# 2010年上期物理期末考试复习题

**1-5** 质点沿 $x$ 轴运动，其加速度和位置的关系为 $a=2+6x^2$，$a$ 的单位为 $m \cdot s^{-2}$，$x$ 的单位为 m. 质点在 $x=0$处，速度为$10\, m \cdot s^{-1}$,试求质点在任何坐标处的速度值．

解：∵ $$a=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt}=v\frac{dv}{dx}$$

分离变量： $$\upsilon d\upsilon = adx = (2+6x^2)dx$$

两边积分得

$$\frac{1}{2}v^2=2x+2x^3+c$$

由题知，$x=0$ 时，$v_0=10$ ,∴ $c=50$

∴ $$v=2\sqrt{x^3+x+25}\ m \cdot s^{-1}$$

**1-6** 已知一质点作直线运动，其加速度为 $a=4+3t$ $m \cdot s^{-2}$，开始运动时，$x=5$ m，$v=0$，求该质点在 $t=10$s 时的速度和位置．

解：∵ $$a=\frac{dv}{dt}=4+3t$$

分离变量，得 $$dv=(4+3t)dt$$

积分，得 $$v=4t+\frac{3}{2}t^2+c_1$$

由题知，$t=0$，$v_0=0$ ,∴ $c_1=0$

故 $$v=4t+\frac{3}{2}t^2$$

又因为 $$v=\frac{dx}{dt}=4t+\frac{3}{2}t^2$$

分离变量， $dx=(4t+\frac{3}{2}t^2)dt$

积分得 $$x=2t^2+\frac{1}{2}t^3+c_2$$

由题知 $t=0$, $x_0=5$ ,$\therefore$ $c_2=5$

故 $$x=2t^2+\frac{1}{2}t^3+5$$

所以 $t=10$ s时

$$v_{10}=4\times10+\frac{3}{2}\times10^2=190 \quad \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$x_{10}=2\times10^2+\frac{1}{2}\times10^3+5=705 \quad \text{m}$$

**1-11** 飞轮半径为0.4 m，自静止启动，其角加速度为 $\beta$=0.2 rad·s$^{-2}$ ，求 $t$ = 2s时边缘上各点的速度、法向加速度、切向加速度和合加速度．

解：当 $t=2$ s 时，$\omega=\beta t=0.2\times2=0.4$ rad·s$^{-1}$

则 $v=R\omega=0.4\times0.4=0.16$ m·s$^{-1}$

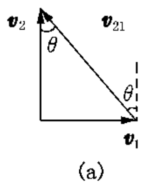
$$a_n=R\omega^2=0.4\times(0.4)^2=0.064 \quad \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

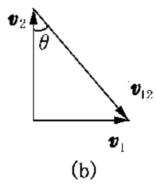
$$a_\tau=R\beta=0.4\times0.2=0.08 \quad \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$a=\sqrt{a_n^2+a_\tau^2}=\sqrt{(0.064)^2+(0.08)^2}=0.102 \quad \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

**1-13** 一船以速率 $v_1$ = 30km·h$^{-1}$沿直线向东行驶，另一小艇在其前方以速率 $v_2$ = 40km·h$^{-1}$沿直线向北行驶，问在船上看小艇的速度为何?在艇上看船的速度又为何?

解：(1)大船看小艇，则有 $\vec{v}_{21}=\vec{v}_2-\vec{v}_1$ ，依题意作速度矢量图如题 1-13 图(a)




题 1-13 图

由图可知 $$v_{21}=\sqrt{v_1^2+v_2^2}=50 \ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$

方向北偏西 $$\theta=\arctan\frac{v_1}{v_2}=\arctan\frac{3}{4}=36.87^\circ$$

(2)小船看大船，则有 $\vec{v}_{12}=\vec{v}_1-\vec{v}_2$ ，依题意作出速度矢量图如题 1-13 图(b)，同上法，得

$$v_{12}=50 \ \text{km}\cdot\text{h}^{-1}$$

方向南偏东 $36.87°$

**2-3** 质量为16 kg 的质点在 $xOy$ 平面内运动，受一恒力作用，力的分量为 $f_x$ =6 N， $f_y$ =-7 N，当 $t$ =0时， $x=y=0$， $v_x$ =-2 m·s$^{-1}$， $v_y$ =0．求当 $t$ =2 s 时质点的 (1)位矢；(2)速度．

解：

$$a_x=\frac{f_x}{m}=\frac{6}{16}=\frac{3}{8}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

$$a_y=\frac{f_y}{m}=\frac{-7}{16}\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$$

(1)

$$v_x=v_{x0}+\int_0^2 a_x dt=-2+\frac{3}{8}\times 2=-\frac{5}{4}\qquad \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

$$v_y=v_{y0}+\int_0^2 a_y dt=\frac{-7}{16}\times 2=-\frac{7}{8}\qquad \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

