

東京工業大学工学部

学士論文

一つ以上の参照点を考慮した
物体移動動作の学習と再現に関する研究

指導教員 長谷川 修 准教授

平成28年2月

提出者

学科 情報工学科

学籍番号 12_06181

氏名 菰田 徹也

指導教員認定印		
学科長認定印		

一つ以上の参照点を考慮した 物体移動動作の学習と再現に関する研究

指導教員 長谷川 修 准教授

情報工学科

12_06181 菰田 徹也

人間の生活環境で活動する汎用ロボットの実現には、人間とのインタラクションを通じて動作を学習する能力が必要であり、それに関連する研究として模倣学習が存在する。しかし、模倣学習の研究で扱われているものの多くは、教示動作の目標位置即ちその動作の満たすべき最終状態について教示者とロボット間で既知で共有されている。本研究では、環境中の一つ以上の参照点に応じて目標位置が決定されるような物体移動動作を教示し、その動作がどの参照点に対してどのように決定されるかを表す観点を推定し、再現する手法を提案する。

初めに、環境中の参照点に対応した観点それぞれに確率モデルを生成する。この際環境中の各物体の位置を参照点に含めると同時に任意の物体間の重心位置も参照点として考慮することで複数の物体の位置関係を考慮した動作の学習を可能にしている。学習時には教示された物体移動動作を各参照点を原点とした相対位置に変換し、観点に応じた線形変換を行ったうえで各確率モデルを更新する。再現時には学習された確率モデルのうち、最もばらつきの小さい観点を教示者が意図していた観点だと推定してベクトルを生成し、観点に応じた逆線形変換を行ったうえで参照点の座標を加えて動作の目標位置を推定する。

学習した確率モデルからの生起確率を用いることで、例示動作が既学習動作のいずれであるかを識別することも可能になる。

提案手法を用いて学習させた動作を学習時と異なる初期環境で再現、識別させる実験を行うことで、複数の参照点間の相対位置を考慮した動作を学習できていることを示した。

今後の課題としては、複数の段階を持つより高度な動作の学習手法や、目標位置や被動作物体の決定時に位置情報以外の特徴量を考慮できるより一般的な学習手法の考察が挙げられる。

目 次

第1章	序論	1
1.1	背景	1
1.2	関連研究について	2
1.3	本論文の構成	3
第2章	提案手法	4
2.1	問題設定	4
2.2	従来手法	6
2.3	提案手法	6
2.4	動作学習	6
2.5	動作再現	7
2.6	動作識別	7
第3章	実験	8
3.1	実験環境、前提	8
3.2	動作再現	9
3.3	動作識別	11
第4章	結論	12
4.1	結びと課題	12
	謝辞	13
	参考文献	13
付録 A	動作再現における観点推定の成否の判定	15

第1章

序論

1.1 背景

近年のロボット技術の発展により，人間の生活環境で活躍する汎用ロボットの実現に向けた様々な研究が行われている．汎用ロボットとは，工場などで作業を行うようなあらかじめプログラムされた動作を繰り返すものではなく，環境との相互作用によって適切な行動を学習，選択して実行できる能力を持ったロボットのことである．人間の生活環境で活躍する汎用ロボットには，人間とのインタラクションを通じて動作の方法や内容を学習する能力が必要不可欠である．人間とのインタラクションを通じて学習を行う手法の研究として，人間の教示動作を観測しそれを模倣することによって，ロボットがその動作を再現するにはどのようにすればいいかを学習する模倣学習があるが，人間の動作を模倣するだけではその動作を理解したとは言えない．例えばロボットに，コップを運ぶという動作を教示して再現させることを考える．ある時点で食器棚に置かれているコップを，その時点でテーブルの一角に座る人の前に動かす動作を見せた場合，単純に教示動作からコップの最終位置を把握したとしても，それはそのテーブルの一角という場所に動かすことが重要なのか，その座っている人の前に動かすことが重要なのかを理解できていなければ，人の座る位置やテーブルの位置などの環境が変わった場合に教示者の意図に正しく沿った動作が再現できない．このような問題を解決するためには，特定の初期状態から人間がどのように動作したかという明示的な情報から，人間がその動作を行う際に環境中のどの情報を意識しているかという暗黙的な情報を推測し，動作における観点を人間とロボット間で共有する必要がある．このような背景から，本研究では教示者の動作から動作意図を把握し，意図を汲み取った動作を再現できるようなロボットの実現に向けた研究として，一つ以上の参照点との相対位置に応じて目標位置が決定する物体移動動作の教示から，教示者の着目している参照点とそれに対する位置決定の方法を推定する手法を提案する．

