第十七章　真空中的静电场

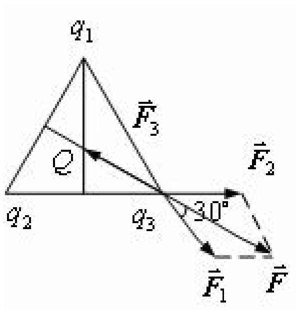

图 17.1

17-1 解：设等边三角形的边长为 a ,则由顶点到中心的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}a$. $q_1=q_2=q_3=q$ 放在三角形中心的电荷为 Q , Q 与 q 反号. Q 受其他三个电荷的合力为零,与 Q 的大小无关.

一个 q 受其他三个电荷的合力大小为

$$2F_1\cos30^0-F_3=2\times\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0a^2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}a\right)^2}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0a^2}\left(\sqrt{3}q-3Q\right)$$

此合力为零给出　$Q=\sqrt{3}q\big/3$

∴　$Q=-\sqrt{3}q/3$

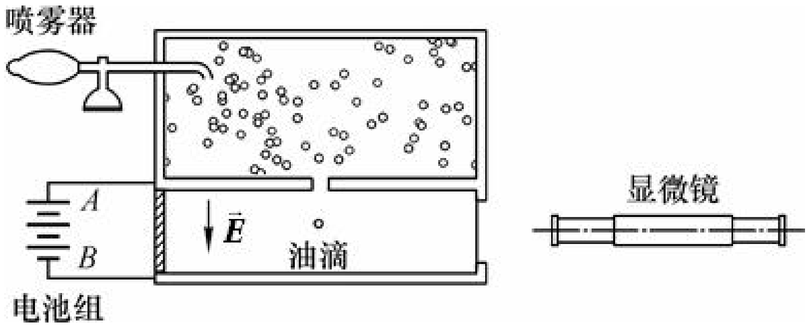

图 17.2

17-2 解：$\vec{F}+m\vec{g}=0$

$$q\vec{E}+m\vec{g}=0$$

$$q=\frac{mg}{E}=\frac{\rho\dfrac{4}{3}\pi R^3g}{E}$$

$$=\frac{851\times\dfrac{4}{3}\times3.14\times\left(1.64\times10^{-6}\right)^3\times9.8}{1.92\times10^5}$$

$$=8.02\times10^{-19}\ \text{C}$$

$=5e$

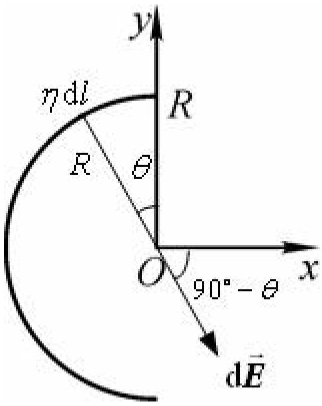

图 17.3

17-3 解: 在带电环线上任取一长为 $\mathrm{d}l$ 的电荷元,其电量 $\mathrm{d}q=\eta\mathrm{d}l$.电荷元在 O 点的场强为 $\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{E}}$,$\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{E}}$ 沿两个轴方向的分量分别为 $\mathrm{d}E_x$ 和 $\mathrm{d}E_y$.由于电荷分布对于 Ox 轴对称,所以全部电荷在 O 点的场强沿 y 方向的分量之和为零.因而 O 点的总场强 $\vec{\boldsymbol{E}}$ 应沿 x 轴方向,并且

$$E=\int \mathrm{d}E_x$$

$$\mathrm{d}E_x=\mathrm{d}E\sin\theta=\frac{\eta\mathrm{d}l\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \qquad (l=R\theta \quad \mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta)$$

$$\mathrm{d}E_x=\frac{\eta\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}\theta$$

$$E=\int_0^{\pi}\frac{\eta\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}\mathrm{d}\theta=-\frac{\eta}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}=\frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 R}\vec{\boldsymbol{i}}$$

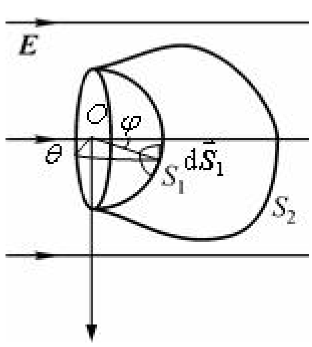

图 17.4

17-4 解: (1) 选半球球心的坐标原点 O

$$\mathrm{d}\phi=\vec{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}_1$$

$$=E\mathrm{d}S_1\cos\varphi$$

$$\mathrm{d}S_1=R^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \quad \phi_1=\int ER^2\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}ER^2\frac{\sin2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi$$

$$=-\pi R^2 E\frac{\cos 2\varphi}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\pi R^2 E$$

