无穷级数习题

一、填空题

1、设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为3，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^{n+1}$的收敛区间为__________。

2、幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$的收敛域为______________。

3、幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(-3)^n+2^n}x^{2n-1}$的收敛半径$R=$____________。

4、幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$的收敛域是___________。

5、级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n4^n}$的收敛域为___________。

6、级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 3)^n}{2^n}$的和为____________。

7、$\sum_{n=1}^{\infty}n(\frac{1}{2})^{n-1}=$_______________。

8、设函数$f(x)=\pi x+x^2\quad(-\pi<x<\pi)$的傅里叶级数展开式为

$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，则其系数$b_3$的值为_____________。

9、设函数$f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x\le 0,\\ 1+x^2, & 0<x\le\pi,\end{cases}$则其以$2\pi$为周期的傅里叶级数在点$x=\pi$处的敛于__________。

10、级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$的和___________。

11、级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{2n}}{n\cdot 4^n}$的收敛域为___________。

参考答案：1、$(-2,4)$　2、$(-1,1)$　3、$R=\sqrt{3}$　4、$[-1,1)$　5、$(0,4)$

6、$\frac{2}{2-\ln 3}$　7、4　8、$\frac{2}{3}\pi$　9、$\frac{1}{2}\pi^2$　10、$\frac{1}{4}$　11、$(0,4)$

二、选择题

1、设常数$\lambda > 0$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$是（　　　　）。

（A）发散　（B）条件收敛　（C）绝对收敛　（D）收敛与λ有关

2、设$p_n = \frac{a_n + |a_n|}{2}$，$q_n = \frac{a_n - |a_n|}{2}$，$n = 1.2\cdots$，则下列命题中正确的是（　　　　）。

（A）若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$都收敛。

（B）若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$都收敛。

（C）若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$的敛散性都不一定。

（D）若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} p_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$的敛散性都不定。

3、设$a_n > 0, n = 1,2\cdots$，若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$收敛，则下列结论正确的是（　　　　）。

（A）$\sum_{N=1}^{\infty} a_{2n-1}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$发散.　（B）$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$发散.

（C）$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$收敛.　（D）$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$收敛.

4、设α为常数，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin(n\alpha)}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$是（　　　）

（A）绝对收敛.　（B）条件收敛.　（C）发散.　（D）收敛性与α取值有关.

5、级数$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1 - \cos\frac{\alpha}{n})$（常数$\alpha \succ 0$）是（　　　）

（A）发散.　（B）条件收敛.　（C） 绝对收敛.　（D）收敛性与α有关.

6、设$u_n = (-1)^n \ln(1 + \frac{1}{\sqrt{n}})$，则级数

（A）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$都收敛.　（B）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$都发散.

（C）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛而$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^2$发散.　（D）$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散而$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$收敛.

7、已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2,\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=5$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$等于（　　　　）。

（A）3.　　　（B）7.　　　　（C）8.　　　（D）9.

8、设函数$f(x)=x^2(0\le x\le 1)$，而

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x,\qquad -\infty<x<\infty$$

其中$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi xdx$，$n=1,2,3\cdots$，则$S(-\frac{1}{2})$等于（　　　　）。

（A）$-\frac{1}{2}$.　　　（B）$-\frac{1}{4}$.　　　（C）$\frac{1}{4}$.　　　（D）$\frac{1}{2}$.

9、设$f(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le\frac{1}{2}\\ 2-2x, & \frac{1}{2}<x<1\end{cases}$　　$S(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x$，$-\infty<x<+\infty$

其中$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi xdx\quad(n=0,1,2,\cdots)$　　则$S(-\frac{5}{2})$等于（　　　　）。

（A）$\frac{1}{2}$.　　（B）$-\frac{1}{2}$.　　（C）$\frac{3}{4}$.　　（D）$-\frac{3}{4}$.

10、设级数$\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n$收敛，则必收敛的级数为

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$.　（B）$\sum_{n=}^{\infty}\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$.　（C）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$.　（D）$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$.

11、已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1=5}$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$等于（　　　）。

（A）3.　　　　（B）7.　　　（C）8.　　　（D）9.

12、若级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则级数（　　　）

（A）$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛.（B）$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛.（C）$\sum_{n=1}^{\infty}a_na_{n+1}$收敛.（D）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_n+1}{2}$收敛.

13、若$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$在$x=1$处收敛，则此级数在$x=2$处（　　　　）。

（A）条件收敛.　　（B）绝对收敛.　　（C）发散.　　（D）敛散性不能确定.

14、设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n$的收敛半径分别为$\frac{\sqrt{5}}{3}$与$\frac{1}{3}$，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n^2}{b_n^2}x^n$的收敛半径为（　　　　）

（A）5.　　　（B）$\frac{\sqrt{5}}{3}$.　　　（C）$\frac{1}{3}$.　　　（D）$\frac{1}{5}$.

