システムの同定と推定 期末課題
システム制御系システム制御コース
16M11777 菰田 徹也

課題 1
(1) 以下の MATLAB コード[1] を用いて乱数を生成した.

```
% ------------------------------------------------------------
% 課題 1-1

mu = [0 0];
sigma = [1 0.5;0.5 2];
R = chol(sigma);
z = repmat(mu, 10, 1) + randn(10, 2)*R

% ------------------------------------------------------------
```

出力結果

z =

|  |  |
|---|---|
| -0.5385 | 0.4324 |
| 0.3879 | 1.5916 |
| 0.3697 | 0.7380 |
| 1.0988 | 1.8450 |
| 0.5089 | 2.2220 |
| -0.4819 | 0.9791 |
| 0.2638 | 0.0423 |
| -1.4893 | -1.3260 |
| 0.5840 | 2.1328 |
| -1.4049 | 0.2638 |

（3）最小分散推定とは，観測した $y_i$ に対し，以下のように推定量 $\hat{x}_i$ を求めることである．

$$\hat{x}_i = \mathrm{E}[x|y = y_i]$$

条件付き期待値 $E[x|y = y_i]$ を以下のように求める．

$$E[x|y = y_i] = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x|y = y_i)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2\pi|\Sigma|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}X^T\Sigma^{-1}X\right)dx$$

$\Sigma = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 2 \end{pmatrix}$，$X = \begin{pmatrix} x \\ y_i \end{pmatrix}$ を代入して，

$$E[x|y = y_i] = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{1}{2\pi\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left\{\frac{2}{7}\left(4x^2 - 2xy_i + 2y_i^2\right)\right\}\right)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{7}\pi} x \exp\left(-\frac{1}{7}(4x^2 - 2xy_i) - \frac{2}{7}y_i^2\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}\pi} \exp\left(-\frac{2}{7}y_i^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} x \exp\left(-\frac{1}{7}(4x^2 - 2xy_i)\right)dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}\pi} \exp\left(-\frac{2}{7}y_i^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{7}{8}\left\{\left(\frac{8}{7}x - \frac{2}{7}y_i\right) + \frac{2}{7}y_i\right\} \exp\left(-\frac{1}{7}(4x^2 - 2xy_i)\right)dx$$

$\frac{1}{7}(4x^2 - 2xy_i) = u$ （$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dx}} = \frac{8}{7}x - \frac{2}{7}y_i$）とすると，

$$E[x|y = y_i] = \frac{1}{\sqrt{7}\pi} \exp\left(-\frac{2}{7}y_i^2\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{7}{8}\left\{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{dx}} + \frac{2}{7}y_i\right\} \exp(-u)\,dx$$

$$= \frac{7}{8\sqrt{7}\pi} \exp\left(-\frac{2}{7}y_i^2\right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \exp(-u)\,dx + \frac{2}{7}y_i \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{7}(4x^2 - 2xy_i)\right)dx\right)$$

$\mathrm{A}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\exp(-u)\,dx$,　$\mathrm{B}=\frac{2}{7}y_i\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{7}(4x^2-2xy_i)\right)dx$ とすると

$$E[x|y=y_i]=\frac{7}{8\sqrt{7}\pi}\exp\left(-\frac{2}{7}y_i^2\right)(A+B)$$

A，B をそれぞれ以下のように求める．

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\exp(-u)\,dx=\int_{-\infty}^{\frac{y_i}{2}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\exp(-u)\,dx+\int_{\frac{y_i}{2}}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\exp(-u)\,dx$$

$$=\int_{\infty}^{0}\exp(-u)\,du+\int_{0}^{\infty}\exp(-u)\,du\quad=\quad 0$$

$$\mathrm{B}=\frac{2}{7}y_i\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{7}(4x^2-2xy_i)\right)dx$$

$$=\frac{2}{7}y_i\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{7}}x\right)^2-\frac{1}{\sqrt{7}}\left(\frac{2}{\sqrt{7}}x\right)y_i\right\}\right)dx$$

$v=\frac{2}{\sqrt{7}}x$ （$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{2}{\sqrt{7}}$） とすると

$$\mathrm{B}=\frac{2}{7}y_i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{7}}{2}\exp\left(-\left(v^2-\frac{1}{\sqrt{7}}vy_i\right)\right)dv=\frac{y_i}{\sqrt{7}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(v^2-\frac{y_i}{\sqrt{7}}v\right)\right)dv$$

ここで，ガウス積分[2] を利用すると，積分部分は以下のように求められる．

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\left(v^2-\frac{y_i}{\sqrt{7}}v\right)\right)dv=\sqrt{\pi}\exp\left(\frac{1}{4}\left(-\frac{y_i}{\sqrt{7}}\right)^2\right)$$

よって

$$B=\frac{y_i}{\sqrt{7}}\sqrt{\pi}\exp\left(\frac{1}{4}\left(-\frac{y_i}{\sqrt{7}}\right)^2\right)=\sqrt{\frac{\pi}{7}}y_i\exp\left(\frac{y_i^2}{28}\right)$$

A，B を条件付き期待値に代入して

$$
\begin{aligned}
E[x|y=y_i] &= \frac{7}{8\sqrt{7}\pi}\exp\left(-\frac{2}{7}y_i^2\right)\left(0+\sqrt{\frac{\pi}{7}}y_i\exp\left(\frac{y_i^2}{28}\right)\right) \\
&= \frac{y_i}{8\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{2}{7}y_i^2+\frac{y_i^2}{28}\right) \\
&= \frac{y_i}{8\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{y_i^2}{4}\right) \\
&= \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{y_i}{2}\right)\exp\left(-\left(\frac{y_i}{2}\right)^2\right)
\end{aligned}
$$

