МИНОБРНАУКИ РОССИИ

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

**«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»**

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

**Гамильтоновость и эйлеровость**

НАУЧНО-ИССЛЕДОВСКАЯ РАБОТА

студента 5 курса 531 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Енца Михаила Владимировича

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  |  |  |
|  |  |  |
| Научный руководитель  д.ф.-м.н., доцент | \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ | М. Б. Абросимов |
|  | подпись, дата |  |

Саратов 2019

СОДЕРЖАНИЕ

[ВВЕДЕНИЕ 3](#_Toc7970601)

[1 Необходимые определения 4](#_Toc7970602)

[2 Алгоритм поиска всех гамильтоновых циклов 5](#_Toc7970603)

[3 Алгоритм проверки наличия эйлерового цикла в графе 6](#_Toc7970604)

[4 Выполнение работы 7](#_Toc7970605)

[5 Результаты исследования 8](#_Toc7970606)

[ЗАКЛЮЧЕНИЕ 9](#_Toc7970607)

[СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ 10](#_Toc7970608)

# ВВЕДЕНИЕ

Бла бла бла графы

# 1 Необходимые определения

*Неориентированным графом* (далее будем называть графом) называется пара , где – симметричное и антирефлексивное отношение на множестве вершин **,** называемое отношением смежности.

Если , то говорят, что вершины и *смежные* и эти вершины соединены ребром . Если , то вершины и *несмежные*. При этом и это одно и то же ребро, которое обозначают . Говорят, что ребро *инцидентно* каждой из вершин и и эти вершины называются концевыми вершинами или концами ребра . Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую концевую вершину.

Степенью вершины в графе будем называть количество вершин в , смежных с . Вершина, не смежная ни с одной другой вершиной, называется *изолированной*, а вершина, смежная со всеми остальными вершинами, называется *полной*. Вершина называется *четной* или *нечетной* в зависимости от четности или нечетности своей степени.

Две вершины и называются связными, если в графе существуют путь из в .

Компонентой связности называется класс эквивалентности относительно связности. [1]

# 2 Гамильтоновость графа

Цикл или цепь, содержащие все вершины графа, называется *гамильтоновым*. Граф, содержащие гамильтонов цикл, также называется *гамильтоновым*. Для проверки гамильтоновости произвольного графа нет эффективных условий, приведем несколько достаточных условий гамильтоновости.

Теорема (Хватал, 1972). Пусть граф с вектором степеней () и . Если для любого верна импликация

то граф гамильтонов.

Теорема (Оре, 1960). Если в связном n-вершинном графе для любых двух несмежных вершин и выполняется неравнество , то это граф гамильтонов. [1]

# 2.1 Алгоритм поиска всех гамильтоновых циклов

Опишем алгоритм, основанный на поиске в глубину.

Запустим обход в глубину из произвольной вершины графа и обозначим её через . На каждом уровне рекурсии мы имеем текущую вершину , относительно которой будем рассматривать смежные вершины.

Пусть мы находимся в обходе в глубину, пометим вершину как использованную. Просматривая смежные вершины вершины , выбираем не помеченную ранее и запускаем обход в глубину от неё. Также в процессе погружения в рекурсию запоминаем все помеченные вершины. Если количество запомненных ранее вершин равно количеству вершин в графе, то гамильтонов путь найден, сохраняем его и возвращаемся на уровень выше.

Алгоритм. Поиск всех гамильтоновых циклов.

Вход. Массив – список помеченных вершин, изначально он пустой, – текущий путь, изначально состоит из единственной вершины .

Выход. Массив paths – список всех гамильтоновых путей в графе .

1. Если размер равен количеству вершин в графе , то добавляем в и поднимаемся на уровень рекурсии выше;
2. В массив добавляем ;
3. Для всех , выполняем шаг 4;
4. если , то добавляем вершину в и запускаем этот алгоритм c . После выхода из рекурсии удаляем вершину из ;
5. Удаляем из вершину ;
6. Выходим из текущего уровня рекурсии.

# 3 Эйлеровость графа

Путь, который содержит все ребра графа, называется эйлеровым. Циклический путь, который содержит все ребра графа, называется эйлеровым циклом, а граф с таким путем – эйлеровым. Следующие теоремы дают эффективные критерии для проверки эйлеровости.

Теорема (Эйлер, 1736). Связный граф тогда и только тогда является эйлеровым, когда все его вершины четны. [1]

# 4 Выполнение работы

Для генерации всевозможных графов с заданным количеством вершин используется генератор , входящий в состав программного комплекса . [4]

Данный генератор включает в себя множество параметров генерации неориентированных графов. В данной работе рассмотрены всевозможные неориентированные двудольные графы в формате . Для генерации использовался параметр, отвечающий за количество вершин графа, и параметр , задающий генерацию двудольных графов.