参考答案：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
C	B	D	C	C	C		B	C	D	C	D	B	A

三、解答题

1、设$f(x)$在点$x=0$的某一邻域内具有二阶连续导数，且$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛。

【分析一】$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$表明$x\to 0$时$f(x)$是比$x$高阶的无穷小，若能进一步确定$f(x)$是$x$的$p$阶或高于$p$阶的无穷小，$p>1$，从而$\left|f(\frac{1}{n})\right|$也是$\frac{1}{n}$的$p$阶或高于$p$阶的无穷小，这就证明了$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f(\frac{1}{n})\right|$绝对收敛。

【证明一】由$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$及$f(x)$的连续性$\Rightarrow f(0)=0, f'(0)=0$。再由$f(x)$在$x=0$邻域有二阶连续导数及洛必达法则

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{f''(x)}{2}=\frac{1}{2}f''(0)$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\left|\frac{f(x)}{x^2}\right|=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|.$$

由函数极限与数列极限的关系$\Rightarrow$　$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\left|f(\frac{1}{n})\right|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}\left|f''(0)\right|$

因$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\left|f(\frac{1}{n})\right|$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}f(\frac{1}{n})$绝对收敛。

2、设正项数列$\left|a_n\right|$单调减小，且$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$发散，试问级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$是否收敛？

【分析与求解】因$\{a_n\}$单调下降有下界$0 \Rightarrow \exists$极限$\lim\limits_{x\to+\infty} a_n = a \ge 0$。若$a=0$，由莱布尼兹法则，并错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$收敛，与假设矛盾，于是$a>0$。

现在对正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{a_n+1})^n$可用根值判别法：因为

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{(\frac{1}{a_n+1})^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a_n+1}=\frac{1}{a+1}<1,$$

所以原级数收敛。

3、求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n+(-2)^n}\frac{x^n}{n}$收敛区间，并讨论该区间端点处的收敛性。

【分析与求解】 直接用求收敛半径的公式，先求

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{3(1+(-\frac{2}{3})^n)^{\frac{1}{n}}}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}=\frac{1}{3}.$$

于是收敛半径$R=3$，收敛区间为$(-3,3)$.

当$x=3$时是正项级数：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$.

$\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n}(n\to+\infty)$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，

$\Rightarrow\quad \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}$发散，即$x=3$时原幂级数发散。

当$x=-3$时是变号级数，我们用分解法讨论它的敛发散。

$$\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}=\frac{(-1)^n(3^n+(-2)^n-(-2)^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$$

因 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\frac{1}{n}}{\frac{2^n}{3^n}}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}=0,\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{2}{3})^n$收敛，

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+(-2)^n} \cdot \frac{1}{n}$收敛，又$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^n+(-2)^n} \frac{1}{n}$收敛，即$x=-3$时原幂级数收敛。

4、（1）验证函数$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$满足微分方程

$y''+y'+y=e^x$；

（2）利用（1）的结果求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数。

【分析与求解】

（1）首先验证该幂级数的收敛区间是$(-\infty,+\infty)$. 这是缺项幂级数，令$t=x^3$，则

$$\text{原级数}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{(3n)!}$$

由
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(3(n+1))!}}{\frac{1}{(3n)!}}=\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}=0$$

$\Rightarrow t\in(-\infty,+\infty)$，从而$x\in(-\infty,+\infty)$时原级数收敛。

其次，在收敛区间内对幂级数可以逐项求导任意次，这里要求逐项求导两次：

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}, \quad y''(x)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}, \quad x\in(-\infty,+\infty).$$

于是
$$y''(x)+y'(x)+y(x)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$$

$$\underline{\underline{\text{级数的线性性质}}}\ 1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\frac{x^{3n}}{(3n)!}\right)$$

$$=1+\left(x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}\right)+\left(\frac{x^4}{4!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^6}{6!}\right)+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$=e^x \quad (-\infty<x<\infty)$.（收敛级数与它任意添加括号后的级数有相同的和）

（2）因为幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数$y(x)$满足微分方程

$$y''+y'+y=e^x. \qquad ①$$

又知 $$y(0)=1, y'(0)=0. \qquad ②$$

所以为求$y(x)$只须解二阶线性常系数微分方程的初值问题①+②

该方程相应的齐次方程的特征方程为 $\lambda^2+\lambda+1=0.$

特征根为$\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \Rightarrow$ 相应齐次方程的通解为

$$y=e^{-\frac{1}{2}x}(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x).$$

设非齐次方程的一个特解为$y*=Ae^x$，代入方程①得

$$y*''+y*'+y*=3Ae^x=e^x.$$

$\Rightarrow$ $$A=\frac{1}{3}.$$

$\Rightarrow$ 非齐次方程①的通解为 $y=e^{-\frac{x}{2}}(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)+\frac{1}{3}e^x.$

令$x=0$，由初始条件② $\Rightarrow$

$$\begin{cases} y(0)=c_1+\frac{1}{3}=1, \\ y'(0)=-\frac{1}{2}c_1+\frac{\sqrt{3}}{2}c_2+\frac{1}{3}=0. \end{cases} \Rightarrow c_1=\frac{2}{3}, c_2=0.$$

因此 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}=y(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

5、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n(2n-1)})x^{2n}$的收敛区间与和函数$f(x)$.

【分析与求解】 这是缺项幂级数，令$t=x^2$,考察$\sum_{n=1}^{\infty}a_nt^n$，其中

$$a_n=(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n(2n-1)}).$$

由 $$1 \prec \sqrt[n]{|a_n|} \le \sqrt[n]{2} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1.$$

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n$ 的收敛半径为 1 $\Rightarrow$ 原幂级数收敛半径为 1，收敛区间为 $(-1,1)$。

下面求和函数：

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n} = x^2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)} = x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \frac{x^2}{1+x^2},$$

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n(2n-1)}x^{2n},$$

$$\Rightarrow \qquad f_2'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1},$$

$$f_2''(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2(n-1)} = \frac{2}{1+x^2} \qquad (|x|<1)$$

