线性代数习题二：矩阵及其运算

一、计算。

1. $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}^5$　　2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$　　3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^n$

4. 设$f(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 3, A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$，求$f(A)$.

5. 设$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$，求$A^{-1}$.

二、设三阶矩阵$A \neq O$, 矩阵$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}$, 且$AB = O$, 求$t$.

三、计算及证明。

1. 若n阶矩阵A满足方程$A^2 + 2A + 3E = 0$, 求证A可逆, 并求A^{-1};

2. 设A为3阶矩阵, 且$|A| = 1$, 求$|2A^{-1} + 3A^*|$;

3. 设A, B为n阶方阵，且$B^2 = B$, 若$A = B + E$, 求证A可逆, 并求A^{-1}；

4. 设A为n阶方阵，证明：存在一个非零n阶方阵B使$AB = O$的充分必要条件是$|A| = 0$；

5. 证明：设A为n阶方阵，如果对任意n维列向量X, 都有$AX = O$, 那么$A = O$;

6. 若n阶矩阵$A \neq O$，且$A^* = A^T$，证明A可逆。

四、已知上三角方阵

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

(1). 求N^k, $k = 2, 3, \cdots,$;

(2). 求A^{10}.