第八章 机械波

8-1 解: 该波的波方程为

(1) $y=0.02\cos\frac{\pi}{9}\left(t-\frac{x}{v}\right)$

$=0.02\cos\frac{\pi}{9}\left(t-\frac{x}{2}\right)$

(2) x 轴正方向距原点 5 m 处质元振动方程为

$y_5=0.02\cos\frac{\pi}{9}\left(t-\frac{5}{2}\right)$

$=0.02\cos\left(\frac{\pi}{9}t-\frac{5}{18}\pi\right)$

(3) $t=2.5\ \mathrm{s}$, $x=5\ \mathrm{m}$ 时

$y_5=0.02\cos\left(\frac{\pi}{9}\times 2.5-\frac{5}{18}\pi\right)$

$=0.02\ \mathrm{m}$

$t=2.5\ \mathrm{s}$ $x=0$ 时

$y_0=0.02\cos\frac{5}{18}\pi$

$\doteq 0.0128\ \mathrm{m}$

8-2 解: (1) 波源的振动方程为

$y=0.001\cos\left(\frac{2\pi}{T}t+\varphi_0\right)$

$t=0$ 时 $y=0$ $v_y>0$

$\therefore$ $\varphi_0=-\frac{\pi}{2}$ $\frac{2\pi}{T}=\frac{2\pi}{0.01}=200\pi$

$\therefore$ $y=0.001\cos\left(200\pi t-\frac{\pi}{2}\right)$

当波沿 x 轴正向传播时,波方程为

$$y=0.001\cos\left[2\pi\left(100t-\frac{x}{\lambda}\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=0.001\cos\left[2\pi\left(100t-x\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

当波沿 x 轴负向传播时,波方程为

$$y=0.001\cos\left[2\pi\left(100t+x\right)-\frac{\pi}{2}\right]$$

(2) $x=9$ m 时 $\varphi_9=2\pi\left(100t-9\right)-\frac{\pi}{2}$

$x=10$ m 时 $\varphi_{10}=2\pi\left(100t-10\right)-\frac{\pi}{2}$

$$\Delta\varphi=\varphi_{10}-\varphi_9=-2\pi$$

8-3 解: (1) $\omega=2\pi\upsilon=1000\pi$

设波方程为 $y=A\cos\left[1000\pi\left(t-\frac{x}{v}\right)+\varphi_0\right]$

$$=A\cos\left[1000\pi\left(t-\frac{x}{350}\right)+\varphi_0\right]$$

$$\Delta\varphi=\frac{\pi}{3}=\varphi_2-\varphi_1$$

$$=1000\pi\left(t-\frac{x_1}{350}\right)+\varphi_0-\left[1000\pi\left(t-\frac{x_2}{350}\right)+\varphi_0\right]$$

$$=\frac{20}{7}\pi\left(x_2-x_1\right)$$

$$\therefore\ x_2-x_1=\frac{\pi}{3}\times\frac{7}{20\pi}\approx 0.117\text{ m}$$

(2) $\Delta t=10^{-3}$ s $\Delta x=0$

$$\Delta\varphi=1000\pi\left(\Delta t\right)$$

$$=1000\pi\times10^{-3}$$

$$=\pi$$

8-4 解: (1) 波源振动方程为

$$y=5\times10^{-3}\cos\frac{\pi}{2}\left(t+\frac{x}{v}\right)$$

$$=5\times10^{-3}\cos\frac{\pi}{2}\left(t+\frac{2}{1}\right)$$

$$=5\times10^{-3}\cos\left(\frac{\pi}{2}t+\pi\right)$$

(2) 该波的波方程为

$$y=5\times10^{-3}\cos\left[\frac{\pi}{2}\left(t-\frac{x}{v}\right)+\pi\right]$$

$$=5\times10^{-3}\cos\left[\frac{\pi}{2}(t-x)+\pi\right]$$

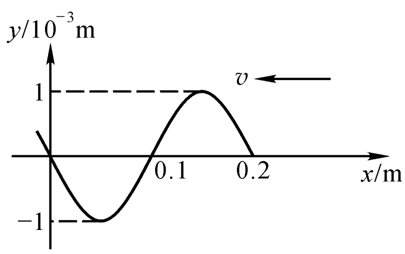


图8.5

8-5 解: (1)设波源振动方程为

$$y_0=A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$A=10^{-3}\ \mathrm{m}$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}=2\pi\frac{v}{\lambda}=2\pi\times\frac{330}{0.2}$$

$$=3300\pi$$

$t=0$ 时 $y=0$ $v_y<0$

$$\therefore\ \varphi=\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ y_0=10^{-3}\cos\left(3300\pi t+\frac{\pi}{2}\right)$$

(2)此波的波方程为

$$y_0=10^{-3}\cos\left[3300\pi\left(t+\frac{x}{v}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=10^{-3}\cos\left[3300\pi\left(t+\frac{x}{330}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$$

