Aufgabe 2:
Bestimmen Sie obere und untere Schranken für die folgenden Rekursionsgleichungen von Algorithmen mit Hilfe der Iterations- oder Substitutionsmethode:

1. $T(1) = 1, T(n) = 4T(n/2) + n$ für alle $n > 1$
2. $T(1) = 1, T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$ für alle $n > 1$
3. $T(1) = 1, T(2) = 1, T(3) = 1, T(n) = 2T(n-1) + n^2$ für alle $n > 3$

1) $T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$

Iterationsmethode:

$T(n) = 4\,T(\frac{n}{2}) + n$	$T(n) = 4T(\frac{n}{2}) + n$
$T(n) = 4(4T(\frac{n}{4}) + \frac{n}{2}) + n$	$T(n) = 16\,T(\frac{n}{4}) + 2n + n$
$T(n) = 4(4(4T(\frac{n}{8}) + \frac{n}{4}) + \frac{n}{2}) + n$	$T(n) = 64\,T(\frac{n}{8}) + 4n + 2n + n$

$\hookrightarrow T(n) = 4^i T(\frac{n}{2^i}) + n(2^i - 1) \rightarrow \frac{n}{2^i} = 1$

$n = 2^i$

$T(n) = 4^{\log_2(n)} \cdot \underbrace{T(1)}_{\hat{=} 1} + n(2^{\log_2(n)} - 1)$

$\log_2(n) = i$

$T(n) = n^2 + n(n-1)$

$= \quad + n(n-1)$

$= n^2 + n^2 - n$

$= 2n^2 - n$

$= \Theta(n^2) \Rightarrow O(n^2), \Omega(n^2)$

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie obere und untere Schranken für die folgenden Rekursionsgleichungen von Algorithmen mit Hilfe der Iterations- oder Substitutionsmethode:

1. $T(1) = 1, T(n) = 4T(n/2) + n$ für alle $n > 1$
2. $T(1) = 1, T(n) = 2T(n/4) + \sqrt{n}$ für alle $n > 1$
3. $T(1) = 1, T(2) = 1, T(3) = 1, T(n) = 2T(n-1) + n^2$ für alle $n > 3$

2) $T(n) = 2T(\frac{n}{4}) + \sqrt{n}$

Iterationsmethode:

$$T_{(n)} = 2\left(2T\left(\frac{n}{16}\right) + \frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$T_{(n)} = 2\left(2\left(2T\left(\frac{n}{64}\right) + \frac{n}{16}\right) + \frac{n}{4}\right) + \sqrt{n}$$

$$\Rightarrow T_{(n)}^{i} = 2^{i}\, T\left(\frac{n}{4^{i}}\right) + i\sqrt{n}$$

$$1 = \frac{n}{4^{i}}$$

$$i = \log_4(n)$$

$$T_{(1)} = 2^{\log_4(n)}\, T(1) + \log_4 n \cdot \sqrt{n}$$

$$= \sqrt{n} + \log_4 n \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot (1 + \log_4 n)$$

$$\Rightarrow \Theta\left(\sqrt{n} \cdot \log(n)\right)$$

3) $T(n) = 2T(n-1) + n^2$

$$\Rightarrow 2(2T(n-2) + (n-1)^2) + n^2$$

$$\Rightarrow 4T(n-2) + 2(n-1)^2 + n^2$$

$$\Rightarrow 8T(n-4) - 4(n-2)^2 + 2(n-1)^2 + n^2$$

$$\Rightarrow 2^i T(n-1) + \sum_{k=0}^{i-1} 2^k (n-k)^2$$

$T(3) = 1$

$3 = n - i$

$i = n - 3$

$$2^{n-3} T(3) + \sum_{k=0}^{n-1-3} 2^k (n-k)^2$$

$$= 2^{n-3} + \sum_{k=0}^{n-3-1} 2^k (n-k)^2$$

$$\leq \sum_{k=0}^{n-4} 2^k (n^2) = n^2 \sum_{k=0}^{n-4} 2^k = 2^{n-3} - 1$$

$$\Rightarrow O = (2^n)$$