于是质点在 2s 时的速度

$$\vec{v}=-\frac{5}{4}\vec{i}-\frac{7}{8}\vec{j}\qquad \mathrm{m\cdot s^{-1}}$$

(2)

$$\begin{aligned}\vec{r}&=(v_0t+\frac{1}{2}a_xt^2)\vec{i}+\frac{1}{2}a_yt^2\vec{j}\\&=(-2\times 2+\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}\times 4)\vec{i}+\frac{1}{2}(\frac{-7}{16})\times 4\vec{j}\\&=-\frac{13}{4}\vec{i}-\frac{7}{8}\vec{j}\qquad \mathrm{m}\end{aligned}$$

**2-9** 一质量为 $m$ 的质点在 $xOy$ 平面上运动，其位置矢量为

$$\vec{r}=a\cos\omega t\vec{i}+b\sin\omega t\vec{j}$$

求质点的动量及 $t=0$ 到 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 时间内质点所受的合力的冲量和质点动量的改变量．

解: 质点的动量为

$$\vec{p}=m\vec{v}=m\omega(-a\sin\omega t\vec{i}+b\cos\omega t\vec{j})$$

将 $t=0$ 和 $t=\dfrac{\pi}{2\omega}$ 分别代入上式，得

$$\vec{p}_1 = m\omega b\vec{j}\,,\ \vec{p}_2 = -m\omega a\vec{i}\quad ,$$

则动量的增量亦即质点所受外力的冲量为

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 = -m\omega(a\vec{i} + b\vec{j})$$

**2-12** 设 $\vec{F}_{合} = 7\vec{i} - 6\vec{j}\,\mathrm{N}$ ．(1) 当一质点从原点运动到 $\vec{r} = -3\vec{i} + 4\vec{j} + 16\vec{k}\,\mathrm{m}$ 时，求 $\vec{F}$ 所作的功．(2)如果质点到 $r$ 处时需0.6s，试求平均功率．(3)如果质点的质量为1kg，试求动能的变化．

解: (1)由题知，$\vec{F}_{合}$ 为恒力，

∴
$$A_{合} = \vec{F}\cdot\vec{r} = (7\vec{i} - 6\vec{j})\cdot(-3\vec{i} + 4\vec{j} + 16\vec{k})$$

$$= -21 - 24 = -45\ \mathrm{J}$$

(2)
$$\overline{P} = \frac{A}{\Delta t} = \frac{45}{0.6} = 75\ \mathrm{w}$$

(3)由动能定理，$\Delta E_k = A = -45\ \mathrm{J}$

**2-23** 物体质量为3kg，$t$=0时位于 $\vec{r} = 4\vec{i}\,\mathrm{m}$，$\vec{v} = \vec{i} + 6\vec{j}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$，如一恒力 $\vec{f} = 5\vec{j}\,\mathrm{N}$ 作用在物体上,求3秒后，(1)物体动量的变化；(2)相对 $z$ 轴角动量的变化．

解: (1) $\Delta\vec{p} = \int \vec{f}\mathrm{d}t = \int_0^3 5\vec{j}\mathrm{d}t = 15\vec{j}\ \mathrm{kg\cdot m\cdot s^{-1}}$

(2)解(一)
$$x = x_0 + v_{0x}t = 4 + 3 = 7$$

$$y = v_{0y}t + \frac{1}{2}at^2 = 6\times 3 + \frac{1}{2}\times\frac{5}{3}\times 3^2 = 25.5\,j$$

即
$$\vec{r}_1 = 4\vec{i}\,,\ \vec{r}_2 = 7\vec{i} + 25.5\vec{j}$$

$$v_x = v_{0x} = 1$$

$$v_y = v_{0y} + at = 6 + \frac{5}{3}\times 3 = 11$$

即
$$\vec{v}_1 = \vec{i}_1 + 6\vec{j}\,,\ \vec{v}_2 = \vec{i} + 11\vec{j}$$

∴
$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1\times m\vec{v}_1 = 4\vec{i}\times 3(\vec{i} + 6\vec{j}) = 72\vec{k}$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2\times m\vec{v}_2 = (7\vec{i} + 25.5\vec{j})\times 3(\vec{i} + 11\vec{j}) = 154.5\vec{k}$$

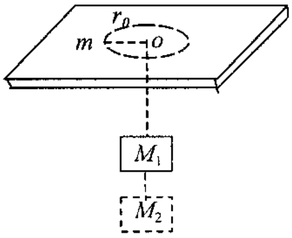
∴
$$\Delta\vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 = 82.5\vec{k}\ \mathrm{kg\cdot m^2\cdot s^{-1}}$$

