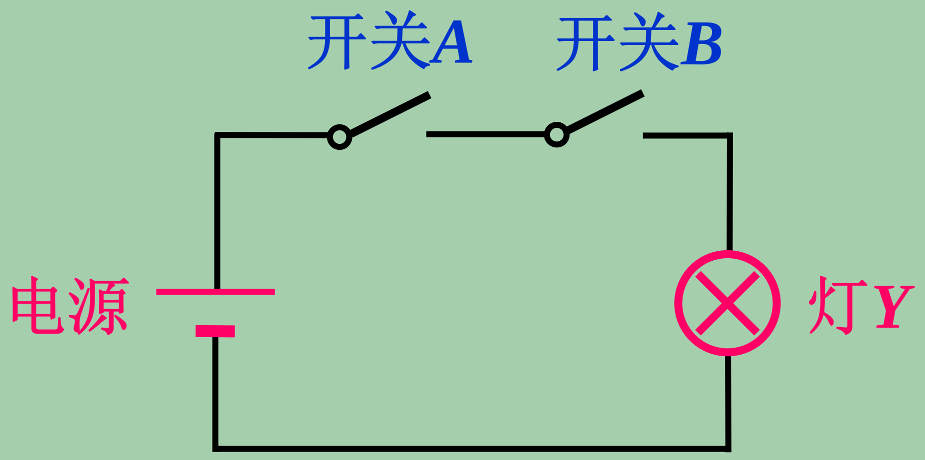
1.1 逻辑代数基本概念、公式和定理

1.1.1 基本和常用逻辑运算

一、三种基本逻辑运算

1. 基本逻辑关系举例

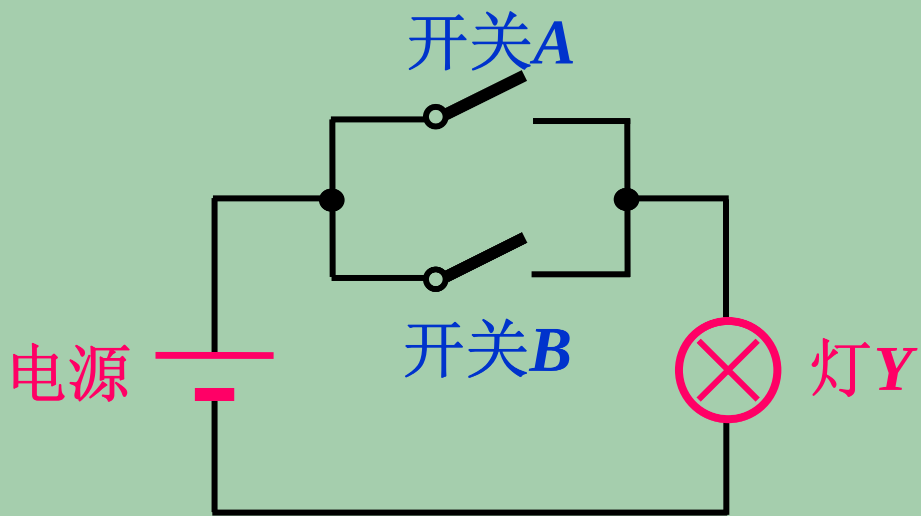
（1）电路图：



与逻辑关系

功能表

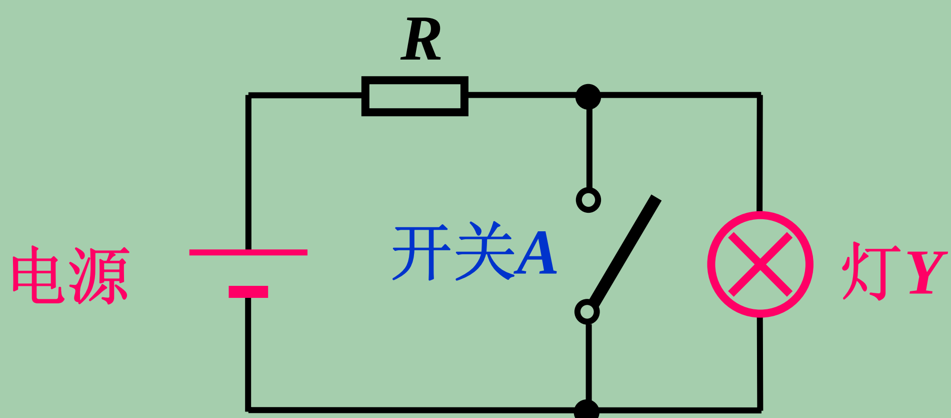
A	*B*	*Y*
断	断	灭
断	合	灭
合	断	灭
合	合	亮



或逻辑关系

功能表

A	B	Y
断	断	灭
断	合	亮
合	断	亮
合	合	亮



非逻辑关系

功能表

A	Y
断	亮
合	灭

（2）真值表：经过设定变量和状态赋值后，得到的反映输入变量与输出变量之间因果关系的数学表达式。

功能表

A	*B*	*Y*
断	断	灭
断	合	灭
合	断	灭
合	合	亮

与逻辑关系

真值表

A	*B*	*Y*
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

（Truth table）

