $\vec{F}(M)$ є векторні лінії – криві , у кожній точці M яких вектор $\vec{F}(M)$ є до –

Точним вектором до цієї лінії. Векторні лінії поля тяжіння ,електричного та магнітного полів називаються виловими лініями ,а поля швидкостей – лініями потоку. Так , силові лінії електричного поля двох різнойменних зарядів є криві , які починаються на одному заряді і закінчуються на другому . Силові лінії магнітного поля струму є замкненими лініями.

Диференціальні рівняння векторних ліній $\vec{r} = \vec{r}(t)$ у векторній формі мають вигляд $[\overrightarrow{dr}, \vec{F}] = \vec{0}$.Остання рівність еквівалентна системі диференціальних рівнянь

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z}.$$

Конкретна векторна лінія, що проходить через точку $M_\circ(x_\circ, y_\circ, z_\circ)$, додатково визначається умовою

$\vec{r}(t_\circ) = \vec{r_\circ}$, де $\vec{r_\circ} = \overrightarrow{OM_\circ}$, або в координатній формі

$x(t_\circ) = x_\circ$, $y(t_\circ) = y_\circ$,$z(t_\circ) = z_\circ$.

Нехай $\vec{S} = cos\alpha\vec{\imath} + cos\beta\vec{\jmath} + cos\gamma\vec{k}$ – одиничний вектор напряму S. Похідна скалярного поля $u(M)$ у точці вздовж напряму S позначається $\frac{\partial u}{\partial s}$, визначається як $\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{j\to 0} \frac{u(\vec{r_\circ}+\delta\vec{S})-u(\vec{r_\circ})}{\delta}$

І характеризує швидкість зміни поля $u(M)$ в напрямі S . Похідна $\frac{\partial u}{\partial s}$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_{M_\circ} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_\circ} cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_\circ} cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_\circ} cos\gamma$$

Градієнтом скалярного поля $u(M)$ (позначають $grad\ u$) називається вектор

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{\mathrm{k}}$$

Отже, як $\frac{\partial u}{\partial s} = (\vec{s}, grad\ u\ ) = |rad\ u| \cos\varphi$

Де φ – кут між градієнтом і вектором $\vec{s}$. З останнього співвідношення випливає , що $u(M)$ набуває найбільшого значення при $\varphi = 0$ тобто в напрямі $grad\ u$ у заданій точці. Тобто вектор $grad\ u$ у даці , а $|grad\ u|$ є швидкість зростання поля в цьому напрямі. Таким чином . вектор $grad\ u$

не залежить від вибору системи координат і визначається самою функцією $u(M)$.

Нехай точка $M_\circ$ належить поверхні рівня $u(x,y,z) = C$ скалярного диференціального поля $u(M)$,тобто $u(M_\circ) = \mathrm{C}$. Тоді рівняння дотичної площини , проведеної до поверхні рівняння в точці $M_\circ$,має вигляд

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_\circ}(x - x_\circ) + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_\circ}(y - y_\circ) + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_\circ}(z - z_\circ) = 0$$

Де (x,y,z) - координати біжучої точки М дотичної площини , або $(grad\, u(M_\circ), \overrightarrow{M_\circ M} = 0$

Таким чином , $(grad\, u(M_\circ)$ є нормальним вектором дотичної площини і перпендикулярний до поверхні рівня , яка проходить через точку $M_\circ$.

Векторне поле $\vec{F}(M)$ називається потенціальним в області , якщо його можна подати в цій області як градієнт певного скалярного поля $u(M)$: $\vec{F} = grad\, u$.Функцію $u(M)$ в цьому випадку називають скалярним потенціалом векторного поля $\vec{F}(M)$ (іноді потенціалом векторного поля називають таку функцію $u(M)$, що $\vec{F} = -grad\, u$

Приклад 5.1.1 Розглянемо поле тяжіння точкової маси m ,розміщеної в початку координат . Воно описується векторною функцією $\vec{F} = -\gamma\frac{m}{r^3}\vec{r}$. де γ – гравітаційна стала ;$\vec{r} = (x,y,z) -$ радіус-вектор точки М $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ – його модуль .З такою силою , згідно із законом Ньютона ,це поле діє на одиничну масу , розміщену в точці М. Поле тяжіння є потенціальним . Його можна подати як градієнт скалярної функції $u(M) = \gamma\frac{m}{r}$, що її називають ньютонівським потенціалом поля тяжіння точкової маси m . Справді

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma m\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = \gamma m\left(-\frac{m}{r^2}\right)\frac{\partial r}{\partial x} =$$

$= -\gamma m\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) = -\gamma m\frac{x}{r^3}$ Аналогічно $\frac{\partial u}{\partial y} == -\gamma m\frac{y}{r^3}$; $\frac{\partial u}{\partial z} == -\gamma m\frac{z}{r^3}$

Тому $grad\, u = -\gamma\frac{m}{r^3}\left(x\vec{\mathrm{i}} + y\vec{\mathrm{j}} + z\vec{\mathrm{k}}\right) = -\gamma\frac{m}{r^3}\vec{r} = \vec{F}(M)$

Поверхнями рівня $u(M)$,тобто еквіпотенціальними поверхнями , є поверхні куль з центрами в початку координат . Справді

$$\gamma\frac{m}{r} = C \ \Leftrightarrow r = \gamma\frac{m}{c} \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \text{ де } R = \gamma\frac{m}{c}$$

Приклад 5.1.2 Знайти похідну скалярного поля $u - \ln(xy + yz + xz)$ у точці $M_1(1,1,1)$ за напрямом M_1M_2 , де $M_2(1,4,5)$. Визначимо координати одиничного вектора напряму :

$$\vec{S} = \frac{\overrightarrow{M_1M_2}}{\left|\overrightarrow{M_1M_2}\right|} = \frac{3}{5}\vec{j} + \frac{4}{5}\vec{k} = \frac{1}{5}(3\vec{j} + 4\vec{k})$$

Обчислимо частинну похідну функції $u(x,y,z)$ у точці M_1за змінною

$$\frac{\partial u}{\partial x}(M_1) = \frac{x+y}{xy + y^2 + z^2}\bigg|_{M_1} = \frac{2}{3}$$

Оскільки змінні x, y, z входять до виразу для функції $u(x,y,z)$ симетрично ,то ураховуючи , що для точки M_1 $x + y + z = 1$,маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{M_1} = \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{M_1} = \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{M_1} = \frac{2}{3}$$

Отже , $grad\ u\ (M_1) = \frac{2}{3}(\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k})$,тобто

$$\frac{\partial u}{\partial M_1M_2}\bigg|_{M_1} = \left(\vec{S}, grad\ u(M_1)\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{5}(0\cdot 1 + 3\cdot 1 + 4\cdot 1) = \frac{14}{15}$$

<u>Приклад 5.1.3 </u>Знайти векторну лінію поля $\vec{F} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$, що проходить через точку $M_1(1,1,1)$. Складемо систему диференціальних рівнянь $\frac{dx}{2} = \frac{dy}{2} = \frac{dz}{3}$.

Прирівнюючи ці співвідношення до dt , маємо $dx = 2dt$, $dy = 2dt, dz = 3dt$. Проінтегрувавши ,дістанемо вирази $x = 2t + C_1$, $y = 2t + C_2, z = 2t + C_3$,які описують множину паралельних прямих $\frac{x-C_1}{2} = \frac{y-C_2}{2} = \frac{z-C_3}{3}$,які проходять через точки $\text{M}(C_1, C_2, C_3)$. Виберемо

$C_1 = C_2 = C_3 = 1$ тоді пряма $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$ проходить через задану точку $\text{M}_1(1,1,1)$

<u>Приклад 5.1.4 </u>Знайти векторні лінії поля $\vec{F} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ складемо систему диференціальних рівнянь , що визначають векторні лінії :$\frac{dx}{dy} = \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dz}$ З першої пропорції після інтегрування маємо $x^2 - y^2 = \text{C}_1$. Для інтегрування другої пропорції скористаємося лемою

Лема . Нехай справджується співвідношення

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$, тоді будуть виконуватися й співвідношення

$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n}{\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_n b_n}$ де $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$- довільні дійсні числа

Таким чином , якщо взяти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 = 1$, дістанемо

$\frac{dx+dy+dz}{x+y+z} = \frac{dz}{z}$ або $\frac{d(x+y+z)}{x+y+z} = \frac{dz}{z}$

Зінтегрувавши, отримаємо, що векторними лініями нашого поля є лінії перетину площин x+y+z=Cz та гіперболічних циліндрів $x^2 - y^2 = C_1$.

