第五章 函数 Function

函数在数学、应用数学等许多领域，尤其计算机科学领域有着极其重要的作用。函数的思想、方法、概念和应用无处不在，无时不在。

初中数学："对自变量每一确定的数值都有一个确定的数值与之对应"数值之间的对应

高中数学："两非空数集中的元素之间的对应关系"

元素之间的对应

大学微积分："设 X 和 Y 是两个数集，若依据某一法则 f，使得对于 X 中的每一个数 x 总有 Y 中的唯一确定的数 y 与之对应，则称 f 为定义在 X 上的取值于 Y 中的函数。"

元素与唯一元素之间的对应

离散数学：“一种特殊的关系”

进一步将来研究区间值函数，集值函数，…,

函数主要是研究变量之间的关系和规律。函数的划分有很多种。有线性与非线性、连续与不连续、一元与多元等。函数的表达方式有：解析式、列表、图像等。例如，

$$y = f(x) = kx$$

$$y = g(x_1, x_2) = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$y = h(x) = ce^{bx}$$

x	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**…**
y	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**…**

1 函数

假定 A，B 是两个非空集合，f : A→B，称 f

为 **A** 到 **B** 上的函数，若对每一个 **a**∈A, 有唯一的 ***f*(a)**∈**B**。记做 **b = f(a)**。

函数也称为映射 **mappings**，更确切地说，映射是函数的推广。

a 叫做函数 **f** 的自变量 **argument**，**b** 被称为因变量，**b=*f*(a)**叫做函数的值 **value**，也叫 **a** 的像。

定义域、值域。
自变量, **a**, 的变化范围被称为定义域，因变量(函数值), **b=f(a)**, 的集合被称为值域。

例**1. A＝{1,2,3,4}, B={a,b,c,d},**

$f: A \to B,$

$1 \to a, 2 \to a, 3 \to d, 4 \to c$，

则 f 是一个函数。

从关系的角度来说，函数也可以简单记为，f={(1,a), (2,a), (3,d), (4,c)}

这样一来，从形式上来看，f 就是一个关系。

设 A＝{1,2,3,4}, B={a,b,c,d}，假定 R 是从 A 到 B 的一个关系，R={(1,a)，(1,b)，(2,a), (4,c)}，

这样，对于 1 来说，1∈A，但不是唯一的 R(1)∈B 与之相对应，有 R(1)=a, R(1)=b，因此，可见，上述关系 R 就不是一个函数。

函数是一个关系，但是，反之不成立。即，关系不一定是函数。

因此，函数是一种特殊的关系。

注：关系与函数是有区别的。函数与关系的不同体现在：

1.由函数的定义，可以知道，关于每一个 a∈A， 有唯一的 f(a)∈B，因此，自变量 a

取遍整个集合 **A**，而不是 **A** 的某个真子集。（函数的定义域是 **A**）

2.由函数的定义，可以知道，关于每一个 **a**∈A，只有唯一的 ***f*(a)**∈**B** 与之相对应，即，如果 **f(a)=b** 且 **f(a)=c**，则必须有，**b=c.**（唯一性）

例如，**f={(x,y)|x,y**∈**N，x+y<10}**，因为 **x** 不能取遍定义域（自然数集合，**N**）中的所有值，并且对于每一个 **x**，对应多个 **y** 与之对应，故，它只能是关系，而不是函数。

例如，设 **A={a,b,c}，B={0,1}**，因此，乘积集合 **A×B={(a,0)，(a,1)，(b,0)，(b,1)，(c,0)，(c,1)}**，故，**A×B** 有 2^6**=64** 个子集，乘积集合的子集对应着关系，因此，**A×B** 有 2^6**=64** 个不同的关系，但是从 **A** 到 **B** 的函数有多少个呢？

下面我们具体给出从 **A** 到 **B** 的函数：

f_1={(a,0), (b,0), (c,0)}, f_2={(a,0), (b,0), (c,1)}

f_3={(a,0), (b,1), (c,0)}, f_4={(a,0), (b,1), (c,1)}
f_5={(a,1), (b,0), (c,0)}, f_6={(a,1), (b,0), (c,1)}
f_7={(a,1), (b,1), (c,0)}, f_8={(a,1), (b,1), (c,1)}

按照函数的定义，我们有如下表达式：

f={(a, f(a)), (b, f(b)), (c, f(c))}

每个 **f(a), f(b), f(c)**只有两种可能性，**0** 或 **1**，故总的取法为 **2x2x2=2^3=8.**

因此，只有 **2^3** 个子集为从 **A** 到 **B** 的函数。

一般来说，设 **A, B** 分别是 **m, n** 个元素的有限集合，则 **A×B** 有 **mn** 个序对，因此 **A×B** 有 2^{mn} 个子集（关系），但是从 **A** 到 **B** 的函数只有 n^m 个。具体为，设

$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\}, B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n\}$，因为

$Dom(f)=A, so,$

$f=\{(a_1,f(a_1)),(a_2,f(a_2)),\cdots,(a_m,f(a_m))\}$

而每一个 $f(a_i)$ 有 **n** 种可能，因此总共有 $\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{m}=n^m$ 个从 **A** 到 **B** 的函数。

例 **2.** f: Z→Z，

$$f(a)=\begin{cases}0 & \text{if a是偶数} \\ 1 & \text{if a是奇数}\end{cases}$$ ***f*** **是函数。**

例3.　恒等函数 $1_A(a)=a$ 是函数。

函数相等(f=g)，设 f,g 是从 A 到 B 的函数，如果对于任意的 x∈A, 都有 f(x)=g(x), 则称函数 f, g 相等，记 f=g

正如，我们在第四章里表述的，函数 *f* ：A→B，b=f(a)，是一个特殊的二元关系，那么，由函数 f 可以确定一个关系 R_f，简单地，可以表示为(a,b)∈ R_f ，或 a R_f b。关系 R_f 的特征函数为

$$R_f(a,b)=\begin{cases}1 & b=f(a) \\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

或者简记为

$$f(a,b)=\begin{cases}1 & b=f(a) \\ 0 & \text{否则}\end{cases}$$

下面关于符号 R_f 与 f ，我们就不再特别区分。

因为函数是一种特殊的关系，因此，以前所讨论的有关集合或关系的运算和性质对于函数来说，就可以完全适用。这样一来，关于函数，有函数的并、交、余运算。

例如，f：A→B, g：A→B,

$$f\cup g: A\to B,\ a\to(f\cup g)(a)=f(a)\cup g(a)$$
$$f\cap g: A\to B,\ a\to(f\cap g)(a)=f(a)\cap g(a)$$
$$f^{c}: A\to B,\ a\to(f^{c})(a)=(f(a))^{c}$$

函数的复合

设 $f: A\to B$，$g: B\to C$，是函数，则 $g\circ f: A\to C$，是函数。且 $(g\circ f)(a)=g(f(a))$。（按照函数的记法），称为函数的乘法。

例如：设 Z 是整数集合，f，g 都是整数函数，

f：$Z\to Z$，$a\to f(a)$，$f(a)=a+1$,

g：$Z\to Z$, $a\to g(a)$，$g(a)=2a$.

则

$g\circ f$：$Z\to Z$，　$(g\circ f)(a)=g(f(a))=2(a+1)$

$f\circ g$：$Z\rightarrow Z$， $(f\circ g)(a)=f(g(a))=2a+1$

显然可见，函数的复合不满足交换律，这点与关系的复合不满足交换律相一致。

从函数(关系)的角度出发，函数的概念还可以进一步延伸：

集值函数, f：$A\rightarrow P(B)$， $x\rightarrow f(x)\in P(B)$

如，关系的像，$R(a)=\{y|(a,y)\in R\}$

类似地，集值函数也可以确定关系：

$R_f(x,y)=1$ 等价于 $x\in A$, $y\in f(x)$

变换, f: $P(A)\rightarrow P(B)$,

$A_1\in P(A)\rightarrow f(A_1)\in P(B)$

如，关系的像，$R(A_1)=\{y|(a,y)\in R$ 且 $x\in A_1\}$是 B 的子集。

类似地，变换也可以确定关系：

$R_f(x,y)=1$ 等价于 $x\in A$, $y\in f(A)$

2．特殊函数 Special Type of Functions

符号说明：Dom(f)、Ran(f)分别指的是函数 f 的定义域和值域。

设 f 是从 A 到 B 的一个函数，如果 Dom(f)=A，则称 f 是处处有定义 everywhere defined；

如果 Ran(f)=B，则称 f 是满射；即，对于任意的 b∈B,存在 a∈A,使得 b=f(a)成立。

如果对于集合 A 中两个不同的元素 a 和 b，其对应的函数值也不相同，即，$f(a)\neq f(b)$，则称 f 是单射。

a≠b ⇒f(a)≠f(b)，或 f(a)=f(b) ⇒a=b；

例 5. A＝{1,2,3,4}, B={a,b,c,d}, f={(1,a), (2,a), (3,d), (4,c)}

1→a, 2→a, 3→d, 4→c,

f 是一个函数，但是 f 既不是单射，也不是满射。

如果 f 既是单射，又是满射，则称 f 是双射，又称为一一映射。

例如，**A={1,2,3},** ***f*****: 1→1,2→2,3→3,** 双射。

例如，证明函数 $f:R\to R,\ f(r)=2r-15$ 是双射。

证明：(分三步)

首先，f 是映射；f 的定义域是 R

$For\ every\ r\in R,\ we\ have\ f(r)=2r-15\in R$ ， 因此，**f** 是 **R** 上的函数。

其次，f 是单射；

$For\ any\ r_1,r_2\in R\ and\ r_1\neq r_2,\ we\ have$

$f(r_1)-f(r_2)=2(r_1-r_2)\neq 0$

因此，**f** 是单射。

再次，f 是满射；

$$For\ any\ x\in R,\ there\ exists\ r=\frac{x+15}{2}\in R$$

$such\ that\ f(r)=2r-15=x+15-15=x$

因此，**f** 是满射。

故，**f** 是双射。

可逆函数 Invertible Functions

f 是 A 到 B 的一个函数,如果它的逆关系 f^{-1},**是 B 到 A 的函数，则称** $\boldsymbol{f}$ **是可逆函数。**

例 6. A＝{1,2,3,4}, B={a,b,c,d}, $\boldsymbol{f}$**={(1,a), (2,a), (3,d), (4,c)}**

1→a, 2→a, 3→d, 4→c,

$\boldsymbol{f}$ **是一个函数。**

关系 f={(1,a),(2,a),(3,d),(4,c)}
逆关系 f^{-1}**，** f^{-1}**={(a,1), (a,2), (d,3), (c,4)}，**

相应地，其对应法则为
f^{-1} **:** a→1, a→2, d→3, c→4,

显然，f^{-1} **不是从 B 到 A 的函数，从而表明** $\boldsymbol{f}$ **不是可逆函数。**

例 7．f：Z→Z，f(a)=a+1， f 是双射，并且可逆。

因此，我们有下面的结论。

定理 1. 设 *f*：A→B 是一个函数，则

f^{-1} 是 B 到 A 的一个函数当且仅当 *f* 是单射。

第 6 版，P185，定理 1(a) 错误

反例：设 A={1,2,3,4}, B={a,b,c,d,e}
对应关系 f: 1→a, 2→b, 3→c, 4→d，显然，f 是 A 到 B 的函数，并且 f 是单射，但是 f^{-1} 不是 B 到 A 的函数。

结论：设 *f*：A→B 是一个函数，并且 f^{-1} 是 B 到 A 的一个函数，则 *f* 是单射。

假定 f 不是单射，则有 A 中的两个元素 a_1, a_2 , 使得 $f(a_1)=f(a_2)=b$，则有 $f^{-1}(b)=a_1$, $f^{-1}(b)=a_2$, 表明 f^{-1} **不是函数。**

定理 2. 设 f: A→B 是一个函数, 并且 f^{-1} 是 B 到 A 的一个函数, 则

(a) f^{-1} 处处有定义当且仅当 f 是满射;

(b) f^{-1} 是满射当且仅当 f 处处有定义。

$Dom(f^{-1})=B$, 即，for every $b\in B$, we have $f^{-1}(b)=a\in A$, 即，$b=f(a)$

$Ran(f^{-1})=A$, for every $a\in A$, we have $b\in B$, $a=f^{-1}(b)$, 即， $f(a)=b$

例 8. f: R→R，$f(x)=x^2$，因为 f 不是单射， f 不是双射，因此不可逆。

定理 3. 设 f: A→B 是一个函数:

（a）$1_B\circ f=f$.

