Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ **ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ**

КАФЕДРА **КОМПЬЮТЕРНЫЕ СИСТЕМЫ И СЕТИ (ИУ6)**

НАПРАВЛЕНИЕ ПОДГОТОВКИ **09.03.01 Информатика и вычислительная техника**

О Т Ч Е Т

по домашнему заданию №_1_

Название:_ Поток в транспортной сети. Алгоритм Форда-Фалкерсона

Дисциплина:_ Дискретная математика

Студент ИУ6-42б 14.05.2021 И.С. Марчук
(Группа) (Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

Преподаватель В.В. Гуренко
(Подпись, дата) (И.О. Фамилия)

2021 г.

Вариант 17

Задание:

Сеть в виде взвешенного орграфа задана матрицей Ω пропускных способностей ориентированных ребер. При помощи алгоритма Форда – Фалкерсона определить максимальный поток φmax, доставляемый от источника $s = x$ 1 к стоку $t = x$ 12 и указать минимальный разрез, отделяющий t от s.

Оптимизационную часть алгоритма реализовать в виде коррекции потока хотя бы на одном увеличивающем маршруте.

Вариант 17.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}
x_1	–	15	20	25	–	–	–	–	–	–	–	–
x_2	–	–	–	–	6	9	–	17	–	–	–	–
x_3	–	16	–	–	–	10	14	–	–	–	–	–
x_4	–	–	35	–	–	–	5	–	–	–	–	–
x_5	–	–	–	–	–	–	–	12	1	–	–	–
x_6	–	–	–	–	5	–	–	–	11	–	–	2
x_7	–	–	–	–	–	8	–	–	–	6	–	–
x_8	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	31	–
x_9	–	–	–	–	–	–	13	3	–	–	9	6
x_{10}	–	–	–	–	–	–	–	–	7	–	–	4
x_{11}	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	44
x_{12}	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Рисунок 1 – Матрица Ω

Теоремы:

Теорема 1

Если (s,x1,…,xk,t) – путь от источника к стоку, состоящий только из ненасыщенных дуг, то значение потока на этом пути и, следовательно, во всей сети можно увеличить на

δ*=min {δ(xi,xj)}; δ(xi,xj)=c(xi,xj)-ϕ(xi,xj).

по всем дугам (xi,xj) пути.

Теорема 2

Если (s,xn,…,xk,t) – увеличивающий маршрут, то значение потока на его прямых дугах можно увеличить, а на обратных – уменьшить на величину

$\varepsilon^* = \min\{\delta^*, \phi^*\}$, где

δ^*=min по прямым дугам $\{\delta(xi,xj)\}$=

min по прямым дугам $\{c(xi,xj)-\phi(xi,xj)\}$,

ϕ^*=minпо обратным дугам $\{\phi(xi,xj)\}$.

При этом величина потока в сети возрастает на ε^*.

Теорема 3

Поток в сети достигает максимального значения тогда и только тогда, когда в сети не существует увеличивающего маршрута.

Теорема 4 (Форда–Фалкерсона)

Для любой сети с одним источником и одним стоком величина максимального потока, доставляемого от источника к стоку, равна пропускной способности минимального разреза:

ϕ max = c min

Решение:

Составим взвешенный орграф (рисунок 1) заданный матрицей. Начальный поток во всех дугах возьмем за 0.

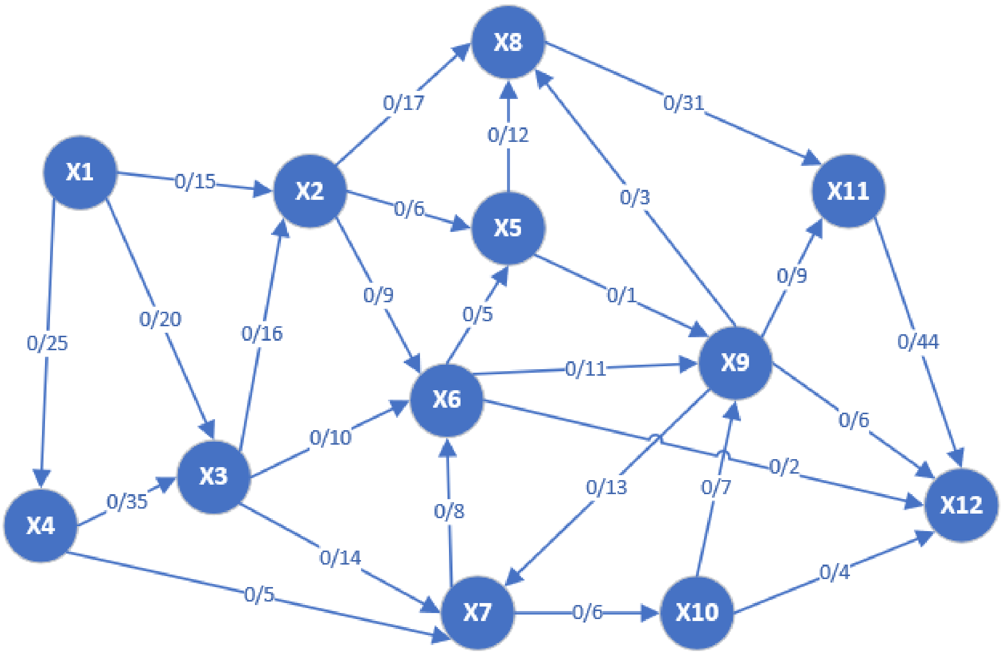

Рисунок 2 – Начальная сеть

Используя теорему 1, достигнем полного потока:

1) Возьмем путь (x1-x2-x8-x11-x12),
$\delta^* = \min\{15\text{-}0,\ 17\text{-}0,\ 31\text{-}0,\ 44\text{-}0\} = 15$

Ребро x1-x2 стало насыщенным.
Значение потока φ в сети стало равным 15.
Результат показан на рисунке 3.

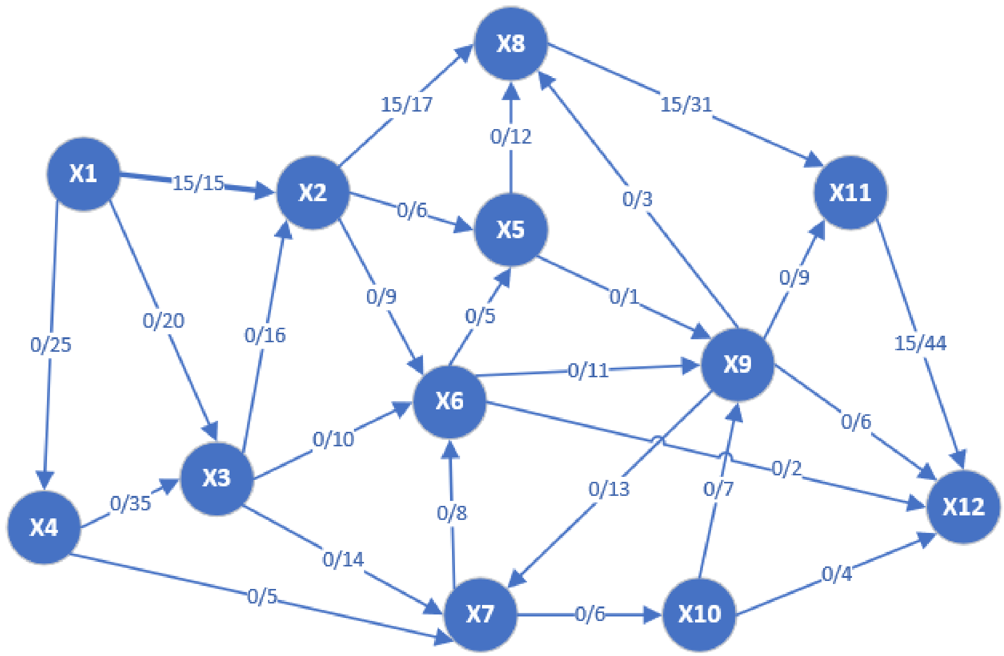

Рисунок 3 – Путь 1

2) Возьмем путь (x1-x3-x2-x8-x11-x12),
$\delta^* = \min\{20\text{-}0, 16\text{-}0, 17\text{-}15, 31\text{-}15, 44\text{-}15\} = 2$

Ребро x2-x8 стало насыщенным.
Значение потока φ в сети стало равным 17.
Результат показан на рисунке 4.