Завдання 41

1.Знайти похідну скалярного поля u(x,y,z) у точці M_1 за напрямом $\overrightarrow{M_1M_2}$, а також кут між градієнтами grad u(M_1) і grad(M_2) за таких умов (1-30):

1. u=$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $M_1(1,2,2)$, $M_2(1,-1,-2)$.

2. u=ln$(x^2+y^2+z^2)$, M_1(-1,2,2), $M_2(2,2,6)$.

3. u=$(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-1}{2}}$, M_1(-1,2,-2), $M_2(2,4,0)$.

4. u=$(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}$, M_1(2,2,1), $M_2(3,4,-1)$.

5. u=$x^2+y^2+z^2$, M_1(1,1,1), M_2(2,3,3).

6. u=xyz, M_1(1-,1-,0), M_2(1,1,1).

7. u=arctg$\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, M_1(2,1,2), M_2(1,3,0).

8. u=$x^2+y^2+2y-2x+z$, M_1(0,0,0), $M_2(1,2,2)$.

9. u=xy+yz, M_1(0,1,0), $M_2(-1,-1,2)$.

10. u=ln(xy+yz), M_1(0,1,0), $M_2(-1,-1,2)$.

11. u=x^2-2yz, M_1(1,1,0), M_2(2,2,2).

12. u=ln(x^2-2yz), M_1(-1,1,0), $M_2(0,-1,2)$.

13. u=x^2-xy+z^2, M_1(0,-1,-1), $M_2(1,1,1)$.

14. u=arcsin(x^2-2yz), M_1(2,1,2), $M_2(2,2,1)$.

15. u=arctg(x^2+2yz), M_1(2,0,0), M_2(1,1,1).

16. u=ln($x^2 - xy + z^2$), M_1(0,-1,-1), $M_2(0{,}2{,}1)$.

17. u=arctg($x^2 - xy + z^2$), M_1(1,2,1), $M_2(1{,}0,-1)$.

18. u=$\sqrt{x^2 - xy + z^2}$, M_1(0,2,1), $M_2(1{,}0,-1)$.

19. u=$\sqrt{x^2 + 2yz}$, M_1(1,2,2), $M_2(2{,}4{,}4)$.

20. u=arctg xyz, M_1(2,1,0), $M_2(0,-1{,}1)$.

21. u=ln($x^2 + 2yz$), M_1(-1,1,1), $M_2(0,-1,-1)$.

22. u=arctg(xy+yz), M_1(2,0,1), $M_2(0{,}2{,}0)$.

23. u=arcsinxyz, M_1(0,2,1), $M_2(1{,}0,-1)$.

24. u=xz^2-yz, M_1(-1,2,1), $M_2(1{,}1,-1)$.

25. u=arcsin($x^2 - xy + z^2$), M_1(1,2,1), $M_2(1{,}1{,}0)$.

26. u=$\sqrt{xz^2 - yz}$, $M_1(2{,}1{,}1)$, $M_2(1{,}0{,}1)$.

27. u=ln($xz^2 + yz$), M_1(2,-1,1), $M_2(3,-2{,}1)$.

28. u=arctg($xz^2 + yz$), M_1(-2,1,1), $M_2(-1{,}1{,}2)$.

29. arcsin($xz^2 - yz$), M_1(2,2,1), $M_2(1{,}1{,}1)$.

30.u=xyz-xy^2, M_1(-1,-1,1), $M_2(1{,}1{,}0)$.

Завдання 42

Знайти вектори і лінії поданих далі полів (1-30):

3. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$; 2. $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$; 3. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$;

4. $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z^2\vec{k}$; 5. $\vec{a} = \sqrt{x}\vec{i} + \sqrt{y}\vec{j} + z^2\vec{k}$; 6. $\vec{a} = x^{\frac{2}{3}}\vec{i} + y^{\frac{2}{3}}\vec{j} + z^{\frac{2}{3}}\vec{k}$;

7. $\vec{a} = y^{\frac{2}{3}}\vec{i} + x^{\frac{2}{3}}\vec{j} + x^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}\vec{k}$; 8. $\vec{a} = xy\vec{i} + xy\vec{j} + x\sqrt{2}\vec{k}$; 9. $\vec{a} = xz\vec{i} + xy\vec{j} + xz\vec{k}$;

10. $\vec{a} = \dfrac{\vec{i}}{\sqrt{x}} + \dfrac{\vec{j}}{\sqrt{y}} + \dfrac{\vec{k}}{\sqrt{z}}$; 11. $\vec{a} = \dfrac{\vec{i}}{\sqrt{y}} + \dfrac{\vec{j}}{\sqrt{x}} + \dfrac{\vec{k}}{\sqrt{xz}}$; 12. $\vec{a} = \cos^2 x\vec{i} + \cos^2 y\vec{j} + \cos^2 z\vec{k}$;

13. $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$; 14. $\vec{a} = \sin^2 x\vec{i} + \sin^2 y\vec{j} + \sin^2 z\vec{k}$; 15. $\vec{a} = x\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$;

16. $\vec{a} = \vec{i} + \overrightarrow{yj} + z\vec{k}$; 17. $\vec{a} = e^x\vec{i} + e^y\vec{j} + e^z\vec{k}$; 18. $2^x\vec{i} + 3^y\vec{j} + 4^z\vec{k}$;

19. $\vec{a}=\frac{\vec{i}}{\cos x}+\frac{\vec{j}}{\cos y}+\frac{\overrightarrow{k}}{\cos z}$; 20. $\vec{a}=\frac{\vec{i}}{\sin x}+\frac{\vec{j}}{\sin y}+\frac{\overrightarrow{k}}{\sin z}$; 21. $\vec{a}=e^{y}\vec{i}+e^{x}\vec{j}+e^{x+z}\vec{k}$;

22. $\vec{a}=\frac{\vec{i}}{x}+\frac{\vec{j}}{y}+\frac{\vec{k}}{z}$; 23. $\vec{a}=tgx\vec{i}+tgy\vec{j}+tgz\vec{k}$; 24. $\vec{a}=ctgx\vec{i}+ctgy\vec{j}+ctgz\vec{k}$;

25. $\vec{a}=(y-z)\vec{i}+(z-x)\vec{j}+(x-y)\vec{k}$; 26. $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+\sqrt{x^2+y^2}\vec{k}$; 27. $\vec{a}=\frac{\vec{i}}{y}+\frac{\vec{j}}{x}+xy\vec{k}$;

28. $\vec{a}=\frac{\vec{i}}{2xy}+\frac{\overrightarrow{j}}{x^2}+x^2y\vec{k}$; 29. $\vec{a}=(2y-z)\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$; 30. $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+(x+y)\vec{k}$;

5.2. Диференціальні операції другого порядку

Нехай в області $\Omega\subset R_3$ задано скалярне поле u(x,y,z) і векторне поле $\vec{F}$ = $\vec{F}=\vec{F}(x,y,z)$ =(X(x,y,z);Y(x,y,z);Z(x,y,z)). Якщо функції u, X, Y, Z в Ω мають неперервні часткові похідні другого порядку, то у свою чергу grad u I rot$\vec{F}$ є диференційованими векторними полями, а div$\vec{F}$ - диференційованим скалярним полем. Таким чином, маємо диференціальні операції другого порядку div grad u,rot grad u,div rot$\vec{F}$,rot rot$\vec{F}$, grad div$\vec{F}$.З допомогою оператора Гамільтона

/ «набла»- вектора/ці операції можна записати так:

1. div grad u=$\nabla(\vec{\nabla}$u)=$\vec{\nabla}^2$u=Δu,

   де $\vec{\nabla}=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ - оператор Гамільтона,

   $\nabla^2=\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\vec{i}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\vec{j}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{k}$ - оператор Лапласа;

2.rot gradu=($\vec{\nabla}*\vec{\nabla}$)u=$\bar{0}$ як векторний добуток колінеарних векторів;

3.div rot$\vec{F}$ =$\vec{\nabla}\bullet(\vec{\nabla}*\vec{F})$=0 як мішаній добуток трьох векторів;

4.rot rot$\vec{F}$ =$\vec{\nabla}*(\vec{\nabla}*\vec{F})$=$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\bullet\vec{F})$-$\vec{\nabla}^2\vec{F}$ =grad div$\vec{F}$ -$\Delta\vec{F}$ (тут використано формулу для запису подвійного векторного добутку);

5.grad div $\vec{F}$ =$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\vec{F})$.

Неперервна в замкненій області $\overline{\Omega}$ функція u, яка задовольняє в середині області $\overline{\Omega}$ рівняння Лапласа Δu=0, називається гармонічною. Оператор Лапласа широко застосовується у рівняннях математичної фізики.