注意 $f_2'(0)=0, f_2(0)=0$，积分两次得

$$f_2'(x) = \int_0^x f_2''(t)dt = 2\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = 2\arctan x,$$

$$f_2(x) = \int_0^x f_2'(t)dt = 2\int_0^x \arctan t dt = 2x\arctan x - 2\int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt$$

$$= 2x\arctan x - 1n(1+x^2) \qquad (|x|<1).$$

因此，$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2} + 2x\arctan x - 1n(1+x^2).$

6、求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}(n^2-n+1)$ 的和。

【分析与求解】先将级数分解：

$$A = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}(n^2-n+1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}n(n-1) + \sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n.$$

第二个级数是几何级数，它的和已知

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^n = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{2}{3}.$$

求第一个级数的和转化为幂级数求和，考察

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \qquad (|x|<1)$$

$$\Rightarrow \qquad S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n n(n-1)x^{n-2}=\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right]''=(\frac{1}{1+x})''=\frac{2}{(1+x)^3}$$

$$\Rightarrow \qquad \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}n(n-1)=\frac{1}{2^2}S(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\frac{2}{(1+\frac{1}{2})^3}=\frac{4}{27}.$$

因此原级数的和 $\qquad A=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}.$

7、求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n(n^2-1)}$的和。

【分析与求解】 先用分解法将原级数分解。

$$A=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1})=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n-1)}-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}\overset{\text{记}}{=\!=}A_1-A_2.$$

要熟记五个简单函数的幂级数展开式，与此级数和有关的是$\ln(1+x)$，即

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n \qquad (-1<x\le 1).$$

于是 $\qquad A_1=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n-1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+2}n}$

$$=-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(\frac{-1}{2})^n=-\frac{1}{4}\ln(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{4}\ln 2,$$

$$A_2=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}(n+1)}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{2^n n}$$

$$=-\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-\frac{1}{2})^n=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}(-\frac{1}{2})^n-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})^2$$

$$=-\ln(1-\frac{1}{2})-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\ln 2-\frac{5}{8},$$

因此 $\qquad A=A_1-A_2=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2.$

8、将函数$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$展为$x$的幂级数。

【分析与求解】$f'(x)$容易展开。

$$f'(x)=\frac{1}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2}\frac{(1-x)-(1+x)\cdot(-1)}{(1-x)^2}=\frac{2}{(1-x)^2+(1+x)^2}$$

$$=\frac{1}{1+x^2},$$

由 $\frac{1}{1+t}=1-t+t^2-\cdots+(-1)^n t^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n \quad (|t|<1)$，得

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(|x|<1). \qquad ①$$

在幂级数的收敛区间内可逐项积分得

$$\int_0^x f'(t)dt=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt,$$

$$f(x)=f(0)+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad ②$$

且收敛区间不变，当 $x=\pm 1$ 时，②式右端级数均收敛，而左端 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 在 $x=-1$ 连续，在 $x=1$ 无定义，因此

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},x\in[-1,1)$$

9、将函数 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$ 展开成 x 的幂级数。

【分析与求解】$f(x)=\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\arctan x-x$，先求 $f'(x)$ 的展开式

$$f'(x)=\frac{1}{4}\frac{1}{1+x}+\frac{1}{4}\frac{1}{1-x}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{1-x^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}-1=\frac{1}{1-x^4}-1=\sum_{n=0}^{\infty}x^{4n}-1=\sum_{n=1}^{\infty}x^{4n} \qquad (|x|<1)$$

积分得 $$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x t^{4n}dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}(|x|<1).$$

10、设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1+x^2}{2}\arctan x, x\neq 0\\ 1, \qquad x=0\end{cases}$ 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和。

【分析与求解】 关键是将 $\arctan x$ 展成幂级数，然后约去因子 x，再乘上 $1+x^2$ 并化简即

可。直接将$\arctan x$展开办不到，且$(\arctan x)'$易展开，即

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, |x| < 1, \qquad ①$$

积分得

$$\arctan x = \int_0^x (\arctan t)' dt = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad x \in [-1,1]. \qquad ②$$

因为右端级数在$x = \pm 1$时均收敛，又$\arctan x$在$x = \pm 1$连续，所以展开式在收敛区间端点$x = \pm 1$成立。

现将②式两边同乘$\frac{1+x^2}{x}$得

$$\frac{1+x^2}{x}\arctan x = (1+x^2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{2n+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1}\right]x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n}, x \in [-1,1], x \neq 0.$$

上式右端当$x = 0$时取值为 1，于是

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2}{1-4n^2}x^{2n}, x \in [-1,1].$$

上式中令$x = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2} = \frac{1}{2}[f(1) - 1] = \frac{1}{2}[2 \times \frac{\pi}{4} - 1] = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.$

11、将函数$f(x) = 2 + |x| (-1 \le x \le 1)$展成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$的和。

【分析与求解】 按傅氏系数公式，先求$f(x)$的傅氏系数a_n与b_n。

因$f(x)$为偶函数$b_n = 0 (n = 1,2,3\cdots).$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x dx \overset{l=1}{=} 2\int_0^1 (2+x)\cos n\pi dx$$

$$=4\int_0^1 \cos n\pi x dx+\frac{2}{n\pi}\int_0^1 xd\sin n\pi x=-\frac{2}{n\pi}\int_0^1 \sin n\pi x dx=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\Big|_0^1$$

$$=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]=\begin{cases}\dfrac{-4}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k\end{cases}.\quad (n=1,2,\cdots)$$

$$a_0=2\int_0^1(2+x)dx=5.$$

注意到 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 分段单调，连续且 $f(-1)=f(1)$，于是有傅氏展开式

$$f(x)=2+|x|=\frac{5}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi^2}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos(2n-1)\pi x, x\in[-1,1].$$

