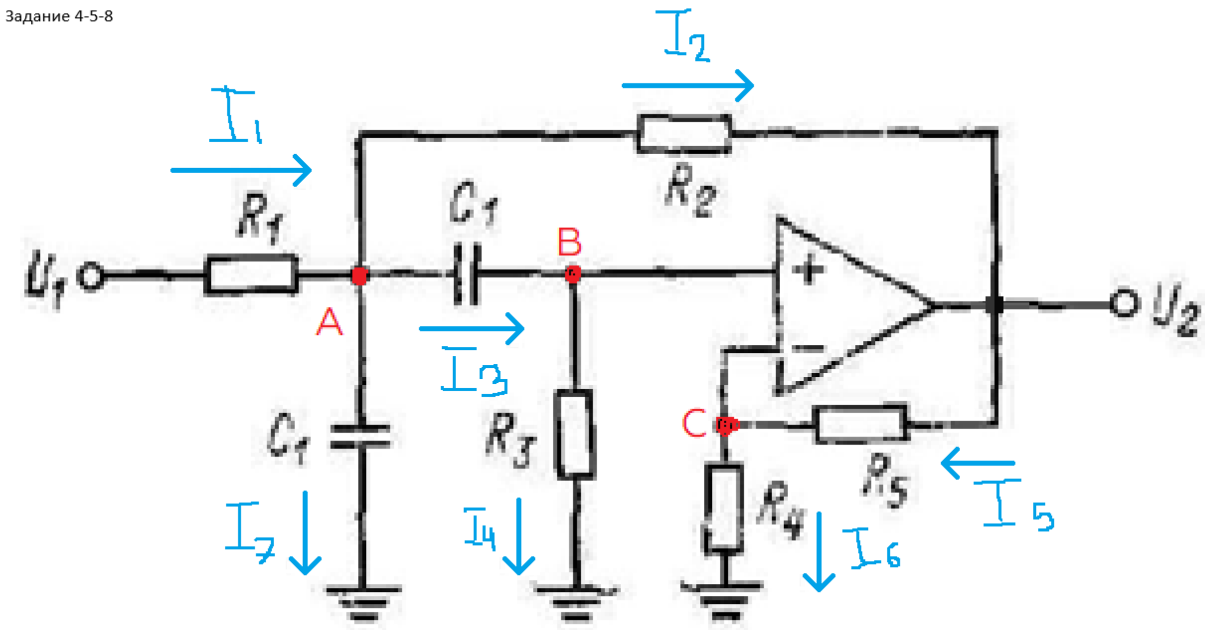
Марчук Иван Сергеевич, ИУ6-42б

Вариант 19, задание 4-5-8



Свойства идеального операционного усилителя:

1)$U_- = U_+$

2)$I_+ = I_- = 0$

3)$I_{\text{вых}} -$ неизвестно

Составим уравнения по I з-ну Кирхгофа:

$I_1 = I_2 + I_3 + I_7$

$I_3 = I_4 + I_+$, тк $I_+ = 0 \Rightarrow I_3 = I_4$

$I_5 = I_6 + I_-$, тк $I_- = 0 \Rightarrow I_5 = I_6$

Выразим токи: (p=j ω)

$\frac{U_{\text{вх}} - U_a}{(1/\text{p}C_1)} = I_1$; $\quad \frac{U_a - U_{\text{вых}}}{R_1} = I_2$

$\frac{U_a - U_b}{(1/\text{p}C_1)} = I_3$; $\quad \frac{U_b}{R_2} = I_4$; $\quad \frac{U_{\text{вых}} - U_c}{R_4} = I_5$; $\quad \frac{U_c}{R_3} = I_6$; $\quad \frac{U_a}{(1/\text{p}C_1)} = I_7$;

По свойству операционного усилителя: $U_b = U_+ = U_- = U_c$

Заменим U_c на U_b; I_4на I_3; I_6на I_5;

Получим систему уравнений:

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_7$$

$$\frac{U_{\text{вх}} - U_a}{(1/\mathrm{p}C_1)} = I_1; \quad \frac{U_a - U_{\text{вых}}}{R_1} = I_2$$

$$\frac{U_a - U_b}{(1/\mathrm{p}C_1)} = I_3; \quad \frac{U_b}{R_2} = I_3; \quad \frac{U_{\text{вых}} - U_b}{R_4} = I_5; \quad \frac{U_b}{R_3} = I_5; \quad \frac{U_a}{(1/\mathrm{p}C_1)} = I_7;$$

Получаем 8 уравнений и 9 неизвестных.