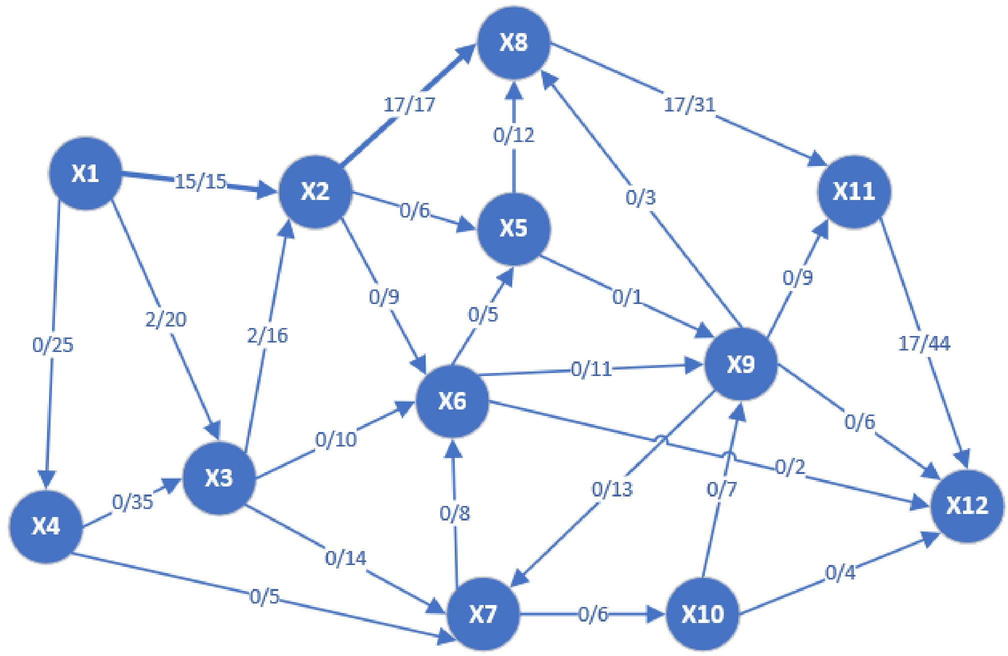

Рисунок 4 – Путь 2

3) Возьмем путь (x1-x3-x2-x5-x8-x11-x12),
$\delta^* = \min\{20\text{-}2,\ 16\text{-}2,\ 6\text{-}0,\ 12\text{-}0,\ 31\text{-}17,\ 44\text{-}17\} = 6$

Ребро x2-x5 стало насыщенным.
Значение потока φ в сети стало равным 23.
Результат показан на рисунке 5.

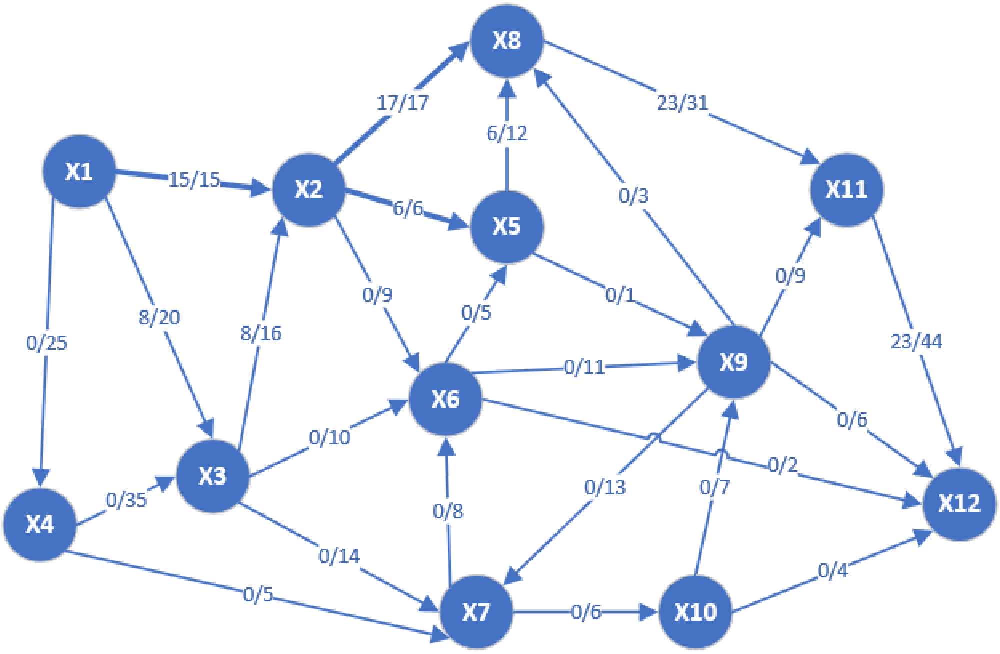

Рисунок 5 – Путь 3

4) Возьмем путь (x1-x3-x6-x9-x12),
$\delta^* = \min\{20-8, 10-0, 11-0, 6-0\} = 6$

Ребра (x9, x12) стали насыщенными.
Значение потока φ в сети стало равным 29.
Результат показан на рисунке 6.