为了求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的值，上式中令 $x=0$ 得

$$2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}, \text{即}\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}.$$

现由 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{8},\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

12、将函数 $f(x)=x-1(0\le x\le 2)$ 展开成周期为 4 的余弦级数。

【分析与求解】这就是将 $f(x)$ 作偶延拓后再作周期 4 的周期延拓，于是得 $f(x)$ 的傅氏系数：

$b_n=0(n=1,2,3\cdots).$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\overset{l=2}{=\!=}\int_0^2(x-1)\cos\frac{n\pi}{2}xdx$$
$$=\frac{2}{n\pi}\int_0^2(x-1)d\sin\frac{n\pi}{2}x=-\frac{2}{n\pi}\int_0^2\sin\frac{n\pi}{2}xdx$$
$$=\frac{4}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi}{2}x\Big|_0^2=\frac{4}{n^2\pi^2}((-1)^n-1)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-8}{(2k-1)^2\pi^2}, & n=2k-1,\\ 0, & n=2k,\end{cases}\quad k=1,2,3\cdots$$

$$a_0=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (x-1)dx=\frac{1}{2}(x-1)^2\Big|_0^2=0.$$

由于（延拓后）$f(x)$在$\left[-2,2\right]$分段单调、连续且$f(-1)=f(1)$. 于是$f(x)$有展开式

$$f(x)=-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi}{2}x, x\in\left[0,2\right].$$

13、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left[3^n+(-2)^n\right]n}x^n$的收敛区间，并讨论该区间端关处的收敛性。

解：设$a_n=\frac{1}{\left[3^n+(-2)^n\right]n}>0,\quad n=1,2,\cdots,$

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[3^n+(-2)^n\right]n}{\left[3^{n+1}+(-1)^{n+1}\right](n+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{3}\frac{1+(-\frac{2}{3})^n}{1+(-\frac{2}{3})^{n+1}}=\frac{1}{3}$$

$\therefore R=3\quad\Rightarrow$收敛区间$(-3,3)$.

当$x=3$时，$a_n=\frac{3^n}{\left[3^n+(-2)^n\right]n}=\frac{1}{1+(-\frac{2}{3})^n}\cdot\frac{1}{n}>\frac{1}{2n}$

而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$发散$\Rightarrow$原级数在$x=3$处发散。

当$x=-3$时，$a_n=\frac{(-3)^n}{\left[3^n+(-2)^n\right]n}=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$

记$V_n=\frac{1}{\left[3^n+(-2)^n\right]n}>0, n=1,2,\cdots,$

$$\frac{V_{n+1}}{V_N}=\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+(-2)^{n+1}}\times\frac{3^n+(-2)^n}{2^n}, n=\frac{2}{3}\frac{1+(-\frac{2}{3})^n}{1+(-\frac{2}{3})^{n+1}}\cdot\frac{n}{n+1}$$

$\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{2}{3}<1\quad\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+(-2)^n}\cdot\frac{1}{n}$收敛，又$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛。

故原级数在$x=-3$处收敛$\Rightarrow$收敛域内$\left[-3,3\right)$.

14、将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数。

分析　先将 $f(x)$ 分解成部分分式，再利用等比级数间接展开。

解：$f(x)=\dfrac{n}{(2-x)(x+1)}=\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2-x}-\dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{1}{3}(\dfrac{1}{1-\dfrac{x}{2}}-\dfrac{1}{1+x})$,

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n,-2<x<2,$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n,-1<x<1.$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{3}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2^n}-(-1)^n\right]x^n,-1<x<1.$$

15、将函数 $f(x)=\arctan\dfrac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和。

分析　　直接展开较困难，先将 $f'(x)$ 展开，再递项积分得出 $f(x)$ 的展开式

解　$f'(x)=\dfrac{1}{1+(\dfrac{1-2x}{1+2x})^2}\cdot\dfrac{-2(1+2x)-2(1-2x)}{(1+2x)^2}=\dfrac{-2}{1+4x^2}$

$$=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(4x^2)^n=-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n},-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$$

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)dt=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n\int_0^x t^{2n}dt$$

$$=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot 4^n x^{2n+1}$$

当 $x=\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\cdot 4^n\cdot\dfrac{1}{2^{2n+1}}=\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛　　（莱布尼兹判别法）

当 $n=-\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}\cdot 4^n\cdot\dfrac{(-1)^{2n+1}}{2^{2n+1}}=-\dfrac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}$ 收敛

$$\therefore f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot 4^n\cdot x^{2n+1},x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

又 $f(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)^n}{2n+1}=\arctan 0=0$

$\therefore \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}.$

16、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数 $s(x)$.

解：求收敛域，由于该幂级数缺项幂级数，则直接用比值判别法求之，设

$$u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)},n=1,2\cdots$$

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{|x|^{2n+3}}{(n+1)(2n+1)}\frac{n(2n-1)}{|x|^{2n-1}}=x^2$$

当 $x^2<1$，即 $|x|<1$ 时，原级数绝对收敛；

当 $x^2>1$,即 $|x|>1$ 时，原级数发散。

所以原级数的收敛半径为 1，收敛区间是 $(-1,1)$.

