逻辑与推理密切相关，主要是为论证或证明的有效性提供方法和技巧。它与许多学科有广泛的联系。如，与数学的交叉，数理逻辑，与计算机科学的交叉，计算复杂性与机器证明，人工智能的交叉，精确推理与不精确推理，这些广泛的联系，日益显示其重要作用。

德国哲学家、数学家莱布尼茨（与牛顿，同时独立提出微积分）是数理逻辑的创始人，至今有 300 多年的历史。大约经历三个阶段：

1． 初始阶段，用数学方法研究和处理形式逻辑，英国的布尔(Boole)，德.摩根(De Morgan)等人，逻辑代数和布尔代数；

2． 研究数学的思想方法及其基础问题。集合论的创建(康托)，公理方法的发展(希尔伯特，1900 年，希尔伯特在巴黎的国际数学家大会上作了题为《数学问题》的演讲，提出了 23 个最重要的数学问题，这就是著名的希尔伯特的 23 个问题。希尔伯特问题对推动 20 世纪数学的发展起了积极的推动作用。由于时代的局限性，希尔伯特问题中未能包括拓扑学、微分几何等领域，也很少涉及应用数学，更不曾预料到计算机的发展将对数学产生重大影响。)，逻辑演算的建立(皮亚诺、罗素)，证明论。

3. 发展阶段，与数学的各分支和计算机科学的广泛联系。

数理逻辑是计算机科学的基础理论之一。可分为 5 大部分：逻辑演算、集合论、证明论、模型论、递归论。数理逻辑既是数学，又是逻辑学，研究数学中的逻辑问题，或者用数学方法研究形式逻辑。计算机的软、硬件、算法和语言均与数理逻辑有关。

这里我们仅涉及命题逻辑（数理逻辑的组成部分，也是谓词逻辑的基础）及其逻辑演算部分。

命题逻辑 Propositional Logic

一．命题 propositional

2.1 命题和命题联结词

语言的单位是句子，句子可分为疑问句，祁使句，感叹句，陈述句等。

下面，我们列出一些句子。

(1) 2 是素数。　　　(2)雪是黑色的。
(3) 2+3=5.　　　　　(4)明年十月一日是晴天。
(5) 3 能被 2 整除。　(6)这朵花真好看呀！
(7)明天下午有会吗？(8)请关上门！
(9) $x+y>5$.　　　　(10)地球外的星球上也有人。

命题 statement 是指一个能判断真假意义的陈述句。

注意：(1)命题的判断只有两种可能：正确与错误，前者称为命题的真值为真，后者称为命题的真值为假；

(2)命题的真值通常使用大写英文字母 T 和 F 表示，或使用 1 和 0 表示；

(3)命题必须是具有唯一真值的陈述句。

其中：(1)(2)(3)(4)(5)(10)为命题。

因为：(1)命题必须是陈述句，所以，非陈述句不是命题；

(2)命题必须有确定的真值，凡无确定真值的陈述句不是命题，特别注意：真值是否确定与我们是否知道它的真值不是一回事情；

(3)注意悖论：如：我正在说谎。

从数学的观点来看，悖论没有确切的真值，所以，不能成为命题。

2.2 逻辑联结 **Logical Connective** 与复合命题 **compound statement**

命题与命题的运算？

命题符号化：既然命题有真假（分别用 **0**，**1** 来表示），故它就是一个变量，我们用小写字母 **p,q,r,s,t** 等符号表示命题变量，**命题常元（具体确定内容的命题）**与**命题变元（任意的，没有赋予具体内容的抽象命题）。**

命题：简单命题（原子命题，不能再分解为更简单的命题），复合命题（若干个简单命题通过**命题联结词**而构成的新命题），可以使用一些逻辑联结词来将若干命题联接成复合命题。

常用的逻辑联结词有 **5** 种，如，否定联结词 **negation ~**,合取联结词 **conjunction** ∧，析取联结词 **disjunction** ∨，蕴涵联结词 **implication** →，等价联结词 **equivalent** ↔**.**

例如， **s:**明天出太阳，则，明天不会出太阳（**~s**）。

p：“李军聪明”，q：“李军用功”，则
$p \wedge q$：“李军聪明且用功”。.
p：“开关坏了”，q：“灯泡坏了”，则
$p \vee q$:“开关坏了或灯泡坏了”。

设 p 和 q 为两个命题，由 p 与 q 用二元联结词“→”组成复合命题，称为蕴涵命题，记为“$p \rightarrow q$”。读作“如果 p，则 q”，其中 p 为前件，q 为后件。
只有当前件为真，后件为假时，$p \rightarrow q$ 为假。
如果(p)地球是圆的，则(s)明天会出太阳, $p \rightarrow s$。

