多媒体技术

回顾

- 统计编码
  - 香农-范诺编码
  - 霍夫曼编码
  - 算术编码
  - RLE编码

3.2 常用的数据压缩编码

3.2 常用的数据压缩编码方法

- 统计编码
- 预测编码
- 变换编码
- 分析合成编码

3.2.1 统计编码

5、LZW编码

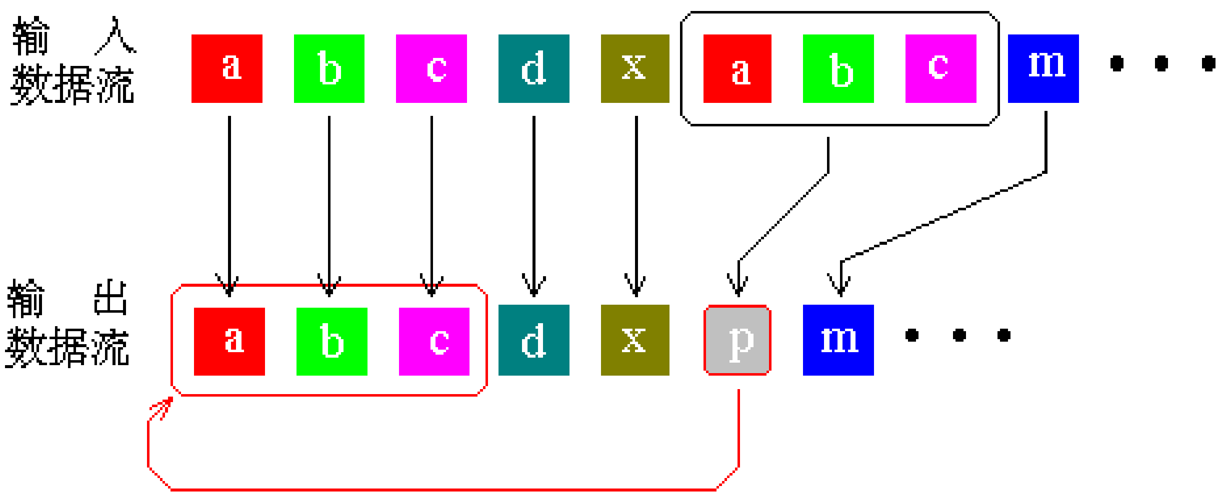
- 词典编码的思想：词典编码的根据是数据本身包含有**重复代码**这个特性。例如文本文件就具有这种特性。词典编码法的种类很多，归纳起来大致有两类。

3.2.1 统计编码

- 第一类词典法的想法是企图查找正在压缩的字符序列是否在以前输入的数据中出现过，然后用已经出现过的字符串替代重复的部分，它的输出仅仅是指向早期出现过的字符串的“指针”。
  - 这里所指的“词典”：是指用以前处理过的数据来表示编码过程中遇到的重复部分。

3.2.1 统计编码

- 第一类编码算法
  - 用已经出现过的字符串替代重复的部分
  - 编码器的输出仅仅是指向早期出现过的字符串的“指针”

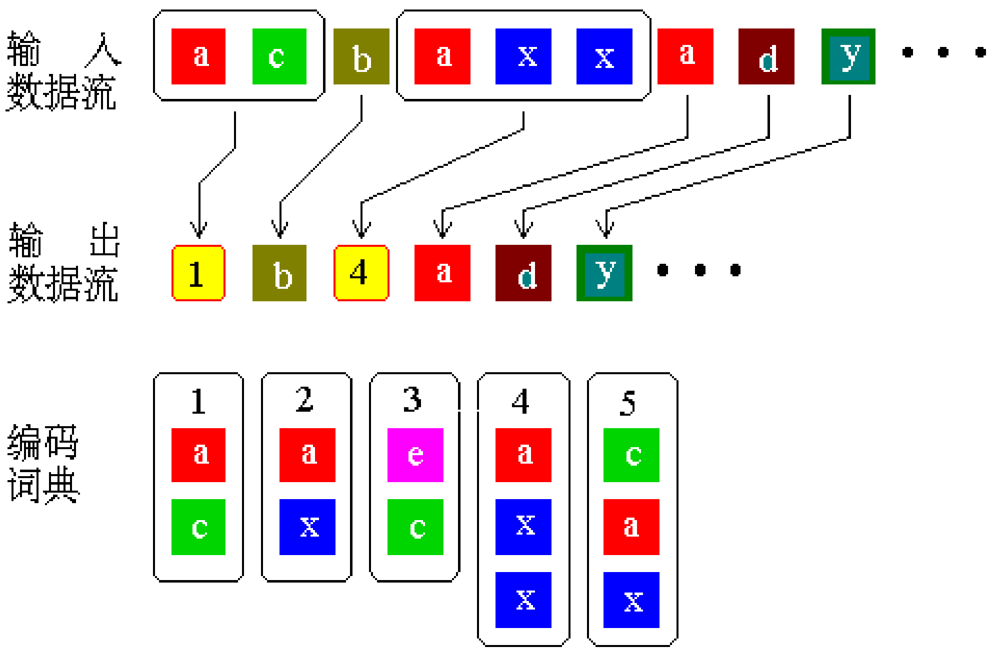


3.2.1 统计编码

- 第二类算法的想法是企图从输入的数据中创建一个“短语词典(dictionary of the phrases)”，短语可以是任意字符的组合。编码数据过程中当遇到已经在词典中出现的“短语”时，编码器就输出这个词典中的短语的“索引号”，而不是短语本身。

3.2.1 统计编码

- 第二类编码算法
  - 从输入的数据中创建一个“短语词典”
  - 编码器输出词典中的短语“索引号”，而不是短语



3.2.1 统计编码

LZW编码

- LZW编码时，首先将原始的数据分成多个条纹，每个条纹都单独进行压缩。
- LZW算法基于一个转换表或字串表，它将输入字符映象到编码中，使用可变长代码，最大代码长度为12位。
- LZW算法中的字串表对于每个条纹都不同，并且不必保留给解压缩程序，因为解压缩过程中能自动建立完全相同的字串表。实际上，它是通过查找冗余字符串并将此字符串用较短的符号标记替代的压缩技术。

3.2.1 统计编码

LZW编码

- 字符(Character): 一种基础数据元素，在普通文本文件中，它占用1个单独的byte，在图像中，是一种代表给定像素颜色的索引值;
- 前缀(Prefix)：代表一个字符最直接的前一个字符。长度可以为0。一个前缀和一个字符组成一个字符串(string);
- 后缀(Suffix)：是一个字符，一个字符串可以由(A,B)来组成，A是前缀，B是后缀，当A长度为0的时候，代表根;
- 码(Code): 用于代表一个字符串的位置编码。