Векторне поле $\vec{F}$ називають потенціальним, якщо існує скалярна функція u=u(x,y,z) – потенціал поля, така ,що $\vec{F}$(x,y,z) =grad u(x,y,z) . Поле $\vec{F}$ називають безвихровим, якщо rot $\vec{F}$ =0.

Оскільки rot grad u=$\bar{0}$, то потенціальне поле $\vec{F}$ grad u є безвихровим (і навпаки). Потенціал такого поля можна знайти за формулою:

$$u=\int_{x_0}^{x} x(x,y_{0,}z_0)dx+\int_{x_0}^{x} x(x,y_{,}z_0)dx+\int_{x_0}^{x} x(x,y,z)dx+C$$

Якщо div$\vec{F}$ =0,то поле $\vec{F}$ називають соленоїдальним. Оскільки div rot$\vec{F}$ =0, то поле, утворене rot$\vec{F}$, є соленоїдальним.

Якщо поле є потенціальним і соленоїдальним, то його називають гармонічним.

Приклад 5.2.1. Знайти grad div$\vec{F}$, якщо $\vec{F}=(x^3,y^3,z^3)$.

grad div$\vec{F}$ = $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\bullet(x^3\vec{i}+y^3\vec{j}+z^3\vec{k}))$=$\vec{\nabla}$ $(3x^2\vec{i}+3y^2\vec{j}+3z^2\vec{k})=6x\vec{i}+6y\vec{j}+6z\vec{k}$ =6$\bar{r}$

$\bar{r}$ =(x,y,z).

Приклад 5.2.2. Довести формулу:

div(u grad v)= grad u$\bullet$ u grad v+uΔv.

div(u grad v)= $\vec{\nabla}$(u$\bullet$ $\vec{\nabla}$v)= ($\vec{\nabla}$u$\bullet$ $\vec{\nabla}$v)+u$\vec{\nabla}\bullet\vec{\nabla}$v=

= (grad u$\bullet$ grad v)+uΔv.

Приклад 5.2.3. Переконатися, що поле

$\vec{F}$ =2xy$\vec{i}$ + (x^2-2yz)$\vec{j}$ - y^2 $\vec{k}$ потенціальне.

Знайдемо

$$\text{rot}\vec{F}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy & (x^2-2yz) & -y^2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2xy & (x^2-2yz) & -y^2\end{vmatrix}=\vec{i}\,(-2y+2y)+\vec{j}\,(0-0)+\vec{k}\,(0-0)=\bar{0}.$$

Таким чином поле $\vec{F}$ - потенціальне (виконується необхідна і достатня умова потенціальності поля).

Показати, що функція $u=\dfrac{k}{r}$, де $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, r≠0, задовольняє рівняння Лапласа

$$\Delta u=\Delta\Big(\frac{k}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\Big)=\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{-xk}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{-yk}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\Big)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{-zk}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\Big)=\frac{-k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3kx^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+$$

$$+\frac{3ky^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}-\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}+\frac{3kz^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}=\frac{3k}{r^3}+\frac{3kr^2}{r^5}=0.$$

Тобто для довільних (x,y,z)≠(0,0,0) функція $u=\frac{k}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$ задовольняє рівняння Лапласа

$\Delta u=0$.

Завдання 43

Знайти:

1. $\mathrm{rotrot}\vec{F}$, де $\vec{F}=xy^2\vec{i}+yz^2\vec{j}+zx^2\vec{k}$.
2. $\mathrm{divgrad}(u,v)$, де $u=u(x,y,z);v=v(x,y,z)$.
3. $\mathrm{rotrot}\,(u\vec{a})$, де u – скалярна функція, $\vec{a}$ - скалярний вектор.
4. Знайти $\mathrm{graddiv}\,(u\vec{a})$, $\vec{a}$ - скалярний вектор.
5. Знайти $\mathrm{graddiv}\,(u\vec{F})$.
6. Довести, що $\Delta(u,v)=v\Delta u+2(\mathrm{grad}u\bullet\mathrm{grad}v)+u\Delta v$, де u і v - скалярні функції.
7. Обчислити $\mathrm{div}(u\,\mathrm{grad}u)$.
8. Обчислити $\mathrm{rot}(u\,\mathrm{grad}v)$.
9. $\mathrm{rot}(\vec{F}x\mathrm{rot}\vec{F}_1)$.
10. Для векторного поля $\vec{F}=x^2y^2\vec{i}+y^2z^2\vec{j}+z^2x^2\vec{k}$ перевірити, що виконується рівні $\mathrm{rotrot}\vec{F}=\mathrm{graddiv}\vec{F}-\Delta\vec{F}$.
11. Для векторного поля $\vec{F}$ завдання 10 перевірити, що $\mathrm{divrot}\vec{F}=0$.
12. Показати, що векторне поле $\vec{F}=xyz\vec{i}+x^2z\vec{j}+x^2y\vec{k}$ потенціальне і знайти його потенціал.
13. Перевірити потенціальність і знайти потенціал поля $\vec{F}=(yz-xy,xz-\frac{x^2}{2}+yz^2,xy+y^2z)$.
14. Перевірити потенціальність і знайти потенціал поля $\vec{F}=(2xy,x^2-2yz,xy-y^2)$.
15. Знайти $\mathrm{graddiv}\,(u\vec{a})$, u – скалярна функція, $\vec{a}$ - скалярний вектор.

16.Знайти grad div (u$\vec{F}$).

17.Показати, що потенціал u плоского векторного поля.

$\vec{F}$(x,y)=($\frac{x}{x^2+y^2}$; $\frac{y}{x^2+y^2}$) задовольняє рівняння Лапласа $\Delta u = 0$.

18.Показати, що $u = ln\frac{1}{x^2+y^2}$ задовольняє рівняння Лапласа $\Delta u = 0$.

19.Пказати, що потенціал u електричного поля $\vec{E} = \frac{ke}{r^3}\vec{r}$ точкового заряду e , який вміщено у початок координат, задовольняє при $r \neq 0$ рівняння Лапласа $\Delta u = 0.$ (причому $k = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\vec{F}$=(x,y,z)).

20.Для двічі диференційованого векторного поля $\vec{F}$=(X(x,y,z) , Y(x,y,z) , Z(x,y,z)) обчислити div rot $\bar{F}$,rot rot $\vec{F}$, grad div $\vec{F}$.

Виконати завдання 20 для таких векторних полів (21-23);

21) $\vec{F} = (x + yx - y, z + 1,).$

22) $\vec{F} = (x, y, -2z).$

24)Довести соленої дальність поля $\vec{F} = r\left[\vec{a} \times \overrightarrow{r\quad}\right]$, до $\overrightarrow{a}$–сталий вектор $\vec{r}$ – радіус-вектор точки , $r = |\bar{r}|$.

Застосовуючи правила дії оператора $\overrightarrow{\nabla}$(оператора Гамільтона) на добуток скалярних і векторних функцій , довести тотожність (25-30);

25) $div\ \left[\overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2}\right] = \left(\overrightarrow{F_2}\, rot\, \overrightarrow{F_1}\right) - (\overrightarrow{F_1}\, rot\, \overrightarrow{F_2}).$

26) $grad\ (u\ v) = ugradv + vgradu.$

27) $rot\ \left(u\vec{F}\right) = urot\vec{F} + \left[\vec{F} \times gradu\right].$

28) $div\ \left(u\vec{F}\right) = udiv\vec{F} + \left(\vec{F} gradu\right).$

29) $grad\ \left(\overrightarrow{F_2} \cdot \overrightarrow{F_1}\right) = \left(\overrightarrow{F_1} \cdot\ \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{F_2} + \left(\overrightarrow{F_2} \cdot\ \overrightarrow{\nabla}\right) + \left[\overrightarrow{F_1} \times rot\overrightarrow{F_2}\right] + \left[\overrightarrow{F_2} \times rot\overrightarrow{F_1}\right]$

30)) $rot\ \left[\overrightarrow{F_1} \times \overrightarrow{F_2}\right] = \left(\overrightarrow{F_2} \cdot\ \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{F_1} - \left(\overrightarrow{F_1} \cdot\ \overrightarrow{\nabla}\right)\overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_1} div\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} div\overrightarrow{F_1}.$

5.3Інтегральні характеристики векторних полів

Розглянемо дві інтегральні характеристики векторного поля : потік і циркуляцію. Нагадаємо , що потік $\bar{F}$=(X(x,y,z) , Y(x,y,z) , Z(x,y,z)) через орієнтовну двосторонню поверхню S , яка означена одним із рівнянь $z = \varphi(x, y)$ або $\Phi(x, y, z) = 0$, знаходимо як $\iint_S\ (\bar{F} \cdot \vec{n}^{\circ})dS = \iint_S\ [X(x, y, z)dydz + Y(x, y, z)dxdz + Z(x, y, z)dxdy]_1 (6 \cdot 1)$ де $\vec{n}$- нормально до поверхні S.

