Convergence des stratégies dans un jeu répété

Auteur

1 Introduction

Dans ce document, nous étudions la convergence des stratégies des joueurs dans un jeu répété, chaque joueur cherchant à maximiser son gain individuel. Dans un premier temps, nous présenterons la formulation mathématique du problème, puis nous proposerons une simplification de l'approche. Enfin, nous exposerons les données empiriques et les résultats des tests.

2 Formulation mathématique de l'équilibre

Considérons un jeu à deux joueurs, chacun disposant de n actions. Chaque joueur i choisit une stratégie mixte

$$x \in \Delta^n \quad \text{(pour le joueur 1)}, \qquad y \in \Delta^n \quad \text{(pour le joueur 2)},$$

où $\Delta^n = \{\, v \in \mathbb{R}^n \mid v_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^n v_j = 1\}$ est le simplexe des distributions de probabilité. L'utilité espérée de chaque joueur i est notée

$$U_i(x, y)\ .$$

Un *équilibre de Nash* (x^*, y^*) satisfait les conditions d'optimalité unilatérale suivantes :

$$U_1(x^*, y^*) \ \geq\ U_1(x, y^*) \quad \forall\, x \in \Delta^n, \qquad U_2(x^*, y^*) \ \geq\ U_2(x^*, y) \quad \forall\, y \in \Delta^n.$$

Autrement dit, aucun joueur n'a intérêt à dévier seul de sa stratégie.

3 Modélisation comme un problème d'optimisation

On peut reformuler la recherche d'un équilibre comme la résolution du système d'équations

$$\nabla_x U_1(x, y) = 0, \quad \nabla_y U_2(x, y) = 0,$$

sous contraintes de validité de stratégie (simplexe) et de concavité locale :

$$\min_{x,y} \left\|\nabla_x U_1(x,y)\right\|^2 + \left\|\nabla_y U_2(x,y)\right\|^2 \quad \text{sous} \begin{cases} x \in \Delta^n, \\ y \in \Delta^n, \\ \lambda_{\max}\big(\nabla^2_{xx} U_1(x,y)\big) \leq 0, \\ \lambda_{\max}\big(\nabla^2_{yy} U_2(x,y)\big) \leq 0, \end{cases} \tag{1}$$

où $\lambda_{\max}(H)$ désigne la plus grande valeur propre de la matrice H. Cette formulation cherche un point où les gradients sont nuls (condition stationnaire) et où chaque fonction-objectif est localement concave.

4 Méthodes de résolution

4.1 Programmation séquentielle quadratique (SLSQP)

L'algorithme **SLSQP** convient bien à ce problème car il gère à la fois les contraintes d'égalité (simplexe) et d'inégalité (concavité). Il procède en :

— réduisant les résidus stationnaires selon une méthode de type gradient,

— projetant les itérés sur le simplexe Δ^n,

— vérifiant que les hessiennes restent semi-négatives.

4.2 Autres approches

— **Dynamique réplicatrice** : méthodes itératives évolutives inspirées de la biologie.

— **Méthode de Scarf** : recherche de points fixes dans l'espace des stratégies.

— **Programmation par points intérieurs** : algorithmes efficaces pour les problèmes non linéaires.