3.2.1 统计编码

LZW编码

- 为了区别代表串的值(Code)和原来的单个的数据值(String)，需要使它们的数值域不重合。
- 如：原来的数值范围可以用8bit来表示，那么就认为原始的数的范围是0～255，压缩程序生成的标号的范围就不能为0～255（如果是0-255，就重复了）。
- 只能从256开始，但是这样一来就超过了8位的表示范围了，所以必须要扩展数据的位数，至少扩展一位。

3.2.1 统计编码

LZW编码

- 可以用一个字符代表几个字符，比如用256来表示254、255两个数。
- 可以看出LZW算法的适用范围是原始数据串最好是有大量的子串多次重复出现，重复的越多，压缩效果越好。反之则越差，可能真的不减反增了。

3.2.1 统计编码

LZW编码

- 当标号集（字典）增加到一定程度时，重新构造字典，使用清除标志CLEAR。
- GIF规范规定的是12位，为了提高压缩率，采用的是变长的字长。
- GIF规定的清除标志CLEAR的数值是原始数据字长表示的最大值加1，如果原始数据字长是8清除标志就是256。另外GIF还规定了一个结束标志END，它的值是清除标志CLEAR再加1。

3.2.1 统计编码

LZW编码

- 比如有一个字符串，是由A、B、C、D四个字符构成的，那么就可以用0 1 2 3 来表示，两位就够了。
- A B A B A B A B B B A B A B A A C D A C D A D C A B A A A B A B .....
- 首先要扩充一位，变成3位，定义 Clear = 4，End = 5。那么以后的标号就从6开始。

3.2.1 统计编码

A B A B A B A B B B A B A B A A C D A C D A D C A B A A A B A B .....

– 初始标号集为:

0	1	2	3	4	5
A	B	C	D	Clear	End

3.2.1 统计编码

A B A B A B A B B B A B A B A A C D A C D A D C A B A A A B A B .....

- 第1步，取第一个字符A，已经在定义中，不做处理。
- 第2步，取第二个字符，现在的取到的字符串为（A，B），
  - 前缀：可以是原始的字符，也可是一个代表字符串的标号;
  - 后缀：一个字符;
  - （A，B）未出现，用标号6代表（A，B），把前缀 A 放入到输出流中，只保留后缀 B，让它变成前缀。

3.2.1 统计编码

A B A B A B A B B B A B A B A A C D A C D A D C A B A A A B A B .....

- 第3步，取下一个字符A，字符串是（B，A），未出现，用一个新标号来表示7＝（B，A）。把前缀 B 放入到输出流，A 变成前缀。
- 第4步，取下一个字符B，字符串是（A，B），出现过，是标号6，以6来作为前缀。
- 第5步，取下一个A，字符串是（6，A），未出现，令8＝（6，A），把前缀 6放到输出流。A变成前缀。

3.2.1 统计编码

步骤	前缀	后缀	字符串	出现	输出	标号
1		A	(, A)			
2	A	B	(A, B)	N	A	6
3	B	A	(B, A)	N	B	7
4	A	B	(A, B)	Y		
5	6	A	(6, A)	N	6	8
6	A	B	(A, B)	Y		
7	6	A	(6, A)	Y		
8	8	B	(8, B)	N	8	9
9	B	B	(B, B)	N	B	10

3.2.1 统计编码

输出： A B A B A B A B … -> A B 6 8 B…

6: A B

8: 6 A -> A B A

3.2.1 统计编码

待解压的数据流为：A B 6 8 B 10 9 A A C D 14 16 D C 8 ....

- 第1步，取第一个和第二个数据，是（A，B），未出现，令**6＝（A，B）**，把**前缀A**放入**输出流**中，后缀**B**变成**前缀**;
- 第2步，取第三个数据6，变为（B，6）。未出现，把6展开，6是A B，这里原来的字串是B A B……，令**7＝（B，A）**，7的后缀就是6 代表的字符串的第一个字符。把**B**放入**输出流**。

3.2.1 统计编码

待解压的数据流为：A B 6 8 B 10 9 A A C D 14 16 D C 8 ....

– 第3步，取第四个数据8，得到（6，8）。未出现，令8＝（6，8的第一个字符）。8的前缀是6，8的第一个字符也就是6的第一个字符A。8＝（6，A），现在把6代表的字符串AB放入输出流，让前缀变为8;

3.2.1 统计编码

待解压的数据流为：A B 6 8 B 10 9 A A C D 14 16 D C 8 ....

- 第4步，取第五个数B，现在是（8，B），让9＝（8，B），把8＝6A＝AB A放入输出流，前缀为B。
- 第5步，取第六个数10，（B，10），同第三步，令10＝（B，10的第一个字符）＝（B，B），把B放入输出流;

3.2.1 统计编码

步骤	前缀	后缀	出现	字符串	输出	标号
1				(A, B)	A	6
2	B	6(A)	N	(B, A)	B	7
3	6	8(A)	N	(6, A)	AB(6)	8
4	8	B	N	(8, B)	ABA(8)	9
5	B	10(B)	N	(B, B)	B	10
6	…	…	…	…	…	…

3.2.1 统计编码

现在的输出流：

1 2 3 4 5 ......

A B AB AB A B ......

