第三章 计数 Counting

3.1 排列 Permutations

定理 1 加法原理

假设完成任务有 T_1,T_2 两种方式，T_1 有 n_1 种不同的方法，T_2 有 n_2 种不同的方法，则完成 T_1 或 T_2 任务共有 n_1+n_2 种方法。

定理 2 加法原理的推广

假设完成任务有 T_1，T_2，……，T_k，k 种方式，T_1 有 n_1 种不同的方法，T_2 有 n_2 种不同的方法，…，T_k 有 n_k 种不同的方法，则完成 T_1 或 T_2 或…或 T_k 任务共有 $n_1+n_2+\cdots+n_k$ 种方法。

例如，某学生从 2 门数学类课程和 4 门计算机类课程中任意选择一门课程学习，其选择方法共有 2+4=6 种。
分类考虑

定理 3　乘法原理

假设依次实行 T_1, T_2 两种任务，T_1 有 n_1 种不同的方法，T_2 有 n_2 种不同的方法，则完成 T_1 与 T_2 任务共有 $n_1 \times n_2$ 种方法。

定理 4　乘法原理推广

假设依次实行任务 T_1，T_2，……，T_k，T_1 有 n_1 种不同的方法，T_2 有 n_2 种不同的方法，…，T_k 有 n_k 种不同的方法，则完成任务 T_1 与 T_2 与…与 T_k 共有 $n_1 \times n_2 \times \cdots \times n_k$ 种方法。

例1　a）用 1，2，3，4，5 可以组成多少个不同的三位数？

b）用 0，1，2，3，4，5 可以组成多少个不同的三位数？

解：

a）第一位(百位)有 5 种取法，第二位(十位)和第三位(个位) 分别也有 5 种取法，于是共组成 $5^3=125$ 个不同的三位数。

b）第一位(百位)有 5 种取法，第二位(十位)和第三位(个位）分别有 6 种取法，于是共组成 $5\times6^2=180$ 个不同的三位数。

例 2　n 个元素的集合 A 共有多少个子集？

解　由第一章的特征函数知，集合 A 可以用 n 个 1 的向量来表示, 于是 A 的子集可以用长度为 n 的 0，1 序列来表示。每一位可以取 0 或 1(两种取法)来表示元素 xi 的属于或不属于，因此，共有 $2\times2\times2\times\cdots\times2=2^n$ 种不同的取法，分别得到长度为 n 的 0、1 串，其每一个长度为 n 的 0、1 串分别对应着一个不同的子集，于是有 2^n 个不同的子集。

或者，我们有

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$$

定理 5　从 n 个元素的集合 A 中可重复地取出 r 个元素排成一列，共有 n^r 种不同的取法。

根据乘法原理，每个元素有 n 种取法，因此，r 个元素共有 $n*n*n*..*n=n^r$ 取法。

定理 6　从 n 个元素的集合 A 中不重复地取出 r 个元素排成一列，共有 n(n-1)⋯(n-r+1)种不同的取法。

根据乘法原理，第 1,2,..,r 个元素分别有 n,n-1,n-2,..,n-r+1 种取法，因此，r 个元素共有 n(n-1)⋯(n-r+1)取法。

记从 n 个元素中选取 r 个元素的排列数为 P_n^r，即

$$P_n^r = n(n-1)\cdots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!} = P(n,\ r)$$

定义新运算：n!=1*2*⋯*n

约定：P(n, 0)=1, P(n, r)=0 if n <r.

特别地，若 r=n，则称其为全排列。即，从 n 个元素的集合 A 中不重复地取出 n 个元素排成一列，共有 n!种不同的取法。记 n 个元素的全排列数为 P_n 种，$P_n = 1*2*3*\cdots*n = n!$

接下来，我们来看一个实验：

英文单词 can 和 all 中所有字符组成的不同的全排列数：

can 可以组成的排列方式，can， cna， acn， anc， nca， nac，共 3！=6 种；

all 可以组成的排列方式，all, lal, lla, 只有 3 种；

因为 all 中出现了重复元素，这时，如何计算它（具有重复元素集合）的排列数？

下面，我们考虑一个特殊的集合。

重集　有重复元素的集合，即，元素可以多次出现的集合。其一般形式为：

$S=\{n_1*a_1,n_2*a_2,\cdots,n_k*a_k\}$，其中，$a_1,a_2,\cdots,a_k$ 为 k 个不同的元素，$n_1,n_2,\cdots,n_k$ 分别为元素 $a_1,a_2,\cdots,a_k$

在集合 S 中出现的次数，即，元素 $a_i, i=1,2,\cdots,k$

的重复度。

例如，{a, a, a, b, c}，{a, b, b, c, c, c}，
{a, a, a, b, b, c, c, c, c} 可以分别记作 {3a, b, c}，
{a, 2b, 3c}， { 3a, 2b, 4c}

从重集 S 中选取 r 个元素，称为 S 的一个 r 排列。

如果重集 S 中每个元素的重复度足够多，记为
$S=\{\infty * a_1, \infty * a_2, \cdots, \infty * a_k\}$，则 S 的 r 排列数是 k^r
因为每个元素有 k 种选择，故 r 个元素有 k^r

特别，如果重集 $S=\{n_1 * a_1, n_2 * a_2, \cdots, n_k * a_k\}$，并且对一切 $i=1,2,\cdots,k$, 有 $n_i \geq r$，则 S 的 r 排列数也是 k^r

当 r=n=$\sum_{i=1}^{k} n_i$ 时，称为重集 S 的全排列。

例如，{3a, b}的全排列，本来有 4!的排列数，但现在有：3 个 a 是相同的，因此，实际上，只有四种情况：即，aaab, aaba, abaa, baaa.
即，排列数=4！/3！=4。

{3a, b, c}的全排列，　aaabc, abaca 是 S 的全排列。它可以看成 5 个元素的全排列，共 5!的排列数。但是，其中 3 个 a 是相同的，它们的排列与总排列无关，每个排列重复出现 3!次。因此，去除重复后，其不同的排列数为：$\frac{5!}{3!}$=20 个。