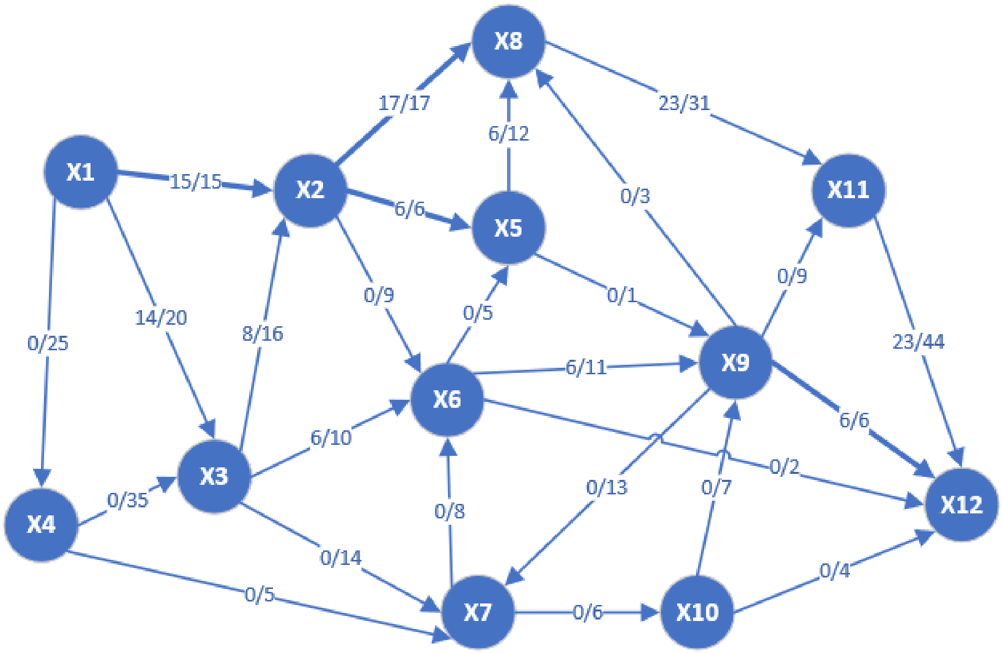

Рисунок 6 – Путь 4

5) Возьмем путь (x1-x4-x3-x7-x6-x9-x11-x12),
$\delta^* = \min\{25-0, 35-0, 14-0, 8-0, 11-6, 9-0, 44-23\} = 5$

Ребро x6-x9 стало насыщенным.
Значение потока φ в сети стало равным 34
Результат показан на рисунке 7.

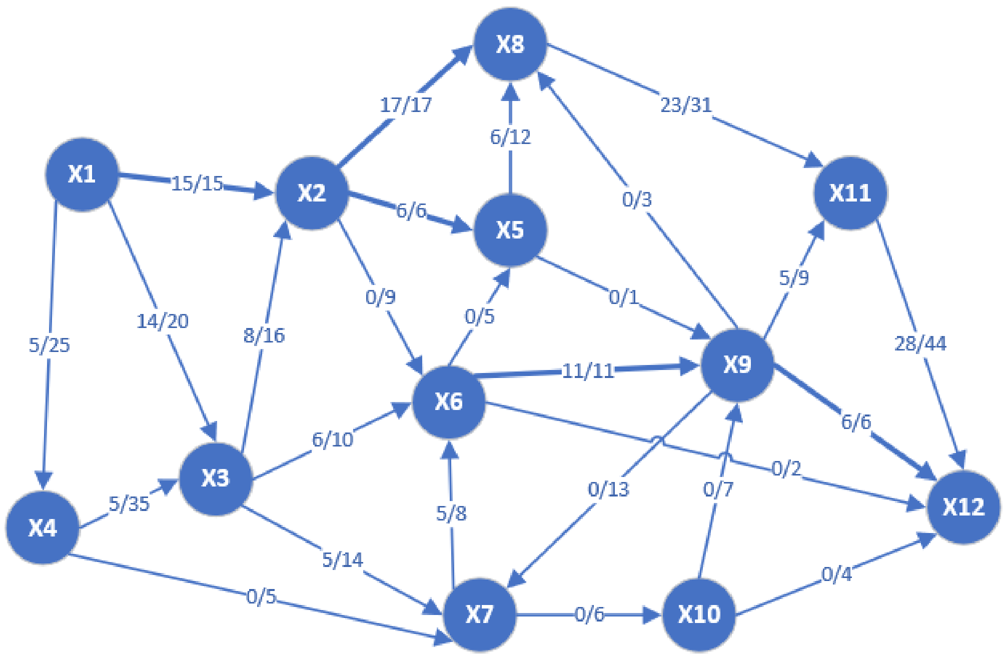

Рисунок 7 – Путь 5

6) Возьмем путь (x1-x4-x3-x6-x5-x8-x11-x12),
$\delta^* = \min\{25\text{-}5,\ 35\text{-}5,\ 10\text{-}6,\ 5\text{-}0,\ 12\text{-}6,\ 31\text{-}23,\ 44\text{-}28\} = 4$

Ребро x3-x6 стало насыщенным.
Значение потока φ в сети стало равным 38
Результат показан на рисунке 8.

