北京师范大学 2013～2014 学年第一学期期末考试试卷

课程名称： 微积分 I　　　　**任课教师姓名：** 张博宇

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ■　　开卷 □　　其他 □

院（系）：________________　专　业：________________　年级：________

姓　名：____________　　学　号：________________

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	总分
得分							

阅卷教师（签字）：______________

装

订

线

1 选择题。（单选题，每题 3 分，共 15 分）

(1) $y=\log_{(x-1)}(16-x^2)$ 的定义域为（ **A** ）。

(A) $(1,2)\cup(2,4)$　(B) $(1,4)$　(C) $(1,4]$　(D) $(1,2)\cup(2,4]$

(2) 下列函数中哪个是周期函数（ **选 C 或 D 都对** ）。

(A) $y=\cos(\sqrt{x})$　(B) 符号函数　(C) $y=e^{\sin(\pi x)}$(周期 2) (D) $y=x-[x]$(周期 1)

(3) 下列函数中哪个既不是奇函数又不是偶函数（**B**）。

(A) $y=\lg(x^2+1)$　(B) $y=\sqrt{x^3+x}$ (x<0 无定义) (C) $y=x\cos x+\sin x$　(D) $y=\dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

(4)下列哪个函数是在区间[-1,1]内黎曼可积的（**B**）。

(A) $y=1/x$　(B) $y=\tan x$（连续有界）　(C) $y=\ln|x|$　(D) 狄利克雷函数

(5)下列哪个命题是正确的（**C**）。

(A) 连续函数存在反函数（需单调）(B) 连续函数存在导函数（连续比可导弱）

(C) 连续函数存在原函数　　　　(D) 连续函数存在极大极小值（需闭区间）

2 求下列极限。（计算题，每题 5 分，共 15 分）

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$ （P75, 1.55(7)）

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}=\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\left(-\frac{1}{2x}\right)(-2)}=e^{-2}$$

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$

思路：∞-∞型极限，转化成 0/0 型利用洛必达法则计算。

注意：不能对 $\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ 单独进行等价无穷小替换。

$$\lim_{x\to\infty}\left(x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}x^2\left(\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\frac{1}{x^2}}{-2\frac{1}{x^3}}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2+x}}{\frac{1}{x^3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{x^4}{x^2(x^2+x)}\right)=\frac{1}{2}$$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}$

思路：写成 $e^{\frac{1}{x^3}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)}$，利用洛必达法则求 $\dfrac{1}{x^3}\ln\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)$ 的极限。

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{1}{x^3}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\ln\left(\frac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\ln\left(1+\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\frac{\tan x-\sin x}{1+\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2\cos^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{3\cos^2 x\sin x}{6x}=\frac{1}{2},$$

因此 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\tan x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{x^3}}=e^{\frac{1}{2}}$ 。

3 求下列导数。(计算题，每题 5 分，共 15 分)

(1) $y=\log_3\cos\left(10+3x^2\right)$

$$y'=\frac{1}{\cos\left(10+3x^2\right)\ln 3}\left(\cos\left(10+3x^2\right)\right)'=\frac{-6x\sin\left(10+3x^2\right)}{\cos\left(10+3x^2\right)\ln 3}=-\frac{6x}{\ln 3}\tan\left(10+3x^2\right)$$

(2) $y=\arctan\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}$ (P130,2.24(20))

$$y'=\arctan\sqrt{x^2-1}-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}==\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{1+\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}+\frac{1}{2}\frac{2x\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(x^2-1)^{-1/2}2x}{x^2}-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}+\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}=\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{3/2}}$$

(3) $y=\sqrt[x]{x}$ (P130,2.25(1))

$$y'=\left(e^{\frac{1}{x}\ln x}\right)'=e^{\frac{1}{x}\ln x}\left(\frac{1}{x}\ln x\right)'=\sqrt[x]{x}\left(-\frac{\ln x}{x^2}+\frac{1}{x^2}\right)$$

4 求下列不定积分。(计算题，每题 5 分，共 20 分)