1.2 関連研究について

人間とロボットのインタラクションの分野において，人間の教示動作によるロボットの模倣学習に関する様々な研究が行われている．([6]-[9]) 模倣学習とはロボットに対し，タスクや動作をあらかじめプログラムするのではなく，ロボットの腕を直接操作したり，人間の動作を視覚的に与えるなどで動作を教示し，その挙動を模倣することでタスクや動作を学習する手法を研究する分野である．その際に教示者とロボット間のキネマティクスなどの制約の違いを克服する機構を持たせることで，ロボットへの動作教示をより自然，適切に行う手法に関する研究が行われている．中岡 [3] は，教示した人の舞踊動作から四肢の長さや関節角などを考慮した見真似学習を行い，同時に安定した姿勢を保ち直立を維持した状態でロボットに舞踊動作を模倣させる研究を行った．このようにロボットに対し，教示動作と類似した動作を再現させる手法としての模倣学習は成功している．一方，特定のタスクを達成させることを目的とした模倣学習も数多く研究されている．Schaal[5] は，バネマスダンパで構成される運動モデルのパラメータを教示動作から学習することで，ドラムをたたくなどの周期運動や，ラケットでボールを打つなどの到達運動の再現を行っている．このように，目標位置が既知で教示者とロボットの間で共通に認識されているという前提で，その目標位置までどのように動作するかを扱う研究は多く存在するが，動作教示の煩わしさを軽減し，人とロボットのインタラクションを円滑にするためには，動作の目標位置などの教示者の内包する意図は明示的に与えるより，教示動作からロボットが推測し，教示者は教示動作を見せるだけでよくなることが望ましい．そのため，目標位置はロボット自身が教示動作から推定する機構を持たなければならないが，目標位置の決定方法は動作によって異なる．例えば物体移動動作において，ある物体を右に動かすという動作はその物体の位置が最終位置の決定にかかわるが，一方の物体を他方の物体に近づけるという動作は2つの物体間の位置関係が最終位置の決定に必要なになる．これには，目標位置決定の基準となる参照点と，その参照点に対してどのような位置，状態かを表す変位の2つを推定する必要がある．杉浦ら [1] は動詞の持つ動作概念を人とロボット間で共有することを目指した研究を行った．その中で物体移動動作の教示に関して，各オブジェクトの位置を参照点とし，複数の座標系に変換した動作軌跡を生成する隠れマルコフモデルを学習して最尤推定によって参照点と変位を決定し，参照点を考慮した動作概念の獲得を行った．また Dong ら [2] は，動作と参照点の関係である変位を，参照点に到達する，参照点から出発する，位置遷移量が等しい，などの特徴的な数パターンに大別し，動作軌跡を生成している．これらの研究はいずれも，動作の概念として参照点に対する動作軌跡を獲得することを目指しており，参照点の決定方法及び選択肢に関しては簡単な議論にとどまっている．そのため，これらの手法では動作の目標位置の学習に十分とは言えず，表現できない動作が存在する．特にこ

れら従来手法では学習できない動作として、複数の参照点間の位置関係を考慮した動作が挙げられる。例えば椅子を等間隔に並べるという動作を考えた時、椅子1つ1つを参照点として考えても、椅子の位置関係が2つ以上の椅子の位置で決定し、かつ毎回変化するものであるため適切に学習することができない。このような動作を適切に学習するためには、2つ以上の物体の位置を考慮した参照点の決定方法が備わっていなければならない。本研究では、これら関連研究で用いられる手法を参考にしつつ、特に複数の物体を参照点として考慮する必要のある動作の学習を目標として、より多種の動作意図を取得する方法を提案する。

1.3 本論文の構成

本論文は次のように構成されている。第2章では提案手法について従来手法と対比する形で述べる。第3章では実験とその結果について述べる。第4章では提案手法の考察と改善点、今後の課題について述べる。

第2章

提案手法

2.1 問題設定

本研究は静的な環境下で教示される物体移動動作から、被移動物体(以下、トラジェクタ)の目標位置の決定に關与する参照点とその位置關係を推定する手法について提案する。そのため本研究では、ある地点に置いてある物体をある法則に従った他の地点に移動するという、初期状態と最終状態の対を動作と定義し、動作ごとに固有の法則を観点と呼ぶ。観点は参照点と、参照点に対する位置關係を表す変位の対と定義する。また任意の初期状態に対し、教示者の意図するトラジェクタの目標位置は一意に定まるものとする。即ち、例えばトラジェクタを物体の右に動かすという動作に關して、教示者は常にその物体から一定の距離だけ右の位置にトラジェクタを移動することを意識しているものとし、動作教示時に生じる誤差は教示精度に依るものであり、教示者の意図する目標位置自体の曖昧さに依るものではないとする。

