学经验和教学机智教学艺术是任何电脑都不能替代的．只是科学技术发展了，教师本来可以充分利用它的成果减少自己的重复性劳动，提高教学效率和水平，在更高的层次上进行再创造．

归根结底，数学教学是人们的一种社会活动，而人们的生产活动和社会活动是受当时科学技术的水平制约的．封建社会的小农经济离不开牲畜和犁，产业革命则导致了资本主义大生产．在信息社会，人们的生产和生活必然要受到计算机的影响，正是这个背景突出了数学对社会的重要性，同时也必然导致数学课堂的一场革命．广大的数学教师，数学教育工作者应该是这场革命的主角．

参考文献

1 张奠宙主编．数学教育研究导引，江苏教育出版社．

2 人人关心数学教育的未来，美国国家研究委员会．世界图书出版公司．

3 王鹏远．从教学软件《数列的极限》引发的思考．数学通报，1994,12.

4 CAI 与数学教育观念的现代化，中国中学数学教师优秀论文集，首都师范大学出版社．

5 林建祥，王鹏远．应用计算机技术加速基础数学的教学改革．二十一世纪基础数学教育改革国际研讨会论文集．

6 让 CAI 真正进入中学数学教学．待发表

体育赛制中的数学问题

曾文艺　　罗菊花

(北京师大数学系 100875)　(中国预防医科院)

1 体育赛制与“公平竞争”

当今社会，体育运动已经是人们的一个热门话题．它的魅力已远远超越了“锻炼身体，增进健康”的层次，因为它既可展示人类在体能和智能方面所能达到的一个个新高峰，又可激发参赛运动员所代表的国家或地区的人们的自豪感；另外，其魅力还体现在竞赛的激烈性和竞赛结果的某种偶然性．其实从欣赏体育竞赛的角度来看，人们总期望各种比赛应该遵循“公平竞争”的比赛制度和规则．

既然体育竞赛要强调“公平竞争”，那么，什么是“公平竞争”？我们认为，它指的是某一项目的所有参赛运动员 (队) 在同等的不妨碍竞赛正常进行的环境条件下，充分表现出他们各自在该运动项目上的固有的技能水平，以进行比较，决出高低．为了确定出全部运动员 (队) 的比赛名次，我们就应该根据竞赛制度而制定出一个确定名次的规则，来保证公平合理性，因此，这个规则应该满足下面三条原则：

第一：必须使全体参赛者都能获得一个分出先后的名次，如果给出并列名次，则这个“并列”必须是比赛过程中成绩相同的反映，而不应该是由于“无法分出先后”而人工指定的．

第二：名次的排列必须反映出参赛者实力的强弱 (至少是某一方面的实力强弱)，而不是由于赛制中作了人工约定而得出的先后名次．

第三：良好的赛制必须使得每场比赛均影响到参赛两队名次的升降，从而要求每队每场比赛都要全力以赴．

显然，现有的一些赛制并不完全遵守上面的三条原则，如乒乓球世锦赛中的单淘汰制．所以，为了保证比赛的“公平性”和“同等的环境条件”，许多球类比赛就有了“交换场地”这条规则，并且为了保证观众环境和地理气候环境的同等性，足球赛制便有了“主客场制”，这样在一些对抗性的比赛中，为了使参赛者能够“公平”地进行比赛，以便得到“合理”的名次．考虑到参赛者的“同等的对手环境”这一要求，因此就要求参赛者必须同所有的队进行比赛，这便是通常的循环赛制．

但是循环赛制的比赛场数多，耗时长，而且到赛季的后期，容易发生“放水”行为，也存在不少弊端，因此，人们又对循环赛制进行改革，于是出现了分组循环，分级循环等赛制．出于数学的习惯，我们称循环赛制为平衡赛制，而把其他的赛

制称为不平衡赛制，显然在不平衡赛制中，还可以采用一些方法来保证在某种意义下的相对同等的“对手环境”，这方面的一个典型例子就是世界杯足球赛决赛圈的第一阶段分组循环赛．在“不平衡”中尽可能地接近“平衡”，这便是组合优化的任务，本文不准备展开讨论，我们只探讨由“公平竞争”所涉及的另一个数学分支 — 概率论．