功能表

A	*B*	*Y*
断	断	灭
断	合	亮
合	断	亮
合	合	亮

或逻辑关系 →

真值表

A	*B*	*Y*
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

功能表

A	*Y*
断	亮
合	灭

非逻辑关系 →

真值表

A	*Y*
0	1
1	0

（3）三种基本逻辑关系：

- **与逻辑：** 当决定一事件的所有条件都具备时，事件才发生的逻辑关系。
- **或逻辑：** 决定一事件结果的诸条件中，只要有一个或一个以上具备时，事件就会发生的逻辑关系。
- **非逻辑：** 只要条件具备，事件便不会发生；条件不具备，事件一定发生的逻辑关系。

2. 基本逻辑运算

（1）与运算：

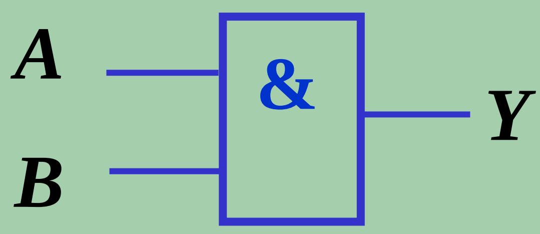
真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

逻辑函数式

$$Y = A \cdot B = AB$$

逻辑符号



与门（AND gate)