{a, 2b, 3c}的全排列，　看成 6 个元素的全排列共 6!个。其中 2 个 b 与 3 个 c 不同次序无关，每个排列重复出现 2!×3!次。去除重复后，其不同的排列数为：$\frac{6!}{2!3!}$=60 个。

{3a, 2b, 4c}的全排列，共有$\frac{9!}{3!2!4!}$=1260 个

一般来说，我们有：
定理 7：　n 个元素的重集 $\{k_1a_1, k_2a_2, \cdots\cdots, k_la_l\}$，$n=\sum_{i=1}^{l}k_i$ 的不同的全排列数为$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_l!}$。

注：

$$N = C_n^{k_1} \bullet C_{n-k_1}^{k_2} \bullet\bullet\bullet C_{n-k_1-k_2-\cdots-k_{l-1}}^{k_l}$$

例　英文单词 BANANA 中所有字符组成的不同的全排列有多少个？

BANANA 构成重复集合{B, 3A, 2N}，因此其全排列数为：

$\frac{6!}{3!2!1!}$=60 个

3.2 组合 Combinations

定理 1　n 个元素中一次取出 r 个不同元素的组合，共有 $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r!}$ 种不同取法。相当于 r 个元素构成的子集

$$C_n^r = \frac{P_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

C(n, r)=n!/(r!*(n-r)!)

约定：C(n, 0)=1, C(n, r)=0 if n <r.

例 1：52 张扑克牌中一次取 5 张，有多少不同的取法？

$$C_{52}^{5}=\frac{52\times51\times50\times49\times48}{5\times4\times3\times2\times1}=2,598,960$$

一些组合恒等式：

$$C_n^r = C_n^{n-r}$$

$$C_n^r = C_{n-1}^r + C_{n-1}^{r-1}$$

$$C_n^r = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-2}^{r-1} + \cdots + C_{r-1}^{r-1}$$

$$C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k C_n^k = n 2^{n-1} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} C_n^k = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$$

设重集$S=\{n_1*a_1,n_2*a_2,\cdots,n_k*a_k\}$，S 中含有 r 个元素的子集称为 S 的 r 组合。

例如，S={2a, b, 3c}，则{a, a}, {a, b}, {b, c}, {c, c}是 S 的 2 组合。

显然，$S=\{n_1*a_1,n_2*a_2,\cdots,n_k*a_k\}$，并且满足 n=$\sum_{i=1}^{k}n_i$，则 S 的 n 组合只有一个，就是 S 本身；同理，S 的 1 组合恰好有 k 个。

结论：设重集$S=\{\infty*a_1,\infty*a_2,\cdots,\infty*a_k\}$，则 S 的 r 组合数为$C_{k+r-1}^{r}$。

证明：分两步来进行证明。
首先，r 组合数与不定方程的非负整数解的个数相同。

因为，S 的任何一个 r 组合的形式为$\{x_1*a_1,x_2*a_2,\cdots,x_k*a_k\}$，其中，$x_1,x_2,\cdots,x_k$是非负整数，且满足方程$x_1+x_2\cdots+x_k=r$；

反之，针对上述不定方程的一个非负整数解 $x_1, x_2, \cdots, x_k$，$\{x_1 * a_1, x_2 * a_2, \cdots, x_k * a_k\}$可以构成集合 S 的一个 r 组合。因此，重集 S 的 r 组合数就等于上述不定方程的非负整数解的个数。

其次，我们来证明上述不定方程的非负整数解的个数等于重集$T = \{(k-1)*0, r*1\}$的排列数。

因为，对于 T 的一个排列，其实就是 0 和 1 组成的一个字符串，换言之，不同的排列就是 0 和 1 的不同交叉，即，将 0 插入到 1 中的不同插法，或者说，将 r 个 1 分散插入到 k-1 个 0 中去，即，k-1 个 0 将直线分成 k 组，r 个 1 分别插到这 k 组中，其情形如下：

$$\underbrace{1\cdots1}_{x_1}0\underbrace{1\cdots1}_{x_2}0\cdots\cdots0\underbrace{1\cdots1}_{x_k}$$

计算每一段 1 的个数，因此，不妨从左起，第 1 组 1 的个数记为x_1，第 2 组 1 的个数记为x_2，依次类推，第 k 组的个数记为x_k，

显然，$x_1, x_2, \cdots, x_k$均为非负整数，且满足

$x_1 + x_2 \cdots + x_k = r$，

因此，一个排列就是不定方程的一个解。

反之，给定不定方程$x_1+x_2\cdots+x_k=r$的一个非负整数解$x_1,x_2,\cdots,x_k$，仿照刚才的插入法，

$$\underbrace{1\cdots1}_{x_1}0\underbrace{1\cdots1}_{x_2}0\cdots\cdots0\underbrace{1\cdots1}_{x_k}$$

即，通过插入 k-1 个 0，我们就可以构造出一个字符串：

显然，这个字符串就是重集 T 的一个排列。

因此，上述不定方程的一个解就是重集 T 的一个排列。

所以，不定方程的解的个数与重集 T 的排列数相同。

而重集$T=\{(k-1)*0,r*1\}$的排列数为

$$N=\frac{(k-1+r)!}{(k-1)!r!}=C_{k+r-1}^{r}$$

定理 2　n 个元素的集合$\{a_1, a_2,\cdots, a_n\}$中可重复地取 k 个元素的组合数为C_{n+k-1}^{k}。

可重复地取，意味着 n 个元素的重复度很大，因此，对应上述公式，就可得到。

例2　奖品的发放：奖品可以从排名前 10 位的 VCD 中重复地任选三张，问有多少种不同的选法？

$$C_{10+3-1}^{3} = C_{12}^{3} = \frac{12\times11\times10}{3\times2\times1} = 220$$