$$I_3 = \frac{U_a - U_b}{(1/\mathrm{p}C_1)} = \frac{U_b}{R_2} = \frac{I_5 R_3}{R_2} = \frac{(U_{\text{вых}} - U_b)R_3}{R_4 R_2} \Rightarrow$$

$$U_{\text{вых}} = \frac{I_3 R_4 R_2}{R_3} + U_b = \frac{I_3 R_4 R_2}{R_3} + I_3 R_2 = I_3\left(\frac{R_4 R_2}{R_3} + R_2\right)$$

$$U_{\text{вх}} = \frac{I_1}{\mathrm{p}C_1} + U_a = \frac{I_2 + I_3 + I_7}{\mathrm{p}C_1} + \frac{I_7}{\mathrm{p}C_1} = \frac{I_2 + I_3 + 2I_7}{\mathrm{p}C_1} = \frac{\frac{U_a - U_{\text{вых}}}{R_1} + \frac{U_b}{R_2} + 2I_7}{\mathrm{p}C_1}$$

$$= \frac{\frac{\frac{I_3}{\mathrm{p}C_1} + U_b - I_3\left(\frac{R_4 R_2}{R_3} + R_2\right)}{R_1} + \frac{U_b}{R_2} + 2I_7}{\mathrm{p}C_1}$$

$$= \frac{\frac{I_3}{\mathrm{p}C_1} + U_b - I_3\left(\frac{R_4 R_2}{R_3} + R_2\right)}{R_1 pC_1} + \frac{U_b}{R_2 pC_1} + \frac{2I_7}{pC_1} =$$

$$= \frac{I_3 + (U_b - I_3\left(\frac{R_4 R_2}{R_3} + R_2\right))pC_1}{R_1 pC_1 pC_1} + \frac{I_5 R_3}{R_2 pC_1} + \frac{2I_7}{pC_1} =$$

$$= \frac{I_3 + (U_b - I_3\left(\frac{R_4 R_2}{R_3} + R_2\right))pC_1}{R_1 pC_1 pC_1} + \frac{\frac{I_3 R_2}{R_3} R_3}{R_2 pC_1} + \frac{2\,\frac{\frac{I_3}{pC_1} + U_b}{(1/pC_1)}}{pC_1} =$$

$$= \frac{I_3 + (I_3 R_2 - I_3\left(\frac{R_4 R_2}{R_3} + R_2\right))pC_1}{R_1 pC_1 pC_1} + \frac{3I_3}{pC_1} + 2I_3 R_2 =$$

$$= I_3\left(\frac{1}{R_1 pC_1 pC_1} + \frac{R_2}{R_1 pC_1} - \frac{\frac{R_4 R_2}{R_3}}{R_1 pC_1} - \frac{R_2}{R_1 pC_1} + \frac{3}{pC_1} + 2R_2\right) =$$

$$= I_3 \left(\frac{1}{R_1 p C_1 \omega C_1} - \frac{\frac{R_4 R_2}{R_3}}{R_1 p C_1} + \frac{3}{p C_1} + 2R_2 \right)$$

$$K(p) = \frac{U_{\text{вых}}}{U_{\text{вх}}} = \frac{I_3 \left(\frac{R_4 R_2}{R_3} + R_2 \right)}{I_3 \left(\frac{1}{R_1 p C_1 p C_1} - \frac{\frac{R_4 R_2}{R_3}}{R_1 p C_1} + \frac{3}{p C_1} + 2R_2 \right)} =$$

$$= \frac{\frac{R_4 R_2}{R_3} + R_2}{\frac{1}{R_1 p C_1 p C_1} - \frac{\frac{R_4 R_2}{R_3}}{R_1 p C_1} + \frac{3}{p C_1} + 2R_2} =$$

$$= \frac{(R_4 R_2 + R_2 R_3) R_1 p C_1 p C_1}{R_3 \left(1 - \frac{R_4 R_2}{R_3} p C_1 + 3R_1 p C_1 + 2R_2 R_1 p C_1 p C_1 \right)}$$

$$K(\omega) = \frac{-(R_4 R_2 + R_2 R_3) R_1 \omega C_1 \omega C_1}{R_3 \left(1 - \frac{R_4 R_2}{R_3} i\omega C_1 + 3R_1 i\omega C_1 - 2R_2 R_1 \omega C_1 \omega C_1 \right)} =$$

$$= \frac{-(R_4 R_2 + R_2 R_3) R_1 \omega C_1 \omega C_1}{R_3 - 2R_2 R_1 \omega C_1 \omega C_1 R_3 - \frac{R_4 R_2}{R_3} i\omega C_1 R_3 + 3R_1 i\omega C_1 R_3} =$$

$$|K(\omega)| = \frac{(R_4 R_2 + R_2 R_3) R_1 \omega C_1 \omega C_1}{\sqrt{(R_3 - 2R_2 R_1 \omega C_1 \omega C_1 R_3)^2 + \left(\frac{R_4 R_2}{R_3} \omega C_1 R_3 + 3R_1 \omega C_1 R_3 \right)^2}} =$$