当 $x=1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ 绝对收敛($\because \frac{1}{n(2n-1)}<\frac{1}{n^2}$)

同理，当 $x=-1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{n(2n-1)}$ 绝对收敛，

因此，该级数的收敛域为 $[-1,1]$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n(2n-1)},\qquad x\in[-1,1]$$

17、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n(2n-1)})x^{2n}$ (1) 的收敛区间与和函数 $f(x)$。

解：此级数(1)是缺项的幂级数

$$\text{令 } u_n(x)=(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n(2n-1)})x^{n-1}\frac{n(2n-1)+1}{n(2n-1)}x^{2n},n=1,2\cdots,$$

$$\because \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+1)+1}{(n+1)(2n+1)}\cdot\frac{n(2n-1)}{n(2n-1)+1}x^2=x^2$$

当$x^2<1$，即$|x|<1$时，级数(1)绝对收敛；

当$x^2>1$，即$|x|>1$时，级数(1)发散。

$\therefore$级数(1)的收敛区间为$(-1,1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{n(2n-1)})x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n}$$

记$g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n}=\dfrac{x^2}{1+x^2},\quad x\in(-1,1)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n(2n-1)}x^{2n}\overset{(例7)}{=\!=}xarctamx-\frac{1}{2}lin(1+x^2)$$

$$\therefore f(x)=g(x)+2S(x)=\frac{x^2}{1+x^2}+2\arctan x-lin(1+x^2),x\in(-1,1)$$

18、（1）讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$的敛散性，（2）已知级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$和$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$都收敛，试证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$绝对敛。

（1）解 $\because \dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\dfrac{(n+2)!}{(n+1)^{n+2}}\cdot\dfrac{n^{n+1}}{(n+1)!}=\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}\dfrac{1}{(1+\frac{1}{n})^n}\to\dfrac{1}{e}<1\qquad(n\to\infty)$

$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!}{n^{n+1}}$收敛

（2）证 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2$都收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}2|a_nb_n|$收敛$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$收敛

即 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n^{\alpha}$绝对收敛。

19、设有方程$x^n+nx-1=0$，其中n为正整数，证明此方程存在唯一的正实根x_n，并证明

当$\alpha > 1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} xn_n^2$收敛。

分析　（1）存在性用根的存在定理，唯一的性用函数的严格可调性

（2）用比较判别法证明$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^{\alpha}$收敛。

证　（1）取$f_n(x) = x^n + nx - 1 = 0$，则$f_n(x)$在$[0,1]$上连续，且

$f_n(0) = -1 < 0, f(1) = n > 0 \Rightarrow \exists n_n \in (0,1)$，使$f(x_n) = 0$，

又$f_n'(x) = nx^{n-1} + n > 0, x \in [0,+\infty] \Rightarrow f_n(x)$在$[0,+\infty]$上严格递增$\Rightarrow$方程

$x^n + nx - 1 = 0$存在唯一正实根$x_n \in (0,1)$.

由　$x_n^n + nx_n - 1 = 0$且$x_n \in (0,1)$，有

$$0 < x_n = \frac{1 - x_n^n}{n} < \frac{1}{n} \Rightarrow 0 < x_n^n < \frac{1}{n^{\alpha}} (\alpha > 1)$$

又　$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$收敛$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n_n^{\alpha}$收敛。

20、设$a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx.$

（1）试证：$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2})$

（2）试证：对任意常数$\lambda > 0$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^{\lambda}}$收敛。

（1）解　直接求$a_n + a_{n+2}$的表达式

$$\begin{aligned} a_n + a_{n+2} &= \int_o^{\frac{\pi}{4}} tan^n x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot (1 + \tan^2 x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \cdot \sec^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x d(\tan x) \\ &= \frac{1}{n+1} \tan^{n+1} x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}(a_n + a_{n+2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

$$S_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1})$$

$$=1-\frac{1}{n+1}\to 1(n\to\infty)$$

$$\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+1})=1$$

（2）证 $0<a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$ 令 $t=\tan^n,n=\arctan t$

$$=\int_0^1\frac{t^n}{1+t^2}dt<\int_0^1 t^n dt=\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

于是 $0<\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^{1+\lambda}}$

由于 $1+\lambda>1,\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\lambda}$ 收敛

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛。

21、求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n^2}$的收敛域。

【解】因系数$a_n=\frac{1}{n^2}(n=1,2\cdots)$,故 $\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=1.$

因此当$-1<x-3<1$，即$2<x<4$时级数绝对收敛。

当$x=2$时，得交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}$；当$x=4$时，得正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$，二者都收敛，

于是原级数的收敛域为$[2,4]$.

22、已知函数$f(x)=\begin{cases}x, & 若0\le x\le 1.\\ 2-x, & 若1<x\le 2.\end{cases}$ 试计算下列各题：

$(1)s_0=\int_0^2 f(x)e^{-x}dx;$ $(2)s_1=\int_2^4 f(x-2)e^{-x}dx;$

$(3)s_0=\int_{2n}^{2n+2}f(x-2n)e^{-x}dx$ $(n=2,3\cdots)$； $(4)s=\sum_{n=0}^{\infty}s_n$

【解】用分段积分法，分部积分法和换元积分法，分别可得

$$(1)s_0=\int_0^1 xe^{-x}dx+\int_1^2(2-x)e^{-x}dx=\int_0^1 xe^{-x}dx-\int_1^2 xe^{-x}dx+2\int_1^2 e^{-x}dx$$

$$=-xe^{-x}\Big|_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx+xe^{-x}\Big|_1^2+\int_1^2 e^{-x}dx=\frac{1}{e^2}-\frac{2}{e}+1=(1-\frac{1}{e})^2=\frac{1}{e^2}(e-1)^2;$$

$(2)s_1\underline{\underline{x-2=t}}\int_0^2 f(t)e^{-t-2}dt=e^{-2}\int_0^2 f(t)e^{-t}dt=s_0e^{-2}=\frac{s_0}{e^2}$;

