第六章 经典质点组动力学

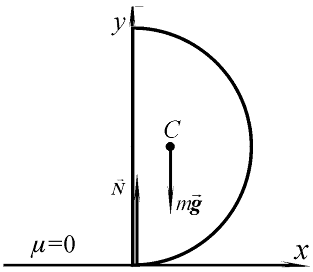


图6.1

6-1 解：水平方向动量守恒

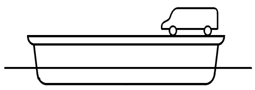
$$\because \sum F_{ix}=0 \quad \therefore P_x=C$$

$$mv_{cx}=0$$

$$v_{cx}=\frac{\mathrm{d}x_c}{\mathrm{d}t}=0$$

$$x_c=C$$

∴ 质心沿竖直直线向下运动



6-2 解: 将船与汽车看成质点组.初始时,因汽车相对于船静止,所以船的加速度即为质点组质心的加速度.根据质心运动定理，有

$$(M+m)\vec{\boldsymbol{a}}_c=\vec{\boldsymbol{F}}^{(e)}$$

$$\therefore \quad (5000+1000)\times 0.2=F_e$$

$$F_e=1200\ \mathrm{N}$$

在船的行进过程中,设船的行进方向为正向

则船相对于岸的速度用 $\dot{x}$ 表示,相对于岸的加速度用 $\ddot{x}$ 表示.汽车相对于船的速度 $\dot{x}'$ 表示,相对于船的加速度用 $\ddot{x}'$ 表示.则汽车相对于岸的速度为 $\dot{x}+\dot{x}'$,相对于岸的加速度为 $\ddot{x}+\ddot{x}'$

根据质点组的动量定理,有:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[M\dot{x}+m\left(\dot{x}+\dot{x}'\right)\right]=F^{(e)}$$

有： $$M\ddot{x}+m\left(\ddot{x}+\ddot{x}'\right)=F^{(\mathrm{e})}$$

$$5000\ddot{x}+1000\ddot{x}-1000\times 0.5=1200$$

$$\ddot{x}=0.28 \quad \left(\mathrm{m/s^2}\right)$$

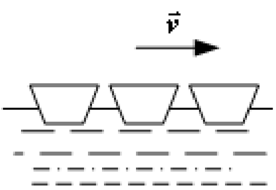


图6.3

6-3 解: (1) 以中间船及两物体为质点组.因为在抛出物体过程中合外力为0.所以质点组动量守恒.

$$(2m_0+m)v=m_0V_2+m(v+u)+m(v-u)$$

$$V_2=v$$

(2) 以前船与抛入物体为质点组.因为在抛出物体过程中所受合外力为0,所

以质点组动量守恒.

$$m_0 v + m(v+u) = (m_0+m)V_1$$

$$V_1 = v + \frac{mu}{m_0+m}$$

(3) 以后船与抛入物体为质点组,根据质点组动量守恒

$$m_0 v + m(v-u) = (m_0+m)V_3$$

$$V_3 = v - \frac{mu}{m_0+m}$$

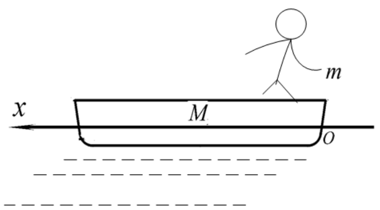


图6.4

6-4 解: 以人和船为质点组.选取岸边做参考系.船尾为坐标原点,人运动方向为正方向建立 Ox 轴.人质量为 m ,船质量为 M .因不计船受阻力,所以沿 x 方向系统不受外力作用

$$(M+m)\frac{\mathrm{d}^2 x_c}{\mathrm{d}t^2} = 0$$

$$\therefore \quad \dot{x}_c - \dot{x}_{c0} = 0$$

$$\therefore \quad \dot{x}_c = 0$$

∴ 在人的运动过程中质点组的质心位置在水平方向没变.设人相对于岸的初始位置在水平方向的投影为 x_{10} ,相对于岸的末位置在水平方向的投影为 x_1 ,船相对于岸的初始位置在水平方向的投影为 x_{20} ,船相对于岸的末位置在水平方向的投影为 x_2 .根据动量守恒定律

$$mx_{10} + Mx_{20} = mx_1 + Mx_2$$

$$m(x_1 - x_{10}) + M(x_2 - x_{20}) = 0$$

$$m(3.2 + x_2 - x_{20}) + M(x_2 - x_{20}) = 0$$

$$\therefore \quad x_2 - x_{20} = -\frac{3.2m}{M+m} = -\frac{3.2\times 70}{210+70} = -0.8\ \mathrm{m}$$

6-5 证明：以杆与轴交点为原点 O ，沿杆建立 Ox 轴,如图.