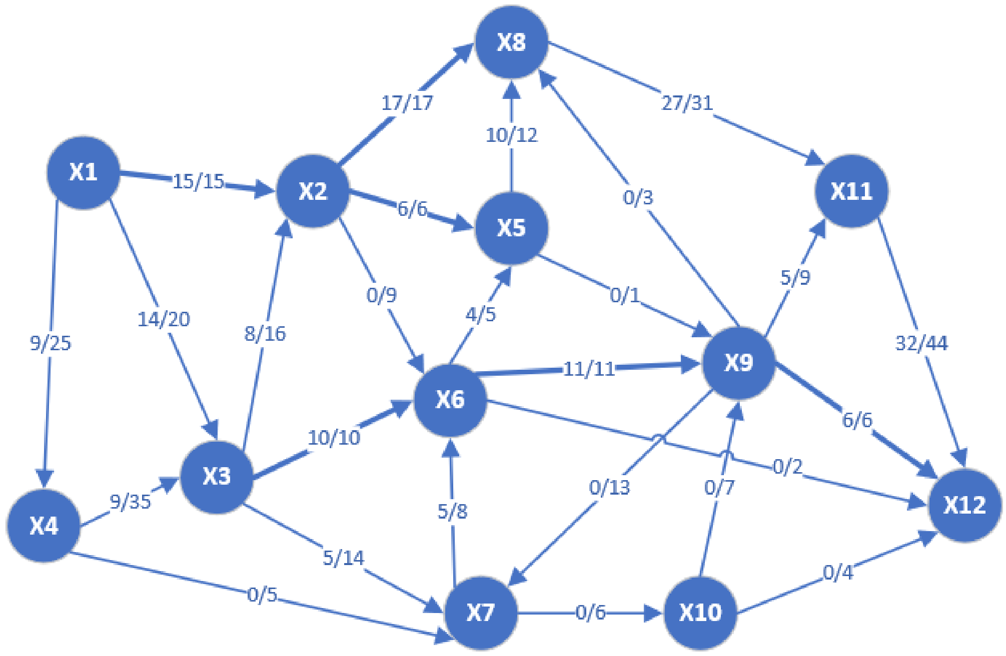

Рисунок 8 – Путь 6

7) Возьмем путь (x1-x4-x7-x10-x12),
$\delta^* = \min\{25\text{-}9, 5\text{-}0, 6\text{-}0, 4\text{-}0\} = 4$

Ребро x10-x12 стало насыщенным.
Значение потока φ в сети стало равным 42
Результат показан на рисунке 9.

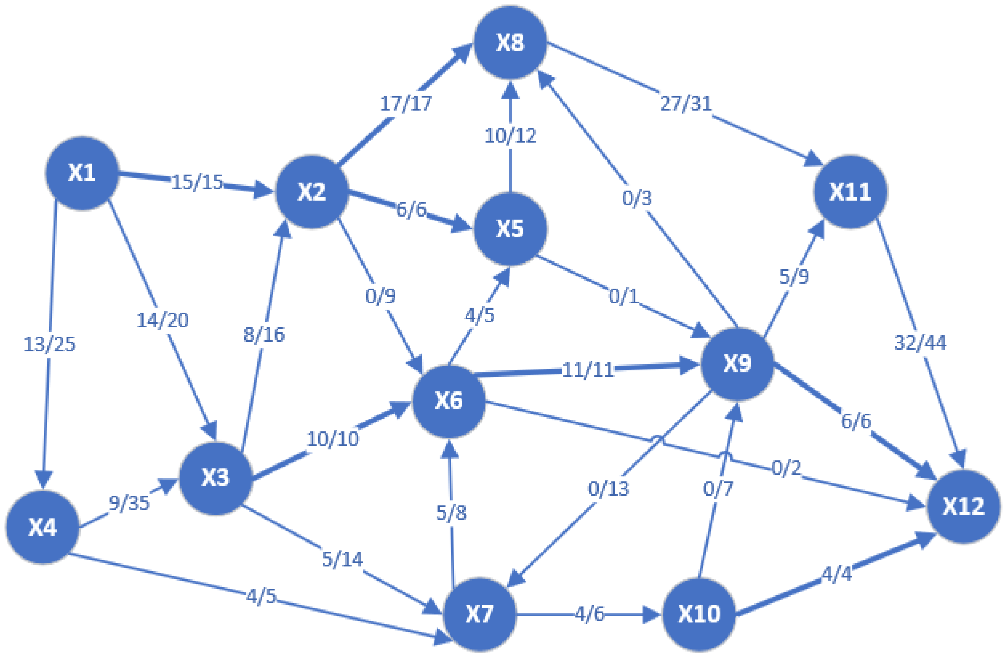

Рисунок 9 – Путь 7

8) Возьмем путь (x1-x4-x7-x6-x5-x8-x11-x12),

$\delta^* = \min\{25\text{-}13,\ 5\text{-}4,\ 8\text{-}5,\ 5\text{-}4,\ 12\text{-}10,\ 31\text{-}27,\ 44\text{-}32\} = 1$

Ребра (x4, x7) и (x6, x5) стали насыщенными.
Значение потока φ в сети стало равным 43
Результат показан на рисунке 10.