Например, для генерации всевозможных двудольных графов с количеством вершин 11 в файл 11v.txt, необходимо перейти в папку, содержащую генератор и в командной строке запустить команду

|  |
| --- |
| ./geng -C -g 11 > 11v.txt |

В результате получим файл с двудольными графами, отсортированными в порядке уплотнения. Так, первый графа — это граф, содержащий ребро, а последний граф в файле содержит ребро.

Листинг программы, которая принимает на вход графы в формате , а затем применяет к ним алгоритм для поиска всех гамильтоновых циклов и проверяет их на эйлеровость, представлен в приложении А. Программу необходимо запускать для каждого набора графов отдельно. Результатом работы программы являются файлы с графами, разделенными на классы: гамильтонов и эйлеров, гамильтонов и не эйлеров, не гамильтонов и эйлеров, не гамильтонов и не эйлеров. Также подсчитывается общая статистика гамильтоновых циклов в формате <количество циклов>:<количество графов с таким количеством циклов>.

Программа поддерживает 2 режима работы однопоточный и многопоточный, количество потоков определяется по количеству ядер машины, на которой выполняется программа.

Для запуска программы в многопоточном режиме, с поданным на вход файлом «11v.txt» с графами в формате *graph6*, нужно передать следующие аргументы:

|  |
| --- |
| -f 11v.txt -m -t g6 |

Содержимое файлов с результатами приведено в следующем разделе.

# 5 Результаты исследования

По таблице 1 видно, что графы с количеством вершин 10 стали пределом для обработки на персональном компьютере.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Количество вершин | Количество всевозможных двудольных неориентированных графов | Время работы разработанной программы, секунд |
| 3 | 1 | 0.062 |
| 4 | 3 | 0.048 |
| 5 | 10 | 0.062 |
| 6 | 56 | 0.195 |
| 7 | 2 | 0.088 |
| 8 | 7123 | 0.852 |
| 9 | 194066 | 46.054 |
| 10 | 9743542 | 3982 (1.1 ч) |
| 11 | 900969091 | Больше 38 ч. |

Для оценки асимптотики необходимо использовать формулу для подсчета сочетаний. В случае поиска всех гамильтоновых путей, в худшем случае, необходимо выбрать ребро из : .

Так, для 11 вершинного графа: операций на обработку одного графа. Умножив на количество графов, получим: 26352129089924768130‬ операций. Грубо усреднив сложность, поделив пополам, также с учетом того, что программа для обработки многопоточная, поделим на 4 потока получим 3294016136240596016 операций, что слишком много для вычисления всех 11-вершинных графов на персональном компьютере.

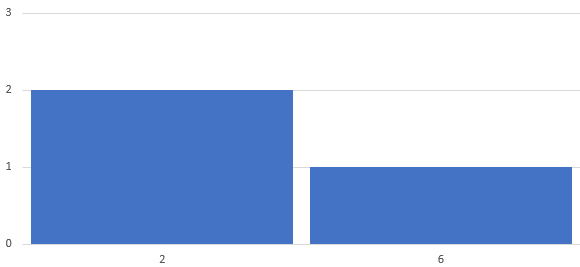
Так, экспериментальным путем было установлено, что чтобы вычислить последние 50 11-вершинных графов в 4 потока на персональном компьютере, требуется 50 секунд.

Программа была запущена для первых 300000000 графов из набора одиннадцативершинных графов. Программа отработала за 136219 секунд (~38 часов). Так как плотность графов увеличивается, то запускать программу для следующего блока графов не представляется возможным на персональном компьютере.

В следующих гистограммах по оси Y указано количество графов, а по оси X количество гамильтоновых циклов.