解(二) $\because \ M = \frac{dz}{dt}$

$\therefore$ $$\Delta \vec{L} = \int_0^t \vec{M} \cdot \mathrm{d}t = \int_0^t (\vec{r} \times \vec{F}) \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^3 \left[ (4+t)\vec{i} + (6t + \frac{1}{2}) \times \frac{5}{3} t^2 ) \vec{j} \right] \times 5\vec{j} \mathrm{d}t$$

$$= \int_0^3 5(4+t)\vec{k} \mathrm{d}t = 82.5\vec{k} \ \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}^{-1}$$




题 2-24 图

**2-24** 平板中央开一小孔，质量为 $m$ 的小球用细线系住，细线穿过小孔后挂一质量为 $M_1$ 的重物．小球作匀速圆周运动，当半径为 $r_0$ 时重物达到平衡．今在 $M_1$ 的下方再挂一质量为 $M_2$ 的物体，如题2-24图．试问这时小球作匀速圆周运动的角速度 $\omega'$ 和半径 $r'$ 为多少?

解: 在只挂重物时 $M_1$ ，小球作圆周运动的向心力为 $M_1 g$ ，即

$$M_1 g = m r_0 \omega_0^2 \qquad ①$$

挂上 $M_2$ 后，则有

$$(M_1 + M_2) g = m r' \omega'^2 \qquad ②$$

重力对圆心的力矩为零，故小球对圆心的角动量守恒．

即 $$r_0 m v_0 = r' m v'$$

$$\Rightarrow r_0^2 \omega_0 = r'^2 \omega' \qquad ③$$

联立①、②、③得

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{M_1 g}{m r_0}}$$

$$\omega' = \sqrt{\frac{M_1 g}{m r_0}} (\frac{M_1 + M_2}{M_1})^{\frac{2}{3}}$$

$$r' = \frac{M_1 + M_2}{m \omega'} g = \sqrt{\frac{M_1}{M_1 + M_2}} \cdot r_0$$

**2-27** 计算题2-27图所示系统中物体的加速度．设滑轮为质量均匀分布的圆柱体，其质量为 $M$ ，半径为 $r$ ，在绳与轮缘的摩擦力作用下旋转，忽略桌面与物体间的摩擦，设 $m_1$ = 50 kg， $m_2$ = 200 kg,M = 15 kg， $r$ = 0.1 m

解: 分别以 $m_1, m_2$ 滑轮为研究对象，受力图如图(b)所示．对 $m_1, m_2$ 运用牛顿定律，有

$$m_2 g - T_2 = m_2 a \qquad ①$$

$$T_1 = m_1 a \qquad ②$$

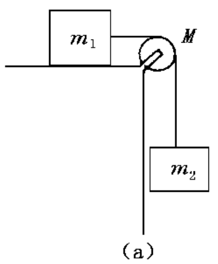
对滑轮运用转动定律，有

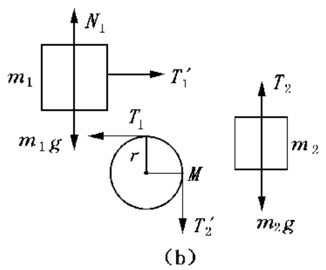
$$T_2 r - T_1 r = (\frac{1}{2} M r^2)\beta \qquad ③$$

又， $$a = r\beta \qquad ④$$

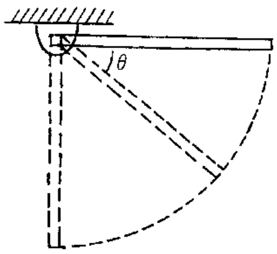
联立以上 4 个方程，得

$$a = \frac{m_2 g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}} = \frac{200 \times 9.8}{5 + 200 + \frac{15}{2}} = 7.6 \quad \mathrm{m \cdot s^{-2}}$$




题 2-27(a)图　　　　题 2-27(b)图




题 2-28 图

**2-28** 如题2-28图所示，一匀质细杆质量为 $m$ ，长为 $l$ ，可绕过一端 $O$ 的水平轴自由转动，杆于水平位置由静止开始摆下．求：

(1)初始时刻的角加速度；

(2)杆转过 $\theta$ 角时的角速度.

解: (1)由转动定律，有

$$mg\frac{1}{2}=(\frac{1}{3}ml^2)\beta$$

∴ $$\beta=\frac{3g}{2l}$$

(2)由机械能守恒定律，有

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta=\frac{1}{2}(\frac{1}{3}ml^2)\omega^2$$

∴ $$\omega=\sqrt{\frac{3g\sin\theta}{l}}$$

**4-4** 质量为$10\times10^{-3}$kg 的小球与轻弹簧组成的系统，按 $x=0.1\cos(8\pi+\frac{2\pi}{3})$ (SI) 的规律作谐振动，求：

(1)振动的周期、振幅和初位相及速度与加速度的最大值；

(2)最大的回复力、振动能量、平均动能和平均势能，在哪些位置上动能与势能相等?