Потік – глобальна характеристика векторного поля (наприклад . кількість магнітних силових ліній , що проходять через поверхню S). Якщо sign П = + 1 , то напрям векторного поля і вибрані напрям нормалі $\bar{n}$ до поверхні S “збігаються”(утворюють гострий кут); якщо sign П = -1 , то вони “Протилежні” (утворюють тупий кут). Коли S замкнена поверхня і потік через неї дорівнює нулю , можна говорити (у гідромеханіці) , що скільки рідини витікає через поверхню , стільки ж і витікає. У цьому разі можна також стверджувати , що або всередині поверхні немає джерел чи стоків , або вони компенсують один одного. Нехай у точці P джерело . Розглянемо кулю (об'єм ||Δ V з центром у точці P , тоді потік через поверхню кулі є $\Delta\Pi = 0$. Розглянемо відношення $\frac{\Delta\Pi}{\Delta V}$ і перейдемо до границі ,коли куля стискається в точку P .Дістанемо $\frac{d\Pi}{dV}$. Звідси $d\Pi = div\,\vec{F}(P)dV$ або

$\Pi = \iiint_V \ div\,\bar{F}dV$. Маємо векторну форму формули Гаусса – Остроградського

$\iint_S \ (\vec{F}\cdot\vec{n}^{\circ})dS = \iiint_V \ div\,\vec{F}dV$, де V – тіло , S- зовнішня сторона його поверхні .

Остання формула в теорії інтегралів дає зв'язок між поверхневим інтегралом 2-го роду по замкненій поверхні S і потрійним інтегралом по області V . яка обмежена поверхнею S :

$\iint_S \ (\vec{F}\cdot\vec{n}^{\circ})dS = \iint_S \ [X(x,y,z)dydz + Y(x,y,z)dxdz + Z(x,y,z)dxdy] \ = \iiint_V \ \left[\frac{\partial X}{\partial\square} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right] dxdydz$ (5.2) . Тому в декартових координатах маємо $div\,\vec{F} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$ (5.3)

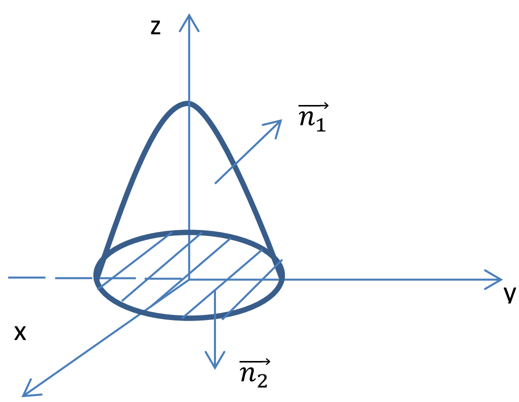
Приклад 5.3.1 Знайти потік поля
$\vec{F} = (2x, 0, z)$через зовнішню сторону поверхні еліпсоїда

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.Оскільки поверхня замкнена ,то для знаходження потоку скористаємося ,формулою Гаусса – Острогадського (5.2);

$\Pi = \iint_S \ 2xdydz + 2dxdy = \iiint_V \ div\,\vec{f}dxdydz = |div\,F = \frac{\partial}{\partial x}\ (2x) + \frac{\partial}{\partial y}(O) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 2 + 1 = 3\,| = \ 3\ \iiint_V \ dxdydz = 3\cdot\frac{3}{4}\pi abc = 4\pi abc$. (Об'єм еліпсоїда дорівнює $\frac{4}{3}\pi abc$).

Приклад 5.3.2 Знайти потік поля $\vec{F} = z^2\vec{\imath} + x^2\vec{\jmath} + y^2\vec{k}$ через зовнішню чстину поверхні параболоїда $x^2 + y^2 = 4 - z(z > 0)$. Нехай $S = \ S_1 \cup S_2$, де $S_1\colon x^2 + y^2 = 4 - z \ \ S_2\colon z = 0$.

Оскільки div $\vec{F} = 0$, то $\Pi_3 = \Pi_{3_1} + \Pi_{3_2} = 0$ або $\Pi_{3_1} - \Pi_{3_2}$, але потік через поверхню S_2 знайти просто :



$П_{З_2} = \iint_{S_2} (\vec{F} \cdot \overrightarrow{n_2}) ds = \left| \begin{matrix} \overrightarrow{n_2} = -\vec{k} = (0,0,-1) \\ ds = dxdy \end{matrix} \right| = \iint_{S_2} (-y^2) dxdy =$
$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \, sin^2\varphi \cdot \rho d\rho = -4\pi.$

Отже , $П_{З_1} = 4\pi$. Другою інтегральною характеристикою векторного поля $\vec{F} = (X, Y, Z,)$. є циркуляція – робота поля вздовж замкненого контура l (нехай $\vec{\tau}^{\circ}$ - орт дотичної до кривої l з вибраним напрямом) . Тоді
$Ц = А = \oint_l (\vec{F} \cdot \vec{\tau}^{\circ}) dl = \oint_l \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \oint_l X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy +$
$Z(x, y, z)\, dz$ (5.4)

Останній інтеграл є криволінійним інтегралом 2-ого роду . Оскільки $\left(\vec{F} \cdot \vec{\tau}^{\circ}\right) dl = \left(np_{\vec{\tau}^{\circ}} \vec{F}\right) dl$, то можна говорити ,що циркуляція характеризує завихреність поля у напрямі Р , циркуляція – глобальна характеристика поля . Локальною характеристикою є ротор (обертова складова вектора $\vec{F}$) .

Вибираємо в просторі R_3 напрям і назвемо його $\vec{n}$, у площині перпендикулярній до $\vec{n}$,розглянемо елементарну область з площею ΔІ і межею l . Знайдемо границю середньої густини циркуляції $\frac{ΔЦ}{\Delta S}$.

Коли межа області стягується в точку. Цю границю називають проекцією вектора ротора поля $\vec{F}$ на $\vec{n}$,тобто $\frac{dЦ}{dS} = np_{\vec{n}} \, rot \, \vec{F}$. Звідси , зауваживши , що $dЦ = \left(np_{\vec{n}} \, rot \, \vec{F}\right) dS$, прийдемо д овекторної форми формули Стокса :

$Ц = \iint_S \left(rot \, \vec{F} \, \vec{n}^{\circ}\right) ds = \oint \vec{F} \cdot \overrightarrow{dl} = \oint_l X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy +$
$Z(x, y, z)\, dz$ *(5.5)*

Формула Стокса дає зв’язок між криволінійним інтегралом 2-ого роду

(по замкненій кривій l) і поверхневим інтегралом 2-го роду по S , яка “натягнена” на контурі l . При цьому обхід контура l виконується так (l^{+}) ,щоб вибрана сторона поверхні S залишалася ліворуч при русі вздовж l .

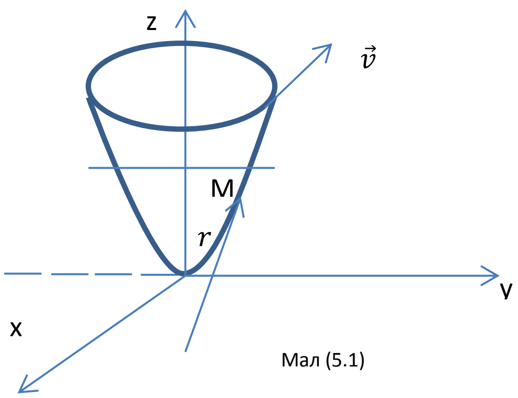
$\oint_{l+} X(x,y,z)dx + Y(x,y,z)dy + Z(x,y,z)\,dz = \iint_S \left(\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x}\right) dxdz + \left(\frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y}\right) dxdy$ (5.6)

Порівнявши формули (5.5) і (5.6) дістанемо , що $rot\,\vec{F}$ можна знайти в декартових координатах як значення символічного визначника

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X(x,y,z) & Y(x,y,z) & Z(x,y,z) \end{vmatrix} \quad (5.7)$$

Приклад 5.3.3 Розглянемо поле лінійних швидкостей поступального та обертального рухів абсолютно твердого тіла .