4 вершины

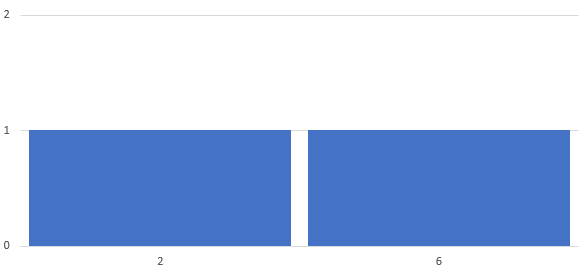
Общая статистика



Гамильтоновы и эйлеровы

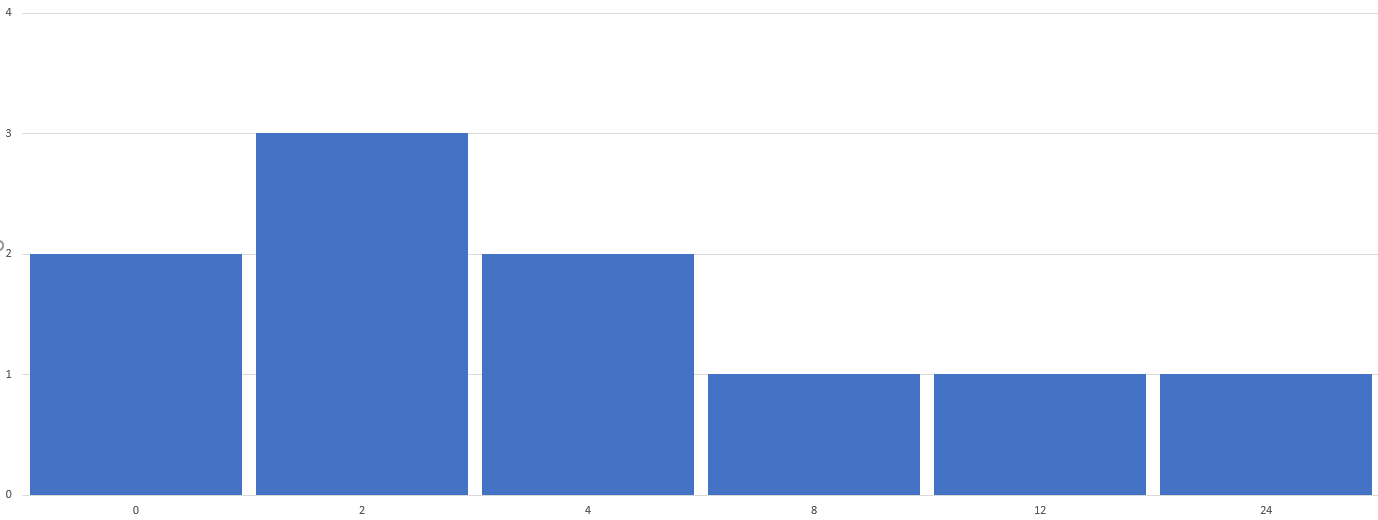


Гамильтоновы и не эйлеровы



5 вершин

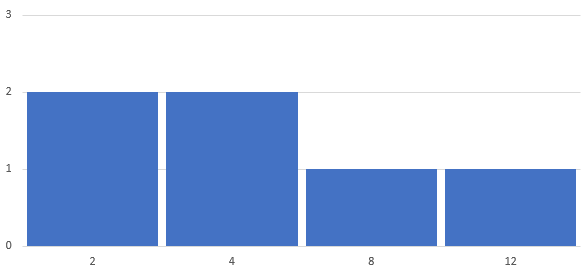
Общая статистика



Гамильтоновы и эйлеровы

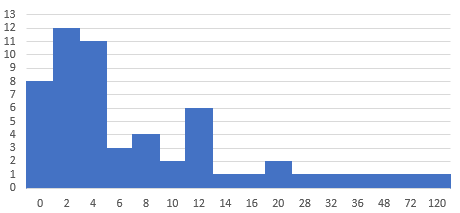


