

**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМ. Н. Э. БАУМАНА**
Факультет «ИНФОРМАТИКА И СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ»
Кафедра ИУ-3

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
по курсу
«Основы теории управления»

Составил доц. Герман Д. Я.

2009 г.

Часть 1. Непрерывные сигналы и системы

1. Введение

Управление состоит в том, чтобы, воздействуя на объект (ракета, электродвигатель, конвейер и т. д.), изменять протекающие в нем процессы таким образом, чтобы была достигнута цель управления. Цель управления формулируется заказчиком – представителем той области, для которой проектируется система управления (военные, технологи, экономисты, биологи). Специалисты по управлению проектируют систему управления: систему для сбора информации, передачи и представления её в удобной форме; систему принятия решения, как использовать эту информацию для достижения цели; систему воздействия на объект для приведения его к заданной цели.

Примеры:

1. Управление электротехническими объектами.

Объект управления, например, электродвигатель. Цель управления – поддержание постоянной угловой скорости вала двигателя. Способ получения информации - обработка сигнала с датчика угловой скорости вала двигателя. Система принятия решения должна выбрать сигнал, подаваемый на якорь двигателя. Система воздействия ... поле, создаваемое статором двигателя. Это сравнительно простая задача управления. Электродвигатель - это хорошо изученный объект, необходимо выдерживать постоянным один из его параметров.

2. Управление частотой пульса человека.

Объект управления – человек. Цель управления – поддержание заданной частоты пульса. Способ получения информации – обработка показаний пульсометра. Система принятия решений – сообщения спортсмену на тренажере о необходимости увеличения или уменьшения темпа бега. Эта задача управления почти такая же, как в п. 1, но объект управления намного сложнее.

3. Управление ракетой.

Объект управления – ракета. Цель управления – поражение противника: ракеты, самолета, корабля, наземного объекта. Из способов получения информации существуют: самонаведение с помощью головки самонаведения, наземный - с помощью наземного комплекса наблюдения и др. Система принятия решений должна

выбрать траектории подлета, сближения и поражения. Система воздействия на ракету – это воздушные рули, поворачивающиеся по сигналам системы принятия решений. Задача наведения самая сложная из вышеуказанных. Здесь и движение цели случайно и сигналы в системе получения информации искажены помехами.

В общем виде все эти задачи можно представить в виде, представленном на рис. 1.1



Основные сигналы в САУ
Рис. 1.1

Здесь

U - управляющий сигнал,

X - управляемая координата объекта,

Z - возмущающий сигнал.

Различные варианты задачи управления можно сформулировать следующим образом:

1. Задано управляющее воздействие, необходимо найти, как изменятся координаты объекта.
2. Задано начальное и конечное положения объекта, необходимо определить вид управляющего сигнала. При этом может быть поставлена задача оптимального перевода объекта из начального в конечное состояние. Критерии оптимальности могут быть разными: быстродействие, экономичность. Могут быть поставлены ограничения на значения некоторых координат во время перевода.

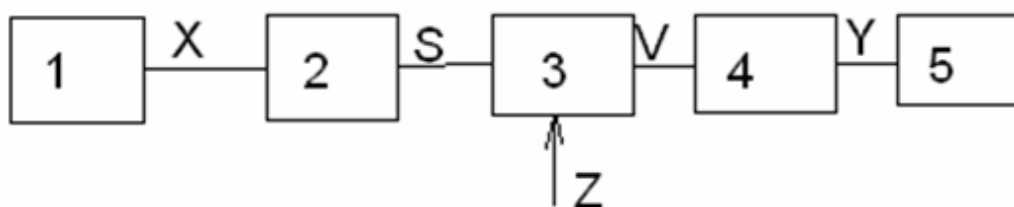
Рассмотрим немного подробнее составные части системы управления.

Система сбора и обработки информации. Структурная схема системы представлена на рис. 1.2.

На рисунке обозначено

1 – Источник информации,

2 – Передатчик,



Типовая схема системы передачи информации

Рис. 1.2.

- 3 - Канал связи,
- 4 – Приемник,
- 5 – Получатель информации,
- X – Сообщение,
- S – Переданный сигнал,
- Z – Помеха,
- V – Принятый сигнал,
- Y – Принятое сообщение.

Источник информации – это объект, среда, человек, книга, состояние которых заранее неизвестно и параметры X этого состояния (информацию – заранее неизвестные сведения) надо передать получателю.

Передатчиком называется устройство или система устройств, которые выполняют следующие функции:

1. Преобразуют параметры состояния в форму, которая может быть воспринята информационной системой и обработана. Для этого, как правило, используют различные измерители (датчики первичной информации), которые преобразуют параметры системы в электрический сигнал. Давление, угловое положение самолета, размер детали и т. д. на выходе датчика представляется в виде электрического сигнала, который далее обрабатывается.

2. Подготовить сигнал к передаче. Если по системе передается один сигнал, то он, в принципе, может быть передан по проводу без дополнительной обработки. Но информационная система передает сотни и тысячи сигналов, а канал связи для всех сигналов имеется, как правило, только один. Тогда по каналу связи передается не непрерывный сигнал, а его значения в дискретные моменты времени. Освободившиеся промежутки используются для передачи других сигналов. Чтобы не

сильно ухудшить точность используются современные научные и конструкторские разработки.

3. При передаче сигнала он преобразуется в форму, оптимальную для выбранного канала связи (преобразование в оптический сигнал, модуляция).

Канал связи это среда, по которой передается сигнал. Для нашей специальности здесь важно отметить действие помехи Z , которая представляет собой случайный, заранее неизвестный процесс, поэтому принятый сигнал (в случае аддитивной помехи) равен

$$V = S + Z$$

и отличается от переданного сигнала на неизвестную величину.

Приемник принимает переданный сигнал и производит его предварительную обработку:

1. Отфильтровывает от полезного сигнала помеху. Очевидно, что абсолютно точная фильтрация невозможна, и возникшую ошибку необходимо учитывать при принятии решений. Устраняются сбойные точки.

2. Разделяет собранные в единую последовательность дискретные отсчеты сигналов от разных датчиков.

3. Если необходимо, дискретные по времени отсчеты каждого датчика преобразуются в непрерывный процесс.

4. Обработанные сигналы передаются назначенным получателям информации

Получатель информации обрабатывает полученную информацию по определенным алгоритмам и либо хранит её для накопления данных, последующих выводов и т. д. либо вырабатывает решения с целью управления различными объектами.

Когда система сбора и обработки информации используется в системе управления, её основной задачей является измерение параметров объекта и прием сигналов «цели управления». В технических средствах в качестве информации выступают параметры электрических сигналов (напряжение или кодированная последовательность импульсов). Получатель информации в системе управления представлен в виде «вычислителя», который вырабатывает сигнал, поступающий на исполнительные устройства. Исполнительное устройство (рули ракеты, привод бегущей дорожки, привод конвейера) воздействуют на объект управления и меняют его

параметры, что фиксируется системой сбора и обработки информации (см. рис. 1.3).



Рис. 1.3

Если система сбора информации обрабатывает параметры объекта, то совокупность перечисленных блоков образует замкнутый контур. Метод замкнутого контура наиболее часто используется при построении системы управления, но бывают исключения, о которых будет указано ниже.

2. Основные принципы управления

При построении системы управления можно выбрать один из трех фундаментальных принципов управления: принцип разомкнутого управления, принцип компенсации возмущения, принцип обратной связи.

Принцип разомкнутого управления. По этому принципу для расчета системы учитываются только теоретические соотношения между входным и выходным сигналами. Действующие возмущения не учитываются. Тогда возможно по заданному детерминированному входному сигналу определить детерминированный выходной сигнал. Решается и обратная задача – по требуемому выходному сигналу определить входной сигнал. Поясним сказанное простейшим примером, когда вход и выход связаны безинерционными связями (без использования дифференциальных уравнений, уравнений в частных производных и т. п.). Например

$$x(t) = k \cdot u(t) \quad (2.1)$$

Решение прямой задачи тривиально, решение обратной задачи очевидно

$$u(t) = \frac{1}{k} x(t)$$

Однако, это простое решение имеет существенный недостаток. Не учитываются возмущения, которые могут воздействовать на систему помимо управляющего сигнала, не учитываются различные инструментальные погрешности, которые

могут присутствовать и искажать теоретические характеристики системы. Например, в (2.1) коэффициент усиления имеет некоторую погрешность

$$k = k + \delta k$$

тогда реальный выход системы будет отличаться от расчетного, но структура системы не позволит определить и исправить эту ошибку.

Несмотря на этот недостаток, благодаря своей простоте, данный принцип управления очень часто используется. Так работают почти все датчики и преобразователи в системах передачи информации. Требуемая точность достигается выбором класса точности применяемых устройств.

Принцип компенсации возмущений. Здесь делается попытка учесть в разомкнутом управлении паразитное влияние возмущений. Предположим, что возмущение может быть измерено. Кроме того, предположим, что известна степень влияния возмущения на объект управления. Тогда возможен принцип управления, который проиллюстрируем простейшей схемой, показанной на рис. 2.1.

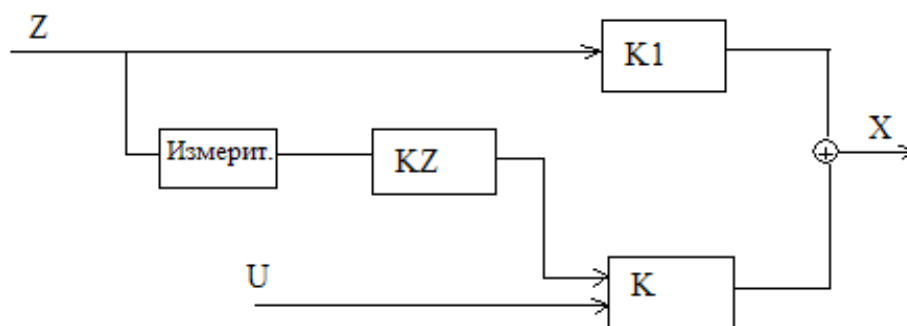


Рис. 2.1 Схема компенсации возмущения

В представленной схеме управляющий сигнал U через усилитель с коэффициентом усиления K передается на выход системы. Кроме того, в системе действует возмущение Z , которое с коэффициентом усиления $K1$ добавляется к выходу. Таким образом, вместо теоретического значения

$$X_m = KU \tag{2.2}$$

реальное значение выхода равно

$$X = K \cdot U + K1 \cdot Z \tag{2.3}$$

Для компенсации возмущения предлагается

1. Измерить возмущение

2. Умножить измеренное возмущение на некоторый коэффициент KZ и результат подать на вход системы K .

Тогда выходной сигнал системы будет равен

$$X = KU + K1 \cdot Z + K \cdot KZ \cdot Z \quad (2.4)$$

Сравнивая (2.2) и (2.4), видно, что для того, чтобы выходной сигнал был равен теоретическому, необходимо

$$K1 \cdot Z + K \cdot KZ \cdot Z = 0$$

Отсюда следует, что коэффициент усиления в схеме компенсации должен быть равен

$$KZ = -\frac{K1}{K}$$

Но при реализации схемы компенсации возникают принципиальные трудности:

1. Возмущения, действующие на объект, очень трудно измерить. Трудно измерить ветровое возмущение, действующее на самолет. Очень трудно выделить паразитную составляющую управляющего напряжения. Поэтому чаще измеряют не возмущение а его последствие – ускорение.

2. В действительности объекты $K, K1$ не просто коэффициенты усиления, а инерционные объекты, которые вносят запаздывание при пропускании сигналов, причем запаздывания могут быть разные. Сигнал Z проходит через оба звена. Поэтому может возникнуть ситуация, когда для компенсации в объекте K необходимо иметь упреждающее значение сигнала Z . Задача предсказания случайного сигнала не проста.

Поэтому принцип компенсации возмущения в предложенном чистом виде не реализуется.

Принцип обратной связи. При этом принципе управления вместо измерения возмущений измеряется последствия этих возмущений – отклонение выходной координаты от расчетного, программного значения. Система строится так, чтобы это отклонение автоматически стремилось бы, если это возможно, к нулю. Рассмотрим для примера схему, показанную на рис. 2.2. Схема представляет собой некоторую следящую систему, задача которой заключается в том, чтобы выходной сигнал

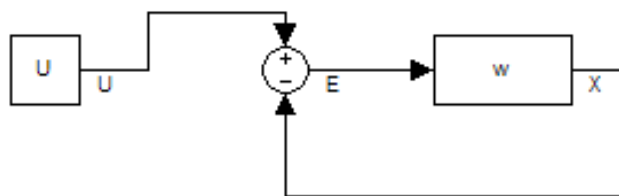


Рис. 2.2. Пример системы с отрицательной обратной связью

X был равен входному сигналу U . Измеренный выход подается с отрицательным знаком на вход системы (отрицательная обратная связь). Таким образом, в систему подается сигнал ошибки, равный

$$E = U - X \quad (2.5)$$

Система может находиться в покое тогда, когда входной сигнал в систему равен нулю, то есть тогда, когда сигнал ошибки равен нулю, а значит выходной сигнал равен входному сигналу.

3. Уравнения системы автоматического управления

Для анализа системы – определения её реакции на различные входные воздействия надо составить уравнения системы и искать их решения при различных правых частях. Системы с сосредоточенными параметрами описываются дифференциальными уравнениями. Будем предполагать пока, что системы дифференциальных уравнений линейны и имеют постоянные вещественные коэффициенты.

Для составления дифференциальных уравнений обычно разбивают техническую систему на звенья, элементы так, чтобы для каждого звена, элемента можно

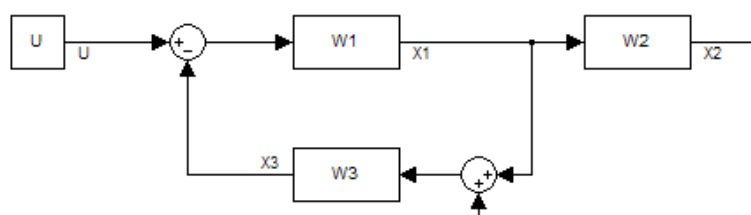


Рис. 3.1. Пример системы

было написать дифференциальное уравнение, желательно первого или второго порядка, связывающее выход элемента со входом. Этот набор уравнений для всех элементов и будет уравнением системы. Например, для системы, схема которой показана на рис. 3.1, уравнения могут иметь вид

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{x}_1 + a_{12}\dot{x}_1 + a_{13}x_1 &= u - x_3 \\ a_{21}\ddot{x}_2 + a_{22}\dot{x}_2 + a_{23}x_2 &= \dot{x}_1 \\ x_3 &= x_1 + x_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Получена система дифференциальных уравнений четвертого порядка, которая может быть решена численными методами.

В дальнейшем в курсе рассматриваются основы теории управления, опирающиеся на математический аппарат, связанный в основном с линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Учет нелинейностей, которые практически всегда есть в реальных элементах, не позволит получить аналитических критериев устойчивости, качества, точности и т. д., применимых в инженерной практике. Поэтому все нелинейности необходимо в начале исследований либо линеаризовать, либо просто пренебречь, если они малы.

Покажем, как провести линеаризацию, используя разложением нелинейности в ряд с помощью формулы Тейлора. Пусть уравнение для координат x, y, z имеет нелинейное слагаемое в виде функции $F(x, y, z)$. Предположим, что эта функция не имеет в окрестностях исследуемого режима (точка с координатами x_0, y_0, z_0) разрывов, резких изменений, неоднозначности. Тогда разложим функцию в ряд около этой точки, используя формулу Тейлора

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= F(x_0, y_0, z_0) + \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \Delta z + \\ &+ \sum_{i=2}^n \frac{1}{i!} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \Delta z \right)^i + R_{n+1} \end{aligned}$$

где малые отклонения от рабочего режима равны

$$\Delta x = x - x_0;$$

$$\Delta y = y - y_0;$$

$$\Delta z = z - z_0$$

Под знаком суммы находятся слагаемые второго и более высокого порядка малости, которыми также как и остаточным членом ряда R_{n+1} пренебрегаем. Все производные вычисляются в точке $x = x_0, y = y_0, z = z_0$ и являются константами. Тогда имеем

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0) + a_x \cdot \Delta x + a_y \cdot \Delta y + a_z \cdot \Delta z \quad (3.2)$$

где, например

$$a_x = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0 \\ y=y_0 \\ z=z_0}}$$

Далее подставляем (3.2) в исходное уравнение. Полагаем, что система в точке рабочего режима имеет состояние равновесия, и все слагаемые с координатами рабочего режима взаимно сокращаются. Получаем уравнение в отклонениях от рабочего режима. Рассмотрим пример. Пусть имеется нелинейный усилитель, показанный на рис 3.1. Рабочий режим на рисунке обозначен как точка на характеристике усилителя с координатами x_0, y_0 .

Пусть $x = x_0 + \Delta x$

$$\text{Тогда } y \approx y_0 + \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x=x_0} \cdot \Delta x$$

Производная, вычисленная в точке $x = x_0$, показана на рис 3.1 как касательная с тангенсом угла наклона k . Запишем

$$y = y_0 + k \cdot \Delta x$$

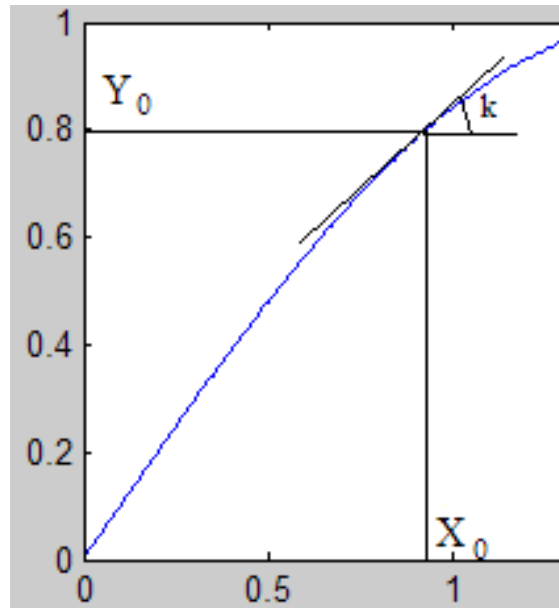


Рис. 3.1. Нелинейный усилитель

Так как $y - y_0 = \Delta y$ - отклонение выходной координаты усилителя от рабочей точки, получим уравнение усилителя в виде линейного соотношения отклонения координат от рабочей точки

$$\Delta y = k \cdot \Delta x$$

Поскольку обычно все задачи управления привязываются к отклонениям от рабочего режима, знак «дельта» опускают

$$y = k \cdot x$$

Получено линейное соотношение между входом и выходом.

4. Спектр непрерывного сигнала

Если функция $f(t)$ абсолютно интегрируема, то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

и имеет конечное число разрывов непрерывности, то она может быть представлена в виде обратного преобразования Фурье

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4.1)$$

где $F(j\omega)$ - спектр функции $f(t)$, который определяется как прямое преобразование Фурье

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (4.2)$$

Формулы прямого и обратного преобразований Фурье можно пояснить, опираясь на результаты гармонического разложения периодической функции $f(t)$ на интервале $-T < t < T$. Известно

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n\pi}{T} t \quad (4.3)$$

где

$$a_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \cos \frac{n\pi}{T} t dt$$

$$b_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) \sin \frac{n\pi}{T} t dt$$

Используя соотношения

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \quad (4.4)$$

$$e^{-jx} = \cos x + j \sin x$$

получим вместо (4.3)

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{j \frac{n\pi}{T} t} \quad (4.5)$$

где

$$c_n = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-j \frac{n\pi}{T} t} dt \quad (4.6)$$

Представление (4.5) в виде комплексного ряда дает, как и должно быть, существенный результат. Суммирование идет как по положительным, так и по отри-

цательным индексам. В каждой паре слагаемые имеют одинаковые модули и разные по знаку фазы. Поэтому в сумме получается вещественный результат.

Коэффициент c_n комплексный, его модуль равен амплитуде n -й гармоники разложения. Фаза коэффициента ϕ_n равна сдвигу по фазе n -й гармоники. График зависимости $c_n = c(n)$ представляет собой дискретный спектр периодической функции $f(t)$ (см. рис. 4.1).

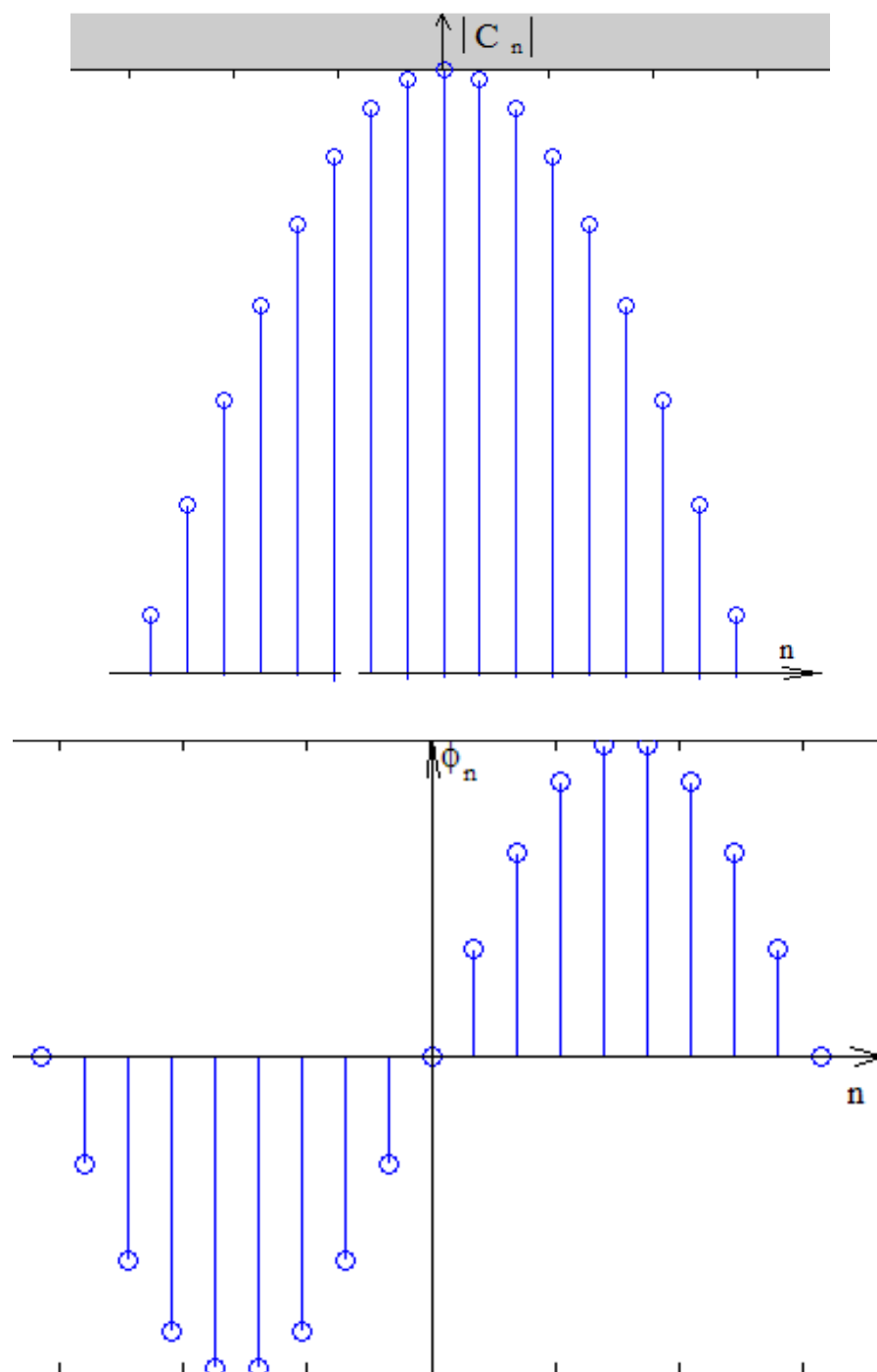


Рис. 4.1. Амплитуда и фаза гармоник дискретного спектра

Рассмотрим процедуру гармонического разложения непериодической функции. Непериодическую функцию можно представить как периодическую, у которой период равен бесконечности.

Тогда интервал дискретности частот разложения периодической функции, равный $\Delta\omega = \frac{\pi}{T}$, при $T \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Непериодическая функция разлагается в ряд по бесконечно большому числу гармоник, отстоящими друг от друга на бесконечно малые разницы частот. Амплитуда каждой гармоники как это следует из (4.6) при $T \rightarrow \infty$ бесконечно мала. Но гармоник на частотном отрезке $d\omega$ бесконечно много. Перейдем от дискретного спектра c_n к дифференциальной непрерывной характеристике $F(j\omega)$, которую назовем спектром (см. рис. 4.2).

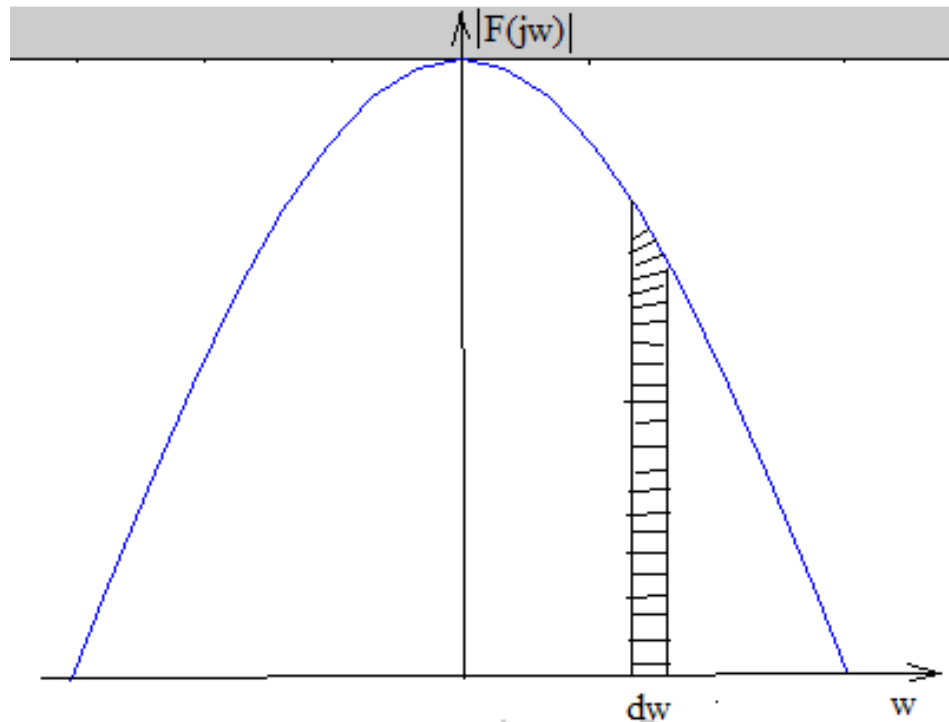


Рис. 4. 2. Модуль спектра непериодического сигнала

На рисунке показан модуль спектра. Дифференциальная характеристика спектра вводится так, чтобы заштрихованная площадь $|F(j\omega)| d\omega$ была равна амплитуде суммы гармоник, частоты которых расположены в интервале $d\omega$.