设 p 和 q 为两个命题，由 p 与 q 用二元联结词“↔”组成复合命题，称为等价复合命题，记为“$p \leftrightarrow q$”。读作“p 当且仅当 q”。
当且仅当 p 和 q 的真值相同时，$p \leftrightarrow q$ 为真。否则为假。
(p)三角形全等↔(q)三角形三边相等。

在命题符号化的过程中，需要注意的是：命题语言与自然语言的区别。
例如，小王现在宿舍或图书馆，小王现在宿舍(p)，小王现在图书馆(q)，

一般来说，用 $p \vee q$ 表示，但是，小王不可能既在宿舍，又在图书馆，因此，需要注明 p 与 q 不能同时为真；

最好用：使用 $(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge q)$ 来表示。

注释：前者称为相容性或，后者称为排斥性或。

2.3 条件命题 conditional statements

若 p, q 是命题，称“if p then q”这种形式的复合命题为条件命题或称为蕴涵 implication。简单记为 $p\rightarrow q$。相应地，p 称为前提（前件）antecedent, hypothesis, q 称为结论（后件）consequent, conclusion.

规定：$p\rightarrow q$ 是假的，当且仅当 p 是真的并且 q 是假的。

例如：有位父亲对儿子说：“如果我去书店，那么我一定给你买光盘。” 试问：在何种情况下，这位父亲算失信？

P：父亲去书店，Q：给儿子买光盘

1) P=1，Q=1

2) **P=1，Q=0**

3) P=0，Q=1

4) P=0，Q=0

相应地， 我们有

逆命题 **converse of the implication**

q→p

否命题 **negation of the implication**

~p→~q

逆否命题

contrapositive of the implication

~q→~p

在中学，众所周知，原命题与逆否命题是等价的（这里所指的等价，指的是其逻辑等价，或者真值相同）， 即， **p→q ⇔ ~q→~p**

下面，我们将这 5 种逻辑联结词的真值计算方法，列举如下：

否定 **negation ~ ~p**

合取 **conjunction ∧ p∧q, min**

析取 **disjunction ∨ p∨q, max**

蕴含 **implication → p→q**

等价 **equivalence, biconditional ↔ p↔q**

其真值计算为:

$\sim p=1-p$

$p\rightarrow q=\sim p\vee q=\max\{1-p,\ q\}$

$p\leftrightarrow q=(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)=(\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee p)$
$=\min\{\max(1-p,\ q),\ \max(p,\ 1-q)\}$

联结词的运算顺序：

1)逻辑词的优先级别分别为：~ ，∧，∨，→，↔ ，括号中的运算为最优先级。
2)同级联结词，按从左到右的次序运算。

联结词的真值表 truth table

p	q	~p	p∧q	p∨q	p→q	q→p	p↔q
0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	1	1	1

当然，由上面 5 种逻辑联结词还可以产生更多的联结词，如，异或联结词（p,q 之中恰有一

个成立）$p\veebar q$，与非联结词(p 与 q 合取的否定)$\uparrow$，或非联结词(p 与 q 析取的否定)$\downarrow$，等等。

Theorem 1. 逻辑运算性质

交换律 **commutativeproperties**

1. $p\wedge q=q\wedge p$
2. $p\vee q=q\vee p$

结合律 **associative properties**

1. $(p\wedge q)\wedge r=p\wedge(q\wedge r)$
2. $(p\vee q)\vee r=p\vee(q\vee r)$

分配律 **distributive properties**

3. $p\wedge(q\vee r) = (p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
4. $p\vee(q\wedge r) = (p\vee q)\wedge(p\vee r)$

幂等律 **idempotent properties**

5. $p\vee p=p$
6. $p\wedge p=p$

双重否定 **property of negation**

9． $\sim(\sim p) =p$

De Morgan 律

10. $\sim(p\vee q)=\sim p\wedge\sim q$
11. $\sim(p\wedge q)=\sim p\vee\sim q$

吸收律 **absorb properties**

12. $p\vee(p\wedge q) = p$
13. $p\wedge(p\vee q) = p$

零一律

14. $p \vee \sim p = 1$
15. $p \wedge \sim p = 0$
16. $p \vee 1 = 1$
17. $p \wedge 1 = p$
18. $p \vee 0 = p$
19. $p \wedge 0 = 0$

Theorem 2.

(a) $p \to q = \sim q \to \sim p$

(b) $\sim(p \to q) = p \wedge \sim q$

(c) $\sim(p \leftrightarrow q) = (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$

需要说明的是，上述等号指的是逻辑真值相等。

2.4 命题公式　propositional formulas

使用 p,q 来表示命题，如果其真值确定的话，则称其为命题常项或命题常元；如果其真值可以变化的话，则称其为命题变项或命题变元；由命题常元、命题变元、命题联结词及括号等所组成的字符串称为命题公式。为了区别，命题公式用大写英文字母来表示，如，A,B,C.