(3) $t_2=5$s 与 $t_1=1$s 两个时刻的位相差；

解：(1)设谐振动的标准方程为 $x=A\cos(\omega t+\phi_0)$，则知：

$$A=0.1\text{m},\omega=8\pi,\therefore T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{1}{4}\text{s},\phi_0=2\pi/3$$

又 $$|v_m|=\omega A=0.8\pi\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}\ =2.51\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$|a_m|=\omega^2A=63.2\ \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

(2) $$|F_m|=a_m=0.63\,\text{N}$$

$$E=\frac{1}{2}mv_m^2=3.16\times10^{-2}\,\text{J}$$

$$\overline{E}_p=\overline{E}_k=\frac{1}{2}E=1.58\times10^{-2}\,\text{J}$$

当 $E_k=E_p$时，有 $E=2E_p$，

即 $$\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2}kA^2)$$

∴ $$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}A=\pm\frac{\sqrt{2}}{20}\,\mathrm{m}$$

(3) $$\Delta\phi=\omega(t_2-t_1)=8\pi(5-1)=32\pi$$

**4-6** 一质量为$10\times10^{-3}$ kg 的物体作谐振动，振幅为 24 cm，周期为 4.0s，当 $t=0$ 时位移为 $+24$ cm．求：

(1) $t=0.5$s 时，物体所在的位置及此时所受力的大小和方向；

(2)由起始位置运动到 $x=12$ cm 处所需的最短时间；

(3)在 $x=12$ cm 处物体的总能量．

解：由题已知 $A=24\times10^{-2}\,\mathrm{m},\ T=4.0\,\mathrm{s}$

∴ $$\omega=\frac{2\pi}{T}=0.5\pi\quad\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

又，$t=0$ 时，$x_0=+A,\therefore\ \phi_0=0$

故振动方程为

$$x=24\times10^{-2}\cos(0.5\pi t)\,\mathrm{m}$$

(1)将 $t=0.5$s 代入得

$$x_{0.5}=24\times10^{-2}\cos(0.5\pi t)\,\mathrm{m}=0.17\mathrm{m}$$

$$\begin{aligned}F&=-ma=-m\omega^2x\\&=-10\times10^{-3}\times(\frac{\pi}{2})^2\times0.17=-4.2\times10^{-3}\,\mathrm{N}\end{aligned}$$

方向指向坐标原点，即沿 $x$ 轴负向．

(2)由题知，$t=0$ 时，$\phi_0=0$，

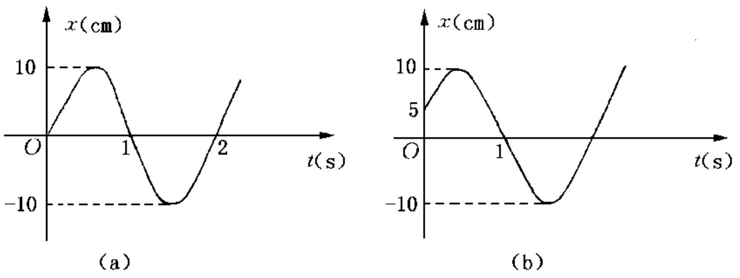
$t=t$ 时 $x_0=+\frac{A}{2}$，且 $v<0$，故 $\phi_t=\frac{\pi}{3}$

∴ $$t=\frac{\Delta\phi}{\omega}=\frac{\pi}{3}/\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\,\mathrm{s}$$

(3)由于谐振动中能量守恒，故在任一位置处或任一时刻的系统的总能量均为

$$\begin{aligned}E&=\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\\&=\frac{1}{2}\times10\times10^{-3}(\frac{\pi}{2})^2\times(0.24)^2\\&=7.1\times10^{-4}\,\mathrm{J}\end{aligned}$$

## 4-8 图为两个谐振动的 $x-t$ 曲线，试分别写出其谐振动方程．




题4-8图

解：由题4-8图(a)，∵ $t=0$ 时，$x_0=0, v_0>0, \therefore \phi_0=\frac{3}{2}\pi$, 又, $A=10\,\text{cm}$, $T=2\text{s}$

即 $$\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi \quad \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

故 $$x_a=0.1\cos(\pi t+\frac{3}{2}\pi)\text{m}$$

由题4-8图(b)∵ $t=0$ 时，$x_0=\frac{A}{2}, v_0>0, \therefore \phi_0=\frac{5\pi}{3}$

$t_1=0$ 时，$x_1=0, v_1<0, \therefore \phi_1=2\pi+\frac{\pi}{2}$

又 $$\phi_1=\omega\times 1+\frac{5}{3}\pi=\frac{5}{2}\pi$$

∴ $$\omega=\frac{5}{6}\pi$$

故 $$x_b=0.1\cos(\frac{5}{6}\pi t+\frac{5\pi}{3})m$$

## 4-12 试用最简单的方法求出下列两组谐振动合成后所得合振动的振幅：

(1) $\begin{cases} x_1=5\cos(3t+\frac{\pi}{3})\text{cm} \\ x_2=5\cos(3t+\frac{7\pi}{3})\text{cm} \end{cases}$ (2) $\begin{cases} x_1=5\cos(3t+\frac{\pi}{3})\text{cm} \\ x_2=5\cos(3t+\frac{4\pi}{3})\text{cm} \end{cases}$

解：(1)∵ $$\Delta\phi=\phi_2-\phi_1=\frac{7\pi}{3}-\frac{\pi}{3}=2\pi,$$

∴ 合振幅 $A = A_1 + A_2 = 10\,\text{cm}$

(2)∵ $\Delta\phi = \frac{4\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = \pi,$

∴ 合振幅 $A = 0$

**5-5** 在驻波的两相邻波节间的同一半波长上，描述各质点振动的什么物理量不同，什么物理量相同?

解: 取驻波方程为 $y = \left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|\cos\alpha\pi\nu t$ ，则可知，在相邻两波节中的同一半波长上，描述各质点的振幅是不相同的，各质点的振幅是随位置按余弦规律变化的，即振幅变化规律可表示为 $\left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$ ．而在这同一半波长上，各质点的振动位相则是相同的，即以相邻两波节的介质为一段，同一段介质内各质点都有相同的振动位相，而相邻两段介质内的质点振动位相则相反．

**5-8** 已知波源在原点的一列平面简谐波，波动方程为 $y = A\cos(Bt - Cx)$，其中 $A$ ，$B$ ，$C$ 为正值恒量．求：

(1)波的振幅、波速、频率、周期与波长；

(2)写出传播方向上距离波源为 $l$ 处一点的振动方程；

(3)任一时刻，在波的传播方向上相距为 $d$ 的两点的位相差．

解: (1)已知平面简谐波的波动方程

$$y = A\cos(Bt - Cx) \quad (x \geq 0)$$

将上式与波动方程的标准形式

$$y = A\cos(2\pi\upsilon t - 2\pi\frac{x}{\lambda})$$

比较，可知：

波振幅为 $A$ ，频率 $\upsilon = \frac{B}{2\pi}$ ，

波长 $\lambda = \frac{2\pi}{C}$ ，波速 $u = \lambda\upsilon = \frac{B}{C}$ ，

波动周期 $T = \frac{1}{\upsilon} = \frac{2\pi}{B}$ ．

(2)将 $x = l$ 代入波动方程即可得到该点的振动方程

$$y = A\cos(Bt - Cl)$$

(3)因任一时刻 $t$ 同一波线上两点之间的位相差为

$$\Delta\phi=\frac{2\pi}{\lambda}(x_2-x_1)$$

将 $x_2-x_1=d$ ，及 $\lambda=\frac{2\pi}{C}$ 代入上式，即得

$$\Delta\phi=Cd \quad .$$

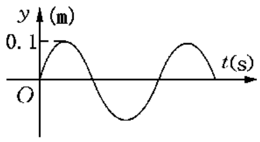
**5-11** 一列平面余弦波沿 $x$ 轴正向传播，波速为5m·s$^{-1}$，波长为2m，原点处质点的振动曲线如题5-11图所示．

(1)写出波动方程；

(2)作出 $t$ =0时的波形图及距离波源0.5m处质点的振动曲线．

解: (1)由题 5-11(a)图知， $A=0.1$ m，且 $t=0$ 时， $y_0=0, v_0>0$ ，$\therefore\ \phi_0=\frac{3\pi}{2}$ ，

又 $\upsilon=\frac{u}{\lambda}=\frac{5}{2}=2.5$ Hz ，则 $\omega=2\pi\upsilon=5\pi$



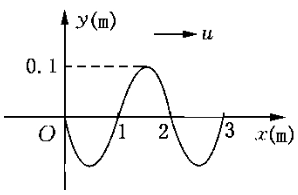

题 5-11 图(a)

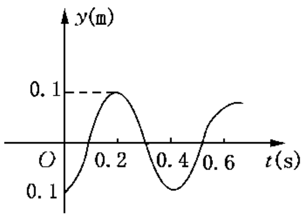
取 $\quad y=A\cos[\omega(t-\frac{x}{u})+\phi_0]$ ，

则波动方程为

$$y=0.1\cos[5\pi(t-\frac{x}{5}+\frac{3\pi}{2})]\ \text{m}$$

(2) $t=0$ 时的波形如题 5-11(b)图




题 5-11 图(b) 题 5-11 图(c)

将 $x=0.5$ m 代入波动方程，得该点处的振动方程为

$$y=0.1\cos(5\pi t-\frac{5\pi\times0.5}{0.5}+\frac{3\pi}{2})=0.1\cos(5\pi t+\pi)\ \text{m}$$

如题 5-11(c)图所示．

**5-17** 一平面余弦波，沿直径为14cm的圆柱形管传播，波的强度为18.0×10$^{-3}$J·m$^{-2}$·s$^{-1}$，频率为300 Hz，波速为300m·s$^{-1}$，求 ：

(1)波的平均能量密度和最大能量密度?

