微积分II复习

张争茹

北京师范大学 数学科学学院

2017 年6 月 19 日

设$\boldsymbol{a} = (x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$

- **模：** $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- **单位向量：** $\boldsymbol{e} = \dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$
- **方向余弦：**

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \ \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

设$\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3),\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$.

- **加法**： $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$.
- **数乘**： $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$.
- **点乘**： $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.
- **叉乘**： $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

  方向：垂直于$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,并且$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$成右手系.

  坐标表示: $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\end{vmatrix}$几何意义：$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$为邻边的平行四边形的面积.

- **混合积**：$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$.
- **几何意义**： $|(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})|$表示以$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积.

- 两向量垂直：$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \Longleftrightarrow a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 0.$
- 两向量平行：$\boldsymbol{a} // \boldsymbol{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow \dfrac{a_1}{b_1} + \dfrac{a_2}{b_2} + \dfrac{a_3}{b_3} = 0.$

- **平面方程：** 平面上的一个点$M_0(x_0, y_0, z_0)$,平面的法向量 $\boldsymbol{n} = (A, B, C)$.
  - **点法式：**

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

  - **一般式：**

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

  - **截距式：**

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

- **直线方程：** 直线上的一个点$M_0(x_0, y_0, z_0)$,直线的方向向量 $\boldsymbol{s} = (l, m, n)$.
  - **一般式：**

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

  - **标准式：**

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$$

  - **参数式：**

$$\begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + nt \end{cases}$$

- **过直线的平面束：** 通过同一条直线的全体平面组成的平面族称为过该直线的平面束.

  过直线

$$\begin{cases} \pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

  其中$(A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2)$的平面束方程为:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \lambda(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$ λ是任意常数.

- **点到平面的距离公式：.**
  点$M_0(x_0, y_0, z_0)$到平面$Ax+By+Cz+D=0$的距离为：
  $$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$
- **点到直线的距离公式：.**
  点$M_0(x_0, y_0, z_0)$到直线$L:\dfrac{x-x_1}{l}=\dfrac{y-y_1}{m}=\dfrac{z-z_1}{n}$的距离为：
  $$d=\frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\times\vec{s}|}{|\vec{s}|}, M_1(x_1, y_1, z_1), \vec{s}=(l, m, n).$$
- **两直线的夹角：.**
  $$\cos\varphi=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$$
- **直线与平面的夹角：.**
  $$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}$$

- **柱面：** .
  母线平行于z轴,准线为

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

  的柱面方程为： $F(x,y)=0$

- **旋转曲面：** .
  曲线

$$L:\begin{cases} F(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

  绕x轴旋转一周所成的旋转曲面方程为：$F(x,\pm\sqrt{y^2+z^2})=0$

- 球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
- 椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 单叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 双叶双曲面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 椭圆抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=z$
- 双曲抛物面：$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=z$
- 二次锥面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$

- 球面：$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$
- 椭球面：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$
- 椭圆抛物面：$x^2+y^2=z$
- 圆锥面：$x^2+y^2=z^2$
- 柱面：$x^2+y^2=a^2$
- 马鞍面：$x^2-y^2=z$

设空间曲线的一般方程：

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

消去变量z后得到曲线关于xOy平面的投影柱面:$H(x,y)=0$ 空间曲线在xOy平面上的投影曲线为：

$$\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$$

同样，消去x或y再分别和$x=0$或$y=0$联立,得到曲线在yOz或xOz上的投影：

$$\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$$

曲线的参数方程：

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \\ z=\omega(t) \end{cases} \qquad (\alpha \le t \le \beta)$$

- **极限：** 设二元函数$f(P)=f(x,y)$的定义域为D, $P_0(x_0,y_0)$是D的聚点. 如果存在常数A, 对于任意给定的正数ϵ, 总存在正数δ使得当点$P(x,y)\in D\cap \mathring{U}(P_0,\delta)$时都有:

$$|f(P)-A|=|f(x,y)-A|<\epsilon \text{ 成立,}$$

那么就称常数A为函数$f(x,y)$当$(x,y)\to(x_0,y_0)$时的极限,记作:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A \text{或} f(x,y)\to A \quad ((x,y)\to(x_0,y_0))$$

- **连续：** 设二元函数$f(P)=f(x,y)$的定义域为D, $P_0(x_0,y_0)$是D的聚点,且$P_0\in D$. 如果:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=f(x_0,y_0)$$

那么称函数$f(x,y)$在点$P_0(x_0,y_0)$连续.