Если в (4.5) сделать замены

$$c_n \rightarrow F(j\omega)d\omega ; \quad (4.7)$$

$$\frac{n\pi}{T} \rightarrow \omega \quad (4.8)$$

и перейти от суммирования к интегрированию, получим выражение для обратного преобразования Фурье (4.1).

Если в (4.6) подставить (4.7) и (4.8) можно получить выражение (4.2) для определения спектра – преобразования Фурье для непериодической функции времени.

5. Передаточная функция по Фурье

Произвольный непериодический входной сигнал в систему можно с помощью обратного преобразования Фурье (4.1) представить в виде

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.1)$$

где $U(j\omega)$ - спектр входного сигнала.

Выберем дифференциальную часть входа

$$\Delta u = \frac{1}{2\pi} U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = A e^{j\omega t} \quad (5.2)$$

$$\text{где } A = \frac{1}{2\pi} U(j\omega) d\omega$$

и рассмотрим, как через систему проходит гармонический сигнал с частотой ω и амплитудой A . Это иной подход к анализу систем. Если раньше сигнал рассматривался как некоторая функция времени и выход определялся путем решения систем дифференциальных уравнений, то теперь входной сигнал определяется своим частотным составом – комбинацией гармоник. Для определения выходного сигнала надо вводить новый аппарат исследования.

Учитывая линейность системы, найдем, как через систему проходит гармонический сигнал $e^{j\omega t}$, а затем результат будет умножен на коэффициент A .

Пусть дано дифференциальное уравнение, связывающее вход и выход системы

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u' + b_0 u \quad (5.3)$$

Правая часть уравнения является экспонентой с некоторым коэффициентом. Пренебрежем переходным процессом в системе, считая, что время переходного процесса пренебрежимо мало по сравнению со временем работы системы. Переходный процесс определяется решением однородного уравнения, которым мы пренебрегаем. Остается найти частное решение уравнения (5.3). Частное решение имеет вид правой части. Поскольку правая часть есть экспонента, частное решение ищем в виде той же экспоненты с некоторым коэффициентом

$$x = \Phi \cdot e^{j\omega t} \quad (5.4)$$

Чтобы определить коэффициент, подставляем (5.4) в (5.3)

$$\begin{aligned} \Phi e^{j\omega t} \{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0\} = \\ = e^{j\omega t} \{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0\} \end{aligned}$$

Следовательно, неизвестный коэффициент является функцией параметров системы и частоты

$$\Phi(j\omega) = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1 j\omega + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1 j\omega + a_0} \quad (5.5)$$

Получено выражение для передаточной функции системы. Смысл передаточной функции вытекает из выражения (5.4). Если на вход системы подана синусоида, то на выходе системы будет синусоида той же частоты. Амплитуда и фазовый сдвиг выходной синусоиды определяется с помощью передаточной функции.

Передаточная функция комплексная и может иметь следующие представления

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)} \quad (5.6)$$

где

$P(\omega)$ - вещественная частотная характеристика;

$Q(\omega)$ - мнимая частотная характеристика;

$A(\omega)$ - амплитудная частотная характеристика (АЧХ) или модуль;

$\phi(\omega)$ - фазовая частотная характеристика (ФЧХ).

Амплитуда выходной синусоиды равна амплитуде входной синусоиды умноженной на значение АЧХ для частоты синусоид. Фазовый сдвиг выходной синусоиды

соиды относительно входной синусоиды равен значению ФЧХ для частоты синусоид.

Рассмотрим пример. Уравнение аperiodического звена имеет вид

$$T\dot{x} + x = u$$

В соответствии с (5.5) передаточная функция аperiodического звена равна

$$\begin{aligned}\Phi(j\omega) &= \frac{1}{Tj\omega + 1} = \frac{-Tj\omega + 1}{(Tj\omega + 1)(-Tj\omega + 1)} = \frac{1 - Tj\omega}{1 + T^2\omega^2} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}} e^{j\arctg(-\omega T)}\end{aligned}$$

Следовательно, АЧХ равно

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$$

График АЧХ для постоянной времени, равной $T = 1$, показан на рис 5.1

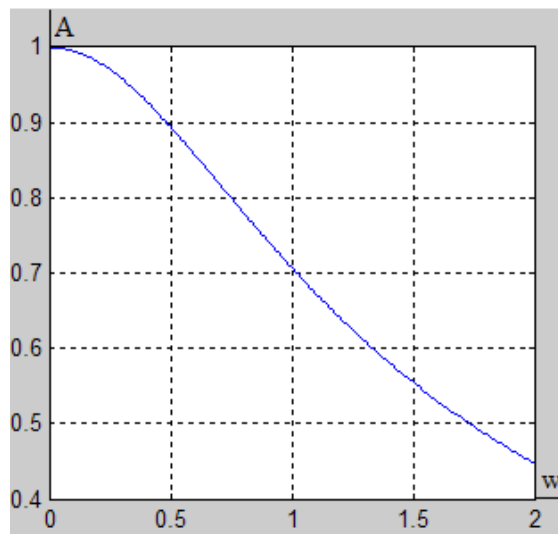


Рис. 5.1. АЧХ аperiodического звена

Видно, что с увеличением частоты входной синусоиды амплитуда выходной синусоиды уменьшается. Так на частоте $\omega = 1$ амплитуда выхода равна 0.707 амплитуды входа.

Выражение (5.5) можно представить в виде

$$\Phi(j\omega) = \frac{M(j\omega)}{D(j\omega)} \quad (5.7)$$

Структура полиномов в числителе и знаменателе очевидна. Заметим, что знаменатель, приравненный нулю

$$D(j\omega) = 0$$

совпадает со структурой характеристического уравнения для (5.3).

Существуют значения ω , при которых $\Phi(j\omega) \rightarrow \infty$, так называемые полюса передаточной функции. Полюса связаны с корнями λ характеристического уравнения в соответствии с (5.7) соотношением

$$\lambda_i = j\omega_i$$

Корни характеристического уравнения устойчивой системы имеют отрицательные вещественные части, то есть лежат в левой полуплоскости. Тогда полюса передаточной функции, равные

$$\omega_i = \frac{\lambda_i}{j} = -j\lambda_i$$

лежат в верхней полуплоскости, так как умножение на $-j$ равно повороту в комплексной плоскости на -90 градусов.

Отметим еще одно свойство передаточной функции.

$$\begin{aligned} |\Phi(j\omega)|^2 &= A^2(j\omega) = P^2(\omega) + Q^2(\omega) = \\ &= [P(j\omega) + Q(j\omega)][P(j\omega) - Q(j\omega)] = \Phi(j\omega) \cdot \overline{\Phi(j\omega)} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Квадрат модуля передаточной функции равен произведению передаточной функции на комплексно-сопряженную передаточную функцию.

Вернемся к задаче определения выходного сигнала. Пока определен выход системы при входном сигнале в виде экспоненты (5.4). Для определения выхода при действии дифференциальной части входа (5.2) надо умножить (5.4) на коэффициент A . Получим

$$\Delta x = \frac{1}{2\pi} \Phi(j\omega) U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.9)$$

При действии входного сигнала в виде (5.1) для определения выходного сигнала необходимо проинтегрировать (5.9). Получим

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(j\omega) U(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (5.10)$$

Сравнивая полученное выражение с формулой обратного преобразования Фурье, получим, что спектр выхода $x(t)$ равен

$$X(j\omega) = \Phi(j\omega) \cdot U(j\omega) \quad (5.11)$$

Спектр выхода равен спектру входа, умноженному на передаточную функцию.

Спектры – это преобразования Фурье. Следовательно, передаточную функцию можно определить как отношение преобразований Фурье выхода ко входу

$$\Phi(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{U(j\omega)} \quad (5.12)$$

6. Передаточная функция по Лапласу

Более широким понятием является передаточная функция по Лапласу. Ряд распространенных функций не являются абсолютно интегрируемыми и поэтому преобразования Фурье для них не существует

Если функция $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^{\infty} |f(t)| e^{-ct} dt < \infty \quad (6.1)$$

то для неё существует преобразование Лапласа. Преобразование Лапласа равно

$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (6.2)$$

Функцию $F(s)$ называют изображением функции $f(t)$. Оригинал или исходная функция $f(t)$ определяется через своё изображение следующим образом

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (6.3)$$

Одно из преимуществ использования преобразования Лапласа заключается в том, что операции интегрирования и дифференцирования во временной области соответствуют алгебраическим операциям умножения и деления в области преобразования S .

Пусть дана функция $f(t)$ и известно её преобразование Лапласа $F(s)$.

Тогда изображения производных и интегралов функции $f(t)$ равны

$$\begin{aligned} L\left[\frac{df}{dt}\right] &= F(s) \cdot s - f(0), \\ L\left[\frac{d^2f}{dt^2}\right] &= F(s) \cdot s^2 - [f(0) \cdot s + \dot{f}(0)], \\ L\left[\int_{t_0}^t f(t)dt\right] &= \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \int_{t_0}^0 f(t)dt. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Напомним принцип вывода уравнений (6.4) на примере первого уравнения

$$L\left\{\frac{df}{dt}\right\} = \int_0^\infty \frac{df}{dt} e^{-st} dt = f \cdot e^{-st} \Big|_0^\infty + s \int_0^\infty f \cdot e^{-st} dt = -f(0) + sF(s)$$

Пусть исходное дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$a_n x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \dots + a_1 x' + a_0 x = b_m u^{(m)} + \dots + b_1 u' + b_0 u \quad (6.5)$$

Если начальные условия нулевые (это обосновано, так как переходными процессами от начальных условий мы пренебрегаем), то преобразование Лапласа от обеих частей (6.5) будет равно

$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0) X(s) = (b_m s^m + \dots + b_0) U(s)$$

где $X(s) = L[x(t)]$, $U(s) = L[u(t)]$

Определяем передаточную функцию по Лапласу как отношение преобразования Лапласа выхода к преобразованию Лапласа входа

$$\Phi(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{(b_m s^m + \dots + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0)} \quad (6.6)$$

В курсе часто используются обозначения

$$\Phi(s) = \frac{M(s)}{D(s)} \quad (6.7)$$

структура многочленов числителя и знаменателя очевидна.

Из (6.6) имеем

$$X(s) = \Phi(s) \cdot U(s) \quad (6.8)$$

Преобразование Лапласа выхода равно преобразованию Лапласа входа умноженному на передаточную функцию по Лапласу.

Перечислим основные свойства передаточной функции по Лапласу:

1. $\Phi(s)$ представляет собой дробно-рациональную функцию, у которой степень числителя не выше степени знаменателя,
2. Коэффициенты $\Phi(s)$ - вещественные,
3. Нули и полюса $\Phi(s)$ либо вещественные, либо комплексно-сопряженные,
4. Все полюса $\Phi(s)$ расположены в левой полуплоскости, так как полюса $\Phi(s)$ это корни характеристического уравнения $D(s) = 0$

В заключение заметим, что передаточные функции по Фурье и по Лапласу формально связаны соотношением

$$\Phi(s) = \Phi(j\omega) |_{j\omega=s} \quad (6.9)$$

Это следует из сравнения (5.5) и (6.6). Поэтому далее в различных выражениях не делается различия между этими выражениями. Надо помнить только, что они различаются расположением полюсов в левой или верхней полуплоскостях.

7. Логарифмические частотные характеристики

Анализ систем управления часто упрощается, если пользоваться не ранее введенными частотными характеристиками, а логарифмическими. Преимущества будут показаны в следующих разделах, сейчас введем понятие логарифмических частотных характеристик (ЛАХ). На рис. 7.1 показана для примера амплитудно-частотная характеристика некоторой системы. Напомним, что передаточная функция системы может быть представлена в виде(5.6)

$$\Phi(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

Прологарифмируем это выражение. Логарифм возьмем натуральный

$$\ln \Phi(j\omega) = \ln A(j\omega) + j\phi(\omega) \quad (7.1)$$

Рассматривают отдельно слагаемые, связанные с модулем и с фазой. Вводят логарифмическую амплитудную частотную характеристику (ЛАХ) как 20 десятичных логарифмов АЧХ

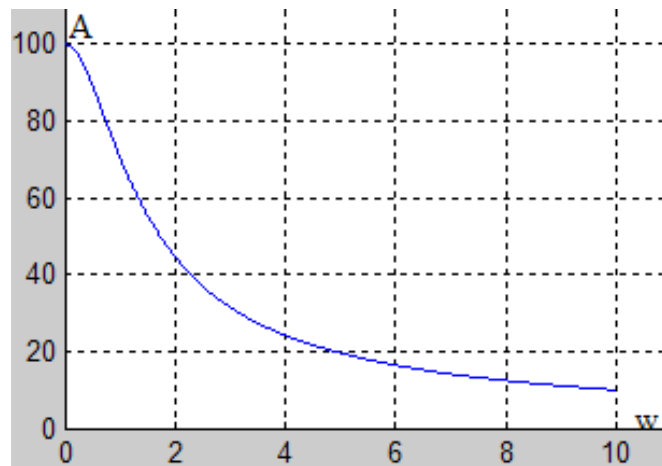


Рис. 7.1 Пример амплитудно-частотной характеристики

$$Lm(\omega) = 20 \cdot \log_{10} A(\omega) \quad (7.2)$$

ЛАХ измеряется в децибелах. На рис 7.2 показан ЛАХ системы, АЧХ которой был приведен на рис. 7.1. Аргументом при построении ЛАХ принят десятич-

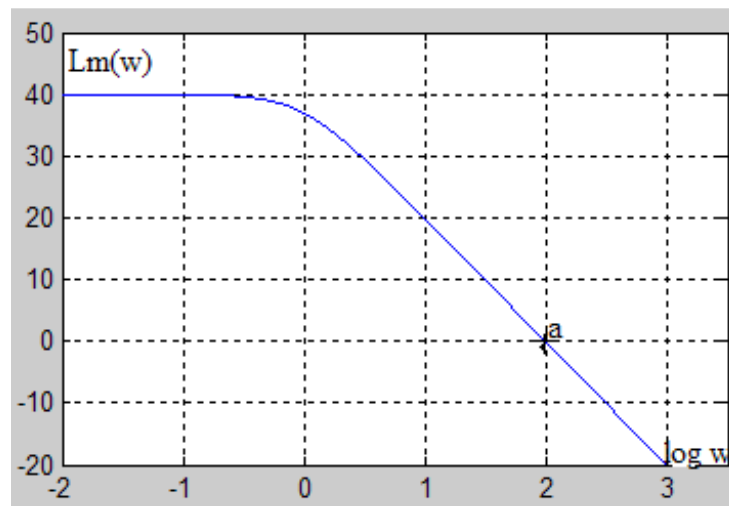


Рис 7.2 Пример ЛАХ системы

ный логарифм частоты. Рассмотрим некоторые значения графика. Начальное значение ЛАХ равно

$$Lm(0) = 20 \log_{10} 100 = 40 \text{ дБ}.$$

Изменение ЛАХ на 20 децибел соответствует изменению АЧХ в 10 раз (сравните начальные значения на рис. 7.1 и рис. 7.2). Аргумент (десятичный логарифм частоты) измеряется в декадах. Изменение аргумента на декаду соответствует десятикратному изменению частоты. Двукратное изменение частоты называется

октавой.. Для примера рассмотрим координаты точки **a** на рис. 7.2. Частота в этой точке равна 100, модуль равен нулю.

Вторая часть выражения (7.1), связанная с фазой, называется логарифмической фазо-частотной характеристикой (ЛФХ) и представляет собой фазу, построенную в логарифмическом масштабе частот. На рис. 7.3 представлены ЛАХ и ЛФХ некоторой системы, построенные в MATLABe с помощью функции *bode*.

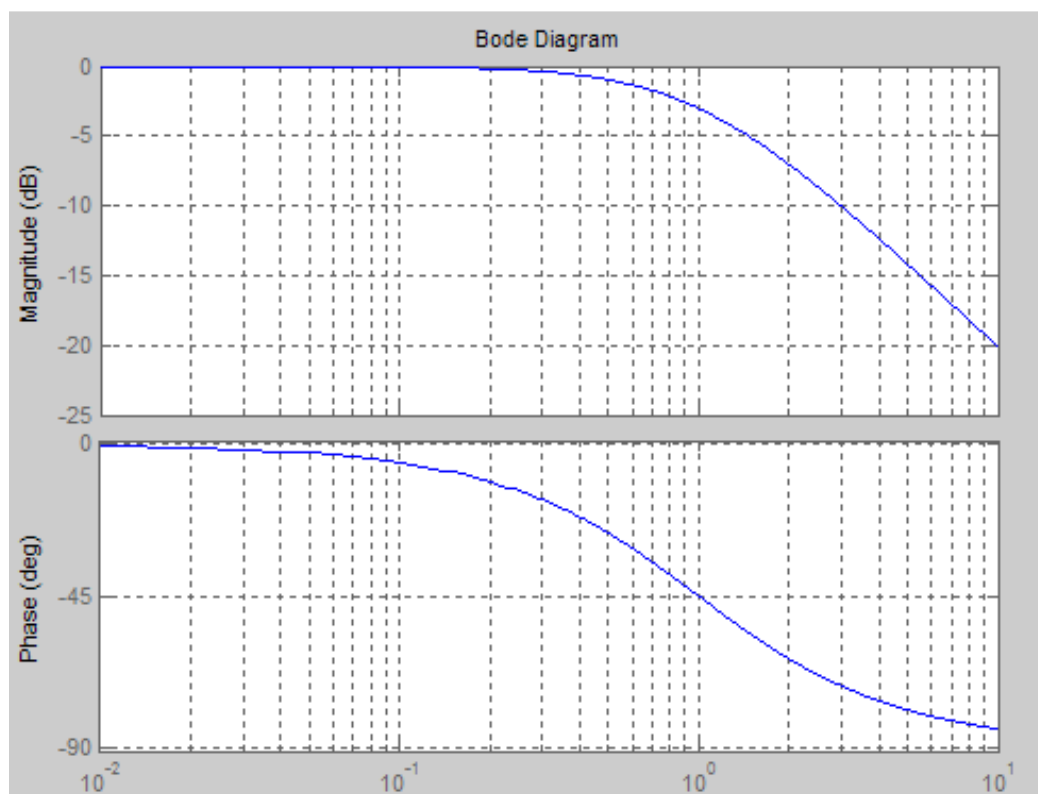


Рис 7.3 Пример ЛАХ и ЛФХ

Обратите внимание на логарифмическую разметку оси аргумента.

8. Типовые звенья

При составлении уравнений системы она разбивается на звенья. При самой подробной детализации каждое звено описывается дифференциальным уравнением не выше второго порядка. Поэтому представляется необходимым просмотреть характеристики этого ограниченного набора звеньев.

Усилитель. Усилитель в нашем наборе это безинерционное звено, описываемое уравнением

$$x = k \cdot u \quad (8.1)$$

Передаточная функция усилителя, сравнивая (8.1) с (5.5), равна

$$\Phi(s) = k$$

В структурных схемах звенья обычно обозначаются с помощью своей передаточной функции. Для усилителя это обозначение показано на рис. 8.1

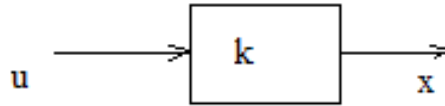


Рис.8.1 Усилитель

АЧХ усилителя равна

$$A(j\omega) = k$$

ЛАХ усилителя равен

$$Lm(\omega) = 20 \log k$$

Это постоянная величина во всей области частот. Фазовый сдвиг равен нулю.

Апериодическое звено. Апериодическое звено описывается уравнением

$$T\dot{x} + x = u$$

Переходный процесс на единичное возмущение, равный

$$x(t) = 1 - e^{-t/T} \quad (8.2)$$

показан на рис 8.2.

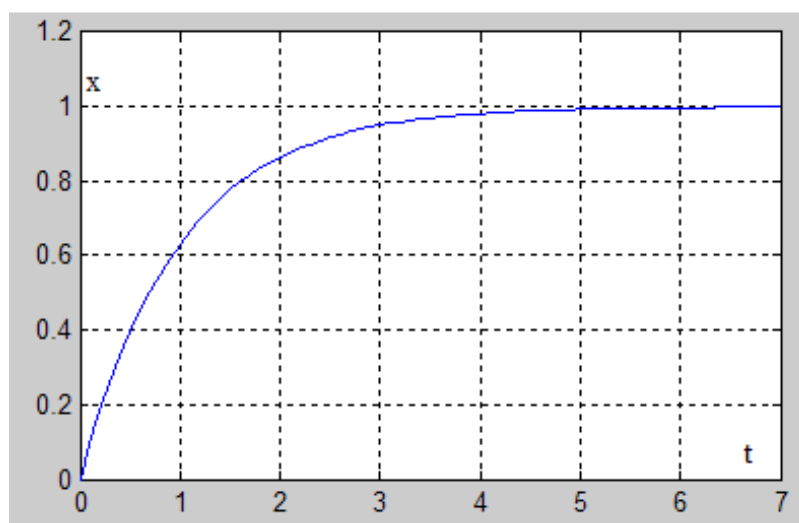


Рис. 8.2. Переходный процесс апериодического звена

Передаточная функция звена равна

$$\begin{aligned}
\Phi(j\omega) &= \frac{1}{Tj\omega + 1} = \frac{1 - Tj\omega}{(1 + Tj\omega)(1 - Tj\omega)} = \frac{1 - j\omega T}{1 + \omega^2 T^2} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} e^{\arg tg(-\omega T)}
\end{aligned} \tag{8.3}$$

ЛАХ апериодического звена равен

$$Lm(\omega) = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}} \right) = -20 \log \sqrt{1 + \omega^2 T^2}$$

В области низких частот, когда $\omega \ll 1$, можно принять

$$Lm(\omega) \approx -20 \log 1 = 0$$

В области низких частот ЛАХ апериодического звена равен нулю.

В области высоких частот, когда $\omega \gg 1$, можно принять

$$Lm(\omega) \approx -20 \log \sqrt{\omega^2 T^2} = -20 \log \omega T$$

Если по оси частот откладывать не логарифм частоты, а логарифм относительной частоты ω / ω_0 , где $\omega_0 = 1/T$, то ЛАХ апериодического звена в области высоких частот представляет собой прямую линию с наклоном -20 дБ/дек. Прямая пересекает ось частот в точке $\log \omega / \omega_0 = 0$ или что то же самое в точке $\omega = 1/T$. Таким образом, можно принять, что ЛАХ апериодического звена представляет собой две ранее указанные прямые, пересекающиеся в точке $\omega = \omega_0$, где $\omega_0 = 1/T$ есть собственная частота апериодического звена (см. рис. 8.3). В действительности ЛАХ отличается от этих двух асимптот. Наибольшее отклонение имеет место при частоте, равной собственной частоте, и равно

$$Lm(\omega_0) = -20 \log \sqrt{1+1} = -20 \log \sqrt{2} = -10 \cdot 0.3 = -3 \text{ дБ}$$

Таким несовпадением можно пренебречь. На рис. 8.3 показано точный график ЛАХ и его асимптотическое представление. Постоянная времени апериодического звена здесь равна единице. Видно, что после собственной частоты увеличение частоты входного сигнала на декаду, то есть в десять раз, ведет к ослаблению выходного сигнала на 20 децибел, то есть в десять раз.

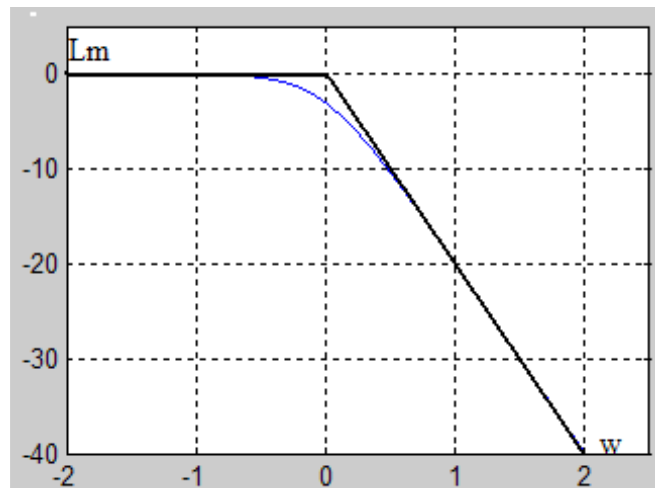


Рис. 8.3 ЛАХ аperiodического звена

Фаза аperiodического звена в соответствии с (8.3) равна

$$\phi(\omega) = \arg \operatorname{tg}(-\omega T) \quad (8.4)$$

График ЛФЧХ показан на рис 8.4. Видно, что фазовый сдвиг на собственной частоте равен -45 градусов, а максимальное значение фазового сдвига равно -90 градусов.