原来的数据：

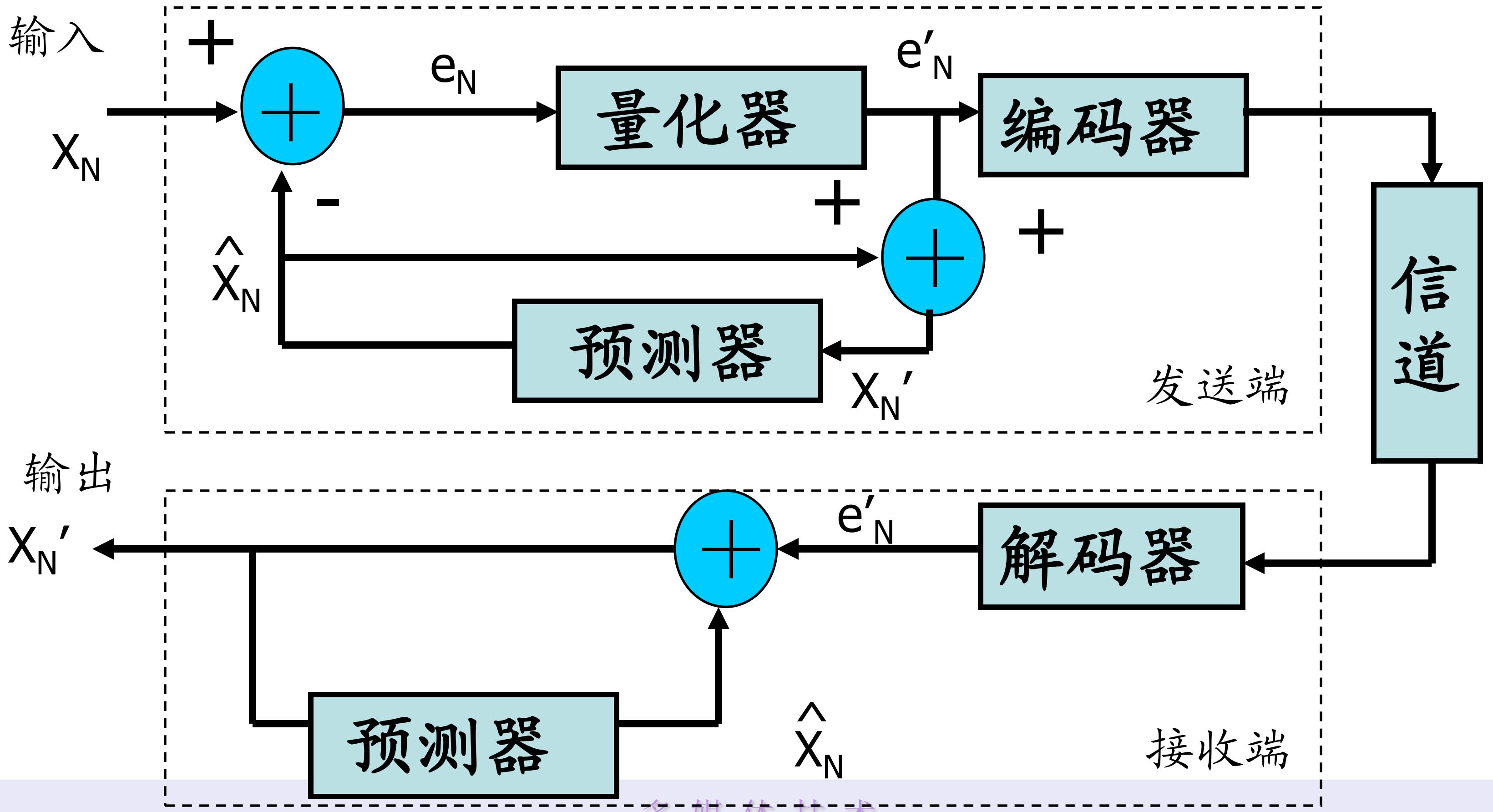
A B AB AB A B B B A B A B A A C D A C D

3.2.2 预测编码

- 预测编码
  - 预测编码是指利用前面的一个或多个信号对下一个信号进行预测，然后对实际值和预测值的差进行编码。
    - DPCM与ADPCM是两种典型的预测编码。
  - 目标
    - 减少数据在时间和空间上的相关性
  - 应用
    - 语音的分析与合成
    - 图像的编码与解码
  - 关键技术
    - 预测器的设计，线性预测、非线性预测

3.2.2 预测编码

- 差分脉冲编码调制DPCM（Differential Pulse Code Modulation）原理

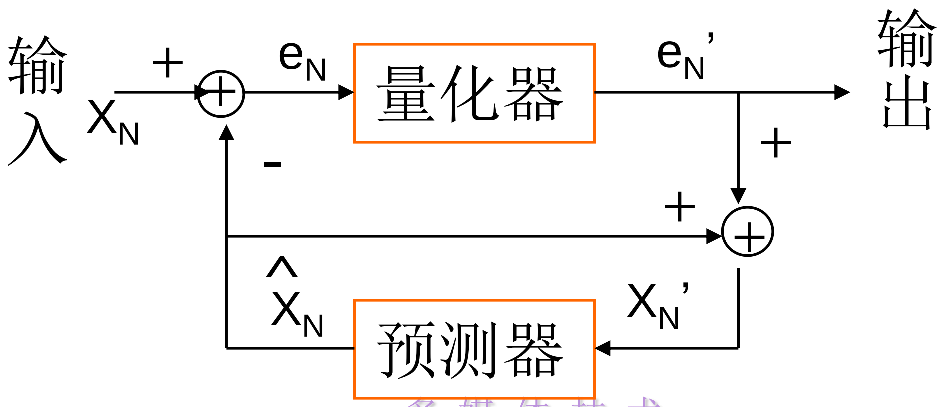


3.2.2 预测编码

- 符号说明:
  - X_N： 为采样的图像或声音数据
  - $\hat{X}_N$： 是X_N的预测值
  - e_N： 是实际值与预测值的差值（ $X_N - \hat{X}_N$ ）
  - e_N'： 是e_N的量化值
  - X_N'： 是引入了量化误差的X_N。

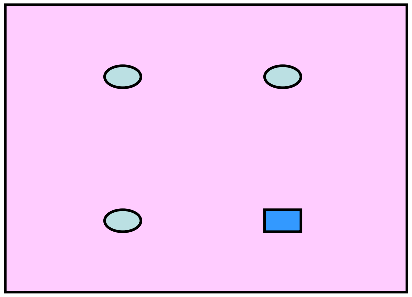
3.2.2 预测编码

- 例子：假设预测器的预测值为前一个样值（即预测器为单位延迟），量化器不进行量化，系统的输入为：0、1、2、1、1、2、3、3、4、4、……
  - X_N：0、1、2、1、1、2、3、3、4、4……
  - $\hat{X}_N$：0、0、1、2、1、1、2、3、3、4……
  - e_N：0、1、1、-1、0、1、1、0、1、0……



3.2.2 预测编码

- 预测器的设计
  - 预测器通常设计成用前面几个样值来预测下一样值，而不是利用整个数据信源模型，这是因为模型太复杂，且是时变的，在大多数情况下预测几乎不能够实现。
  - 预测器的阶数
  - 预测器的系数
    - 如一个3阶预测器中，各像素的权重称为预测器的系数。其既可以固定不变，也可以变化。



3.2.2 预测编码

- 预测器的设计
  - 寻找使预测器的某种误差函数为最小的线性预测器;
  - 最小均方预测误差为最优预测，即：通常采用的误差函数是均方误差（MSE）;
  - $MSE=E[(x_n - \hat{x}_n)^2]$
    - E：数学期望，
    - x_n：下一样值的实际值，
    - $\hat{x}_n$：下一样值的预测值。

3.2.2 预测编码

- 预测器的设计
  - 若线性预测器用前面的样值x_1、x_2、…… ……、x_{n-1}来预测x_n，则预测值为：

$$\hat{x}_n = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots \dots + a_{n-1}x_{n-1}$$