下面，我们给出命题公式的递归定义

（1）命题变元和命题常元是命题公式。
（2）如果 A, B 是命题公式，则有限次地应用命题联结词，如，$(\sim A)$, $(A\wedge B)$, $(A\vee B)$, $(A\rightarrow B)$, $(A\leftrightarrow B)$，所得到的命题是命题公式。

例 $A=((p\wedge(\sim q))\rightarrow(((\sim p)\vee q)\ \wedge q))$ 是命题公式.

如果化简的话，我们可以省略最外层的括号：
$A=(p\wedge(\sim q))\rightarrow(((\sim p)\vee q)\ \wedge q)$，q(吸收律)

为了方便计算，我们按照命题联结词的优先级：~，∧，∨，→，↔，从左到右的顺序进行。
这样的话，命题公式 A 可以化简为：

$A=(p\wedge\sim q)\rightarrow q=\sim p\vee q\vee q=\sim p\vee q$

由于 p, q 是变元，故 A 可以看成关于 p,q 的二元函数，记作为 A(p,q).

利用基本等价公式可以进行公式的等价变换（逻辑等价，或者等真值运算），即把一个公

式化为与之相等价的另一个公式。从而将公式化简，或化为某种特定形式。

一般来说，命题公式的真值是不确定的，设 **A** 为一命题公式，$p_1, p_2, \ldots, p_n$ 为 **A** 中的命题变元，给定 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的一组真值，则称为对 **A** 的一个赋值。若给定 $p_1, p_2, \ldots, p_n$ 的一组值，使得 **A** 的值为真，称这组值为 **A** 的成真赋值；反之，为成假赋值。

对应于命题变元的一种真假取值。**n** 个变元共有 2^n 种不同的赋值。因此，命题公式 **A** 就得到其相对应的真值表(所有赋值之下取值的真值所生成的表)。

命题公式的真值表

truth table of propositions

A 的真值表

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim p \vee q$	$(\sim p \vee q) \wedge q$	$p \wedge \sim q \rightarrow (\sim p \vee q) \wedge q$
0	0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1

设 A 为一个命题公式,

1) 无论命题变元取什么值，命题公式 A 的取值都是 1(真)，则称 A 为 tautology 重言式，恒真式。

2) 无论命题变元取什么值，命题公式 A 的取值都是 0(假)，则称 A 为 contradiction, absurdity 矛盾式, 恒假式。

3) 若 A 至少存在一组赋值，使得命题公式 A 的取值为 1(真)，则称 A 为 contingency 可满足式。

2.5（逻辑）等价公式 A⇔B

设 A, B 为两命题公式，无论公式 A, B 中的命题变元如何取值, A, B 都有相同的真值表，则称 A 与 B 是等价公式，记作 A⇔B。

等价公式：对命题公式进行化简得到相同的表达式；或者计算其真值，得到相同的真值表。

例如，验证 $A=p\wedge q$ 与 $B= q\wedge p$ 的等价性。

A 与 B 的真值表

p	q	$p\wedge q$	$q\wedge p$	$p\vee q$	$q\vee p$
0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1

验证: $p\to(q\to r)$, $(p\wedge q)\to r$, $(p\to q)\to r$ 的等价性。

$$p\to(q\to r)=p\to(\sim q\vee r)=\sim p\vee(\sim q\vee r)$$
$$=\sim p\vee\sim q\vee r$$

$$(p\wedge q)\to r=\sim(p\wedge q)\vee r=\sim p\vee\sim q\vee r$$

$$(p\to q)\to r=(\sim p\vee q)\to r=(p\wedge\sim q)\vee r$$
$$=(p\vee r)\wedge(\sim q\vee r)$$

表明：前两项是等价的，与第三项不同，这表明蕴涵运算不满足结合律。

另外，用真值表可以判定一个公式是否为恒真式、恒假式和可满足公式，也可以判断两个公式是否为等价。因此，可以使用真值表来证明命题公式的等价性。

例　证明下列公式都是恒真式：

(1)　$p\to p$

(2)　$\sim(\sim p)\to p$

(3)　$p\to(q\to p)$

(4)　$(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$

(5)　$(\sim q\to\sim p)\to(p\to q)$

Proof　(3).　证法 1：真值表法

p	q	$q\to p$ $(\sim q\vee p)$	$p\to(q\to p)$ $(\sim p\vee(\sim q\vee p))=\sim p\vee\sim q\vee p$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	1	1
1	1	1	1