（b）$f\circ 1_A=f$.

设 f: A→B 是一一对应:

（c）$f^{-1}\circ f=1_A$.

(d) $f\circ f^{-1}=1_B$.

定理 4. 设 f：A→B, g:B→A 都是函数.

(a) $g \circ f = 1_A$，$f \circ g = 1_B$. 则 f，g 都是一一对应,并且 $f^{-1}=g$, $g^{-1}=f$.

(b) f，g 可逆，则 $g \circ f$ 可逆，且 $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

例 9. f：R→R 是一个函数,其中 R 表示全体实数集,

$f(x)=2x^3-1$,则 f 是单射。

令 $g(y)=\sqrt[3]{\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}}$

$(g \circ f)(x)= g(f(x))=x$，　$g \circ f = 1_R$.

$(f \circ g)(y)= f(g(y))=y$，　$f \circ g = 1_R$

f,g 都是可逆函数，f,g 都是单值函数。

定理：设 f 是 A 到 B 的函数，A 和 B 是有限集合，并且|A|=|B|，则 f 是单射当且仅当 f 是满射。

证明：如果 f 是单射，则|A|=|f(A)|，由于|A|=|B|，则|f(A)|=|B|，从 f 的定义可知，f(A)是 B 的子集，因为 B 是有限集合，从而 f(A)=B,因此，f 是满射。

反之，如果 f 是满射，则 B=f(A),于是|B|=|f(A)|=|A|,由于 A 是有限的，所以 f 是单射。

其中：$f(A_1)=\{f(x)|x\in A_1\}$
$f^{-1}(B_1)=\{x|x\in A,且\ f(x)\in B_1\}$
进一步有：
定理：设 f 是 A 到 B 的函数，A_1, B_1 分别是 A,B 的子集，则

1) $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$
2) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$

证明 1）

$$
\begin{aligned}
y \in f(A_1 \cup A_2) &\Rightarrow \exists\, x \in A_1 \cup A_2,\ \textit{such that}\ y = f(x) \\
&\Rightarrow x \in A_1\ \textit{or}\ A_2,\ \textit{such that}\ y = f(x) \\
&\Rightarrow y \in f(A_1) \cup f(A_2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
y \in f(A_1) \cup f(A_2) &\Rightarrow \textit{If}\ \ y \in f(A_1), \textit{there exists}\ x \in A_1, \\
&\qquad \textit{such that}\ \ y = f(x) \\
&\Rightarrow \exists\, x \in A_1 \cup A_2,\ \textit{such that}\ y = f(x) \\
&\Rightarrow y \in f(A_1 \cup A_2)
\end{aligned}
$$

$$\textit{Therefore},\ \ f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

Exercise

P189：23, 24

同态与同构

代数系统（即，集合及其运算所构成的系统。例如，$(P(X),\bigcup,\bigcap,c)$，集合与它的并、交、余运算，**({0,1},∨，∧，c)**，$([0,1],\vee,\wedge,c)$ 逻辑运算，$(\mathrm{R},+,-,\times,\div)$ 实数的四则运算，构成一个代数系统）的同态与同构，指的是两个代数系统之间存在的一种特殊映射，即，保运算的映射。

定义：设 U={S，⊙}，V={T，＊}是两个代数系统，⊙和＊分别是他们相应的二元运算，如果存在映射 f：S→T, a∈S→f(a) ∈T, 满足对任意的 x, y∈S，则 x⊙y∈S，相应地有 f(x), f(y)∈T，f(x)＊f(y) ∈T, 并且有 f(x⊙y)=f(x)＊f(y) 成立，则称 f 是 S 到 T 的同态映射。简称同态。