- **偏导数：**

$$f_x'(x_0,y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x}$$
$$f_y'(x_0,y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y}$$

求偏导数可以看做因变量只对一个变量求导而将其余变量视为常量.

- **高阶偏导数：** 二阶及二阶以上的偏导数.
- **定理：** 如果函数$z=f(x,y)$的两个二阶混合偏导数$\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$在区域$D$内连续,那么在该区域内这两个二阶混合偏导数必然相等.

- **例1：** 求$z = x^2 + 3xy + y^2$在点$(1,2)$处的偏导数.

  解：把y看作常量,得$\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y.$

  把x看作常量,得$\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3x + 2y.$

- **例2：** 求函数

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2 + xy^2)\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0. & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

  解：当$(x,y) \neq 0$时, 直接求导.

  当$(x,y) = 0$时,用偏导数定义求导.

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,\ 同理, f_y(0,0) = 0.$$

- **全微分：** 设函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的某邻域内有定义，如果函数在(x,y)的全增量$\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x,y)$可表示为：

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中A,B不依赖于$\Delta x,\Delta y$,而仅与x和y有关,$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$,
那么称函数$z=f(x,y)$在点(x,y)可微分，而$A\Delta x + B\Delta y$称为函数$z=f(x,y)$在点(x,y)的全微分，记作dz，即$dz = A\Delta x + B\Delta y$.

- **必要条件：** 如果函数$z=f(x,y)$在点(x,y)可微分,那么该函数在点(x,y)的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$必定存在，且函数$z=f(x,y)$在点$(x,y)$的全微分为：

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y.$$

- **充分条件：** 如果函数$z=f(x,y)$的偏导数$\frac{\partial z}{\partial x}$与$\frac{\partial z}{\partial y}$在点$(x,y)$连续，那么函数在该点可微分.

- **一元函数与多元函数复合：** 如果函数$u=\varphi(t)$及$v=\psi(t)$都在点t可导，函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数,那么复合函数$z=f[\varphi(t),\psi(t)]$在点t可导，且有：

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dt}.$$

- **多元函数与多元函数复合：** 如果函数$u=\varphi(x,y)$及$v=\psi(x,y)$都在点(x,y)具有对x及对y的偏导数，函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数,那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$在点$(x,y)$的两个偏导数都存在，且有：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

- **其它情形：** 如果函数$u=\varphi(x,y)$在点(x,y)具有对x及对y的偏导数，函数$v=\psi(y)$在点y可导，函数$z=f(u,v)$在对应点(u,v)具有连续偏导数,那么复合函数$z=f[\varphi(x,y),\psi(y)]$在点$(x,y)$的两个偏导数都存在，且有：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{dv}{dy}.$$

- **一个方程确定的隐函数：**

  隐函数存在定理1： 若函数$F(x,y)$在点$P(x_0,y_0)$的某一邻域内有对各个变量的连续偏导数，且$F(x_0,y_0)=0$,$F_y(x_0,y_0)\neq 0$,则方程$F(x,y)=0$在点(x_0,y_0)的某一邻域内恒能确定一个连续且具有连续偏导数的函数$y=f(x)$，它满足条件$y_0=f(x_0)$并有：

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F_x}{F_y}.$$

  隐函数存在定理2： 若函数$F(x,y,z)$在点$P(x_0,y_0,z_0)$的某一邻域内有对各个变量的连续偏导数，且$F(x_0,y_0,z_0)=0$,$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 则方程$F(x,y,z)=0$在点(x_0,y_0,z_0)的某一邻域内恒能确定一个连续且具有连续偏导数的函数$z=f(x,y)$,它满足条件$z_0=f(x_0,y_0)$并有：

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z},\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

- **方程组确定的隐函数：**
  隐函数存在定理3： 设四元函数$F(x,y,u,v),G(x,y,u,v)$在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某一邻域内有对各个变量的连续偏导数，又$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$, $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$,且偏导数所组成的函数行列式(雅可比行列式):

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v}\\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v}\end{vmatrix}$$

在点$P(x_0,y_0,u_0,v_0)$不等于0,则方程组$F(x,y,u,v)=0$, $G(x,y,u,v)=0$在点(x_0,y_0,u_0,v_0)的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数$u=u(x,y),v=v(x,y)$, 它们满足条件$u_0=u(x_0,y_0),v_0=v(x_0,y_0)$并有相应的导数公式.