令$e_n = x_n - \hat{x}_n$

  - $\hat{x}_n$的最佳估计值是能使平方误差e_n的期望值最小的$\hat{x}_n$。为求出这一最小值，需计算偏导数，并令偏导数为零，得到一组联立方程。

3.2.2 预测编码

- 预测器的设计

$$\frac{\partial E\{e_n^2\}}{\partial a_i} = \frac{\partial E\{(x_n - \hat{x}_n)^2\}}{\partial a_i}$$

$$= \frac{\partial E\{(x_n - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1}))^2\}}{\partial a_i}$$

$$\frac{\partial E\{e_n^2\}}{\partial a_i} = -2E\{(x_n - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1}))x_i\}$$

$$i = 1, 2, \cdots, n-1$$

令 $\frac{\partial E\{e_n^2\}}{\partial a_i} = 0$

$$E\{(x_n - (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_{n-1} x_{n-1}))x_i\} = 0$$

$$i = 1, 2, \cdots, n-1$$

$$E\{(x_n - \hat{x}_n)x_i\} = 0$$

3.2.2 预测编码

- 预测器的设计

$$E\{x_n x_i - (a_1 x_1 x_i + a_2 x_2 x_i + \ldots + a_{n-1} x_{n-1} x_i)\} = 0$$

$$E\{x_n x_i\} - E\{a_1 x_1 x_i\} - E\{a_2 x_2 x_i\} - \ldots - E\{a_{n-1} x_{n-1} x_i\} = 0$$

$$E\{x_n x_i\} = a_1 E\{x_1 x_i\} + a_2 E\{x_2 x_i\} + \ldots + a_{n-1} E\{x_{n-1} x_i\}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1$$

3.2.2 预测编码

- 预测器的设计
  - 预测参数的最佳化依赖于信源的统计特性，要得到最佳的预测参数是一件繁琐的工作。
  - 为了简化预测器，使DPCM系统能做到实时压缩，在实际中常常用固定的预测参数来代替最佳系数。
  - 如：选用前一样值作为下一样值的预测值。

3.2.2 预测编码

- **ADPCM**
  - 进一步改善量化性能或压缩数据率的方法。
  - 预测参数的最佳化依赖于信源的统计特性，要得到最佳的预测参数是一件繁琐的工作。采用固定的预测参数往往又得不到好的性能。
  - 为了既能使性能较佳，又不致于有太大的工作量，可以将上述两种方法折衷考虑，采用自适应预测。
  - 分类：线性自适应预测、非线性自适应预测

3.2.2 预测编码

- 自适应量化
  - 根据信号分布不均匀的特点，系统具有随输入信号的变化而改变量化区间大小以保持输入量化器的信号基本均匀的能力。
- 自适应预测
  - 预测参数仍采用固定的；但此时有多组预测参数可供选择。编码时具体采用哪组预测参数根据信源的特征来自适应的确定。
  - 通常将信源数据分区间编码，编码时自动地选择一组预测参数，使该区间实际值与预测值的均方误差最小。
  - 随着编码区间的不同，预测参数自适应的变化，以达到准最佳预测。

3.2.2 预测编码

例如，Microsoft 的ADPCM采用二预测参数，提供7组预测系数，如右表所示。

编码时，根据选定的准则（如最小均方误差准则），每个编码区间自动地选取一组最佳的参数。

系数集	系数1	系数2
0	256	0
1	512	-256
2	0	0
3	192	64
4	240	0
5	460	-208
6	392	-232

3.2.3 变换编码

- 变换编码
  - 将原始数据从初始空间或者时间域进行数学变换;
  - 使得信息中最重要的部分在变换域中易于识别，集中出现，重点处理；能量较少的部分较分散，进行粗处理;
  - 例如：将时域信号变换到频域，因为声音、图像大部分信息都是低频信号，在频域比较集中，再进行采样编码可以压缩数据。

3.2.3 变换编码

- 数据压缩主要是去除信源的相关性。若考虑到信号存在于无限区间上，而变换区域又是有限的，那么表征相关性的统计特性就是协方差矩阵。
- 协方差矩阵
  - 主对角线：变量的方差；
  - 其余元素：变量的协方差。
  - 当协方差矩阵中除对角线上元素之外的各元素都为零时，就等效于相关性为零。

3.2.3 变换编码

- 希望变换后的协方差矩阵为一对角矩阵，同时也希望主对角线上各元素随 i，j 的增加很快衰减。
- 因此，变换编码的关键在于：在已知 X 的条件下，根据它的协方差矩阵去寻找一种正交变换 T，使变换后的协方差矩阵满足或接近为一对角矩阵。

3.2.3 变换编码

- **K-L变换**
  - 当经过正交变换后的协方差矩阵为一对角矩阵，且具有最小均方误差时，该变换称最佳变换，也称Karhunen-Loeve变换。
  - 以信号的协方差矩阵的归一化正交特征向量所构成的正交矩阵，对该矢量信号所作的正交变换能使变换后的协方差矩阵达到对角矩阵。
  - 需要预先知道原始数据的协方差矩阵、计算特征值，求特征值和特征向量并非易事，尤其是在高维时。

3.2.3 变换编码

- 准最佳变换
  - 如果变换后的协方差矩阵接近对角矩阵，该类变换称准最佳变换，典型的有DCT、DFT、WHT、HrT等。其中，最常用的变换是离散余弦变换DCT。
  - 当图像数据满足一定分布时，DCT的性能与K-L变换相近
    - 有固定的正交变换矩阵;
    - 简便、易于实现、有快速算法。
  - 用于JPEG、MPEG、H.261等压缩标准中。

3.2.3 变换编码

- 离散余弦变换DCT
  - 1-D离散余弦变换

$$C(u) = a(u)\sum_{x=0}^{N-1} f(x)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \qquad u = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$f(x) = \sum_{u=0}^{N-1} a(u)C(u)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right] \qquad x = 0, 1, \cdots, N-1$$

$$a(u) = \begin{cases} \sqrt{1/N} & \text{当} \quad u = 0 \\ \sqrt{2/N} & \text{当} \quad u = 1, 2, \cdots, N-1 \end{cases}$$

3.2.3 变换编码

- 离散余弦变换DCT
  - 2-D离散余弦变换：分离特性

$$C(u,v)=a(u)a(v)\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1}a(u)a(v)C(u,v)\cos\left[\frac{(2x+1)u\pi}{2N}\right]\cos\left[\frac{(2y+1)v\pi}{2N}\right]$$

其中：

$\alpha(\lambda)=\sqrt{\frac{1}{N}}$，当 $\lambda=0$ 时

$\alpha(\lambda)=\sqrt{\frac{2}{N}}$，当 $\lambda\neq 0$ 时

3.2.4 分析合成编码

- 分析合成编码
  - 通过对原始数据的分析，将其分解为一系列更适合于表示的基元或者从中提取出更有本质意义的参数，编码仅对这些基本单元或者特征参数进行;
  - 解码时则借助于一定的规则或者模型，按照一定的算法将这些基元或者参数再综合成原始数据的一个逼近。

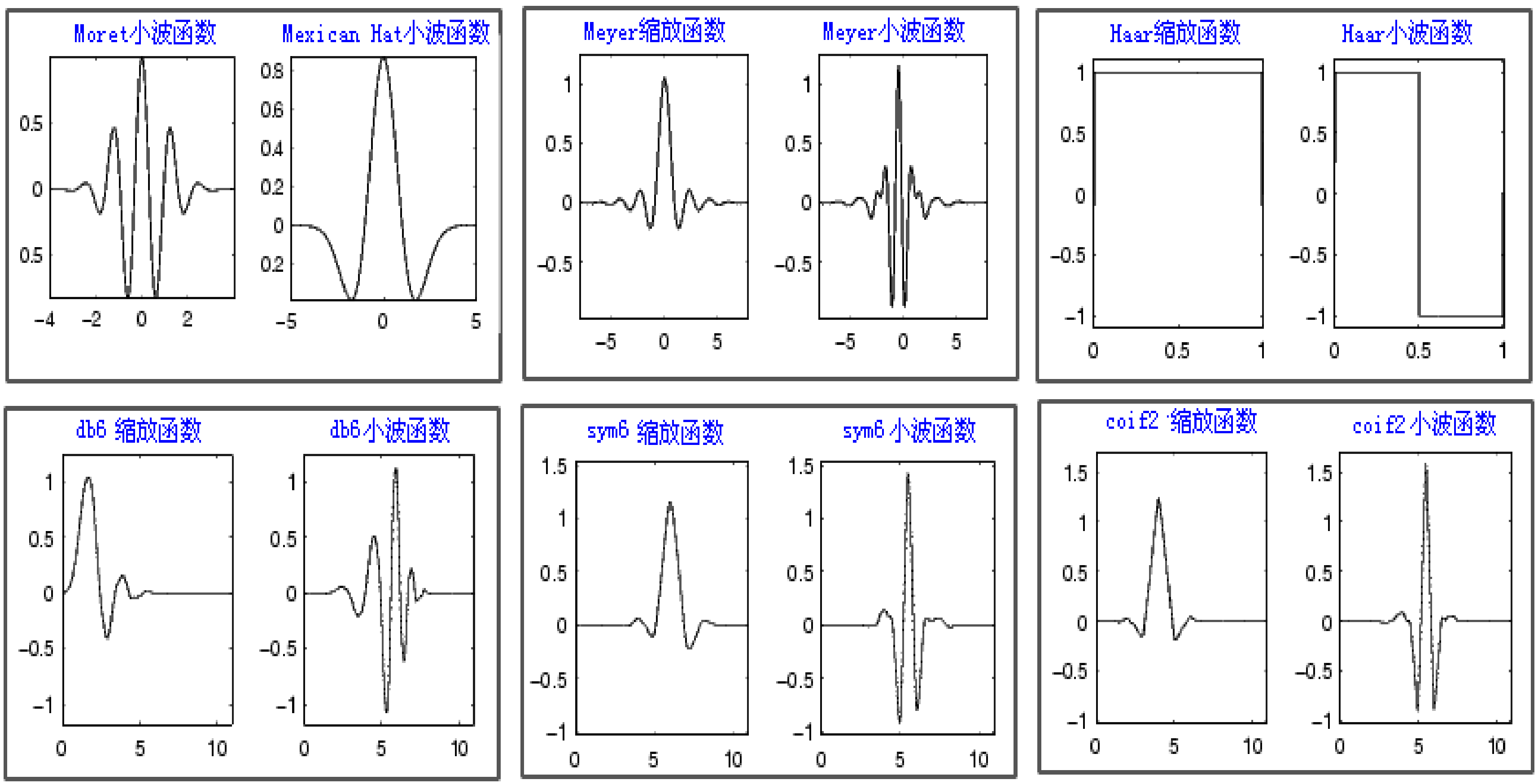
（1）小波变换编码

（2）子带编码

3.2.4 小波变换

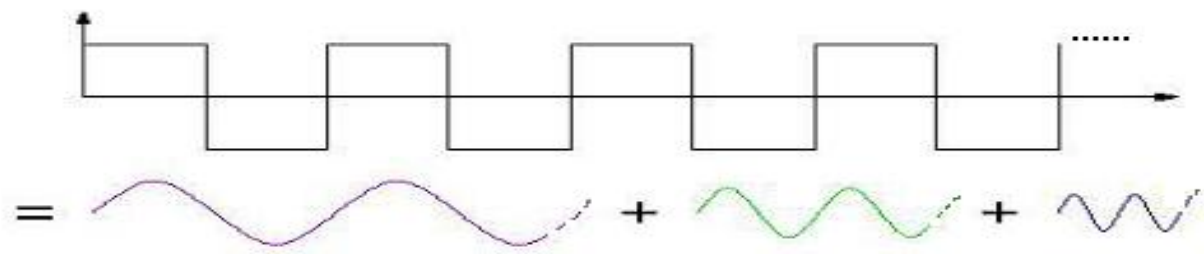
- 在有限时间范围内变化且其平均值为零的数学函数
  - 具有有限的持续时间和突变的频率和振幅;
  - 在有限的时间范围内，它的平均值等于零。
- 部分小波
  - 许多数缩放函数和小波函数以开发者的名字命名，例如，
    - Moret小波函数是Grossmann和Morlet在1984年开发的;
    - db6缩放函数和db6小波函数是Daubechies开发的。

3.2.4 小波变换


Moret小波函数
Mexican Hat小波函数
Meyer缩放函数
Meyer小波函数
Haar缩放函数
Haar小波函数
db6 缩放函数
db6小波函数
sym6 缩放函数
sym6 小波函数
coif2 缩放函数
coif2 小波函数