Гамильтоновы и не эйлеровы

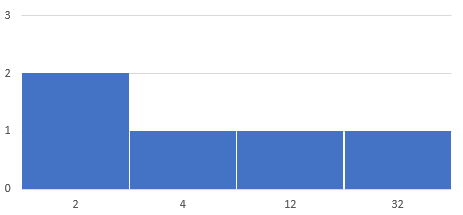


6 вершин

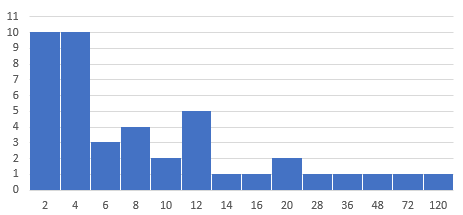
Общая статистика



Гамильтоновы и эйлеровы

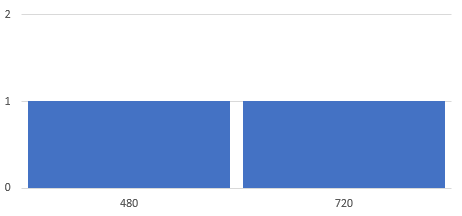


Гамильтоновы и не эйлеровы

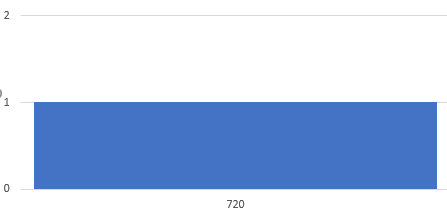


7 вершин

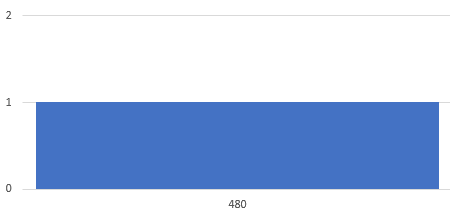