- **空间曲线的切线与法平面方程：**
  设曲线由参数方程给出：

$$\Gamma : \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \\ z = \omega(t), \end{cases}$$

点$M_0(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$,则曲线在该点处的切线和法平面方程为：

切线： $\dfrac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \dfrac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \dfrac{z - z_0}{\omega'(t_0)}.$

法平面： $\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0.$

- **曲面的切平面与法线方程：**
  设曲面方程为：$\Sigma: F(x,y,z)=0$. 点$M_0(x_0,y_0,z_0)\in\Sigma$, 则曲面在该点处的切平面和法线方程为：

  切平面：

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

法线： $$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

- **方向导数：**
  如果函数$f(x,y,z)$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$可微分,那么函数在该点沿方向$\vec{l}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$的方向导数为：
  $$\frac{\partial f}{\partial l}=f_x(x_0,y_0,z_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)\cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)\cos\gamma$$
- **梯度：** 函数$f(x,y,z)$在点$M_0(x_0,y_0,z_0)$的梯度为:
  $$\mathbf{grad}f|_{M_0}=f_x(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{i}+f_y(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{j}+f_z(x_0,y_0,z_0)\boldsymbol{k}$$

- **必要条件：** 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)具有偏导数,且在点(x_0,y_0)处有极值,则有：

$$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0.$$

- **充分条件：** 设函数$z=f(x,y)$在点(x_0,y_0)的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数,又$f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$, 令：

$$f_{xx}(x_0,y_0)=A, f_{xy}(x_0,y_0)=B, f_{yy}(x_0,y_0)=C,$$

则$f(x,y)$在(x_0,y_0)处是否取得极值的条件如下:
(1)$AC-B^2>0$时具有极值,且当$A<0$时有极大值,当$A>0$时有极小值;
(2)$AC-B^2<0$时没有极值;
(3)$AC-B^2=0$时可能有极值也可能没有极值,还需另作讨论;

- 解方程组$\begin{cases} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{cases}$求出实数解，得到驻点.
- 对于每一个驻点(x_0,y_0)求出二阶偏导数的值A,B,C.
- 对于每一个驻点定出$AC-B^2$的符号,判定其是否是极值点.
- 求出极值.

- 确定目标函数:$u = f(x, y, z)$,约束条件:$\varphi(x, y, z) = 0$.
- 构造拉格朗日函数$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) + \lambda\varphi(x, y, z)$.
- 解方程组:$F_x = F_y = F_z = F_\lambda = 0$. 求出$x, y, x, \lambda$, 其中$(x, y, z)$就是可能的极值点的坐标(即条件极值的稳定点).
- 判断此稳定点是否为条件极值的极值点.

- **二重积分的定义**

  和式的极限：

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中,$f(x,y)$叫做被积函数,$f(x,y)d\sigma$叫做被积表达式,$d\sigma$叫做面积元素,x和y叫做积分变量,D叫做积分区域,$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$叫做积分和.

- **几何意义：** 曲顶柱体的体积：

$$V = \iint\limits_D f(x,y)d\sigma.$$

- **物理意义：** 平面薄片的质量：

$$m = \iint\limits_D \mu(x,y)d\sigma.$$

- **线性性质** 设α,β为常数,则：

$$\iint\limits_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]d\sigma = \alpha\iint\limits_D f(x,y)d\sigma + \beta\iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

- **积分区域可加性** 设$D = D_1 + D_2$,则:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma.$$

- **比较性质** 若在D上,$f(x,y)\le g(x,y)$, 那么有:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le \iint\limits_D g(x,y)d\sigma.$$

- **绝对值性质**

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\right| \le \iint\limits_D |f(x,y)|d\sigma.$$

- **估值性质** 若在D上,$m \le f(x,y) \le M$,σ是D的面积,那么有:

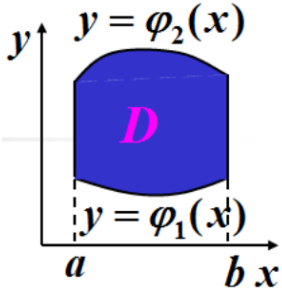
$$m\sigma \le \iint\limits_D f(x,y)d\sigma \le M\sigma.$$

- **中值定理** 设函数$f(x,y)$在闭区域D上连续,σ是D的面积,则在D上至少存在一点(ξ,η),使得:

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = f(\xi,\eta)\sigma.$$

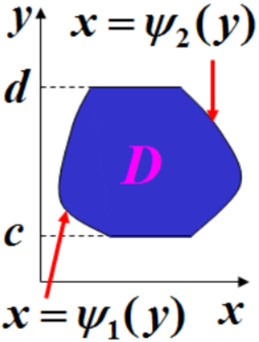
- **直角坐标系下的计算**
  若积分区域为$D=\{(x,y)|a\le x\le b,\varphi_1(x)\le y\le\varphi_2(x)\}$, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)dy$$



- **直角坐标系下的计算**
  若积分区域为$D=\{(x,y)|c\le y\le d,\psi_1(y)\le x\le\psi_2(y)\}$, 则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d dy\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)dx$$



- **极坐标系下的计算**

设$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$, 若积分区域为

$D = \{(\rho,\theta)|\varphi_1(\theta) \le \rho \le \varphi_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \iint\limits_D f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho d\theta$$
$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\rho d\rho$$

- **三重积分的定义**
  和式的极限：

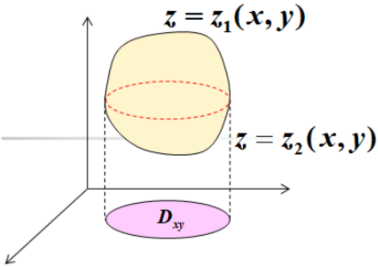
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dV = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta v_i$$

  其中,$f(x,y,z)$叫做被积函数,dv叫做体积元素,Ω叫做积分区域.

- **几何意义：** $\iiint\limits_{\Omega} dV = \Omega$的体积.
- **物理意义：** 空间物体Ω的质量:$M = \iiint\limits_{\Omega} \mu(x,y,z)dV$.
- **三重积分的性质：** 与二重积分的性质类似.

- **直角坐标系下的计算**
  投影法：

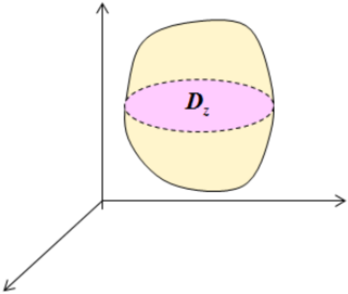
$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dV = \iint\limits_{D_{xy}} dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz$$



- 直角坐标系下的计算

截面法:

$$\iiint\limits_{D} f(x,y,z)dV = \int_a^b dz \iint\limits_{D_z} dxdy$$



- 柱坐标系下的计算

设$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \\ z = z \end{cases}$,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{\Omega} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho d\rho d\theta dz$$

- 球坐标系下的计算

设$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$,则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dxdydz$$

$$= \iiint\limits_{\Omega} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$

- **曲面面积**
  设空间曲面$z=z(x,y),(x,y)\in D$则曲面的面积为：

$$S=\iint_D \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}d\sigma$$

- **平面薄片的质量与重心坐标的计算**
  设平面薄片D,密度函数为$\mu(x,y)$,则质量M和质心坐标$(\bar{x},\bar{y})$分别为:

$$M=\iint_D \mu(x,y)d\sigma$$

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iint_D x\mu(x,y)d\sigma$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iint_D y\mu(x,y)d\sigma$$