将杆分为无穷短的质元,每一质元都可以看成质点.其中任意小质元位于 x 处,其长度为 $\mathrm{d}x$,杆的线密度为 $\rho_l = \frac{m}{l}$. 根据转动惯量的定义:

图6.5

$$J=\int d^2\mathrm{d}m=\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}x^2\rho_l\mathrm{d}x=\frac{m}{l}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}x^2\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\frac{m}{l}x^3\Big|_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}}=\frac{1}{12}ml^2$$

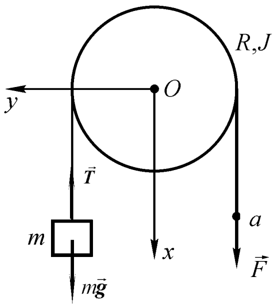


图6.6

6-6 解: 规定定滑轮转动正方向如图.顺时针方向为正.分别以滑轮 M ,重物 m 为隔离体.

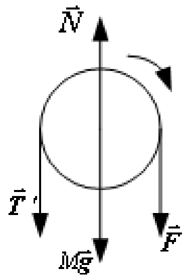
对滑轮 M : 由转动定理

$$J\ddot{\varphi}=\sum M_{iz}^{(e)}$$

$$J\ddot{\varphi}=\left(\vec{r}_1\times\vec{T}'\right)\cdot\vec{k}+\left(\vec{r}_2\times\vec{F}\right)\cdot\vec{k}$$

$$=-RT'+RF$$

$\vec{k}$ 为垂直纸面向里



对重物 m : 由牛二定律 $m\vec{a}_1=m\vec{g}+\vec{T}$

投影 $m\ddot{x}_1=mg-T$

约束条件 $x_1+x_2+\pi R=l$

$$\ddot{x}_1=-\ddot{x}_2$$

无滑滚动 $\vec{v}_1=\vec{\omega}\times\vec{r}_1$

$$\dot{x}_1=-R\dot{\varphi}\Rightarrow\ddot{x}_1=R\ddot{\varphi}\quad\ddot{x}_2=R\ddot{\varphi}$$

牛二定律 $T=T'$

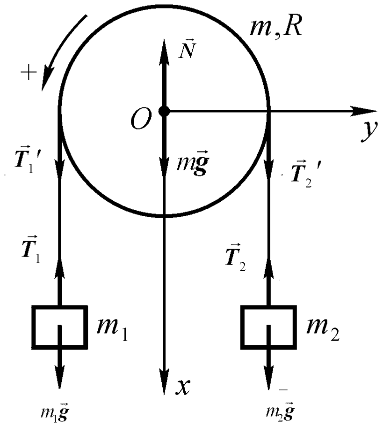
$$\ddot{x}_2=R\ddot{\varphi}=\frac{R^2}{J}\left(F-T'\right)$$

$$\frac{J}{R^2}\ddot{x}_2=F-mg+m\ddot{x}_1$$

$$\ddot{x}_2=\frac{F-mg}{\frac{J}{R^2}+m}=\frac{20.8-1\times9.8}{\frac{0.1}{0.01}+1}$$

$$=1.0\quad\left(\mathrm{m/s^2}\right)$$

$$\vec{a} = 1.0\vec{i} \quad \left(\mathrm{m/s^2}\right)$$



6-7 解: $J\ddot{\varphi} = T_1'R - T_2'R$

$$m_1\ddot{x}_1 = m_1 g - T_1$$

$$m_2\ddot{x}_2 = m_2 g - T_2$$

$$\ddot{x}_1 = -\ddot{x}_2$$

$$\ddot{x}_1 = R\ddot{\varphi}$$

$$T_1 = T_1' \quad T_2 = T_2'$$

$$\frac{J}{R}\ddot{\varphi} = m_1 g - m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 - m_2 g$$