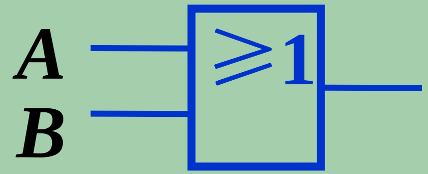
（2）或运算：

真值表

A	B	Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

逻辑函数式 $Y = A + B$

逻辑符号



或门（OR gate）

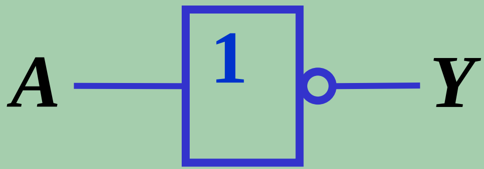
（3）非运算：

真值表

A	Y
0	1
1	0

逻辑函数式 $Y = \overline{A}$

逻辑符号



非门（NOT gate）

二、逻辑变量与逻辑函数及常用复合逻辑运算

1. 逻辑变量与逻辑函数

逻辑变量：在逻辑代数中，用英文字母表示的变量称为逻辑变量。在二值逻辑中，变量的取值不是 **1** 就是 **0** 。

原变量和反变量：字母上面无反号的称为原变量，有反号的叫做反变量。

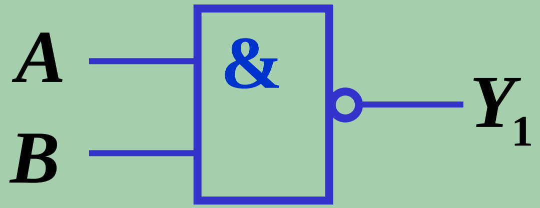
逻辑函数：如果输入逻辑变量 A、B、$C\cdots$的取值确定之后，输出逻辑变量 Y 的值也被唯一确定，则称 Y 是 A、B、$C\cdots$的逻辑函数。并记作 $Y=F(A,B,C\cdots)$

2. 几种常用复合逻辑运算

(1) 与非运算

(NAND)

$$Y_1 = \overline{AB}$$



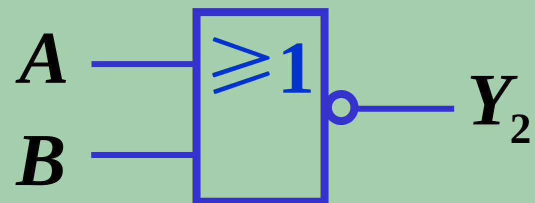
Y_1、Y_2 的真值表

A	B	Y_1	Y_2
0	0	1	1
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	0	0

(2) 或非运算

(NOR)

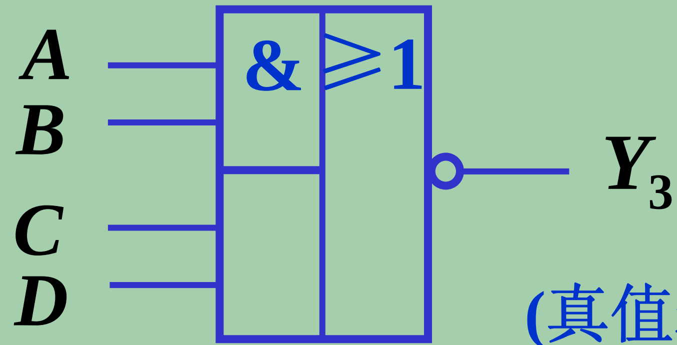
$$Y_2 = \overline{A + B}$$



(3) 与或非运算

(AND – OR – INVERT)

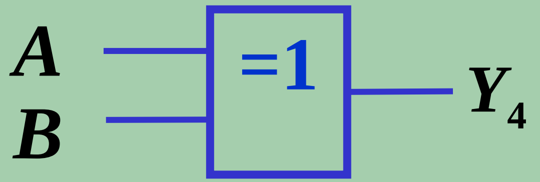
$$Y_3 = \overline{AB + CD}$$



(真值表略)

(4) 异或运算

(Exclusive—OR)



$$Y_4 = A \oplus B = A\overline{B} + \overline{A}B$$

A	B	Y_4
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

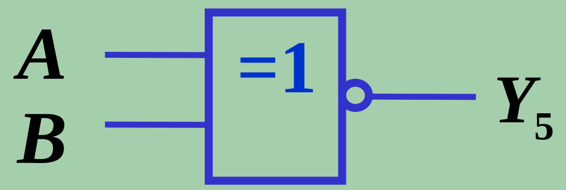
(5) 同或运算 （异或非）

(Exclusive—NOR)

