第十三章 热学的基本概念

13-1 解：氮气 $p_1V_1 = p_2V_2$

$$p_2 = p_1\frac{V_1}{V_2}$$

$$= 1\times\frac{500}{200}$$

$$= 2.5\ \text{atm}$$

$$p_{N_2} = 2.5\ \text{atm}$$

氧气 $p_{O_2} = 1\ \text{atm}$

混合气体压强 $p = p_{N_2} + p_{O_2} = 3.5\ \text{atm}$

氮气 $p_{氮}V = \nu_{氮}RT = \dfrac{M_{N_2}}{\mu_{N_2}}RT \quad M_{N_2} = \dfrac{p_{N_2}V}{RT}\mu_{N_2}$

氧气 $p_{氧}V = \nu_{氧}RT = \dfrac{M_{O_2}}{\mu_{O_2}}RT \quad M_{O_2} = \dfrac{p_{O_2}V}{RT}\mu_{O_2}$

$$\mu = \frac{M_{O_2} + M_{N_2}}{\dfrac{M_{O_2}}{\mu_{O_2}} + \dfrac{M_{N_2}}{\mu_{N_2}}}$$

$$= \frac{\dfrac{p_{O_2}V}{RT}\mu_{O_2} + \dfrac{p_{N_2}V}{RT}\mu_{N_2}}{\dfrac{p_{O_2}V}{RT} + \dfrac{p_{N_2}V}{RT}}$$

$$= \frac{p_{O_2}\mu_{O_2} + p_{N_2}\mu_{N_2}}{p_{O_2} + p_{N_2}}$$

$$= \frac{1\times 32 + 2.5\times 28}{3.5} = 29.1\ \text{g/mol} = 2.91\times 10^{-2}\ \text{kg/mol}$$

13-2 解：（1）从袋中取出一个白球的概率是 $5/10 = \dfrac{1}{2}$

（2）取出一个球，是红球或白球的概率

$$\frac{5}{10}+\frac{2}{10}=\frac{7}{10}$$

（3）$\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$

13-3 解：四颗均不出现 1 点的概率为 $\left(5/6\right)^4$，该事件为至少有一颗出现 1 点的对立事件，故至少有一颗出现 1 点的概率为 $1-\left(5/6\right)^4=0.518$.

13-4 解：该分子出现在 v 中的概率为 $\frac{V_0}{V}$.（原题有改动不太清晰，请查阅原题）

13-5 解：指定 2 个分子在 v 内概率为 $\left(\frac{v}{V}\right)\cdot\left(\frac{v}{V}\right)=\left(\frac{v}{V}\right)^2$

指定 3 个分子不在 v 中的概率为 $\left(1-\frac{v}{V}\right)^3$

指定 2 个分子在 v 内而其余不在 v 中的概率为 $\left(\frac{v}{V}\right)^2\cdot\left(1-\frac{v}{V}\right)^3$

从 5 个分子中选定 2 个分子共有 C_5^2 种选法，故 v 中恰有 2 个分子的概率为 $C_5^2\cdot\left(\frac{v}{V}\right)^2\cdot\left(1-\frac{v}{V}\right)^3$

13-6 解：（1） $p=nkT$， T 不变，$V\downarrow$， $n\uparrow$，所以 $p\uparrow$

（2） $p=nkT=\frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_k}$， $T\uparrow$， $\overline{\varepsilon_k}\uparrow$， $p\uparrow$