证法 2：

$p\to(q\to p)=(\sim p\vee(\sim q\vee p))$

$=\sim p\vee\sim q\vee p=1\vee\sim q=1$

因此，$p\to(q\to p)$是恒真式。

4) $(p\to(q\to r))\to((p\to q)\to(p\to r))$

$(p\to(q\to r))=(p\to(\sim q\vee r))=\sim p\vee\sim q\vee r$

$((p\to q)\to(p\to r))=(\sim p\vee q)\to(\sim p\vee r)$

$=(p\wedge\sim q)\vee(\sim p\vee r)$

$=(\sim p\vee r\vee p)\wedge(\sim p\vee r\vee\sim q)$

$=1\wedge(\sim p\vee r\vee\sim q)=\sim p\vee r\vee\sim q$

$=\sim p\vee\sim q\vee r$

$p\to p=\sim p\vee p=1$

例： 下列是恒真式

(a) $(p\wedge q)\to p$

(b) $(p\wedge q)\to q$

(c) $p\to(p\vee q)$

(d) $q\to(p\vee q)$

(e) $\sim p\to(p\to q)$

(f) $\sim(p\to q)\to p$

(g) $(p\wedge(p\to q))\to q$

(h) $(\sim p\wedge(p\vee q))\to q$

(i) $(\sim q\wedge(p\to q))\to\sim p$

(j) $((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$

恒真式，即命题公式的真值恒为 1

仅证明(j): $((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\rightarrow(p\rightarrow r)$

原式 $=((\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee r))\rightarrow(\sim p\vee r)$

$=(((\sim p\vee q)\wedge\sim q)\vee((\sim p\vee q)\wedge r))\rightarrow(\sim p\vee r)$

$=((\sim p\wedge\sim q)\vee\underline{(q\wedge\sim q)})\vee((\sim p\wedge r)\vee(q\wedge r))\rightarrow(\sim p\vee r)$

$=((p\vee q)\wedge(p\vee\sim r)\wedge(\sim q\vee\sim r))\vee(\sim p\vee r)$

$=((\sim p\vee r)\vee((p\vee q)\wedge(p\vee\sim r)))\wedge((\sim p\vee r)\vee(\sim q\vee\sim r))$

$=(\underline{(\sim p\vee r)\vee(p}\vee q))\wedge(\underline{(\sim p\vee r)\vee(p}\vee\sim r))\wedge((\sim p\vee\underline{r)\vee(\sim q\vee\sim r}))$

$=1\wedge1\wedge1$

$=1$

上述命题公式，表明推理具有传递性

2.6 命题逻辑的推理 deduction on proposition logic

单前提推理

设 A, B 都是命题公式，如果 $A\rightarrow B$ 是恒真式，就称由 A 推出 B 是一个正确的推理，记作 $A\Rightarrow B$。

因此，关于上述恒真式的命题，我们就可以写成下面的推理规则：

Theorem 4　基本推理（推理规则）Rule of deduction

(k) $p \Rightarrow p$

(l) $\sim\sim p \Rightarrow p$

(m) $(p\wedge q) \Rightarrow p$

(n) $(p\wedge q) \Rightarrow q$

(o) $p \Rightarrow (p\vee q)$

(p) $q \Rightarrow (p\vee q)$

(q) $\sim p \Rightarrow (p\rightarrow q)$

(r) $\sim(p\rightarrow q) \Rightarrow p$

(s) $(p\wedge(p\rightarrow q)) \Rightarrow q$

(t) $(\sim p\wedge(p\vee q))\Rightarrow q$

(u) $(\sim q\wedge(p\rightarrow q))\Rightarrow\sim p$

(v) $((p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow r))\Rightarrow p\rightarrow r$

(w) $(p\leftrightarrow q)\Rightarrow(p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$

(x) $((p\vee q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow s))\Rightarrow r\vee s$

(y) $((p\vee q)\wedge(p\rightarrow r)\wedge(q\rightarrow r))\Rightarrow r$

多前提推理（三段论式推理）

设 $A_1,A_2,\ldots,A_n$, B 都是命题公式，如果 $A_1\wedge A_2\wedge\ldots\wedge A_n\rightarrow B$ 是恒真式，就称由 $A_1, A_2,\ldots,A_n$ 推出 B 是一个正确的推理，记作 $A_1,A_2,\ldots,A_n\Rightarrow B$。

Theorem 5 多前提基本推理

(a) $p, p\rightarrow q\Rightarrow q$

(b) $\sim q, p\rightarrow q\Rightarrow\sim p$

(c) $\sim q, p\vee q\Rightarrow p$

(d) $p\rightarrow q, q\rightarrow r\Rightarrow p\rightarrow r$

(e) $p\vee q, p\rightarrow r, q\rightarrow s\Rightarrow r\vee s$

(f) $p\vee q, p\rightarrow r, q\rightarrow r\Rightarrow r$

$$\begin{array}{l} p\to q \\ \underline{p\qquad} \\ \quad q \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} \sim q \\ \underline{\quad p\to q} \\ \sim p \end{array}$$