定理 3　n 个元素的集合{a_1, a_2, …, a_n}中可重复地取 k 个元素，要求：每个元素至少取一个，其组合数为C_{k-1}^{n-1}。

证明：每个元素至少取一个，相当于从 n 个元素的集合{a_1, a_2, …, a_n}中可重复地取 k-n 个元素，其组合数为：

$$C_{n+(k-n)-1}^{k-n} = C_{k-1}^{k-n} = C_{k-1}^{n-1}$$

或者，使用不定方程来表示

$x_1+x_2\cdots+x_n=k$，要求 $x_1\ge 1, x_2\ge 1, \cdots, x_n\ge 1$，

变换，令 $y_i=x_i-1$，则有 $y_1+y_2\cdots+y_n=k-n,\ y_i\ge 0$

因此有，$C_{n+(k-n)-1}^{k-n}$

例 3　四个品种的月饼，需要装盒，每盒 8 块月饼，要求：每种月饼至少一块，问一共可装多少种不同的月饼盒？

解　共可装

$$C_{8-1}^{4-1}=C_7^3=\frac{7\times 6\times 5}{3\times 2\times 1}=35 \text{ 种。}$$

推论：设重集 $S=\{n_1*a_1, n_2*a_2, \cdots, n_k*a_k\}$，并且对一切 $i=1,2,\cdots,k,$ 有 $n_i\ge r$，则 S 的 r 组合数是 C_{k+r-1}^{r}。

例：求不定方程 $x_1+x_2+x_3=10$ 的非负整数解的个数，要求：$x_1\ge 1, x_2\ge 2, x_3\ge 0$

利用不定方程解的个数进行求解。

等价于不定方程：$y_1+y_2+y_3=7, y_1\geq 0, y_2\geq 0, y_3\geq 0$

$$C_{3+7-1}^{7}=C_9^7=C_9^2=36$$

其中：$y_1=x_1-1, y_2=x_2, y_3=x_3$

全体解：

(1, 2, 7), (1, 3, 6), (1, 4, 5), (1, 5, 4), (1, 6, 3), (1, 7, 2), (1, 8, 1), (1, 9, 0)
(2, 2, 6), (2, 3, 5), (2, 4, 4), (2, 5, 3), (2, 6, 2), (2, 7, 1), (2, 8, 0)
(3, 2, 5), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (3, 5, 2), (3, 6, 1), (3, 7, 0)
(4, 2, 4), (4, 3, 3), (4, 4, 2), (4, 5, 1), (4, 6, 0)
(5, 2, 3), (5, 3, 2), (5, 4, 1), (5, 5, 0)
(6, 2, 2), (6, 3, 1), (6, 4, 0)
(7, 2, 1), (7, 3, 0)
(8, 2, 0)

例：将 1, 2, 3, …, n 做全排列，计算所有 i，i=1, 2, . . , n 都不在第 i 个位置的排列数。

引入容斥原理

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

$$|\overline{A}_1\cap\overline{A}_2|=|S|-|A_1|-|A_2|+|A_1\cap A_2|$$

$$|A\cup B\cup C|=|A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m| = \sum_{i=1}^{m} |A_i| - \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{m-1} |A_1 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_m|$$

$$|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_m| = |S| - \sum_{i=1}^{m} |A_i| + \sum_{i \neq j} |A_i \cap A_j| - \sum_{i \neq j \neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| + \cdots + (-1)^{m} |A_1 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_m|$$

集合 A1：1 在第一个位置的排列数

集合 A2：2 在第二个位置的排列数

…

集合 An：n 在第 n 个位置的排列数

利用容斥原理进行求解

$$D_n = n!\left[1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right]$$

例，求重集 **S={4a, 5b}** 的 **r-**组合，**r=7**

利用 C(n+r-1, r)公式和容斥原理进行求解。

构造全集 S’和集合 A, B 及其余集 A^c, B^c

$$S' = \{\infty * a, \infty * b\}$$

A:a 的元素个数多于 5 的集合

B:b 的元素个数多于 6 的集合

$|A^c \cap B^c| = |S'| - |A| - |B| + |A \cup B|$

$= C(2+7-1, 7) - C(2+2-1, 2) - C(2+1-1, 1)$

$= C(8, 7) - C(3, 2) - C(2, 1)$

$= 8 - 3 - 2$

$= 3$

全体解：{2a，5b}，{3a，4b}，{4a，3b}

排列：与先后次序有关。组合：与次序无关。

Homework： P99 7，9

3.3 鸽笼原理 Pigeonhole Principle(抽屉原理)

Theorem 1(The pigeonhole principle)

n 只鸽子放进 m 个鸽笼里，并且 n>m,则至少有一个鸽笼放两只或两只以上鸽子。（结论由反证法可以得到）

例 1 学院的学生人数大于 365，则学生中一定有

同一天过生日的同学。

由于学生人数多于 365,所以至少有两人在同一天过生日。

例 2:从 1 到 8 中任选 5 个数，其中必有相加得 9 的两个数。

证明：（构造抽屉） 将 1,2,3,4,5,6,7,8 分成四个不同集合 $A_1=\{1,8\}$， $A_2=\{2,7\}$， $A_3=\{3,6\}$， $A_4=\{4,5\}$.

由鸽笼原理，任选 5 个数至少有两个数在同一组，故，其和相加得 9。

例 3：从 1-20 中任选 11 个数一定有一个是另一个的倍数。

证明：（构造抽屉）质因数分解：任意一个数都可以分解如下形式：

$$n=2^k m$$

其中，m 是奇数。

1-20 中的任意一个数进行分解，列举如下，共 10 个。

1=1*1,	8=8*1,	15=1*15
2=2*1,	9=1*9,	16=16*1
3=1*3,	10=2*5,	17=1*17
4=4*1,	11=1*11,	18=2*9
5=1*5,	12=4*3,	19=1*19
6=2*3,	13=1*13,	20=4*5
7=1*7,	14=2*7	

共有 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19 十个奇数，故由鸽笼原理，11 个数中至少有两个有相同的奇数因子。

即，$n_1=2^k*m$, $n_2=2^l*m$ 有相同的奇数因子 m，若 $k\le l$，则 $n_1|n_2$, 反之 $n_2|n_1$.

因此，11 个数中至少有两个有相同的奇数因子。因此一个是另一个的倍数。

例：给定 n 个整数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 中，存在 k 和 $l(0 \le k < l \le n)$，使得连续的若干个整数之和 $a_{k+1} + a_{k+2} + \cdots + a_l$ 能被 n 整除。

以 n 的余数 1, 2, . . . , n-1 为构造的（n-1）个盒子

例：一棋手为参加锦标赛准备进行 77 天集训，备赛期间，他每天至少下一盘棋，且每周至多下 12 盘棋，证明不管如何安排，一定存在在相连续的若干天内，他恰好下了 21 盘棋。

设每天下棋的盘数为 xi, i=1,2,..,77, 构造 a1=x1, a2=x1+x2,.., a77=x1+x2+..+x77,

T1=a1+21, T2=a2+21,.., T77=a77+21,

于是，ai, Ti, 共有 154 个，其取值为 1,2,.., 153=11*12+21

有 aj=Ti=ai+21.

是否存在更少的周数满足要求？（有兴趣，请思考）

例：(中国剩余定理)m,n 是正整数，且(m,n)=1，$0<=a<m-1$，$0<=b<n-1$，则存在正整数 x，被 m 整除余 a，被 n 整除余 b。

(4，5)=1，a=1，b=2，则存在 x=17，

首先考虑整数 x，被 m 整除余 a，这样的数有 a，m+a，2m+a，…，(n-1)m+a，共 n 个数；

接下来，证明上述 n 个整数被 n 整除 b，其余数互不相同；

反证法：如果存在两个整数，余数相同，则 $(im+a)-(jm+a)=nk$，$0<=i\neq j<n-1$，$(i-j)m=nk$，$n|(i-j)m$，$(m,n)=1$，则 $n|(i-j)$，矛盾！

广义鸽笼原理 The Extended Pigeonhole Principle

n 只鸽子放进 m 个鸽笼，如果 n>m，则必有一个鸽笼至少存放[(n-1)/m]+1 只鸽子。（结论由反证法可以得到）

注意到，[x]是计算机语言中的一种函数，称之为取整函数（也称高斯函数），它的取值是实数 x 的整数部分，同时其小数部分大于或等于零；

即，[x]是不超过 x 的最大整数．例如：[2]＝2，[3.1]＝3，[-2.2]＝-3。

例 100 个人中至少有 9 个人同月出生。

解　由广义鸽笼原理：[(100-1)/12]+1=9

3.3 概率论初步 Elements of Probability

研究古典概型

概率论：研究随机性（偶然性，可能性）。必然性与不可能性是它的两个极端。

为了方便叙述与比较，将其中的概念与第一章相对应。

样本 Sample（元素）

一次试验所得到的结果叫样本。

样本空间 Sample Space（全集）

一次试验的所有结果所组成的集合称之为样本空间。

例如，**投掷两个硬币，观察国徽所出现的次数，**

于是得到的样本空间为：$A_1=\{0, 1, 2\}$

需要特别注意的是，样本空间的获取与所观察的方法(观察的角度)相关联。

例 1：投掷两个硬币，不同的观察方法可以得到

不同的样本空间，具体为：

1. 国徽出现的次数：$A_1=\{0, 1, 2\}$

2. 出现的正反面：$A_2=\{HH, HT, TH, TT\}$

3. 两个硬币显示的表面是否相同：

$A_3=\{M, N\}$

关于样本空间的相关知识，请参考“概率论”的相关书籍，这里，我们只考虑有限样本空间的情况。

例 2：一个骰子掷两次，得到两个数字，样本空间：$A=\{(n,m)|1\le n,m\le 6\}$，　$|A|=36$.

例 3：盒子里有四个一分(P)和五个一毛硬币(D)，依次从盒子里取出三个硬币，得到的样本空间：

$A=\{PPP, PPD, PDP, PDD, DPP, DPD, DDP, DDD\}$　$|A|=8$.

事件 Events（子集）

满足某种特定条件的一些测试（试验）结果。因此，事件可以用满足特定条件的样本的集合来表示。

例 4：（a）一个骰子掷两次，得到两个数字，两次和为 8 的事件

B={(2,6),(3,5),(4,4),(5,3),(6,2)}.

|B|=5.

（b）一个骰子掷两次，得到两个数字，两次和至少为 10 的事件

C={(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)}

|C|=6

必然事件 certain event**：一定或必定发生的事件。**

不可能事件 impossible event**：不可能发生的事件。**

事件的运算

如果 E,F 是事件，则 $E \cup F$， $E \cap F$， $\overline{E}$ 也是事件。

事件 $E\cup F$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 E 或 F 发生。
事件 $E\cap F$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 E 和 F 都发生。
事件 $\overline{E}$ 发生 $\Leftrightarrow$ 事件 E 不发生。

例 5：掷骰子测试，事件 E 是数字为偶数，事件 F 是数字为素数，$E=\{2,4,6\}$, $F=\{2,3,5\}$.

$E\cup F=\{2,3,4,5,6\}$ 数字是偶数或素数。
$E\cap F=\{2\}$ 数字既是偶数又是素数。
$\overline{E}=\{1，3，5\}$ 数字不是偶数.

互相排斥事件（不能同时发生）

事件 E,F 称为互相排斥 mutually exclusive，or disjoint，如果 $E\cap F=\varnothing$, E,F 不交. 即 E,F 不能同时发生。(也叫互不相容事件。)

事件 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 称为互相排斥 mutually exclusive，or disjoint，如果其中任意两个互相排斥。若 E_i 发生，则其他事件就不会发生。

(不能同时发生的事件。一个事件发生，其他事件必然不发生。它们之间互相排斥，互不相容。假定有 E_1，E_2，…，E_n 事件，E_1 发生时，E_2，…，E_n 必然不发生；则 E_1，E_2，…，E_n 事件称为互斥事件。)

事件 E 的概率 p(E)，probability of the event E

首先讨论，事件 E 的频率 frequency of occurrence of the event E

总测试 n 次，其中事件 E 发生 n_E 次，则事件 E 发生的频率 $f_E = \frac{n_E}{n}$

事件的概率 probability of the event E

当总测试次数充分大时，频率 f_E 的稳定值称为事件 E 的概率，记为 p(E)

利用随机性，可以进行模拟仿真----数学建模中的一种重要方法

$$D_n = n!\left[1-\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{1}{n!}\right]$$

例 6：掷骰子测试，随着测试次数越来越大，正面向上和反面向上的频率的稳定值是 1/2，故其概率为 1/2

概率的性质（概率测度的公理刻画）

P1： $0\le p(E)\le 1$， 对任何 $E\subseteq X$.