13-7 解： $p=nkT$ （原题有改动不太清晰，请查阅原题）

$$n=\frac{p}{kT}=\frac{1.013\times10^{-10}}{1.38\times10^{-23}\times300}$$

$$=2.45\times10^{10}\ \mathrm{m^{-3}}$$

$=2.45\times10^{4}\ \text{cm}^{-3}$

13-8 解：[法一] $pV=\frac{M}{\mu}RT$ （原题有改动不太清晰，请查阅原题）

$$T=\frac{pV\mu}{MR}$$

$$\overline{\varepsilon_k}=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}\frac{k\mu pV}{MR}$$

$$=\frac{3}{2}\times\frac{1.38\times10^{-23}\times2\times10^{3}\times4.0\times10^{4}\times10^{-3}}{2\times10^{-3}\times8.31}$$

$$=1.99\times10^{-21}\ \text{J}$$

[法二] $p=\frac{2}{3}n\overline{\varepsilon_k}$

$$n=\frac{N}{V}=\frac{\nu N_A}{V}=\frac{MN_A}{\mu V}$$

所以 $\overline{\varepsilon_k}=\frac{3}{2}\frac{p}{n}$

$$=\frac{3}{2}\frac{\mu Vp}{MN_A}$$

$$=\frac{3}{2}\frac{2\times20\times10^{-3}\times4.0\times10^{4}}{2\times6.022\times10^{23}}$$

$$=1.99\times10^{-21}\ \text{J}$$

13-9 解：（1）$f(v)\mathrm{d}v$ 是单个分子速率取值在区间 $v-v+\mathrm{d}v$ 区间内的概率

（2）$Nf(v)\mathrm{d}v$ 表示在速率区间 $v-v+\mathrm{d}v$ 内的分子数

（3）$\int_{v_1}^{v_2}f(v)\mathrm{d}v$ 表示分子速率在任一有限范围 v_1-v_2 内分子数与总分子数的比率

（4）$\int_{v_1}^{v_2}Nf(v)\mathrm{d}v$ 表示分子速率在任一有限范围 v_1-v_2 内的分子数

（5）$\int_0^{\infty}vf(v)\mathrm{d}v$ 表示分子速率的统计平均值，即平均速率 $\overline{v}$

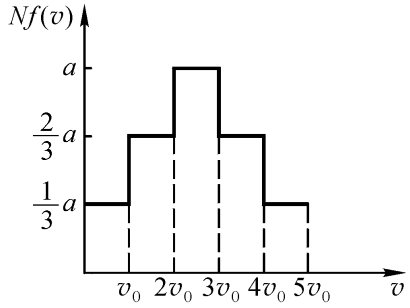

图13.10

13-10 解：（1） $\int_0^{\infty} f(v)\,\mathrm{d}v = 1$

$$\int_0^{\infty} Nf(v)\,\mathrm{d}v = N$$

所以 $\frac{2}{3}av_0 + \frac{4}{3}av_0 + av_0 = N$

所以 $a = \frac{N}{3v_0}$

（2） $2v_0 \to 3v_0$

$$\mathrm{d}N = Nf(v)\,\mathrm{d}v = av_0 = \frac{N}{3}$$

（3） $\bar{v} = \int_0^{\infty} vf(v)\,\mathrm{d}v$

$$= \frac{1}{N}\int_0^{\infty} vNf(v)\,\mathrm{d}v$$

$$= \frac{1}{N}\left[\frac{1}{3}av_0 \cdot \frac{v_0}{2} + \frac{2}{3}av_0 \cdot \frac{3v_0}{2} + av_0 \cdot \frac{5v_0}{2} + \frac{2}{3}av_0 \cdot \frac{7v_0}{2} + \frac{1}{3}av_0 \cdot \frac{9v_0}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{N}\frac{15}{2}a{v_0}^2$$

$$= \frac{1}{N}\frac{15}{2}\frac{N}{3v_0}{v_0}^2$$

$$= \frac{5}{2}v_0$$

13-11 解：由于速率区间 $\Delta v = \frac{v_p}{100}$ 较小，可近似认为该区间内分子数与 Δv 成正比，则

$$\frac{\Delta N}{N} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-m{v_p}^2/2kT}{v_p}^2\Delta v$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{{v_p}^2}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-{v_p}^2/{v_p}^2}{v_p}^2\frac{v_p}{100}$$

$$=\frac{4}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-1}\frac{1}{100}=83\%$$