- **空间立体的质量与重心坐标的计算**
  设空间几何形体Ω,密度函数为$\mu(x,y,z)$,则质量M和重心坐标$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$分别为：$$M=\iiint\limits_{\Omega}\mu(x,y,z)dv$$

$$\bar{x}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}x\mu(x,y,z)dv$$

$$\bar{y}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}y\mu(x,y,z)dv$$

$$\bar{z}=\frac{1}{M}\iiint\limits_{\Omega}z\mu(x,y,z)dv$$

- **平面薄片的转动惯量**
  设平面薄片D的面密度为$\rho(x,y)$则它对于x轴,y轴和原点的转动惯量分别为：

$$I_x = \iint_D y^2\rho(x,y)d\sigma$$

$$I_y = \iint_D x^2\rho(x,y)d\sigma$$

$$I_0 = \iint_D (x^2+y^2)\rho(x,y)d\sigma$$

- **空间立体的转动惯量**
  设物体占有空间区域Ω,它的体密度为$\rho(x,y,z)$则它对于x轴,y轴和原点的转动惯量分别为：

$$I_x = \iiint\limits_{\Omega} (y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dv$$

$$I_y = \iint\limits_{\Omega} (z^2 + x^2)\rho(x,y,z)dv$$

$$I_z = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2)\rho(x,y,z)dv$$

$$I_0 = \iint\limits_{\Omega} (x^2 + y^2 + z^2)\rho(x,y,z)dv$$

第十一章曲线积分与曲面积分

- 曲线积分：第一类，第二类
- 格林公式，与路径无关的条件
- 曲面积分：第一类，第二类
- 高斯公式，斯托克斯公式

- 第一类曲线积分的定义：和式的极限

$$\int_L f(x,y,z)ds = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i.$$

- 几何意义： $\int_L ds = L$的长度.
- 基本性质
  - 设α,β为常数，则

$$\int_L [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]ds = \alpha\int_L f(x,y)ds + \beta\int_L g(x,y)ds.$$

  - 若积分弧段L可分成两端光滑曲线弧$L1$和$L2$，则

$$\int_L f(x,y)ds = \int_{L1} f(x,y)ds + \int_{L2} f(x,y)ds.$$

  - 设在L上$f(x,y)\le g(x,y)$，则

$$\int_L f(x,y)ds \le \int_L g(x,y)ds.$$

(1) L为平面曲线

- L的参数方程为：$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} (\alpha \le t \le \beta)$,则

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt, (\alpha < \beta).$$

- L的直角坐标方程为：$y = y(x)(a \le x \le b)$,则

$$\int_L f(x,y)ds = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'^2(x)}dx.$$

- L的极坐标方程为：$\rho = \rho(\theta), (\alpha \le \theta \le \beta)$,则

$$\int_L f(x,y)ds = \int_\alpha^\beta f[\rho(\theta)\cos\theta, \rho(\theta)\sin\theta]\sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}d\theta.$$

(2) L为空间曲线

L的参数方程为：$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), (\alpha \le t \le \beta), 则 \\ z = \omega(t), \end{cases}$

$$\int_L f(x, y, z)ds = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t), \psi(t), \omega(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \omega'^2(t)}dt.$$

第二类曲线积分的定义：设L是空间有向曲线弧，

$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$,则

$$\begin{aligned}&\int_L \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot d\boldsymbol{r}\\ =&\int_L P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\\ =&\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i].\end{aligned}$$

- 设α与β为常数，则

$$\int_L [\alpha \boldsymbol{F}_1(x,y) + \beta \boldsymbol{F}_2(x,y)] \cdot d\boldsymbol{r}$$
$$= \alpha \int_L \boldsymbol{F}_1(x,y) \cdot d\boldsymbol{r} + \beta \int_L \boldsymbol{F}_2(x,y) \cdot d\boldsymbol{r}.$$

- 若有向线段弧L可分成两段光滑的有向线段弧L_1和L_2，则

$$\int_L \boldsymbol{F}(x,y) \cdot d\boldsymbol{r} = \int_{L_1} \boldsymbol{F}(x,y) \cdot d\boldsymbol{r} + \int_{L_2} \boldsymbol{F}(x,y) \cdot d\boldsymbol{r}.$$

- 设L是有向光滑曲线弧，L^-是L的反向线段弧，则

$$\int_{L^-} \boldsymbol{F}(x,y) \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_L \boldsymbol{F}(x,y) \cdot d\boldsymbol{r}.$$

(1) L为有向平面曲线

- L的参数方程为：$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}, t: a\to b$,则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\int_a^b \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t)+Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\,dt.$$