自变量的运算对应于因变量的运算

例 1：设 R 是全体实数，U={R，+}, V={R,+}是两个代数系统，“+”是相应实数的普通加法运算，如果存在映射 f：R→R，a∈R→f(a)=2a∈T，则有

f(x⊙y)=f(x+y)=2(x+y)=2x+2y

f(x)＊f(y)=f(x)+f(y)=2x+2y

成立，则称 f 是 R 到 R 的同态映射。

例 2：设 R 是全体实数，U={R，+}, V={R,*}是两个代数系统，“+”和“*”分别是相应实数的加法与乘法运算，如果存在映射 f：R→R, a∈R→f(a)=2a∈T，则有

f(x⊙y)=f(x+y)=2(x+y)

f(x)*f(y)=2x * 2y=4xy,

显然，f(x+y)≠f(x)*f(y)

则 f 不是 R 到 R 的同态映射。

例 3：f 是 X 到 Y 的映射，如上所述，f 可以诱导 P(X)到 P(Y)的映射，仍然记为 f.

f：X→**Y,**

f:　P(X)→P(Y)

A(∈P(X))→**f(A)(**∈P(Y)),

$$f(A)=\{y \mid \exists x \in A, y=f(x)\}$$

$$f(A)(y)=\bigvee_{y=f(x)} A(x)$$

因此，我们有：$f(A \cup B)=f(A) \cup f(B)$。

从$(P(X),\bigcup,\bigcap,c)$到$(P(Y),\bigcup,\bigcap,c)$的同态映射。

如果 f 是 X 到 Y 的单射，则称 f 是单同态；

如果 f 是 X 到 Y 的满射，则称 f 是满同态；

如果 f 是 X 到 Y 的双射，则称 f 是同构。

例如，1）f：R→**R, x**→**3**^{x}　单同态

2) f: Z→**Z**$_5$**,**　**x**→**[x]**　　　　　满同态

3) f: R$^+$→**R, x**→**ln x, (R**$^+$**,*),**　**(R,+)**，同构

进一步，我们可以继续研究代数系统的同构。

代数系统之间的同构关系是等价关系。

5.2 计算机科学中的函数

特征函数、模函数、阶乘函数、多项式函数、指数函数、对数函数、取整函数等

字符串长度函数、矩阵转置函数、最大公约数、最小公倍数和布尔函数等。

逻辑真值函数：∧，∨，¬，→，↔等。

模糊集合的隶属函数

f_A：$X \to [0,\ 1]$，$f_A(x) \in [0,1]$, 刻画的集合称为模糊集合.

模糊集合的并、交、余运算定义如下：

$$f_{A \cup B}(x) = \max(f_A(x),\ f_B(x))$$

$$f_{A \cap B}(x) = \min(f_A(x),\ f_B(x))$$

$$f_{A^c}(x) = 1 - f_A(x)$$

模糊逻辑运算、模糊推理、模糊决策等研究

5.3 函数的增长性 Growth of Functions

类似于微积分的无穷小函数

其主要原因是考察计算量与计算的复杂性。

设 f 和 g 都是正整数(Z^+) 上的函数。

如果存在常数 c 和 k，使|f(n)|≤c|g(n)|，对所有 n≥k 成立，记作 $f = O(g)$. 读做 f 是 g 的大 O。

f=n^3＋3n^2＋1，g=2n^3

f=O(n^3)

f=O(g)

如果 $f＝O(g)$，$g=O(f)$，称 f 和 g 具有相同的阶。

如果 $f＝O(g)$，但 $g≠O(f)$，称 f 的阶低于 g 的阶；表明 f 不如 g 增长快。

接下来，我们可以定义函数之间的一个关系：

$f\Theta g$ 当且仅当 f 和 g 具有相同的阶。

$f\Theta g \Leftrightarrow f＝O(g)$，$g＝O(f)$，

$f\Theta g$ 指的是：f，g 增长得一样快。

定理 1. 上面定义的函数间的关系 Θ 是等价关系。

满足：自反性、对称性、传递性

因此，我们可以基于等价关系 Θ 对全体函数进行等价分类，同一个等价类中的函数，其增长速度一样快，因此，我们就可以选用一个最简单的函数来代表。（等价函数）

$\Theta(1)$, $\Theta(\lg n)$, $\Theta(n)$, $\Theta(n\lg n)$, $\Theta(n^2)$, $\Theta(n^3)$,……，$\Theta(2^n)$，……,