(1) $\int\frac{dx}{2+\cos^2 x}$

思路：可使用 t=tan$x$, t=tan(x/2)换元。

$$\int\frac{dx}{2+\cos^2 x}=\int\frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}=\int\frac{1}{\cos^2 x}\frac{dx}{2\tan^2 x+3}\overset{t=\tan x}{=}\int\frac{dx}{2t^2+3}$$

$$=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{\left(\sqrt{2}t/\sqrt{3}\right)^2+1}=\frac{1}{\sqrt{6}}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}t}{\sqrt{3}}\right)+C$$

(2) $\int\frac{2x^3+x}{x^4+2x^2+2}dx$ (ppt 例题)

$$\int\frac{2x^3+x}{x^4+2x^2+2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{4x^3+4x}{x^4+2x^2+2}dx-\int\frac{x}{x^4+2x^2+2}dx\overset{t=x^2}{=}\frac{1}{2}\ln\left|x^4+2x^2+2\right|-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t^2+2t+2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+2x^2+2\right|-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{(t+1)^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+2x^2+2\right|-\frac{1}{2}\arctan(t+1)+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|x^4+2x^2+2\right|-\frac{1}{2}\arctan(x^2+1)+C$$

(3) $\int \frac{dx}{1+2\sqrt{x-x^2}}$ （P164,2.117）

思路：此题解法较多，三角代换，倒代换，整体替换均可。

$$\int \frac{dx}{1+2\sqrt{x-x^2}} = \int \frac{dx}{1+\sqrt{1-(2x-1)^2}} \overset{\sin t=2x-1}{=} \int \frac{\frac{1}{2}\cos t dt}{1+\cos t} = \int \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+\cos t} dt \overset{u=\tan\frac{t}{2}}{=} \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2du}{1+u^2}$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(2x-1) - \int \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\arcsin(2x-1) - \frac{u}{2} + C = \frac{1}{2}\arcsin(2x-1) - \frac{1}{2}\tan\frac{t}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2}\arcsin(2x-1) - \frac{1}{2}\tan\frac{\arcsin(2x-1)}{2} + C$$

(4) $\int x\arctan x \ln(1+x^2)dx$

思路：先计算除 $\arctan x$ 以外部分的不定积分，然后使用分部积分。

$$\int x\ln(1+x^2)dx \overset{t=x^2+1}{=} \frac{1}{2}\int \ln t dt = \frac{1}{2}t\ln t - \frac{1}{2}\int td\left(\ln t\right) = \frac{1}{2}t\ln(t) - \frac{1}{2}\int dt$$

$$= \frac{1}{2}t\ln(t) - \frac{1}{2}t + C = \frac{x^2+1}{2}(\ln(x^2+1)-1) + C$$

$$\int x\arctan x\ln(1+x^2)dx = \int \arctan x d\left(\frac{x^2+1}{2}(\ln(x^2+1)-1)\right)$$

$$= \arctan x\left(\frac{x^2+1}{2}(\ln(x^2+1)-1)\right) - \int\left(\frac{x^2+1}{2}(\ln(x^2+1)-1)\right)\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$= \arctan x\left(\frac{x^2+1}{2}(\ln(x^2+1)-1)\right) - \frac{1}{2}\int\left(\ln(x^2+1)-1\right)dx$$

$$= \arctan x\left(\frac{x^2+1}{2}(\ln(x^2+1)-1)\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int \ln(x^2+1)dx$$

$$= \arctan x\left(\frac{x^2+1}{2}(\ln(x^2+1)-1)\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\int xd\left(\ln(x^2+1)\right)$$

$$= \arctan x\left(\frac{x^2+1}{2}(\ln(x^2+1)-1)\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\int \frac{2x^2}{x^2+1}dx$$

$$= \arctan x\left(\frac{x^2+1}{2}(\ln(x^2+1)-1)\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) + \int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \arctan x\left(\frac{x^2+1}{2}(\ln(x^2+1)-1)\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}x\ln(x^2+1) + x - \arctan x + C$$