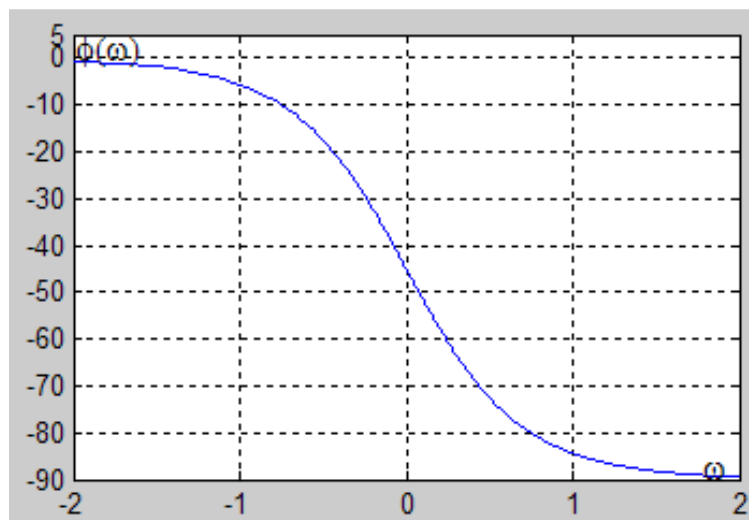


Рис. 8.4. Фаза аperiodического звена

Колебательное звено. Колебательное звено описывается уравнением

$$T^2 \ddot{x} + 2\xi T \dot{x} + x = u$$

где T - постоянная времени;

ξ - декремент затухания.

Переходный процесс колебательного звена при действии единичного возмущения определяется при нулевых начальных условиях по координате и скорости выражением

$$x(t) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi \frac{t}{T}} \sin\left[\sqrt{1-\xi^2} \frac{t}{T} + \arg \operatorname{tg}\left(-\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right] \quad \xi < 1$$

При $T = 1$ и разных значениях декремента затухания процессы показаны на рис 8.5 и 8.6.

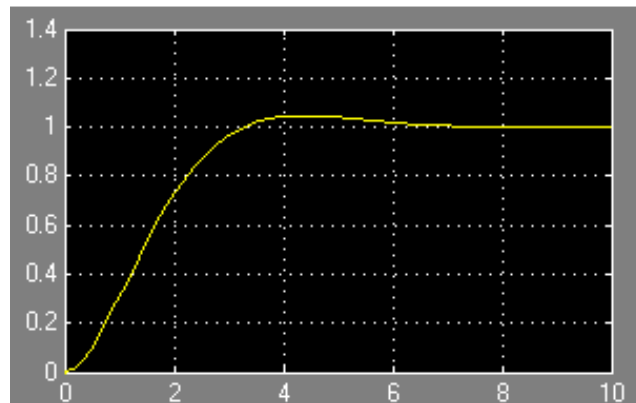


Рис. 8.5 Переходный процесс при $\xi = 0.7$

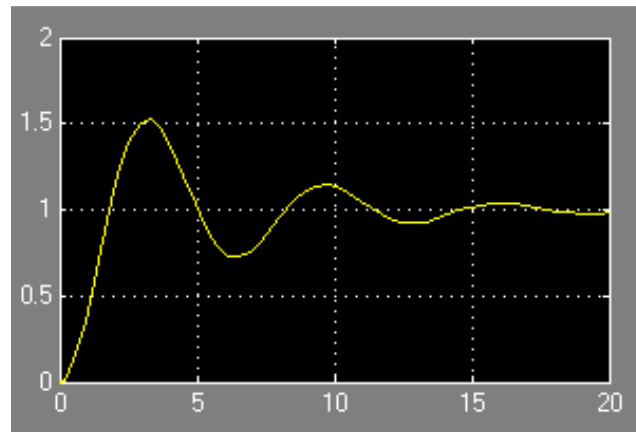


Рис. 8.6. Переходный процесс при $\xi = 0.2$

Передаточная функция колебательного звена равна

$$\Phi(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}$$

Найдем частотные характеристики

$$\begin{aligned}\Phi(j\omega) &= \frac{1}{T^2(j\omega)^2 + 2\xi Tj\omega + 1} = \frac{1}{(1 - T^2\omega^2) + j2\xi T\omega} = \\ &= \frac{(1 - T^2\omega^2) - j2\xi T\omega}{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}\end{aligned}$$

Модуль передаточной функции или АЧХ равен

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}} \quad (8.5)$$

Фазовый сдвиг колебательного звена равен

$$\phi(\omega) = -\arg \operatorname{tg} \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2\omega^2} \quad (8.6)$$

ЛАХ колебательного звена равен

$$Lm(\omega) = -20 \log \sqrt{(1 - T^2\omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2\omega^2}$$

В области низких частот, когда $\omega \ll 1$, можно принять

$$Lm(\omega) = -20 \log 1 = 0$$

Как и у апериодического звена ЛАХ колебательного звена равен нулю в низкочастотной области.

В высокочастотной области, когда $\omega \gg 1$, можно принять

$$Lm(\omega) = -20 \log \sqrt{T^4\omega^4} = -40 \log T\omega$$

Если по оси частот откладывать значения $\log T\omega = \log \omega / \omega_0$, то ЛАХ колебательного звена в высокочастотной области представляет собой прямую с наклоном -40 дБ/дек, пересекающую ось частоты в точке $\omega = \omega_0$. Таким образом, асимптотическое представление ЛАХ колебательного звена представляет собой две прямые: прямая, проходящая по оси частот, и прямая, проходящая через точку $\omega / \omega_0 = 1$ с наклоном, равным -40 дБ/дек. Однако, в отличие от апериодического звена, у колебательного звена в районе сопряжения двух асимптот может иметь место большая погрешность. Из (8.5) в точке $\omega / \omega_0 = 1$ АЧХ равно

$$A(\omega) = \frac{1}{2\xi}$$

При $\xi = 0.7$, $A(1)=0.714$, $L(1)=-2,9$ дБ/дек

При $\xi = 0.1$, $A(1)=5$, $L(1)=14.0$ дБ/дек

При $\xi = 0$, $A(1) = L(1) = \infty$

Большое значение коэффициента усиления в районе собственной частоты при малых декрементах затухания используется при радиоприеме.

На рис. 8.7 показаны ЛАХ и фаза колебательного звена при $T = 1$, $\xi = 0.7$

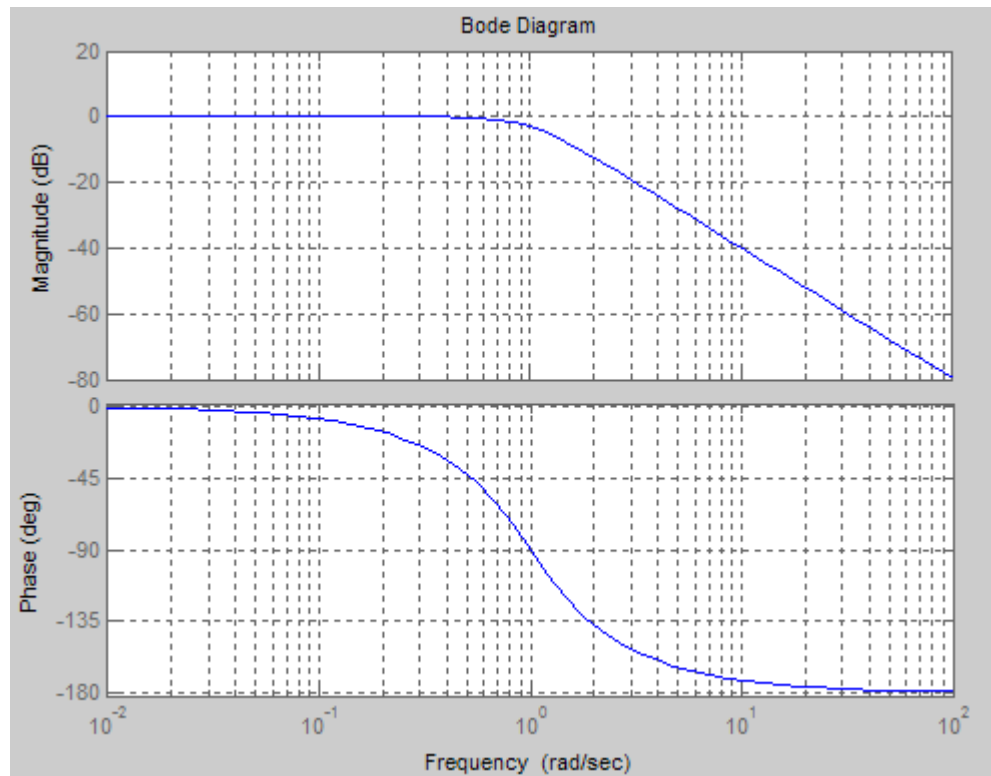


Рис. 8.7. ЛАХ и фаза колебательного звена

Видно, что в области высоких частот угол наклона ЛАХ равен -40 дБ/дек, то есть при увеличении частоты в десять раз, амплитуда входной гармоники уменьшается в сто раз. Колебательное звено намного лучше аperiodического фильтрует высокочастотные сигналы.

Фазовый сдвиг меняется в районе собственной частоты на 180 градусов. Чем меньше декремент затухания, тем резче меняется фаза. При нулевом декременте затухания фаза меняется скачком.

Интегратор. Дифференциальное уравнение интегратора

$$\dot{x} = u$$

Примером интегратора может служить двигатель постоянного тока, у которого скорость вращения пропорциональна управляющему напряжению.

Передаточная функция интегратора

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{s}$$

Передаточная функция по Фурье

$$\Phi(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{-j\omega}{(j\omega)(-j\omega)} = \frac{-j}{\omega} = \frac{1}{\omega} e^{-j90^\circ}$$

Фазовый сдвиг у интегратора равен -90 градусов и постоянен на всех частотах, что очевидно, так как интеграл от синусоиды равен косинусоиде. ЛАХ интегратора равен

$$Lm(\omega) = 20 \log\left(\frac{1}{\omega}\right) = -20 \log(\omega)$$

относительно аргумента $\log \omega$ это прямая с наклоном -20 дБ/дек, пересекающая ось абсцисс в точке $\omega = 1$. На рис. 8.8 показаны ЛАХ и фаза интегратора

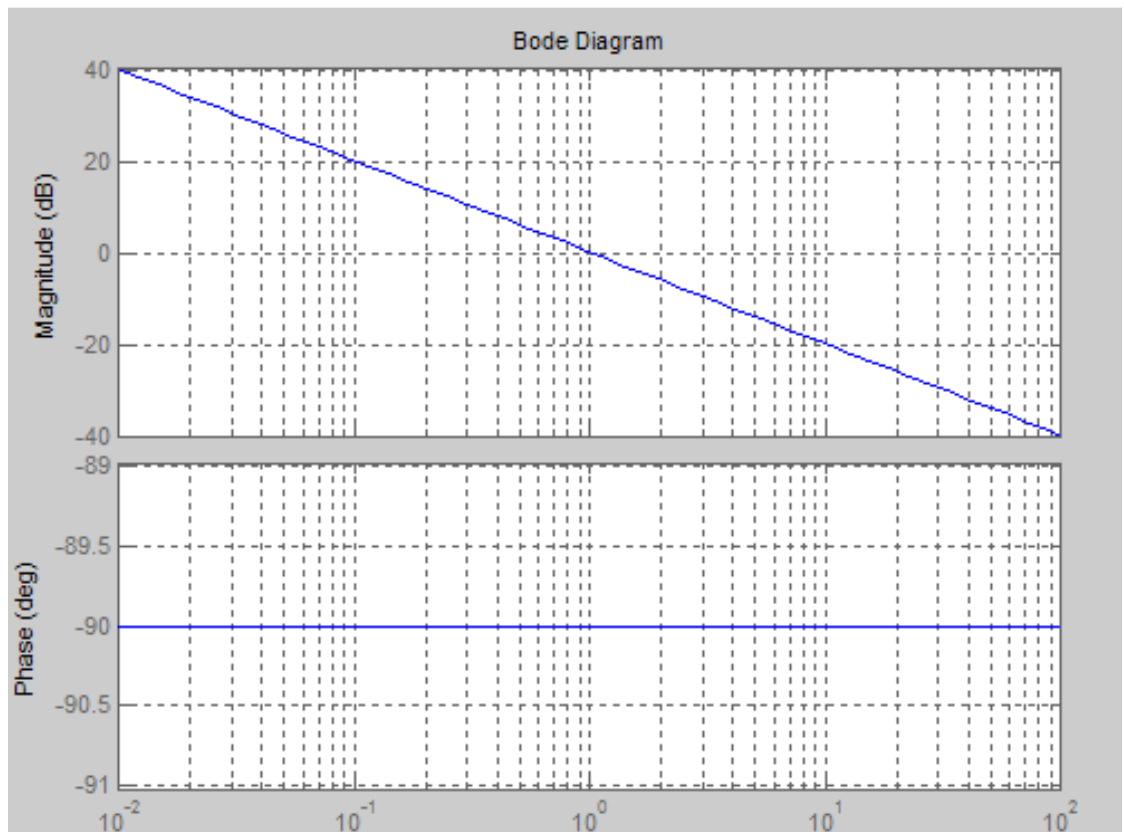


Рис. 8.8. ЛАХ и фаза интегратора

Дифференцирующее звено. Идеальное дифференцирующее звено имеет уравнение

$$x = \dot{u}$$

Передаточная функция этого звена, которая практически нереализуема, имеет вид

$$F(s) = s$$

Передаточная функция по Фурье

$$\Phi(j\omega) = j\omega = \omega e^{j90^\circ}$$

Производная имеет постоянный фазовый сдвиг, равный 90 градусам во всем диапазоне частот. ЛАХ производной равен

$$Lm(\omega) = 20 \log(\omega)$$

относительно аргумента $\log \omega$ это прямая с наклоном 20 дБ/дек, пересекающая ось абсцисс в точке $\omega = 1$. На рис. 8.8 показаны ЛАХ и фаза производной

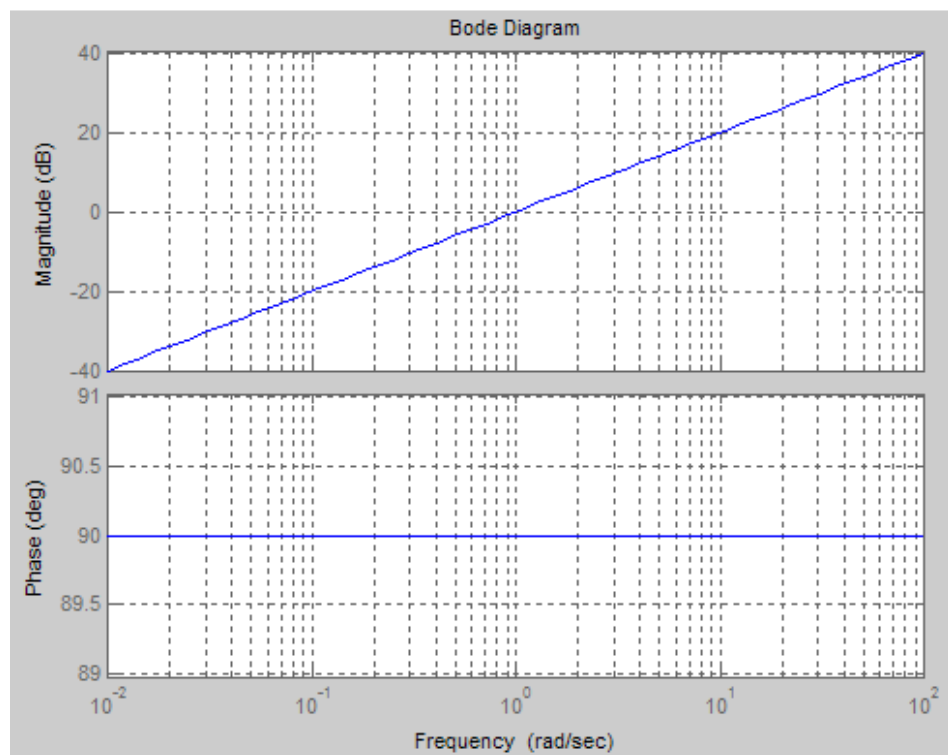


Рис. 8.8 ЛАХ и фаза производной

Форсирующие звенья. Рассмотрим два звена, которые не отображают реальные элементы, но необходимы при построении ЛАХов различных структурных схем.

Первое звено имеет уравнение

$$x = T\dot{u} + u$$

Передаточная функция по Лапласу равна

$$\Phi(s) = Ts + 1$$

Передаточная функция по Фурье

$$\Phi(j\omega) = Tj\omega + 1 = \sqrt{1 + \omega^2 T^2} e^{j \arg tg(\omega T)}$$

Сравнивая полученное выражение с выражением (8.3), получим, что ЛАХ первого вспомогательного звена будет отличаться от ЛАХ аperiodического звена наклоном в высокочастотной области. Этот наклон будет равен 20 дБ/дек. Фаза звена будет отличаться знаком. На рис. 8.9. представлены ЛАХ и фаза первого вспомогательного звена.

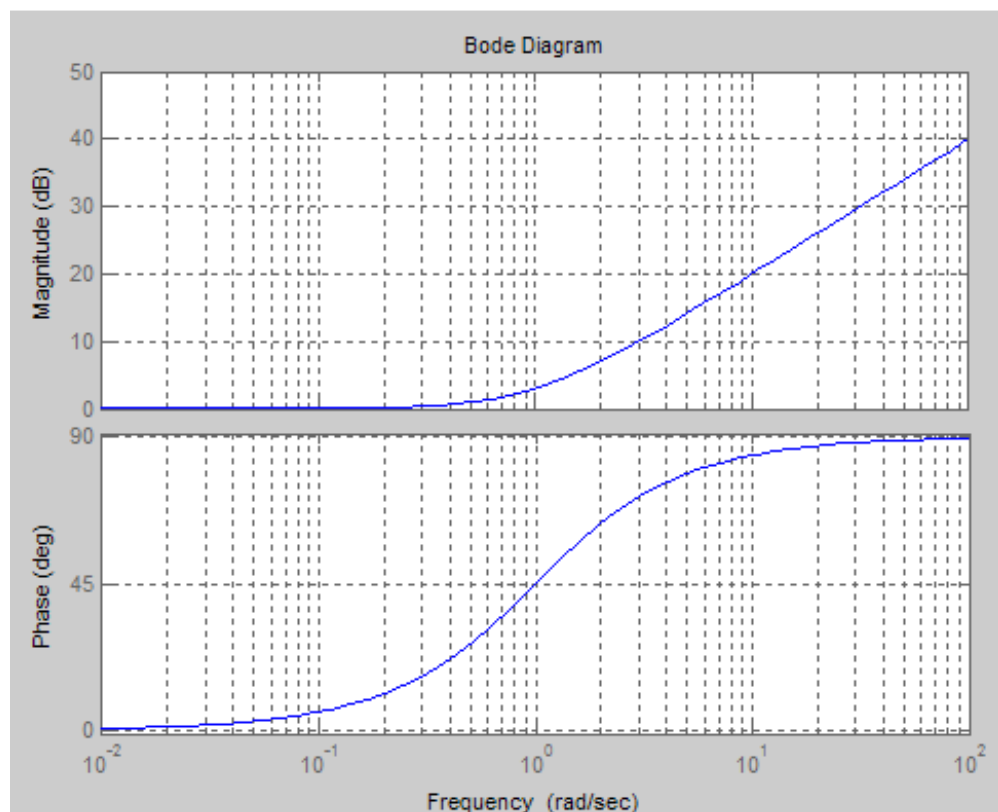


Рис. 8.9. ЛАХ и фаза первого вспомогательного звена

Второе звено имеет уравнение

$$x = T^2 \ddot{u} + 2\xi T \dot{u} + u$$

Передаточная функция

$$\Phi(s) = T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1$$

Очевидно, что ЛАХ и фаза вспомогательного звена будут зеркальны по отношению к ЛАХу и фазе колебательного звена. На рис.8.10 показаны эти ЛАХ и фаза при $T = 1$, $\xi = 0.7$

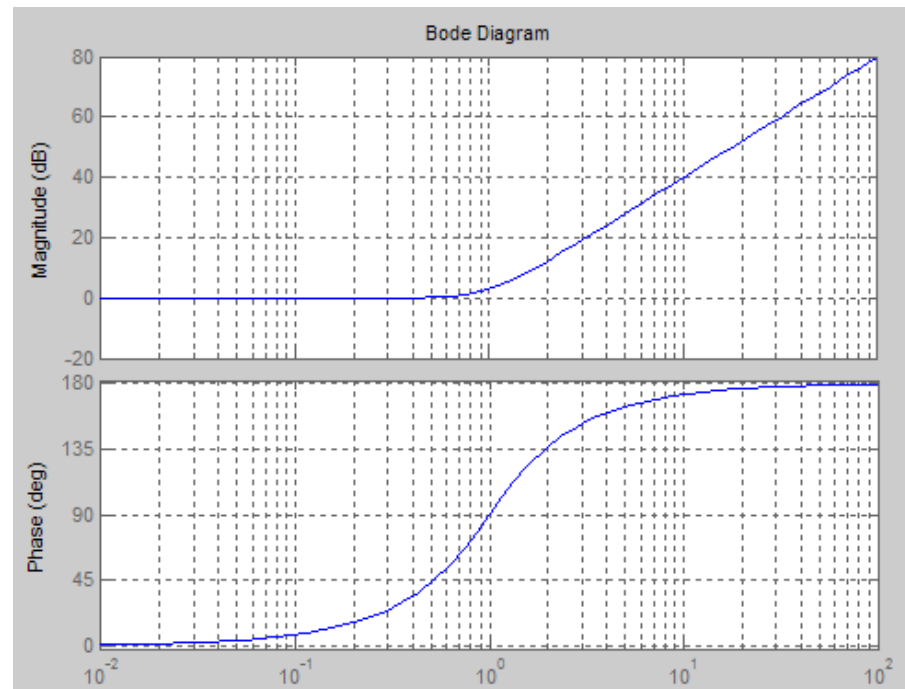


Рис. 8.10. ЛАХ и фаза второго вспомогательного звена

Звено чистого запаздывания. Уравнение звена чистого запаздывания имеет вид

$$x(t) = u(t - \tau)$$

Выход точно отслеживает вход, но со сдвигом во времени. Преобразование Лапласа для сдвига по времени равно

$$X(s) = e^{-s\tau} U(s)$$

Поэтому передаточная функция равна

$$\Phi(s) = e^{-s\tau}$$

Передаточная функция по Фурье равна

$$\Phi(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$$

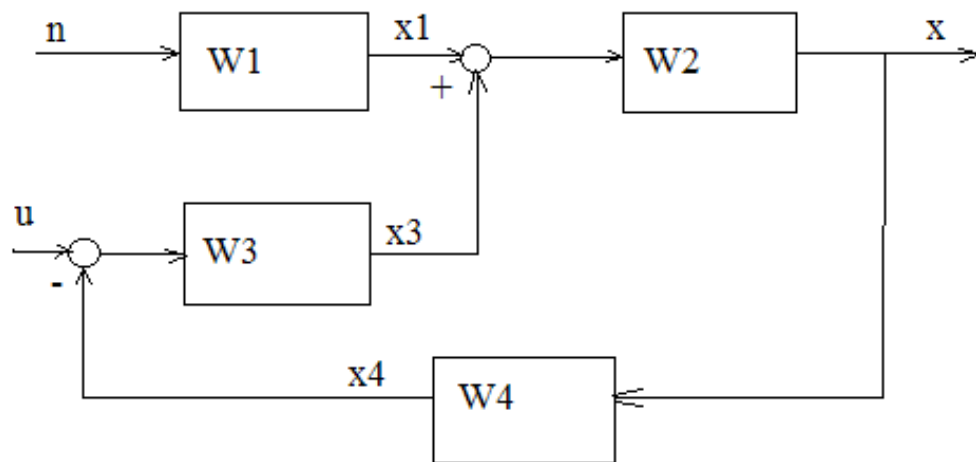
АЧХ этого звена во всем диапазоне частот равна единице, а фаза линейно зависит от частоты

$$\phi(\omega) = \omega\tau$$

9. Передаточные функции структурных схем

Были рассмотрены характеристики типовых звеньев. Можно представить, что типовое звено описывает какой-то элемент, блок. Этот блок может функционировать самостоятельно, но он может быть составной частью некоей более сложной

системы. Одним из способов описания сложных составных систем являются структурные системы. Это графическое изображение математического описания системы в виде соединения блоков, звеньев. Звено изображается прямоугольником, внутри которого помещают либо его передаточную функцию, либо дифференциальное уравнение, либо обозначение блока, с расшифровкой в тексте значения передаточной функции и т. д. Звенья на схеме соединяются в соответствии с их функциональным взаимодействием в системе. См., например рис 9.1.



$$W1 = k, W2 = a/s, W3 = \frac{b}{Ts + 1}, W4 = 1$$

Рис. 9.1. Пример структурной схемы

Рассмотрим некоторые типовые соединения звеньев.

Последовательные соединения звеньев. При последовательном соединении звеньев выход предшествующего звена является входом последующего звена, как показано на рис.9.2.

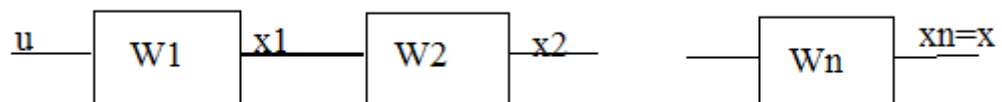


Рис. 9.2. Схема с последовательным соединением

Запишем уравнения звеньев.

$$X1(s) = W1(s)U(s), X2(s) = W2(s)X1(s), \dots X(s) = Wn(s)X_{n-1}(s)$$

или

$$X(s) = W_1(s)W_2(s)...W_n(s)U(s) = W_c(s)U(s)$$

Следовательно, передаточная функция системы с последовательным соединением как отношение изображений выхода ко входу равна произведению передаточных функций соединения

$$W_c(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s) \quad (9.1)$$

Такой простой алгоритм приводит к простому способу вычисления ЛАХ последовательного соединения. Так как

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

то согласно (9.1) передаточная функция системы по Фурье равна

$$W_c(j\omega) = \left(\prod_{i=1}^n A_i(\omega)\right)e^{j\sum_{i=1}^n \phi_i(\omega)}$$

Отсюда следует, что АЧХ системы равна

$$A_c(\omega) = \prod_{i=1}^n A_i(\omega) \quad (9.2)$$

ФЧХ системы равна

$$\phi(\omega) = \sum_{i=1}^n \phi_i(\omega) \quad (9.3)$$

Поэтому ЛАХ системы равна

$$\begin{aligned} Lm_c(\omega) &= 20\log A_c(\omega) = 20\log \prod_{i=1}^n A_i(\omega) = \\ &= \sum_{i=1}^n 20\log A_i(\omega) = \sum_{i=1}^n Lm_i(\omega) \end{aligned} \quad (9.4)$$

ЛАХ системы с последовательным соединением равна сумме ЛАХов элементов.