2 概率论与重复性赛制

平时，我们常听到这么一种说法，某运动员(队)“没有发挥出正常水平”或“超水平发挥”，其实这种说法反映了一个问题，即运动员(队)在其所从事项目上的固有技能水平是一个随机变量，运动员在具体的一次比赛中，其比赛成绩总是在其固有技能水平附近上下起伏波动，一般说来，要想大致把握一个随机变量的话，就必须对它进行多次抽样检验．因此，为了体现“公平竞争”的精神，比赛就应该让运动员(队)有多次表现的机会，这一精神体现在赛制中，即重复性赛制．这方面的例子很多，如射击比赛，国际象棋的棋王争夺战(比赛 16 局)，球类比赛的三局两胜制，五局三胜制等等．但是，重复性赛制和规则在有些情况下也是不可行的，如马拉松运动．重复性赛制可能“公平”地决出优胜者，然而竞赛的偶然性就大大地减少了，以至体育的魅力和竞赛的公平性二者之间就不可避免地产生矛盾，换句话说，体育赛制应如何进行改革呢？

下面，我们来具体分析一下：一局比赛中获胜概率大于 $\frac{1}{2}$ 的强队在重复性赛制中最终获胜的可能性增加情况．

为此，我们先给出三条假设：

a) 某队在一局比赛中获胜概率为 x，$\frac{1}{2} \le x \le 1$；

b) 每场比赛彼此独立；

c) 两队之间进行 $2n+1$ 局比赛，如果某队在比赛中赢了 $n+1$ 局，则表明该队获得胜利，从而结束比赛．

那么，由第一条假设和第 2 条假设可知，某队在 $2n+1$ 局比赛中赢 i 局和输掉 $2n+1-i$ 局比赛的概率为 $C_{2n+1}^{i}x^{i}(1-x)^{2n+1-i}$，所以某队在 $2n+1$ 局比赛中最终获取胜利的概率为

$$P_{2n+1}(x) = x^{n+1} + (C_{n+1}^{1}x^{n+1}(1-x) + \sum_{i=2}^{n} C_{n+i}^{i}x^{n+1}(1-x)^{i}$$

为了计算随着比赛局数的增加，该队获胜的概率增加值，我们定义

$$d_{2n+1}(x) = P_{2n+1}(x) - P_{2n-1}(x)$$

因此，针对日常遇到的重复性赛制问题，那么 n 分别取为 $1,2,3,4$，于是有：

$$\begin{aligned}
d_3(x) =& x^2 + 2x^2(1-x) - x \\
d_5(x) =& x^3 + 3x^3(1-x) + 6x^3(1-x)^2 \\
& -x^2 - 2x^2(1-x) \\
d_7(x) =& x^4 + 4x^4(1-x) + 10x^4(1-x)^2 \\
& +20x^4(1-x)^3 - x^3 \\
& -3x^3(1-x) - 6x^6(1-x)^2 \\
d_9(x) =& x^5 + 5x^5(1-x) + 15x^5(1-x)^2 \\
& +35x^5(1-x)^3 + 70x^5(1-x) - x^4 \\
& -4x^4(1-x) - 10x^4(1-x)^2 \\
& -20x^4(1-x)^3
\end{aligned}$$

利用计算机对 x 的取值范围 $[\frac{1}{2},1]$ 进行搜寻，从而得到函数 $d_{2n+1}(x)$ 最大值，它们分别为：

$$\max d_3(x) = 0.09622 \quad \max d_5(x) = 0.05365$$
$$\max d_7(x) = 0.03719 \quad \max d_9(x) = 0.02844$$

可见，随着比赛局数的增加，强队获胜概率的最大增加量将越来越小，并且 $\max d_7(x) < 0.05$，因此，综合考虑比赛的公平性(获胜的最大可能增加量)和比赛的欣赏性，我们认为五局三胜制较为可取，这点从排球变赛的赛制就可看出，并且乒乓球男子世锦赛团体冠亚军的争夺战也从原来的九局五胜制改为五局三胜制，也可验证它．

3 结束语

上面的分析表明．在体育比赛中，有时很难做到绝对的“公平竞争”，而且即使能做到，也未必能更加公平多少，况且还要牺牲竞赛的激烈性和竞赛结果的偶然，性从而减弱体育运动的魅力．因此，近年来国际体育界对赛制或规则的改革，大多是基于适当牺牲赛制的“公平性”来使得体育比赛更加激动人心．如排球比赛的第五局改革，“直接得分制”代替发球方得分制，世界杯足球赛决赛圈第二阶段的淘汰赛，使得强队过早相遇，这种悲剧性的结果在近几届世界杯上并不少见，也正是这种适当程度的悲剧性结果反而使得足球比赛更具魅力．