2.1.1 参照点

トラジェクタの遷移には、大別すると以下の3種類が存在する。

1. 初期状態に関わらず、トラジェクタの初期位置に対して一定の遷移を行う
2. 初期状態に関わらず、空間上の特定の位置に遷移を行う
3. 1つ以上の物体の位置や相対位置に応じて遷移先が変化する

これら3種類の違いについて図2.1で示す。1はトラジェクタの初期位置を、2は画面中央を参照点に含めることで、3の特殊な事例として実現できる。即ち全ての物体移動動作は、参照点である物体位置、トラジェクタの初期位置、画面中央のうちいずれか一つ以上との相対位置を考慮した目標位置を持つ。

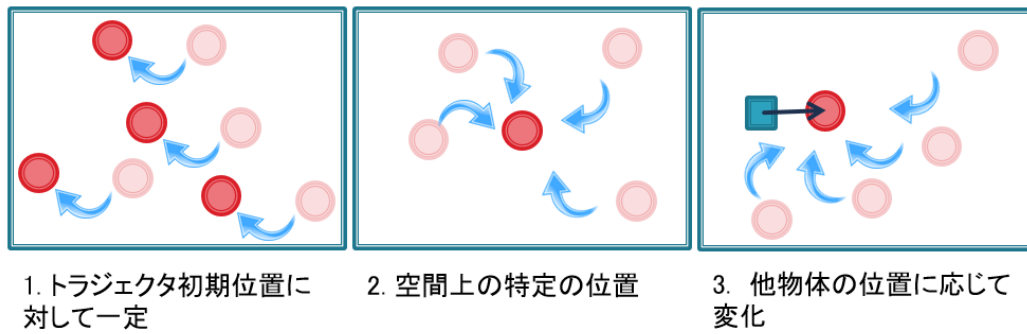


Fig. 2.1: トラジェクタ遷移の違い

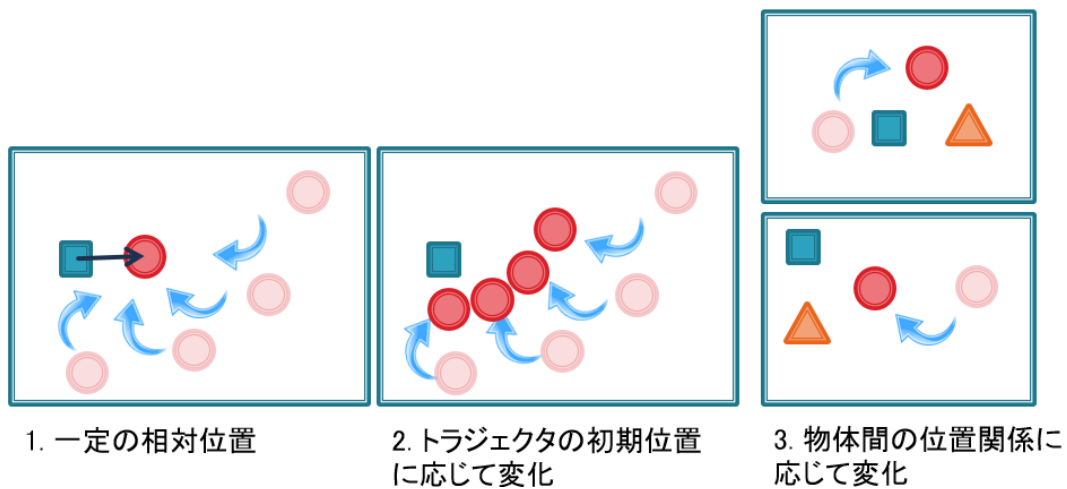


Fig. 2.2: 参照点に対する遷移の違い

2.1.2 変位

特定の参照点に対し、動作はさらに以下の3種類が存在する。

1. 参照点を原点とし、常に一定の相対位置に遷移する
2. 参照点を原点とし、トラジェクタの初期位置に応じて遷移先が変化する
3. 複数の物体の位置関係に応じて遷移先が変化する

これら3種類の違いについて図2.2で示す。1は例えばトラジェクタを物体の右隣に動かすという動作などで、参照点である物体に関して常に相対位置が一定である。2はトラジェクタを物体に近づけるという動作などで、これは参照点となる物体とトラジェクタの初期位置の位置関係によって、参照点からの目標

位置の相対位置が変化する。3の例として、トラジェクタをある物体とある物体の間に動かすという動作などがあり、これは複数の物体を考慮した参照点の設定を行う必要がある。