Имея в виду, что ЛАХи типовых элементов в асимптотическом представлении составлены из одной или двух прямых, запишем простые очевидные правила построения ЛАХ последовательного соединения:

1. Вычисляем собственные частоты всех элементов и располагаем их в порядке возрастания (напоминаем, что на собственной частоте происходит излом ЛАХ. Производная и интегратор собственных частот и изломов не имеют).

2. Вычисляем коэффициент усиления системы как произведение коэффициентов усиления элементов

$$k_c = k_1 k_2 \dots k_n$$

Вычисляем значение

$$Lm_0 = 20 \log k_c$$

3. Начиная с области низких частот, строим первую асимптоту до первой, наименьшей собственной частоты. Наклон асимптоты равен $-v \cdot 20 \text{ дб} / \text{дек}$, где v - разница между числом интеграторов и производных. Асимптота проходит через точку с координатами $\omega = 1$, $Lm = Lm_0$.

4. Вторая асимптота является продолжением первой, проводится до второй собственной частоты, наклон её изменяется по сравнению с наклоном первой асимптоты на 20, -20, 40 или -40 дб/дек. в зависимости от того, какое звено определило первую собственную частоту: апериодическое, колебательное, первое или второе форсирующее.

5. Каждая последующая асимптота строится аналогичным образом. Если несколько элементов имеют одинаковые собственные частоты, то в точке излома наклон меняется на угол, равный сумме наклонов этих элементов.

6. Для колебательных звеньев с декрементом затухания, меньшим, чем 0.4, следует учесть поправки в точке излома.

7. Фазовая характеристика системы строится путем сложения фазовых характеристик всех элементов.

Студентам предлагается самостоятельно, не используя математических пакетов, построить ЛАХ системы с последовательным соединением следующих элементов

$$\frac{1}{5s+1}, \quad \frac{5(s+1)}{0.2^2 s^2 + 2 \cdot 0.7 \cdot 0.2s + 1}, \quad \frac{0.2}{s}$$

Проверку можно провести в пакете MATLAB.

Указанный способ построения ЛАХ имеет большое значение в инженерной практике, так как прямая цепь систем с отрицательной обратной связью в основном является последовательным соединением, а частотные критерии устойчивости, качества и точности опираются на вид ЛАХ прямой цепи.

Параллельное соединение звеньев. При параллельном соединении на вход всех элементов подается один и тот же сигнал, а выходы элементов складываются, как показано на рис. 9.3.

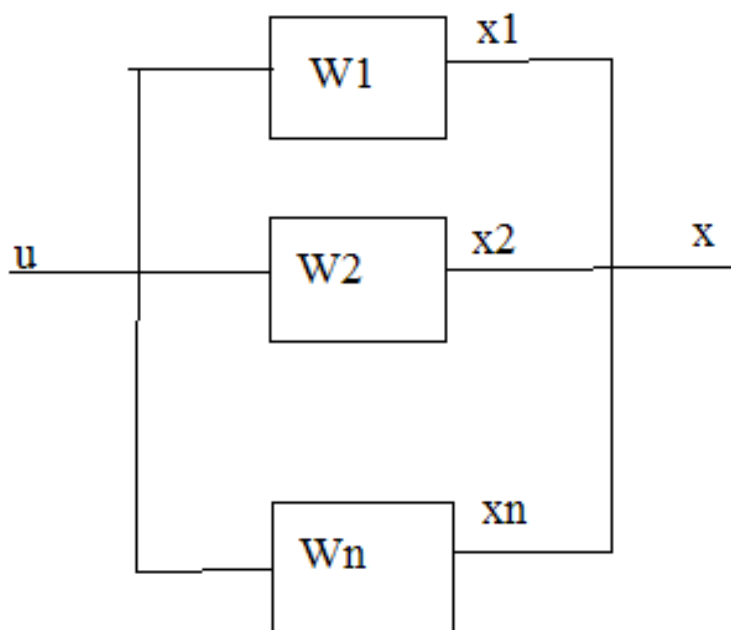


Рис.9.3. Параллельное соединение элементов

Составляем уравнения в изображениях

$$X(s) = W_1(s)U(s) + W_2(s)U(s) + \dots + W_n(s)U(s) = W_c(s)U(s)$$

Следовательно, передаточная функция системы с параллельным соединением элементов равна сумме передаточных функций элементов.

$$W_c(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s)$$

Здесь нет простых ручных способов определения ЛАХ. Необходимо найти сумму комплексных функций частоты. Для математических пакетов это элементарная операция.

Системы с отрицательной обратной связью. В этих системах выход через какое-то звено подается с отрицательным знаком на вход системы, как показано на рис. 9.4.

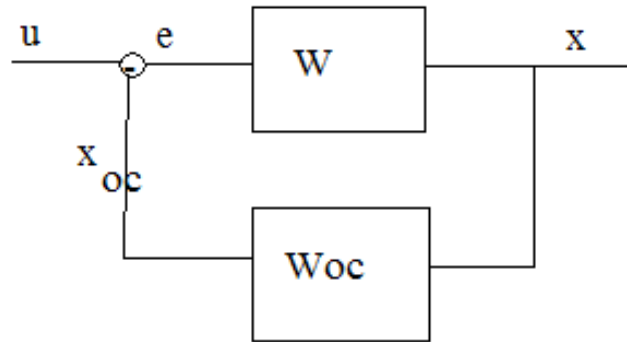


Рис. 9.4. Схема с отрицательной обратной связью

Здесь **W** – передаточная функция прямой цепи, это может быть некоторый сложный оператор,

Woc – передаточная функция звена в обратной связи.

Произведение операторов **WWoc** называется оператором разомкнутой системы,

e – сигнал ошибки.

Составляем уравнение в изображениях

$$X(s) = W(s)E(s)$$

$$E(s) = U(s) - Xoc(s) = U(s) - Woc(s)X(s)$$

Тогда

$$X(s) = W(s)[U(s) - Woc(s)X(s)]$$

Следовательно

$$X(s) = \frac{W(s)}{1 + Woc(s)W(s)} U(s)$$

Тогда выражение для передаточной функции системы с отрицательной обратной связью получим в виде

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + Woc(s)W(s)} \quad (9.5)$$

Передаточная функция системы с отрицательной обратной связью равна передаточной функции прямой цепи, деленной на единицу плюс передаточная функция разомкнутой системы.

Если оператор обратной связи равен единице (выход, как это обычно бывает, без обработки подается с обратным знаком на вход), то (9.5) примет вид

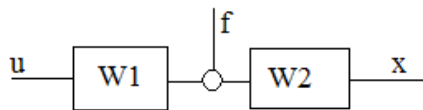
$$\Phi(s) = \frac{1}{1 + W(s)} \quad (9.6)$$

Поскольку далее рассматриваются системы с отрицательной обратной связью, эти формулы имеют большое значение, но построение ЛАХ системы, замкнутой отрицательной обратной связью возможно только численными методами.

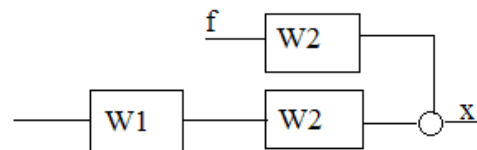
Некоторые правила преобразования систем. Этими правилами можно пользоваться при упрощении структуры.

1. Перенос сумматора вперед по ходу сигнала.

Вместо схемы

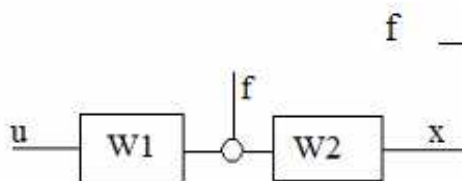


Имеем схему

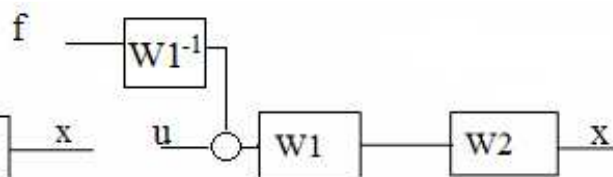


2. Перенос сумматора назад по ходу сигнала

Вместо схемы

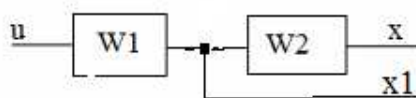


Имеем схему

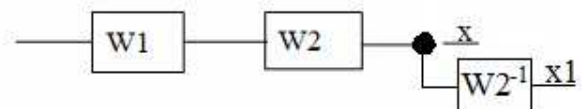


3. Перенос узла по ходу сигнала

Вместо схемы

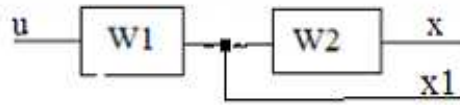


Имеем схему

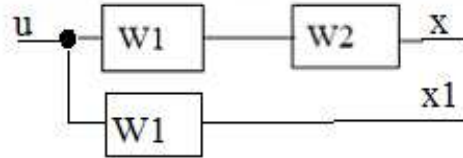


4. Перенос узла назад по ходу сигнала

Вместо схемы

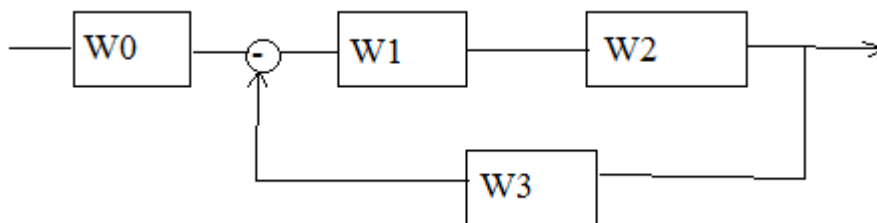


Имеем схему



Рассмотрим некоторые примеры на определение передаточной функции по структурным схемам.

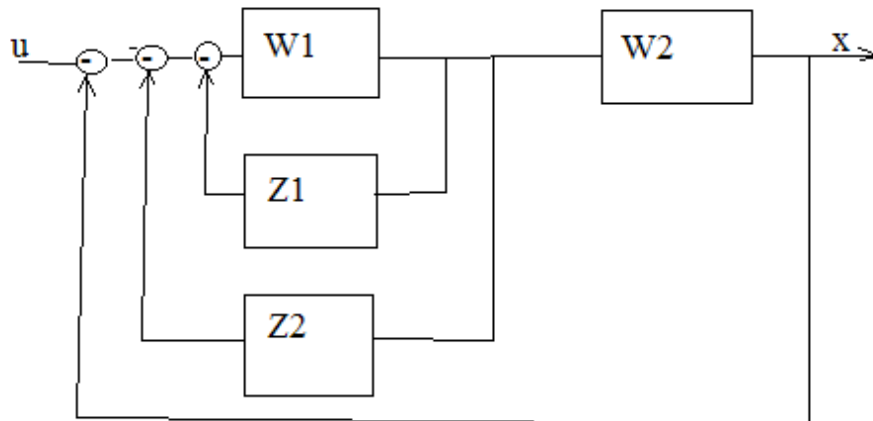
1. Дана структурная схема



Найдем передаточную функцию

$$\Phi = W_0 \frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_2 W_3}$$

2. Дана структурная схема



Необходимо найти передаточную функцию.

Обратная связь у блока W1 это параллельная цепь, её передаточная функция

$$W_{1oc} = Z_1 + Z_2$$

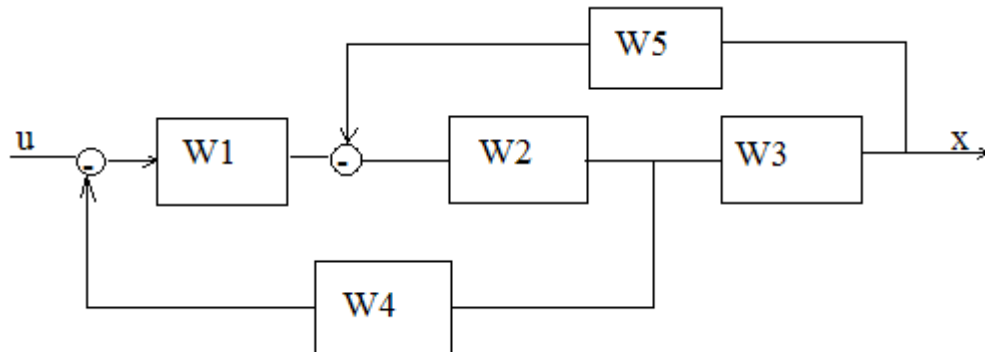
Блок W1, замкнутый отрицательной обратной связью, имеет передаточную функцию

$$\bar{W} = \frac{W_1}{1 + (Z_1 + Z_2)W_1}$$

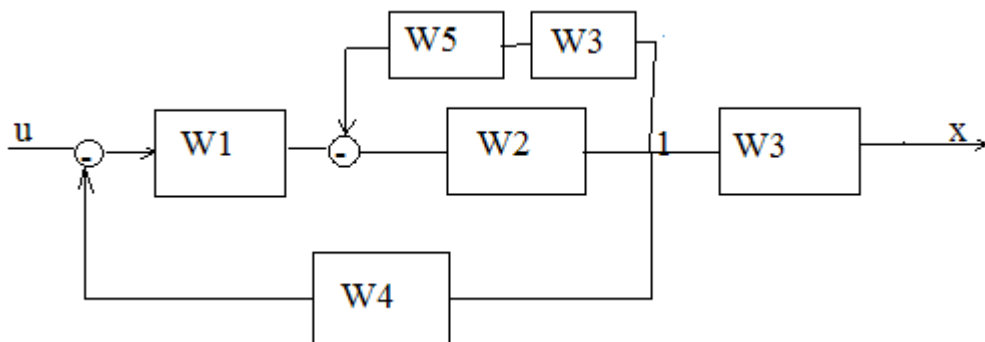
Вся схема, охваченная отрицательной обратной связью, имеет передаточную функцию, равную

$$\Phi = \frac{\bar{W}W_2}{1 + \bar{W}W_2}$$

3. Дана структурная схема



Необходимо найти передаточную функцию. Преобразуем структурную схему, перенеся узел 1 назад



Найдем передаточную функцию для блока W2, охваченного обратной связью

$$W_0 = \frac{W_2}{1 + W_2W_3W_5}$$

Тогда передаточная функция всей системы будет равна

$$\Phi = \frac{W_1 \cdot W_0}{1 + W_1 \cdot W_0 \cdot W_4} W_3$$

10. Устойчивость систем управления

Понятие устойчивости связано со способностью системы возвращаться с определенной точностью в исходное положение, после того как исчезнут внешние силы, которые её из этого положения вывели. Неустойчивая система не возвращается в исходное состояние, а либо удаляется от него, либо совершает вокруг него колебания с возрастающей амплитудой.

У нелинейных систем может быть несколько положений равновесия, и в какое из них попадет система, зависит от начальных условий и внешних сил. Для нелинейных систем устойчивому положению равновесия может соответствовать некоторая область, ограниченная по координатам. Если система, какими либо возмущениями будет выведена за пределы этой области, она либо попадет в другую область устойчивости, либо попадет в область неустойчивости.

Определение устойчивости по Ляпунову: система асимптотически устойчива по координатам x_i , если при любом малом ε можно выбрать такое значение δ , при котором для начальных условий

$$\sum x_i(0)^2 \leq \delta \quad (10.1)$$

при любом t

$$\sum x_i(t)^2 < \varepsilon \quad (10.2)$$

То есть, если система устойчива, всегда найдутся малые начальные условия (10.1), при которых система будет оставаться в малой области устойчивости (10.2). В противном случае система будет неустойчива.

Анализ устойчивости систем, которые практически всегда нелинейные – очень сложная задача. Линеаризуя систему, мы делаем задачу исследования устойчивости много проще, но надо быть уверенным, что результат верен, особенно тогда, когда устойчивость в линейном приближении «слабая». Уверенность гарантируют две теоремы Ляпунова

1. Если все корни характеристического уравнения линеаризованной системы имеют отрицательные вещественные части, то невозмущенное движение исходной нелинейной системы асимптотически устойчиво.

2. Если хотя бы один корень характеристического уравнения имеет положительную вещественную часть, то невозмущенное движение исходной системы неустойчиво.

3. Если хотя бы один корень имеет нулевую вещественную часть, а остальные корни – отрицательные вещественные части, то этот случай называется критическим, необходимо проводить специальное исследование.

Следовательно, корни характеристического уравнения линеаризованной системы

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (10.3)$$

определяют устойчивость и линеаризованной и исходной нелинейной системы. Не надо бояться, что неучтенные нелинейности выведут систему из положения равновесия или наоборот сделают систему устойчивой. Необходимо только помнить, что область устойчивости нелинейных систем может быть ограниченной по возмущениям или начальным условиям.

Корни (10.3) определяют устойчивость, но их аналитический вид можно практически получить только для уравнения не выше второго порядка. Задача облегчается тем, что нам нет необходимости находить корни алгебраического уравнения высокого порядка, нам достаточно определить знаки их вещественных частей. Для этого были найдены алгебраические и частотные критерии устойчивости

11. Критерии устойчивости Гурвица

Первая группа критериев – алгебраические критерии, критерии Раусса, Гурвица, Ляпунова – Шиппара. Рассмотрим критерии Гурвица. Для характеристического уравнения (10.3) составляются определители.

Главный определитель Гурвица

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & 0 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & 0 \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & : \\ 0 & a_n & a_{n-2} & : \\ 0 & 0 & : & : \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix}$$

По диагонали определителя стоят коэффициенты в порядке убывания индексов, начиная с a_{n-1} , и заканчивается диагональ коэффициентом a_0 . Выше диагонали индексы убывают, ниже – возрастают. Индексов, больше чем n или отрицательных не существуют.

Составляются определители Гурвица, которыми являются все диагональные миноры главного определителя Гурвица

$$\Delta_1 = |a_{n-1}|, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}, \text{ и т. д. до } \Delta_{n-1}.$$

Критерии устойчивости Гурвица формулируются следующим образом:

Чтобы система была устойчива необходимо и достаточно, чтобы первый коэффициент a_n и все определители Гурвица до Δ_n включительно были положительными.

Примеры

1. Уравнение первого порядка. Его характеристическое уравнение

$$a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Главный определитель

$$\Delta_1 = |a_0|$$

Условия устойчивости

$$a_1 > 0, \quad \Delta_1 = a_0 > 0$$

Все коэффициенты характеристического уравнения, или что то же самое все коэффициенты дифференциального уравнения системы должны быть положительными.

2. Второй порядок

$$a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Критерии устойчивости

$$a_2 > 0, \quad \Delta_1 = |a_1|, \quad \Delta_2 = a_1 a_0 > 0$$

или $a_2 > 0$, $a_1 > 0$, следовательно $a_0 > 0$,

все коэффициенты дифференциального уравнения системы должны быть положительны.

3. Третий порядок

$$a_3\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix}.$$

Критерии устойчивости

$$a_3 > 0, \quad \Delta_1 = |a_2| > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2a_1 - a_3a_0 > 0 \quad (*)$$

$$\Delta_3 = a_0\Delta_2 > 0.$$

Так как $\Delta_2 > 0$, то $a_0 > 0$.

Анализируем условие (*). Так как $a_3a_0 > 0$, необходимо $a_2a_1 > 0$ иначе условие (*) никогда не выполняется. Поскольку $a_2 > 0$, необходимо, чтобы $a_1 > 0$. Получены условия о положительности всех коэффициентов. Однако этих условий недостаточно, так как они не обеспечивают выполнения условия (*). Окончательно необходимыми и достаточными условиями устойчивости является требование о положительности всех коэффициентов уравнения и выполнения дополнительного условия (*).

4. Условия устойчивости для уравнения четвертого порядка приведем без вывода:

- все коэффициенты уравнения должны быть положительны;
- должны выполняться дополнительные условия

$$\Delta_2 = a_2a_3 - a_1a_0 > 0,$$

$$\Delta_3 = a_3(a_1a_2 - a_0a_3) - a_1^2a_4 > 0$$

Для уравнений более высокого порядка, где операции с определителями становятся затруднительными, рекомендуется использовать критерии Ляпунова - Шипара.

Условие положительности коэффициентов является недостаточным, но он может оказаться полезным при предварительном анализе. Если это условие нарушается, нет смысла в дальнейшем исследовании определителей. Например

Система с уравнением

$$x''' - 7x'' + 5x' + 1 = 0$$

неустойчива, так как один коэффициент отрицателен.

Система с уравнением

$$x''' + 3x' + x + 1 = 0$$

неустойчива, так как один коэффициент равен нулю.

12. Частотные критерии устойчивости

Принцип аргумента

В основе вывода частотных критериев лежит принцип аргумента. Суть его применения в следующем.

Характеристическое уравнение

$$D(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0 = 0 \quad (12.1)$$

может быть представлено в виде

$$D(\lambda) = a_n (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_{n-1})(\lambda - \lambda_n) \quad (12.2)$$

где λ_i - корень характеристического уравнения (12.1).

Каждый корень характеристического уравнения на комплексной плоскости изображается вектором, проведенным из начала координат, с модулем и фазой, определяемыми по вещественной и мнимой частям корня (см. рис. 12.1).

Пусть λ как переменная имеет произвольное значение, в том числе комплексное. Тогда любая скобка $(\lambda - \lambda_i)$ в уравнении (12.2) может быть представлен вектором, проведенным из конца вектора λ_i до окончания вектора λ (см. рис 12.2).

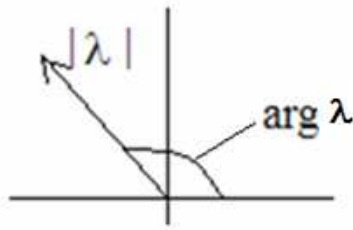


Рис. 12.1

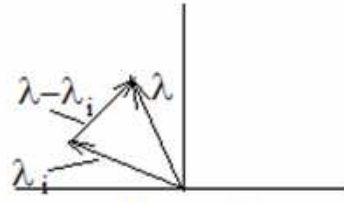


Рис. 12.2

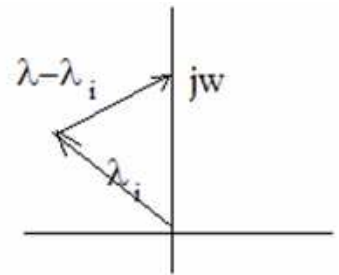


Рис. 12.3

Пусть теперь $\lambda = j\omega$, то есть аргумент в полиноме $D(\lambda)$ меняется только вдоль мнимой оси. Для этого случая вектор $(j\omega - \lambda_i)$ показан на рис. 12.3 и конец вектора расположен на мнимой оси.

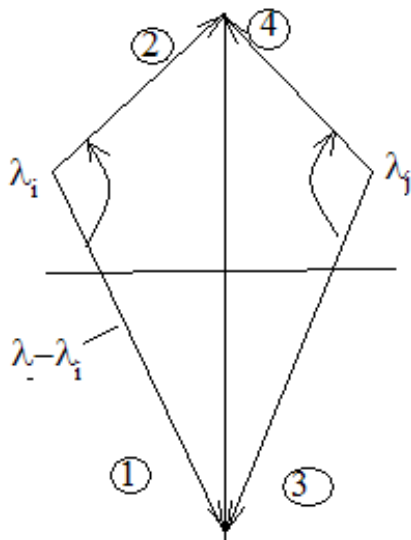


Рис. 12.4

Пусть теперь ω меняется от $-\infty$ до ∞ . Тогда, если корень характеристического уравнения λ_i лежит в левой полуплоскости (система устойчива), вектор $(\lambda - \lambda_i)$ меняет как показано на рис. 12.4 свое положение от положения 1 до положения 2 при этом его фаза меняется на величину π (поворот идет против часовой стрелки). Если λ_i лежит в правой полуплоскости (система неустойчива), вектор $(\lambda - \lambda_i)$ меняет как показано на рис. 12.4 свое положение от положения 3

до положения 4 при этом его фаза меняется на величину $-\pi$ (поворот идет по часовой стрелке).

Комплексный годограф $D(j\omega)$ есть произведение векторов $(j\omega - \lambda_i)$. Его модуль равен произведению модулей скобок, а фаза (аргумент) равна сумме фаз скобок. Следовательно, каждый корень характеристического уравнения, лежащий в левой полуплоскости, приводит к изменению фазы полинома $D(j\omega)$ на $+\pi$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ . Для каждого корня, лежащего в правой полуплоскости, фаза $D(j\omega)$ меняется на $-\pi$. Всего корней n . Если в правой полуплоскости лежит m корней, тогда $n - m$ корней лежат в левой полуплоскости и общее изменение фазы равно

$$\Delta \arg D(j\omega)_{-\infty < \omega < \infty} = (n - m)\pi - m\pi = (n - 2m)\pi \quad (12.3)$$

Частотный критерий устойчивости Михайлова

Критерий устойчивости Михайлова непосредственно следует из (12.3). Для устойчивой системы количество корней характеристического уравнения, лежащих в правой полуплоскости m , должно быть равно нулю. Тогда согласно (12.3)

$$\Delta \arg D(j\omega)_{-\infty < \omega < \infty} = n\pi$$

Система является устойчивой, если годограф $D(j\omega)$ замкнутой системы повернется вокруг начала координат на угол $n\pi$, где n – степень характеристического уравнения.

Полином $D(j\omega)$ можно разложить на вещественную и мнимую части

$$D(j\omega) = \operatorname{Re}(\omega) + j \operatorname{Im}(\omega)$$

где

$$\operatorname{Re}(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \dots$$

$$\operatorname{Im}(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 + \dots$$

Вещественная часть есть четная функция от ω . Мнимая часть – нечетная

$$\operatorname{Re}(\omega) = \operatorname{Re}(-\omega)$$

$$\operatorname{Im}(\omega) = -\operatorname{Im}(-\omega)$$

Поэтому все частотные годографы можно строить при изменении ω от 0 до ∞ . При этом годограф устойчивой системы, согласно критерию Михайлова, должен повернуться на угол $n\frac{\pi}{2}$.