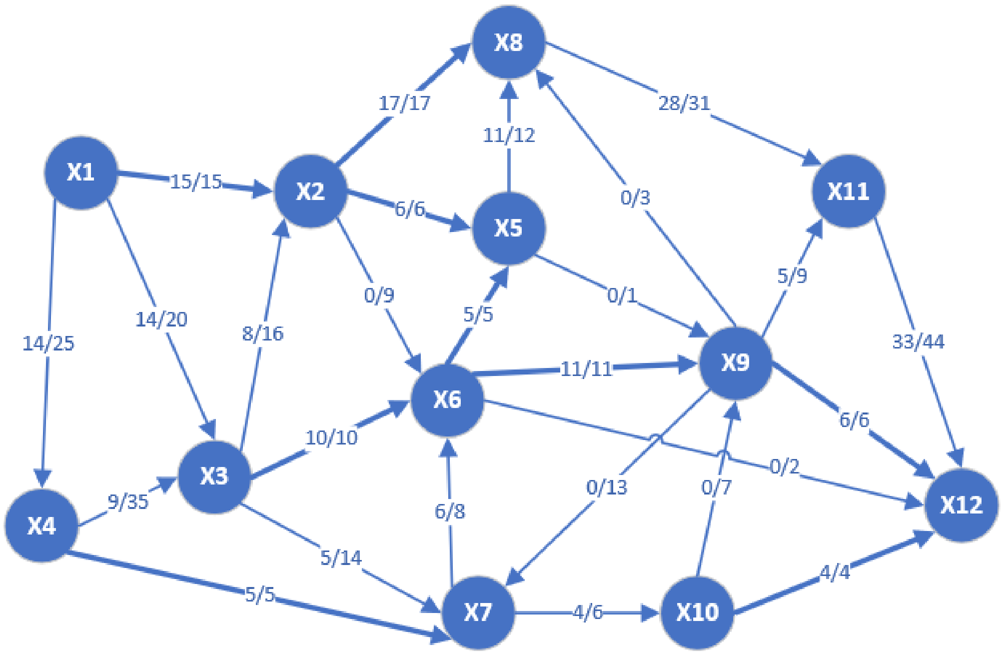

Рисунок 10 – Путь 8

9) Возьмем путь (x1-x4-x3-x7-x6-x12),
$\delta^* = \min\{25-14,\ 35-9,\ 14-5,\ 8-6, 2-0\} = 2$

Ребра (x7, x6) и (x6, x12) стали насыщенными.
Значение потока φ в сети стало равным 45
Результат показан на рисунке 11.

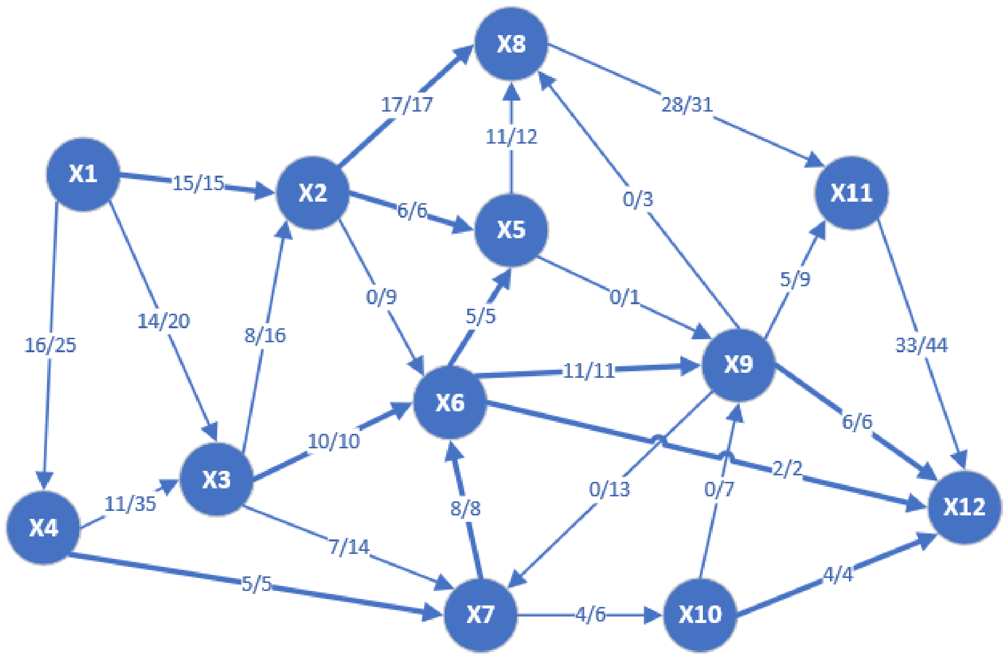

Рисунок 11 – Путь 9

10) Возьмем путь (x1-x4-x3-x7-x10-x9-x11-x12),
$\delta^* = \min\{25\text{-}16, 35\text{-}11, 14\text{-}7, 6\text{-}4, 7\text{-}0, 9\text{-}5, 44\text{-}33\} = 2$

Ребро (x7, x10) стало насыщенным.
Значение потока φ в сети стало равным 47
Результат показан на рисунке 12.