2.2 従来手法

杉浦ら [1] の手法のアルゴリズムを以下に示す。(***)これ以下、アルゴリズムはまだ書いてません(***) 杉浦らは参照点を各物体の位置、軌道開始点、画面中央に定め、座標系は原点の取り方、軸の向きの異なる数種類をあらかじめ設定し、最適な座標系および参照点を探索しながら、軌道に関する確率モデルである隠れマルコフモデルのパラメータを尤度最大化基準により学習する。この手法では参照点を各物体および軌道開始点、画面中央に限定しているため、複数の物体の位置関係を考慮した動作を学習できない。

2.3 提案手法

そのような問題点を踏まえ、提案手法では複数の参照点を学習に利用する手法を導入した。従来手法の拡張で複数の参照点を考慮できるようにするためには、参照点と変位（座標系）のいずれかに複数の参照点の情報を保持する機構を導入する必要がある。そこで参照点の候補に各参照点間の重心位置を採用することによって、参照点に複数の参照点の位置情報を含めることができると考えた。また本研究では物体移動動作を初期状態に対する最終状態の決定と定義し、動作中のトラジェクタ軌跡に関しては考えていないため、学習モデルはより単純なガウスモデルを使用した。重心位置を参照点として考慮した際、構成する参照点同士の位置関係に対応した相対位置を学習するために、重心位置を原点として重心を構成する参照点の向きに軸を取る座標系を考慮する必要がある。そのため、重心位置に対する変位にはその構成参照点の数分の座標系を追加生成する。

2.4 動作学習

与えられた教示動作を用いて、各観点における確率モデルを更新し、学習を行う。以下に、提案手法の学習のアルゴリズムを示す。

2.5 動作再現

教示動作から学習された各観点における確率モデルを用いて、異なる初期環境での動作再現を行う。以下に、動作再現のアルゴリズムを示す。

2.6 動作識別

モデルが学習された各動作から例示動作の生起確率を計算することで、例示動作が既学習動作のうちいずれであるかを識別することが可能である。以下に、動作識別のアルゴリズムを示す。

第3章

実験

3.1 実験環境、前提

実験環境は2次元の有限な擬似連続空間とし、被動作対象であるトラジェクタと、参照点となりうる少量の物体が存在する。コンピュータにとって、空間の範囲、トラジェクタや物体の数、位置、観点の種類は既知で教示者と認識を共有しており、各動作における観点については未知であるとし、その観点を教示動作から獲得し、動作の再現と識別を行うことを目標とする。実験は全てシミュレータ上で行った。