$(3)s_n\underline{\underline{x-2n=t}}\int_0^2 f(t)e^{-t-2n}dt=e^{-2n}\int_0^2 f(t)e^{-t}dt=s_0e^{-2n}=\frac{s_0}{e^{2n}}$;

(4)利用以上结果，有 $s=\sum_{n=0}^{\infty}s_n=s_0\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{e^2})^n=\frac{S_0}{1-\frac{1}{e^2}}=\frac{e^2s_0}{e^2-1}=\frac{(e-1)^2}{e^2-1}=\frac{e-1}{e+1}$

23、设有两条抛物线 $y=nx^2+\frac{1}{n}$ 和 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，记它们交点的横坐标的绝对值为 a_n。

（1）求这两条抛物线所围成的平面图形的面积 s_n；

（2）求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{a_n}$ 的和。

【解】（1）用 L_n 与 $L_{\mathrm{n+1}}$ 分别表示两条抛物线

$y=nx^2+\frac{1}{n}$ 与 $y=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$, L_n 与 L_{n+1}

有两个交点 $(-a_n,y_n)$ 与 (a_n,y_n)，如图5.2.

令 $nx^2+\frac{1}{n}=(n+1)x^2+\frac{1}{n+1}$，容易求得 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，利用定积分还可求得两抛物线围成的平面图形的面积。

$$s_0=\int_{-a_n}^{a_n}\left[nx^2+\frac{1}{n}-(n+1)x^2-\frac{1}{n+1}\right]dx$$

$$=\frac{2a_n}{n(n+1)}-\int_{-a_n}^{a_n}x^2dx=\frac{4}{3}\frac{1}{n(n+1)\sqrt{n(n+1)}}.$$

（2） 因为 $\frac{s_n}{a_n}=\frac{4}{3}\frac{1}{n(n+1)}=\frac{4}{3}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\quad(n=1,2\cdots\cdots)$,

于是 $$\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k}{a_k}=\frac{4}{3}\left[(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})\right]=\frac{4}{3}(1-\frac{1}{n+1}).$$

故 $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{s_k}{a_k}=\frac{4}{3}\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=\frac{4}{3}.$$

24、设$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x dx, n=0,1,2,\cdots$，求$\sum_{n=0}^{\infty} I_n$.

【解】由 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x d(\sin x)=\frac{1}{n+1}(\sin x)^{n+1}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}$$

令$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，因其收敛半径$R=1$，且$s(0)=0$，故在$(-1,1)$内有

$$s'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$$

于是 $$s(x)=s(0)+\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-1n(1-x),-1\prec x\prec 1.$$

令$x=\frac{\sqrt{2}}{2}\in(-1,1)$，

即得 $$s(\frac{\sqrt{2}}{2})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(\frac{\sqrt{2}}{2})^{n+1}=-1n(1-\frac{\sqrt{2}}{2})=1n(2+\sqrt{2}).$$

从而 $$\sum_{n=0}^{\infty} I_n=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^n x\cos x dx=s(\frac{\sqrt{2}}{2})=1n(2+\sqrt{2}).$$

25、已知$f_n(x)$满足$f_n'(x)=f_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$为正整数），且$f_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$之和。

【解】由已知条件可知$f_n(x)$满足一阶线性微分方程

$$f_n'(x)-f_n(x)=x^{n-1}e^x,\Rightarrow \text{其通解为}\quad f_n(x)=e^x(\frac{x^n}{n}+c).$$

由条件$f_n(1)=\frac{e}{n}$，得$c=0$，故$f_n(x)=\frac{x^n e^x}{n}$.从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n e^x}{n}=e^x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

记$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，其收敛域为$[-1,1)$,且$S(0)=0$,当$x\in(-1,1)$时，有

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}.$$

故 $$s(x)=s(0)+\int_0^x s'(t)dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x).$$

由$s(x)$与$-\ln(1-x)$在$x=-1$的连续性知，上述和函数公式在$x=-1$处也成立，

于是，当$-1\le x<1$时，有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)=e^x s(x)=-e^x 1n(1-x)$.

26、（1）验证函数$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$满足微分方程

$y''+y'+y=e^x$；

(1)利用(1)的结果求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$的和函数。

【解】 (1)因为幂级数

$$y(x)=1+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^6}{6!}+\frac{x^9}{9!}+\cdots+\frac{x^{3n}}{(3n)!}+\cdots$$

的收敛域是$(-\infty,+\infty)$，因而可在$(-\infty,+\infty)$上逐项求导数，得

$$y'(x)=\frac{x^2}{2!}+\frac{x^5}{5!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots+\frac{x^{3n-1}}{(3n-1)!}+\cdots,$$

$$y''(x)=x+\frac{x^4}{4!}+\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{x^{3n-2}}{(3n-2)!}+\cdots,$$

所以 $$y''+y'+y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x(-\infty<x<+\infty).$$

（2）与$y''+y'+y=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots=e^x(-\infty<x<+\infty).$

相应的齐次微分方程为$y''+y'+y=0$,

其特征方程为 $\lambda^2+\lambda+1=0$，特征根为 $\lambda_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i.$

因此齐次微分方程的通解为 $Y=e^{-\frac{x}{2}}\left[c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right].$

设非齐次微分方程的特解为 $y*=Ae^x$，将 $y*$ 代入方程 $y''+y'+y=e^x$ 可得

$$A=\frac{1}{3}，即有\quad y*=\frac{1}{3}e^x.$$

于是，方程通解为 $y=Y+y*=e^{-\frac{x}{2}}\left[c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right]+\frac{1}{3}e^x.$