1)Поступальний рух :$\vec{F} = \vec{v} = |\vec{v}|\vec{e}^{\circ}$, де $\vec{e}^{\circ}$ - орт прямої вздовж якої напрямлений вектор $\vec{v}$. Знайдемо $\vec{F} = \vec{v} = |\vec{v}|\vec{e}^{\circ} = |\vec{v}| rot \cdot const = \vec{0}$



Мал (5.1)

2)Обертальний рух (мал. (5.1)) $\vec{F} = \vec{v} = \vec{\omega}^{\circ} \times \vec{r}$ ($\vec{\omega} \times \omega\vec{k}$ – кутова швидкість руху). Тоді

$$\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega\vec{\imath} + x\omega\vec{\jmath}$$

Знайдемо

$$rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot \vec{\imath} + 0 \cdot \vec{\jmath} + \vec{k}\left[\frac{\partial}{\partial x}(x\omega) + \frac{\partial}{\partial y}(y\omega)\right] = 2\omega\vec{k} = 2\omega$$

Отже , ротор характеризує обертальний рух. Він зберігається (колінеарний) з вектором кутової швидкості при обертальному русі абсолютно твердого тіла .

Приклад 5.3.4 Знайти робту поля $\vec{F} = (x, xz, z)$ вздовж замкненого контура , утвореного в результаті перетину поверхні $z^2 = 4 - x - y$ з координатними площинами (обхід контура виконується проти годинникової стрілки ,якщо дивитися з боку зовнішньої нормалі до поверхні)

Маємо $A = Ц = \oint_l \ xdx + xzdy + zdz$. Скористаємося формулою Стокса (5.6) . знайдемо $rot\,\vec{F} = (-x, 0, z)$. Тоді $Ц = \iint_s \ zdxdy - xdydz$. Обчислимо окремо кожний з інтегралів

$\iint_s \ zdxdy = \iint_{S_{xy}} \sqrt{4-x-y}\,dxdy = \int_0^4 dx \int_0^{4-x} \sqrt{4-x-y}\,dy = -\frac{2}{3}\int_3^4 (4 - x - y)^{\frac{2}{3}} \Big|_{y=0}^{y=4-x} dx = \int_0^4 \frac{2}{3}(4-x)^{\frac{2}{3}} dx = -\frac{4}{15}(4-x)^{\frac{5}{2}} \Big|_4^0 = -\frac{128}{5}$; $\iint_S \ -xdydz = \iint_{S_{yz}} -(4-y-z^2)dydz = \int_0^4 dy \int_0^{\sqrt{4-y}} (4-y-z^2)dz = \frac{128}{5}$ Тому $Ц = 0$;

Завдання 44

Знайти

а)Потік векторного поля

$\vec{F} = (X(x,y,z), Y(x,y,z), Z(x,y,z))$ через зовнішню сторону поверхні тіла , утвореного координатними площинами та частиною поверхні S (I октант);

Б)Циркуляцію цього поля вздовж замкненого контура , утвореного в результаті перетину поверхні S з координатними площинами (обхід контура виконується проти руху годинникової стрілки ,якщо дивитися з боку зовнішньої нормалі до поверхні S).

1. $F = (x - 2z, x + 3y + z, 5x + y), S: x + y + z = 1$
2. $\vec{F} = (x^2y^3, 1, z), S: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
3. $\vec{F} = (z^2, x^2, y^2), S: z^2 = a^2 - x - y$
4. $\vec{F} = (z^3, x^3, y^3), S: z = a^2 - x^2 - y^2$
5. $\vec{F} = (-yz, xz, xy), S: z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
6. $\vec{F} = (z, x, y),\ S: (z-a)^2 = x^2 + y^2$
7. $\vec{F} = (xz, y, x^2),\ S: z^2 = 4 - 3x - 2y$
8. $\vec{F} = (x^2, yz, xy), S: x^2 + y^2 + z^2 = 4$
9. $\vec{F} = (xy^2, z^3, x),\ S: z = 9 - x^2 - y^2$
10. $\vec{F} = (x^3, zy, xy^2),\ S: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$
11. $\bar{F} = (3x + y, 0, z - 2y),\ s: 3x + 4y + z = 1$
12. $\bar{F} = (xy^3, z, xy),\ \ s: x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$

13. $\bar{F} = (y, 0, xy - z),\ \ s: z = a^2 - \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

14. $\bar{F} = (z, xy, x^2 z),\ \ s: (z-3)^2 = 2x^2 + y^2$

15. $\bar{F} = (x^2, xz, z^2),\ \ s: z^2 = 1 - 2x - y$

16. $\bar{F} = (y, xz^2, y),\ \ s: x^2 + y^2 + z^2 = 3$

17. $\bar{F} = (z, yz, z^2),\ \ s: z = 1 - 4x^2 - y^2$

18. $\bar{F} = (yz, x, xz^2),\ \ s: x^2 + \frac{y^2}{4} + z^2 = 1$

19. $\bar{F} = (z, z^2, xz),\ \ s: (z-3)^2 = x^2 + 4y^2$

20. $\bar{F} = (zx, x, xy^2),\ \ s: 8x + 4y + z = 1$

21. $\bar{F} = (z + x, y, y^2 + z),\ \ s: x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$

22. $\bar{F} = (x - y, 0, z^2),\ \ s: z = 4 - 2x^2 - y^2$

23. $\bar{F} = (x + y, z, x - y),\ \ s: (z-4)^2 = 4x^2 + 9y^2$

24. $\bar{F} = (y + z, 0, z^2),\ \ s: z^2 = 4 - x - 2y$

25. $\bar{F} = (z, xy, x + z),\ \ s: z = 1 - x^2 - 4y^2$

26. $\bar{F} = (z^2, xy, x^3),\ \ s: x^2 + y^2 + 9z^2 = 1$

27. $\bar{F} = (zy, 3x, 0),\ \ s: 2x + 4y + x = 1$

28. $\bar{F} = (x^2 y, z, xy),\ \ s: (z-2)^2 = 3x^2 + y^2$

29. $\bar{F} = (3x + 4y, z, 3z - 2x + 1),\ \ s: x + 3y + z = 2$

Завдання 45

Знайти циркуляцію векторного поля (безпосередньо та за теоремою Стокса):

1 варіант:

1) $\mathbf{a} = (x^2 - y, x, 1),$
$\Gamma: x^2 + y^2 = 1 \cap z = 1.$

2) $\mathbf{a} = (y, -x, z^2), 0 \le t \le 2\pi,$
$$\Gamma:\ \ x = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, y = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}, z = \sin t.$$

2 варіант:

1) $\mathbf{a} = (xz, -1, y),$
$\Gamma: z = 5(x^2 + y^2) - 1 \cap z = 4.$

2) $\mathbf{a} = (-x^2 y^3, 1, z), 0 \le t \le 2\pi,$
$$\Gamma:\ \ x = \sqrt[3]{4}\cos t, y = \sqrt[3]{4}\sin t, z = 3.$$

3 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (yz, 2xz, xy),\ (z > 0)$$
$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 25 \cap x^2 + y^2 = 9.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (y - z, z - x, x - y), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma : \quad x = \cos t, y = \sin t, z = 2(1 - \cos t).$$

4 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x, yz, -x),$$
$$\Gamma : x^2 + y^2 = 1 \cap x + y + z = 1.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (x^2, y, -z), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma : \left\{ x = \cos t, y = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}, z = \frac{\cos t}{\sqrt{2}}. \right.$$

5 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x - y, x, -z),$$
$$\Gamma : x^2 + y^2 = 1 \cap z = 5.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (y - z, z - x, x - y), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma : \quad x = 4\cos t, y = 4\sin t, z = 1 - \cos t.$$

6 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (y, -x, z^2),$$
$$\Gamma : z = 3(x^2 + y^2) + 1 \cap z = 4.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (2y, -3x, x), 0 \le t \le 2\pi, \Gamma :$$
$$\{x = \cos t, y = \sin t, z = 1 - \cos t - \sin t.$$

7 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (yz, 2xz, y^2), (z > 0)$$
$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 25 \cap x^2 + y^2 = 16.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (2z, -x, y), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma : \quad x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 1.$$

8 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (xy, yz, xz),$$
$$\Gamma : x^2 + y^2 = 9 \cap x + y + z = 1.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (y, -x, z), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma : \quad x = \cos t, y = \sin t, z = 3.$$

9 варіант:

1) $\mathbf{a} = (y, 1 - x, -z)$, $(z > 0)$

$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 4 \cap x^2 + y^2 = 1.$

2) $\mathbf{a} = (x, z^2, y), 0 \le t \le 2\pi, \Gamma : \{x = \cos t,$

$y = 2\sin t, z = 2\cos t - 2\sin t - 1.$

10 варіант:

1) $\mathbf{a} = (y, -x, z^2),$

$\Gamma : x^2 + y^2 = 1 \cap z = 4.$

2) $\mathbf{a} = (3y, -3x, x), 0 \le t \le 2\pi, \Gamma :$

$x = \cos t, y = \sin t, z = 1 - \cos t - \sin t.$

11 варіант:

1) $\mathbf{a} = (y, -x, z^2), \Gamma : x^2 + y^2 = 1 \cap z = 4.$

2) $\mathbf{a} = (3y, -3x, x), 0 \le t \le 2\pi, \Gamma : x =$

$= 3\cos t, y = 3\sin t, z = 3 - x - y.$

12 варіант:

1) $\mathbf{a} = (2y, -3x, z^2),$

$\Gamma : x^2 + y^2 = 1 \cap z = 1.$

2) $\mathbf{a} = (6z, -x, xy), 0 \le t \le 2\pi,$

$\Gamma : \quad x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 3.$

13 варіант:

1) $\mathbf{a} = (-3z, y^2, 2y),$

$\Gamma : x^2 + y^2 = 4 \cap x - 3y - 2z = 1.$

2) $\mathbf{a} = (z, y^2, -x), 0 \le t \le 2\pi,$

$\Gamma : \quad x = z = \sqrt{2}\cos t, y = 2\sin t.$

14 варіант:

1) $\mathbf{a} = (2y, 5z, 3x),$

$\Gamma : 2x^2 + 2y^2 = 1 \cap x + y + z = 3.$

2) $\mathbf{a} = (3y, -3x, x), \Gamma : \quad x = 3\cos t,$

$y = 3\sin t, z = 3 - 3\cos t - 3\sin t,$

$0 \le t \le 2\pi.$

15 варіант:

1) $\mathbf{a} = (y, -x, z^2),$

$\Gamma : x^2 + y^2 = 1 \cap z = 4.$

2) $\mathbf{a} = \left(x, -\frac{1}{3}z^2, y\right), \Gamma : \left\{ x = \frac{1}{2}\cos t, \right.$

$y = \frac{1}{3}\sin t, z = \cos t - \frac{1}{3}\sin t - \frac{1}{4}$

$0 \le t \le 2\pi.$

16 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x-y, x, z^2),$$
$$\Gamma: x^2+y^2 = 4z^2 \cap z = \frac{1}{2}.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (4y, -3x, x), \Gamma: \quad x = 4\cos t,$$
$$y = 4\sin t, z = 4 - 4\cos t - 4\sin t,$$
$$0 \le t \le 2\pi.$$

17 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (xz, -1, y),$$
$$\Gamma: x^2+y^2+z^2 = 4 \cap z = 1.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (-z, -x, xz), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma: \quad x = 5\cos t, y = 5\sin t, z = 4.$$

18 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (2yz, xz, -x^2), (z > 0)$$
$$\Gamma: x^2+y^2+z^2 = 25 \cap x^2+y^2 = 9.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (z, x, y), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma: \quad x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 0.$$

19 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (4x, -yz, x),$$
$$\Gamma: x^2+y^2 = 1 \cap x+y+z = 1.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (y-z, z-x, x-y), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma: \quad x = 3\cos t, y = 3\sin t, z = 2(1-\cos t).$$

20 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (-y, 2, 1),$$
$$\Gamma: x^2+y^2 = z^2 \cap z = 1.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (2y, -z, x), \Gamma: \quad x = \cos t, y = \sin t,$$
$$z = 4 - \cos t - \sin t, 0 \le t \le 2\pi.$$

21 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (y, 3x, z^2),$$
$$\Gamma: z = x^2+y^2-1 \cap z = 3.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (xz, x, z^2), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma: \quad x = \cos t, y = \sin t, z = \sin t.$$

22 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (2yz, xz, y^2), \Gamma : x^2 + y^2 = 16 \cap$$
$$\cap\, x^2 + y^2 + z^2 = 25\ (z > 0).$$
$$2)\,\mathbf{a} = (-x^2y^3, 3, y), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma :\quad x = \cos t, y = \sin t, z = 5.$$

23 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (2 - xy, -yz, -xz),$$
$$\Gamma : x^2 + y^2 = 4 \cap x + y + z = 1.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (7z, -x, yz), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma : \begin{cases} x = 6\cos t, y = 6\sin t, z = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

24 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (-y, x, 3z^2), (z > 0)$$
$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 9 \cap x^2 + y^2 = 1.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (xy, x, y^2), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma :\quad x = \cos t, y = \sin t, z = \sin t.$$

25 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x, -z^2, y),$$
$$\Gamma : x^2 + y^2 - \frac{z^2}{4} = 0, z = 2.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (x, -z^2, y), 0 \le t \le 2\pi, \Gamma : x = 2\cos t,$$
$$y = 3\sin t, z = 4\cos t - 3\sin t - 3.$$

26 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x^2, yz, 2z),$$
$$\Gamma : x^2 + y^2 + z^2 = 25 \cap z = 4.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (y - z, z - x, x - y), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma :\quad x = 2\cos t, y = 2\sin t,$$
$$z = 3(1 - \cos t).$$

27 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (y, -2x, z^2),$$
$$\Gamma : z = 4(x^2 + y^2) + 2 \cap z = 6.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (-2z, -x, x^2), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma : \begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{3}, y = \dfrac{\sin t}{3}, z = 8. \end{cases}$$

28 варіант:

$$1)\mathbf{a} = (3z, -2y, 2y),$$
$$\Gamma: x^2 + y^2 = 4 \cap 2x - 3y - 2z = 1.$$
$$2)\mathbf{a} = (x, -3z^2, y), 0 \le t \le 2\pi, \Gamma: x = \cos t,$$
$$y = 4\sin t, z = 2\cos t - 4\sin t + 3.$$

29 варіант:

$$1)\mathbf{a} = (x + y, -x, 6),$$
$$\Gamma: x^2 + y^2 = 1 \cap z = 2.$$
$$2)\mathbf{a} = (x, -2z^2, y), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma: \quad x = 3\cos t, y = 4\sin t,$$
$$z = 6\cos t - 4\sin t + 1.$$

30 варіант:

$$1)\mathbf{a} = (4, 3x, 3xz),$$
$$\Gamma: x^2 + y^2 = z^2 \cap z = 3.$$
$$2)\mathbf{a} = (-x^2y^3, 4, x), 0 \le t \le 2\pi,$$
$$\Gamma: \quad x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 4.$$

Завдання 46

. Знайти потік векторного поля **a** крізь замкнену поверхню S (нормаль зовнішня):

1 варіант:

$$1)\mathbf{a}(e^z + 2x, e^x, e^y),$$
$$S: x + y + z = 1, x, y, z = 0.$$
$$2)\mathbf{a}(x + z, 0, z + y), S: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9, \\ z = x, z \ge 0. \end{cases}$$

2 варіант:

$$1)\mathbf{a} = (3z^2 + x, e^x - 2y, 2z - xy),$$
$$S: x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 4.$$
$$2)\mathbf{a} = (x^2 + y^2, y^2 + x^2, y^2 + z^2),$$
$$S: x^2 + y^2 = 1, z = 0, z = 1.$$

3 варіант:

$$1)\mathbf{a} = (\ln y + 7x, \sin z - 2y, e^y - 2z),$$
$$S: (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 1.$$
$$2)\mathbf{a} = (x^2, y^2, z^2), S: x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$
$$x^2 + y^2 = z^2 \ (z \ge 0).$$

4 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (\cos z + 3x, x - 2y, 3z + y^2),$$
$$S : z^2 = 36(x^2 + y^2), z = 6.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (3x, 0, -z), S : z = 6 - x^2 - y^2,$$
$$z^2 = x^2 + y^2 \ (z \geq 0).$$

5 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (e^{-z} - x, xz + 3y, z + x^2),$$
$$S : 2x + y + z = 2, x, y, z = 0.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (xz, z, y), S : x^2 + y^2 = 1 - z,$$
$$z = 0.$$

6 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (6x - \cos y, -e^x - z, -2y - 3z),$$
$$S : x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z = 2.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (3xz, -2x, y), S : x + y + z = 2,$$
$$x = 1, x, y, z = 0.$$

7 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = \quad 4x - 2y^2, \ln z - 4y, x + \frac{3z}{4} \quad ,$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 3.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (0, 2z - 2y, x - z), S : x^2 + y^2 = 1,$$
$$z = x^2 + 3y^2 + 1, z = 0.$$

8 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (x, z, -y), S : z = 2(x^2 + y^2),$$
$$z = 4 - 2(x^2 + y^2).$$
$$2)\,\mathbf{a} = (x^3, y^3, z^3), S : x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

