第四章　关系和有向图 Relations and Digraphs

关系是计算机科学和离散数学中的一个重要的概念，可分为二元，三元，多元关系。需要指出的是，关系也是一种集合。因此，集合的诸多运算也对应着关系的相应运算，关系还对应着映射（变换、函数）等概念，故，关系在理论和应用上具有十分重要的意义。其中，De Morgan 和 Russell 做了很多工作。

4.1 乘积集合和划分 Product sets and Partions

乘积集合 Product sets,

以 n=2 为例。

设 A,B 是两个非空集合，称集合

$A\times B=\{(a,b) \mid$ 其中 $a\in A,\ b\in B\}$

为集合 A 与 B 的乘积集合或笛卡尔乘积。

例如，A={a,b,c}， B={d,e},则

A×B={(a,d),(a,e),(b,d),(b,e),(c,d),(c,e)}

乘积集合的特征函数表示

$$(A\times B)(x,y)=A(x)\wedge B(y)$$

一般来说，我们可以用列表或矩阵的形式来表示乘积集合。其每一个元素,如，(a,d)就构成一个序对，n=2,称为二元序对，或者二元组。

反之，

B×A={(d,a),(e,a),(d,b),(e,b),(d,c),(e,c)}

考虑到元素的有序性，一般来说，

$A\times B\neq B\times A$

当A，B是有限的非空集合时，则我们有 $|A\times B|=|A|\times|B|$

注：1)元素的有序性，不能颠倒。

2)如何定义序对的序关系？“>=”,开问题，Open problem

$(a,b)=(x,y)$ if and only if $a=x$ and $b=y$.

其实，(乘积集合)这个概念并不新鲜。

平面直角坐标系（笛卡尔坐标），$X\times Y$，

点P（x,y）

空间直角坐标系，n维空间。进一步，我们考虑一般情形，

$A_1\times A_2\times\cdots\cdots\times A_n=\{(a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n)|$ 其中，$a_i\in A_i, i=1,2,\cdots\cdots,n\}$

称为 n 元组

多元乘积集合的特征函数表示

$$(A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n)(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \bigwedge_{i=1}^{n} A_i(x_i)$$

有序对，元素 a_1，a_2，……a_n 根据一定的顺序的元素组合，又称为序偶(序对)，记为(a_1，a_2，……a_n)。

其中，a_1 是第一元素，a_2 是第二元素，依次类推。

接下来，我们考虑乘积集合的运算性质

$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$
$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$
$(B\cup C)\times A=(B\times A)\cup(C\times A)$
$(B\cap C)\times A=(B\times A)\cap(C\times A)$

注记：

$(A\cup B)\times(C\cup D)\neq(A\times C)\cup(B\times D)$

$(A\cup B)\times(C\cup D)=(A\times C)\cup(B\times C)$
$\cup(A\times D)\cup(B\times D)$

数据库是关系（n 元组）的一个重要应用。

划分 Partion

设 A 为一个非空集合，A 的划分 $P=\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n\}$，指的是由 A 的一些非空子集 A_i 所组成的一个集合，A_i 满足：

$A= A_1\cup A_2\cup\cdots\cdots\cup A_n$，$A_i\neq\varnothing$，$A_i\cap A_j=\varnothing$，$i, j=1, 2, \cdots\cdots, n$．记 $P=\{A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n\}$，称 P 是 A 的一个划分。（不交不漏）

其中，$A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n$ 称为 A 的分块。显然，A 的划分 P 是 A 的幂集 P(A) 的子集。

例如，$A=\{a, b, c, d, e, f, g\}$，若 $A_1=\{a, b, c\}$，$A_2=\{d, e\}$，$A_3=\{f, g\}$，则 $P=\{A_1, A_2, A_3\}$ 是 A 的一个划分。