При увеличении ω аргумент монотонно увеличивается, так как все множители $(j\omega - \lambda_i)$ расположены в левой полуплоскости и увеличивают свою фазу монотонно. Кроме того годограф не обращается в ноль так как нулевых корней у системы нет. Таким образом, типовой случай изменения годографа, когда он последовательно проходит все квадранты, без возврата и петель. Число обходимых квадрантов равно порядку системы.

Критерий устойчивости Найквиста – Михайлова

Недостатком критерия Михайлова является необходимость строить годограф системы, замкнутой отрицательной обратной связью. Это очень трудоемкая работа и до появления ЭВМ критерием пользовались редко и материалов по практическому применению критерия накоплено мало.

Достоинством критерия Найквиста является использование годографа разомкнутой системы. О простоте построения годографа разомкнутой системы уже указывалось.

Пусть передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(j\omega) = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} \quad (12.4)$$

где степень полинома числителя не выше степени полинома знаменателя.

Напомним, что выражение

$$Q(j\omega) = 0 \quad (12.5)$$

есть характеристическое уравнение разомкнутой системы.

Введем вспомогательную функцию

$$\varphi(j\omega) = 1 + W(j\omega) \quad (12.6)$$

Учитывая (12.4), получим

$$\varphi(j\omega) = 1 + \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega)} = \frac{Q(j\omega) + R(j\omega)}{Q(j\omega)} \quad (12.7)$$

Запишем, учитывая (12.4), передаточную функции системы, замкнутую единичной отрицательной обратной связью

$$\Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} = \frac{R(j\omega)/Q(j\omega)}{1 + R(j\omega)/Q(j\omega)} = \frac{R(j\omega)}{Q(j\omega) + R(j\omega)} \quad (12.8)$$

В (12.8) знаменатель передаточной функции есть характеристический полином замкнутой системы

$$D_z(j\omega) = Q(j\omega) + R(j\omega) \quad (12.9)$$

Следовательно, у вспомогательной функции в (12.7) числитель представляет собой характеристический полином замкнутой системы, а знаменатель - характеристический полином разомкнутой системы.

$$\varphi(j\omega) = \frac{D_z(j\omega)}{D_p(j\omega)} \quad (12.10)$$

При построении годографа вспомогательной функции изменение её аргумента равно разности изменения аргументов числителя и знаменателя в (12.10)

$$\begin{aligned} \Delta \arg \varphi(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} &= \Delta \arg D_z(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} - \Delta \arg D_p(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = \\ &= (n - 2m)\pi - (n - 2l)\pi \end{aligned} \quad (12.11)$$

где

n – степени характеристических полиномов разомкнутой и замкнутой систем, степени одинаковы, так как в (12.9) степень полинома Q не выше степени полинома R ,

m – число корней характеристического уравнения замкнутой системы в правой полуплоскости,

l – число корней характеристического уравнения разомкнутой системы в правой полуплоскости.

Для устойчивой замкнутой системы необходимо, чтобы $m=0$.

Тогда, если разомкнутая система устойчива, $l=0$. Для того, чтобы замкнутая система была устойчивой, необходимо

$$\Delta \arg \varphi(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = 0 \quad (12.12)$$

Разомкнутая система может быть неустойчива. Тогда

$$\Delta \arg \varphi(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=\infty} = 2\pi l \quad (12.13)$$

Далее будем считать, что разомкнутая система устойчива. Тогда по условию (12.12) следует, что вспомогательная функция $\varphi(j\omega)$ при изменении частоты от $-\infty$ до ∞ не должна охватывать начала координат. Так как вспомогательная функция связана с передаточной функцией разомкнутой системы соотношением (12.6), то передаточная функция разомкнутой системы равна

$$W(j\omega) = \varphi(j\omega) - 1$$

и годограф передаточной функции разомкнутой системы не должен охватывать

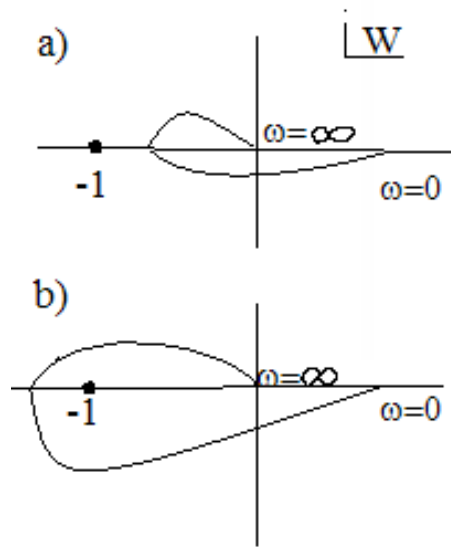


Рис. 12.6

точку с координатами **-1, 0**. На рис 12.6 показаны два варианта поведения годографа передаточной функции $W(j\omega)$. Годограф строится при изменении частоты от 0 до ∞ . В случае **a** годограф не охватывает точку **-1, 0**, следовательно, система устойчива. В случае **b** годограф охватывает точку **-1, 0** и значит, система неустойчива.

Важными характеристиками степени устойчивости, оговариваемые часто в технических заданиях, являются:

- запас устойчивости по амплитуде,
- запас устойчивости по фазе.

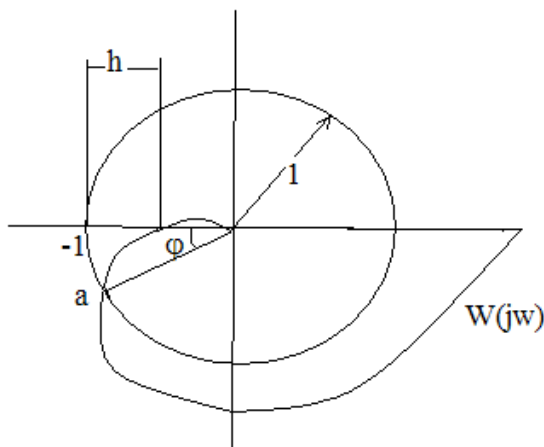


Рис. 12.7. Запасы устойчивости

Расчетные параметры системы, обеспечивающие её устойчивость, в результате погрешности изготовления или условий эксплуатации могут изменить свои значения, и система может потерять устойчивость. Поэтому в систему вносится некоторый резерв. На рис. 12.7 показаны: $W(j\omega)$ – годограф системы; **a** – точка пересечения годографом единичной окружности; ϕ – запас устойчивости по фазе; **h** – запас устойчивости по амплитуде.

На рисунке показан годограф устойчивой системы, который не охватывает точки **-1, 0**. Однако, например, при увеличении коэффициента усиления системы, амплитуда годографа на каждой частоте увеличится, запас устойчивости по амплитуде **h** будет выбран и система потеряет устойчивость.

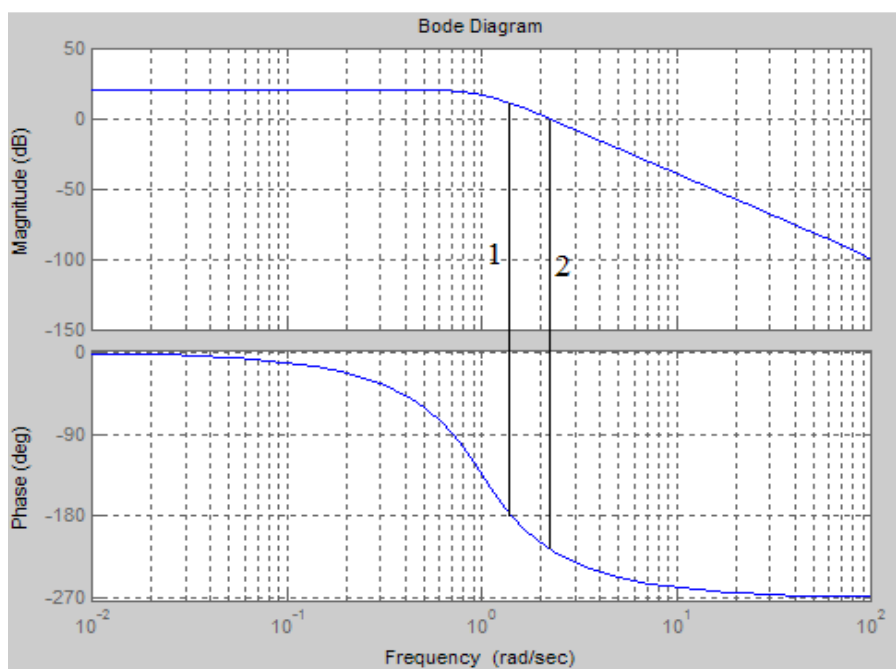


Рис. 12.8. Определение запасов устойчивости по ЛАХ системы

Потеря устойчивости будет иметь место также, если система ухудшит свои фазовые характеристики, её фазовый сдвиг увеличится, все точки годографа развернутся, точка **a** переместится за точку **-1**, запас по фазе будет выбран и система потеряет устойчивость.

На рис 12.8 показан пример ЛАХ и фазы некоторой системы. Проверка устойчивости системы по этим характеристикам может быть проведена двумя способами.

Способ 1: при фазе, равной -180 град., проверяется величина амплитуды; если она больше единицы (ЛАХ больше нуля) система неустойчива (см. также рис 12.7).

Способ 2: при амплитуде, равной единице, проверяется значение фазы; если фаза больше по модулю, чем 180 град. то годограф охватывает точку -1 , 0 и система неустойчива. Так же определяются запасы по фазе и амплитуде.

13. Критерии качества

После того как обеспечена принципиальная работоспособность системы – обеспечена устойчивость, надо сделать систему «хорошей». Что такое хорошая

система формулируется в виде критериев качества. Критерии качества описывают желаемую реакцию системы на воздействие различных возмущений. Как правило, на систему действуют случайные, заранее неизвестные возмущения, для которых известны их статистические характеристики. Но первые контрольные тестовые условия – критерии качества определяются для детерминированных, неслучайных возмущений и начальных условий.

Первая группа критериев качества определяет параметры переходного процесса на единичное возмущение. На рис. 13.1. показан такой переходный процесс, где обозначены параметры, определяющие качество системы:

1. t_p – время регулирования – время, когда переходный процесс входит в диапазон 2Δ и больше из этого диапазона не выходит;
2. X_{\max} – перерегулирование, превышение процесса над установившимся значением $X_{уст}$, часто выражается в процентах отношения разности $(X_{\max} - X_{уст})$ к установившемуся значению.

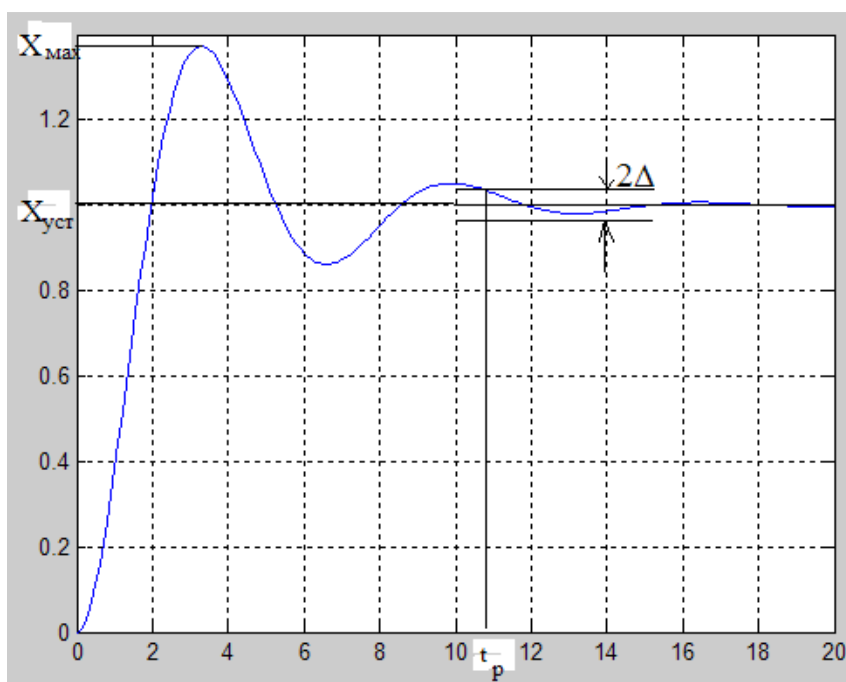


Рис. 13.1 Показатели качества

3. Колебательность – число колебаний, которое имеет переходный процесс за время регулирования;
4. Точность – ширина коридора Δ , в котором может находиться установившееся значение переходного процесса.

Некоторые критерии можно оценить по виду ЛАХ разомкнутой системы. Время регулирования и колебательность оцениваются по характеру изменения ЛАХ в области пересечения оси частот. Время регулирования примерно равно

$$\pi/\omega_0 < t_p < 4\pi/\omega_0 \quad (13.1)$$

где ω_0 - частота пересечения ЛАХом оси частот.

Если наклон ЛАХ при пересечении оси частот равен -20 дБ/дек., то переходный процесс на единичное возмущение будет близок к апериодическому с перерегулированием не более 20%.

Далее будет показано, что некоторые критерии точности определяются наклоном ЛАХ в низкочастотной области.

14. Передаточная функция ошибки

После того как были рассмотрены такие критерии качества как быстродействие и колебательность рассмотрим вопросы, связанные с точностью системы. Пусть на систему действуют два сигнала: управляющий сигнал и вредное возмущение. Представим структурную схему системы в виде, показанном на рис 14.1.

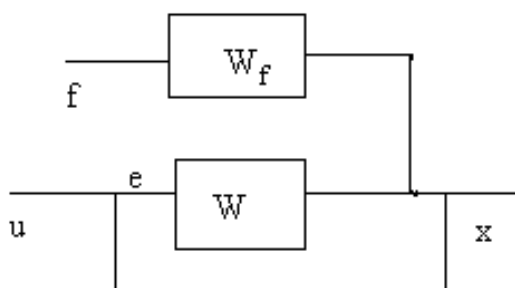


Рис. 14.1. Схема воздействия сигналов на систему

Возмущение f и управляющий сигнал u могут иметь разные точки приложения, например, положение штурвала пилота и ветровое возмущение, что и отра-

жено в схеме в виде разных передаточных функций W_f и W . Если задачей системы является отслеживание управляющего сигнала, то ошибка системы равна разности между управляющим сигналом и выходом системы

$$e = u - x \quad (14.1)$$

Тогда, переходя к изображениям сигналов по Лапласу, для системы получим

$$X = W * E + W_f * f$$

$$E = U - X$$

Или

$$X = U - E = W * E + W_f * F$$

$$E = \frac{1}{1+W} U - \frac{W_f}{1+W} F$$

Таким образом, передаточная функция ошибки от управляющего сигнала как отношение изображения ошибки к изображению управляющего сигнала равна

$$W_e^u = \frac{1}{1+W} \quad (14.2)$$

где W - передаточная функция прямой цепи.

Передаточная функция ошибки от возмущения равна

$$W_e^f = \frac{W_f}{1+W} \quad (14.3)$$

Иногда, когда возмущение отсутствует, а ошибка возникает из-за неидеальности передаточной функции системы, выражение для передаточной функции можно получить иначе. Рассмотрим схему, показанную на рис. 14.2.

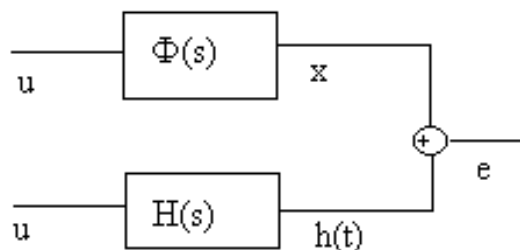


Рис. 14.2. Схема формирования ошибки

Здесь $\Phi(s)$ - передаточная функция замкнутой системы;

$H(s)$ - передаточная функция желаемой идеальной системы,

например, для следящей системы идеальная передаточная функция равна единице;

$h(t)$ - идеальный сигнал как выход идеальной системы:

$x(t)$ - реальный выход системы.

Тогда ошибка равна

$$e = h - x$$

Переходя к изображениям, получим

$$E(s) = [H(s) - \Phi(s)]U(s)$$

Передаточная функция по ошибке как отношение изображения ошибки к изображению входа равна

$$\Phi_e(s) = H(s) - \Phi(s)$$

Для следящей системы как указывалось $H(s) = 1$. Передаточная функция замкнутой системы равна

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}$$

Поэтому

$$W_e = \frac{1}{1 + W}$$

Полученное выражение совпадает с (14.2).

Ошибки системы при детерминированных возмущениях. В этом разделе определяются ошибки системы при воздействии детерминированных возмущений. Детерминированными возмущениями, например, являются постоянные возмущения, возмущения с постоянной скоростью и с постоянным ускорением. В качестве

ошибки принимаем установившееся значение ошибки, то есть значение ошибки по окончании переходного процесса

Если известно преобразование Лапласа $E(s) = L\{e(t)\}$ для функции времени $e(t)$, то установившееся значение ошибки по теореме о конечном значении равно

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{e(t)\} = \lim_{s \rightarrow 0} \{E(s)\} \quad (14.4)$$

Запишем выражение для изображения ошибки

$$E(s) = \Phi_e(s)U(s) \quad (14.5)$$

Разложим передаточную функцию по ошибке в ряд Тейлора около нуля

$$\Phi_e(s) = \Phi_e(0) + \frac{\partial \Phi_e(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} \cdot s + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_e(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=0} \cdot s^2 + \dots$$

Обозначим

$\Phi_e(0) = c_0$ - коэффициент ошибки по положению;

$$\frac{\partial \Phi_e(s)}{\partial s} \Big|_{s=0} = c_1 \text{ - коэффициент ошибки по скорости} \quad (14.6)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Phi_e(s)}{\partial s^2} \Big|_{s=0} = c_2 \text{ - коэффициент ошибки по ускорению.}$$

Подставим полученные выражения в (14.4).

$$e_{уст} = c_0 \lim_{s \rightarrow 0} U(s) + c_1 \lim_{s \rightarrow 0} \{sU(s)\} + c_2 \lim_{s \rightarrow 0} \{s^2U(s)\}$$

Учтем, что

$$\lim_{s \rightarrow 0} U(s) = \lim_{t \rightarrow 0} u(t) = u_{уст}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \{sU(s)\} = \lim_{t \rightarrow 0} \dot{u}(t) = \dot{u}_{уст}$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \{s^2U(s)\} = \lim_{t \rightarrow 0} \ddot{u}(t) = \ddot{u}_{уст}$$

Получим

$$e_{уст} = c_0 u_{уст} + c_1 \dot{u}_{уст} + c_2 \ddot{u}_{уст} \quad (14.7)$$

Пусть коэффициент ошибки по положению C_0 равен нулю, тогда, если входной сигнал постоянен $u(t) = const$, то его производные равны нулю и установившаяся ошибка равна нулю. Система обладает астатизмом нулевого порядка.

Если дополнительно коэффициент ошибки по скорости C_1 равен нулю и у входного сигнала постоянная скорость $\dot{u}_{уст} = const$, то его производные, начиная со второй, равны нулю и установившаяся ошибка равна нулю. Система обладает астатизмом первого порядка.

Если дополнительно коэффициент ошибки по ускорению равен нулю, и у входного сигнала вторая производная постоянна, то более высокие производные равны нулю и установившаяся ошибка равна нулю. Система обладает астатизмом второго порядка.

Если все коэффициенты ошибок равны нулю, то система инвариантна к возмущениям (не реагирует на них), но это физически нереализуемо. Но чем меньше коэффициенты ошибок, тем точнее система.

Рассмотрим один из способов обнуления коэффициентов ошибок. Рассмотрим следующую структурную схему прямой цепи системы управления

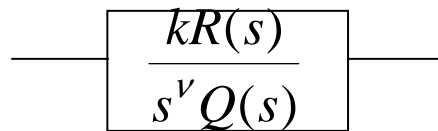


Рис 14.3.

В передаточной функции прямой цепи полиномы $R(s)$ и $Q(s)$ не имеют нулевых корней. Степень полинома в числителе не выше степени полинома в знаменателе. Передаточная функция замкнутой системы по ошибке равна

$$\Phi_e = \frac{1}{1+W(s)} = \frac{1}{1+\frac{kR}{s^\nu Q}}$$

Поскольку рассматриваются возмущения типа: постоянное, с постоянной скоростью, с постоянным ускорением, то можно рассматривать поведение передаточных функций в области низких частот. Тогда можно принять $R(s) \approx 1, Q(s) \approx 1$. Тогда

$$\Phi_e \approx \frac{1}{1+\frac{k}{s^\nu}} \approx \frac{s^\nu}{k} \quad (14.8)$$

так как в области низких частот $s \ll 1$.

Вычисляя коэффициенты ошибок по формулам (14.6) с учетом (14.8), получим

$$c_0 = \Phi_e(0) = 0$$

$$c_1 = \Phi'_e(0) = 0$$

$$c_{\nu-1} = \frac{1}{(\nu-1)!} \Phi_e^{(\nu-1)}(0) = 0$$

Следовательно, в нуль обращается столько коэффициентов ошибок, сколько полюсов в нуле имеет передаточная функция ошибки. Количество полюсов в нуле равно количеству интеграторов, включенных в прямую цепь системы. Если количество таких интеграторов равно ν , то

1. Порядок астатизма замкнутой системы равен $\nu - 1$.
2. Будут отрабатываться без ошибки возмущения, имеющие постоянные производные до $\nu - 1$ порядка включительно.
3. Наклон ЛАХ разомкнутой системы в низкочастотной части будет равен -20ν дБ/дек.
4. Следующие ненулевые коэффициенты ошибок согласно (14.8) будут уменьшаться с увеличением коэффициента усиления прямой цепи.

Таким образом, для улучшения точности целесообразно:

1. Увеличивать коэффициент усиления прямой цепи.
2. Вводить интеграторы в прямую цепь системы.

Оба способа уменьшают запасы устойчивости. Увеличение коэффициента усиления уменьшает запасы устойчивости по амплитуде, увеличивается опасность охвата точки $(-1, 0)$ годографом передаточной функции прямой цепи.

Введение интегратора в прямую цепь уменьшает запас устойчивости по фазе. Так один интегратор в прямой цепи при охвате отрицательной обратной связью образует апериодическое звено. Введение второго интегратора в прямую цепь образует колебательное звено без затухания.

15. Синтез непрерывных систем при детерминированных воздействиях

Требования к динамической непрерывной системе можно сформулировать различными способами. Один из способов заключается в том, что формулируются требования к ЛАХ прямой цепи разомкнутой системы (см. рис. 15.1)

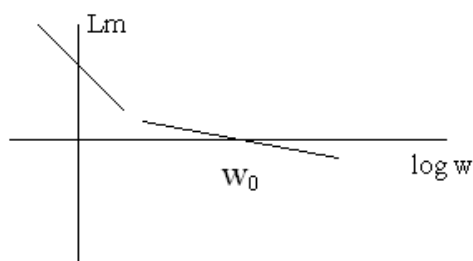


Рис. 15.1.

Наклон ЛАХ в низкочастотной области определяется требуемым астатизмом системы. Значение собственной частоты w_0 определяется требуемым быстродействием, а наклон ЛАХ в этой области должен быть равен -20дБ/дек . Кроме того фазовая характеристика должна обеспечить желаемые запасы по амплитуде и фазе.

При проектировании элементы системы и их соединение подбираются так, чтобы приблизиться к указанным требованиям. В случае, если удовлетворительного приближения добиться не удастся, в систему включаются дополнительные, так называемые корректирующие элементы.

Рассмотрим некоторые варианты включения корректирующих элементов.

1. Включение производной в прямую цепь полезно с точки зрения увеличения запасов устойчивости, так как производная уменьшает фазовый сдвиг в системе на 90 градусов. Кроме того, производная может уменьшить колебательность переходного процесса. Наклон ЛАХ в области пересечения оси частот может быть равен -20дб/дек. и переходный процесс будет почти периодическим. Если наклон ЛАХ в этой области будет меньше, то увеличить его до -20дб./дек. можно введением производной. Однако включение производной уменьшает порядок астатизма системы, так как увеличивает наклон ЛАХ и в низкочастотной области. Чтобы избежать этого недостатка производная включается в прямую цепь системы по схеме параллельного соединения как показано на рис. 15.2.

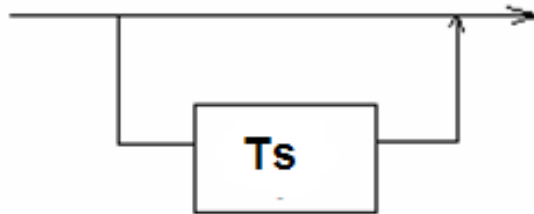


Рис. 15.2. Схема включения производной

Передаточная функция такого соединения будет равна

$$W_k = Tj\omega + 1$$

Амплитудно-фазовые характеристики этого звена показаны на рис 15.3.