$$Y_5 = \overline{A \oplus B}$$

$$= \overline{A}\,\overline{B} + AB$$

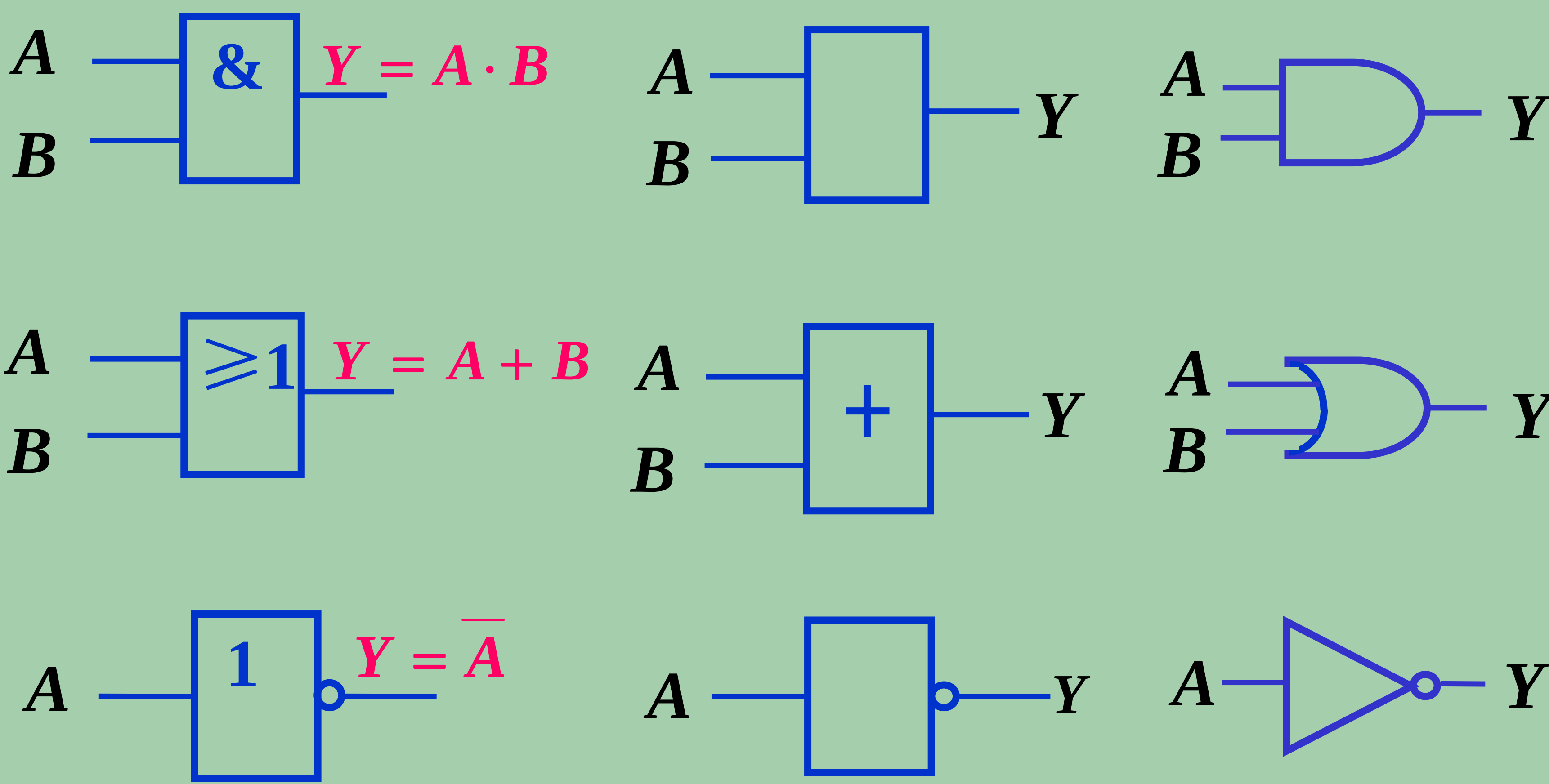
$$= A \odot B$$



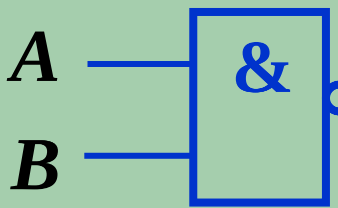
A	B	Y_5
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