(a)(肯定前件)

$$(p\wedge(p\to q))\to q=(p\wedge(\sim p\vee q))\to q$$
$$=(\underline{(p\wedge\sim p)}\vee(p\wedge q))\to q$$
$$=(p\wedge q)\to q$$
$$=\sim p\vee\underline{\sim q\vee q}$$
$$=1$$

(b)(否定后件)

$$(\sim q\wedge(p\to q))\to\sim p=(\sim q\wedge(\sim p\vee q))\to\sim p$$
$$=((\sim q\wedge\sim p)\vee\underline{(\sim q\wedge q)})\to\sim p$$
$$=(\sim q\wedge\sim p)\to\sim p$$
$$=q\vee\underline{p\vee\sim p}$$
$$=1$$

(c) (否定部分)

$$(\sim q\wedge(p\vee q))\to p=(\sim q\wedge(p\vee q))\to p$$
$$=((\sim q\wedge p)\vee\underline{(\sim q\wedge q)})\to p$$
$$=(\sim q\wedge p)\to p$$
$$=q\vee\underline{\sim p\vee p}$$
$$=1$$

(d)(推理的传递性)

$((p\to q)\wedge(q\to r))\to(p\to r)$
$= (\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee r)\to(p\to r)$
$=((\sim p\vee q)\wedge\sim q)\vee((\sim p\vee q)\wedge r)\to(p\to r)$
$=(\sim p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge r)\vee(q\wedge r)\to(p\to r)$
$=(\sim p\wedge\sim q)\vee(\sim p\wedge r)\vee(q\wedge r)\to(\sim p\vee r)$
$=((p\vee q)\wedge(p\vee\sim r)\wedge(\sim q\vee\sim r))\vee(\sim p\vee r)$
$=((\sim p\vee r)\vee((p\vee q)\wedge(p\vee\sim r)))\wedge((\sim p\vee r)\vee(\sim q\vee\sim r))$
$=((\sim p\vee r)\vee(p\vee q))\wedge((\sim p\vee r)\vee(p\vee\sim r))\wedge((\sim p\vee r)\vee(\sim q\vee\sim r))$
$=1\wedge 1\wedge 1$
$=1$

$$\frac{\begin{array}{c}\sim q\\ p\vee q\end{array}}{p}\qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}p\to q\\ q\to r\end{array}}{p\to r}\qquad\qquad \frac{\begin{array}{c}p\vee q\\ p\to r\\ q\to s\end{array}}{r\vee s}$$

(e) $p \vee q,\quad p \to r,\ q \to s \Rightarrow r \vee s$

$((p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to s)) \to r \vee s$

$=((p \vee q) \wedge (\sim p \vee r) \wedge (\sim q \vee s)) \to r \vee s$

$=[((p \vee q) \wedge \sim p) \vee ((p \vee q) \wedge r))] \wedge (\sim q \vee s) \to r \vee s$

$=[(\sim p \wedge q) \vee ((p \wedge r) \vee (q \wedge r)] \wedge (\sim q \vee s) \to r \vee s$

$=[((\sim p \wedge q) \wedge (\sim q \vee s)) \vee ((p \wedge r) \wedge (\sim q \vee s)) \vee ((q \wedge r) \wedge (\sim q \vee s))] \to r \vee s$

$=[(\sim p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge r \wedge \sim q) \vee (p \wedge r \wedge s) \vee (q \wedge r \wedge s)] \to r \vee s$，其中：$\sim p \wedge q \wedge \sim q = 0 = q \wedge r \wedge \sim q$

$=\sim[(\sim p \wedge q \wedge s) \vee (p \wedge r \wedge \sim q) \vee (p \wedge r \wedge s) \vee (q \wedge r \wedge s)] \vee (r \vee s)$

$=[(p \vee \sim q \vee \sim s) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim r \vee \sim s) \wedge (\sim q \vee \sim r \vee \sim s)] \vee (r \vee s)$

$=[(p \vee \sim q \vee \sim s) \vee (r \vee s)] \wedge [(\sim p \vee \sim r \vee q) \vee (r \vee s)] \wedge [(\sim p \vee \sim r \vee \sim s) \vee (r \vee s)] \wedge [(\sim q \vee \sim r \vee \sim s) \vee (r \vee s)]$

$=1 \wedge 1 \wedge 1 \wedge 1$

$=1$

这样将构成推理渠道。

例：马芳或者去看电影，或去游泳。她没去看电影，所以她去游泳了。

解：p：马芳去看电影，q：马芳去游泳

前提：$p \vee q$（使用相容性或），$\sim p$ 结论：q

即，验证$(p \vee q) \wedge \sim p \to q$ 为重言式。因此，有，推理形式：$(p \vee q) \wedge \sim p \Rightarrow q$　　(性质 c)