3.2.4 小波变换

- 小波分析/小波变换
  - 傅立叶理论指出，一个信号可表示成一系列正弦和余弦函数之和，叫做傅立叶展开式

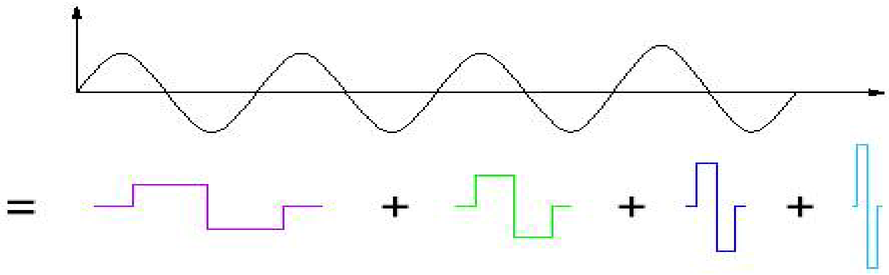


  - 傅立叶分析
    - 用一系列不同频率的正弦波表示一个信号
    - 一系列不同频率的正弦波是傅立叶变换的基函数

只有频率分辨率而没有时间分辨率
可确定信号中包含哪些频率的信号，但不能确定具有这些频率的信号出现在什么时候

3.2.4 小波变换

- 小波分析/小波变换
  - 小波分析
    - 用母小波通过移位和缩放后得到的一系列小波表示一个信号
    - 一系列小波可用作表示一些函数的基函数



  - 凡能用傅立叶分析的函数都可用小波分析
    - 小波变换可理解为用经过缩放和平移的一系列函数代替傅立叶变换用的正弦波
  - 用不规则的小波分析变化激烈的信号比用平滑的正弦波更有效，或者说对信号的基本特性描述得更好

3.2.4 小波变换

- 小波分析/小波变换

  变换目的是获得时间和频率域之间的相互关系

  - 小波变换
    - 对一个函数在空间和时间上进行局部化的一种数学变换
    - 通过平移母小波（mother wavelet）获得信号的时间信息
      通过缩放母小波的宽度（或称尺度）获得信号的频率特性
    - 对母小波的平移和缩放操作是为计算小波的系数，这些系数代表局部信号和小波之间的相互关系
  - 小波分析中常用的三个基本概念
    - 连续小波变换
    - 离散小波变换
    - 小波重构

3.2.4 小波变换

- 连续小波变换(continuous wavelet transform，CWT)

$$C(scale, position) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\psi(scale, position, t)dt$$

  - 该式含义：小波变换是**信号*f(t)***与被缩放和平移的**小波函数*Ψ*之积**在信号存在的整个期间里求和;
  - CWT变换的结果是许多**小波系数*C***，这些系数是缩放因子(scale)和位置(position)的函数。

3.2.4 小波变换

- 连续小波变换
  - 如果用字母a表示缩放因子
    - 正弦函数f(t)=sin(t)，缩放因子a=1
    - 正弦函数f(t)=sin(t/2)，缩放因子a=2
    - 正弦函数f(t)=sin(t/4)，缩放因子a=4

3.2.4 小波变换

CWT的变换过程示例:

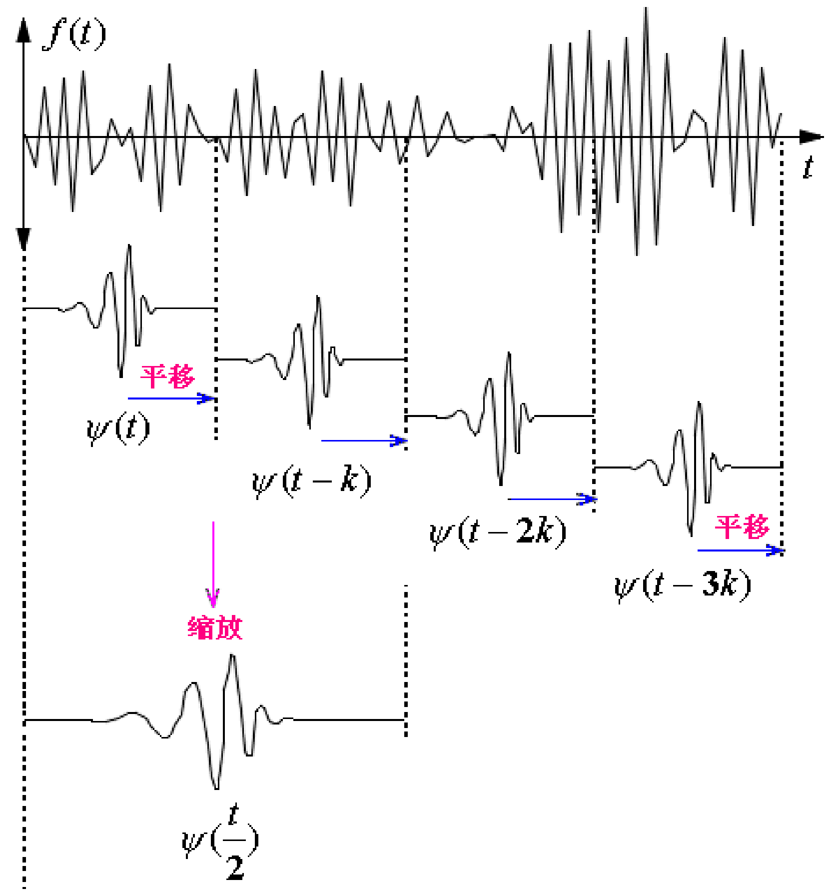
1.小波*ψ* (*t*)和原始信号*f*(*t*)的开始部分进行比较;

2.计算系数*C*——该部分信号与小波的近似程度；*C*值越高表示信号与小波相似程度越高;

3.小波右移*k*得到的小波函数为*ψ* (*t*-*k*)，然后重复步骤1和2，*ψ* (*t*-2*k*) ……直到信号结束;