(2) 半球面S_1和任意形状曲面S_2组成闭合曲面.由高斯定理得:

$$\phi_1{}'+\phi_2=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{内} q_i=0$$

∵ 此时S_1的法向方向与原来相反

∴ $\phi_1{}'=-\phi_1=-\pi R^2 E$

∴ $\phi_2=-\phi_1{}'=\pi R^2 E$

17-5 解: (1) 立方体的六个面组成闭合曲面,由高斯定理得

通过闭合曲面的电通量 $\phi=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

由于正立方体的六个侧面对于其中心对称,所以每个面通过的电通量为

$$\phi_1=\phi_2=\phi_3=\phi_4=\phi_5=\phi_6=\frac{q}{6\varepsilon_0}$$

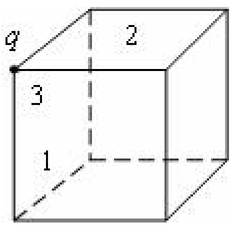

图 17.5

(2) $\mathrm{d}\phi=\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}=\vec{E}\cdot\vec{n}\mathrm{d}S$

由于正方体有三个面与$\vec{E}$垂直

∴ $\phi_1=\phi_2=\phi_3=0$

∴ q所在的三个面的电通量为零

以q为中心, 小正方体的边长a的二倍为边长做一正方体. 则通过大正方体的电通量为$\dfrac{q}{\varepsilon_0}$. 因为小正方体是大正方体的$\dfrac{1}{8}$, 则通过小正方体其它三个面的总电通量为$\dfrac{q}{8\varepsilon_0}$. 由于这三个面对电荷所在顶点是对称的, 所以通过它们每个面的电通量为$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{q}{8\varepsilon_0}=\dfrac{q}{24\varepsilon_0}$

17-6 解：(1) 设想地球表面为一均匀带电球面，总面积为 S . 则它所带的总电量为

$$q=\varepsilon_0\int \vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}}=-\varepsilon_0 ES$$

$$=-8.85\times10^{-12}\times200\times4\times3.14\times\left(6.37\times10^{6}\right)^2$$

$$=-9.02\times10^{5}\quad \mathrm{C}$$

(2) 从地面$1400\quad \mathrm{m}$到地面的大气所带总电量为

$$q'=q_{总}-q=\varepsilon_0\int_{S'}\vec{\boldsymbol{E}}'\cdot d\vec{\boldsymbol{S}}-\varepsilon_0\int_{S}\vec{\boldsymbol{E}}\cdot d\vec{\boldsymbol{S}}$$

$$=-\varepsilon_0 E'S'+\varepsilon_0 ES$$

$$=-0.1\varepsilon_0 ES'+\varepsilon_0 ES$$

$$=\varepsilon_0 E\left(S-0.1S'\right)$$

$$=8.11\times10^{5}\quad \mathrm{C}$$

$$\rho=\frac{q'}{V}=\frac{8.11\times10^{5}}{\frac{4}{3}\times3.14\times\left(6.3714^3-6.37^3\right)\times10^{18}}$$

$$=1.14\times10^{-12}\quad \mathrm{C/m^2}$$

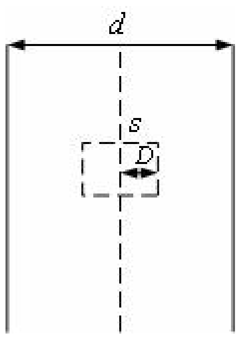

图 17.7

17-7 解：根据电荷分布对壁的平分面的面对称性，可知电场分布也具有这种对称性.由此可选平分面与壁的平分面重合的立方盒子为高斯面.高斯定理给出

$$E\,2S=q_{内}/\varepsilon_0$$

当 $D<\frac{d}{2}$ 时 $\qquad q_{内}=2DS\rho$

$$E=\frac{D\rho}{\varepsilon_0}$$

当 $D>\frac{d}{2}$ 时 $\qquad q_{内}=dS\rho$

$$E=\frac{d\rho}{2\varepsilon_0}$$

方向垂直板面 $\quad q>0$ 向外 $\quad q<0$ 向内

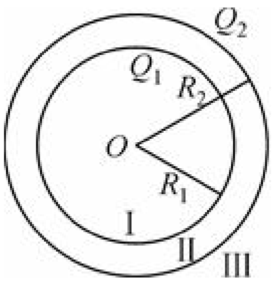

图 17.9

17-9 解: (1) （a）$r < R_1$ 时，Ⅰ区

$$\oiint \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0 \qquad E_1 \cdot 4\pi r^2 = 0$$