=>При $\omega = 0$ => $|K(\omega)| = 0$

$$\lim_{\omega\to\infty}|K(\omega)| =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}. \frac{(R_4R_2 + R_2R_3)R_1\omega C_1\omega C_1}{\sqrt{(R_3 - 2R_2R_1\omega C_1\omega C_1R_3)^2 + \left(\frac{R_4R_2}{R_3}\omega C_1R_3 + 3R_1\omega C_1R_3\right)^2}} =$$

$$= \frac{(R_4 + R_3)R_2R_1{C_1}^2\omega^2}{\sqrt{\begin{array}{l}{R_3}^2 - \left(4R_2R_1{C_1}^2{R_3}^2\right)\omega^2 + \left(4{R_2}^2{R_1}^2{C_1}^4{R_3}^2\right)\omega^4 + \\ \left(\left(\frac{R_4R_2}{R_3}C_1R_3\right)^2 + 6R_4R_2R_1{C_1}^2R_3 + (3R_1C_1R_3)^2\right)\omega^2\end{array}}}$$

$$= \frac{a\omega^2}{\sqrt{b - c\omega^2 + d\omega^4 + e\omega^2}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)^* = \frac{\frac{a\omega^2}{\omega^2}}{\frac{\sqrt{b - c\omega^2 + d\omega^4 + e\omega^2}}{\omega^2}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\frac{b - c\omega^2 + d\omega^4 + e\omega^2}{\omega^4}}} = \frac{a}{\sqrt{\frac{b}{\omega^4} - \frac{c\omega^2}{\omega^4} + \frac{d\omega^4}{\omega^4} + \frac{e\omega^2}{\omega^4}}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{\frac{b}{\omega^4} - \frac{c}{\omega^2} + d + \frac{e}{\omega^2}}} = \frac{a}{\sqrt{0 - 0 + d + 0}} = \frac{a}{\sqrt{d}} =$$

$$= \frac{(R_4 + R_3)R_2R_1{C_1}^2}{\sqrt{4{R_2}^2{R_1}^2{C_1}^4{R_3}^2}} = \frac{(R_4 + R_3)R_2R_1{C_1}^2}{2R_2R_1{C_1}^2R_3}$$

Экстремум функции находится там, где знаменатель минимален:

$$\left(\left(R_3 - 2R_2R_1{C_1}^2\omega^2R_3\right)^2 + \left(\frac{R_4R_2}{R_3}\omega C_1R_3 + 3R_1\omega C_1R_3\right)^2\right)' =$$

$$= \left(\left(R_3 - 2R_2R_1{C_1}^2\omega^2R_3\right)^2\right)' + \left(\left(\frac{R_4R_2}{R_3}\omega C_1R_3 + 3R_1\omega C_1R_3\right)^2\right)' =$$

$$= 2\left(R_3 - 2R_2R_1{C_1}^2\omega^2R_3\right) * \left(R_3 - 2R_2R_1{C_1}^2\omega^2R_3\right)' +$$

$$+2\left(\frac{R_4R_2}{R_3}\omega C_1R_3 + 3R_1\omega C_1R_3\right) * \left(\frac{R_4R_2}{R_3}\omega C_1R_3 + 3R_1\omega C_1R_3\right)' =$$

$$= 2\left(R_3 - 2R_2R_1{C_1}^2R_3\omega^2\right) * (1 - 4R_2R_1{C_1}^2R_3\omega) +$$

$$+2\left(\frac{R_4R_2}{R_3}\omega C_1R_3+3R_1\omega C_1R_3\right)*\left(\frac{R_4R_2}{R_3}C_1R_3+3R_1C_1R_3\right)=$$

$$=2R_3-4R_1R_2R_3{C_1}^2\omega^2-8R_1R_2{R_3}^2{C_1}^2\omega+16{R_1}^2{R_2}^2{R_3}^2{C_1}^4\omega^3+$$

$$+2{R_2}^2{R_4}^2{C_1}^2\omega+12R_1R_2R_3R_4{C_1}^2\omega+18{R_1}^2{R_3}^2{C_1}^2\omega=0$$

$$\omega_{max}=\sqrt{\frac{{R_3}^2{C_1}^2(2R_3{C_1}^2R_1R_4+1)}{2{C_1}^4{R_3}^2{R_1}^2{R_4}^2{R_2}^2}}=\frac{\sqrt{2R_3{C_1}^2R_1R_4R_2+1}}{2C_1R_1R_4R_2}$$

Изобразим схематично $\lim|K(\omega)|$: