第二十章 稳恒电流的磁场

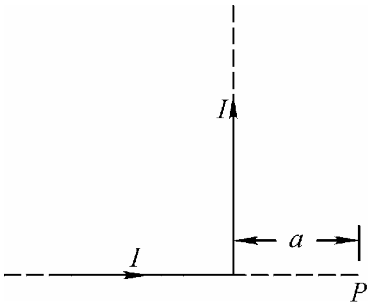


图 20.1

20－1 解：（1）水平段电流在P点不产生磁场。竖直段电流是——“半无限长”直电流，它在P点的磁场为$B=\dfrac{1}{2}\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}$，方向垂直纸面向里。

（2）当$I=20\ \mathrm{A}$，$a=0.05\ \mathrm{m}$时

$$B=\frac{1}{2}\times\frac{4\pi\times10^{-7}\times20}{2\pi\times0.05}$$

$$=4\times10^{-5}\ \mathrm{T}$$

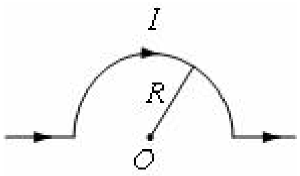


图 20.2

20－2 解：水平段电流在O点不产生磁场，圆心处的磁场是由半圆电流在O点产生的磁场，为：$B=\dfrac{\mu_0 I}{4R}$ 方向垂直纸面向里。

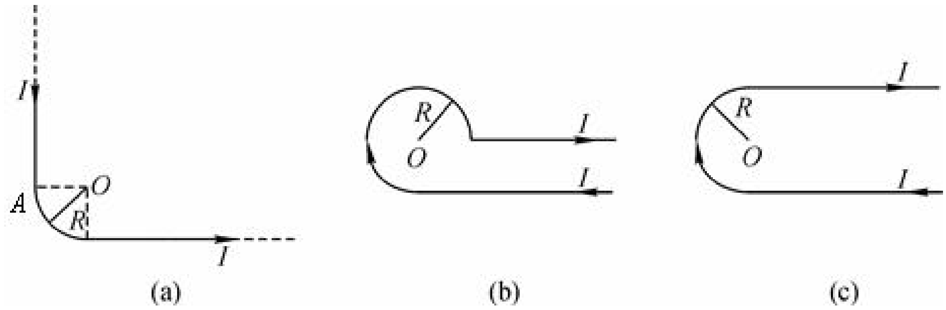


图 20.3

20－3 解：（a）O点的磁场相当于两“半无限长”直电流磁场和$-\dfrac{1}{4}$圆电流磁场迭加。

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}+\frac{\mu_0 I}{4\pi R}+\frac{\mu_0 I}{8R}$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\qquad \text{方向垂直纸面向外}$$

（b）O点的磁场相当于下面的“半无限长”直电流在O点产生的磁场和$\dfrac{3}{4}$圆电流在圆心产生的磁场的迭加

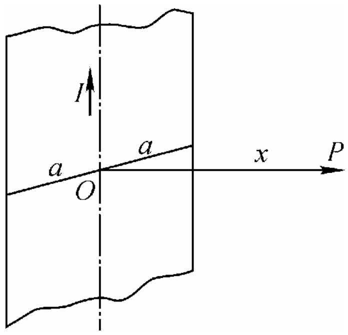
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{3\mu_0 I}{8R}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}\left(1 + \frac{3}{2}\pi\right)$$ 方向垂直纸面向里

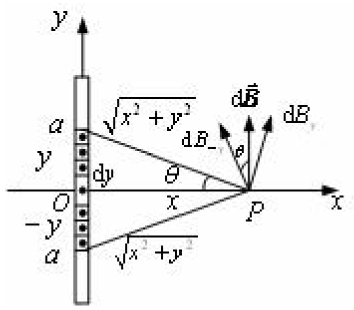
（c）O 点的磁场相当于两“半无限长”直电流在 O 点产生的磁场和 $\frac{1}{2}$ 圆电流在圆心 O 产生的磁场的迭加

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4\pi R} + \frac{\mu_0 I}{4R}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\pi + 2)$$ 方向垂直纸面向里



（a）



（b）俯视图

图 20.4

20－4 解：把薄板分成许多宽为 $\mathrm{d}y$ 的细长线，每根细长条的电流为 $\mathrm{d}I = \frac{I}{2a}\mathrm{d}y$，视做线电流，无限长载流薄板可看成由无限多的无限长载流直导线所构成。

在 y 处取一窄条，它在 P 点产生的磁感应强度大小为

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2\pi\sqrt{x^2 + y^2}}$$

在 B 点产生的总场强为

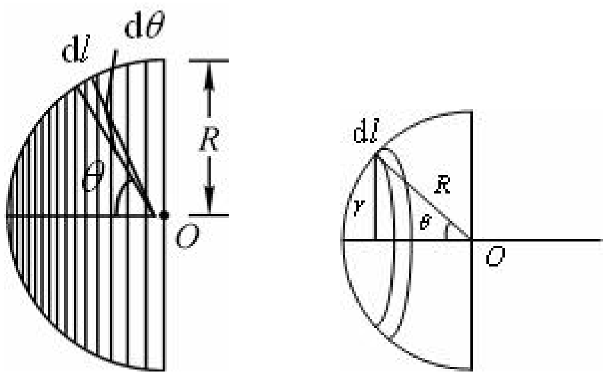
$$B = \int_{-a}^{a} \mathrm{d}B\cos\theta$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{\mu_0 I \mathrm{d}y}{2a \cdot 2\pi\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$= \frac{\mu_0 I x}{4a\pi}\int_{-a}^{a} \frac{\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$$

$$= \frac{\mu_0 I x}{4a\pi}\frac{1}{x}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{y}{x}\bigg|_{-a}^{a}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2a\pi}\mathrm{tg}^{-1}\frac{a}{x}$$



（a）　　　　(b)

图 20.5

20－5 解：单位长度上的电流为 $\dfrac{NI}{\frac{\pi}{2}R}$，每匝线圈可看作封闭圆电流。

单位长度指沿以球半径的半圆弧方向取线元 $\mathrm{d}l$，则电流元 $\mathrm{d}I=\dfrac{NI}{\frac{\pi}{2}R}\mathrm{d}l$，$\mathrm{d}l=R\mathrm{d}\theta$

$$\therefore\ \mathrm{d}I=\frac{NIR}{\frac{\pi}{2}R}\mathrm{d}\theta=\frac{2NI}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

由电流元可视为环形电流，对 O 点磁场为

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0\mathrm{d}Ir^2}{2R^3}=\frac{\mu_0\dfrac{2NI}{\pi}\mathrm{d}\theta R^2\sin^2\theta}{2R^3}$$

$$=\frac{\mu_0 NI}{\pi R}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$B=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 NI}{\pi R}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta=\frac{\mu_0 NI}{4R}$$

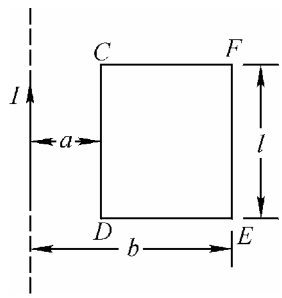


图 20.6

20－6 解：$\phi_m=\iint_s \vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$

设矩形 $CDEF$ 的方向为垂直纸面向里

$$\therefore\ \phi_m=\iint_s\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot l\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\int_a^b\frac{\mathrm{d}r}{r}$$

$$=\frac{\mu_0 Il}{2\pi}\ln\frac{b}{a}$$

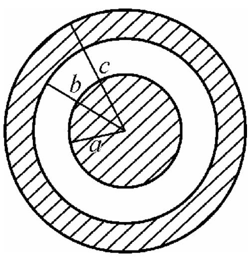


图 20.7

20－7 解：由于通电流的导体为同心的圆柱体或圆筒，故其磁场分布必然相对于 O 轴对称，即在与电缆同轴的圆柱面上各点的 $\vec{B}$ 大小都相等，方向与电流 I 成右手螺旋方向。

取轴上一点 O 为圆心，半径为 r 的圆周为积分路径 L，使其绕向与电流成右手螺旋关系。由安培环路定理 $\oint\vec{B}\cdot\mathrm{d}\vec{l}=\mu_0 I$ 可知，当