计算$((p \vee q) \wedge \sim p) \to q$ 的真值

$$
\begin{aligned}
((p \vee q) \wedge \sim p) \to q &= (\underline{(p \wedge \sim p)} \vee (q \wedge \sim p)) \to q \\
&= (q \wedge \sim p) \to q \\
&= \sim q \vee p \vee q \\
&= \underline{\sim q \vee q} \vee P \\
&= 1
\end{aligned}
$$

最好使用“排斥性或”：

$$
\begin{aligned}
&(((p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)) \wedge \sim p) \to q \\
&= ((\underline{\sim p \wedge p} \wedge \sim q) \vee (\underline{\sim p \wedge \sim p} \wedge q)) \to q \\
&= (\sim p \wedge q) \to q \\
&= \sim(\sim p \wedge q) \vee q \\
&= p \vee \underline{\sim q \vee q} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

例，$p \to q \Rightarrow \sim q \to \sim p$　(原命题推出逆否命题)

证明：$(p\to q)\to(\sim q\to\sim p)$

$$=(\sim p\vee q)\to(q\vee\sim p)$$

$$=(\sim p\vee q)\to(\sim p\vee q)=1$$

反之，$\sim q\to\sim p \Rightarrow p\to q$ （逆否命题推出原命题）

证明：$(\sim q\to\sim p)\to(p\to q)$

$$=(q\vee\sim p)\to(\sim p\vee q)$$

$$=(\sim p\vee q)\to(\sim p\vee q)$$

$$=1$$

因此，$p\to q \Leftrightarrow \sim q\to\sim p$，即，原命题与逆否命题等价。

例. 构造下列推理的论证 deduction

(1) $p\vee q,\ p\to\sim r,\ s\to t,\ \sim s\to r,\ \sim t \Rightarrow q$

①$s\to t$ hypothesis

②$\sim t$ hypothesis

③$\sim s$ Thm5(b)

④$\sim s\to r$ hypothesis

⑤r Thm5(a)

⑥$p\to\sim r$ hypothesis

⑦ $\sim p$ Thm5(b)

⑧ $p \vee q$ hypothesis

⑨ q Thm5(c)

即，$s \to t \Rightarrow \sim t \to \sim s$ (逆否命题等价)

$\sim s \to r \Rightarrow \sim t \to r$ (传递性)

$p \to \sim r \Rightarrow r \to \sim p$ (逆否命题等价)

$\sim t \to r$，$r \to \sim p \Rightarrow \sim t \to \sim p$ (传递性)

$p \vee q, \sim p \Rightarrow q$ (定理 5，性质 3，否定部分)

因此，上述结论成立。

例 3:若下午温度超过 30 度,则小王必去游泳;若她去游泳，她就不去看电影。所以若小王去看电影，下午气温必不超过 30 度。

解：p：下午温度超过 30 度

q：小王必去游泳，R：小王去看电影

前提：$p \to q$，$q \to \sim r$

结论：$r \to \sim p$

即，验证$((p \to q) \wedge (q \to \sim r)) \to (r \to \sim p)$是否为重言式。正确的话,则有推理形式:$(p \to q) \wedge (q \to \sim r) \Rightarrow (r \to \sim p)$。

证明：1）根据运算性质：

因为 $(p\to q)\wedge(q\to \sim r)\Rightarrow p\to \sim r$(传递性)；$p\to \sim r\Rightarrow r\to \sim p$(逆否命题等价)

2）计算$((p\to q)\wedge(q\to \sim r))\to(r\to \sim p)$的真值

$((p\to q)\wedge(q\to \sim r))\to(r\to \sim p)$

$=((\sim p\vee q)\wedge(\sim q\vee \sim r))\to(r\to \sim p)$

$=((\sim p\vee q)\wedge \sim q)\vee((\sim p\vee q)\wedge \sim r))\to(r\to \sim p)$

$=(\sim p\wedge \sim q)\vee(q\wedge \sim q)\vee(\sim p\wedge \sim r)\vee(q\wedge \sim r)$

$\to(\sim r\vee \sim p)$

$=((p\vee q)\wedge(p\vee r)\wedge(\sim q\vee r))\vee(\sim r\vee \sim p)$

$=((\sim r\vee \sim p)\vee((p\vee q)\wedge(p\vee r)))\wedge((\sim r\vee \sim p)\vee$

$(\sim q\vee r))$

$=[((\sim r\vee \sim p)\vee(p\vee q))]\wedge[((\sim r\vee \sim p)\vee(p\vee r))]\wedge$

$[((\sim r\vee \sim p)\vee(\sim q\vee r))]=1\wedge 1\wedge 1=1$

例：甲、乙、丙、丁 4 个人有且仅有 2 个人参加比赛。关于谁参加比赛，下列 4 种判断都是正确的：

1）甲和乙只有 1 人参加；

2）丙参加，丁必参加；

3）乙或丁至多参加 1 人；

4）丁不参加，甲也不会参加。

请问：哪两位参加了围棋比赛？

首先，命题符号化，设

A：甲参加了比赛，

B：乙参加了比赛，

C：丙参加了比赛，

D：丁参加了比赛

依题意，进行符号化处理有，

$[(\sim A\wedge B)\vee(A\wedge\sim B)]\wedge(C\rightarrow D)\wedge(\sim(B\wedge D))\wedge(\sim D\rightarrow\sim A)$

$=[(\sim A\wedge B)\vee(A\wedge\sim B)]\wedge(\sim C\vee D)\wedge(\sim B\vee\sim D)\wedge(D\vee\sim A)$

$=\{[(\sim A\wedge B)\vee(A\wedge\sim B)]\wedge\sim C\}\vee\{[(\sim A\wedge B)\vee(A\wedge\sim B)]\wedge D\}\wedge\{[(\sim B\vee\sim D)\wedge D]\vee[(\sim B\vee\sim D)\wedge\sim A]\}$

$=\{(\sim A\wedge B\wedge\sim C)\vee(A\wedge\sim B\wedge\sim C)\vee(\sim A\wedge B\wedge D)\vee(A\wedge\sim B\wedge D)\}\wedge\{(\sim B\wedge D)\vee(\sim D\wedge D)\vee(\sim B\wedge\sim A)\vee(\sim D\wedge\sim A)\}$

$=(A\wedge\sim B\wedge\sim C\wedge D)\vee(A\wedge\sim B\wedge D)\vee(\sim A\wedge B\wedge\sim C\wedge\sim D)$

由于仅有 2 人参加，故最后为假。

因此，甲和丁参加了围棋比赛。

2.7 量词 Quantifier

简单命题(张三是学生)可以被分解成个体词和谓词两部分。个体词可以是一个具体的事物，也可以是一个抽象的概念（类似于主语）；而谓词是用来刻画个体词的性质或个体词之间关系的词（类似于谓语）。

如：“小李是程序员”，“2 是整数”，在这里，“小李”、“2”是个体词，“…是程序员”、“…是整数”是谓词。

一般来说，除了个体词和谓词以外，还有表示数量的词，表示数量的词被称为量词 **Quantifier.**

量词有两种：

1. 全称量词 **Universal Quantifier**，其日常意义为“一切”、“所有的”、“任意的”，用符号“$\forall$”来表示。

“$\forall x\, P(x)$”，表示对于所有的个体 x，使得性质 P(x)成立，或者都有性质 P(x)成立.

例如，

1) $P(x)$: $-(-x)=x$，x 是实数，即，对于所有的实数，都有负负得正成立，则 $\forall x\, P(x)$ 真；

2) $Q(x)$: $x+1<4$，对于所有的实数，不是都有 $x+1<4$ 成立，则 $\forall x\, Q(x)$ 假。

2. 存在量词 Existential Quantifier 其日常意义为“存在着”、“有一个”、“至少有一个”，用符号“∃”来表示。

“∃x P(x)”， 表示存在着某个个体 x，使得性质 P(x)成立，或者有性质 P(x)成立.

令 Q(x): x+1<4, 则存在着实数 x, 有或者使得 x+1<4 成立，记为 ∃x Q(x) 真。

有了这些符号，叙述就变得简单了。如，

∀x ∃y Q(x,y)
即，对于所有的 x，存在 y，使得性质 Q(x,y)成立。

令 R 是实数集，我们有∀a ∃b(a+b=0)，其中，0 是实数(R)关于加法(+)的单位元。

在线性代数中，令 A,B 是 n 行 n 列的矩阵，有∀A ∃B (A+B=I)，其中 I 是 n 阶单位矩阵。

数列极限的描述：

令a_n是数列，$\lim_{n\to\infty} a_n = a$等价于 $\forall \varepsilon$>0 $\exists N_0$ $\forall$ $n > N_0$，$|a_n - a| < \varepsilon$.

反之，令a_n是数列，如果极限不为 a，$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$ 等价于 $\exists \varepsilon_0$>0 $\forall N_0$ $\exists n > N_0$，$|a_n - a| \geq \varepsilon_0$.

Theorem 3.

