Критерий устойчивости Гурвица

Устойчивость системы по Гурвицу выясняется с помощью характеристического уравнения. Составляется специальный определитель – определитель Гурвица. Правило следующее.

Намечают *n* строк и *n* столбцов (*n* – степень характеристического уравнения). В первый строке ставят все нечетные коэффициенты: a_1, a_3, a_5. По главной диагонали, начиная с коэффициента a_1, слева-вниз-направо располагают последовательно все остальные коэффициенты. Столбцы, начиная с главной диагонали, заполняются вверх по нарастающим индексам, вниз - по убывающим. Все коэффициенты с индексами ниже нуля и выше степени уравнения, заменяют нулями.

Определители Гурвица 5-го, 4-го, 3-го и 2-го порядков выглядят следующим образом.

n = 5	n = 4	n = 3	n = 2
$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix}$	$\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix}$

Для устойчивости системы необходимо, чтобы все коэффициенты характеристического уравнения и все определители были положительными.

Получим условия устойчивости для конкретных уравнений.

1. Характеристическое уравнение 2-й степени

$$a_0 p^2 + a_1 p + a_2 = 0 .$$

Ему соответствует определитель Гурвица 2-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} = a_1 a_2 - a_0 \cdot 0 = a_1 a_2.\ \Delta_2 = a_1 a_2 .$$

Условие устойчивости: $a_0, a_1, a_2 > 0$; $\Delta_2 > 0$, т.е. $a_1 a_2 > 0$.

2. Характеристическое уравнение 3-й степени

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0.$$

Ему соответствует определитель Гурвица 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_1(a_2 a_3 - a_1 0) - a_3(a_0 a_3 - 0 \cdot 0) + 0(a_0 a_1 - a_2 \cdot 0).$$

$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_0 a^2{}_3.$$

Условие устойчивости: $a_0, a_1, a_2, a_3 > 0$; $\Delta_3 > 0$, или, сокращая на a_3, $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$.

3. Характеристическое уравнение 4-й степени

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0 .$$

Ему соответствует определитель Гурвица 4-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_3 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_4 & 0 \\ a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} - a_3 \begin{vmatrix} a_0 & a_4 & 0 \\ 0 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} + 0 - 0 .$$

$$\Delta_4 = a_1 a_2 a_3 a_4 - a^2{}_1 a^2{}_4 - a_0 a^2{}_3 a_4 .$$

Условие устойчивости: $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 > 0$, $\Delta_4 > 0$, или сокращая на a_4, $a_1 a_2 a_3 - a^2{}_1 a_4 - a_0 a^2{}_3 > 0$.

4. Характеристическое уравнение 5-й степени

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0 .$$

Опуская процедуру вычисления определителя, выпишем сразу условие устойчивости:

$$a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 > 0,$$

$$(a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 > 0 .$$

Можно составлять определители Гурвица и для характеристических уравнений более высокой степени, получая соответствующие условия устойчивости. Однако, объем вычислений нарастает с увеличением степени характеристического уравнения, поэтому считается приемлемым пользоваться критерием Гурвица для характеристических уравнений степени не выше пятой.

Определитель Гурвица позволяет найти коэффициент усиления на границе устойчивости. Коэффициент усиления – это свободный член характеристического уравнения, его индекс равен степени уравнения. Границей устойчивости будет условие $\Delta = 0$. Откуда и вычисляется коэффициент усиления.