P2： $p(X)=1$， $p(\varnothing)=0$.

P3： 如果事件 $E_1, E_2, \cdots\cdots, E_n$ 互相排斥，则 $p(E_1\cup E_2\cup\cdots\cdots\cup E_n)= p(E_1)+p(E_2)+\cdots\cdots+p(E_n)$.

称 P1,P2,P3 为概率公理。满足概率公理 P1,P2,P3 将构成一个度量空间，称其为概率空间 probability space。

例如，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

因为 $A\cup B=A\cup(B-A)$， $B=(A\cap B)\cup(B-A)$

事件 A 与 B 独立，若 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

即，**事件 A 发生并且事件 B 发生的概率为其二者的乘积。**

例如，两人投篮，若各自投篮为独立事件，则两人投篮命中的概率就是二者投篮命中概率的乘积。

考虑一个有限的概率空间，$A=\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 每个 $\{x_k\}$ 叫做基本事件 elementary event。令 $p_k=p(\{x_k\})$ 叫基本概率 elementary probability，由概率公理

EP1： $0\le p_k\le 1$
EP2： $p_1+p_2+\cdots\cdots+p_n=1$

已知基本概率 $p_1, p_2, \cdots\cdots, p_n$，因此，我们就可以计算任意事件 E 的概率。

例 8：假设一个测试的样本空间 A={1, 2, 3, 4, 5, 6}，其基本概率如下：

$p_1=p_2=p_6=1/12$, $p_3=1/3$, $p_4=1/6$, $p_5=1/4$,
事件 E={2, 4, 6}，

则 $p(E)= p_2+ p_4+p_6=1/12+1/6+1/12=1/3$

等概率事件

设 A 是一个有限的概率空间，$A=\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n\}$

假设基本概率都相等，则 $p_1=p_2=\cdots=p_n=1/n$. **因此，**

$p(\{x_1, x_2, x_3\})=3/n.$
$E=\{x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k\}$
$P(E)=|E|/|A|$

例 9：从 52 张扑克牌中随机选取 4 张牌，选到 4 张 k 的概率是多少？

等概率事件，从 52 张扑克牌中选取 4 张牌的取法共有 C_{52}^{4} 种，取得 4 张 K 的概率 p(E)=1/ C_{52}^{4}

例 10：从装有六个红球和四个绿球的盒子里随机选取四个球，选到两个红球两个绿球的概率是多少？

解：一盒 10 个球，选 4 个共有 C_{10}^{4} 种，

6 个红球中选出 2 个，共有 C_{6}^{2} 种，4 个绿球中两个共有 C_{4}^{2} 种，由乘法原理 10 个球中选出两红两绿共有 $C_{6}^{2} \times C_{4}^{2}$ 种。

$P(E)=\frac{C_{6}^{2} \times C_{4}^{2}}{C_{10}^{4}}=\frac{15 \times 6}{210}=0.428571$

例 11：一个正六面体骰子掷三次，事件 E 为三个数字相同或一个都不是 4。求 p(E).

等概率事件，一个骰子掷一次，可得 6 个数，掷三次可得 6^3 个可能的结果。

$E= F\cup G$

F:　三次读数相同。111, 222, 333, 444, 555, 666

G:　没有 4。1, 2, 3, 5, 6 中选取

$|F|=6$, $|G|=5\hat{}3=125$, $|F\cap G|=5$,

$|E|=|F|+|G|-|F\cap G|=126$

p(E)=126/216=7/12

例 12：从装有六个红球和四个绿球的盒子里随机选取四个球。

(a)事件 E 是红球不多于 2 个，求 p(E).

(b)事件 F 是红球不多于 3 个，求 p(F).

解：(a)从 10 个球中选取 4 个的次数为
C(10,4)=210，令 E= $E_0 \cup E_1 \cup E_2$
E_0 表示不取红球 $|E_0|=C_4^4=1$
E_1 表示取一个红球 $|E_1|=C_6^1C_4^3=24$
E_2 表示取二个红球 $|E_2|=C_6^2C_4^2=90$
E_0, E_1, E_2 互不相交。
$|E|=|E_0 \cup E_1 \cup E_2|=|E_0|+|E_1|+|E_2|=115$
p(E)=115/210=23/42

(b) 令 E= $E_0 \cup E_1 \cup E_2 \cup E_3$
E_3 表示取三个红球 $|E_3|$=C(6,3)C(4,1)=80
则 |E|=115+80=195，p(E)=195/210=13/14

或 其对立事件就是取多于 4 个红球，或 4 个，或 5 个或 6 个，但是全集是取 4 个球，故，$\overline{F}=E_4$ ，$|E_4|=C_6^4=15$,

$p(\overline{F})=p(E_4)=15/210=1/14$

$p(F)=1-p(\overline{F})=1-1/14=13/14$

概率论是研究随机性的数学理论，在计算机科学中，经常可用于算法（平均时间）复杂性的估计和模拟仿真等。

3.5 递推关系 Recurrence Relations

递推关系又称为迭代关系。

例 1 (a) $a_n=a_{n-1}+1,\ a_1=4$,

(b) $a_n=2a_{n-1},\ a_1=1$

等差数列 $a_n=a_1+(n-1)d$， $S_n=n(a_1+a_n)/2$
等比数列 $a_n=a_1*q^{(n-1)}$， $S_n=a_1*(1-q^n)/(1-q)$

例 2 (1) $a_n=a_{n-1}+3,\ a_1=2$

$$a_n=a_{n-1}+3=a_{n-2}+2\times3=a_{n-3}+3\times3=\cdots\cdots$$
$$=a_1+(n-1)\times3=2+3(n-1)=3n-1$$