5 求下列定积分。（计算题，每题 5 分，共 15 分）

(1) $\int_1^e \ln^3 x dx$ (P217, 2.292)

$$\int_1^e \ln^3 x dx = x\ln^3 x\Big|_1^e - \int_1^e x d\ln^3 x = e - 3\int_1^e \ln^2 x dx = e - 3x\ln^2 x\Big|_1^e + 3\int_1^e x d\ln^2 x$$

$$= e - 3e + 3\int_1^e x d\ln^2 x = -2e + 6\int_1^e \ln x dx = -2e + 6x\ln x\Big|_1^e - 6\int_1^e x d\ln x$$

$$= -2e + 6e - 6\int_1^e dx = 4e - 6x\Big|_1^e = -2e + 6$$

(2) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{1-e^{-2x}} dx \overset{t=e^{-2x}}{\underset{x=-\frac{1}{2}\ln t}{=}} \int_1^{\frac{1}{4}} \sqrt{1-t}\, d(-\frac{1}{2}\ln t) = \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{\sqrt{1-t}}{2t} dt$$

$$\overset{t=\sin^2 u}{=} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{2\sin^2 u} d(\sin^2 u) = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 u}{2\sin u} du = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sin u} - \sin u\right) du$$

$$= \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} + \cos u\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \ln\left(2+\sqrt{3}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}}$ (P236, 例 10)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\tan\theta}} \overset{t=\sqrt{\tan\theta}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{d(\arctan t^2)}{t} = 2\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} + \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4}$$

$$\overset{t=\frac{1}{x}}{=} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} + \int_{+\infty}^0 \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{1}{x^4}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^4} + \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}} dx = \int_0^{+\infty} \frac{d\left(x-\frac{1}{x}\right)}{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2+2} \overset{y=x-\frac{1}{x}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{y}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

6 证明下列命题。（证明题，每题 10 分，共 20 分）

（1）设 $n\ge 2$，求证：$\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}\le\frac{\pi}{6}$

思路：$\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}$ 在区间[0,1/2]关于 n 单调减，分别比较 $\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$（积分的最大值）和 $\frac{\pi}{6}$ 及 $\int_0^{\frac{1}{2}}dx$（积分的最小值）和 1/2。

证明：

因为 $0\le x\le\frac{1}{2}$，所以对 $n\ge 2$，有 $0\le x^n\le x^2<1$，因此 $1\le\frac{1}{\sqrt{1-x^n}}\le\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$。由定积分不等式，有 $\int_0^{\frac{1}{2}}dx\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$。

注意到 $\int_0^{\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{2}$，$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\frac{\pi}{6}$，因此 $\frac{1}{2}\le\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^n}}\le\frac{\pi}{6}$。

(2) 设 f 在[a, b]连续可微，求证：$\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(tx)dx=0$ (P218 2.303)

思路：分部积分。

注意：$f(x)$和 $\cos(tx)$可能变号，不能使用积分中值定理。

证明：

因为 f 在[a, b]可微，由分部积分，

$$\int_a^b f(x)\cos(tx)dx=\frac{1}{t}\int_a^b f(x)d\sin(tx)=\frac{1}{t}f(x)\sin(tx)\Big|_a^b-\frac{1}{t}\int_a^b\sin(tx)f'(x)dx。$$

因为 f 在[a, b]连续，因此 f 在[a, b]有界，即存在 $M>0$，使得 $f(a)$和 $f(b)$均小于 M。类似的，因为 f 在[a, b]可微，因此 f'在[a, b]有界，即存在 $N>0$，使得对[a, b]内的 x 有 $|f'(x)|<N$。

综上所述，对 $t>0$ 有

$$\left|\int_a^b f(x)\cos(tx)dx\right|=\left|\frac{1}{t}f(x)\sin(tx)\Big|_a^b-\frac{1}{t}\int_a^b\sin(tx)f'(x)dx\right|\le\frac{1}{t}2M+\frac{1}{t}\int_a^b|\sin(tx)f'(x)|dx$$

$$\le\frac{1}{t}\left(2M+(b-a)N\right)$$

因此 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left|\int_a^b f(x)\cos(tx)dx\right|\le\left(2M+(b-a)N\right)\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{1}{t}=0$，即

$$\lim_{t\to+\infty}\int_a^b f(x)\cos(tx)dx=0。$$