第三章 经典运动学

3-1 解: (1)对.

(2)错. 一般 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\pm|a_r|\neq a$.

(3)与(4)均错,等式两端标量和矢量不统一.

3-2 如图，高出水面h 处岸边有人经定滑轮用绳拉水面的小船，t 时刻绳长为 l_0 ,人收绳的速率为 v_0，求此时刻小船之速率。设人、绳、船 在同一竖直平面内。

解：如图建立坐标系 Oxy ,小船的总绳长为常数 l ,在水平方向有

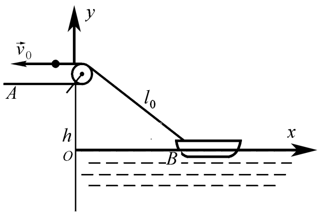

图3.2

$$-x_A+\sqrt{x_B{}^2+h^2}=l$$

x_A 为绳端位置， x_B 为小船位置

$$\therefore \quad \dot{x}_A=\frac{x_B\dot{x}_B}{\sqrt{x_B{}^2+h^2}}$$

t时刻 $\dot{x}_A=v_0$ $\sqrt{x_B{}^2+h^2}=l_0$ $x_B=\sqrt{l_0{}^2-h^2}$

$$\therefore \quad v_0=\dot{x}_B\frac{\sqrt{l_0{}^2-h^2}}{l_0}$$

其中 $\dot{x}_B$ 为小船的速率

3-3 已知质点的运动学方程 $\vec{\boldsymbol{r}}=2t\,\vec{\boldsymbol{i}}+8t^2\,\vec{\boldsymbol{j}}+6\vec{\boldsymbol{k}}$，求质点运动轨迹、 速度和加速度。

解： $\begin{cases}x=2t\\y=8t^2\\z=6\end{cases}$ 消去t， $\begin{cases}y=2x^2\\z=6\end{cases}$ 为轨道方程

速度 $\vec{\boldsymbol{v}}=v_x\,\vec{\boldsymbol{i}}+v_y\,\vec{\boldsymbol{j}}+v_z\,\vec{\boldsymbol{k}}$

$$=\dot{x}\,\vec{\boldsymbol{i}}+\dot{y}\,\vec{\boldsymbol{j}}+\dot{z}\,\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$=2\vec{\boldsymbol{i}}+16t\,\vec{\boldsymbol{j}}$$

加速度 $\vec{\boldsymbol{a}}=\ddot{x}\,\vec{\boldsymbol{i}}+\ddot{y}\,\vec{\boldsymbol{j}}+\ddot{z}\,\vec{\boldsymbol{k}}$

$$=16\vec{\boldsymbol{j}}$$

3-4 一质点作直线运动，其加速度 $a_x=-A\omega^2\cos\omega t$， $t=0$ 时 $v_x=0$， $x=A$，其中 A,ω 为正值常量，求此质点的运动学方程。

解： $\because \quad a_x=-A\omega^2\cos\omega t$

$$\therefore \quad \mathrm{d}v_x=-A\omega^2\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{v_{x0}}^{v_x} v_x = \int_0^t -A\omega^2\cos\omega t\,\mathrm{d}t$$

$v_x = -A\omega\sin\omega t$

$\therefore\ \mathrm{d}x = -A\omega\sin\omega t$

$\int_{x_0}^{x}\mathrm{d}x = \int_0^t -A\omega\sin\omega t$

$x - x_0 = A\cos\omega t\,|_0^t$

$x = A\cos\omega t$

3-5 如图极坐标系，有一质点沿垂直于极轴 Ox 到 O 点距离 $\overline{OA} = a$ 的直线以匀速率 v_0 运动，求质点位于 P 点时的加速度分量 a_r, a_θ 。

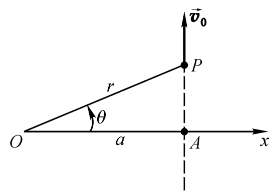

图3.7

解： $\vec{v} = \vec{v}_0$ （常矢量）

$\therefore\ \vec{a} = \dot{\vec{v}} = 0$

$\therefore\ a_r = 0 \quad a_\theta = 0$

3-6 解: 以 O 点为极点,沿管的初始方向建立极轴 Ox ,规定极角的正方向为管转动的方向.

设初始时 $t = 0$, 运动方程 $\begin{cases} r = bt \\ \theta = ct \end{cases}$

消去 t , 得: $r = \dfrac{b}{c}\theta$ (阿基米德螺旋线)

质点的速度和加速度:

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = b\,\vec{e}_r + cbt\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\theta$$

$$= -c^2bt\,\vec{e}_r + 2cb\,\vec{e}_\theta$$

$$a = \sqrt{a_r{}^2 + a_\theta{}^2} = cb\sqrt{c^2t^2 + 4}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{a_\theta}{-a_r} = \frac{2}{ct}$$

$t = 0$ 时 , $\alpha = 90^\circ \quad a = 2cb$

a 的大小随 t 增加,方向逐渐靠近 $\overrightarrow{AO}$ 方向

3-7 有一根细杆在水平面内绕其一端 O 转动，角速度不变，其大小为 ω，一小虫由 $t=0$ 开始，从 O 点沿杆向外爬动，小虫到 O 点的距离与 t^2 成正比，比例系数为 a，求小虫的速度和加速度。