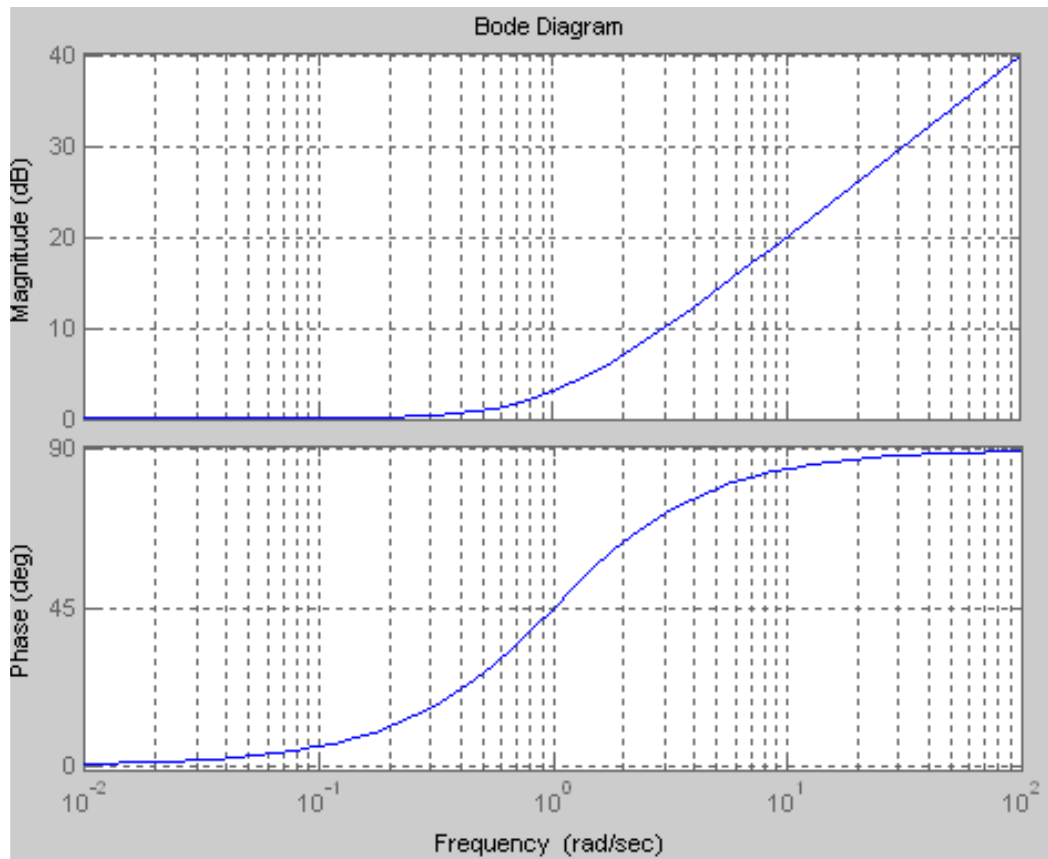


Рис. 15.3.

Очень важно, что это звено в области средних частот сохраняет все положительные качества производной: положительный фазовый сдвиг и положительный наклон ЛАХ. В области низких частот не меняется ЛАХ системы а, следовательно, не меняется порядок астатизма.

Рассмотрим пример положительного влияния такого включения производной. Пусть система уравнений углового движения нейтрального объекта с управлением по координате имеет вид

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= M * \delta \\ \delta &= a_0 \phi\end{aligned}\tag{15.1}$$

который можно преобразовать следующим образом

$$\ddot{\phi} - a_0 M \phi = 0$$

Это уравнение при $M < 0$ является уравнением колебательного звена на границе устойчивости.

Структурная схема системы показана на рис. 15.4.

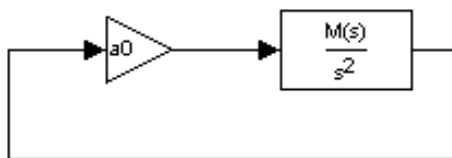


Рис. 15.4. Схема управления по положению

ЛАХ прямой цепи этой системы представляет собой прямую линию с наклоном -40дБ/дек.

Введем производную в закон управления так, как ранее было указано (см. рис. 15.5).

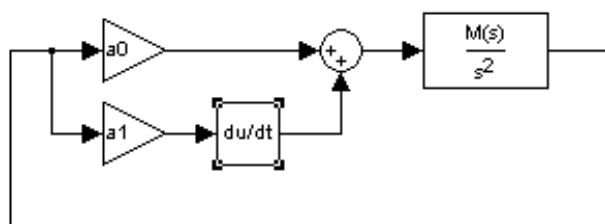


Рис. 15.5. Схема введения производной

ЛАХ прямой цепи этой системы показан на рис 15.6. Виден излом на частоте, примерно равный единице, внесенный производной. Теперь переходный процесс должен быть близок к апериодическому, что подтверждается осциллограммой, показанной на рис. 15.7.

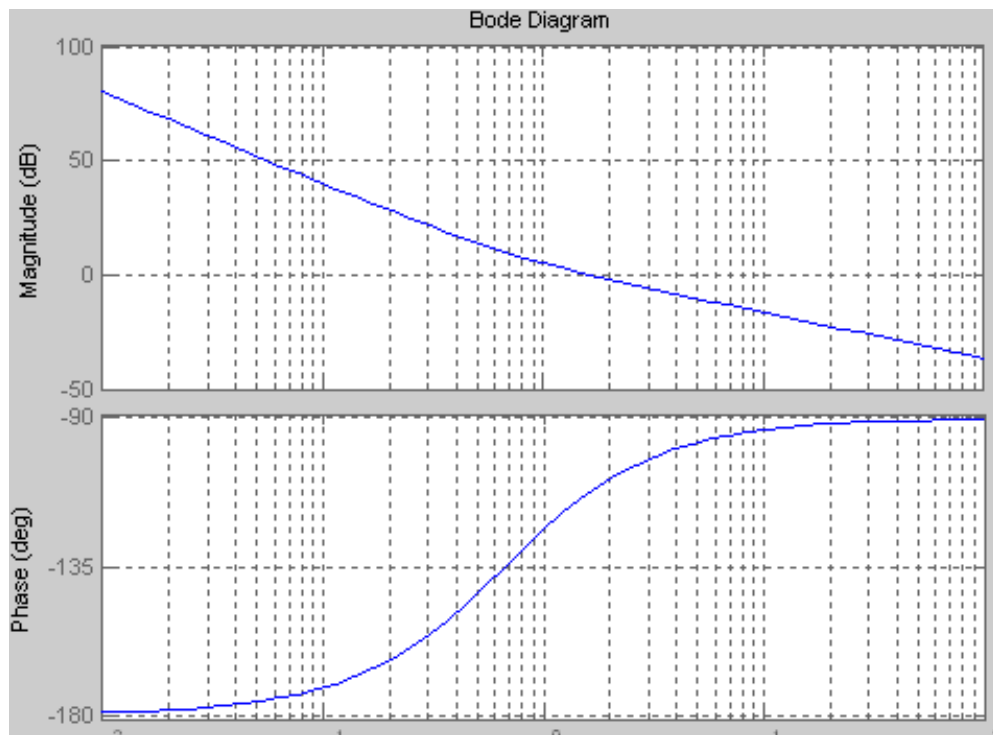


Рис 15.6...ЛАХ и фаза прямой цепи

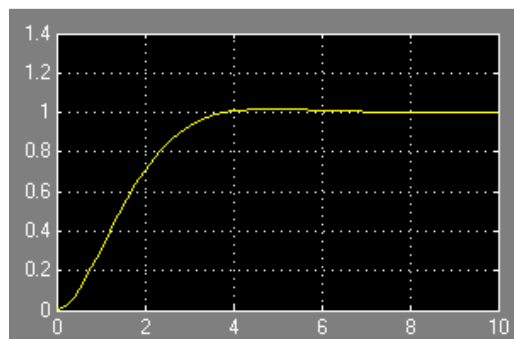


Рис. 15.7. Переходный процесс

Полученные результаты можно подтвердить, рассмотрев уравнения (15.1), где в закон управления добавлена производная

$$\begin{aligned}\ddot{\phi} &= M * \delta \\ \delta &= a_0 \phi + a_1 \dot{\phi}\end{aligned}\tag{15.2}$$

Нетрудно убедиться, что эти уравнения соответствуют структурной схеме, представленной на рис 15.5.

Уравнения (15.2) представим в виде

$$\ddot{\phi} - a_1 M \dot{\phi} - a_0 M \phi = 0 \quad (15.3)$$

При $M < 0$ уравнение (15.3) описывает колебательное звено, в котором с помощью коэффициентов a_0, a_1 можно получить любую собственную частоту и декремент затухание.

2. Включение интеграла в прямую цепь повышает порядок астатизма, но уменьшает запасы устойчивости. Наличие двух интегралов в прямой цепи как видно из рис. 15.4 ставит систему на границу устойчивости.

Поэтому интеграл включается в систему по схеме изодрома, как показано на рис. 15.8.

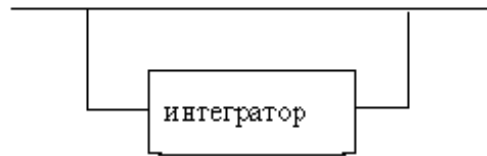


Рис. 15.8. Схема включения интегратора

Передаточная функция изодрома равна

$$W_u = 1 + \frac{k}{s} = k \frac{\frac{1}{k}s + 1}{s} \quad (15.4)$$

ЛАХ изодрома показан на рис. 15.9. Видно, что в области низких частот изодром ведет себя как интегратор: наклон ЛАХ равен -20дб/дек, фазовый сдвиг равен -90 градусов. Поэтому астатизм системы повышается на порядок. В области средних и высоких частот изодром не меняет динамики системы, так как ЛАХ изодрома равен единице, а фазовый сдвиг равен нулю. Но, обращая в нуль очередной коэффициент ошибки, изодром увеличивает последующие коэффициенты ошибок.

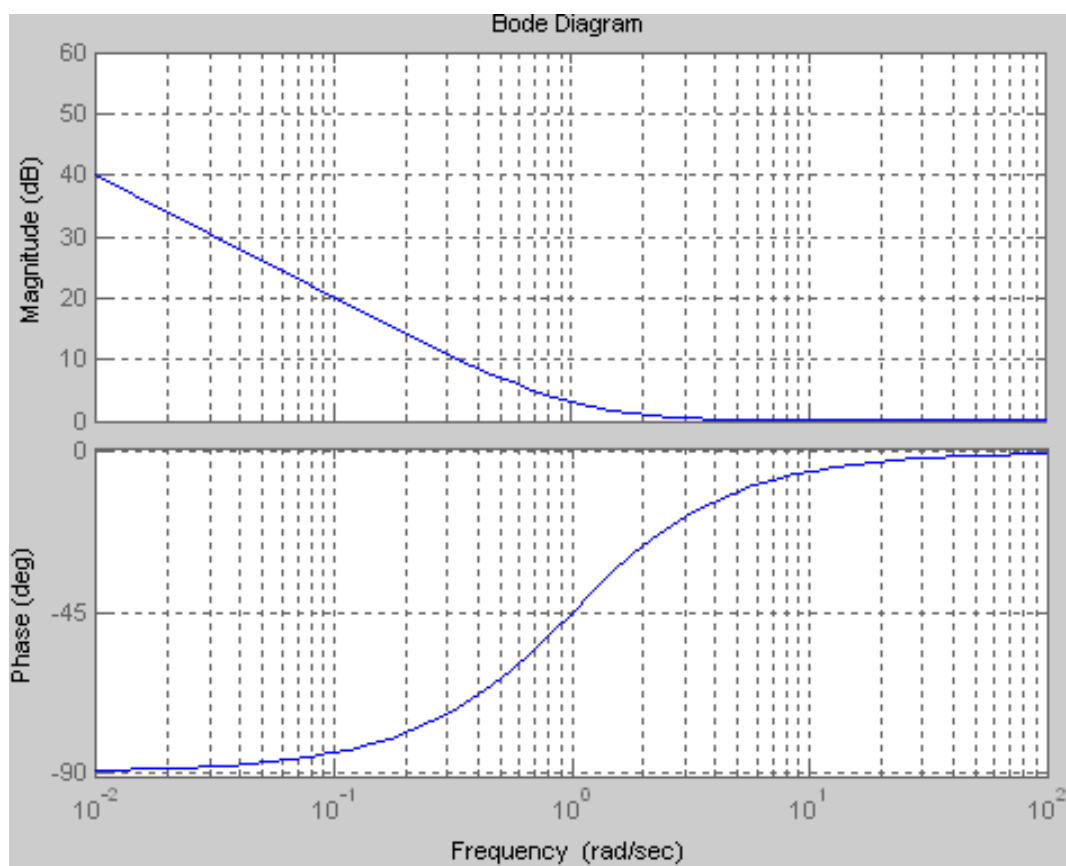


Рис. 15.9. ЛАХ и фаза изодрома

3. Покажем еще один способ коррекции. Рассмотрим схему, показанную на рис. 15.10.

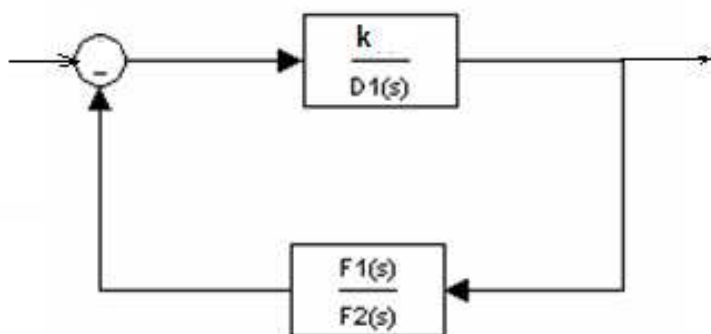


Рис. 15.10.

ления. Схема показывает звено, охваченное отрицательной обратной связью. Запишем передаточную функцию этой схемы

$$W = \frac{\frac{k}{D1(s)}}{1 + \frac{k}{D1(s)} \frac{F1(s)}{F2(s)}} = \frac{kF2(s)}{D1(s)F2(s) + kF1(s)}$$

Если сделать коэффициент усиления прямой цепи ***k*** очень большим, получим

$$W = \frac{F2(s)}{F1(s)}$$

Передаточная функция звена при большом коэффициенте усиления прямой цепи обратна передаточной функции в цепи обратной связи. Если, например, в обратной связи стоит интегратор, звено будет играть роль производной.

16. ПИД – регулятор

ПИД – регулятором называется такой элемент системы управления, в котором реализовано управление объектом по координате, по производной и по интегралу. Схема соединения сигналов управления показана на рис 16.1.

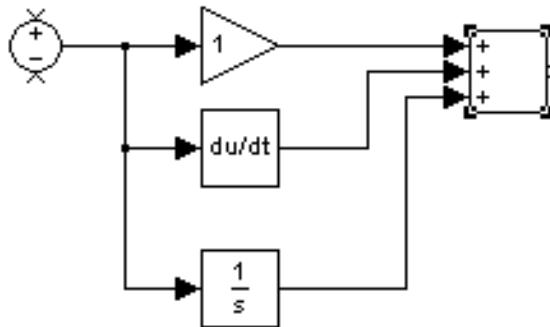


Рис. 16.1. ПИД - регулятор

Все сигналы как было показано в предыдущем разделе, соединены параллельно. При таком соединении введение производной не уменьшает порядка астатизма системы. Уменьшение запасов устойчивости от введения интеграла сведено к минимуму.

17. Весовая функция

По определению весовой функцией системы называется переходный процесс в системе, когда на вход системы при нулевых начальных условиях подана дельта-функция (см. рис. 17.1)

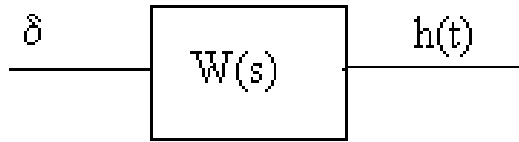


Рис. 17.1. Определение весовой функции

Здесь

$W(s)$ - передаточная функция системы,

$\delta(t)$ - дельта-функция,

$h(t)$ - весовая функция.

Напомним свойства дельта-функции.

1. Дельта- функция равна бесконечности, когда её аргумент равен нулю. В остальные моменты времени дельта-функция равна нулю.

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 0 \\ 0 & \text{при } t \neq 0 \end{cases} \quad (17.1)$$

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = t_0 \\ 0 & \text{при } t \neq t_0 \end{cases} \quad (17.2)$$

2. Интеграл от дельта-функции в бесконечных пределах равен единице

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (17.3)$$

Предыдущие свойства можно пояснить тем, что некоторой моделью дельта-функции является производная от единичной функции $1(t)$, равной нулю при отрицательном времени и равной единице при $t \geq 0$.

$$3. \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (17.4)$$

Это следует из того, что подынтегральное выражение не равно нулю только при $t = t_0$. Для этого момента времени постоянное значение $f(t_0)$ можно вынести за знак интеграла, а интеграл от дельта-функции в силу (17.2) равен единице.

Найдем спектр дельта-функции как прямое преобразование Фурье

$$\Delta(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t} \big|_{t=0} = 1 \quad (17.5)$$

Спектр дельта-функции постоянен в бесконечной полосе частот. Для разложения дельта-функции в гармонический ряд нужны все гармоники одинаковой амплитуды.

Найдем спектр выхода системы, когда входом является дельта-функция, то есть спектр весовой функции $H(j\omega)$. Спектр выхода равен произведению передаточной функции на спектр входа

$$H(j\omega) = W(j\omega) \Delta(j\omega)$$

Тогда, согласно (17.5), получим

$$H(j\omega) = W(j\omega) \quad (17.6)$$

Спектр весовой функции равен передаточной функции системы. То есть преобразование Фурье от весовой функции равно передаточной функции, следовательно, обратное преобразование Фурье от передаточной функции равно весовой функции

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (17.7)$$

а передаточная функция как указывалось, есть прямое преобразование Фурье от весовой функции

$$W(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt \quad (17.8)$$

Весовая и передаточная функции однозначно связаны между собой прямым и обратным преобразованиями Фурье. Поэтому весовая функция, как и передаточная может использоваться для характеристики системы. Из физических соображений следует, что весовая функция как переходный процесс должна быть равна нулю при отрицательном времени. Переходный процесс не может начинаться раньше действия возмущения. Однако это надо доказать, так как иногда требуется доказательство устойчивости по виду аналитического выражения весовой функции.

Докажем, что для устойчивой системы весовая функция

$$h(t) = 0 \text{ при } t < 0$$

и, наоборот, если

$$h(t) = 0 \text{ при } t < 0$$

система устойчива.

Если же

$$h(t) \neq 0 \text{ при } t < 0$$

система неустойчива.

Рассмотрим выражение (17.7)

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (17.9)$$

Интегрирование ведется по вещественной оси в комплексной плоскости ω .

При $t > 0$ можно, не изменяя величины интеграла, дополнить путь интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса, лежащей в верхней полуплоскости как показано на рис. 17.1. Действительно, на полуокружности подынтегральное выражение равно нулю. Рассмотрим этот вопрос. Передаточная функция при бесконечно большой частоте равна нулю, так как у физически реализуемых систем степень числителя меньше степени знаменателя. Передаточная функция обращается в бесконечность только в особых точках – полюсах. Полюс здесь это ко

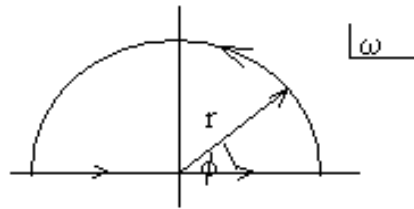


Рис. 17.1.

рень характеристического уравнения, который для устойчивой системы лежит в верхней полуплоскости, но не в бесконечности. Рассмотрим второй множитель подынтегрального выражения $e^{j\omega t}$. Комплексный аргумент - ω на полуокружности представим в виде

$$\omega = re^{j\phi} = r(\cos \phi + j \sin \phi)$$

где $\pi \geq \phi \geq 0$, так как обход по полуокружности идет в положительном направлении, против часовой стрелки. Тогда

$$e^{j\omega t} = e^{jrt(\cos \phi + j \sin \phi)} = e^{-rt \sin \phi} e^{jrt \cos \phi} \quad (17.10)$$

При $r \rightarrow \infty, t > 0$ модуль рассматриваемого выражения

$$|e^{j\omega t}| = e^{-rt \sin \phi} \rightarrow 0$$

Таким образом, оба множителя подынтегрального выражения на полуокружности равны нулю, величина интеграла от увеличения пути интегрирования не изменилась и мы вместо (17.9) можем записать интеграл по замкнутому контуру

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \oint W(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (17.11)$$

По теореме вычетов интеграл по замкнутому контуру равен

$$\oint = 2\pi j \sum \text{вычетов}$$

так как здесь обход контура идет в положительном направлении, против часовой стрелки.

Вычет функции это определенное её преобразование в особой точке, где функция обращается в бесконечность, то есть в полюсе. Если есть функция

$$f(\omega) = \frac{\varphi(\omega)}{\psi(\omega)}$$

Полюса этой функции это корни полинома $\psi(\omega)$. Пусть полюса ω_k простые. Тогда вычеты равны

$$\text{Выч } f(\omega) |_{\omega=\omega_k} = \frac{\varphi(\omega_k)}{\psi'(\omega_k)}$$

Мы не будем вычислять интеграл (17.11). Важно, что полюса у передаточной функции $W(j\omega)$ есть, и они как корни характеристического уравнения устойчивой системы расположены все в верхней полуплоскости. Следовательно, $\oint \neq 0$.

Отсюда следует, что

$$h(t) \neq 0 \text{ при } t > 0$$

Пусть теперь время отрицательно $t < 0$. В этом случае путь интегрирования в (17.7) следует дополнить полуокружностью бесконечно большого радиуса в отрицательном направлении, по часовой стрелке. Тогда на полуокружности передаточная функция стремится к нулю, а модуль выражения (17.10) при

$$r \rightarrow \infty, t < 0, \sin \phi < 0$$

стремится к нулю. Интеграл по замкнутому контуру с обходом контура в отрицательном направлении равен

$$\oint = -2\pi j \sum \text{выч}$$

Но вычетов в нижней полуплоскости нет, так как для устойчивой системы нет полюсов передаточной функции в нижней полуплоскости. Следовательно, для устойчивой системы

$$h(t) = 0 \text{ при } t < 0$$

Если система неустойчива, то в нижней полуплоскости есть полюса передаточной функции и

$$h(t) \neq 0 \text{ при } t < 0$$

это противоречит условиям физической осуществимости. Переходный процесс начинается раньше возмущения. Поэтому для неустойчивой системы и передаточная функция, и весовая функция определены только формально.

Вычисление весовой функции последовательного соединения можно провести следующим образом. Передаточная функция последовательного соединения двух звеньев равна произведению передаточных функций этих звеньев. Весовая функция есть обратное преобразование Фурье от передаточной функции. Поэтому весовая функция двух последовательно соединенных звеньев равна свертке весовых функций этих звеньев.

Заметим, что в MATLAB функция `conv` вычисляет свертку только двух функций, поэтому при количестве звеньев более двух необходимо использовать вложенные операции свертки.

18. Определение переходного процесса с помощью весовой функции

Рассмотрим произвольный входной сигнал $f(t)$. Пусть необходимо определить значение выхода системы X в некоторый момент времени t . В произвольный момент времени $0 < \tau_i < t$ выделим во входном сигнале бесконечно узкий импульс шириной Δt с амплитудой, равной $f(\tau_i)\Delta t\delta(t - \tau_i)$. Переходный процесс от дельта-функции равен весовой функции. Если дельта-функция подана в момент времени τ_i , то значение переходного процесса от дельта-функции в момент времени t будет равно $h(t - \tau_i)$. Значение переходного процесса от всего выделенного входного импульса равно

$$dx_{f(\tau_i)} = h(t - \tau_i)f(\tau_i)\Delta t$$

Весь переходный процесс можно определить как сумму переходных процессов от каждого импульса, так как система линейна

$$x(t) = \sum h(t - \tau_i)f(\tau_i)\Delta t$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ переходим от суммирования к интегрированию. Получим

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) f(\tau) d\tau \quad (18.1)$$

Здесь

t - момент времени, для которого рассматривается переходный процесс,

τ - время, отсчитываемое для входного сигнала.

Переменную τ необходимо брать в пределах от $-\infty$ до t , так как нельзя учитывать входное воздействие, которого ещё не было. Следовательно

$$x(t) = \int_{-\infty}^t h(t - \tau) f(\tau) d\tau$$

Сделаем замену переменных $t - \tau = \lambda$, тогда $d\tau = -d\lambda$. Вычисляем новые пределы. При $\tau = -\infty$, нижний предел равен $\lambda = \infty$. При $\tau = t$ верхний предел равен $\lambda = 0$. Тогда

$$x(t) = - \int_{\infty}^0 h(\lambda) f(t - \lambda) d\lambda = \int_0^{\infty} f(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (18.2)$$

В последнем интеграле просто сменены обозначения.

Выражение (18.2) называется сверткой. В пакете MATLAB операцию свертки выполняет функция $conv(h, f)$. Подробнее операция свертки будет рассмотрена в разделе «Импульсные системы». Здесь заметим, что спектр выхода системы равен произведению спектра входа и передаточной функции

$$X(j\omega) = W(j\omega)F(j\omega) \quad (18.3)$$

а их обратные преобразования Фурье соединены операцией свертки (18.2). Это верно как для преобразований Фурье, так и для преобразований Лапласа и Z — преобразований.

Рассмотрим обратное положение. Пусть есть произведение сигналов

$$a(t) = b(t)c(t)$$

Вычислим спектр произведения

$$\begin{aligned}
A(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} b(t)c(t)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(j\omega_1)e^{j\omega_1 t} d\omega_1 \right] c(t)e^{-j\omega t} dt = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(j\omega) \int_{-\infty}^{\infty} c(t)e^{-j(\omega-\omega_1)t} dt d\omega_1 = \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(j\omega)C[j(\omega-\omega_1)]d\omega_1
\end{aligned} \tag{18.4}$$

Мы получили, что спектр произведения равен свертке спектров. Это свойство будет использовано в дальнейшем.

Часть 2. Импульсные сигналы и системы

19. Понятия об импульсных системах

Импульсными системами будем называть такие системы, в которых сигнал во всей системе или в отдельных её звеньях существует только в дискретные моменты времени. Если в непрерывной системе сигнал есть непрерывная функция времени (Рис.19.1), то в импульсной системе сигнал во всей системе или в отдельных её элементах имеет вид импульсов (Рис 19.2.).

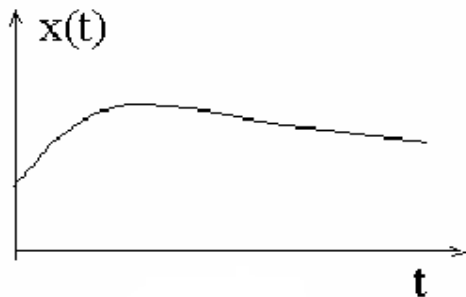


Рис.19.1 Непрерывный сигнал

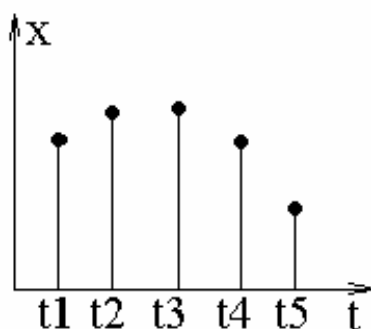


Рис. 19.2. Импульсный сигнал

Необходимость анализа импульсных систем возникает по следующим причинам.