换言之，首项 $a_1=2$，公差 $d=a_n-a_{n-1}=3$, 因此
通项 $a_n=a_1+(n-1)d=2+3(n-1)=3n-1$

(2) $b_n=2b_{n-1}+1,\ b_1=7$

$$b_n+1=2b_{n-1}+2=2(b_{n-1}+1)=2^2(b_{n-2}+1)$$
$$=2^{n-1}(b_1+1)=2^{n+2}$$
$$b_n=2^{n+2}-1$$

或者：

$b_n=2b_{n-1}+1=2(2b_{n-2}+1)+1= \mathbf{2^2}b_{n-2}+2*1+1$

$=\mathbf{2^3}b_{n-3}+\mathbf{2^2}+2+1=\dots =\mathbf{2^{n-1}}b_1+\mathbf{2^{n-2}}+\mathbf{2^{n-3}}+\dots +2+1$

$=7*\mathbf{2^{n-1}}+\mathbf{2^{n-1}}-1=8*\mathbf{2^{n-1}}-1$

一般地， $b_n=ab_{n-1}+c$,

$b_n+c/(a-1)=a[b_{n-1}+c/(a-1)]$

从而， 令 $x_n= b_n+c/(a-1)$, 则 $x_n= ax_{n-1}$

使用待定系数法

$b_n=ab_{n-1}+c$, 则 $b_n+d=a(b_{n-1}+d)$，因此

$ad-d=c$, $d=c/(a-1)$

如果是前后两项之间的递推，我们可以使用回溯法来求解。

如果是前后若干项之间的递推，

(b) Fibonacci Sequence

$\boldsymbol{f_1=f_2=1}$

$\boldsymbol{f_n=f_{n-1}+f_{n-2}}$,

递推关系必须满足两个条件：

(1)初始值 initial value,

(2)递推法则(表达式) recurrence expression

重点是求解递推关系的通项表达式。从递推关系 recurrence relation 求解显示公式 explicit formula

现考虑一般情况：

$$a_n = r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} + \cdots + r_k a_{n-k} + A$$

称之为 k 阶线性递推关系。(k 阶: 前 k 项递推, 线性: 系数是常数)

若称为 k 阶线性齐次递推关系。(齐次: 没有常数项, A=0)

递推关系又称为差分方程，相比于微分方程

在表达式中含有导数的方程，称之为微分方程(常微分方程，偏微分方程)。

通过微分方程的离散化，得到差分方程：

例如，

$$\frac{dN}{dt} - \lambda N = 0, \quad N(0) = N_0, \quad N(t) = N_0 e^{\lambda t}$$

$$\frac{N(t+1) - N(t)}{t+1-t} - \lambda N(t) = 0, \quad N(t+1) = (\lambda+1) N(t)$$

$$N_{n+1} = (\lambda+1) N_n, \ t = 1, 2, \cdots$$

针对 k 阶线性齐次递推关系，特别地，k=2

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},\ n \geq 2,\ a_0 = 1,\ a_1 = -2$$

$$a_n - 2a_{n-1} = 3(a_{n-1} - 2a_{n-2})$$

令$x_n = a_n - 2a_{n-1} = 3(a_{n-1} - 2a_{n-2}) = 3x_{n-1}$, 则

$$x_n = 3x_{n-1} = 3^2 x_{n-2} = \cdots = 3^{n-1} x_1 = 3^{n-1}[a_1 - 2a_0] = (-4)*3^{n-1}$$

$$a_n = 2a_{n-1} + (-4)*3^{n-1} = 2^2 a_{n-2} + 2*(-4)*3^{n-2} + (-4)*3^{n-1} = \cdots$$

$$= 2^n a_0 + 2^{n-1}*(-4) + 2^{n-2}*(-4)*3 + \cdots + (-4)*3^{n-1}$$

$$= 2^n + \frac{2^{n-1}*(-4)[1-(\frac{3}{2})^n]}{1-\frac{3}{2}} = 2^n + 4*2^n - 4*3^n$$

$$a_n = 5*2^n - 4*3^n$$

我们使用**特征方程法进行求解。**

设 k 阶线性齐次递推关系为

$$\mathbf{a_n = r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} + \cdots + r_k a_{n-k}}$$

则其特征方程 characteristic equation

为 $\mathbf{x^n = r_1 x^{n-1} + r_2 x^{n-2} + \cdots + r_k x^{n-k}}$

将上述特征方程整理，可以得到如下的特征方程：$x^k = r_1x^{k-1} + r_2x^{k-2} + \cdots + r_k$

为了叙述方便，假定 k=2，我们进行讨论。

定理 1：针对递推关系 $a_n = r_1a_{n-1} + r_2a_{n-2}$，则其特征方程为：$x^2 = r_1x + r_2$

(1)如果其特征方程 $x^2 = r_1x + r_2$ 有两个不同的实根

x_1, x_2，则 a_n 的通项表达式为 $a_n=c_1x_1^n+c_2x_2^n$

其中常数 c_1,c_2 由初始条件确定。

(2)如果特征方程 $x^2 = r_1x + r_2$ 只有一个重根 x，则 a_n 的通项表达式为 $a_n=c_1x^n+c_2nx^n$

其中常数 c_1,c_2 由初始条件确定。

(3) 如果特征方程 $x^2 = r_1x + r_2$ 有一对共轭复根

$\alpha \pm \beta i$，则 a_n 的通项表达式是:

$$a_n = r^n(C_1\cos n\theta + C_2\sin n\theta),$$

$$r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ \theta = \arctan\frac{\beta}{\alpha},\ (0<\theta<\pi)$$

其中常数 c_1,c_2 由初始条件确定。

验证：$r^n\cos n\theta, r^n\sin n\theta$ 分别是差分方程的特解。

证明：

(1) $a_n = c_1 x_1^n + c_2 x_2^n = c_1 x_1^{n-2} x_1^2 + c_2 x_2^{n-2} x_2^2$

$= c_1 x_1^{n-2}(r_1 x_1 + r_2) + c_2 x_2^{n-2}(r_1 x_2 + r_2)$

$= r_1 c_1 x_1^{n-1} + r_2 c_1 x_1^{n-2} + r_1 c_2 x_2^{n-1} + r_2 c_2 x_2^{n-2}$