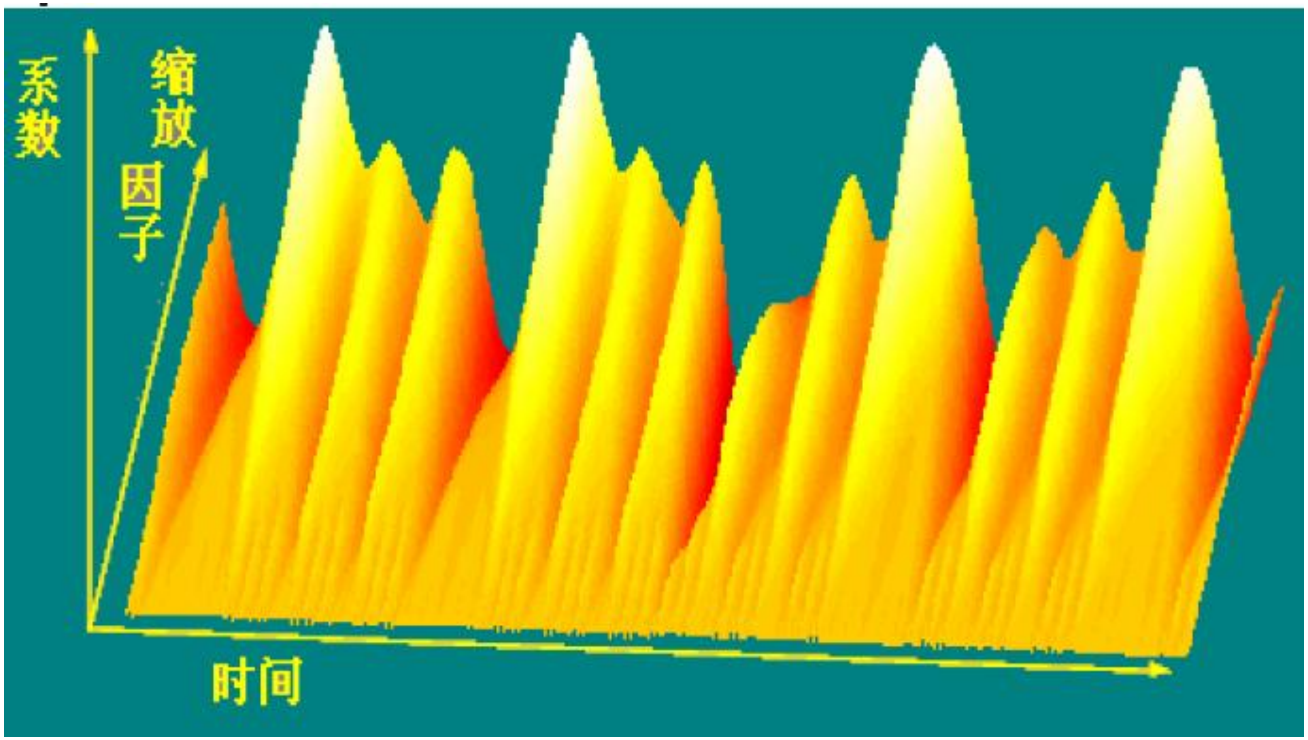
4.扩展小波，如扩展一倍，得到的小波函数为*ψ* (*t*/2);

5.重复步骤1~4。



3.2.4 小波变换

- 连续小波变换
  - 小波变换完成之后得到的系数是在不同的缩放因子下由信号的不同部分产生的。



3.2.4 小波变换

- 连续小波变换
  - 小波的缩放因子与信号频率之间的关系
    - 缩放因子小，表示小波比较窄，度量的是信号细节，表示频率比较高；
    - 缩放因子大，表示小波比较宽，度量的是信号的粗糙程度，表示频率比较低。

3.2.4 小波变换

- 离散小波变换
  - 为了解决计算量的问题，缩放因子和平移参数都选择2^j（j>0的整数）的倍数。这种变换称为双尺度小波变换(dyadic wavelet transform)。
- 小波重构
  - 离散小波变换可以用来分析（分解）信号，这个过程叫做分析（分解）。
  - 把分解的系数还原成原始信号的过程叫做小波重构(wavelet reconstruction)或者叫做合成(synthesis)，数学上叫做逆离散小波变换(inverse discrete wavelet transform，IDWT)。

3.2.4 小波变换

- 小波定义
  - 小波可由一个定义在有限区间的函数来构造
  - 母小波（基本小波）：$\psi(x)$
  - 一组小波基函数可通过缩放和平移基本小波来生成

$$\psi_{a,b}(x)=|a|^{-1/2}\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

a为缩放参数，反映特定基函数的宽度（或者叫做尺度）；
b为平移参数，指定沿x轴平移的位置。

当a=2^{j}和b=ia的情况下，一维小波基函数序列定义为

$$\psi_{i,j}(x)=2^{-j/2}\psi(2^{-j}x-i) \quad \text{或} \quad \psi_i^j(x)=2^{j/2}\psi(2^jx-i)$$

3.2.4 小波变换

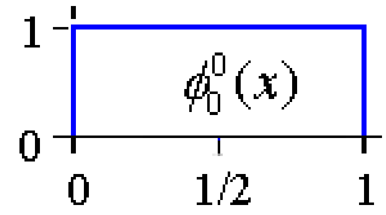
- 哈尔基函数
  - 基函数是一组线性无关的函数，可以用来构造任意给定的信号，如用基函数的加权和表示;
  - 哈尔基函数(Haar basis function)
    - 定义在半开区间[0，1)上的一组分段常值函数(piecewise-constant function)集;
    - 每一个分段常值函数的数值在一个小范围里是“1”，其他地方为“0”。

3.2.4 小波变换

- 哈尔基函数
  - 假设一幅图像由$2^0=1$个像素，这幅图像在整个[0，1)区间中就是一个常值函数，用 Φ_0^0表示，框函数;
  - 用V^0表示由这个常值函数生成的矢量空间。
  - Φ_0^0是构成矢量空间V^0的基。

$$V^0:\ \phi_0^0(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

波形:

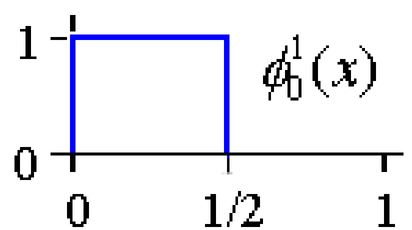


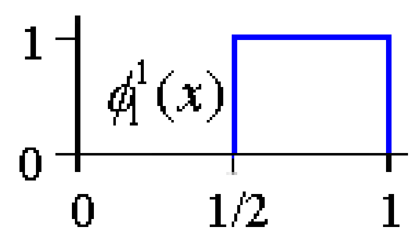
3.2.4 小波变换

- 哈尔基函数
  - 假设一幅图像由$2^1=2$个像素组成，这幅图像在[0，1)区间中有两个等间隔的子区间[0，1/2)和 [1/2，1)，每一个区间中各有1个常值函数，分别用 Φ_0^1和 Φ_1^1表示。
  - V^1表示由2个子区间中的常值函数生成的矢量空间。
  - Φ_0^1和 Φ_1^1是构成矢量空间V^1的基。

$$V^1: \ \phi_0^1(x)=\begin{cases}1 & 0 \le x < 0.5 \\ 0 & \text{其他}\end{cases},$$

波形:





$$\phi_1^1(x)=\begin{cases}1 & 0.5 \le x < 1 \\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