1. В системе в силу её функциональных свойств некоторая информация может быть получена только в дискретные моменты времени. Например, диспетчер, наблюдающий несколько объектов, может "обзванивать" их и получать информацию только в дискретные моменты времени.

Некоторые системы радионавигации для обеспечения скрытности включаются и выдают целеуказание только в короткие промежутки времени.

Многоканальная система телеметрии, чтобы передать информацию от нескольких источников по одному каналу связи, квантует непрерывный сигнал каждого источника по времени с некоторым периодом Δt . Таким образом непрерывный сигнал каждого источника превращается в дискретный сигнал. Очевидна роль интервала дискретизации Δt в точности передачи сигналов. Такие квантователи - ключи могут присутствовать в системе также тогда, когда надо преобразовать непрерывный сигнал в дискретный для ввода сигнала в элементы цифровой техники.

2. Вторая причина появления импульсных сигналов - цифровая техника, сигналы в которой в принципе дискретны как по времени из-за конечного такта обработки одного цикла информации, так и по уровню из-за конечного числа разрядов.

3. Третья причина - это преимущество в некоторых случаях дискретных систем над непрерывными. Дискретные или разностные вычислительные схемы более просты и более быстродействующие чем непрерывные интегро-дифференциальные. Поэтому часто непрерывную систему при вычислениях аппроксимируют дискретной схемой.

Рассматриваем импульсные системы с постоянным интервалом квантования по времени τ . Тогда импульсный сигнал существует в моменты времени

$$t = n\tau \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (19.1)$$

Поэтому часто сигнал рассматривается не как функция времени, а как функция целочисленного аргумента n , имея в виду, что интервал времени между отсчетами равен τ . Оба аргумента далее для импульсных систем равнозначны.

Очевидно, что если импульсный сигнал $x[n]$ образован дискретизацией непрерывного сигнала $x(t)$, можно записать для одного i -го импульса

$$x[i] = x(t)\delta(t - i\tau) \quad (19.2)$$

а импульсный сигнал $x[n]$ равен

$$\begin{aligned} x^*[n] &= x(t)\delta(t) + x(t)\delta(t - \tau) + x(t)\delta(t - 2\tau) + \dots = \\ &= x(0)\delta(t - 0\tau) + x(\tau)\delta(t - \tau) + x(2\tau)\delta(t - 2\tau) + \dots = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} x(i\tau)\delta(t - i\tau) \end{aligned} \quad (19.3)$$

Здесь и далее предполагается

$$\delta(t) = 1 \text{ при } t=0, \quad \delta(t) = 0 \text{ при } t \neq 0 \quad (19.4)$$

то есть предполагается, что амплитуда импульса равна его интегральному значению, выбранному из условия эквивалентности "импульса силы". В некоторых случаях звездочкой помечаются импульсные сигналы и их характеристики.

20. Разностные уравнения. Импульсная характеристика

Разностные уравнения можно получить, например, из дифференциальных уравнений. Пусть имеется уравнение апериодического звена

$$T\dot{x} + x = u \quad (20.1)$$

и рассматривается состояние этого звена в дискретные моменты времени $t = n\tau$, где τ малая величина. Тогда производная может быть заменена прямой разностью

$$\dot{x} \cong \Delta[n] = x[n+1] - x[n] \quad (20.2)$$

или обратной разностью (Рис. 20.1).

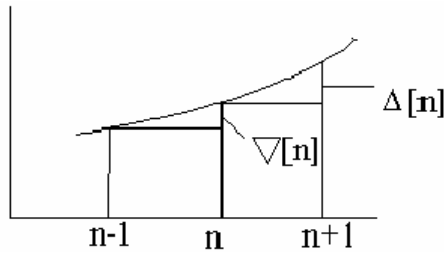


Рис.20.1. Прямые и обратные разности

$$\dot{x} \cong \nabla[n] = x[n] - x[n-1] \quad (20.3)$$

Подставляем (20.2) в уравнение (20.1), получим

$$\frac{\tau}{T} (x[n+1] - x[n]) + x[n] = u[n]$$

или

$$x[n+1] = \frac{\tau}{T} u[n] - (1 - \frac{\tau}{T}) x[n] \quad (20.4)$$

Это разностное уравнение, связывающее значения процесса в разные дискретные моменты времени. Уравнение позволяет при известном начальном условии $x[0]$ и заданной зависимости входа $u[n]$ итерационно для $n=0,1,2,\dots$ вычислить значения процесса в любые моменты времени.

Если преобразуется дифференциальное уравнение более высокого порядка, вводятся вторые разности

$$\Delta^2[n] = \Delta[n+1] - \Delta[n] = x[n+2] - 2x[n+1] + x[n]$$

и разности более высоких порядков.

Однако в действительности переход к разностным уравнениям от дифференциальных производится, как будет показано ниже, другим способом.

Итак, в общем виде разностное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_m x[n+m] + \alpha_{m-1} x[n+m-1] + \dots + \alpha_1 x[n+1] + \alpha_0 x[n] = \\ = \beta_k u[n+k] + \beta_{k-1} u[n+k-1] + \dots + \beta_1 u[n+1] + \beta_0 u[n] \end{aligned} \quad (20.5)$$

Это уравнение описывает некоторый дискретный объект, связывая значения входа и выхода объекта в дискретные моменты времени, и позволяет организовать рекуррентный процесс вычисления координат, который намного быстрее процесса численного интегрирования.

Например, дано разностное уравнение

$$x[n+1] = 0.5x[n] + 1$$

Начальные условия $x[0] = 0$

Последовательное вычисление даст следующие значения

$$x[1]=1$$

$$x[2]=0.5+1=1.5$$

$$x[3]=0.75+1=1.75$$

$$x[4]=0.875+1=1.875$$

Определим установившееся значение

$$x[\infty]=0.5x[\infty]+1$$

$$\text{Отсюда } x[\infty]=2$$

В некоторых случаях разностное уравнение имеет аналитическое решение. Запроектируем решение однородного ($u=0$) разностного уравнения (20.5) в виде

$$x^0[n] = Cz^n \quad (20.6)$$

Подставляя (20.6) в однородное уравнение (20.5), получим

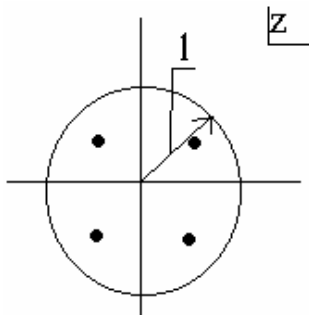
$$Cz^n (\alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0) = 0$$

Очевидно, что z должно удовлетворять уравнению

$$\alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \dots + \alpha_1 z + \alpha_0 = 0, \quad (20.7)$$

которое называется характеристическим уравнением. Все его корни z_i ($i = 1, 2, \dots, m$) должны быть учтены в (20.6), а полное решение однородного разностного уравнения равно

$$x^0[n] = \sum_{i=1}^m C_i z_i^n \quad (20.8)$$



Чтобы решение (20.8) было устойчивым, необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения были по модулю меньше единицы, то есть на комплексной плоскости z лежали внутри круга единичного радиуса (Рис.20.2).

Рис. 20.2. Корни характеристического уравнения

Также как и для непрерывных систем вводилась весовая функция, так и для импульсных систем введем понятие импульсной характеристики. Импульсной характеристикой $k^*[n]$ будем называть выход импульсной системы, когда на её вход подана δ - функция.

Например, пусть разностное уравнение имеет вид

$$x[n+1] = a_0 x[n] + u[n+1] \quad (20.9)$$

Полагая $u[n] = \delta[n]$, получим разностное уравнение для определения импульсной характеристики

$$k^*[n+1] = a_0 k^*[n] + \delta[n+1]$$

При $n = -1$ получаем соотношение, которое позволяет заменить действие дельта - функции начальным условием

$$k^*[0] = \delta(0) = 1, \quad (20.9.a)$$

т. к. импульсная характеристика для отрицательного аргумента равна нулю. Следовательно, надо найти решение уравнения

$$k^*[n+1] - a_0 k^*[n] = 0 \quad (20.9.б)$$

Характеристическое уравнение будет

$$z - a_0 = 0$$

Единственный корень равен

$$z = a_0$$

Решение в соответствии с (20.8) будет равно

$$k^*[n] = C a_0^n$$

Учитывая начальные условия, получим импульсную характеристику в виде экспоненты

$$k^*[n] = a_0^n \quad (20.10)$$

Очевидно, что требования устойчивости выполняются при $a_0 < 1$.

Тот же результат получим при рекурсивном вычислении (20.9.б) при начальном условии (20.9.a)

$$k^*[0] = 1$$

$$k^*[1] = a_0$$

$$k^*[2] = a_0^2$$

и т. д.

Покажем, как с помощью импульсной характеристики определять переходный процесс при произвольном воздействии. Пусть имеются отсчеты входного воздействия $u[n]$ (См. рис. 20.3).

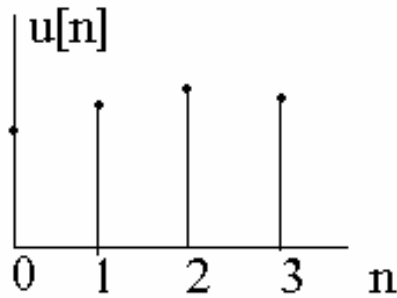


Рис. 20.3. Входное воздействие

Представим

$$u[i] = u[i] \delta(t - i\tau)$$

Переходный процесс от дельта-функции $\delta(t - i\tau)$ есть импульсная характеристика $k^*[n - i]$, где $n \geq i$, т.к. импульсная характеристика для отрицательного аргумента равна нулю. Переходный процесс от импульса $u[i]$ будет равен

$$x_i[n] = u[i] k^*[n - i]$$

Переходный процесс от всего воздействия $u[n]$ будет равен сумме переходных процессов от каждого импульса, который имел место до текущего момента времени

$$x[n] = \sum_{i=0}^n x_i[n] = \sum_{i=0}^n u[i] k^*[n - i] \quad (20.11)$$

Сделаем замену переменных

$$n - i = m$$

Тогда при $i=0$ имеем $m=n$; при $i=n$ имеем $m=0$

$$x[n] = \sum_{m=n}^0 k^*[m] u[n - m] = \sum_{m=0}^n k^*[m] u[n - m] \quad (20.12)$$

т. к. суммирование можно проводить в любом порядке.

Получена формула свертки для импульсных систем.

21. Z – преобразование

Аппарат Z - преобразований широко используется для исследования импульсных систем. Для непрерывных систем используется преобразование Лапласа. Покажем, что Z - преобразования являются распространением преобразования Лапласа на дискретное пространство.

Импульсный сигнал может быть представлен в виде

$$f[n] = \sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - n\tau)$$

Найдем преобразование Лапласа от этого выражения

$$L\{f[n]\} = \int_0^{\infty} f[n] e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(t) \delta(t - n\tau) \right) e^{-pt} dt$$

Учитывая свойства интеграла от дельта-функции, получим

$$L\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n\tau] e^{-pn\tau} \quad (21.1)$$

Это точное выражение преобразования Лапласа для импульсной функции. Проведем замену

$$e^{-p\tau} = z \quad (21.2)$$

Z - преобразованием от импульсной функции по определению является

$$Z\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n} \quad (21.3)$$

Таким образом Z -преобразование это преобразование Лапласа импульсной функции, в котором сделана подстановка (21.2).

Найдем для примера Z - преобразование функции $f(t) = e^{-\alpha t}$.

Соответствующая дискретная функция $f[n] = e^{-\alpha n\tau}$. Её Z - преобразование равно

$$Z\{e^{-\alpha n \tau}\} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\alpha n \tau} z^{-n} = 1 + e^{-\alpha \tau} z^{-1} + e^{-2\alpha \tau} z^{-2} + \dots$$

Это сумма геометрической прогрессии с множителем

$$q = e^{-\alpha \tau} z^{-1}$$

Сумма равна

$$S = a_0 \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{e^{-\alpha n \tau} z^{-n} - 1}{e^{-\alpha \tau} z^{-1} - 1}$$

При $n \rightarrow \infty$, учитывая, что из условий устойчивости $|z| < 1$, $q \rightarrow 0$. Тогда

$$F(z) = Z\{e^{-\alpha n \tau}\} = \frac{1}{1 - e^{-\alpha \tau} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-\alpha \tau}} \quad (21.4)$$

Таблицы Z - преобразований для некоторых функций приведены в рекомендуемых пособиях.

Некоторые важные свойства Z - преобразований

1. Теорема о начальном значении функции.

Запишем

$$F(z) = Z\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] z^{-n} = f[0] + f[1] z^{-1} + f[2] z^{-2} + \dots$$

В пределе при $z \rightarrow \infty$ получим

$$f[0] = \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) \quad (21.5)$$

2. Теорема о конечном значении функции (приведена без доказательства).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} (z - 1) F(z)$$

или равноценно (Бессекерский и Попов Е. П. Стр. 447)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f[n] = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z - 1}{z} F(z)$$

3. Теорема о сдвиге аргумента

Пусть известно Z - преобразование $F(z)$ функции $f[n]$. Необходимо найти Z -преобразование для функции $f[n + m]$. Найдем

$$\begin{aligned}
Z\{f[n+m]\} &= \sum_{n=0}^{\infty} f[n+m]z^{-n} = \\
&= \sum_{n=-m}^{\infty} f[n+m]z^{-(n+m)}z^m - \sum_{n=-m}^{n=-1} f[n+m]z^{-(n+m)}z^m
\end{aligned}$$

Во второй сумме вычли добавленные в первой сумме слагаемые. Продолжаем преобразования.

$$\begin{aligned}
Z\{f[n+m]\} &= \\
&= z^m F(z) - z^m \{f[0] + f[1]z^{-1} + \dots + f[m-1]z^{-(m-1)}\} \quad (21.6)
\end{aligned}$$

Значения $f[0], f[1], \dots, f[m-1]$ представляют собой начальные значения функции $f[n]$ которые необходимо знать, чтобы начать итерационный процесс вычисления. Если начальные условия нулевые, сдвиг аргумента изменит изображение следующим образом

$$Z[f[n+m]] = z^m F(z) \quad (21.7)$$

Если начальные условия ненулевые, их надо учитывать, как указано в (21.6).

22. Устойчивость импульсных систем по Гурвицу

Разностное уравнение импульсной системы имеет вид (20.5)

$$\begin{aligned}
\alpha_m x[n+m] + \alpha_{m-1} x[n+m-1] + \dots + \alpha_1 x[n+1] + \alpha_0 x[n] = \\
\beta_k u[n+k] + \beta_{k-1} u[n+k-1] + \dots + \beta_1 u[n+1] + \beta_0 u[n] \quad (22.1)
\end{aligned}$$

Запишем характеристическое уравнение системы (20.7)

$$\alpha_m z^m + \alpha_{m-1} z^{m-1} + \dots + \alpha_1 z^1 + \alpha_0 = 0 \quad (22.2)$$

Так как корни этого уравнения образуют решение однородного уравнения

$$x[n] = \sum_{i=1}^m C_i z_i^n$$

то корни характеристического уравнения по модулю должны быть меньше единицы, то есть лежать внутри окружности единичного радиуса (Рис 22.1)

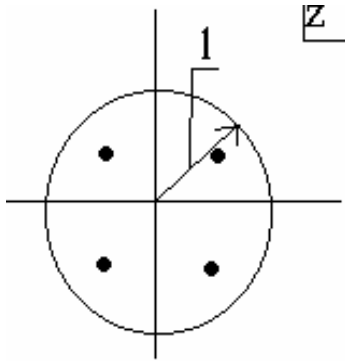


Рис. 22.1. Расположение корней
импульсной системы

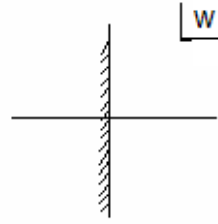


Рис. 22.2. Расположение корней
непрерывной системы

Нам известны критерии Гурвица для непрерывных систем, которые определяют условия, при которых корни характеристического уравнения лежат левее мнимой оси (Рис. 22.2). Поэтому, чтобы использовать эти критерии Гурвица, применим w преобразование координат, которое переводит на комплексной плоскости круг единичного радиуса в мнимую ось

$$w = \frac{z-1}{z+1} \quad (22.3)$$

Обратное w - преобразование проводится с помощью подстановки

$$z = \frac{1+w}{1-w} \quad (22.4)$$

Проверим, как преобразует некоторые точки пространства преобразование (22.3).

Точка окружности $Z=-1$ переходит в точку мнимой оси $W=-\infty$

Точка окружности $Z=j$ переходит в точку мнимой оси $W=j$

Точка окружности $Z=1$ переходит в точку мнимой оси $W=0$

Центр окружности $Z=0$ переходит в точку левой полуплоскости $W=-1$. то есть внутренность единичного круга переходит в левую полуплоскость.

Следовательно, если сделать подстановку (22.4) в характеристическое уравнение (22.3)

$$\alpha_m \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^m + \alpha_{m-1} \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^{m-1} + \dots + \alpha_1 \frac{1+w}{1-w} + \alpha_0 = 0 \quad (22.5)$$

то, выполняя условия Гурвица для уравнения (22.5), мы обеспечиваем, что корни уравнения (22.5) будут лежать слева от мнимой оси а корни характеристического уравнения (22.2) будут лежать внутри круга единичного радиуса.

Пример. Рассмотрим характеристическое уравнение второго порядка

$$a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$$

Сделаем подстановку $z = \frac{1+w}{1-w}$. Получим

$$a_2 \left(\frac{1+w}{1-w} \right)^2 + a_1 \frac{1+w}{1-w} + a_0 = 0$$

или

$$a_2 (1+w)^2 + a_1 (1+w)(1-w) + a_0 (1-w)^2 = 0$$

$$a_2 (1+w+w^2) + a_1 (1-w^2) + a_0 (1-w+w^2) = 0$$

$$(a_2 - a_1 + a_0)w^2 + 2(a_2 - a_0)w + a_2 + a_1 + a_0 = 0$$

Критерии устойчивости Гурвица для уравнения второго порядка сводится к положительности коэффициентов

$$a_2 - a_1 + a_0 > 0$$

$$a_2 - a_0 > 0$$

$$a_2 + a_1 + a_0 > 0$$

Область устойчивости в плоскости коэффициентов a_1 и a_0 при $a_2 = 1$ показана на рис. 22.3

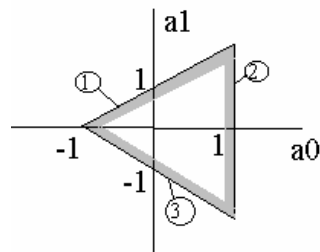


Рис. 22.3. Область устойчивости импульсной системы второго порядка

Таким образом, в отличие от непрерывных систем, здесь система может быть устойчива и при отрицательных коэффициентах характеристического уравнения.

Например, системы, описываемые следующими разностными уравнениями, будут устойчивы:

$$x[n+2] - 0.25x[n+1] - 0.25x[n] = 0$$

$$x[n+1] = u[n]$$

23. Спектр импульсного сигнала

Спектром непрерывного сигнала является преобразование Фурье от этого сигнала. Аналогично, спектром импульсного сигнала будет также преобразование Фурье от импульсного сигнала.

Считаем, что известно $F(z)$ - Z - преобразование импульсного сигнала $f^*[n]$, которое в свою очередь может быть получено из преобразования Лапласа этого $F(p)$ сигнала путем подстановки (21.2)

$$e^{p\tau} = z \quad (23.1)$$

То есть связь между Z - преобразованием и преобразованием Лапласа $F(p)$ имеет вид

$$F(p)|_{e^{p\tau}=z} = F(z) \quad (23.2)$$

Для непрерывного сигнала преобразование Фурье, которое равно

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (23.3)$$

и преобразование Лапласа, равное

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt \quad (23.4)$$

формально связаны заменой

$$p = j\omega$$

$$\text{То есть } F(j\omega) = F(p)|_{p=j\omega} \quad (23.5)$$

Следовательно, спектр (преобразование Фурье) дискретного сигнала $F^*(j\omega)$ может быть получен из Z - преобразования дискретного сигнала заменой

$$z = e^{j\omega\tau} \quad (23.5a)$$

Или

$$F^*(j\omega) = F(z)|_{z=e^{j\omega\tau}} \quad (23.6)$$

Z - преобразование дискретного сигнала равно

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f^*[n]z^{-n} \quad (23.7)$$

Тогда спектр дискретного сигнала равен

$$F^*(j\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} f^*[n]e^{-j\omega n\tau} \quad (23.8)$$

Так определяется спектр дискретного сигнала в общем случае. Определим некоторые свойства спектра.

Преобразуем представление дискретного сигнала (20.4)

$$f^*[n] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n\tau)\delta(t-n\tau) = f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n\tau) \quad (23.9)$$

Действительно, для каждого слагаемого (23.9) значение, отличное от нуля, существует только в точке $t=i\tau$.

$$f(t)\delta(t-i\tau) = f[i\tau]\delta(t-i\tau)$$

Пусть у непрерывной функции $f(t)$ спектр равен $F_H(j\omega)$, а у дискретной функции

$$h(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t-n\tau) \quad (23.10)$$

спектр равен $H(j\omega)$.

Тогда по теореме свертки спектр произведения (23.9) равен

$$F^*(j\omega) = \int_0^{\infty} F_H[j(\omega-\nu)]H(j\nu)d\nu \quad (23.11)$$

Найдем спектр $H(j\omega)$. Функция $h(t)$ — периодическая — это последовательность единичных импульсов с периодом τ . Следовательно, спектр $H(j\omega)$ дискретный. Функция $h(t)$ разлагается в дискретный гармонический ряд

$$h(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j \frac{2k\pi}{\tau} t}$$

Период здесь равен не $2T$, а τ , поэтому в показателе степени появилась двойка.

Здесь коэффициенты гармоник равны

$$c_k = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} h(t) e^{-j \frac{2k\pi}{\tau} t} dt = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - n\tau) e^{-j \frac{2k\pi}{\tau} t} dt$$

Под знаком суммы оставляем только первое слагаемое, т. к. остальные импульсы находятся вне пределов интегрирования $0.. \tau$. Следовательно,

$$c_k = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} \delta(t) e^{-j \frac{2k\pi}{\tau} t} dt = \frac{1}{\tau} \quad (23.12)$$

Амплитуды всех гармоник одинаковы. Следовательно, спектр $H(j\omega)$ представляет собой импульсы с амплитудой $\frac{1}{\tau}$, отстоящие по частоте на интервал $\frac{2\pi}{\tau}$ (рис. 23.1).

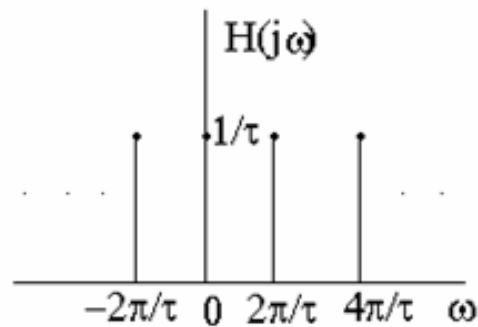


Рис. 23.1. Спектр дельта-функции

Тогда можно записать

$$H(j\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \delta\left(\omega - n \frac{2\pi}{\tau}\right) \quad (5.13)$$

Подставляем в (23.11)

$$\begin{aligned}
 F^*(j\omega) &= \int_0^\infty F_H[j(\omega - \nu)] \frac{1}{\tau} \sum_{n=0}^\infty \delta(\nu - n \frac{2\pi}{\tau}) d\nu = \\
 &= \frac{1}{\tau} \sum_{m=-\infty}^\infty \int_0^\infty F_H[j(\omega - \nu)] \delta(\nu - n \frac{2\pi}{\tau}) d\nu
 \end{aligned}$$

Каждый интеграл под знаком суммы равен $F_H[j(\omega - \nu)] / \nu = n \frac{2\pi}{\tau}$

Следовательно,

$$F^*(j\omega) = \frac{1}{\tau} \sum_{n=-\infty}^\infty F_H[j(\omega - n \frac{2\pi}{\tau})] \quad (23.14)$$

Спектр дискретного сигнала $F^*(j\omega)$ равен сумме спектров непрерывного сигнала $F_H(j\omega)$ - периодически повторяющихся через интервал $2\pi/\tau$ (рис. 23.2).

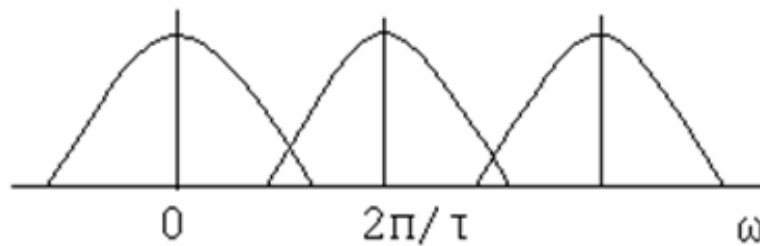


Рис. 23.2. Спектр импульсного сигнала

Для полученного результата можно сделать следующие выводы :

1. Чем меньше величина τ , то есть, чем чаще берутся дискретные отсчеты, тем больше период повторения непрерывного спектра и тем меньше искажаются "хвосты" дискретного спектра, которые искажаются от перекрытия. Каждый «горб» дискретного сигнала меньше отличается от непрерывного и непрерывный сигнал можно точнее восстановить по дискретным отсчетам.

2. Перед дискретизацией непрерывный сигнал необходимо фильтровать. Полоса пропускания фильтра не должна превышать величины $1/\tau$. Это гарантирует от того, что хвост основного «горба», возможно содержащий помехи не «завернется» в область низких частот.