(2)两个相邻同相面之间有多少波的能量?

解: (1)∵ $I = \overline{w} u$

∴ $$\overline{w} = \frac{I}{u} = 18.0 \times \frac{10^{-3}}{300} = 6 \times 10^{-5} \ \mathrm{J \cdot m^{-3}}$$

$$w_{max} = 2\overline{w} = 1.2 \times 10^{-4} \ \mathrm{J \cdot m^{-3}}$$

(2) $$W = \overline{\omega} V = \overline{w} \frac{1}{4} \pi d^2 \lambda = \overline{w} \frac{1}{4} \pi d^2 \frac{u}{\nu}$$

$$= 6 \times 10^{-5} \times \frac{1}{4} \pi \times (0.14)^2 \times \frac{300}{300} = 9.24 \times 10^{-7} \ \mathrm{J}$$

**5-21** 一驻波方程为 $y$ =0.02cos20 $x$ cos750 $t$ (SI)，求：

(1)形成此驻波的两列行波的振幅和波速；

(2)相邻两波节间距离．

解: (1)取驻波方程为

$$y = 2A \cos \frac{2\pi \upsilon x}{u} \cos 2\pi \upsilon t$$

故知 $$A = \frac{0.02}{2} = 0.01 \ \mathrm{m}$$

$2\pi\upsilon = 750$ ，则 $\upsilon = \dfrac{750}{2\pi}$ ， $\dfrac{2\pi\upsilon}{u} = 20$

∴ $$u = \frac{2\pi\upsilon}{20} = \frac{2\pi \times 750 / 2\pi}{20} = 37.5 \ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

(2)∵ $\lambda = \dfrac{u}{\upsilon} = \dfrac{2\pi\upsilon / 20}{\upsilon} = 0.1\pi = 0.314$ m 所以相邻两波节间距离

$$\Delta x = \frac{\lambda}{2} = 0.157 \ \mathrm{m}$$

**6-5** 速率分布函数 $f(v)$ 的物理意义是什么?试说明下列各量的物理意义( $n$ 为分子数密度， $N$ 为系统总分子数)．

（1） $f(v)\mathrm{d}v$ （2） $nf(v)\mathrm{d}v$ （3） $Nf(v)\mathrm{d}v$

（4）$\int_0^v f(v)\mathrm{d}v$　（5）$\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v$　（6）$\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)\mathrm{d}v$

解：$f(v)$：表示一定质量的气体，在温度为 $T$ 的平衡态时，分布在速率 $v$ 附近单位速率区间内的分子数占总分子数的百分比.

(1) $f(v)\mathrm{d}v$：表示分布在速率 $v$ 附近，速率区间 $\mathrm{d}v$ 内的分子数占总分子数的百分比.

（2）$nf(v)\mathrm{d}v$：表示分布在速率 $v$ 附近、速率区间 $dv$ 内的分子数密度．

（3）$Nf(v)\mathrm{d}v$：表示分布在速率 $v$ 附近、速率区间 $dv$ 内的分子数．

（4）$\int_0^v f(v)\mathrm{d}v$：表示分布在 $v_1 \sim v_2$ 区间内的分子数占总分子数的百分比．

（5）$\int_0^\infty f(v)\mathrm{d}v$：表示分布在 $0 \sim \infty$ 的速率区间内所有分子，其与总分子数的比值是1.

（6）$\int_{v_1}^{v_2} Nf(v)\mathrm{d}v$：表示分布在 $v_1 \sim v_2$ 区间内的分子数.

**6-13** 试说明下列各量的物理意义．

（1）$\frac{1}{2}kT$　（2）$\frac{3}{2}kT$　（3）$\frac{i}{2}kT$

（4）$\frac{M}{M_{mol}}\frac{i}{2}RT$　（5）$\frac{i}{2}RT$　（6）$\frac{3}{2}RT$

解：(1)在平衡态下，分子热运动能量平均地分配在分子每一个自由度上的能量均为 $\frac{1}{2}kT$．

(2)在平衡态下，分子平均平动动能均为 $\frac{3}{2}kT$．

(3)在平衡态下，自由度为 $i$ 的分子平均总能量均为 $\frac{i}{2}kT$．

(4)由质量为 $M$，摩尔质量为 $M_{mol}$，自由度为 $i$ 的分子组成的系统的内能为 $\frac{M}{M_{mol}}\frac{i}{2}RT$．

(5) 1摩尔自由度为 $i$ 的分子组成的系统内能为 $\frac{i}{2}RT$．

(6) 1摩尔自由度为3的分子组成的系统的内能 $\frac{3}{2}RT$，或者说热力学体系内，1摩尔分子

的平均平动动能之总和为 $\frac{3}{2}RT$ .