9 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (\sqrt{z} - x, x - y, y^2 - z),$$
$$S : 3x - 2y + z = 6, x, y, z = 0.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (zx + y, zy - x, -x^2 - y^2),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0.$$

10 варіант:

$$1)\, \mathbf{a} = (yz + x, x^2 + y, xy^2 + z),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2z.$$
$$2)\, \mathbf{a} = (4x, -2y, -z), S : 3x + 2y = 12,$$
$$3x + y = 6, y, z = 0, x + y + z = 6.$$

11 варіант:

$$1)\, \mathbf{a} = (e^{2y} + x, x - 2y, y^2 + 3z),$$
$$S : x + y + z = 1, x, y, z = 0.$$
$$2)\, \mathbf{a} = (8x, -2y, x), S : z = x^2 + y^2,$$
$$x + y = 1, x, y, z = 0.$$

12 варіант:

$$1)\, \mathbf{a} = (\sqrt{z} - 2x, e^x + 3y, \sqrt{y + x}),$$
$$S : x^2 + y^2 = z^2, z = 2, z = 5.$$
$$2)\, \mathbf{a} = (x^2, xy, 3z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ z = 4. \end{cases}$$

13 варіант:

$$1)\, \mathbf{a} = \left(e^z + \frac{x}{4}, \ln x + \frac{y}{4}, \frac{z}{4}\right),$$
$$S : (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = 1.$$
$$2)\, \mathbf{a} = (6x, -2y, -z), S : z^2 = x^2 + y^2,$$
$$z = 3 - 2(x^2 + y^2)\ (z \geq 0).$$

14 варіант:

$$1)\, \mathbf{a} = (3x - 2z, z - 2y, 1 + 2z),$$
$$S : z^2 = 4(x^2 + y^2), z = 2.$$
$$2)\, \mathbf{a} = (z + y, x - z, z), S : x^2 + 4y^2 = 4,$$
$$3x + 4y + z = 12, z = 1.$$

15 варіант:

$$1)\, \mathbf{a} = (y + 2z, -y, 3x), S : z^2 = x^2 + y^2,$$
$$3z = 27 - 2(x^2 + y^2)\ (z \geq 0).$$
$$2)\, \mathbf{a} = (xy, yz, zx), S : x^2 + y^2 + z^2 = 16,$$
$$x^2 + y^2 = z^2\ (z \geq 0)$$

16 варіант:

$$1)\, \mathbf{a} = (x + y^2, xz + y, \sqrt{x^2 + 1} + z),$$
$$S : x^2 + y^2 = z^2, z = 2, z = 3.$$
$$2)\, \mathbf{a} = (y + 6x, 5x + 5z, 4y), S : y = x,$$
$$y = 2x, y = 2, z = x^2 + y^2, z = 0.$$

17 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = \ \ e^x + 2x, xz - y, \frac{1}{4}e^{xy} - \frac{z}{4}\ \ ,$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2y + 3.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (y, 5y, z), S : \begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ z = x, z \geq 0. \end{cases}$$

18 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (\sqrt{z} + y, 3x, 3z + 5x),$$
$$S : z^2 = 8(x^2 + y^2), z = 2.$$
$$2)\,\mathbf{a} = \ \ z, 3y - x, -z\ \ , S : x^2 + y^2 = 1,$$
$$z = x^2 + y^2 + 2, z = 0.$$

19 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (8yz - x, x^2 - 1, xy - 2z),$$
$$S : 2x + 3y - z = 6, x, y, z = 0.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (y, x + 2y, x), S : x^2 + y^2 = 2x,$$
$$z = x^2 + y^2, z = 0.$$

20 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (y + z^2, x^2 + 3y, xy),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2x.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (x, 2y - x, 3z + y), S : y = x,$$
$$y = 2x, x = 1, z = x^2 + y^2, z = 0.$$

21 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (2yz - x, xz + 2y, x^2 + z),$$
$$S : y - x + z = 1, x, y, z = 0.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (7x, z, x - y + 5z), S : z = x^2 + y^2,$$
$$z = x^2 + 2y^2, y = x, y = 2x, x = 1.$$

22 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (17x, 7y, 11z), S : z = x^2 + y^2,$$
$$z = 2(x^2 + y^2), y = x^2, y = x.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (x^2 + xy, y^2 + yz, z^2 + xz), S : x^2 +$$
$$+ y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = z^2\ (z \geq 0).$$

23 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = \left(\cos z + \frac{x}{4}, e^x + \frac{y}{4}, \frac{z}{4} - 1\right),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2z + 3.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (x, z, -y), S : \begin{cases} z = 4 - 2(x^2 + y^2), \\ z = 2(x^2 + y^2). \end{cases}$$

24 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (2x + y, 0, y + 2z),$$
$$S : z = 2 - 4(x^2 + y^2), z = 4(x^2 + y^2).$$
$$2)\,\mathbf{a} = (x^2, 0, 0), S : z = 1 - x - y,$$
$$x, y, z = 0.$$

25 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (5x - 6y, 11x^2 + 2y, x^2 - 4z),$$
$$S : x + y + 2z = 2, x, y, z = 0.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (2y - 3z, 3x + 2z, x + y + z),$$
$$S : x^2 + y^2 = 1, z = 4 - x - y, z = 0.$$

26 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (-2x, z, x + y),$$
$$S : x^2 + y^2 = 2y, z = x^2 + y^2, z = 0.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (x^2, y^2, z^2),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 1, x, y, z \geq 0.$$

27 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (2x + 2z, xz + y, 4xy - 8),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y + 4z - 8.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (2y - 15x, z - y, 3y - x), S : z = 0,$$
$$S : z = 3x^2 + y^2 + 1, x^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

28 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (y + z, x - 2y + z, x),$$
$$S : x^2 + y^2 = 1, z = x^2 + y^2, z = 0.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (2xy, 2xy, z^2),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = \sqrt{2}, z = 0.$$

29 варіант:

$$1)\,\mathbf{a} = (yz - 2x, \sin x + y, x - 2z),$$
$$S : x + 2y - 3z = 6, x, y, z = 0.$$
$$2)\,\mathbf{a} = (3x - y - z, 3y, 2z),$$
$$S : z = x^2 + y^2, z = 2y.$$

30 варіант:

$$1)\,\mathbf{a}(8x + 1, zx - 4y, e^x - z),$$
$$S : x^2 + y^2 + z^2 = 2y.$$
$$2)\,\mathbf{a}(x + y, y + z, z + x),$$
$$S : y = 2x, y = 4x, x = 1, z = y^2, z = 0.$$

Завдання 47

Знайти потік векторного поля **F** через замкнуту поверхню S. Зробити це двома способами: а) безпосередньо обчислюючи поверхневий інтеграл 2-го роду; б) використовуючи формулу Остроградського – Гауса.

1. $\vec{F} = \{x + z; 0; z + y\}$; S: $x^2 + y^2 = 9$; $z = x$; $z \geq 0$

2. $\vec{F} = \{x - y; x; 1\}$; S: $x^2 + y^2 + z^2 = 16$; $z \geq 0$

3. $\vec{F} = \{2z - x; x - y; 3x + z\}$; S: $x + y + 2z = 2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

4. $\vec{F} = \{4z; x - y - z; 3y + z\}$; S: $x - 2y + 2z = 2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

5. $\vec{F} = \{y - z; 2x + y; x + y + z\}$; S: $2x + y + z = 2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

6. $\vec{F} = \{x - 2z; y - 2z; 2x - y\}$; S: $- x + 2y + 2z = 4$; $x = 1$; $y = 0$; $z = 0$.

7. $\vec{F} = \{ z^2; 0; 0\}$; S: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

8. $\vec{F} = \{x y^2; - y x^2; x\}$; S: $x^2 + y^2 + z^2 = 9$; $z \geq 0$.

9. $\vec{F} = \{y; - x; 1\}$; S: $x^2 + y^2 = z^2$; $z = 4$; $z \geq 0$.

10. $\vec{F} = \{xyz; - x^2z; 3\}$; S: $x^2 + y^2 = z^2$; $z = 5$; $z \geq 0$.

11. $\vec{F} = \{xy; - x^2; z\}$; S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $z \geq 0$.

12. $\vec{F} = \{x + z; y; z - x\}$; S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $z \geq 0$.

13. $\vec{F} = \{2x - z; y - x; x + 2z\}$; S: $x - y + z = 2$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

14. $\vec{F} = \{ - y; xz; 2\}$; S: $x^2 + y^2 = 9$; $z = 0$; $z = 4$.

15. $\vec{F} = \{xz; yz; z^2 - 1\}$; S: $x^2 + y^2 = z^2$; $z = 0$; $z = 4$.