函数的 Θ-类判定法则

1. $\Theta(1)$ 常函数，0 增长。
2. $\Theta(\lg n)$ 低于 $\Theta(n)$
3. $\Theta(n^a)$ 低于 $\Theta(n^b) \Leftrightarrow 0<a<b$
4. $\Theta(a^n)$ 低于 $\Theta(b^n) \Leftrightarrow 0<a<b$
5. $\Theta(n^k)$ 低于 $\Theta(a^n)$, $a>1$.
6. $\Theta(cf) = \Theta(f)$, $c\neq 0$.
7. $\Theta(f)$ 低于 $\Theta(g) \Rightarrow \Theta(fh)$ 低于 $\Theta(gh)$
8. $\Theta(f)$ 低于 $\Theta(g) \Rightarrow \Theta(f+g) = \Theta(g)$

计算复杂性（时间复杂度）：两种级别，一种是 O(1), O(log(n)), O(n^a)等, 我们把它叫做多项式级的复杂度；另一种是 O(a^n)和O(n!)型复杂度，它是非多项式级的，其复杂度计算机往往不能承受。

5.4 置换函数 Permutation Functions

这里，我们讨论一种特殊的映射，双射。

假定 A 是一个有限集合，**f：A→A，是一个函数。 如果 f 是双射，则称 f 是 A 的一个置换函数 Permutation Function，简称置换 Permutation。**

设 **A＝{$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$}，f 是 A 的一个置换，记**

$$f=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ f(a_1) & f(a_2) & \cdots & f(a_n) \end{pmatrix}$$

为了叙述方便，我们记 **f∘g=fg**，其中 **(f∘g)(a)=f(g(a))**，称为函数 **f** 与 **g** 的乘法。

例如，**A={1,2,3}**，**A** 的全体置换(**3!=6**)可以表示为：

$$1_A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ p_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

则我们有以下性质：

$$a)\quad p_4^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=p_5,\ p_1^{-1}=p_1,\ p_2^{-1}=p_2,\ p_3^{-1}=p_3,$$

$$b)\quad p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\text{则}$$

$$p_3\circ p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=p_2,\ p_4\circ p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=p_1$$

验证表明：置换乘法(函数的复合)不符合交换律。

$$c)\quad p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\ p_1\circ p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=p_5$$

验证表明：置换乘法满足封闭性。

$1_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ **是恒等置换,单位元(关于乘法).**

定理 1　A＝{a_1,a_2,……,a_n}, A 有 n!个置换。

因为 n 个元素的排列数为 n!

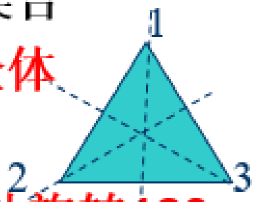
置换的几何意义

例如，A={1,2,3}, A 的全体置换(3!=6)可以表示为:

$$1_A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ p_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},\ p_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ p_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ p_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

正三角形如下图所示，求经旋转和翻转能使图形重合的所有变换，并将这些变换用顶点集合 $X=\{1,2,3\}$ 上的置换来表示。**S_3上的全体置换的几何意义. (1)就是恒等置换;**



(123), (132)分别是三个顶点以中心逆时针旋转120，240所对应的置换(2π/3, 2*2π/3);

(12), (13), (23)分别是以顶点3, 2, 1的角平分线翻转所对应的置换

设 A＝{$a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n$}，*f* 是 A 的一个置换，满足：

$f(a_1)=a_2, f(a_2)=a_3,\cdots, f(a_r)=a_1$，并且对于 $x\in A, and\ x\notin\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$，有 $f(x)=x$，**那么称 f 是长度为 r 的循环置换，简称长度为 r 的循环 circle，用** $(a_1,a_2,\cdots,a_r)$ 表示。

