线性代数习题三：矩阵的初等变换及线性方程组

一、1. 整理关于矩阵的秩的定义及相关不等式;

2. 整理(齐次、非齐次)线性方程组解的存在性结论.

二、设$x_1-x_2=a_1, x_2-x_3=a_2, x_3-x_4=a_3, x_4-x_5=a_4, x_5-x_6=a_5$。证明: 这方程组有解的充分必要条件为$\sum\limits_{i=1}^{5} a_i=0$.

三、1. 设A为n阶方阵，证明：存在一个非零n阶方阵B使$AB=O$的充分必要条件是$|A|=0$ （Hint：运用本章内容证明）;

2. 设矩阵$B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & t\\ 3 & 5 & 3\end{pmatrix}$, 且$R(B)=2$, 求$t$.

四、已知方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+2x_3+3x_4=1,\\ x_1+3x_2+6x_3+x_4=3,\\ 3x_1-x_2-k_1x_3+15x_4=3,\\ x_1-5x_2-10x_3+12x_4=k_2.\end{cases}$$

问k_1, k_2为何值时，方程组无解？有唯一解？有无穷解？并求无穷解情形时的一般解。

五、计算及证明。

1. 证明：若$A_{m\times n}B_{n\times l}=O$, 则$R(A)+R(B)\le n$ （重新写出完整的证明过程）;

2. 证明：如果A为n阶方阵$(n\ge 2)$，那么$R(A^*)=\begin{cases} n, & R(A)=n,\\ 1, & R(A)=n-1,\\ 0, & R(A)<n-1.\end{cases}$

3. 讨论λ值的范围，以确定矩阵$\begin{pmatrix}1 & \lambda & -1 & 2\\ 2 & -1 & \lambda & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$的秩;

4. 若n阶矩阵A满足$3A^2=2A$，证明: $R(A)+R(3A-2E)=n.$

5. 设A为n阶方阵，且$R(A)=1$, 证明：存在常数k，使得$A^2=kA$;

6. 设A为2×2方阵，证明：若存在$l\ge 2$使得$A^l=O$，则$A^2=O$;

7. 设A为$m\times n$阶矩阵，证明：$R(A^TA)=R(A)$。