- L的直角坐标方程为：$y=y(x), x: a\to b$,则

$$\int_L P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$
$$=\int_a^b P[x,y(x)]+Q[x,y(x)]y'(t)dx.$$

(2) L为空间有向曲线

L的参数方程为：$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$, $t : a \to b$,则

$$\int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz$$
$$= \int_a^b \{P[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\psi'(t)$$
$$+ R[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\omega'(t)\}dt.$$

- 若L是平面有向曲线弧，L在点(x, y)处沿制定方向的单位切向量为$(\cos\alpha, \cos\beta)$，则

$$\int_L Pdx + Qdy = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta)ds.$$

- 若L是空间有向曲线弧，L在点(x, y, z)处沿制定方向的单位切向量为$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，则

$$\int_L Pdx + Qdy + Rdz = \int_L (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)ds.$$

设平面闭区域D由分段光滑的曲线L围成，函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上具有连续的一阶偏导数，则

$$\oint_{L^+} Pdx+Qdy=\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy.$$

其中L^+是D的正取向的边界曲线.

第十一章曲线积分与曲面积分：平面曲线积分与路线无关的条件

- 在单连通开区域D上$P(x,y),Q(x,y)$具有连续一阶偏导数.
- 下列四个命题等价
  - 在D内$\int_L Pdx+Qdy$与路径无关.
  - $\oint_C Pdx+Qdy=0$,闭曲线$C\subset D$.
  - 在D内存在$u(x,y)$,使$du=Pdx+Qdy$.
  - 在D内, $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$.

- 定义：和式的极限

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)dS = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i.$$

- 几何意义：$\displaystyle\iint_{\Sigma} dS = \Sigma$的面积.

- 若曲面$\Sigma : z = z(x, y)$,则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D_{xy}} f(x, y, z(x, y))\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}dxdy.$$

- 若曲面$\Sigma : y = y(x, z)$,则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D_{xz}} f(x, y(x, z), z)\sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2}dxdz.$$

- 若曲面$\Sigma : x = x(y, z)$,则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)dS = \iint\limits_{D_{yz}} f(x(y, z), y, z)\sqrt{1 + x_y'^2 + x_z'^2}dydz.$$

定义：设是有向曲面，

$\boldsymbol{F}(x,y,z)=\{P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)\}$,则

$$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot d\boldsymbol{S}\quad(d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{n}dS\text{称为有向面积元素})$$

$$=\iint_{\Sigma}[\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\boldsymbol{n}(x,y,z)]dS$$

$$=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\boldsymbol{n}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

$$=\iint_{\Sigma}Pdydz+Qdzdx+Rdxdy.$$

若Σ的方程为$z=z(x,y),(x,y)\in D_{xy}$,则

$$\iint\limits_{\Sigma} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

$$=\pm\iint\limits_{D_{xy}}\{P[x,y,z(x,y,z(x,y))](-z_x)+Q[x,y,z(x,y,z(x,y))](-z_y)$$

$$+R[x,y,z(x,y,z(x,y))]\}dxdy$$

其中：若Σ取上侧，则取正号；Σ取下侧，则取负号.

设空间闭区域Ω由分片光滑的闭曲面Σ围成，函数$P(x,y,z)$, $Q(x,y,z), R(x,y,z)$在Ω上具有连续的一阶偏导数，则有公式

$$\oiint_{\Sigma} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV.$$

这里Σ是Ω的整个边界曲面的外侧.

设函数$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$在包含曲面$\Sigma$的某空间域上有一阶连续偏导数，$\Gamma$为曲面$\Sigma$的边界线，则

$$\iint\limits_{\Sigma}(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z})dydz+(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x})dzdx+(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$
$$=\oint_{\Gamma}Pdx+Qdy+Rdz.$$

其中曲面Σ的侧由曲线Γ的方向确定.（右手规则）

- **数项级数的定义：**
  给定一个数列$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$将各项依次相加得到
  $$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$
  叫做(常数项)无穷级数,简称(常数项)级数，记为$\sum_{i=1}^{\infty} u_i$，其中
  第n项u_n叫做级数的一般项.
- **部分和：**
  前n项和$S_n = \sum_{i=1}^{k} u_i = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$称为级数的部分和.
  若$\lim_{n\to\infty} s_n = s$存在,则称级数收敛,记作$s = \sum_{i=1}^{\infty} u_i$.
  若$\lim_{n\to\infty} s_n = s$不存在,则称级数发散.