Общая статистика



Гамильтоновы и эйлеровы

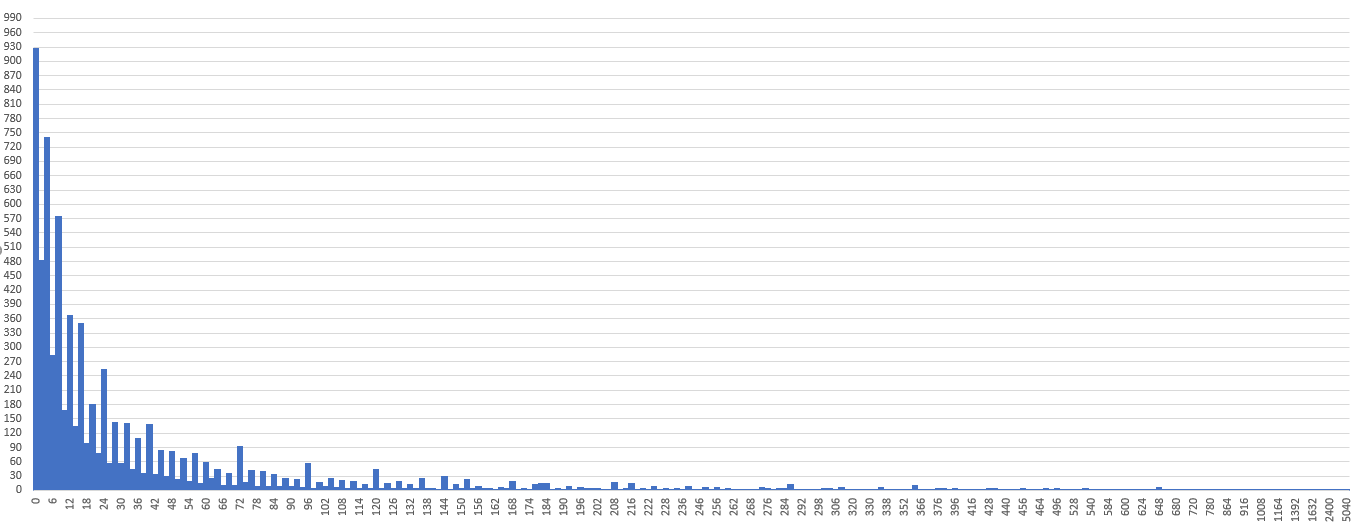


Гамильтоновы и не эйлеровы

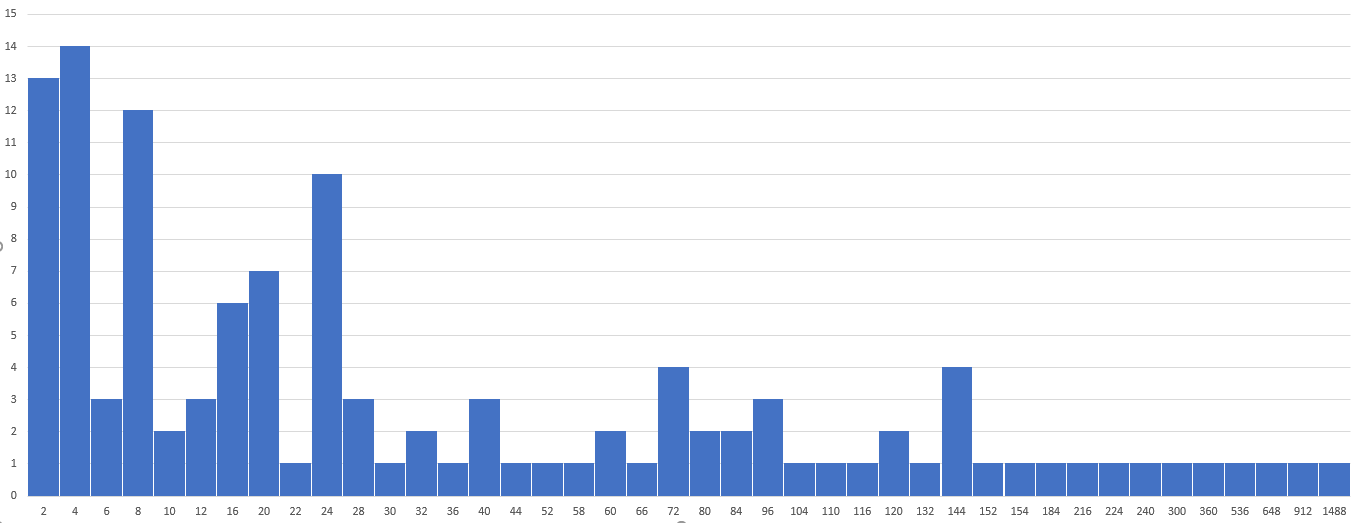


8 вершин

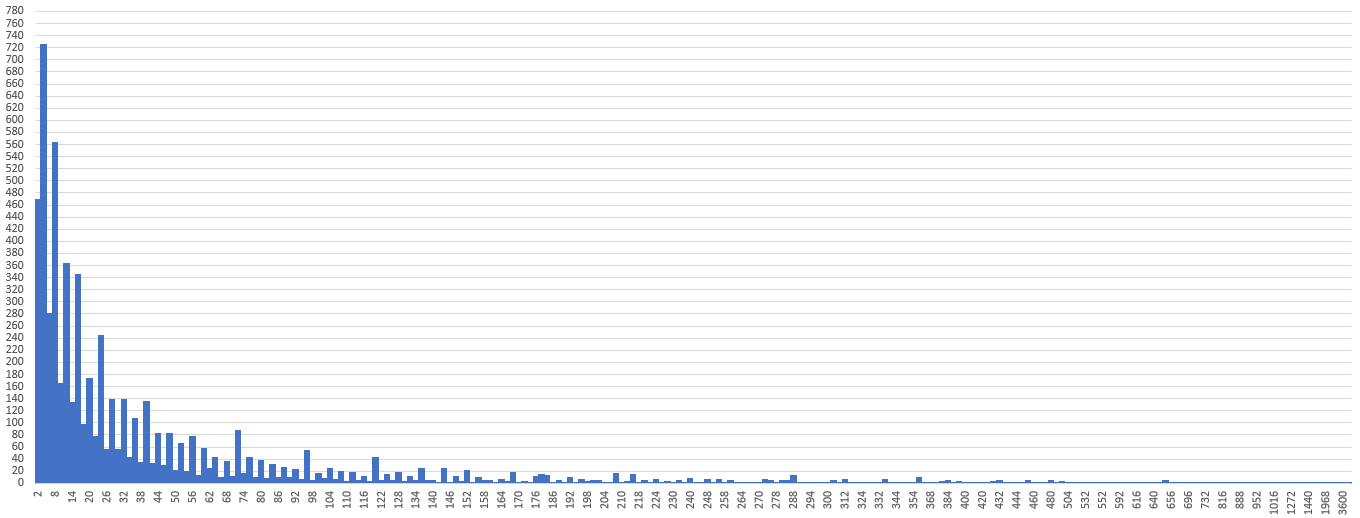
Общая статистика



Гамильтоновы и эйлеровы

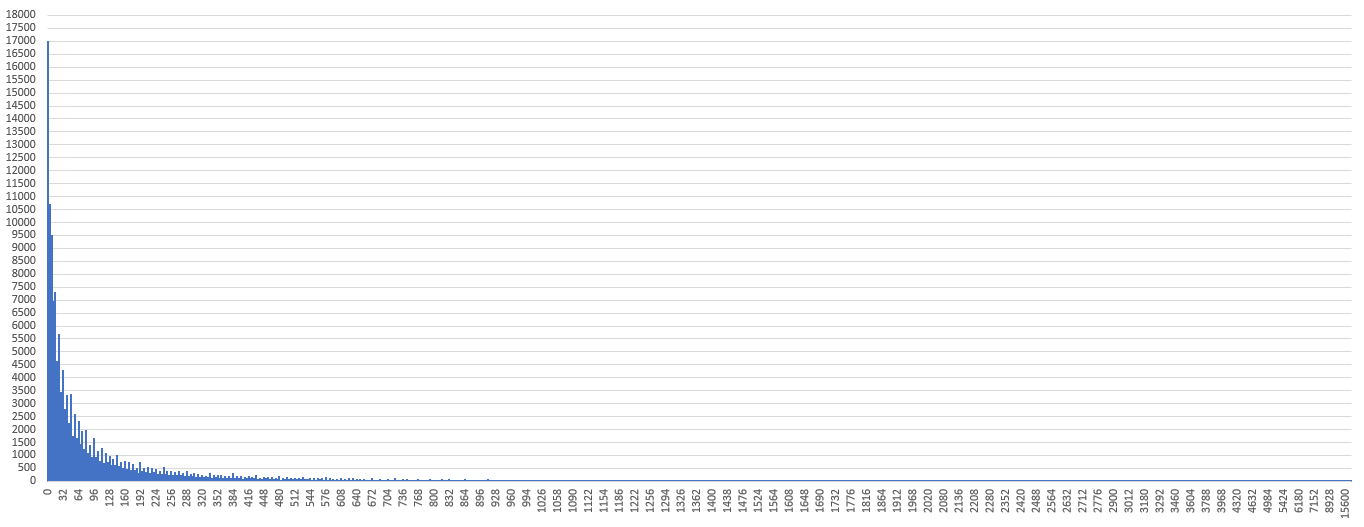