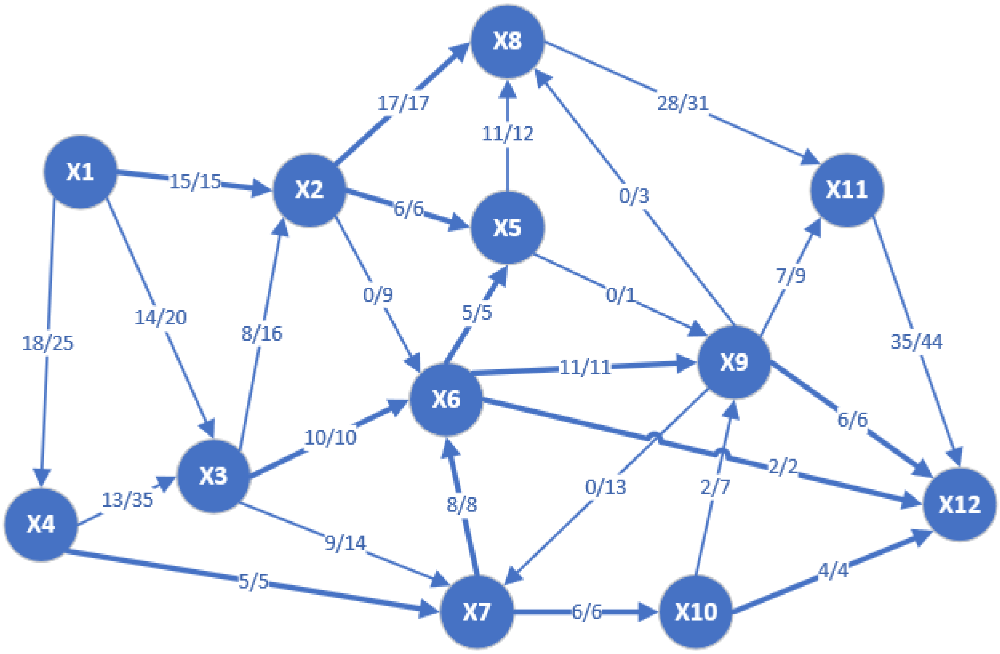

Рисунок 12 – Путь 10

В сети путей больше нет. Больше нельзя построить путь, состоящих из ненасыщенных рёбер орграфа от источника к стоку. Это хорошо видно, если удалить вершины графа, из которых идут только насыщенные ребра (рисунок 13). Следовательно полный поток в сети равен 47.

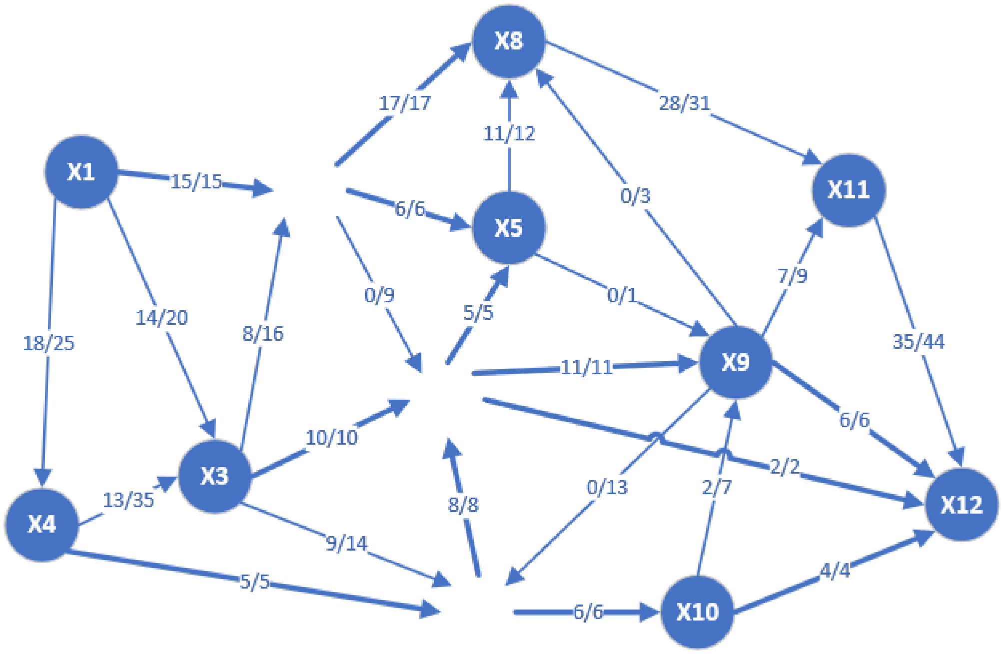

Рисунок 13 – граф без вершин, из которых идут только насыщенные ребра

Используя теорему 2, найдём максимальный поток в сети.

1) Пометим вершины, чтобы найти маршрут от источника к стоку (рисунок 14).