(3) $t=\dfrac{1}{330}\,\text{s}$， $x=0.1\,\text{m}$ 时

$$y=10^{-3}\cos\left[3300\pi\left(\frac{1}{330}+\frac{0.1}{330}\right)+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=10^{-3}\cos\left[11\pi+\pi+\frac{\pi}{2}\right]=0$$

$$v_y=\dot{y}=-3300\pi\times10^{-3}\sin\left[3300\pi t+10\pi x+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=-3.3\pi\sin\left[3300\pi\times\frac{1}{330}+10\pi\times0.1+\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=-3.3\pi$$

$$=-10.36\,(\text{m/s})$$

8-6 解: (1) ∵ 能量密度 $E^0=\rho\omega^2A^2\sin^2\omega\left(t-\dfrac{x}{V}\right)$

∴ 最大能量密度 $E^0{}_{max}=\rho\omega^2A^2$

能流密度 $I=\dfrac{1}{2}\rho\omega^2A^2V$

已知 $I=9\times10^{-3}\ \text{J/s.m}^2$ $V=300\ \text{m/s}$

最大能量密度 $E^0{}_{max}=\rho\omega^2A^2=\dfrac{2I}{V}=\dfrac{2\times9.0\times10^{-3}}{300}$

$$=6\times10^{-5}\ \text{J/m}^3$$

平均能量密度 $\overline{E^0}=\dfrac{1}{2}\rho\omega^2A^2$

$$=\frac{I}{V}=\frac{9.0\times10^{-3}}{300}$$

$$=3\times10^{-5}\ \text{J/m}^3$$

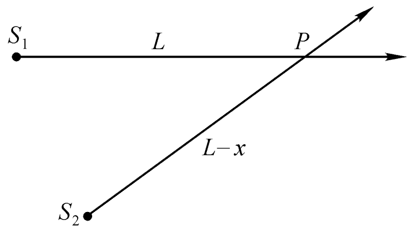
(2) 两相邻同相位波间的总能量

$$E=\overline{E^0}\Delta V=\overline{E^0}VTs$$

$$=\overline{E^{0}}V\frac{1}{v}\pi\frac{d^{2}}{4}$$

$$=3\times10^{-5}\times300\times\frac{1}{300}\times\pi\times0.07^{2}$$

$$=4.62\times10^{-7}\ \text{J}$$



8-7 解: 此二横波振动方向相同,波长相同,在同一种媒质中传播,波速相同,因此,其周期相同,圆频率也相同.传到 P 点的此二横波方程可写成

$$y_1=A_1\cos2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{L}{\lambda}\right)$$

$$y_2=A_2\cos2\pi\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}}-\frac{L-x}{\lambda}\right)$$

(1) 在 P 点的合振动最强时,二横波在该点引起的分振动相位应该相同.即

$$2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{L-x}{\lambda}\right)-2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{L}{\lambda}\right)=\pm2k\pi$$

由此得 $x=\pm k\lambda$ 已知 $\lambda=0.34\ \text{m}$

取 $k=0,1,2,3$ 时,则得

$x=0$, $0.34\ \text{m}$, $0.68\ \text{m}$, $1.02\ \text{m}$

(2) 在 P 点的合振动最弱时,二横波在该点引起得分振动相位应相反.即

$$2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{L-x}{\lambda}\right)-2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{L}{\lambda}\right)=\pm\left(2k+1\right)\pi$$

由此得 $x=\pm\left(k+\frac{1}{2}\right)\lambda$, 已知 $\lambda=0.34\ \text{m}$

取 $k=0,1,2$ 时,则得

$x=0.17\ \text{m}$, $0.51\ \text{m}$, $0.85\ \text{m}$

8-8 解: $\nu=100\ \text{Hz}$ $\omega=2\pi\nu=200\pi$ $V=200\ \text{m/s}$

图8-8

图8.8

$$\lambda = \frac{V}{\nu} = \frac{200}{100} = 2\left(\mathrm{m}\right)$$

以 A 点为原点建立 Ox 坐标系,因甲波在 A 点所引起的质点位移为正最大

∴ 甲波方程为 $y_{甲} = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{V}\right)$

$$= A\cos\left[200\pi\left(t + \frac{x}{200}\right) + \varphi\right]$$

乙波方程为 $y_{乙} = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{V}\right) + \varphi\right]$

$$= A\cos\left[200\pi\left(t + \frac{x}{200}\right) + \varphi\right]$$

乙波在 B 点所引起的质元位移为负最大

∴ 当 $t = 0$ 时, 在 $x = 20\,\mathrm{m}$ 处

$$200\pi\left(t + \frac{x}{200}\right) + \varphi = \pi$$

$$\frac{20}{200} \times 200\pi + \varphi = \pi$$

$$\varphi = -19\pi$$

当 AB 间的点因干涉而静止时,甲、乙两波在该点的位相差满足

$$\left[200\pi\left(t + \frac{x}{200}\right) + \varphi\right] - 200\pi\left(t - \frac{x}{200}\right) = \left(2k + 1\right)\pi$$