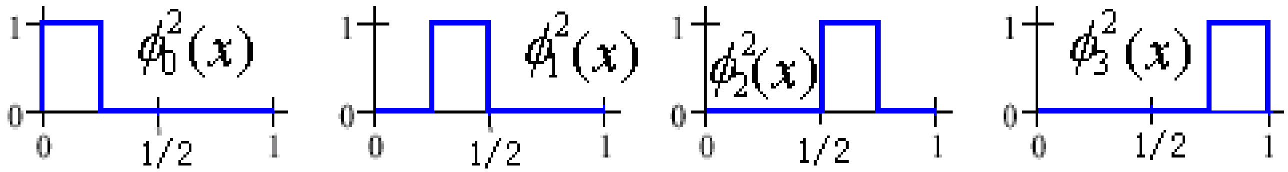
3.2.4 小波变换

- 生成矢量空间V^2的常值函数

$$\phi_0^2(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1/4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad \phi_1^2(x)=\begin{cases}1, & 1/4\le x<1/2\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$\phi_2^2(x)=\begin{cases}1, & 1/2\le x<3/4\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad \phi_3^2(x)=\begin{cases}1, & 3/4\le x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

波形:



3.2.4 小波变换

- 为了表示矢量空间中的矢量，每一个矢量空间都需要定义一个基(basis)。哈尔基定义为

$$\phi(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

- 为生成矢量空间而定义的基函数也叫做尺度函数(scaling function)。哈尔基尺度函数定义为

$$\phi_i^j(x)=\phi(2^j x-i),\quad i=0,1,\cdots,(2^j-1)$$

- 其中，*j*为尺度因子，使函数图形缩小或放大
  *i*为平移参数，使函数沿x轴方向平移

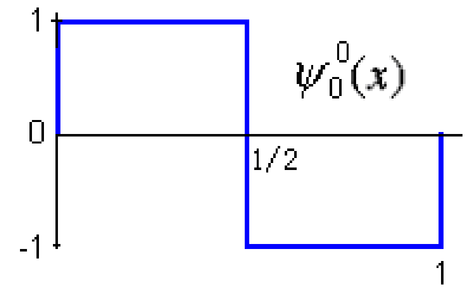
3.2.4 小波变换

- 哈尔小波
  - 最古老和最简单的小波。与**框函数**对应的**基本哈尔小波函数**定义为：

$$\psi(x)=\begin{cases}1 & 当\ 0\le x<1/2\\ -1 & 当\ 1/2\le x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

  - 生成矢量空间W^0的哈尔小波

$$\psi_0^0(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1/2\\ -1 & 1/2\le x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$



3.2.4 小波变换

- 哈尔小波
  - 哈尔小波尺度函数定义为:

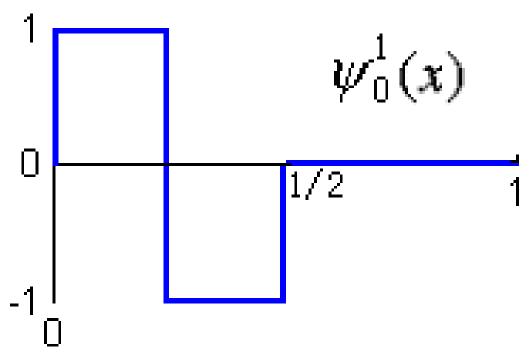
$$\psi_i^j(x) = \psi(2^j x - i), \quad i = 0, \cdots, (2^j - 1)$$

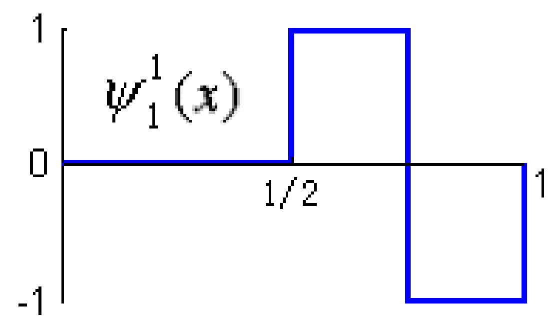
  - 其中，j为尺度因子，使函数图形缩小或放大
    i为平移参数，使函数沿x轴方向平移

3.2.4 小波变换

- 生成矢量空间W^1的哈尔小波

$$\psi_0^1(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1/4\\ -1 & 1/4\le x<1/2\\ 0 & 其他\end{cases}\qquad \psi_1^1(x)=\begin{cases}1 & 1/2\le x<3/4\\ -1 & 3/4\le x<1/2\\ 0 & 其他\end{cases}$$



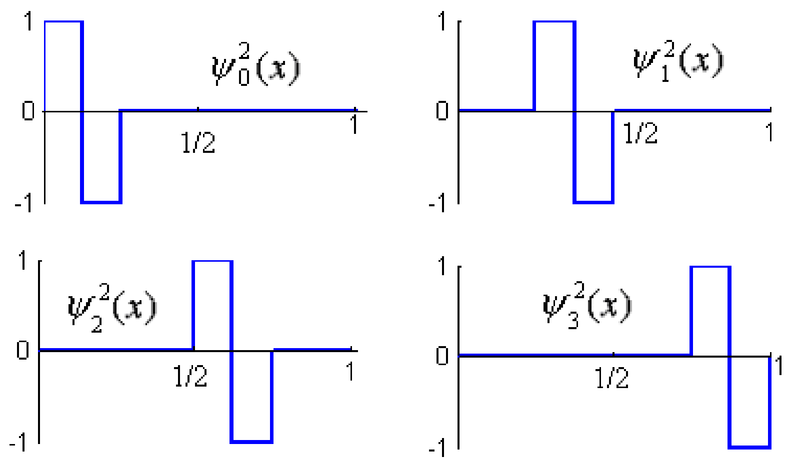


3.2.4 小波变换

- 生成矢量空间W^2的哈尔小波

$$\psi_0^2(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1/8\\ -1 & 1/8\le x<2/8\\ 0 & 其他\end{cases}\qquad \psi_1^2(x)=\begin{cases}1 & 2/8\le x<3/8\\ -1 & 3/8\le x<4/8\\ 0 & 其他\end{cases}$$

$$\psi_2^2(x)=\begin{cases}1 & 4/8\le x<5/8\\ -1 & 5/8\le x<6/8\\ 0 & 其他\end{cases}\qquad \psi_3^2(x)=\begin{cases}1 & 6/8\le x<7/8\\ -1 & 7/8\le x<1\\ 0 & 其他\end{cases}$$



3.2.4 小波变换

- 使用哈尔基函数和哈尔小波函数生成的矢量空间V^j和W^j具有下面的性质：

$$V^{j+1} = V^j \oplus W^j$$

  - 生成矢量空间W^j的基函数与生成矢量空间V^j的基函数构成矢量空间V^{j+1}的一组基。
  - 在矢量空间V^{j+1}中，生成矢量空间V^j的所有函数与生成矢量空间W^j的所有函数都是正交的。
  - 在矢量空间V^{j+1}中，矢量空间W^j中的小波可用来表示一个函数在矢量空间V^j中不能表示的部分。

作业6

- 写出对字符串ABABABABBBABAB进行LZW编码的过程和结果。

提示:

注意编码结束阶段。