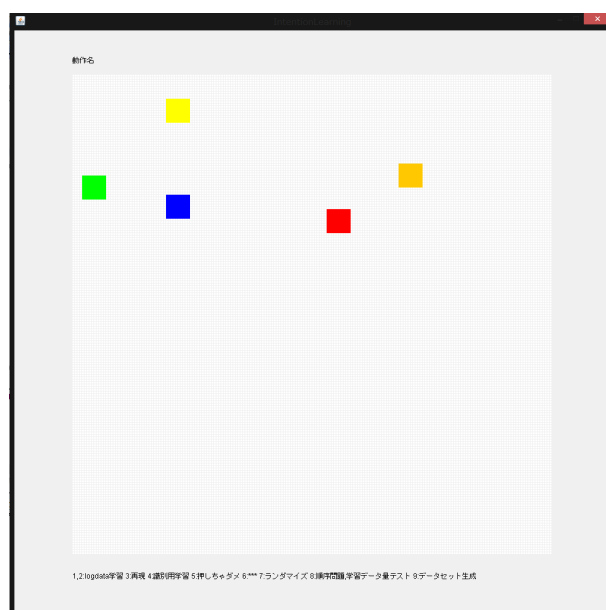


Fig. 3.1: シミュレータ

また本実験において使用した動作の、動作名とその動作におけるトラジェク

TABLE 3.1: 動作名とトラジェクタ目標位置の対応表

動作名	トラジェクタ目標位置
赤を中央に移動する	$(x_{center}, y_{center}) + G_{error}$
赤を青の右に移動する	$(x_{blue} + 15, y_{blue}) + G_{error}$
赤を橙の右に移動する	$(x_{orange} + 15, y_{orange}) + G_{error}$
赤を緑の右に移動する	$(x_{green} + 15, y_{green}) + G_{error}$
赤を黄の右に移動する	$(x_{yellow} + 15, y_{yellow}) + G_{error}$
赤を青に近づける	$\left(\frac{x_{red}+x_{blue}}{2}, \frac{y_{red}+y_{blue}}{2}\right) + G_{error}$
赤を橙に近づける	$\left(\frac{x_{red}+x_{orange}}{2}, \frac{y_{red}+y_{orange}}{2}\right) + G_{error}$
赤を緑に近づける	$\left(\frac{x_{red}+x_{green}}{2}, \frac{y_{red}+y_{green}}{2}\right) + G_{error}$
赤を黄に近づける	$\left(\frac{x_{red}+x_{yellow}}{2}, \frac{y_{red}+y_{yellow}}{2}\right) + G_{error}$
赤を青から遠ざける	$(2x_{red} - x_{blue}, 2y_{red} - y_{blue}) + G_{error}$
赤を橙から遠ざける	$(2x_{red} - x_{orange}, 2y_{red} - y_{orange}) + G_{error}$
赤を緑から遠ざける	$(2x_{red} - x_{green}, 2y_{red} - y_{green}) + G_{error}$
赤を黄から遠ざける	$(2x_{red} - x_{yellow}, 2y_{red} - y_{yellow}) + G_{error}$
等間隔に赤、黄、青と並べる	$(2x_{yellow} - x_{blue}, 2y_{yellow} - y_{blue}) + G_{error}$
時計回りに赤、緑、青と並べる	$\begin{pmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{blue} - x_{green} \\ y_{blue} - y_{green} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{green} \\ y_{green} \end{pmatrix} + G_{error}$

タの目標位置をまとめた表を表3.1に示す。ただし、表3.1における G_{error} とは平均0のガウス分布から生起される誤差であり、分散の大きさは各実験ごとに設定する。 G_{error} は教示誤差を表し、分散が小さいほど正確に与えられた教示動作となる。

3.2 動作再現

観点がコンピュータにとって未知である教示動作を与え、観点を推定し動作を再現する実験を行った。実験には表3.1の15動作のうち、赤を中央に移動する、赤を青の右に動かす、赤を橙に近づける、赤を緑から遠ざける、等間隔に赤、黄、青と並べる、時計回りに赤、緑、青と並べるの6動作を使用した。教示時の誤差（教示誤差）をガウス誤差の分散0.5間隔で0から20まで増やしながらかそれぞれ500データ生成し、10データ1セットの一つ抜き法で再現時の誤差（再現誤差）の計算を各教示誤差で計50回ずつ行った。

全ての教示動作の初期状態において、教示者の意図する目標位置は一意に定まり、その位置に対して正規分布に従う教示誤差を付与したものを教示動作として与えられているため、再現時に各初期状態からの目標位置が適切に推定できている場合に再現誤差は教示誤差と等しくなり、中心極限定理より再現誤差

自身も正規分布に従う。正規分布に従うデータのうち 99.8% は標準偏差の 3 倍以内の範囲に存在するので、計算された再現誤差のうち、教示誤差の標準偏差の 3 倍以上の値になったものが適切な確率モデルから生起する確率は 0.2% 程度である。以上のことから、計算結果のうち各教示誤差における標準偏差の 3 倍以上の誤差が生じた再現結果に関しては、観点が適切に推定されず、誤った確率モデルから動作を再現してしまったものと判断できる。図 3.2 に、そのようにして各再現結果を成功と失敗に分けた観点推定の正答率のグラフを示す。また付録 A に、各動作における教示誤差と再現誤差の関係を表したグラフと、教示誤差と再現誤差の関係に関する詳細を示す。