例如， $p_3=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$，**记为** $(1,2,3)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 1\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 2 & 5 & 4 & 1\end{pmatrix}=(1,3,5)$$

(1,3,5)与(2,4,6)没有共同的元素

不相交循环指的是两个循环没有共同的元素。

任何一个置换可以表示成若干个不相交循环的乘积。

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 5 & 7 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1625)(37)(4) = (15)(12)(15)(37)(14)(41)$$

设σ为A上的置换，任取$a_1 \in A$, 若$\sigma(a_1) = a_2$,
$\sigma(a_2) = a_3, \cdots, \sigma(a_{k-1}) = a_k, \sigma(a_k) = a_1$, 则构成一个循环
$(a_1 a_2 \cdots a_k)$.
若$(a_1 a_2 \cdots a_k)$含有A中的所有元素，即可。
否则，在余下的元素中再任取一个元素，重复上述过程，以此类推。

长度为 2 的循环，称之为对换。

例如，(1,2), (3,5)

定理：任何一个对换的平方均为恒等置换。

例如， $(1,2) \circ (1,2) = 1_A$

推论：|A|>1 时，每个循环都可以写成对换的乘积。

$(b_1, b_2,\cdots, b_r)=$

$$(b_1,b_r)\circ(b_1,b_{r-1})\circ(b_1,b_{r-2})\circ\cdots\circ(b_1,b_3)\circ(b_1,b_2)$$

分解为对换的个数为偶(奇)数个的置换称为偶(奇)置换。

定理：偶数个对换的乘积不能表示成奇数个对换的乘积。反之也成立。

并且有：

偶 * 偶=偶，奇 * 奇=偶

奇 * 偶=奇，偶 * 奇=奇

定理：A 是 n 元素的集合，其上的全体偶置换与全体奇置换的个数相等，分别是 n!/2.

定理 1　A＝{a_1,a_2,……,a_n}, A 有 n!个置换。

有限集合上的双射(置换),**约定**:　$(f\circ g)(a)=f(g(a))$

例:　A={1,2,3}, A 的全体置换(3!=6)可以表示为:

$$1_A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix},\ p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

$$p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\ p_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

则我们有以下性质:

$$a)\quad p_4^{-1}=\begin{pmatrix}2&3&1\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=p_5,\ p_1^{-1}=p_1,\ p_2^{-1}=p_2,p_3^{-1}=p_3,$$

$$b)\quad p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix},\ p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix},\text{ 则}$$

$$p_3\circ p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=p_2,\ p_4\circ p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=p_1$$

验证表明：置换乘法(函数的复合)不符合交换律。

$$c)\quad p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix},\ p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix},\ p_1\circ p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=p_5$$

验证表明：置换乘法满足封闭性。

$1_A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$是恒等置换,单位元(关于乘法).

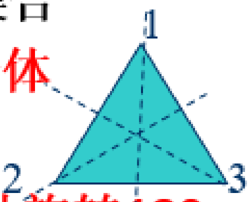
置换的几何意义

例如，A={1,2,3}, A 的全体置换(3!=6)可以表示为：

$$1_A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}=(1),\ p_1=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}=(23),\ p_2=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}=(12)$$

$$p_3=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}=(13),\ p_4=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}=(123),\ p_5=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}=(132)$$

正三角形如下图所示，求经旋转和翻转能使图形重合的所有变换，并将这些变换用顶点集合 $X=\{1,2,3\}$ 上的置换来表示。**S_3上的全体置换的几何意义. (1)就是恒等置换;**



(123), (132)分别是三个顶点以中心逆时针旋转120，240所对应的置换(2π/3, 2*2π/3);

(12), (13), (23)分别是以顶点3, 2, 1的角平分线翻转所对应的置换

补充知识----群

定义: 给定非空集合 **G** 及 **G** 上的二元运算"∘"，若运算满足以下四个条件：

(1) 封闭性，对任意的 $a,b \in G$，有 $a \circ b \in G$

(2) 结合律，对任意的 $a,b,c \in G$，有 $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$