（1）$0<r<a$ 时 $I'=\frac{I}{\pi a^2}\pi r^2=\frac{r^2}{a^2}I$

$\therefore$ $B_1\cdot 2\pi r=\mu_0\frac{r^2}{a^2}I$ $B_1=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi a^2}$

（2）$a<r<b$ 时 $I'=I$

$B_2\cdot 2\pi r=\mu_0 I$ $B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$

（3）$b<r<c$ 时 $I'=I-\frac{\left(r^2-b^2\right)}{\left(c^2-b^2\right)}I$

$$B_3\cdot 2\pi r=\mu_0 I\left(1-\frac{r^2-b^2}{c^2-b^2}\right)$$

$$B_3=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{c^2-r^2}{c^2-b^2}$$

（4） $c<r$ 时 $I'=I-I=0$

$$B_4\cdot 2\pi r=0$$

$$B_4=0$$

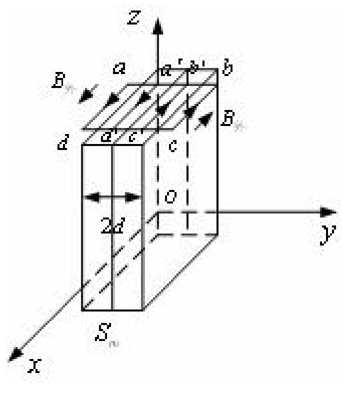


图 20.8

20－8 解：此无限长导体板可视为无限多个薄的无限大平板的叠加。所以通电流时它的磁场具有如下特点：此板的厚度中心平分面 S_m 为对称面，其两侧的 $\vec{B}$ 的方向均平行于板面，与 $\vec{J}$ 垂直并成右手螺旋关系。$\vec{B}$ 的大小在与 S_m 等距离的地方应该相等。为求板外磁场 $\vec{B}_{外}$，可以选择如图所示矩形回路 $abcda$，bc 与 da 均与板面平行，长度为 l，且与 S_m 等距。根据安培环路定理有

$$\int_L \vec{B}_{外}\cdot d\vec{l}=2B_{外}l=\mu_0 2dlJ$$

$\therefore$ $B_{外}=\mu_0 dJ$

此结果表明 $B_{外}$ 与到板面的距离无关，说明板外为匀强磁场。为求板内磁场 $\vec{B}_{内}$，可以选择矩形回路 $a'b'c'd'a'$，$b'c'$ 与 $a'd'$ 与 S_m 面平行，长度为 l，且与 S_m 的距离为 y。根据

安培环路定理可得

$$\int_L \vec{B}_{内} \cdot d\vec{l} = 2B_{内} l = \mu_0 \times 2ylJ$$

$\therefore \quad B_{内} = \mu_0 yJ$

此式说明板内为非均匀磁场，$\vec{B}_{内}$ 的大小与场点到板厚的平分面 S_m 的距离成正比。

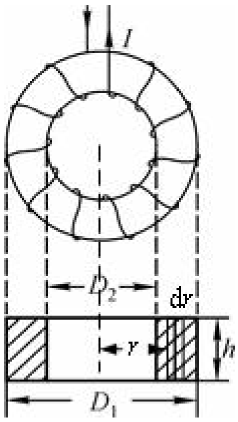


图 20.9

20－9 解：由于对称性，磁场只集中在螺旋环内，且磁感应线为同心圆。在螺旋环内，做以环心为中心，以 r 为半径的圆形安培环路 $\left(\frac{D_2}{2} < r < \frac{D_1}{2}\right)$，从电流分布可见，在环路各点 B 的大小相等。方向沿环路切向。由安培环路定理可知

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi rB = \mu_0 NI$$

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

取面元 $\quad dS = h dr$

通过该面元的磁通量为

$$d\phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = Bh dr$$

穿过一匝线圈的磁场通量为

$$\phi_1 = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\frac{D_2}{2}}^{\frac{D_1}{2}} \frac{\mu_0 NIh}{2\pi r} dr$$

$$= \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \ln \frac{D_1}{D_2}$$

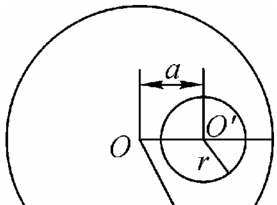


图 20.10

20－10 解：电流分布可以看成是电流密度均匀的，半径为 R 的实心长圆柱和填充挖空区域的通有反向的电流密度，且与圆柱其他部分相同的实心圆柱组成的整体。根据叠加原理，所求磁场即这两个通电流圆柱体的磁场的叠加。