3. Появление в формуле (5.14) множителя $1/\tau$ можно объяснить следующим образом. Спектр дискретного сигнала образуется с помощью спектра непрерывного сигнала. Предполагается при этом, что дискретный сигнал образуется из непрерывного как его дискреты. Но тогда "импульс силы" дискретного сигнала будет нулевым, так как его длительность нулевая. Чтобы примерно приравнять дискретный и непрерывный сигналы по "импульсу силы", надо умножить дискрет на интервал дискретизации τ . Тогда дискретный спектр также множится на τ и соблюдается соотношение между спектрами (23.14).

$$F^*(j\omega)\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_H[j(\omega - n\frac{2\pi}{\tau})]$$

Необходимо следить, чтобы при расчетах, при моделировании дискретных процессов, если они сравниваются с непрерывными процессами, множитель $1/\tau$ присутствовал.

Пример. Имеется непрерывная функция времени $f(t) = e^{-\alpha t}$. Найдем её спектр

$$\begin{aligned} F_H(j\omega) &= \int_0^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(\alpha + j\omega)t} dt = -\frac{1}{\alpha + j\omega} e^{-(\alpha + j\omega)t} \Big|_0^{\infty} = \\ &= \frac{1}{\alpha + j\omega} \end{aligned} \quad (23.15)$$

Дискретный сигнал, образованный из отсчетов вышеуказанной непрерывной функции, выбранных с интервалом времени τ , будет

$$f[n] = e^{-\alpha n\tau}$$

Z - преобразование для него согласно (21.4) будет равно

$$F(z) = \frac{z}{z - e^{-\alpha\tau}}$$

Дискретный спектр согласно (23.6) будет равен

$$F^*(j\omega) = F(z)|_{z=e^{j\omega\tau}} = \frac{e^{j\omega\tau}}{e^{j\omega\tau} - e^{-\alpha\tau}} = \frac{\cos \omega\tau + j\sin \omega\tau}{(\cos \omega\tau - e^{-\alpha\tau}) + j\sin \omega\tau} \quad (23.16)$$

Этот спектр как ранее указывалось периодический с периодом $2\pi/\tau$.

Покажем, что спектры непрерывного и дискретного сигналов совпадают, если $\tau \rightarrow 0$.

Из (23.16) путем разложения в ряды получим

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} F^*(j\omega) = \frac{1 - \frac{\omega^2 \tau^2}{2} + \dots + j(\omega\tau + \frac{\omega^3 \tau^3}{3} + \dots)}{1 - \frac{\omega^2 \tau^2}{2} + \dots - 1 + \alpha\tau - \frac{\alpha^2 \tau^2}{2} + \dots j(\omega\tau + \frac{\omega^3 \tau^3}{3} + \dots)} =$$

$$= \frac{1}{\tau(\alpha + j\omega)}$$

Получено совпадение с точностью до множителя $1/\tau$ (см. (23.15)).

24. Импульсная передаточная функция. Импульсная характеристика. Импульсная частотная передаточная функция

Понятие передаточной функции импульсной системы такое же что и для непрерывных систем. Импульсная передаточная функция импульсной системы равна отношению Z – преобразований выхода ко входу. Для этого возьмем Z - преобразование от обеих частей разностного уравнения (20.5) и найдем искомое отношение. Получим

$$W^*(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{M^*(z)}{D^*(z)} = \frac{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \dots + b_0}{a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0} \quad (24.1)$$

Из (24.1) следует связь между Z – преобразованиями входа и выхода

$$X(z) = W^*(Z)U(z) \quad (24.2)$$

Полиномы M^* и D^* образованы с помощью коэффициентов левой и правой частей исходного разностного уравнения. $D^*(z)$ - это характеристический полином системы. Понятие импульсной передаточной функции не имеет такого широкого практического применения как передаточная функция непрерывной системы. Гораздо чаще используются другие характеристики.

Введем понятие импульсной характеристики импульсной системы. По определению импульсная характеристика $h^*[n]$ это переходный процесс импульсной системы при действии дельта-функции (см. рис. 24.1).

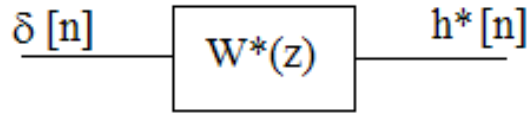


Рис. 24.1. Определение импульсной характеристики

Тогда, согласно (24.2), можно записать

$$W^*(z) = \frac{Z\{h^*[n]\}}{Z\{\delta[n]\}} \quad (24.3)$$

Найдем Z – преобразование от дельта – функции. По правилу определения Z – преобразования (21.3) получим

$$Z\{\delta[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta[n]z^{-n} = \delta[0] + \delta[1]z^{-1} + \dots = 1 \quad (24.4)$$

так как все отсчеты дельта – функции кроме нулевого отсчета равны нулю. Тогда из (24.3) следует

$$W^*(z) = Z\{h^*[n]\} \quad (24.5)$$

Следовательно, импульсная передаточная функция является Z - преобразованием импульсной характеристики, а значит, импульсная характеристика является обратным Z – преобразованием от импульсной передаточной функции

$$h^*[n] = Z^{-1}\{W^*(z)\} \quad (24.6)$$

В пакете MATLAB импульсная характеристика импульсной системы вычисляется с помощью функции **impz**.

Переходный процесс в импульсной системе с помощью импульсной характеристики вычисляется по формуле свертки

$$x[n] = \sum_{i=0}^n h^*[n-i]u[i] \quad (24.7)$$

В пакете MATLAB переходный процесс вычисляется с помощью функции **conv**. Однако в отличие от функции **filter**, где переходный процесс вычисляется до

тех пор, пока входной сигнал существует, здесь переходный процесс вычисляется пока это можно проводить согласно формуле (24.7), то есть пока импульсная характеристика не выдаст последнюю реакцию на последний импульс входа. Следовательно, длина результата свертки (24.7) будет равна

$$l_s = l_h + l_u - 1 \quad (24.8)$$

где

l_s - длина свертки,

l_h - длина импульсной характеристики,

l_u - длина входного сигнала.

Импульсная частотная передаточная функция

В непрерывных системах передаточная функция определяет частотные свойства системы – основу для определения устойчивости, качества, точности. Поставим задачу определения частотных свойств импульсной системы с помощью импульсной передаточной функции. Очевидно, если в соотношении (24.2) сделать подстановку

$$z = e^{j\omega\tau} \quad (24.9)$$

Получим

$$X^*(j\omega) = W^*(j\omega)U^*(j\omega) \quad (24.10)$$

где $X^*(j\omega)$ и $U^*(j\omega)$ спектры или преобразования Фурье импульсных входов и выходов, а $W^*(j\omega)$, следовательно, есть передаточная функция по Фурье импульсной линейной системы. Эта передаточная функция, как и для непрерывной системы, имеет модуль, фазу, годограф, ЛАХ и т. д. Определяется частотная передаточная функция импульсной системы подстановкой (24.9) в (24.1)

$$W^*(j\omega) = \frac{b_k z^k + b_{k-1} z^{k-1} + \dots + b_0}{a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0} \Big|_{z=e^{j\omega\tau}} \quad (24.11)$$

Видно, что частотная передаточная функция, как и все частотные характеристики импульсных систем есть периодическая функция, так как аргумент этих функций и характеристик - z согласно (24.9) периодический.

Для вычисления в математических пакетах следует пользоваться формулой (24.11), но для аналитических исследований эта формула неудобна, и её можно преобразовать, что будет показано ниже.

Рассмотрим пример. Пусть дано разностное уравнение первого порядка

$$x[n+1] + a_0 x[n] = b_1 u[n+1]$$

Дадим некоторое пояснение относительно структуры уравнения. Казалось проще обойтись без сдвига возмущения на один такт, но тогда при вычислении текущего значения выхода в момент $n+1$ мы использовали бы возмущение с запаздыванием (в момент времени n). Это усложнило бы решение.

Импульсная передаточная функция системы равна

$$W^*(z) = \frac{b_1 z}{z + a_0} \quad (24.12)$$

Частотная передаточная функция, используя подстановку (24.9), имеет вид

$$W^*(j\omega) = \frac{b_1 e^{j\omega\tau}}{e^{j\omega\tau} + a_0}$$

ЛАХ этой частотной передаточной функции показан на рис. 24.3. Видно, что ЛАХ как и любая частотная характеристика импульсной системы есть периодическая функция частоты.

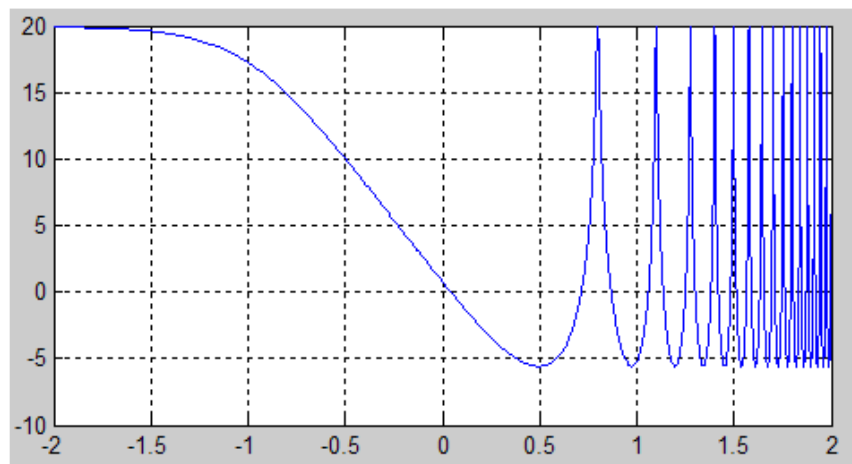


Рис 6.3 ЛАХ частотной передаточной функции

Комплексное выражение частотной передаточной функции импульсной системы строится с помощью функции **freqz**.

Было указано, что аналитическое исследование импульсной передаточной функции затруднено. Рассмотрим один из способов приближенного исследования, так называемый способ билинейного Z –преобразования с помощью введения псевдочастоты. Фактический аргумент z меняется вдоль окружности единичного радиуса, делая определенное число оборотов. Этим объясняется периодичность всех частотных характеристик дискретных систем. Более удобно проводить аналитические исследования, когда аргумент – частота меняется вдоль вещественной оси. Чтобы добиться этого проведем последовательно некоторые преобразования. Сначала сделаем замену

$$z = \frac{1 + w}{1 - w} \quad (24.14)$$

Тогда, как показано в разделе 22, окружность единичного радиуса, вдоль которой меняется аргумент z , преобразуется в мнимую ось, вдоль которой меняется аргумент w . Причем внутренность окружности преобразуется в левую полуплоскость. Затем делаем замену

$$w = j\omega^* \quad (24.15)$$

Эта замена поворачивает плоскость на 90 градусов против часовой стрелки и аргумент ω^* меняется вдоль вещественной оси в пределах от $-\infty$ до ∞ . Однако при такой серии преобразований нигде не соблюдается равенства между координатой ω^* и частотой ω . Поэтому вместо преобразований (24.14) и (24.15) проводим следующее преобразование

$$z = \frac{1 + j\omega^* \frac{\tau}{2}}{1 - j\omega^* \frac{\tau}{2}} \quad (24.16)$$

где ω^* называют псевдочастотой.

Здесь круг единичного радиуса по-прежнему переходит в вещественную ось, но связь псевдочастоты с частотой более явная. Из (24.16) и (24.9) следует

$$j\frac{\tau}{2}\omega^* = \frac{z-1}{z+1} = \frac{e^{j\omega\tau} - 1}{e^{j\omega\tau} + 1} = \frac{2j \frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}} - e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}}{2}}{2 \frac{e^{j\omega\frac{\tau}{2}} + e^{-j\omega\frac{\tau}{2}}}{2}} = \quad (24.17)$$

$$= j \frac{\sin \omega \frac{\tau}{2}}{\cos \omega \frac{\tau}{2}} = j \operatorname{tg}(\omega \frac{\tau}{2})$$

Следовательно

$$\omega^* \frac{\tau}{2} = \operatorname{tg}(\omega \frac{\tau}{2}) \quad (24.18)$$

При малых значениях $\omega \frac{\tau}{2}$ истинная частота и псевдо частота совпадают. Затем их значения расходятся. Причем в зависимости от частоты все частотные характеристики дискретной системы периодические, а в зависимости от псевдо частоты периодичности нет. Поэтому можно считать, что замена частоты на псевдо частоту допустима в области, ограниченной половиной частоты дискретизации.

Задачу выбора параметров дискретного БИХ фильтра по принципу совпадения частотных характеристик фильтра с частотными характеристиками непрерывного аналога решает функция **bilinear**, один из возможных форматов которой следующий

$$[bz, az] = \text{bilinear}(b, a, Fs, Fp)$$

Здесь

b,a – коэффициенты числителя и знаменателя передаточной функции непрерывного аналога, расположенные по убывающим степеням аргумента;

bz,az – вычисленные коэффициенты числителя и знаменателя импульсной передаточной функции;

Fs – половина частоты дискретизации (частота Найквиста);

Fp – область частот, внутри которой надо добиться максимального совпадения.

Заметим, что функция проводит вычисления только для физически реализуемого непрерывного аналога, у которого степень числителя передаточной функции не больше степени знаменателя.

25. Импульсная передаточная функция последовательного и параллельного соединений звеньев

Пусть имеется последовательное соединение импульсных звеньев (Рис.25.1).

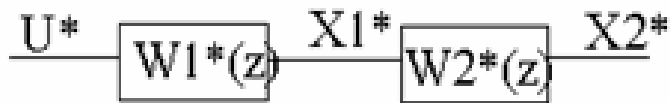


Рис. 25.1. Последовательное соединение

Z - преобразование выхода первого звена по определению импульсной передаточной функции есть

$$X_1(z) = W_1^*(z)U(z)$$

Для второго звена имеем

$$X_2(z) = W_2^*(z)X_1(z) = W_1^*(z)W_2^*(z)U(z) \quad (25.1)$$

Если известна импульсная передаточная функция соединения, то

$$X_2(z) = W_c^*(z)U(z) \quad (25.2)$$

Сравнивая (25.1) и (25.2), получим выражение для импульсной передаточной функции последовательного соединения

$$W_c^*(z) = W_1^*(z)W_2^*(z) \quad (25.3)$$

При последовательном соединении звеньев импульсная передаточная функция соединения равна произведению импульсных передаточных функций звеньев.

Это верно для соединений, содержащих только импульсные элементы. Для последовательных соединений, состоящих из импульсных и непрерывных элементов это свойство не соблюдается

Пусть имеется параллельное соединение импульсных элементов (рис. 25.2).

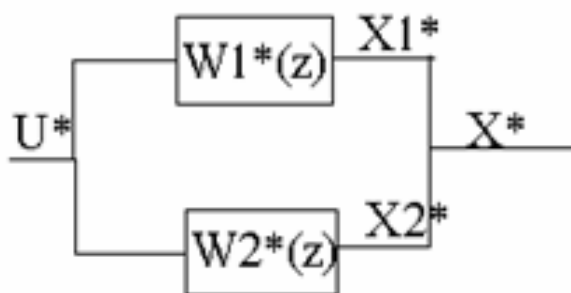


Рис. 25.2. Параллельное соединение

Z - изображение суммы в силу линейности изображения равно сумме Z - изображений

$$Z\{x\} = Z\{x_1\} + Z\{x_2\}$$

или

$$X^*(z) = X_1^*(z) + X_2^*(z) = (W_1^*(z) + W_2^*(z))U^*(z)$$

Следовательно

$$W_c^*(z) = W_1^*(z) + W_2^*(z) \quad (25.4)$$

Для систем с параллельным соединением импульсные передаточные функции складываются.

26. Эквивалентность непрерывных и импульсных систем

Часто при выборе параметров импульсной системы возникает задача создать импульсную систему «похожей» на некоторый непрерывный аналог.. При расчетах, при моделировании непрерывных систем разностные схемы расчетов часто используются как более эффективные или как более соответствующие структуре цифровой техники. Или наоборот при выборе импульсной системы надо использовать опыт, накопленный в работе с непрерывными системами.

Тогда надо уметь подбирать параметры импульсных систем, чтобы они были эквивалентны своему непрерывному прообразу.

Здесь будем считать импульсные и непрерывные системы эквивалентными, если в дискретные моменты времени соответствующие процессы, сигналы в обеих системах совпадают.

Пусть есть импульсная система, которая определяется своей импульсной характеристикой $k^*[n]$ (рис. 26.1). Пусть имеется эквивалентная ей непрерывная система, которая определяется весовой функцией $k(t)$ (Рис. 26.2).

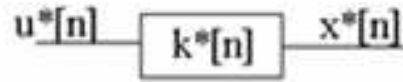


Рис.26.1

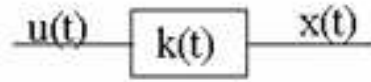


Рис. 26.2

Говорить об эквивалентности двух систем можно, если они находятся в одинаковых условиях. Одинаковыми должны быть воздействия и начальные условия.

Так как вход в дискретную систему дискретен, то вход в непрерывную систему в этой задаче тоже должен быть дискретен. Пусть вход в непрерывную систему $u(t)$ есть дискретная функция, совпадающая с дискретным входом в дискретную систему $u^*[n]$. То есть выполняется условие

$$u(t) = \begin{cases} u^*[n] & \text{при } t = n\tau \\ 0 & \text{при } t \neq n\tau \end{cases} \quad (26.1)$$

Совпадают также начальные условия в обеих системах.

Эквивалентность выходов мы можем потребовать только в дискретные моменты времени, хотя выход непрерывной системы непрерывен. Требуем, чтобы выходы систем $x^*[n]$ и непрерывная функция $x(t)$ также совпадали в дискретные моменты времени $t = n\tau$. То есть необходимо

$$x^*[n] = x(t) \big|_{t=n\tau} \quad n=0,1,2,\dots \quad (26.2)$$

Покажем, что для этого достаточно, чтобы весовая функция совпадала с импульсной характеристикой в эти же моменты времени. То есть достаточно

$$k^*[n] = k(t) \big|_{t=n\tau} \quad n=0,1,2,\dots \quad (26.3)$$

Вход в непрерывную систему в соответствии с (26.1) и (19.2) можно представить в виде

$$u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} u^*[i\tau] \delta(t - i\tau) \quad (26.4)$$

Выход непрерывной системы можно определить с помощью весовой функции следующим образом

$$x(t) = \int_{-\infty}^t k(t - \lambda) u(\lambda) d\lambda$$

если $u(t) = 0$ при $t < 0$, то нижний предел равен нулю

$$x(t) = \int_0^t k(t - \lambda) u(\lambda) d\lambda$$

Подставляя сюда соотношение (26.4), получим

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t k(t - \lambda) \sum_{i=0}^{\infty} u^*[i\tau] \delta(\lambda - i\tau) d\lambda = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} u^*[i\tau] \int_0^t k(t - \lambda) \delta(\lambda - i\tau) d\lambda = \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} u^*[i\tau] k[t - i\tau] \end{aligned} \quad (26.5)$$

Выход импульсной системы, определяемый с помощью временной последовательности, по (24.7) равен

$$x^*[n\tau] = \sum_{i=0}^n u^*[i\tau] k^*[n\tau - i\tau] \quad (26.6)$$

Сравнивая (26.5) и (26.6), видно, чтобы выходы импульсной и непрерывной систем совпадали в дискретные моменты времени $t = n\tau$

$$x(n\tau) = x^*[n\tau]$$

необходимо совпадение в эти моменты времени весовой функции и импульсной характеристики

$$k(n\tau) = k^*[n\tau]$$

Условия эквивалентности (26.3) доказаны.

27. Эквивалентность систем первого порядка

В качестве непрерывной системы рассмотрим апериодическое звено, уравнение которого имеет вид

$$T\dot{x} + x = u(t) \quad (27.1)$$

Найдем эквивалентное разностное уравнение. Определим сначала весовую функцию. Весовая функция - это выход системы, при нулевых начальных условиях, когда входом является дельта-функция. Поэтому уравнением для определения весовой функции будет

$$T\dot{k}(t) + k(t) = \delta(t) \quad (27.2)$$

Сведем воздействие дельта-функции к пересчитанным начальным условиям.

Проинтегрируем (27.2) в пределах $\pm\Delta$, где Δ мало.

$$T \int_{-\Delta}^{\Delta} \dot{k}(t) dt + \int_{-\Delta}^{\Delta} k(t) dt = \int_{-\Delta}^{\Delta} \delta(t) dt$$

На импульсное возмущение импульсно меняется старшая производная системы, остальные параметры состояния меняются плавно, непрерывно, в соответствии с уравнениями системы. Поэтому в левой части конечное значение на бесконечно малом отрезке примет только интеграл от старшей производной

$$Tk(0) + 0 = 1$$

Отсюда эквивалентное начальное условие равно

$$k(0) = \frac{1}{T} \quad (27.3)$$

Решение однородного уравнения (27.2)

$$T\dot{k}(t) + k(t) = 0$$

при начальных условиях (27.3) равно

$$k(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}} \quad (27.4)$$

Импульсная характеристика эквивалентной системы по условию (26.3) должна быть равна

$$k^*[n] = \frac{1}{T} e^{-\frac{n\tau}{T}} \quad (27.5)$$

Найдем импульсную передаточную функцию как Z - преобразование от временной последовательности. Учитывая (21.4), получим

$$W^*(z) = \frac{1}{T} \cdot \frac{z}{z - e^{-\frac{\tau}{T}}} \quad (27.6)$$

Поэтому, разностное уравнение эквивалентной системы будет

$$x[n+1] - e^{-\tau/T} x[n] = \frac{1}{T} u[n+1] \quad (27.7)$$

Следует учитывать, что если исходное выражение правой части $u(t)$ в (27.1) представляет собой не импульсы, а непрерывную функцию, то в (27.7) надо подставить значение интеграла от возмущения по интервалу дискретизации, если этот интервал мал. Для постоянного возмущения u_0 импульс равен

$$u[n] = u_0 \quad (27.8)$$

и (27.7) примет вид

$$x[n+1] - e^{-\tau/T} x[n] = \frac{\tau}{T} u_0 \quad (27.9)$$

Пример. Пусть $u_0 = 0$ и $x[0] = 1$

Проведем рекуррентное вычисление переходного процесса с помощью (27.7)

$$x[1] = e^{-\frac{\tau}{T}}$$

$$x[2] = e^{-2\frac{\tau}{T}}$$

.....

$$x[n] = e^{-n\frac{\tau}{T}}$$

что в дискретные моменты времени совпадает с переходным процессом эквивалентной непрерывной системы, равным

$$x(t) = e^{-t/T}$$

Выразим импульсную частотную передаточную функцию эквивалентной дискретной системы через псевдо частоту. Подставим в (27.6)

$$z = \frac{1 + j\omega^* \tau / 2}{1 - j\omega^* \tau / 2}$$

получим с учетом множителя τ

$$W^*(z) = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{\frac{1 + j\omega^* \tau / 2}{1 - j\omega^* \tau / 2}}{\frac{1 + j\omega^* \tau / 2}{1 - j\omega^* \tau / 2} - e^{-\tau/T}} = \frac{\tau}{T} \cdot \frac{1 + j\omega^* \tau / 2}{1 - e^{-\tau/T} + j\omega^* \tau / 2(1 + e^{-\tau/T})} =$$

$$= k \frac{1 + j\omega^* T_2}{1 + j\omega^* T_1}$$

$$\text{где } k = \frac{\tau}{T(1 - e^{-\tau/T})}, \quad T_1 = \frac{1 + e^{-\tau/T}}{1 - e^{-\tau/T}}, \quad T_2 = \frac{\tau}{2}$$

Импульсная частотная передаточная функция показана в виде ЛАХ на рис. 27.1.

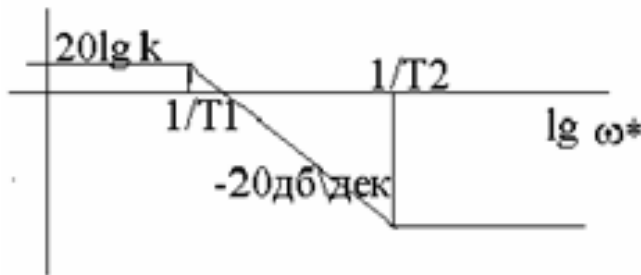


Рис. 27.1. ЛАХ эквивалентной импульсной системы

В ограниченной области частот до частоты Найквиста ЛАХ импульсной системы совпадает с ЛАХ эквивалентной непрерывной аperiodической системы.

При малом интервале дискретизации τ имеем $k \cong 1$, $T_1 \cong T$, $T_2 \cong 0$, $\omega^* \cong \omega$ и импульсная передаточная функция точно совпадает с передаточной функцией эквивалентной непрерывной системы - аperiodическим звеном.

Подводя итог раздела необходимо повторить, что условия эквивалентности требуют, чтобы на вход непрерывной системы подавались импульсные воздействия. Поэтому поведение непрерывной системы будет отличаться от её поведения при непрерывных возмущениях. При малых интервалах дискретизации это отличие становится малым.

Оглавление	Стр
Часть 1. Непрерывные сигналы и системы.....	2
1. Введение	2
2. Основные принципы управления.....	6
3. Уравнения системы автоматического управления.....	9
4. Спектр непрерывного сигнала	12
5. Передаточная функция по Фурье.....	16
6. Передаточная функция по Лапласу	20
7. Логарифмические частотные характеристики.....	22
8. Типовые звенья	24
9. Передаточные функции структурных схем	34
10. Устойчивость систем управления.....	43
11. Критерии устойчивости Гурвица.....	44
12. Частотные критерии устойчивости.....	47
13. Критерии качества.....	53
14. Передаточная функция ошибки	55
15. Синтез непрерывных систем при детерминированных воздействиях	61
16. ПИД – регулятор.....	68
17. Весовая функция.....	69
18. Определение переходного процесса с помощью весовой функции	74
Часть 2. Импульсные сигналы и системы.....	76
19. Понятия об импульсных системах.....	76
20. Разностные уравнения. Импульсная характеристика	78
21. Z – преобразование.....	83
22. Устойчивость импульсных систем по Гурвицу.....	85
23. Спектр импульсного сигнала	88
24. Импульсная передаточная функция. Импульсная характеристика. Импульсная частотная передаточная функция.....	93
25. Импульсная передаточная функция последовательного и параллельного соединений звеньев	99
26. Эквивалентность непрерывных и импульсных систем	100
27. Эквивалентность систем первого порядка.....	103