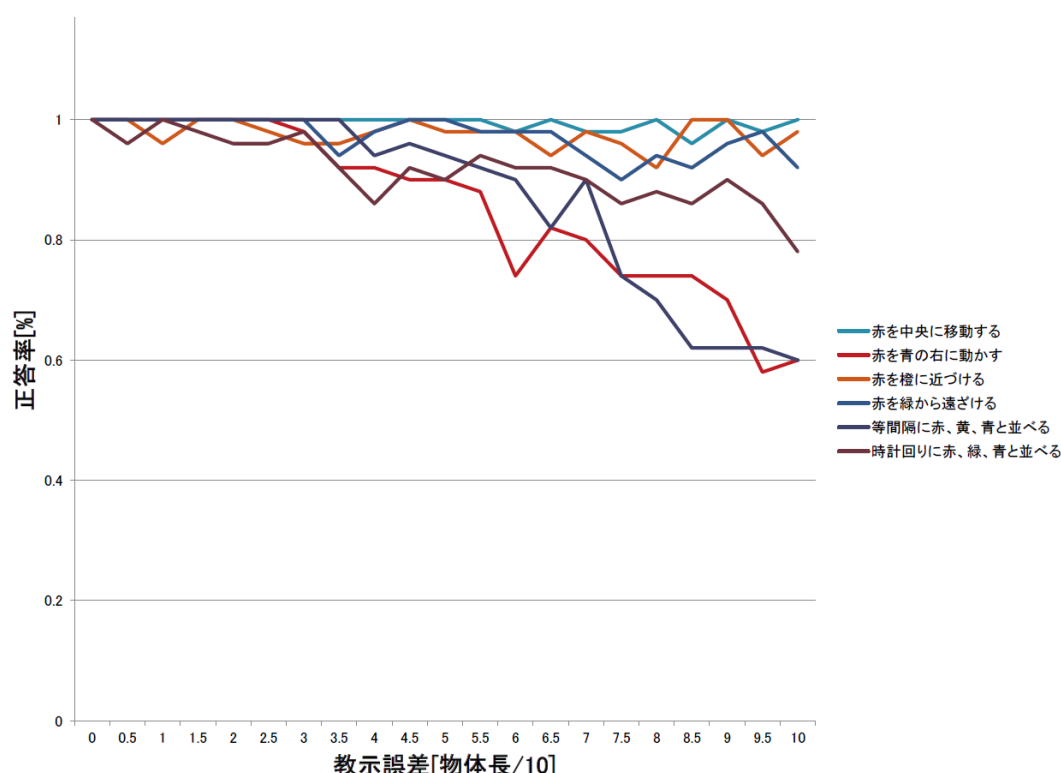


Fig. 3.2: 教示誤差と正答率の関係のグラフ

図 3.2 から、教示時の誤差が十分に小さい場合に、観点の推定が適切に行えていることがわかる。また、等間隔に赤、黄、青と並べる動作、時計回りに赤、緑、青と並べる動作においても適切に再現できていることから、複数の参照点を含む動作を適切に学習できていることがわかる。実験に使用した動作のうち、中央に移動する動作、橙に近づける動作、緑に近づける動作の正答率が高いことが分かるが、これは学習時の遷移ベクトルの正規化長に依るものだと

考えられる。また中央に移動する動作は中央に近づける動作とも認識できる等、適切な観点モデルが複数存在する動作に関して誤答率が下がったとも考えられる。

3.3 動作識別

動作名が未知である例示動作を与え、それが既学習動作のうちいずれであるかを推定する実験を行った。既学習動作は表 3.1 の 15 動作とし、各動作において教示動作として分散 3 のガウス誤差を持つ 30 データを生成し学習を行った。例示動作は動作再現実験と同様の 6 動作を使用し、各動作分散 10 のガウス誤差を持つ 100 データを生成してテストを行った。表 3.2 に各例示動作の識別正答率を示す。これより、学習済みの動作に関して例示動作の識別が適切に行えて

TABLE 3.2: 動作識別の正答率

動作名	正答率
赤を中央に移動する	0.96
赤を青の右に移動する	0.98
赤を橙に近づける	0.97
赤を緑から遠ざける	0.97
等間隔に赤、黄、青と並べる	1.00
時計回りに赤、緑、青と並べる	0.96

いることがわかる。また、誤識別が生じた初期環境と例示動作の例を図 3.3 に示す。例えば図 3.3 左は赤を橙に近づける例示動作だが、赤を緑から遠ざける動作だと誤って識別されている。誤識別が生じた例示動作に関しては、多くがこのように人間にとっても適切な動作が判別しづらいものであった。

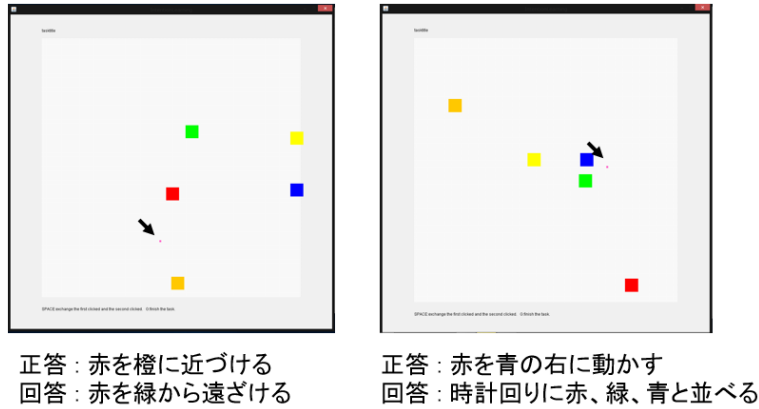


Fig. 3.3: 誤識別例

第4章

結論

4.1 結びと課題

本研究では、物体移動動作において、教示者の動作を考えうる観点の候補ごとの変換を施した上でベクトルの生起確率モデルとして学習することで、教示者の動作意図を把握した目標位置の推定を行うことを目標としていた。その上で参照点の候補に参照点間の重心位置を含めることで、複数の参照点間の位置関係を考慮した物体移動動作の学習を可能にした。将来的には、今回の方法で獲得した最終位置をもとに、動作軌跡の認識、推定と再生成を行いたい。また、今回扱った各物体の位置情報以外に、形や角度、色などの一般的な特徴量を考慮した観点推定が可能になれば、より高度な動作意図を理解することができると考えられる。また、気がきくロボットの実現に向けて、動作教示の利便性を高めるために、多量に与えられた教示動作のうち学習に適した教示のみを選択して学習することで学習効率を上げる方法や、教示中に誤った動作を認識させてしまった場合、誤教示と判断できる動作を自動的に排除して学習を行う方法についての考察も行いたい。