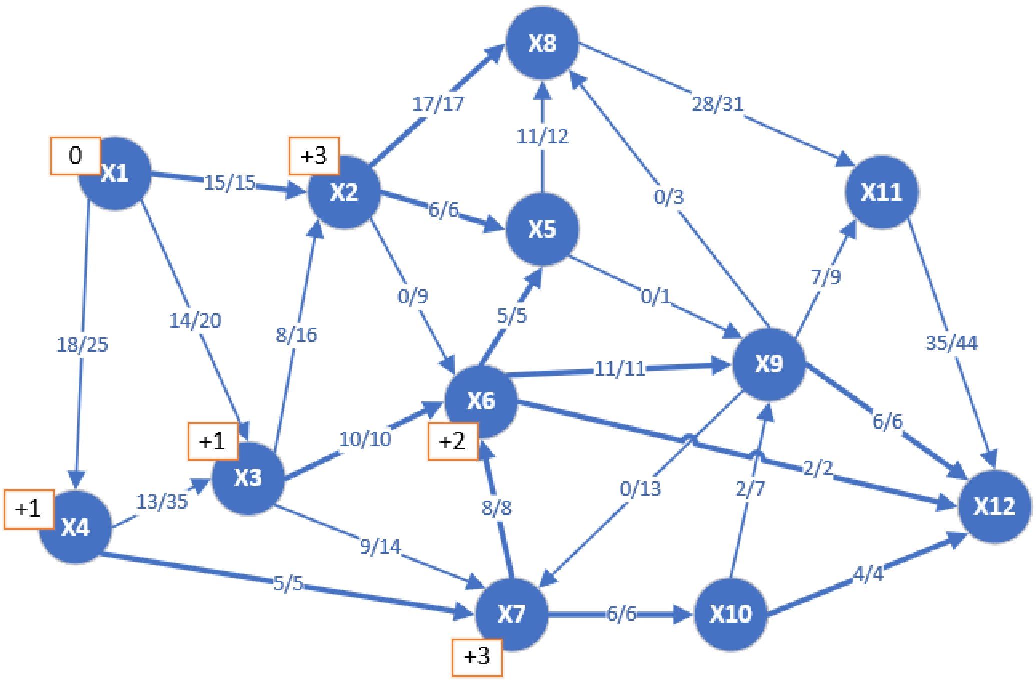

Рисунок 14 – Помеченные по теореме 2 вершины

Вершину x12 пометить не удалось, значит увеличивающего маршрута нет и по теореме 3 максимальная величина потока в сети равна 47.

Зададим множество A, состоящие из помеченных верши, а множество A' из не помеченных.

A = {x1, x2, x3, x4, x6, x7}

A' = {x5, x8, x9, x10, x11, x12}

Минимальный срез по определению содержит дуги исходящие из множества A в множество A' (Это проиллюстрировано на рисунке 15).

(A→ A') = {(x2, x8), (x2, x5), (x6, x5), (x6, x9), (x6, x12), (x7, x10)}

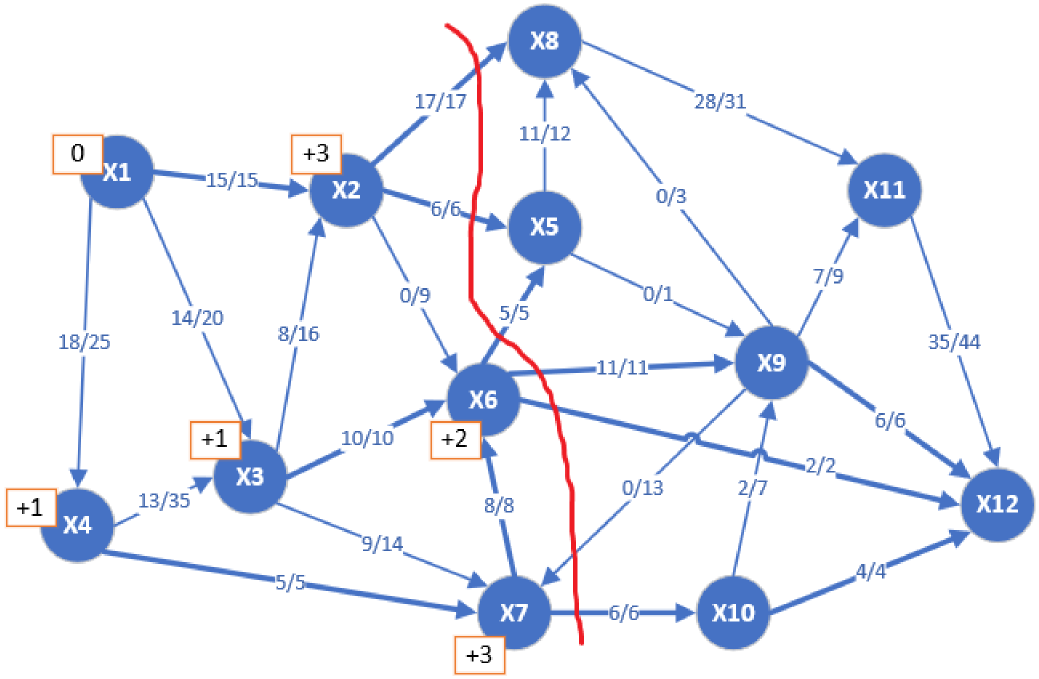

Рисунок 15 – Минимальный срез

По теореме 4 максимальный поток в сети равен пропускной способности минимального разреза.

c(A→ A') = 17+6+5+11+2+6 = 47

Так как максимальны поток по теореме 4 совпал с потоком, найденным на прошлом шаге, то можно сделать вывод, что задача решена верно.

Ответ:

(A→ A') = {(x2, x8), (x2, x5), (x6, x5), (x6, x9), (x6, x12), (x7, x10)};

φmax = 47;

Вывод: Я изучил 4 теоремы, использующиеся в алгоритме Форда-Фалкерсона. А также применил полученные знания для поиска максимального потока в сети и минимального среза.