可用安培环路定理求出半径为 R 的实心长圆柱电流在 O' 处的磁感应强度为 $B_1 = \dfrac{\mu_0 Ia}{2\pi\left(R^2 - r^2\right)}$，其方向应与圆柱轴线以及 OO' 垂直，与电流 I 成右手螺旋关系。由电流的轴对称分布可知，反向电流在其轴线上的磁感应强度为 $\vec{B}_2 = 0$

由磁场叠加原理可得在空心圆柱轴线上的磁感应强度为 $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{B}_1$

而 $B_1=\dfrac{\mu_0 Ia}{2\pi\left(R^2-r^2\right)}=\dfrac{4\pi\times10^{-7}\times5\times2.5}{2\pi\left(5^2-1.5^2\right)}$

$=1.10\times10^{-7}$ T

$\vec{B}$ 方向与 $\vec{B}_1$ 同。

20－11 解：$T=\dfrac{2\pi m}{qB}=\dfrac{2\times3.14\times9.11\times10^{-31}}{1.6\times10^{-19}\times0.10}$

$=3.6\times10^{-10}$ S

正电子的速率为

$$v=\sqrt{\frac{2E_k}{m}}=\sqrt{\frac{2\times2\times10^3\times1.6\times10^{-19}}{9.11\times10^{-31}}}=2.6\times10^7\ \mathrm{m/s}$$

螺距为 $h=v\cos89^0 T=2.6\times10^7\times\cos89^0\times3.6\times10^{-10}$

$=1.6\times10^{-4}$ m

半径为 $r=\dfrac{mv\sin89^0}{lB}=\dfrac{9.11\times10^{-31}\times2.6\times10^7\times\sin89^0}{1.6\times10^{-19}\times0.1}$

$=1.5\times10^{-3}$ m

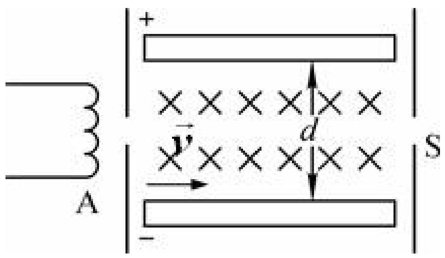


图 20.12

20－12 解：电子在电场 $\vec{E}$ 中的受力为 $-e\vec{E}$ ，方向竖直向上。电子在磁场 $\vec{B}$ 中的受力为 $-e\vec{v}\times\vec{B}$，方向竖直向下。

只有满足 $-e\vec{E}=-evB$ 的电子可以穿过 S 缝，即：

$$v=\frac{E}{B}=\frac{Ud}{B}$$

$$=\frac{300\times0.1}{3\times10^{-4}}$$

$$=10^5\ \left(\mathrm{m/s}\right)$$

带电粒子的带点符号及质量大小不影响选择器对它们速度的选择。

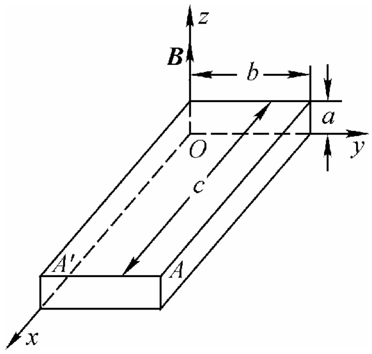


图 20.13

20－13 解：（1）由电流方向，磁场方向和 A 侧电势高于 A' 侧电势可知此半导体是负电荷导电，属于 N 型。

（2）
$$n=\frac{IB}{U_{AA'}qa}$$

$$=\frac{1.0\times10^{-3}\times0.3}{6.55\times10^{-3}\times1.6\times10^{-19}\times10^{-3}}$$

$$=2.86\times10^{20}\ 个/\mathrm{m}^3$$

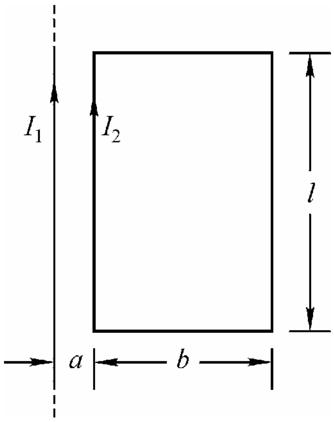


图 20.14

20－14 解：线圈左边受力为

$$F_1=B_1I_2l=\frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi a}l \qquad 方向向左$$