$$E_1 = 0$$

(b) $R_1 < r < R_2$ 时， Ⅱ区

$$\oiint \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 \cdot 4\pi\varepsilon r^2 = \frac{Q_1}{\varepsilon_0}$$

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$$

(c) $r > R_2$ 时 III区

$$\oiint \vec{E}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}$$

$$E_3 \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q_1 + Q_2}{\varepsilon_0}$$

$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\vec{E}_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}$$

(2) (a) $r > R_2$ 时 III区

$$U_3(r) = \int_r^{\infty} \vec{E}_3 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{\infty} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= -\frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\Bigg|_r^{\infty} = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

(b) $R_1 < r < R_2$ Ⅱ区

$$U_2(r) = \int_r^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_r^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_r^{R_2} - \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_{R_2}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{R_2}\right)$$

(c) $r < R_1$ 时，Ⅰ区

$$U_1(r) = \int_r^{R_1} \vec{E}_1 \cdot d\vec{r} + \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{r} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_3 \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr$$

$$= -\frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_{R_1}^{R_2} - \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}\bigg|_{R_2}^{\infty}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{R_1} + \frac{Q_2}{R_2}\right)$$

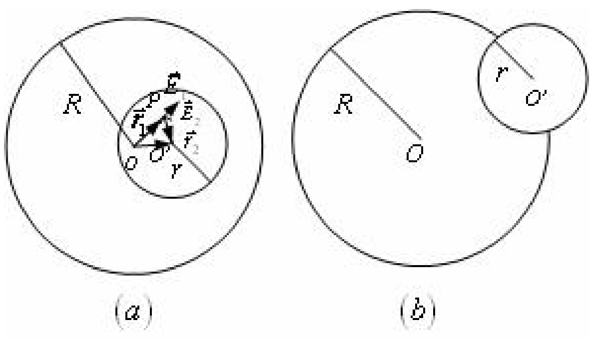

图 17.10

17-10 解: (1) 情况(a)可以间接用高斯定理求解,情况(b)不可以.

(2) 这是一个非对称分布的电荷,因而不能直接用高斯定理求定解.但半径为 R 的球及半径为 r 的空腔是球对称的.可以利用这一特点把带电体看成半径为 R 的均匀带电 $+\rho$ 的球体与半径为 r 的均匀带电 $-\rho$ 的球体迭加.相当于在原空腔处补上体电荷密度为 $+\rho$ 和 $-\rho$ 的球体.这时空腔内任一点 P 的场强 $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

其中 $\vec{E}_1$ 与 $\vec{E}_2$ 分别是带 $+\rho$ 的大球和带 $-\rho$ 的小球在 P 点的场强. $\vec{E}_1$ 与 $\vec{E}_2$ 都可用高斯定理求得.

$$\vec{E}_1=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1 \qquad \left(\overrightarrow{OP}=\vec{r}_1\right)$$

$$\vec{E}_2=-\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2 \qquad \left(\overrightarrow{O'P}=\vec{r}_2\right)$$

$$\vec{E}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left(\vec{r}_1-\vec{r}_2\right)=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_{oo'}$$

由上述结果可知在空腔内各点场强都相等,方向由O指向O',这是均匀场.