另外，$A_1=\{a, b\}$，$A_2=\{c, d, e, f\}$，$A_3=\{g\}$，则

$P=\{A_1, A_2, A_3\}$ 也是 A 的一个划分。

注释：划分不是唯一的（根据不同的目标、想法、作用，可以得到不同的划分）。对于一个集合来说，我们允许有多种划分。每种划分完全取决于其划分的要求和目的。

4.2 关系与关系矩阵 Relations and Matrix

概述：关系指的是集合中元素之间的某种相关性。显然，两个元素之间的相关称为二元关系，三个元素之间的相关称为三元关系，n 个元素之间的相关称为 n 元关系。

对于关系，我们用符号 R 来表示。以二元关系为例。

关系 $R \subseteq A \times B$，R 称为 A 到 B 上的一个关系，a Relation from A to B. 指的是 $A \times B$ 的一个子集。

$R \subseteq A \times A$，R 称为 A 上的一个的关系，a Relation on A. 指的是 $A \times A$ 的一个子集.

特殊情形，空关系 $R=\Phi$（空集），全关系 $R=A \times A$（全集）。

显然，关系 R 是一个特殊的集合（乘积集合的子集），它的论域(全集)是乘积集合。因此，集合的运算、性质对于关系全部适用，所以 R 或者称为关系或者称为乘积集合的子集，因此，关系具有集合的属性, 有并、交、余等运算。

$(a,b)\in R$, 称 a 与 b 是 R 相关的，记作 aRb；否则，$(a,b)\notin R$ ，称 a 与 b 不是 R 相关的，记作 $a\not R b$.

按照特征函数的记法，我们简记为，$R(a,b)=1$ 或 0。

例 1：设 $A=\{1,2,3,4\}$，$I_A=\{(a,a)\mid a\in A\}=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$是A上的相等关系。

例 2　设 $A=\{1,2,3,4\}$, $Q=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$　Q 是 A 上的小于关系。

例3　设 P= $I_A \cup \{(1,2),(1,3),(1,4),(2,4)\}$,P 是 A 上的整除关系。

类似于第一章，集合可以由特征函数来刻画(集合与特征函数的等价性)，针对有限论域，其可以用向量(其元素值可用 0,1 表示)来表示。

显然，关系也可以由其特征函数来表示，针对有限论域的乘积集合，其特征函数，我们可以使用矩阵来表示，称该矩阵为关系矩阵。矩阵中的元素就是其特征函数值，1 或 0，满足关系为 1，不满足关系为 0，故构成布尔矩阵（见第一章）。

一般来说，元素 a_i 与 b_j 满足关系 R，则有 $R(a_i,b_j)=1$，简记为 $r_{ij}=1$，否则 $R(a_i,b_j)=0$，简记为 $r_{ij}=0$。

因此，关于有限论域（A 和 B 是有限集合），根据关系 R，我们有关系矩阵 $R=(r_{ij})_{n\times n}$。

关系矩阵 M_R The Matrix of a Relation，由关系 R 诱导的矩阵，称为关系矩阵 M_R。

（有限论域上的关系 R 的特征函数表示）

设 $A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m\},B=\{b_1,b_2,b_3,\cdots,b_n\}$

关系 $R\subseteq A\times B$，关系 R 可以用矩阵 $M_R=[m_{ij}]$来表示，

$$m_{ij}=\begin{cases}1 & (a_i,b_j)\in R\\ 0 & (a_i,b_j)\notin R\end{cases}$$

$$M_{I_A}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$M_Q=\begin{pmatrix}0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\quad M_p=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

反之，给定一个矩阵 M，我们可以得到一个关系, 记为 R_M。

例如，设 $A=\{a_1,a_2,a_3\},B=\{b_1,b_2,b_3,b_4\}$

$$M=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

则

$$R=\{(a_1,b_1),(a_1,b_2),(a_1,b_3),(a_1,b_4),(a_2,b_2),\\(a_2,b_4),(a_3,b_3)\}$$