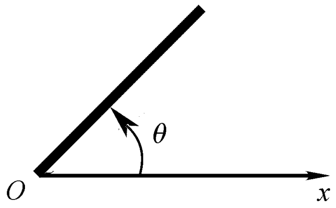

图3.8

解： 以 O 为极点建立极坐标系 Ox， $t=0$ 时，杆与极轴 Ox 重合

$$\therefore \begin{cases}\theta=\omega t\\ r=at^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dot\theta=\omega\\ \dot r=2at\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\ddot\theta=0\\ \ddot r=2a\end{cases}$$

$$\vec{v}=v_r\,\vec{e}_r+v_\theta\,\vec{e}_\theta$$
$$=\dot r\,\vec{e}_r+r\dot\theta\,\vec{e}_\theta$$
$$=2at\,\vec{e}_r+a\omega t^2\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a}=a_r\,\vec{e}_r+a_\theta\,\vec{e}_\theta$$
$$=\left(\ddot r-r\dot\theta^2\right)\vec{e}_r+\left(r\ddot\theta+2\dot r\dot\theta\right)\vec{e}_\theta$$
$$=\left(2a-a\omega^2t^2\right)\vec{e}_r+4a\omega t\vec{e}_\theta$$

3-8 如果质点的切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n 的以下情况，试问质点作何种运动？

(1) $a_t=0, a_n=0$；

(2) $a_t\neq 0, a_n=0$；

(3) $a_t=0, a_n\neq 0$；

(4) $a_t\neq 0, a_n\neq 0$

解： (1) $a_t=\ddot s=0\Rightarrow \dot s=$ 常数 匀速率运动

$\Rightarrow$ 匀速直线运动

$a_n=R\dot\theta^2=0\Rightarrow\theta=$ 常数 直线运动

(2) $a_t\neq 0$ 变速率运动

$\Rightarrow$ 变速直线运动

$a_n=0$ 直线运动

(3) $a_t=0$ 匀速率运动

$\Rightarrow$ 匀速率圆周运动

$a_n\neq 0$ 圆周运动

(4) $a_t\neq 0$ 变速率运动

$\Rightarrow$ 变速圆周运动

$a_n\neq 0$ 圆周运动

3-9 汽车在半径为100m的圆弧形轨道上刹车，自刹车开始其弧长方程 $s=10t-t^3$（单位分别为 m、 s），求汽车在 $t=1\text{s}$ 时的速度和加速度。

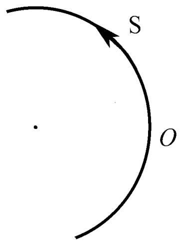

图3.9

解： 以圆弧轨道的刹车起点为坐标原点，汽车运动方向为弧长正方向建立自然坐标系

$$s=10t-t^3$$

$$\vec{v}=v_t\vec{t}=\dot{s}\vec{t}$$

$$=10-3t^2\vec{t}$$

当 $t=1s$ 时

$$\vec{v}=7\vec{t}$$

$$\vec{a}=a_t\vec{t}+a_n\vec{n}$$

$$=\dot{v}_t\vec{t}+\frac{v_t^2}{R}\vec{n}$$

$$=-6t\vec{t}+\frac{100-60t^2+9t^4}{100}\vec{n}$$

当 $t=1s$ 时 $\vec{a}=-6\vec{t}+\dfrac{49}{100}\vec{n}$

3-10 一质点从静止出发沿半径为 $R=2\text{m}$ 的圆周运动，切向加速度 $a_t=2\text{m.s}^{-2}$，问经过多长时间它的加速度矢量与半径成 45° 角，在这个时间内质点经过的路程为多少？

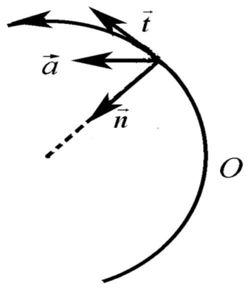

图3-10

解： 加速度矢量与半径成 45° 角，即为

$$\frac{a_t}{a_n}=\text{tg}45^\circ$$

$a_t=2$ ， $t=0$ 时 $v_t=0$

$$\int_0^{v_t}\text{d}v_t=\int_0^t a_t\text{d}t$$

$v_t=2t\left(\text{m}/\text{s}\right)$ $R=2\left(\text{m}\right)$

$$a_n=\frac{v_t^2}{R}=\frac{4t^2}{2}=2t^2 \quad \left(\text{m}/\text{s}^2\right)$$

$$\frac{a_t}{a_n}=t^2=\text{tg}45^\circ$$

$$t=1\left(\text{s}\right)$$

$$v_t = 2t$$

$$\mathrm{d}s = 2t\,\mathrm{d}t$$

$$\int_0^s \mathrm{d}s = \int_0^t 2t\,\mathrm{d}t$$

$$s = t^2 \quad (\mathrm{m})$$

$\therefore \quad s = 1 \quad (\mathrm{m})$