13-12 解：速率在 v_1-v_2 之间的分子数概率为

$$\frac{n}{N}=\int_{v_1}^{v_2}f\left(v\right)\mathrm{d}v$$

由于 v_2 与 v_1 之差 Δv 很小，可近似认为在 Δv 这个速率区间里分布函数 $f\left(v\right)$ 的值不变

$$\frac{n}{N}=f\left(v\right)\Delta v=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}v^2\Delta v$$

所以速率在 $3000\ \mathrm{m/s}$ 到 $3010\ \mathrm{m/s}$ 之间的分子数 n_1 与速率在 $v_p-v_p+10\ \mathrm{m/s}$ 之间的分子数 n_2 之比为

$$\frac{n_1}{n_2}=\frac{\mathrm{e}^{-mv^2/2kT}}{\mathrm{e}^{-m{v_p}^2/2kT}}\frac{v^2}{{v_p}^2}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{-v^2/{v_p}^2}}{\mathrm{e}^{-1}}\frac{v^2}{{v_p}^2}$$

$${v_p}^2=\frac{2kT}{m}=\frac{2RT}{\mu}=\frac{2\times8.31\times573.15}{2\times10^{-3}}=4.76\times10^6$$

所以 $\frac{n_1}{n_2}=\frac{\mathrm{e}^{-\frac{3000^2}{4.76\times10^6}}}{\mathrm{e}^{-1}}\frac{3000^2}{4.76\times10^6}=0.776$

$$=77.6\%$$

13-13 解：（1） $p=nkT$

$$n=\frac{p}{kT}=\frac{1.013\times10^5}{1.38\times10^{-23}\times300.15}$$

$$=2.45\times10^{25}$$

（2） $m=\dfrac{\mu}{N_A}=\dfrac{32\times10^{-3}}{6.022\times10^{23}}=5.31\times10^{-26}\ \text{kg}$

（3） $\rho=\dfrac{M}{V}=nm=2.45\times10^{25}\times5.31\times10^{-26}=1.30\ \text{kg}/\text{m}^3$

（4） $l=\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{2.45\times10^{25}}}=3.44\times10^{-9}\ \text{m}$

（5） $\overline{v}=\sqrt{\dfrac{8RT}{\pi\mu}}=\sqrt{\dfrac{8\times8.31\times300.15}{3.14\times32\times10^{-3}}}=445.6\ \text{m/s}$

（6） $\sqrt{\overline{v^2}}=\sqrt{\dfrac{3RT}{\mu}}=\sqrt{\dfrac{3\times8.31\times300.15}{32\times10^{-3}}}=483.6\ \text{m/s}$

（7） $\overline{\varepsilon_k}=\dfrac{3p}{2n}=\dfrac{3\times1.013\times10^5}{2\times2.45\times10^{25}}=6.202\times10^{-21}\ \text{J}$

$$\overline{\varepsilon_k}=\frac{3}{2}kT=\frac{3}{2}\times1.38\times10^{-23}\times300.15=6.21\times10^{-21}\ \text{J}$$

$$\overline{\varepsilon_k}=\frac{1}{2}m\overline{v^2}=\frac{1}{2}\times5.31\times10^{-26}\times\frac{3\times8.31\times300.15}{32\times10^{-3}}$$

$$=6.208\times10^{-21}\ \text{J}$$

13-14 解： $p=\dfrac{1}{V}\dfrac{M}{\mu}RT=\dfrac{M}{V}\dfrac{1}{3}\dfrac{3RT}{\mu}=\dfrac{M}{V}\dfrac{1}{3}\overline{v^2}$

$$=\frac{100\times10^{-3}}{10\times10^{-3}}\times\frac{1}{3}\times200^2$$

$$=1.33\times10^5\ \text{Pa}$$

$$=100\ \text{cmHg}$$