(3) 存在幺元**(**单位元**)e** ，存在 $e \in G$，使得对任意 $a \in G$，有 $e \circ a = a \circ e = \mathrm{a}$

(4) G 中每个元素都存在逆元**,** 对任意 $a \in G$，都存在 $b \in G$，有 $a \circ b = b \circ a = e$，称 $< G, \circ >$ 是一个群。

相应地，b称为a的逆元,记$b = a^{-1}$

仿照关系**(**函数**)**的复合运算，"∘"又称为乘法，记 **ab.**

例 1　Z 是整数集合，+是普通加法，$<Z,+>$ 是一个群。

0 是幺元（单位元），-a 是 a 的逆元

例 2. 设 Q^* 为非零有理数构成的集合，$\times$ 为普通乘法，则 $<Q^*,\times>$ 是一个群。

1 是幺元（单位元），a^{-1} 是 a 的逆元

例 3. 设 G={1, -1, i, -i}, i^2=-1, ×是普通乘法，则<G, ×>是一个群。

1 是幺元（单位元），1, -1, i, -i 的逆元分别是 1, -1, -i, i

类似地，行列式不为零的方阵关于矩阵乘法构成群。

等等

定理：设 S_n 为 n 元集合 A 上所有置换构成的集合，则有：

(1) $\left|S_n\right| = n!$

(2) 对任意 $\sigma, \tau, a \in S_n$ ，有

$(\sigma\tau)a = \sigma(\tau a)$

(3) 对任意 $\sigma \in S_n$，有 $I\sigma = \sigma I = \sigma$；

(4) 对任意 $\sigma \in S_n$，有 $\sigma^{-1}\sigma = \sigma\sigma^{-1} = I$

证明：

$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 不妨设 $A = \{1, 2, \cdots, n\}$, 则

置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ ? & ? & \cdots & ? \end{pmatrix}$, 共有 $n!$ 种方式

结合律显然

I 是恒等置换, $(I\sigma)(x) = I(\sigma(x)) = \sigma(x)$

同理, $(\sigma I)(x) = \sigma(I(x)) = \sigma(x)$

置换是双射，故，逆元存在。

因此，关于乘法(置换复合运算)，S_n 构成群，n!.

定理　设 G 是一个群，e 为幺元

(1) $e^{-1}=e$

(2) G 中的幺元唯一，每个元的逆元唯一

(3) G 中的消去律成立，　即任意的 $a,b,c\in G$，若 $ab=ac$，则必有 $b=c$

1） ee=e

2） a, b 是单位元，则 a=ab=b

b, c 是 a 的逆元，e 是单位元，则

ba=ab=e, ca=ac=e, b=be=bac=ec=c

3） $b=eb=a^{-1}ab=a^{-1}ac=ec=c$

全体实数集合 R，关于加法，+，构成群。0 是单位元（关于加法），-a 是 a 的逆元（关于加法）。

全体非零实数集合 R^*，关于乘法，*，构成群。1 是单位元（关于乘法），a^{-1} 是 a 的逆元（关于乘法）。

于是有消去律成立

一元一次方程(消去律)解法的数学理论：

x+2=5,　　x=3

3x=2,　　x=2/3

回顾与复习

第一章：1. 集合与运算(概念，运算与运算性质，特征函数，简单的容斥原理)

2. 整数(公约数，最大公约数，辗转除法，同余运算与同余方程的求解)

第二章：1. 命题逻辑(逻辑运算与运算性质，真值计算)；　　2. 数学归纳法

第三章：1. 计数(乘法原理，加法原理，排列，组合，重集)

2. 鸽笼原理及其应用

3. 概率公理及其运算

4. 二阶线性常系数递推关系的求解

第四章：1. 乘积集合与关系(乘积集合，划分，关系，矩阵，图)

2. 关系的运算(合成运算的计算与性质，乘幂运算)

3. 等价关系(自反，对称，传递，相似，等价，闭包，以及关系的性质)

第五章：函数的概念(定义域，值域)，单射，满射，双射，函数与关系的比较，函数的运算，置换