$$-\frac{J}{R}\frac{\ddot{x}_2}{R} = \left(m_1 - m_2\right)g + \left(m_1 + m_2\right)\ddot{x}_2$$

$$J = \frac{R^2\left(m_2 - m_1\right)g}{\ddot{x}_2} - R^2\left(m_1 + m_2\right)$$

$$\ddot{x}_2 = \frac{2\Delta x_2}{\Delta t^2} = \frac{2\times 0.75}{25}$$

$$= 0.06 \quad \left(\mathrm{m/s^2}\right)$$

$$J = \frac{0.05^2\times\left(0.50 - 0.46\right)\times 9.8}{0.06} - 0.05^2\times\left(0.50 + 0.46\right)$$

$$= 1.393\times 10^{-2} \quad \mathrm{kg/m^2}$$

6-8 解: 将杆和两个小球看作质点组.质点组所受的外力如图所示

$\because$ $\vec{N}$ 和 $M\vec{g}$ 过 Oz 轴

两个 $m\vec{g}$ 与 Oz 轴平行

$$\therefore \quad \sum M_{iz}^{(e)} = 0$$

图6.8

$\therefore \quad L_z = C$ 角动量守恒

质点组对 Oz 轴角动量守恒

$$J\omega_0 + m\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\omega_0 + m\frac{l}{2}\cdot\frac{l}{2}\omega_0 = J\omega + ml\cdot l\omega + ml\cdot l\omega$$

$$\omega = \frac{(2M+3m)\omega_0}{2(M+6m)}$$

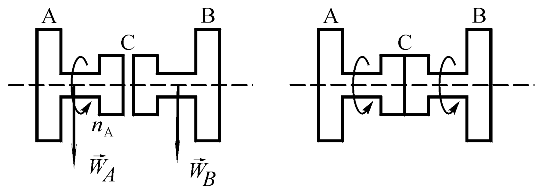


图6.9

6-9 解: 将二飞轮 A , B 看作质点组.质点组所受的外力如图所示.

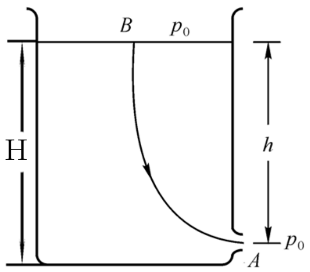
$\because \quad \vec{W}_A$, $\vec{W}_B$ 过固定轴

$\therefore \quad \sum M_{iz}^{(e)} = 0$

$\therefore$ 质点组对固定轴的角动量守恒

$$J_A \cdot 2n_A\pi = 2(J_A + J_B)n\pi$$

$$n = \frac{J_A n_A}{J_A + J_B} = \frac{10\times 600}{10+20} = 200 \quad (\text{转/分})$$



6-14 解：(1) 因小孔口径很小,在较短时间内,液面高度没有明显变化,可近似看成是稳定流动.取一流线 AB ,由液体自由表面至小孔 B 处流速可视为零,压强为大气压强 P_0 , A 处压强亦为 P_0 ,设其流速为 v .

根据伯努利方程 $$\rho gh + P_0 = \frac{1}{2}\rho v^2 + P_0$$

$$v = \sqrt{2gh}$$

水的微团因由小孔流出同作平抛运动,自小孔落至容器底部地面所需时间为

$$t = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

水平射程为 $$x = vt = \left[2gh\cdot\frac{2(H-h)}{g}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2\sqrt{h(H-h)}$$

(2) 可以另开一小孔,使两个射程相等.设在水面下 h' 深处另开一小孔时,二射程相等,则

$$2\sqrt{h'(H-h')}=2\sqrt{h(H-h)}$$

$$\therefore\ h'(H-h')=h(H-h)$$

$$h'^2-Hh'+h(H-h)=0$$

$$(h'-h)\left[h'-(H-h)\right]=0$$ (待续)

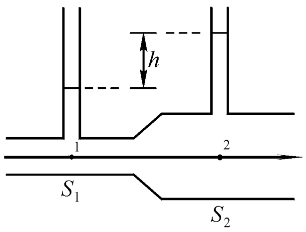


图6.15

6-15 解: 沿管道中心轴线取一流线,对该流线上1,2两点,根据伯努利方程,因 $h_1=h_2$,故

$$\frac{1}{2}\rho v_1{}^2+P_1=\frac{1}{2}\rho v_2{}^2+P_2 \qquad (1)$$

根据连续性方程,有 $v_1s_1=v_2s_2$ (2)