**6-18** 设有 $N$ 个粒子的系统，其速率分布如题6-18图所示．求

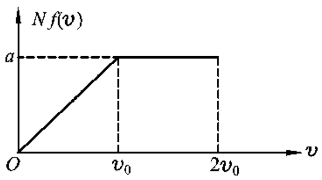
(1)分布函数 $f(v)$ 的表达式；

(2) $a$ 与 $v_0$ 之间的关系；

(3)速度在1.5 $v_0$ 到2.0 $v_0$ 之间的粒子数．

(4)粒子的平均速率．

(5)0.5 $v_0$ 到 1 $v_0$ 区间内粒子平均速率．




题 6-18 图

解：(1)从图上可得分布函数表达式

$$\begin{cases} Nf(v) = av/v_0 & (0 \le v \le v_0) \\ Nf(v) = a & (v_0 \le v \le 2v_0) \\ Nf(v) = 0 & (v \ge 2v_0) \end{cases}$$

$$f(v) = \begin{cases} av/Nv_0 & (0 \le v \le v_0) \\ a/N & (v_0 \le v \le 2v_0) \\ 0 & (v \ge 2v_0) \end{cases}$$

$f(v)$ 满足归一化条件，但这里纵坐标是 $Nf(v)$ 而不是 $f(v)$ 故曲线下的总面积为 $N$ ，

(2)由归一化条件可得

$$\int_0^{v_0} N\frac{av}{v_0}\mathrm{d}v + N\int_{v_0}^{2v_0} a\mathrm{d}v = N \qquad a = \frac{2N}{3v_0}$$

(3)可通过面积计算 $\Delta N = a(2v_0 - 1.5v_0) = \frac{1}{3}N$

(4) $N$ 个粒子平均速率

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} vf(v)\mathrm{d}v = \frac{1}{N}\int_0^{\infty} vNf(v)\mathrm{d}v = \int_0^{v_0}\frac{av^2}{v_0}\mathrm{d}v + \int_{v_0}^{2v_0} av\mathrm{d}v$$

$$\bar{v}=\frac{1}{N}(\frac{1}{3}av_0^2+\frac{3}{2}av_0^2)=\frac{11}{9}v_0$$

(5) $0.5v_0$ 到 $1v_0$ 区间内粒子平均速率

$$\bar{v}=\frac{\int_{0.5v_0}^{v_0}v\mathrm{d}N}{N_1}=\frac{N}{N_1}\int_{0.5v_0}^{v_0}\frac{v\mathrm{d}N}{N}$$

$$=\frac{N}{N_1}\int_{0.5v_0}^{v_0}vf(v)\mathrm{d}v=\frac{N}{N_1}\int_{0.5v_0}^{v_0}\frac{av^2}{Nv_0}\mathrm{d}v$$

$$\bar{v}=\frac{1}{N_1}\int_{0.5v_0}^{v_0}\frac{av^2}{v_0}\mathrm{d}v=\frac{1}{N_1}(\frac{av_0^3}{3v_0}-\frac{av_0^3}{24v_0})=\frac{1}{N_1}\frac{7av_0^2}{24}$$

$0.5v_0$ 到 $1v_0$ 区间内粒子数

$$N_1=\frac{1}{2}(a+0.5a)(v_0-0.5v_0)=\frac{3}{8}av_0=\frac{1}{4}N$$

$$\bar{v}=\frac{7av_0^2}{6N}=\frac{7v_0}{9}$$

**7-11** 1 mol单原子理想气体从300 K加热到350 K，问在下列两过程中吸收了多少热量?增加了多少内能?对外作了多少功?

(1)体积保持不变；

(2)压力保持不变．

解：(1)等体过程

由热力学第一定律得 $Q=\Delta E$

吸热 $$Q=\Delta E=\upsilon C_V(T_2-T_1)=\upsilon\frac{i}{2}R(T_2-T_1)$$

$$Q=\Delta E=\frac{3}{2}\times 8.31\times(350-300)=623.25\quad \mathrm{J}$$

对外作功 $$A=0$$

(2)等压过程

$$Q=\upsilon C_P(T_2-T_1)=\upsilon\frac{i+2}{2}R(T_2-T_1)$$

吸热 $$Q=\frac{5}{2}\times 8.31\times(350-300)=1038.75\quad \mathrm{J}$$

$$\Delta E = \upsilon C_V (T_2 - T_1)$$

内能增加 $\Delta E = \frac{3}{2} \times 8.31 \times (350 - 300) = 623.25$ J

对外作功 $A = Q - \Delta E = 1038.75 - 623.5 = 415.5$ J

## 7-18 一卡诺热机在1000 K和300 K的两热源之间工作，试计算

(1)热机效率；
(2)若低温热源不变，要使热机效率提高到80%，则高温热源温度需提高多少?
(3)若高温热源不变，要使热机效率提高到 80%，则低温热源温度需降低多少?