1.~(∀x P(x))=∃x（~P(x))；
2.~(∃x P(x))= ∀x (~P(x));
3.∀x (P(x)∧Q(x))= ∀x P(x) ∧∀x Q(x)；
4.∃x（P(x)∨Q(x))= ∃x P(x) ∨∃x Q(x)；
5.(∀x P(x))∨(∀x Q(x))⇒∀x(P(x)∨Q(x))；
6.∃x (P(x)∧Q(x)) ⇒ ∃x P(x)∧∃x Q(x)；
7.∀x (P(x)→Q(x))⇒∀x P(x) →∀x Q(x)；
8.∃x (P(x)→Q(x))=∀x P(x) →∃x Q(x)；

首先需要指出的是，此处的等号(=)是逻辑等价(⇔)

证明：1）~(∀x P(x))为真 ⇔ ∀x P(x)为假 ⇔ ∃a，使得 P(a)为假 ⇔ ∃a，使得~P(a)为真 ⇔ ∃x（~P(x))真。

2）∀x (~P(x))为假 ⇔ ∃a 使得 ~P(a)为假

$\Leftrightarrow \exists a$ 使得 $P(a)$为真 $\Leftrightarrow \exists x$ 使得 $P(x)$为真
$\Leftrightarrow \sim(\exists x\, P(x))$为假。

3)如果$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$为真，则对于任意一个个体 a，都有 $P(a)$和 $Q(a)$为真，于是$\forall x\, P(x)$与$\forall x\, Q(x)$均为真，从而$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$为真，因此
$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x)) \Rightarrow \forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$；

反之，如果$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x)$为真，则
$\forall x\, P(x)$ 与$\forall x\, Q(x)$ 均为真，于是对于任意一个个体 a,都有 $P(a) \wedge Q(a)$为真，所以
$\forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$为真，因此
$\forall x\, P(x) \wedge \forall x\, Q(x) \Rightarrow \forall x\ (P(x) \wedge Q(x))$

5)若$\forall x\ (P(x) \vee Q(x))$为假，则存在一个个体 a，使得 $P(a) \vee Q(a)$为假，于是 $P(a)$和 $Q(a)$均为假，于是$\forall x\, P(x)$ 和$\forall x\, Q(x)$为假，从而$((\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x))$为假，所以，
$(\forall x\, P(x)) \vee (\forall x\, Q(x)) \Rightarrow \forall x\ (P(x) \vee Q(x))$

7）$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge \forall x\, P(x)$，通过运算，则 上述命题运算，由 3)可知
$\Leftrightarrow \forall x\, [((\sim P(x) \vee Q(x)) \wedge P(x)]$

$\Leftrightarrow \forall x\, ((P(x) \wedge Q(x))$ 由 3)可知

$\Leftrightarrow \forall x\, P(x) \wedge \forall x\ Q(x) \Rightarrow \forall x\ Q(x)$ {由 $p \wedge q \rightarrow q$ 可知}

所以，

$$\forall x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \Rightarrow \forall x\ P(x) \rightarrow \forall x\ Q(x)$$

8) $\exists x\, (P(x) \rightarrow Q(x)) \Leftrightarrow \exists x\ (\sim P(x) \vee Q(x))$

由 4）可知 $\Leftrightarrow \exists x\ (\sim P(x)) \vee \exists x\ Q(x))$

$\Leftrightarrow \sim \forall x\ P(x) \vee \exists x\ Q(x))$

$\Leftrightarrow \forall x\ P(x) \rightarrow \exists x\ Q(x))$

4), 6)留给读者证明。

类似地，我们还可以得到一些推理关系和逻辑等价关系，并辅之予一些推理规则，因此就可以构造出一个结构严谨的形式证明，使得由公理系统中的公理和推理规则出发而求得定理的证明过程变得相对比较简单。

1965 年，美国数理逻辑学家 Robison 提出了一种算法，归结原理，1972 年法国马赛大学 Colmerauer 博士在此基础上设计了一种逻辑程序设计语言，Prolog 语言，从而在计算机上

可以实现谓词演算中的定理证明，使得机器证明变成可能。

Homework　P56, 23,24,25,26,27

2.9 数学归纳法

数学第一归纳法：

$\forall n \geq n_0$的自然数，$P(n)$成立

1) $P(n_0)$ 成立

2) $P(k)$ 成立 $\Rightarrow P(k+1)$ 成立

结论：$\forall n \geq n_0,\ P(n)$ 成立

$$Example\ 1:\ 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$Example\ 2:(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c=(\bigcap_{i=1}^{n} A_i{}^c)$$

$$Example\ 3:\ n!\geq 2^{n-1}$$

数学第二归纳法：

$\forall n \geq n_0$的自然数，$P(n)$成立

1) $P(n_0)$ 成立

2) $\forall n_0 \leq k, P(n_0) \wedge P(n_0+1) \wedge P(n_0+2) \wedge \cdots \wedge P(k)$ 成立

$\Rightarrow P(k+1)$ 成立

结论：$\forall n \geq n_0, P(n)$ 成立

$Example\ 4$：$Fibonacci$数列，$a_1 = 1, a_2 = 1,$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \forall n \geq 3$

证明：$a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}[(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2})^n - (\dfrac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$

特别注意：

$a_n = (n^2 - 5n + 5)^2$

可以验证， $a_1 = 1, a_2 = a_3 = a_4 = 1, a_5 = 25 \neq 1$