謝辞

本研究を進めるにあたり、終始多大なるご指導を頂きました長谷川修准教授に心からの感謝の意を表すと共に深く御礼申し上げます。また本研究の遂行に際し、度重なる相談に乗っていただいた平塚迪久さんに感謝いたします。最後に、日ごろから様々な面でお世話になりました長谷川研究室の皆様に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] 杉浦孔明, et al. "Learning, generation and recognition of motions by reference-point-dependent probabilistic models." *Advanced Robotics* 25.6-7 (2011): 825-848.
- [2] Dong, Shuonan, and Brian Williams. "Learning and recognition of hybrid manipulation motions in variable environments using probabilistic flow tubes." *International Journal of Social Robotics* 4.4 (2012): 357-368.
- [3] 中岡慎一郎, et al. "シンボリックな動作記述を用いた舞踊動作模倣ロボットの実現." *電子情報通信学会技術研究報告. PRMU パターン認識・メディア理解* 103.390 (2003): 55-60.
- [4] Koenemann, Jonas, Felix Burget, and Maren Bennewitz. "Real-time imitation of human whole-body motions by humanoids." *Robotics and Automation (ICRA), 2014 IEEE International Conference on*. IEEE, 2014.
- [5] Schaal, Stefan. "Dynamic movement primitives-a framework for motor control in humans and humanoid robotics." *Adaptive Motion of Animals and Machines*. Springer Tokyo, 2006. 261-280.
- [6] Argall, Brenna D., et al. "A survey of robot learning from demonstration." *Robotics and autonomous systems* 57.5 (2009): 469-483.
- [7] 臼井和廉, 波多野拓貴, and 高橋泰岳. "人間による呈示動作のバイアスを用いた人型ロボットの模倣学習." *ファジィシステムシンポジウム講演論文集* 29 (2013): 836-841.
- [8] Eppner, Clemens, et al. "Imitation learning with generalized task descriptions." *Robotics and Automation, 2009. ICRA'09. IEEE International Conference on*. IEEE, 2009.
- [9] Khansari-Zadeh, S. Mohammad, and Aude Billard. "Learning stable nonlinear dynamical systems with gaussian mixture models." *Robotics, IEEE Transactions on* 27.5 (2011): 943-957.

付録 A

動作再現における観点推定の成否の判定

動作の再現実験における、教示誤差と再現誤差の関係を図 A.1 に示す。ここで、横軸は教示誤差の分散、縦軸は再現誤差の標準偏差を表す。教示動作から学習したモデルを用いた動作再現を行う際、教示動作自体に誤差が含まれている場合、一つ抜き法によるテスト時に使用するデータも教示動作の一つであるために必然的に誤差が生じる。そのため一つ抜き法により計算された再現誤差が教示誤差に依るものなのか誤学習に依るものなのかを区別する基準が必要である。ここでは正規分布から生成された誤差を含む教示動作から適切に学習された場合に再現誤差も正規分布に従うことを示し、正規分布の性質から観点推定の成否の基準値を設定する。まず、適切な観点（原点となる参照点と座標系）からの N 回分の各教示動作における目標位置を $\mathbf{p} = \{ \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N \}$ に対し、 \mathbf{p} を用いた一つ抜き法による評価値を次のように求める。

$$Cr(\mathbf{p}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N F(\mathbf{p}_n | \mathbf{p} \setminus \mathbf{p}_n) \quad (\text{A.0.1})$$

ここで A.0.1 式の右辺 $F(\mathbf{p}_n | \mathbf{p} \setminus \mathbf{p}_n)$ は、 \mathbf{p}_n を除く \mathbf{p} を用いて学習し再現を行った結果の目標位置と \mathbf{p}_n の誤差を表す。動作再現は選択された観点に割り当てられた正規分布の平均を出力するので、

$$F(\mathbf{p}_n | \mathbf{p} \setminus \mathbf{p}_n) = |\mathbf{p}_n - \text{mean}(\mathbf{p} \setminus \mathbf{p}_n)| = \left| \frac{N}{N-1} (\mathbf{p}_n - \text{mean}(\mathbf{p})) \right| \quad (\text{A.0.2})$$