解：(1)卡诺热机效率 $\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$$\eta = 1 - \frac{300}{1000} = 70\%$$

(2)低温热源温度不变时，若

$$\eta = 1 - \frac{300}{T_1} = 80\%$$

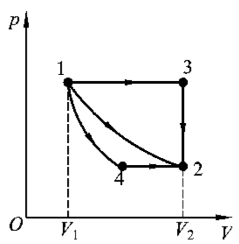
要求 $T_1 = 1500$ K，高温热源温度需提高 500 K

(3)高温热源温度不变时，若

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{1000} = 80\%$$

要求 $T_2 = 200$ K，低温热源温度需降低100 K

## 7-21 如题 7-21 图所示，1 mol 双原子分子理想气体，从初态 $V_1 = 20$ L，$T_1 = 300$ K 经历三种不同的过程到达末态 $V_2 = 40$ L，$T_2 = 300$ K．图中 1→2 为等温线，1→4 为绝热线，4→2 为等压线，1→3 为等压线，3→2 为等体线．试分别沿这三种过程计算气体的熵变．



题 7-21 图

解：1 ⟶ 2 熵变

等温过程 $dQ = dA$ ， $dA = p dV$

$$pV = RT$$

$$S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T_1}\int_{V_1}^{V_2} \frac{RT_1}{V} dV$$

$$S_2 - S_1 = R\ln\frac{V_2}{V_!} = R\ln 2 = 5.76 \quad J \cdot K^{-1}$$

$1 \to 2 \to 3$ 熵变

$$S_2 - S_1 = \int_1^3 \frac{dQ}{T} + \int_3^2 \frac{dQ}{T}$$

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_3} \frac{C_p dT}{T} + \int_{T_3}^{T_2} \frac{C_V dT}{T} = C_p \ln\frac{T_3}{T_1} + C_V \ln\frac{T_2}{T_3}$$

$1 \to 3$ 等压过程 $p_1 = p_3 \qquad \frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_3}$

$$\frac{T_3}{T_1} = \frac{V_2}{V_1}$$

$3 \to 2$ 等体过程 $\frac{p_3}{T_3} = \frac{p_2}{T_2}$

$$\frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_3} \qquad \frac{T_2}{T_3} = \frac{p_2}{p_1}$$

$$S_2 - S_1 = C_p \ln\frac{V_2}{V_1} + C_V \ln\frac{p_2}{p_1}$$

在$1 \to 2$ 等温过程中 $p_1V_1 = p_2V_2$

所以 $S_2 - S_1 = C_p \ln\frac{V_2}{V_1} C_V \ln\frac{V_2}{V_1} = R\ln\frac{V_2}{V_1} = R\ln 2$

$1 \to 4 \to 2$ 熵变

$$S_2 - S_1 = \int_1^4 \frac{dQ}{T} + \int_4^2 \frac{dQ}{T}$$

$$S_2 - S_1 = 0 + \int_{T_4}^{T_2} \frac{C_p dT}{T} = C_p \ln\frac{T_2}{T_4} = C_p \ln\frac{T_1}{T_4}$$

$1 \longrightarrow 4$ 绝热过程

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_4 V_4^{\gamma-1} \qquad \frac{T_1}{T_4} = \frac{V_4^{\gamma-1}}{V_1^{\gamma-1}}$$

$$p_1 V_1^{\gamma} = p_4 V_4^{\gamma}, \frac{V_4}{V_1} = (\frac{p_1}{p_4})^{1/\gamma} = (\frac{p_1}{p_2})^{1/\gamma}$$

在$1 \longrightarrow 2$ 等温过程中 $$p_1 V_1 = p_2 V_2$$

$$\frac{V_4}{V_1} = (\frac{p_1}{p_4})^{1/\gamma} = (\frac{p_1}{p_2})^{1/\gamma} = (\frac{V_2}{V_1})^{1/\gamma}$$

$$\frac{T_1}{T_4} = (\frac{V_2}{V_1})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$S_2 - S_1 = C_P \ln \frac{T_1}{T_4} = C_P \frac{\gamma-1}{\gamma} \ln \frac{V_2}{V_1} = R \ln 2$$