Гамильтоновы и не эйлеровы

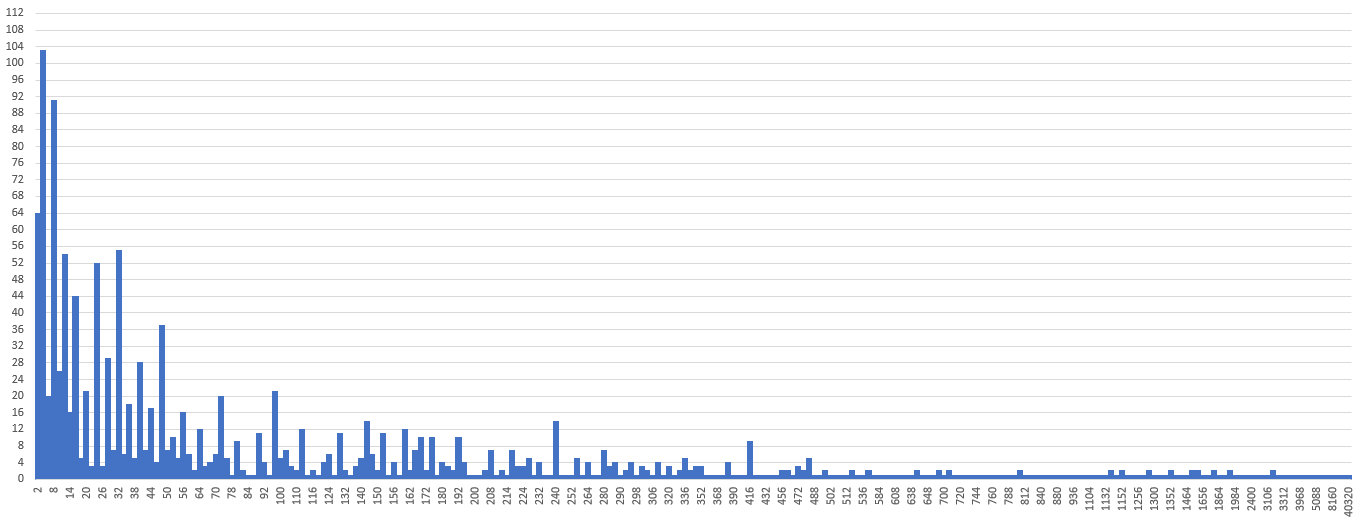


9 вершин

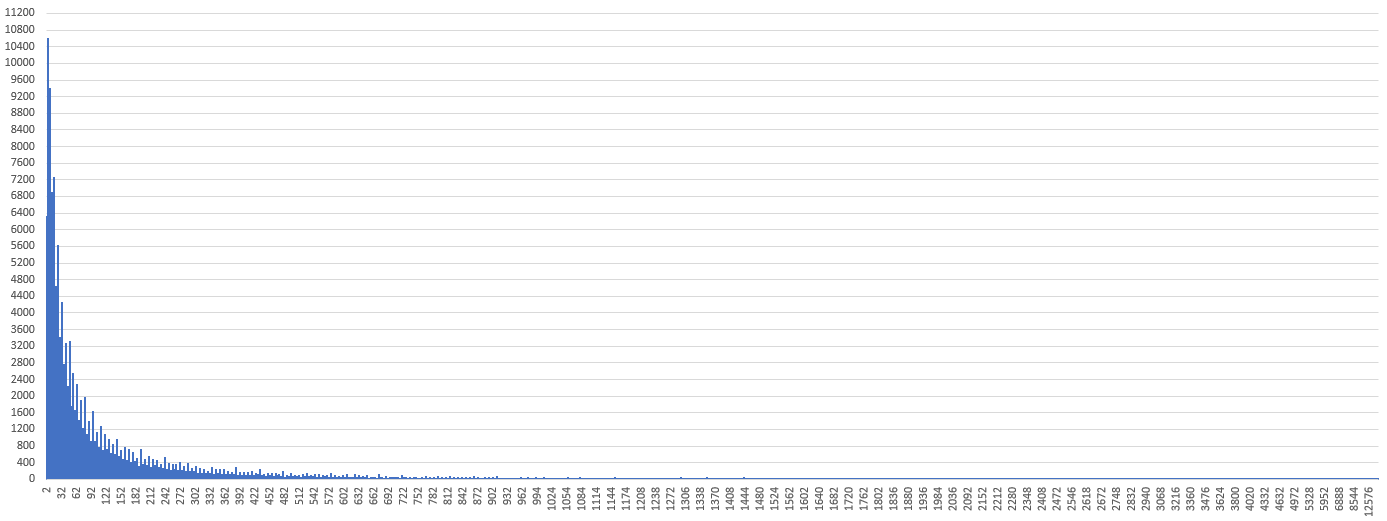
Общая статистика



Гамильтоновы и эйлеровы

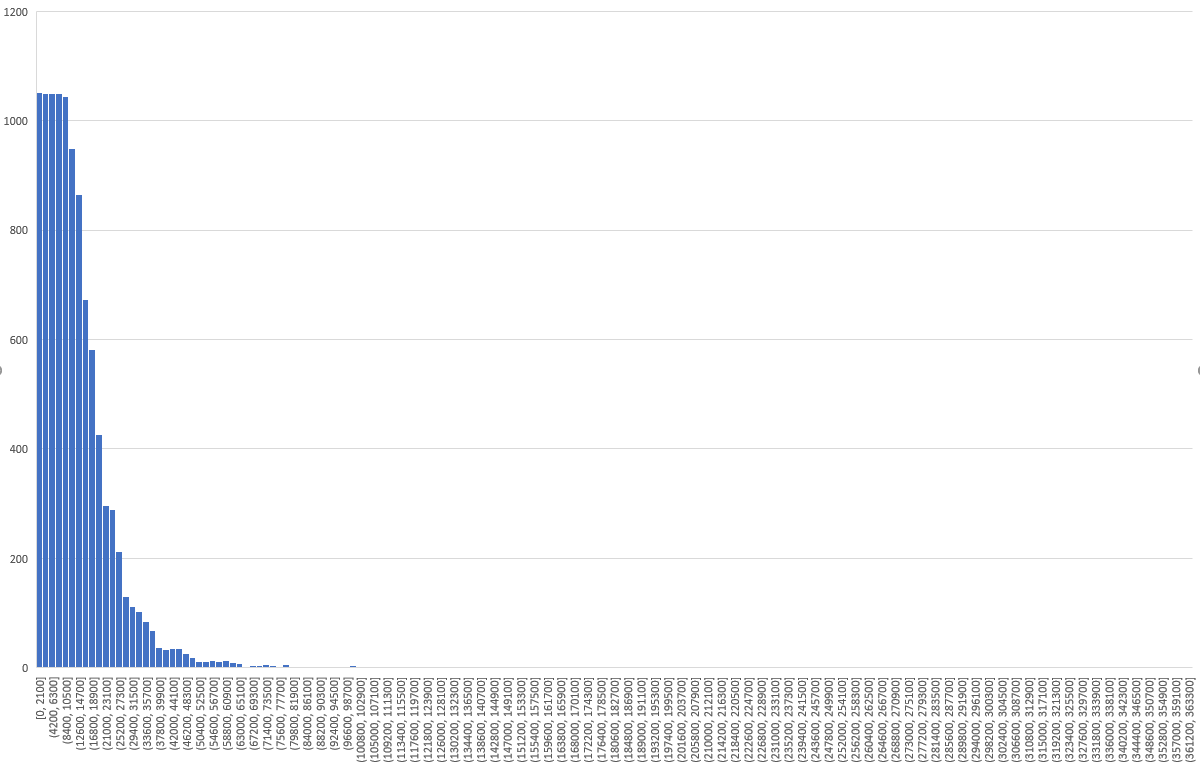


Гамильтоновы и не эйлеровы

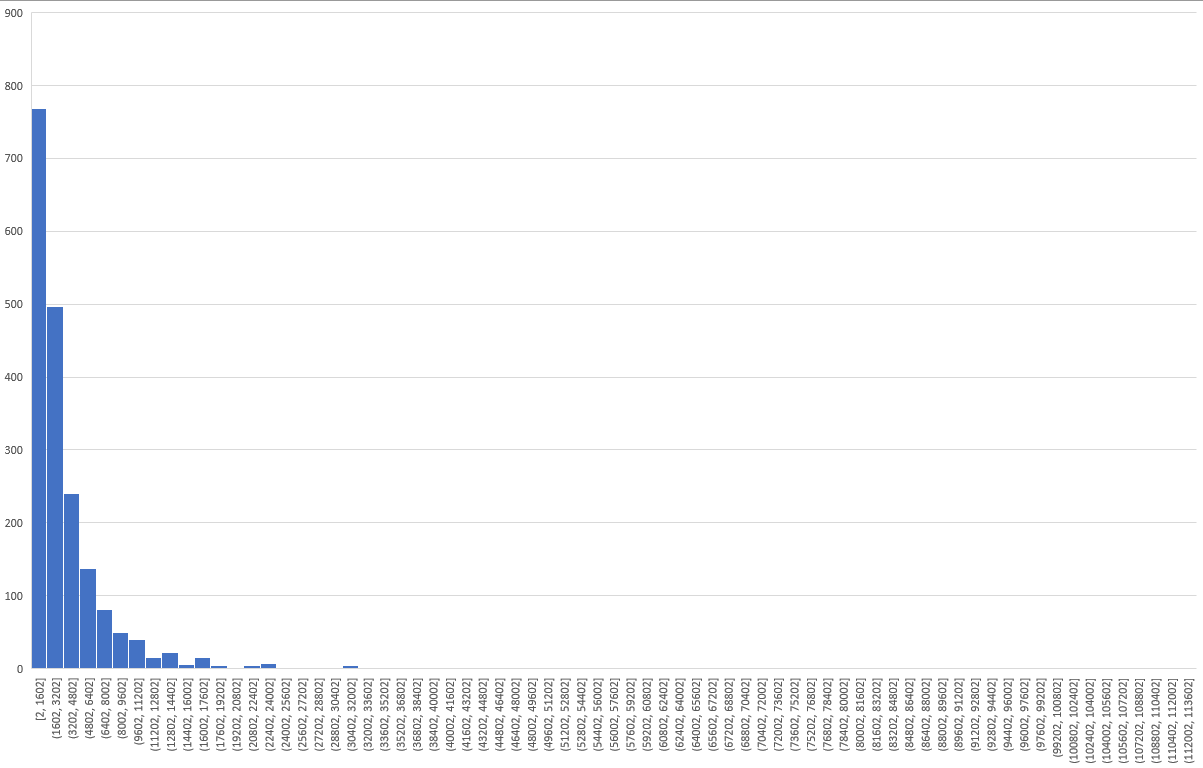


10 вершин