17-11 解: 如图选取高斯面

(1) $r<R$时

$$\oiint \vec{E}_1\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{\pi r^2 \mathrm{d}l\rho}{\varepsilon_0}$$

$$E_1\cdot 2\pi r\mathrm{d}l=\frac{\pi r^2\rho \mathrm{d}l}{\varepsilon_0}$$

$$E_1=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$$

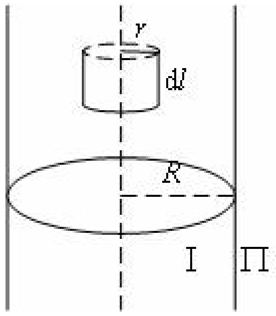

图 17.11

$$\vec{E}_1=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\vec{e}_r$$

$r>R$时

$$\oiint \vec{E}_2\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\frac{\pi R^2 \mathrm{d}l\rho}{\varepsilon_0}$$

$$E_2\cdot 2\pi r\mathrm{d}l=\frac{\pi R^2\rho \mathrm{d}l}{\varepsilon_0}$$

$$E_2=\frac{R^2\rho}{2\varepsilon_0 r}$$

$$\vec{E}_2=\frac{R^2\rho}{2\varepsilon_0 r}\vec{e}_r$$

(2) 求电势,选圆锥面为等势面

$r<R$时

$$U_r=\int_r^R \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\int_r^R \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}\mathrm{d}r=\frac{\rho}{4\varepsilon_0}\left(R^2-r^2\right)$$

$r > R$ 时

$$U_r = \int_r^R \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_r^R \frac{R^2 \rho}{2\varepsilon_0 r} \mathrm{d}r = \frac{R^2 \rho}{2\varepsilon_0} \ln \frac{R}{r}$$

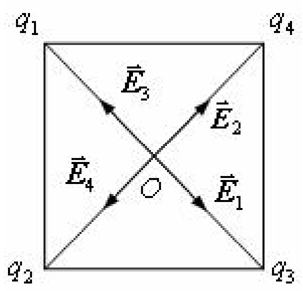

图 17.12

17-12 解: (1) 根据场强迭加原理, O 点的场强

$$\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 + \vec{E}_4 = 0$$

(2) 根据电势迭加原理，O 点的电势

$$U_0 = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

$$= \frac{4}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q}{r}$$

$$= \frac{4 \times 4.0 \times 10^{-9} \times 9 \times 10^9}{5 \times 10^{-2}}$$

$$= 2.88 \times 10^3 \ (\mathrm{v})$$

(3) $$A = q_0 (0 - U_0)$$

$$= 1.0 \times 10^{-9} \times \left(-2.88 \times 10^3\right)$$

$$= -2.88 \times 10^{-6} \ \mathrm{J}$$

(4) $$\Delta W = -A$$

$$= 2.88 \times 10^{-6} \ \mathrm{J}$$

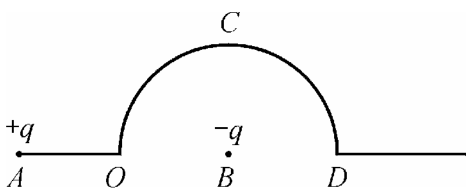

图 17-13

17-13 解: (1) $$U_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R} - \frac{q}{R}\right) = 0$$

$$U_D = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{3R} - \frac{q}{R}\right)$$

$$= -\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

$$A = q_0 (U_0 - U_D)$$

$$= \frac{q_0 q}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

(2) $U_\infty = 0$

$$A = -q_0\left(U_D - U_\infty\right)$$

$$= \frac{q_0 q}{6\pi\varepsilon_0 R}$$

17-14 解：（1）$\Delta U = Ed = 3\times10^6\times100 = 3\times10^8$ V

（2）一次释放的能量为

$$W = q\Delta U = 3\times10^8\times30 = 9\times10^9\,\text{J}$$

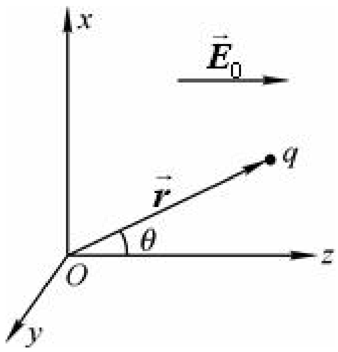

图 17-15

17-15 （1）$U_P = \int_r^0 \vec{E}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$= \int_0^0 E_0 \cos\theta \mathrm{d}r$$

$$= E_0 \cos r\Big|_r^0$$

$$= -E_0 r\cos\theta$$

$$= -E_0 z$$

（2）将电荷由P点移至O点，电场力所做的功为

$$A = W_P - W_O = q\left(U_P - U_O\right)$$

$$= -qE_0 r\cos\theta$$

$$= -qE_0 z$$

$\therefore$ $W_P = -qE_0 r\cos\theta$

$$= -qE_0 z$$