$= r_1 (c_1 x_1^{n-1} + c_2 x_2^{n-1}) + r_2 (c_1 x_1^{n-2} + c_2 x_2^{n-2})$

$= r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2}$

(2) $a_n = c_1 x^n + c_2 n x^n = c_1 x^{n-2} x^2 + c_2 n x^{n-2} x^2$

$= c_1 x^{n-2}(r_1 x + r_2) + c_2 n x^{n-2}(r_1 x + r_2)$

$= r_1 c_1 x^{n-1} + r_2 c_1 x^{n-2} + r_1 c_2 n x^{n-1} + r_2 c_2 n x^{n-2}$

$= r_1 (c_1 x^{n-1} + c_2 n x^{n-1}) + r_2 (c_1 x^{n-2} + c_2 n x^{n-2})$

$= r_1 [\underline{c_1 x^{n-1} + c_2 (n-1) x^{n-1}} + c_2 x^{n-1}] + r_2 [\underline{c_1 x^{n-2} + c_2 (n-2) x^{n-2}} + 2 c_2 x^{n-2}]$

$= r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} + r_1 c_2 x^{n-1} + r_2 2 c_2 x^{n-2}$

$= r_1 a_{n-1} + r_2 a_{n-2} + (\underline{x r_1 + 2 r_2}) c_2 x^{n-2}$

因为特征方程 $x^2 = r_1 x + r_2$ 只有一个重根 x，由一元二次方程 $x^2 - r_1 x - r_2 = 0$ 和韦达定理，可知，有 $2x = r_1$，$x^2 = -r_2$，因此，$x r_1 + 2 r_2 = 2x^2 + 2(-x^2) = 0$，故 $(x r_1 + 2 r_2) c_2 x^{n-2} = 0$。

(3) 验证，设递推关系为 $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$，因此，特征方程 $x^2 = 2x - 2$，特征根为

$1 \pm i, r = \sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4}$，验证

$r^n \cos n\theta = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}$, $r^n \sin n\theta = (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}$ 满足差分方程 $a_n = 2a_{n-1} - 2a_{n-2}$。

以 $a_n = r^n \cos n\theta = (\sqrt{2})^n \cos\frac{n\pi}{4}$ 为例，则

$a_{n-1} = (\sqrt{2})^{n-1} \cos\frac{(n-1)\pi}{4}$, $a_{n-2} = (\sqrt{2})^{n-2} \cos\frac{(n-2)\pi}{4}$，故

$$a_n = (\sqrt{2})^n \cos(\frac{(n-2)\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = -(\sqrt{2})^n \sin\frac{(n-2)\pi}{4}$$

$$2a_{n-1} - 2a_{n-2} = 2(\sqrt{2})^{n-1} \cos\frac{(n-1)\pi}{4} - 2(\sqrt{2})^{n-2} \cos\frac{(n-2)\pi}{4}$$

$$= (\sqrt{2})^n [\sqrt{2} \cos\frac{(n-2)\pi}{4} \cos\frac{\pi}{4} - \sqrt{2} \sin\frac{(n-2)\pi}{4} \sin\frac{\pi}{4} - \cos\frac{(n-2)\pi}{4}]$$

$$= (\sqrt{2})^n [\cos\frac{(n-2)\pi}{4} - \sin\frac{(n-2)\pi}{4} - \cos\frac{(n-2)\pi}{4}]$$

$$= -(\sqrt{2})^n \sin\frac{(n-2)\pi}{4} = a_n$$

考虑，$a_n = r^n \sin n\theta = (\sqrt{2})^n \sin\frac{n\pi}{4}$ 则

$a_{n-1} = (\sqrt{2})^{n-1} \sin\frac{(n-1)\pi}{4}$ $a_{n-2} = (\sqrt{2})^{n-2} \sin\frac{(n-2)\pi}{4}$

因此，

$$a_n = (\sqrt{2})^n \sin(\frac{(n-2)\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = (\sqrt{2})^n \cos\frac{(n-2)\pi}{4}$$

$$
\begin{aligned}
2a_{n-1} - 2a_{n-2} &= 2(\sqrt{2})^{n-1}\sin\frac{(n-1)\pi}{4} - 2(\sqrt{2})^{n-2}\sin\frac{(n-2)\pi}{4} \\
&= (\sqrt{2})^{n}\{\sqrt{2}\sin\frac{(n-2)\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} + \sqrt{2}\cos\frac{(n-2)\pi}{4}\sin\frac{\pi}{4} - \sin\frac{(n-2)\pi}{4}\} \\
&= (\sqrt{2})^{n}\{\sin\frac{(n-2)\pi}{4} + \cos\frac{(n-2)\pi}{4} - \sin\frac{(n-2)\pi}{4}\} \\
&= (\sqrt{2})^{n}\cos\frac{(n-2)\pi}{4} \\
&= a_n
\end{aligned}
$$

$$a_n = r^n(C_1\cos n\theta + C_2\sin n\theta),$$

$$r = \sqrt{\alpha^2+\beta^2},\ \theta = \arctan\frac{\beta}{\alpha},\ (0<\theta<\pi)$$

差分方程。

例 3：求递推关系 $a_n= 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$， $a_1=5, a_2=3$ 的通项公式。