三、基本和常用逻辑运算的逻辑符号

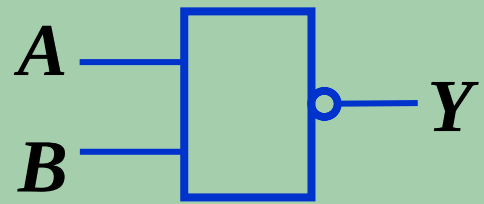
国标符号　　曾用符号　　美国符号

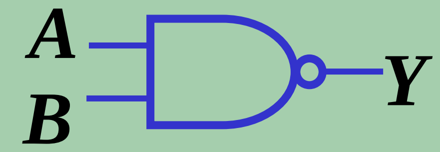


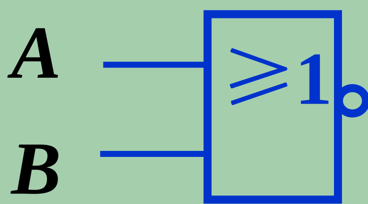
国标符号　　曾用符号　　美国符号



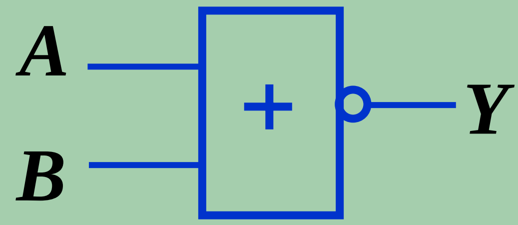
$Y = \overline{A \cdot B}$

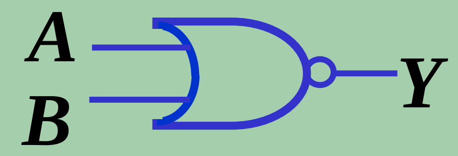


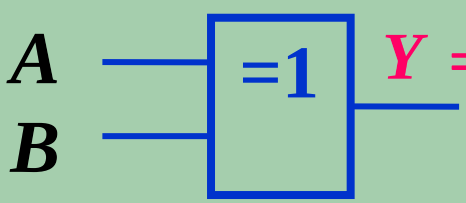




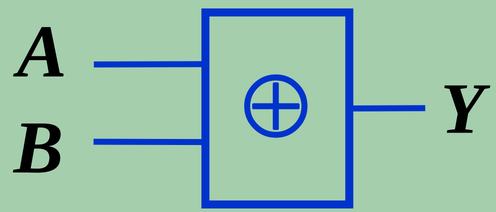
$Y = \overline{A + B}$

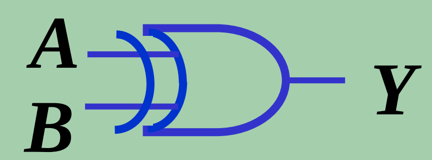






$Y = A \oplus B$





1.1.2 公式和定理

一、 常量之间的关系(常量：0 和 1)

与： $0 \cdot 0 = 0$ 或： $1 + 1 = 1$ 非： $\overline{0} = 1$

$0 \cdot 1 = 0$ $1 + 0 = 1$ $\overline{1} = 0$

$1 \cdot 1 = 1$ $0 + 0 = 0$

二、变量和常量的关系(变量：*A*、*B*、*C*...)

与： $A \cdot 1 = A$ 或： $A + 0 = A$ 非： $A \cdot \overline{A} = 0$

$A \cdot 0 = 0$ $A + 1 = 1$ $A + \overline{A} = 1$

三、与普通代数相似的定理

交换律 $A \cdot B = B \cdot A$ $A + B = B + A$

结合律 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

$(A + B) + C = A + (B + C)$

分配律 $A(B + C) = AB + AC$

$A + BC = (A + B)(A + C)$

[例 1. 1. 1] 证明公式 $A + BC = (A + B)(A + C)$

[解] 方法一：公式法

右式 $= (A + B)(A + C) = A \cdot A + A \cdot C + A \cdot B + B \cdot C$

$= A + AC + AB + BC = A(1 + C + B) + BC$

$= A + BC =$ 左式

[例 1. 1. 1] 证明公式 $A+BC=(A+B)(A+C)$

[解] 方法二：真值表法(将变量的各种取值代入等式两边，进行计算并填入表中)