16. $\vec{F} = \{x y^2; - y x^2; 3 z^2\}$; S: $x^2 + y^2 = z^2$; $z = 0$; $z = 2$.

17. $\vec{F} = \{0; yz; z - y^2\}$; S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $z \geq 0$.

18. $\vec{F} = \{x + 2y; y - z; z + x\}$; S: $x^2 + y^2 = z$; $z = 9$.

19. $\vec{F} = \{x ; y + z; z - y\}$; S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

20. $\vec{F} = \{x - y; x + y; z + x\}$; S: $x^2 + y^2 = z^2$; $z = 0$; $z = 2$.

21. $\vec{F} = \{x + z; y + z; z - x - y\}$; S: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $z \le 0$.

22. $\vec{F} = \{z^2; 0; 0\}$; S: $x^2 + y^2 = z^2$; $z = 0$; $z = 4$.

23. $\vec{F} = \{y; -x; z\}$; S: $x^2 + y^2 = z$; $z = 9$.

24. $\vec{F} = \{xyz; -x^2z; 3\}$; S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $z \le 0$.

25. $\vec{F} = \{xy; -x^2; 3z\}$; S: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $z = 2$.

26. $\vec{F} = \{x + y; y + z; 2x + 2z\}$; S: $3x - 2y + 2z = 6$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

27. $\vec{F} = \{x + y + z; 2z; y - 7z\}$; S: $2x + 3y + z = 6$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

28. $\vec{F} = \{4z; x - y - z; 3y + 2z\}$; S: $-2x + y + z = 4$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

29. $\vec{F} = \{2z - x; x + 2z; 3z\}$; S: $x + 4y + z = 4$; $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$.

30. $\vec{F} = \{x y^2; -yx^2 + z; 2yz\}$; S: $x^2 + y^2 = z^2$; $z = 1$; $z = -1$.

Завдання 48

1) За допомогою формули Стокса обчислити циркуляцію векторного поля $\vec{F} = (x - 2z; x + 3y + z; 5x + y)$ вздовж контура, утвореного перетином площин $x + y + z = 1, x = 0, y = 0, z = 0$.

2)За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (xy; x; y^2)$ вздовж лінії перетину поверхонь $x^2 + y^2 = 1, x = y.$

3) За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (x; z^2, y)$ вздовж лінії перетину поверхонь $x^2 + y^2 = 1, z = 2x - y - 1.$

4) За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (7z; -x; yz)$ вздовж лінії перетину поверхонь $x^2 + y^2 = 9, z = 2.$

5) За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (xz; x; z^2)$ вздовж лінії перетину поверхонь $z^2 + y^2 = 1, z = y$

6) За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (x^2 - yz; y^2 - zx; z^2 - xy)$ вздовж лінії перетину поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 = 1$.

7) За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (x, z^2; y)$ вздовж лінії перетину поверхонь $x^2 + y^2 = 4, z = y$.

8) За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля **F** = (4y; -3x; y) вздовж лінії перетину поверхонь $x^2+y^2 = 16$, $z = 4-x-y$.

9) За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля **F** = (y-z; z-x; x-y) вздовж лінії перетину поверхонь $x^2+y^2+z^2 = 9$, $z = x$.

10) Знайти циркуляцію векторного поля(за допомогою формули Стокса) $\overline{F} = (y; z; x)$ вздовж лінії перетину поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, x=0, y=0, z=0.

11) За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (3z; -2y; 2y)$ вздовж лінії перетину поверхонь $x^2 + y^2 = 4, 2x - 3y - 2z = 1$.

12) За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (2y; 5z; 3x)$ вздовж лінії перетину поверхонь $2x^2 + 2y^2 = 1, x + y + z = 3$.

13) За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (xy; yz; xz)$ вздовж лінії перетину поверхонь $x^2 + y^2 = 9$, $x + y + z = 1$.

14) За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (-y; x; 3z^2)$ вздовж лінії перетину поверхонь $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, $x^2 + y^2 = 1$.

15) За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (3z; -2y; 2y)$ вздовж лінії перетину поверхонь $x^2 + y^2 = 4$, $2x - 3y - 2z = 1$.

16) За допомогою формули Стокса знайти циркуляцію векторного поля $\overline{F} = (y^2; z^2; x^2)$ вздовж лінії перетину поверхонь $x + y + z = 3$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

17).Знайти циркуляцію векторного поля Ā=(x;-z;y) уздовж контуру L, який утворюється в разі перетину поверхні $y^2=4-z-x$ з координатними площинами.

18). Знайти циркуляцію векторного $\vec{F} = y^2\vec{j} + z^2\vec{j} + x^2\vec{k}$ поля уздовж замкненого контура C:x+y+z=3, x=0, y=0, z=0 .Застосувати формулу Стокса.

19). Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{F} = (x - 2z; x + 3y + z; 5x + y)$ уздовж контура, який отриманий перетином площини x+y+z=1 з координатними площинами (обхід контура проти ходу годинникової стрілки). Скористатися формулою Стокса.

20). Знайти циркуляцію векторного поля ***F*** $= (e^{-(x^2-y^2)}Cos2xy, e^{-(x^2-y^2)}Sin2xy)$ вздовж кола $x^2 + y^2 = R^2$, яке обходиться проти годинникової стрілки .

21). Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathrm{F}} = (\mathrm{x}^2 - \mathrm{y}^2, \mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2)$ вздовж замкненого контура С, утвореного півколом $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{r}^2 \quad (\mathrm{y} \geq 0)$ та віссю ОХ (обхід контура проти годинникової стрілки).

22). Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathrm{F}} = (-y, x)$ вздовж астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t \quad (a > 0)$ проти руху годинникової стрілки.

23). Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathrm{F}} = (\mathrm{e}^{\mathrm{x}}(1-\cos(\mathrm{y})), \mathrm{e}^{\mathrm{x}}(\sin(\mathrm{y})-1))$ вздовж замкненого контура С: $0 \leq \mathrm{x} \leq \pi, \ \mathrm{y} = \sin(\mathrm{x})$, який обходиться проти годинникової стрілки.

24). Знайти циркуляцію поля $\vec{\mathrm{F}} = (-\mathrm{x}^2\mathrm{y}, \mathrm{x}\mathrm{y}^2)$ вздовж контуру $\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 = \mathrm{a}^2$, який обходиться проти годинникової стрілки.

25). Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{F} = (y^2, x^2)$ вздовж лінії $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ за ходом годинникової стрілки.

26). Знайти роботу поля $\vec{F} = (-y, x)$, яка виконується при переміщенні матеріальної точки в додатньому напрямі вздовж лінії $x = a\cos t, y = b\sin t (a, b > 0)$

27). Знайти циркуляцію поля $\vec{\mathrm{F}} = (2(x^2 + y^2), (x+y)^2)$ вздовж контура трикутника АВС з вершинами в точках А(1,1), В(2,2), С(1,3)(обхід здійснюється проти годинникової стрілки).

28). Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{\mathrm{F}} = (2a - y, x)$ вздовж замкненого контура, утвореного циклоїдою $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)(a > 0)$ та відрізком осі абсцис 0<x<2Па за ходом годинникової стрілки.

29). Знайти циркуляцію векторного поля $\vec{F} = \left(\frac{1}{x}; -\frac{1}{y}\right)$ вздовж замкненої ламаної АВСА, де А(-1; 0), В(0;9) та С(5;5).

30). Знайти циркуляцію поля $\overline{F} = (xy; yz, zx)$ вздовж кривої $x = \cos t, y = \sin t, z = 1$ за ходом годинникової стрілки.

31). Знайти циркуляцію поля $\overline{F} = (x^2 y; x^3)$ вздовж контура ,обмеженого кривими $y^2 = x, y = x^2$, при обході проти годинникової стрілки

32). Знайти роботу поля $\overline{F} = ((x-y)^2; (x+y)^2)$ вздовж замкненої ламаної OABO, де O(0;0), A(2;0), B(4;2).

Список літератури:

1. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз, Ч. 2. К., Либідь, 1994.
2. Зорич В.А. Математический анализ, Ч.2, М., Наука, 1984.
3. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа, Т.2, М., Наука, 1981.
4. Никольский С.М. Курс математического анализа, Т.2, М., Наука, 1983.
5. Рудин У. Основы математического анализа, М., Мир, 1966.
6. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа, М., Наука, 1988.
7. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления, Т, 2,3, М., Наука, 1969.
8. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу, М., Физматгиз, 1962.
9. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа, М., Наука, 1971.
10. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу, М., Высшая школа, 2000.
11. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу, М., Наука, 1984.
12. Дороговцев А.Я. Сборник задач по математическому анализу, К., Вища школа, 1991.