1,2两点压强差 $P_2-P_1=\rho gh$ （3）

由 (1) 得 $$P_2-P_1=\frac{1}{2}\rho v_2{}^2-\frac{1}{2}\rho v_1{}^2 \qquad （4）$$

(3) 代入 (4) 得 $$\rho gh=\frac{1}{2}\rho v_2{}^2-\frac{1}{2}\rho v_1{}^2 \qquad (5)$$

由 (2) 得 $v_2=\frac{v_1s_1}{s_2}$ 代入 (5)

$$\therefore\ gh=\frac{1}{2}\frac{v_1{}^2s_1{}^2}{s_2{}^2}-\frac{1}{2}v_1{}^2$$

$$v_1=s_2\sqrt{\frac{2gh}{s_1{}^2-s_2{}^2}}$$

水平管道中的流量为 $$Q=v_1s_1=v_2s_2=s_1s_2\sqrt{\frac{2gh}{s_1{}^2-s_2{}^2}}$$

6-16 解: 选水平管处为势能零点.打开塞子后,当水流稳定流动时,如图过1,2,3,4各点选取流线,由题中所给条件可用伯努利方程

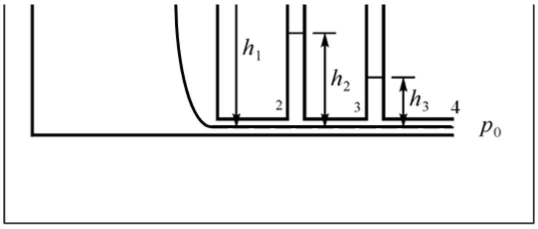


图6.16

$\because\ v_1 = 0 \qquad P_1 = P_4 = P_0$

$$\therefore\ \rho_0 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho {v_2}^2$$

$$= P_3 + \frac{1}{2}\rho {v_3}^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho {v_4}^2$$

由连续性方程得: $s_2 v_2 = s_3 v_3 = s_4 v_4$

$\because\ s_2 = s_3 = s_4$

$\therefore\ v_2 = v_3 = v_4$

$\therefore\ P_2 = P_3 = P_4 = P_0$

设竖直管内液面高度分别为 h_2, h_3，则应有

$P_2 = P_0 + \rho g h_2$, $P_3 = P_0 + \rho g h_3$

$\therefore\ h_2 = h_3 = 0$

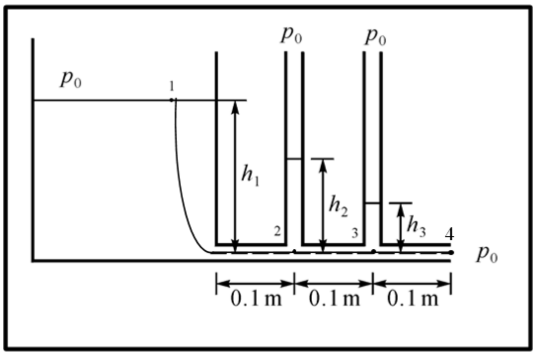


图6.17

6-17 解：以出口处为势能零点. 如图选过1, 2, 3, 4点的一条流线, 依连续性方程, 因水平管截面相等, 故管中的2, 3, 4点流速相等, 以 v 表示其流速.

依不可压缩粘性流体稳定流动的功能关系得

对3, 4点

$$P_3 + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + W_{34} \qquad (1)$$

对1, 4点

$$P_0 + \rho g h_1 = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + W_{14} \qquad (2)$$

由静止液体压强性质得

$$P_3 = P_0 + \rho g h_3 \qquad (3)$$

又$\because$ $W = \dfrac{8\eta l}{R}\bar{v}$ ， $R, \eta, \bar{v}$ 均一定，l 图中已标出

$\therefore\ 3W_{34} = W_{14}$

由以上各式解得

$$v^2 = 2gh_1 - \frac{2}{\rho}W_{14} = 2gh_1 - \frac{2}{\rho}3W_{34}$$

$$= 2gh_1 - 6gh_3$$

$$\therefore \quad v = \left(2gh_1 - 6gh_3\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(2\times9.8\times0.18 - 6\times9.8\times0.05\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 0.767 \quad (\mathrm{m/s})$$