首先求解 特征方程：$x^2=3x-2$，即 $x^2-3x+2=0$ 的两个根是 1 和 2。因此，

$$a_n = c_1 1^n + c_2 2^n$$

$$c_1 + 2c_2 = 5$$

$$c_1 + 4c_2 = 3$$

$$c_1 = 7,\quad c_2 = -1$$

由此得到

$$a_n = 7-2^n$$

或 $x_n = a_n - a_{n-1} = 2(a_{n-1} - a_{n-2}) = 2x_{n-1}$

$x_n = -2^{\wedge}(n-1)$

$a_n - a_{n-1} = -2^{\wedge}(n-1)$

$a_{n-1} - a_{n-2} = -2^{\wedge}(n-2)$

…

$a_2 - a_1 = -2^{\wedge}(1)$

$a_n - a_1 = -[2(1-2^{\wedge}(n+1))]/(1-2)$

$a_n = 7-2^{\wedge}n$

或使用母函数方法进行计算。

使用特征方程方法求解

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},\ n \geq 2,\ a_0 = 1,\ a_1 = -2$$

$$a_n = 5*2^n - 4*3^n$$

例4　求 **Fibonacci Sequence** 的通项公式。

意大利著名数学家 **Fibonacci** 于公元 **1202** 年提出的兔子繁殖问题，即：有一对兔子，假定两个月后便每月可繁殖雌雄各一的一对兔子，且兔子不会死亡，问 **n** 个月后共有多少对兔子？

Fibonacci Sequence 的递推公式:

$$f_n=f_{n-1}+f_{n-2},\ f_1=f_2=1$$

求解 **Fibonacci Sequence** 的特征方程

$$x^2-x-1=0$$

特征方程的解:

$$x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

由定理 1, **Fibonacci Sequence** 的通项公式:

$$f_n=c_1x_1^n+c_2\,x_2^n$$

$$c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$$

$$c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2=1$$

$c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$， $c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

问题推广

1) 假定两个月后便每月可繁殖雌雄各一的 k 对兔子，且兔子不会死亡，问 n 个月后共有多少对兔子？

$f_n=f_{n-1}+kf_{n-2}$, $f_1=f_2=1$

2) $f_n=f_{n-1}+f_{n-k}$, $n>=k+1$, $f_1=f_2=\ldots=f_k=1$,

3) $f_n=f_{n-1}+f_{n-2}+\ldots+f_{n-k}$, $n>=k+1$,
$f_1=f_2=1$, $f_i=f_1+f_2+\ldots+f_{i-1}$, $i=1,2,\ldots,k$

例 5　证明 $f_n<\left(\frac{5}{3}\right)^n$.

Proof. (by Mathematics induction)

(a) n=1, 1<5/3 成立

(b) n=k, $f_k<\left(\frac{5}{3}\right)^k$ 成立

则 $f_{k+1} = f_k + f_{k-1}$

$$< \left(\frac{5}{3}\right)^{k} + \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{5}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{5}{3}+1\right)$$

$$< \left(\frac{5}{3}\right)^{k+1}$$

The induction is finished completely.

Homework

P103：2，4，　P117 : 12, 13, 18, 19

普通母函数

给定一个无穷序列 $\{a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots\}$ ，称

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

为关于序列 a_i 的普通母函数。

泰勒级数的展开，序列 $\{f^{(k)}(0)/k!\}$

例 1. 求序列 $\{C_n^0, C_n^1, C_n^2, \cdots, C_n^k, \cdots C_n^n, \cdots\}$ 的普通母函数。

a_i=C(n,i), C(n,n+1)=0

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \cdots + C_n^n x^n$$

$$= (1+x)^n$$

例 2. 求序列

$$\{\ C_{n-1}^{0}, C_{n}^{1}, C_{n+1}^{2}, \cdots, C_{n+k-1}^{k}, \cdots\}$$

的普通母函数。

$$f(x)=(1-x)^{-n}=\frac{1}{(1-x)^{n}}$$

$$f'(x)=n(1-x)^{-(n+1)},\ \ f''(x)=n(n+1)(1-x)^{-(n+2)}$$

$$f^{(k)}(x)=n(n+1)(n+2)\cdots(n-k+1)(1-x)^{-(n+k)}$$

$$f(x)=(1-x)^{-n}=1+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\frac{f'''(0)}{3!}x^{3}+\cdots$$

$$+\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^{k}$$

$$=1+nx+\frac{n(n+1)}{2!}x^{2}+\frac{n(n+1)(n+2)}{3!}x^{3}+\cdots+\frac{n(n+1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^{k}+\cdots$$

$$C_{n+k-1}^{k}=\frac{(n+k-1)(n-k)\cdots n}{k!}=\frac{n(n+1)\cdots(n+k-1)}{k!}$$

$$f(x)=(1-x)^{-n}=\sum_{k=0}^{\infty}C_{n+k-1}^{k}x^{k}$$

例 3. 求序列

$$\{0, 1\times 2\times 3, 2\times 3\times 4, \cdots, n(n+1)(n+2), \cdots\}$$

的普通母函数。

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}$$

$$\left(\frac{1}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) x^{n-2}$$

$$\left(\frac{2}{(1-x)^3}\right)' = \frac{6}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) x^{n-3}$$

$$\frac{6x}{(1-x)^4} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2) x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1)(n+2) x^n$$

$f(x) = \dfrac{6x}{(1-x)^4}$ 是其普通母函数

例 4.利用普通母函数计算数列通项

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2},\ a_0 = 1,\ a_1 = -2$$

1) 设 f(x)是以 ai 为系数的普通母函数，

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \cdots + a_n x^n + \cdots \\
-5xf(x) &= -5a_0 x - 5a_1 x^2 - 5a_2 x^3 - 5a_3 x^4 - \cdots - 5a_{n-1} x^n + \cdots \\
6x^2 f(x) &= 6a_0 x^2 + 6a_1 x^3 + 6a_2 x^4 + \cdots + 6a_{n-2} x^n + \cdots
\end{aligned}
$$

则, $(1-5x+6x^2) f(x) = 1-7x$

$$f(x) = \frac{1-7x}{1-5x+6x^2} = \frac{A}{1-2x} + \frac{B}{1-3x} = \frac{5}{1-2x} + \frac{-4}{1-3x}$$

2) 将 f(x)展开成级数，

$$f(x) = \frac{5}{1-2x} + \frac{-4}{1-3x} = 5\sum_{n=0}^{\infty}(2x)^n + (-4)\sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}(5*2^n - 4*3^n)x^n$$

3) 比较母函数 f(x)中的 x^n 的系数

故， $$a_n = 5*2^n - 4*3^n$$