である。ただし $\text{mean}(A)$ は A の平均とする。A.0.2 式を A.0.1 に代入すると

$$Cr(\mathbf{p}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| \frac{N}{N-1} (\mathbf{p}_n - \text{mean}(\mathbf{p})) \right| = \frac{N}{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |(\mathbf{p}_n - \text{mean}(\mathbf{p}))| \quad (\text{A.0.3})$$

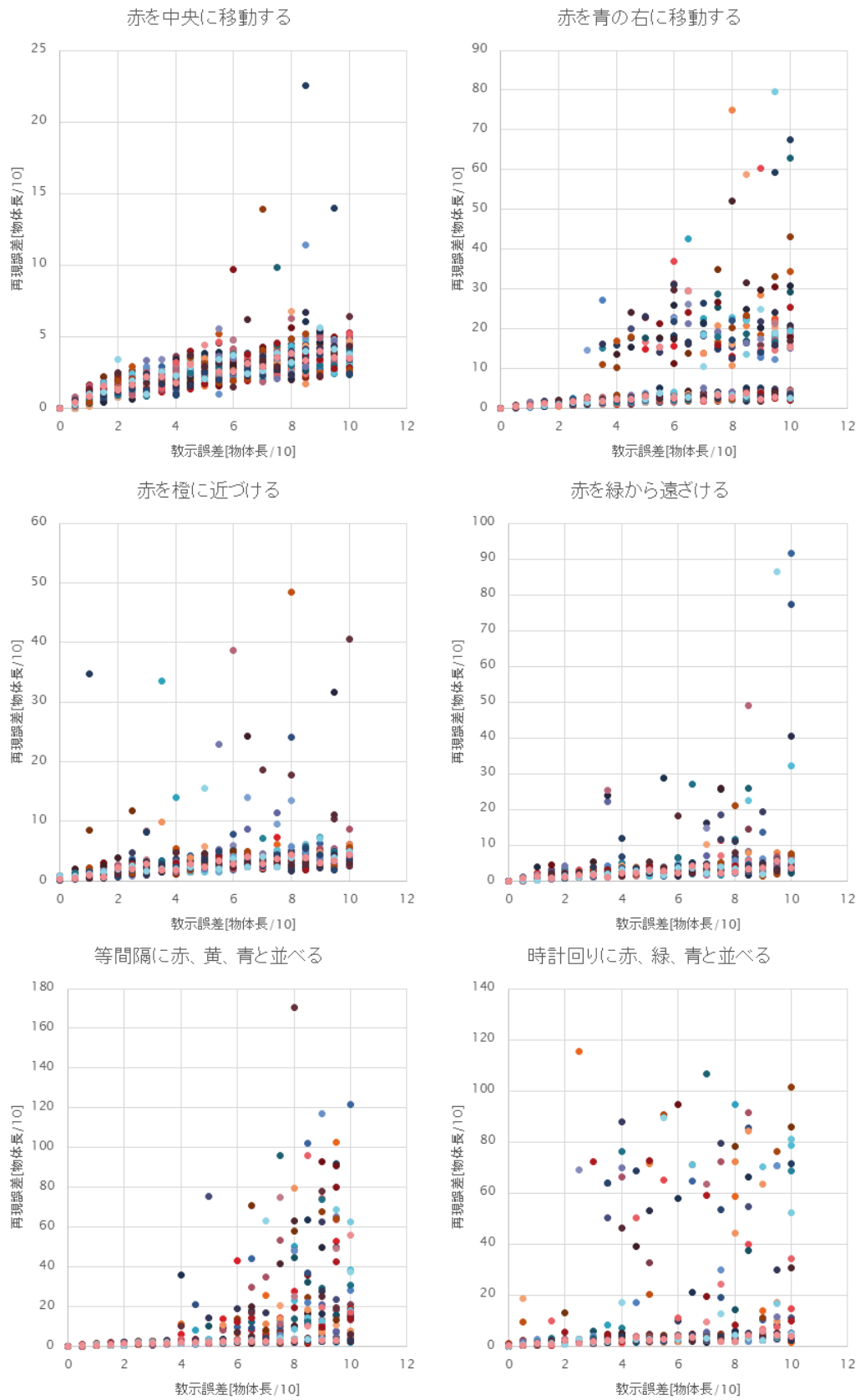


Fig. A.1: 教示誤差と再現誤差の関係

と整理できる。ここで??式の右辺 $|(\hat{\mu}_n - \text{mean}(\hat{\mu}))|$ は $\hat{\mu}_n$ の持つガウス誤差と等しいので、

$$Cr(\hat{\mu}) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \left| \frac{N}{N-1} (\hat{\mu}_n - \text{mean}(\hat{\mu})) \right| = \frac{N}{N-1} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N |(\hat{\mu}_n - \text{mean}(\hat{\mu}))| \quad (\text{A.0.4})$$