Exercice sur MLE.

Nous souhaitons modéliser la durée de vie d'un lave-linge (en années). Pour cela nous disposons d'un échantillon de 50 valeurs :

10.273 1.035 63.952 33.153 21.708 1.612 22.216 17.682 4.730 2.236 0.746 22.762 23.455 30.993 30.138 3.140 12.884 40.893 35.560 5.999 5.962 7.069 23.743 30.881 6.647 2.393 3.736 0.866 46.587 3.728 4.173 10.127 40.502 15.275 0.030 2.517 3.134 15.530 15.156 7.919 32.617 18.881 1.221 0.360 8.641 36.070 16.217 10.520 21.354 1.366

On commence par saisir les données dans une variable qu'on appelle X :

```
X <- c(10.273, 1.035, 63.952, 33.153, 21.708, 1.612, 22.216, 17.682, 4.730, 2.236,
    0.746, 22.762, 23.455, 30.993, 30.138, 3.140, 12.884, 40.893, 35.560, 5.999,
    5.962, 7.069, 23.743, 30.881, 6.647, 2.393, 3.736, 0.866, 46.587, 3.728, 4.173,
    10.127, 40.502, 15.275, 0.030,  2.517, 3.134, 15.530, 15.156, 7.919, 32.617,
    18.881, 1.221, 0.360,  8.641, 36.070, 16.217, 10.520, 21.354, 1.366)
```

1. Représenter graphiquement cette distribution.

2. Le graphique précédent nous suggère de modéliser la durée de vie du lave-linge par une loi exponentielle Exp(θ). On cherche maintenant à estimer le paramètre θ de cette loi en utilisant la méthode du maximum de vraisemblance.

(a) Pour cela, on définit une fonction qui calcule la log-vraisemblance négative de la loi exponentielle :

```
log.vrais.neg=function(theta=1){
    if(theta>0)
    -sum(dexp(X, theta, log=TRUE))
   else NA }
```

Que fait la commande dexp appelée avec l'option log=TRUE ?
Faut-il minimiser ou maximiser la fonction log.vrais.neg pour obtenir l'EMV ?

(b) La fonction mle (Maximum Likelihood Estimator) de la librairie stats4 permet de calculer l'EMV dans un modèle paramétrique spécifié. Il faut d'abord télécharger le package stats4 puis le charger :

```
install.packages("stats4")
library(stats4)
fit = mle(log.vrais.neg)
summary(fit)
```

Quelle est l'estimation obtenue pour θ ?

(c) Nous avons vu dans le cours que $\hat{\theta}_n = 1/\bar{X}_n$ est l'EMV de θ. En déduire une estimation pour θ puis la comparer à l'estimation précédente.3. Superposer sur le graphique de la question 1 la densité de probabilité de la loi Exp($\hat{\theta}$).