因此，“增强体育运动魅力”的呼声中，便出现了牺牲一些“公平性”从而使得体育比赛更具有吸引力的赛制改革．这恐怕就是一种“合理”的赛制．

美国芝加哥大学中学数学设计 (UCSMP)

向量

12.1 平面向量

由天气预报中的风速引入．含方向及标量两个要素的量，即是向量．

定义 向量是能够用其方向和长度来刻画的量．

平面向量或二维向量，可以用几种方法来表示．风速这个向量也可用一个序对 $[15, 45°]$([长度，方向]) 来表示．这叫做向量的极坐标表示．

定义 二维向量 $\vec{v}$ 的极坐标表示，用正的长度 r 和方向 θ(从极 x 轴反时针量出的) 表示，是 $[r, \theta]$.

用箭头表示 $\vec{v}$, 连结极点和点 $[r, \theta]$ 的箭头是标准位置，与标准位置的箭头平行且等长的箭头也是 $\vec{v}$ 的几何表示．

用三角可以把向量的极坐标表示变成更熟悉的形式．

例 1 船速用 $[12, 82°]$ 表示，其中第一个标量是每小时的里数，第二个是船行的东偏北的度数，

a. 画出表示向量的箭头的标准位置．

b. 用每小时向东的里数和向北的里数描述船的运动．

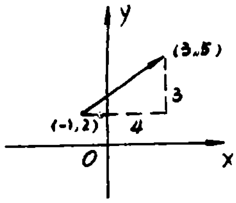
在例 1 中，可以用序对 $(12\cos 82°, 12\sin 82°) \approx (1.67, 11.88)$ 来描述船的运动．这也给出了标准位置箭头终点的直角坐标，这个序对就是向量的分量表示．

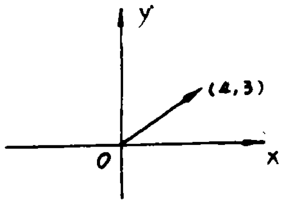
定义 平面向量 $\vec{v}$ 的分量表示是序对 (v_1, v_2), 它是 $\vec{v}$ 的标准位置箭头终点的直角坐标，数 v_1 和 v_2 分别是 $\vec{v}$ 的 x- 分量和 y- 分量，或水平分量和铅垂分量．

例 2 从 $(-1,2)$ 到 $(3,5)$ 的箭头表示一平面向量 $\vec{v}$.

a. 求 $\vec{v}$ 的长度和方向 ($\vec{v}$ 的长是 $\sqrt{4^2+3^2}=5$.)

b. 画出 $\vec{v}$ 的标准位置的箭头 (从 $(-1,2)$ 到 $(3,5)$ 的变换是 4 单位水平、3 单位铅垂变换，所以 $\vec{v}$ 的标准位置箭头是从原点到点 $(4,3)$.)





例 2 中的向量可用箭头，用序对 $(4,3)$ 或用极坐标 $[5, 36.9°]$ 表示．

注意到例 2 中 $(4,3)=(3-(-1), 5-2)$, 一般，若 $\vec{u}=(u_1,u_2)$ 是由 (a,b) 到 (c,d) 的向量，则 $(u_1,u_2)=(c-a, d-b)$. 即 $\vec{u}$ 的水平分量为 $c-a$, 铅直分量为 $d-b$.

例 3 向量 $\vec{u}$ 表示 5 磅力，它和正 x 轴张 $\frac{5}{6}\pi$ 角，求 $\vec{u}$ 的 x- 和 y- 分量．

符号 $|\vec{u}|$ 表示 $\vec{u}$ 的长 ($|\vec{u}|$ 有时叫 $\vec{u}$ 的模) 极坐标表示 $\vec{u}=[r,\theta], |\vec{u}|=r$. 在其分量表示中 $\vec{u}=(u_1,u_2)$, $|\vec{u}|$ 很容易用勾股定理确定．

定理 若 $\vec{u}=(u_1,u_2)$, 则 $|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$.

极坐标表示和分量表示间的关系可由例 1 和例 3 的一般化得到

定理 对一切平面向量 $\vec{u}$,

$[|\vec{u}|, \theta]=(|\vec{u}|\cos\theta, |\vec{u}|\sin\theta)$.

平面上的点 $(0,0)$ 对应零向量 $\vec{0}$. 零向量的长为零，并能有任意方向．

探索题 有没有一向量，它的极坐标表示和分量表示 (直角坐标表示) 都是一样的？换句话说向量 $\vec{v}=(x,y)=[r,\theta]$, 使 $x=r, y=\theta$. 如果