したがって，推定量 $\hat{x}$ は

$$
\hat{x} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(\frac{y_i}{2}\right)\exp\left(-\left(\frac{y_i}{2}\right)^2\right)
$$

(2) 以下の MATLAB コードにより，誤差を評価する．

```
% ------------------------------------------------------------
% 課題 1-4

error = 0;

for t = 1:10

    mu = [0 0];
    sigma = [1 0.5;0.5 2];
    R = chol(sigma);
    z = repmat(mu, 10, 1) + randn(10, 2)*R;



    for idx = 1:10
        x_hat = (1/(4*sqrt(pi)))*(z(idx, 2)/2)*exp(-(z(idx, 2)/2)^2);
        error = error + (v(idx, 1) - x_hat)^2;
    end
    error = error / 9
end
% ------------------------------------------------------------
```

出力結果

error = 0.7261

error = 0.7792

error = 0.7690

error = 0.8069

error = 0.7906

error = 0.7595

error = 0.7795

error = 0.7634

error = 0.7210

error = 0.7706

課題 2

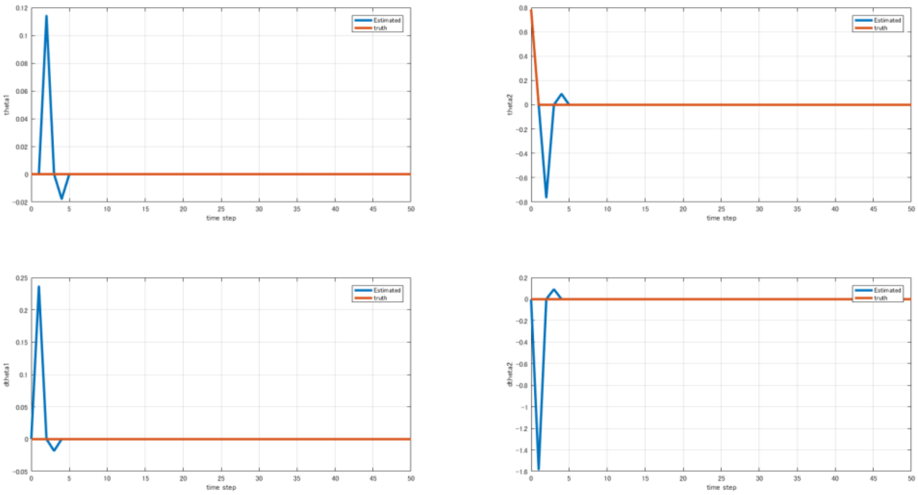
(1) [3] を参考に，UKF を用いた推定を MATLAB により実装し，実行した．
パラメータは 以下のように設定した．

$$\alpha = 10^{-3}, \beta = 2, \kappa = 0$$

まず，運動方程式において，以下の重力項を無視した形式（即ち，課題 2-(3) で示されている方程式）で実行した．

$$G = g\begin{pmatrix} m_1 l_1 \cos\theta_1 + m_2(a_1\cos\theta_1 + l_2\cos(\theta_1+\theta_2)) \\ m_2 l_2 \cos(\theta_1+\theta_2) \end{pmatrix}$$

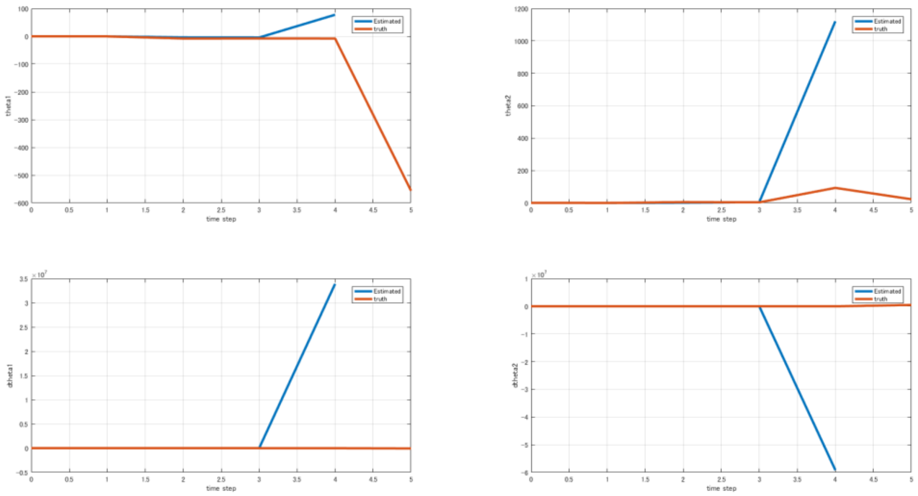
その結果，以下の結果を得た．ここで，時間ステップ間隔は $T_s = 0.01$ ，ステップ数は $T = 10$ とした．



次に，重力項を考慮した形式（即ち，課題 2-(2）で示されている方程式）を用いて実行した．ここで，各パラメータは以下のように変更した．

$$\alpha = 10^{-3}, \beta = 2, \kappa = 0, \mathrm{T_s} = 0.01, T = 5$$

その結果，以下の結果を得た．



参考文献

[1] 正規分布した乱数 - MATLAB randn - MathWorks 日本
https://jp.mathworks.com/help/matlab/ref/randn.html
[2] ガウス積分 - Wikipedia
https://ja.wikipedia.org/wiki/%E3%82%AC%E3%82%A6%E3%82%B9%E7%A9%8D%E5%88%86
[3] AtsushiSakai/MATLABRobotics: MATLAB Sample Code for Robotics
https://github.com/AtsushiSakai/MATLABRobotics