- **收敛级数的性质**

性质1 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛于和s,那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$也收敛,且其和为ks.

性质2 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$分别收敛于和s与σ,那么级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$$

也收敛,且其和为$s \pm \sigma$.

性质3 在级数中去掉、加上或改变有限项不会改变级数的收敛性.

性质4 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,那么对这级数的项任意加括号后所成的级数

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots$$

仍收敛,且其和不变.

- **级数收敛的必要条件**

  如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,那么它的一般项u_n趋于零,即:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

- **柯西审敛定理**

  级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分必要条件为:对于任意给定的正数$\varepsilon$,总存在正整数$N$,使得当$n > N$时,对于任意的正整数$p$,都有

  $$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

  成立.

- 正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的充分必要条件是：它的部分和数列$s_n$有界.
- （比较判别法）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，且$u_n \leq v_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$.若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；反之，若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$发散.
- (比较判别法的极限形式) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$都是正项级数，若$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$,则
  - $0 < l < +\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$有相同的敛散性.
  - $l = 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛 $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛.
  - $l = +\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$发散 $\Longrightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散.

- 比值判别法（达朗贝尔判别法）

  设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$,则

  - $\rho < 1$时级数收敛.
  - $\rho > 1$(或$+\infty$)时级数发散.
  - $\rho = 1$时失效.

- 根式判别法（柯西判别法）

  设$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$是正项级数，$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$,则

  - $\rho < 1$时级数收敛.
  - $\rho > 1$(或$+\infty$)时级数发散.
  - $\rho = 1$时失效.

- 如果交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$满足条件：
    - $u_n \geq u_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$.
    - $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

  那么级数收敛，且其和$s \leq u_1$，其余项r_n的绝对值$|r_n| \leq u_{n+1}$.

- 如果级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$绝对收敛，那么级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$必定收敛.

如果幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的所有系数$a_n \neq 0$，设$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho$,

(或$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$)，则

- $\rho \neq 0$时，$R = \frac{1}{\rho}$.
- $\rho = 0$时，$R = +\infty$.
- $\rho = +\infty$时，$R = 0$.

若幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$，则其和函数$S(x)$在区间$(-R, R)$内可微，并可逐项求任意阶导数，有逐项求导公式：

$$S'(x) = (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

且所得新幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为$R$，则其和函数$S(x)$在区间

$(-R,R)$内可积，且$\forall x \in (-R,R)$可逐项积分，即

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n x^n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

且所得新幂级数与原幂级数有相同的收敛半径.

- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}, x \in (-1, 1).$
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \dfrac{1}{1+x}, x \in (-1, 1).$
- $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!} = e^x, x \in (-\infty, \infty).$
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$（逐项求导）.
- $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$（逐项求积分）.

- 三角函数系

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$$

- 正交性

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx dx = 0, \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx dx = 0, (n = 1, 2, \cdots)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \pi, m = n. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0, m \neq n \\ \pi, m = n. \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cos nx dx = 0 \quad (m, n = 1, 2 \cdots)$$

- **周期为2π的周期函数展开成傅里叶级数**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

其中

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

- 周期为$2l$的周期函数展开成傅里叶级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l})$$

其中

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

- **正弦级数**

  若$f(x)$为奇函数, 则其傅里叶级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$称为正弦级数.

  当周期为2π的奇函数$f(x)$展开成傅里叶级数时,它的傅里叶系数为:

$$a_n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

- **余弦级数**

  若$f(x)$为偶函数, 则其傅里叶级数$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$称为余弦级数.

  当周期为2π的偶函数$f(x)$展开成傅里叶级数时,它的傅里叶系数为:

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx dx \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n=0 \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

- **奇延拓**
  令

$$f(x)=\begin{cases} f(x) & 0<x\leq\pi \\ 0 & x=0 \\ -f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

$$f(x)\text{的正弦级数}f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx \quad (0<x<\pi)$$

- **偶延拓**
  令

$$f(x)=\begin{cases} f(x) & 0\leq x\leq\pi \\ f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

$$f(x)\text{的余弦级数}f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx \quad (0\leq x\leq\pi)$$