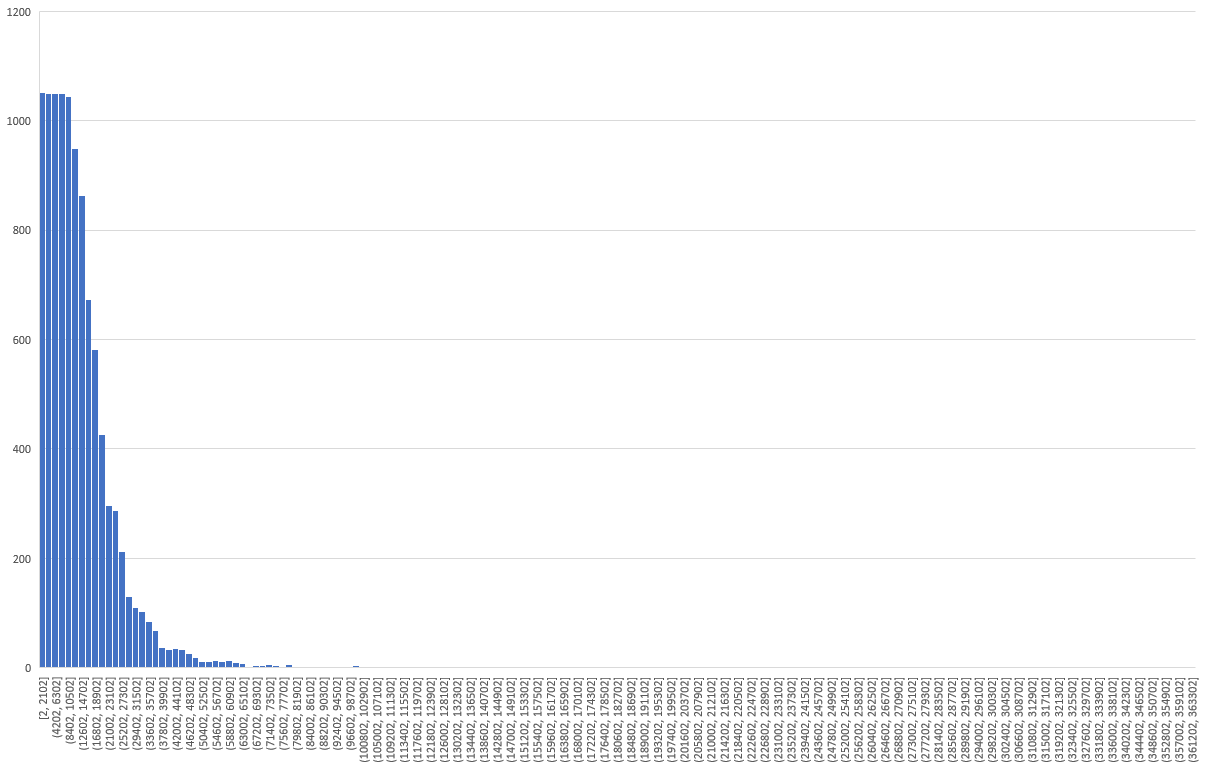
Общая статистика



Гамильтоновы и эйлеровы



Гамильтоновы и не эйлеровы



# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы сгенерировали все связные неориентированные графы с количеством вершин от двух до десяти. Для всех этим графов подсчитали количество гамильтоновых циклов и проверили каждый граф на эйлеровость с помощью разработанной программы на языке C++.

# СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Абросимов, М.Б., Долгов, А.А. Практические задания по графам, 2-е издание: Учеб. Пособие / М.Б. Абросимов, А.А. Долгов. – Саратов: Научная книга, 2009. – 76 с.