当 $x=0$ 时，有 $\begin{cases} y(0)=1=C_1+\frac{1}{3}, \\ y'(0)=0=-\frac{1}{2}C_1+\frac{\sqrt{3}}{2}C_2+\frac{1}{3}. \end{cases} \Rightarrow\quad c_1=\frac{2}{3},c_2=0$

于是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{(3n)!}$ 的和函数为 $y(x)=\frac{2}{3}e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+\frac{1}{3}e^x(-\infty<x<+\infty).$

27、求幂级数 $1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}(|x|<1)$ 的和函数 $f(x)$ 及其极值。

【解】 将等式 $f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}(|x|<1)$ 逐项求导，得

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n x^{2n-1}=-\frac{x}{1+x^2}\qquad(|x|<1).$$

上式两边从0 到 x 积分，有

$$f'(x)-f(0)=-\int_0^x\frac{t}{1+t^2}dt=-\frac{1}{2}1n(1+x^2)\qquad(|x|>1).$$

由于 $f(0)=1$，故得到了和函数 $f(x)$ 的表达式

$$f(x)=1-\frac{1}{2}1n(1+x^2)\qquad(|x|<1).$$

令 $f'(x)=0$，可求出函数 $f(x)$ 有惟一驻点 $x=0$，因为

$$f''(x)=-\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\Rightarrow f''(0)=-1<0，$$

可见 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处取得极大值，且极大值为 $f(0)=1.$

28、设级数$\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$的和函数为$s(x)$，求：$(I)S(x)$所满足的一阶微分方程；$(II)S(x)$的表在式。

【解】 (I) $S(x)=\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots(-\infty<x<+\infty)$

易见$S(0)=0$，且幂级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$，在$(-\infty,+\infty)$上逐项求导，得

$$S'(x)=\frac{x^3}{2}+\frac{x^5}{2\cdot 4}+\frac{x^7}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots$$

$$=x(\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2\cdot 4}+\frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6}+\cdots)=x\left[\frac{x^2}{2}+S(X)\right].$$

因此$S(x)$是初值问题 $y'=xy+\frac{x^3}{2}$，$y(0)=0$的解。

(II) 方程 $y'=xy+\frac{x^3}{2}$的通解为$y=e^{\int sxdx}\left[\int\frac{x^3}{2}e^{-\int xdx}dx+C\right]=-\frac{x^2}{2}-1+Ce^{\frac{x^2}{2}}$，

由初始条件 $y(0)=0,$求得$C=1.$

故 $y=-\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1$，因此和函数$S(x)=\frac{x^2}{2}+e^{\frac{x^2}{2}}-1\quad(-\infty<+\infty).$

29、求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}-1)x^{2n}$在区间$(-1,1)$内的和函数$S(x).$

【解】 不难发现$S(0)=0$，从而，只需求当$0<|x|<1$时和函数$S(x)$的表达式，注意

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2n+1}-1)x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}$$

$$=\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}-x^2\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{x}S_1(x)-\frac{x^2}{1-x^2}$$

其中 $S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad x\in(-1,1)$

逐项求导，得 $S_1'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2}$， $x\in(-1,1)$.

将上式两端的 x 改写成 t，并分别从0 到 $x\in(-1,1)$ 求定积分，可得

$$S_1(x)-S_1(0)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}dt=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},x\in(-1,1).$$

又因 $S_1(0)=0$，于是 $S_1(x)=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x},x\in(-1,1).$

综合以上讨论，即得 $S(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \frac{1}{2x}\ln\frac{1+x}{1-x}-\frac{1}{1-x^2}, & 0<|x|<1\end{cases}$.

1．判别下列级数的敛散性：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2};\quad \sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n});\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n};\quad \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n+1}{3n-2})^{2n+1}$$

解：1）$\because$ $\sin\frac{1}{n^2}<\frac{1}{n^2}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，

由比较审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n^2}$ 收敛。

2）$\because$ $\ln(1+\frac{1}{n})\sim\frac{1}{n}$ $(n\to\infty)$，而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，

由比较审敛法的极限形式知 $\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+\frac{1}{n})$ 发散。

3） $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}$，

$\because$ $\rho<1$，由比值审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛。

4） $\rho=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^2\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{4}{9}$，

$\because$ $\rho<1$，由根值审敛法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{3n-2}\right)^{2n+1}$ 收敛。

2．判别下列级数是绝对收敛，条件收敛，还是发散？

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[\frac{n^2}{3^n}+\frac{1}{\sqrt{n}}];\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cos n}{3^n};\qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n-\ln n}}。$$

解：1）对于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{3^n}$，

由 $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{1}{3}$，知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2}{3^n}$ 绝对收敛，

易知$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$条件收敛，故 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}[\frac{n^2}{3^n}+\frac{1}{\sqrt{n}}]$条件收敛。

2）$|\frac{n^2\cos n}{3^n}|\le\frac{n^2}{3^n}=u_n$，由$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{1}{3}$，知级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$收敛，

故$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\cos n}{3^n}$绝对收敛。

3）记$u_n=\frac{1}{\sqrt{n-\ln n}}$，∵ $u_n\ge\frac{1}{n}$，而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，故$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散，

令$f(x)=x-\ln x$，$f'(x)=1-\frac{1}{x}$，当$x>1$时，$f'(x)>0$，故$f(x)$在区间$(1,+\infty)$内单调增加，由此可知 $u_n>u_{n+1}$，又$\lim_{n\to\infty}u_n=0$，故$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n-\ln n}}$收敛，但非绝对收敛，即为条件收敛。