即 $2\pi x - 19\pi = \left(2k + 1\right)\pi$

$$x = k + 10\left(\mathrm{m}\right)$$

当 $k = \pm 10, \pm 9, \pm 8, ..., 0$ 时, $x = 0, 1, 2, ...20\,\mathrm{m}$ 处各点静止

8-9 解: (1) 波方程 $y = A\cos\left[2\pi\left(\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{T}} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$

$$y_1 = 0.06\cos\left[\pi\left(x - 4t\right)\right]$$

$$=0.06\cos\left[2\pi\left(2t-\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$y_2=0.06\cos\left[\pi\left(x+4t\right)\right]$$

$$=0.06\cos\left[2\pi\left(2t+\frac{x}{2}\right)\right]$$

∴ 二波的波长 $\lambda=2\,\mathrm{m}$. 二波的频率 $\nu=\frac{1}{T}=2\left(\mathrm{Hz}\right)$

二波的波速 $V=\lambda\nu=2\times2=4\,\mathrm{m}/s$

(2) $$y=y_1+y_2=0.06\cos\left(4\pi t-\pi x\right)+0.06\cos\left(4\pi\mathrm{t}+\pi x\right)$$

$$=0.12\cos\pi x\cos4\pi t$$

波节位置 $\pi x=\pm\left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}$

$$x=\pm\left(k+\frac{1}{2}\right)\left(\mathrm{m}\right)\left(k=0,1,2,..\right)$$

(3) 波腹位置 $\pi x=\pm k\pi$

$$x=\pm k\left(\mathrm{m}\right)\left(k=0,1,2,...\right)$$

(4) 波腹处振幅为 $0.12\,\mathrm{m}$

(5) $x=1.2\,\mathrm{m}$ 处振幅

$$A_{12}=\left|0.12\times\cos\pi x\right|=\left|0.12\times\cos\pi\times1.2\right|$$

$$=\left|0.12\cos216^\circ\right|=0.0971\left(\mathrm{m}\right)$$

8-10 解: 由入射波方程可知 $A=1\times10^{-3}\,\mathrm{m}$, $\omega=200\pi$, $V=200\,\mathrm{m}/s$

$$\lambda=\frac{V}{\nu}=\frac{V\cdot2\pi}{\omega}=\frac{200\times2\pi}{200\pi}=2\,\mathrm{m}$$

因入射波在自由端反射时,设有半波损失,即反射波和入射波在界面处位相相同,而传播方向相反.

入射波原点处初相位为零.入射波在界面处比原点相位落后 $\Delta\varphi_1=2\pi\frac{x}{\lambda}=2\pi\frac{5.5}{2}=5.5\pi$

反射波在原点处比界面处相位落后 $\Delta\varphi_2 = 2\pi\dfrac{x}{\lambda} = 5.5\pi$,界面处反射无半波损失,故反射波在原点处初相位为 $\varphi = -\left(\Delta\varphi_1 + \Delta\varphi_2\right) = -11\pi$

∴ 反射波方程为 $y = 1\times10^{-3}\cos\left[200\pi\left(t+\dfrac{x}{200}\right)-\pi\right]$

8-11 解: 对 A 来说，即观察者静止，声源运动.因此，A 听到的频率为

$$\nu' = \frac{v}{v - v_{源}}\nu = \frac{340}{340-10}\times1000 = 1030\,(\text{Hz})$$

A 听到的拍频 $\nu_{拍} = |\nu' - \nu| = |1030-1000| = 30\,(\text{Hz})$

对 B 来说,即声源静止,观察者运动的情况.因此, B 听到的频率

$$\nu'' = \left(1+\frac{v_{观}}{v}\right)\nu = \left(1+\frac{10}{340}\right)\times1000 \doteq 1029\,(\text{Hz})$$

B 听到的拍频为

$$\nu_{拍}' = |\nu'' - \nu| = |1029-1000| \doteq 29\,(\text{Hz})$$

8-12 解: 若音叉的观察者直接听到音叉的频率为 ν_1,听到经墙反射的频率为 ν_2,因波源(音叉)在运动,所以

$$\nu_1 = \frac{v}{v+v_s}\nu_0 \qquad \nu_2 = \frac{v}{v-v_s}\nu_0$$

其中 v 为观察者观测到的波的传播速度,因观测者静止,所以 v 的声波在空气中的波速 v_s 为波源的速率. ν_0 为音叉振动频率

拍频 $\nu = |\nu_1 - \nu_s| = \left(\dfrac{v}{v-v_s} - \dfrac{v}{v+v_s}\right)\nu_0 = \dfrac{2vv_s}{v^2 - v_s{}^2}\nu_0$

∴ $\nu_0 = \dfrac{v^2 - v_s{}^2}{2vv_s}\nu = \dfrac{\left(340^2 - 2.5^2\right)}{2\times340\times2.5} \doteq 204.1\,(\text{Hz})$