A	B	C	$B\cdot C$	$A+BC$	$A+B$	$A+C$	$(A+B)(A+C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

相等

四、逻辑代数的一些特殊定理

同一律 $A \cdot A = A$ $A + A = A$

德·摩根定理 $\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$ $\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

还原律 $\overline{\overline{A}} = A$

[例 1.1.2] 证明：德 · 摩根定理

A	B	$A \cdot B$	$\overline{A \cdot B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B}$	$A + B$	$\overline{A + B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	0	1	1	1	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1	0	0
1	1	1	0	0	0	0	1	0	0

相等 相等

五、关于等式的两个重要规则

1. 代入规则： 等式中某一变量都代之以一个逻辑函数，则等式仍然成立。

例如，已知 $\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$（用函数 $A+C$ 代替 A）

则 $\overline{(A+C)+B}=\overline{A+C}\cdot\overline{B}=\overline{A}\cdot\overline{C}\cdot\overline{B}$

2. 反演规则：

将 Y 式中 “.” 换成 “+”，“+” 换成 “.”
“0” 换成 “1”，“1” 换成 “0”
原变量换成反变量，反变量换成原变量

$\Longrightarrow \overline{Y}$

注意：
- 运算顺序：括号 →乘 →加
- 不属于单个变量上的反号应保留不变

反演规则的应用：求逻辑函数的反函数

将 Y 式中 “.” 换成 “+”，“+” 换成 “.”
“0” 换成 “1”，“1” 换成 “0”
原变量换成反变量，反变量换成原变量

$\Rightarrow \overline{Y}$

例如：已知 $Y_1 = A(B+C)+CD$

运算顺序：
括号→与→或

则 $\overline{Y_1} = (\overline{A}+\overline{B}\,\overline{C})(\overline{C}+\overline{D})$

不属于单个变量上的反号应保留不变

已知 $Y_2 = \overline{\overline{A\overline{B}+C}+D}+C$

则 $\overline{Y_2} = \overline{\overline{(\overline{A}+B)\cdot\overline{C}}\cdot\overline{D}}\cdot\overline{C}$

六、若干常用公式

$$(1)\quad AB+A\overline{B}=A(B+\overline{B})=A$$

$$(2)\quad A+AB=A(1+B)=A \xrightarrow{\text{推广}} \boxed{A+A(\qquad)=A}$$

$$(3)\quad A+\overline{A}B=(A+\overline{A})(A+B)=A+B$$

$$(4)\quad AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$$

$$(5)\quad \overline{A\overline{B}+\overline{A}B}=\overline{A}\,\overline{B}+AB$$

公式 (4) 证明： $AB+\overline{A}C+BC=AB+\overline{A}C$

左 $=AB+\overline{A}C+(A+\overline{A})\,BC$

$A+AB=A$

$=AB+\overline{A}C+ABC+\overline{A}BC=AB+\overline{A}C$

推论

$$AB+\overline{A}C+BCD=AB+\overline{A}C$$

公式 (5) 证明： $\overline{A\overline{B}+\overline{A}B}=\overline{A}\,\overline{B}+AB$

左 $=\overline{A\overline{B}}\cdot\overline{\overline{A}B}=(\overline{A}+B)\,(A+\overline{B})$

$=\overline{A}\cdot A+\overline{A}\,\overline{B}+AB+B\cdot\overline{B}=\overline{A}\,\overline{B}+AB$

即 $\overline{A\oplus B}=A\odot B$ 同理可证 $\overline{A\odot B}=A\oplus B$