3．求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ 的收敛区间。

解：收敛半径为 $R=\lim_{n\to\infty}|\frac{a_n}{a_{n+1}}|=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}}=1$，

当$x=2$时，得级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，发散；

当$x=0$时，得交错级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$，收敛。

所求收敛区间为$[0,2)$。

4．证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}x^n$ 当$|x|<e$时绝对收敛，当$|x|\ge e$时发散。

注：数列$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$单调增加，且$\lim_{n\to\infty}x_n=e$。

证：收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$，

当$|x|<e$时幂级数绝对收敛，当$|x|>e$时幂级数发散，

当$|x|=e$时，得级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(\pm e)^n$，$|u_n|=\frac{n!}{n^n}e^n$，$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}$，因$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$单调增加，且$\lim_{n\to\infty}x_n=e$，故$x_n<e$，于是得$|u_{n+1}|>|u_n|$，由此$\lim_{n\to\infty}u_n\ne 0$，故级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}(\pm e)^n$ 发散。

5．在区间$(-1,1)$内求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}$ 的和函数。

解：设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ （$-1<x<1$），$s(0)=0$，

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

$$s(x)=s(0)+\int_0^x s'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n}=xs(x)=-x\ln(1-x)\quad（-1<x<1）。$$

6．求级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和。

解：设$s(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}$ （$-1<x<1$），则

$$s(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n,$$

其中 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$， $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}$ （$x\neq 0$）。

设$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$，则$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，

于是 $$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x\frac{1}{1-x}dx=-\ln(1-x),$$

从而 $$s(x)=\frac{x}{2}[-\ln(1-x)]-\frac{1}{2x}[-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}]$$

$$=\frac{2+x}{4}+\frac{1-x^2}{2x}\ln(1-x)\quad（|x|<1,x\neq 0）。$$

因此 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}=s(\frac{1}{2})=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln 2$。

7．把$f(x)=\arctan x$展开成 x 的幂级数，并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}$ 的和。

解：$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ （$|x|<1$），

$$f(x)=f(0)+\int_0^x f'(x)dx=\int_0^x[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}]dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad（|x|<1），$$

因$f(x)$在点$x=\pm1$处连续，而$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$在点$x=\pm1$处收敛，

从而 $$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\quad（|x|\le 1）。$$

于是 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n(2n+1)}=\sqrt{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1}=\sqrt{3}f(\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{\sqrt{3}}{6}\pi。$$

8．设$a_1=2,a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})$ （$n=1,2,\cdots$）证明

1）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在； 2）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛。

证：1）因 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})\geq\sqrt{a_n\cdot\frac{1}{a_n}}=1$，

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}(a_n+\frac{1}{a_n})-a_n=\frac{1-a_n^2}{2a_n}\leq 0，$$

故 $\{a_n\}$ 是单调减少有下界的数列，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在。

2）由（1）知 $0\leq\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\leq a_n-a_{n+1}$，

记 $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1}$，因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ 存在，故 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 存在，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛，由比较审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1)$ 收敛。

9．设 $a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n xdx$，

求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})$ 的值；

试证：对任意的常数 $\lambda>0$，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛。

证：1） 因为 $\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x(1+\tan^2 x)dx$

$$=\frac{1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 xdx=\frac{1}{n(n+1)}，$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}(a_k+a_{k+2})=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=1-\frac{1}{n+1}，$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(a_n+a_{n+2})=\lim\limits_{n\to\infty} s_n=1$。

2） 因为 $a_n<a_n+a_{n+2}=\frac{1}{n+1}$，所以 $\frac{a_n}{n^\lambda}<\frac{1}{n^\lambda(n+1)}<\frac{1}{n^{\lambda+1}}$，

由 $\lambda+1>1$ 知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\lambda+1}}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛。

10．设正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 发散，试问 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 是否收敛？并说明理由。

解：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛。

理由：由于正项数列 $\{a_n\}$ 单调减少有下界，故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，记 $a=\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，则 $a\geq 0$。

若 $a=0$，则由莱布尼兹定理知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛，与题设矛盾，故 $a>0$。

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{a_n+1}=\dfrac{1}{a+1}<1$，由根值审敛法知级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{a_n+1}\right)^n$ 收敛。

11．已知$1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{8}$ [参见教材 246 页]，计算$\int_0^1\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}dx$

解：由 $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n$ （$|x|<1$），

得 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}x^n=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1}$

$$\int_0^1\frac{1}{x}\ln\frac{1+x}{1-x}dx=2\int_0^1[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}x^{2n}]dx=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{4}\text{。}$$

12．计算$\dfrac{1+\dfrac{\pi^4}{5!}+\dfrac{\pi^8}{9!}+\cdots}{\dfrac{\pi^3}{3!}+\dfrac{\pi^7}{7!}+\dfrac{\pi^{11}}{11!}+\cdots}$。

解：由 $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$，

得 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)!}\pi^{2n+1}=\sin\pi=0$，

于是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(4n+1)!}\pi^{4n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{(4n+3)!}\pi^{4n+3}$，

从而 $$\frac{1+\dfrac{\pi^4}{5!}+\dfrac{\pi^8}{9!}+\cdots}{\dfrac{\pi^3}{3!}+\dfrac{\pi^7}{7!}+\dfrac{\pi^{11}}{11!}+\cdots}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\pi^{4n+1}}{(4n+1)!}}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{\pi^{4n+3}}{(4n+3)!}}=\frac{1}{\pi}$$