线圈右边受的力为

$$F_2=B_2I_2l=\frac{\mu_0I_1I_2}{2\pi\left(a+b\right)}l \qquad 方向向右$$

线圈上下两边受的磁力大小相等，方向相反。因此线圈受的磁力的合力为

$$F=F_1-F_2=\frac{\mu_0I_1I_2lb}{2\pi a\left(a+b\right)}$$

$$=\frac{4\pi\times10^{-7}\times30\times20\times0.12\times0.08}{2\pi\times0.01\times\left(0.08+0.01\right)}$$

$$=1.28\times10^{-3}\ \mathrm{N}$$

方向向左，即指向长直电流。

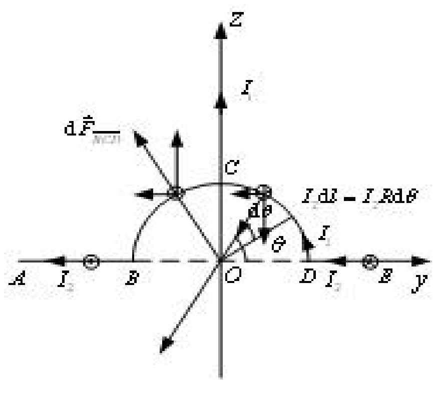


图 20.15

20－15 解：（1）无限长直导线在距其 r 处产生的磁感应强度的大小为 $B_1=\dfrac{\mu_0I_1}{2\pi r}$，方向与 I_1 成右手螺旋。AB 段受到 I_1 的作用为

$$\vec{F}_{AB}=\int I_2\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}=\int_R^{R+a}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi y}I_2\mathrm{d}y\vec{e}_z=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{R+a}{a}\vec{e}_z$$

DE 段受到 I_1 的作用为

$$\vec{F}_{DE}=\int I_2\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{B}_1=-\int_R^{R+a}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi y}I_2\mathrm{d}y\vec{e}_z=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{R+a}{a}\vec{e}_z$$

BCD 段上各电流元 $I_2\mathrm{d}l$ 受到 I_1 的作用力。在 z 轴上的分量相互抵消。只有 y 轴上的分量

$I_2B_1R\mathrm{d}\theta\cos\theta$ 起作用

$$\therefore\quad \vec{F}_{\overline{BCD}}=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}B_1I_2R\cos\theta\mathrm{d}\theta\vec{e}_y$$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\cos\theta}I_2R\cos\theta\mathrm{d}\theta\vec{e}_y$$

$$=-\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2}\vec{e}_y$$

（2）半圆导线在球心 O 点处产生的磁场大小为 $B_2=\dfrac{\mu_0 I_2}{4R}$，方向垂直纸面向上

$$\therefore\quad \mathrm{d}\vec{F}=B_2I_1\mathrm{d}l\,\vec{e}_y=\frac{\mu_0 I_1 I_2\mathrm{d}l}{4R}\vec{e}_y$$

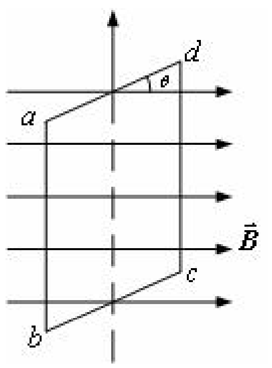


图 20.16

20－16 解：线圈在匀强磁场中所受的力偶矩为：

$T=IBS\cos\theta$

$\theta=0$ 时

$T_m=IBS$

$=10\times15\times1.0\times10^{-3}\ \mathrm{T}\times0.25\times0.1$

$=3.75\times10^{-3}\ \mathrm{N\cdot m}$