因此，以后我们就不再区分关系 R 与关系矩阵 M_R，统一使用 R 来表示关系或有限论域上的关系矩阵。

由关系派生的集合 Sets Arising from Relations

理解：关系（有、无）类似于函数（显式表达式），关系与函数的相似与不同处（更多的表述，我们将在第五章进行刻画）。

定义域 Dom(R)　domain of R

假定关系 $R\subseteq A\times B$，

$Dom(R)=\{x\mid\exists y\in B,(x,y)\in R\}\subseteq A$，即，关系 R 中的元素（序对）的第一个元素所组成的集合；

$Dom(I_A)=\{1,2,3,4\}=A$
$Dom(Q)=\{1,2,3\}=A-\{4\}$
$Dom(P)=\{1,2,3,4\}=A$

值域 Ran(R)　range of R

$Ran(R)=\{y\mid\exists x\in A,(x,y)\in R\}\subseteq B$，即，关系 R 中的元素（序对）的第二个元素所组成的集合。

$Ran(I_A)=\{1,2,3,4\}=A$

$Ran(Q)=\{2,3,4\}=A-\{1\}$

$Ran(P)=\{1,2,3,4\}=A$

设 R 是 A 到 B 的一个关系，$R\subseteq A\times B$，$A_1\subseteq A$，则 A_1 关于关系 R 的像集 $R(A_1)$ 为

$R(A_1)=\{y\mid \exists x\in A_1, (x,y)\in R\}\subseteq B$, the R-relative set of A_1.

即，关系 R 中的元素（序对）的第一个元素属于 A_1，其所对应的第二个元素所组成的集合。

例如，$A=\{a,b,c\}$, $B=\{u,v,w\}$, R 是 A 到 B 的关系，则 $A\times B=\{(a,u),(a,v),(a,w),(b,u),(b,v),(b,w),(c,u),(c,v),(c,w)\}$,

R 是 $A\times B$ 的一个子集合。假设

$R=\{(a,u),(a,v),(b,u),(c,v),(c,w)\}$,

如果 $A_1=\{a,c\}$, 则 $R(A_1)=\{u,v,w\}$。

特征函数：$R(A_1)(y)=\bigvee_{(x,y)\in R} A_1(x)$ ，

约定： $\underset{\Phi}{\vee} A(x)=0$, 其中 “$\vee$” 是上确界。

$R(A_1)(y)=1 \Leftrightarrow y \in R(A_1) \Leftrightarrow \textit{there exists } x \in A_1,$
$\textit{such that } (x,y) \in R, \textit{ so } \underset{(x,y)\in R}{\vee} A_1(x)=1$

$R(A_1)(y)=0 \Leftrightarrow y \notin R(A_1) \Leftrightarrow \textit{ for every } x \in A_1,$
$\textit{we have } (x,y) \notin R, \textit{ so } \underset{(x,y)\in R}{\vee} A_1(x)=0$

特别地,
$A_1=\{x\}$, $R(\{x\})=R(x)=\{y\in B \mid (x, y)\in R\}$,
称为 x 关于关系 R 的像集。

其特征函数，$R(x)(y)=\bigvee_{(x', y)\in R} \{x\}(x')$
$= \bigvee_{(x, y)\in R} \{x\}(x)=R(x, y)$

投影与截影

设 R 是集合 X 和 Y 组成的乘积集合的子集合,

$R \subseteq X \times Y$, **则 R 在 X 上的投影为**

$R_X = \{x \mid \exists (x,y) \in R\}$,

特征函数：$R_X(x)=\underset{y\in Y}{\vee} R(x,y)$

R 在 Y 上的投影为

$R_Y=\{y\mid \exists(x,y)\in R\}$，

特征函数：$R_Y(y)=\underset{x\in X}{\vee} R(x,y)$

R 在 x 处的截影为

$R|_x=\{y\mid (x,y)\in R\}$，

特征函数：$R|_x(y)=R(x,y)$

R 在 y 处的截影为

$R|_y=\{x\mid (x,y)\in R\}$，

特征函数：$R|_y(x)=R(x,y)$

显然有，$R_X=\underset{y\in Y}{\cup} R|_y$，$R_Y=\underset{x\in X}{\cup} R|_x$

$R|_x=((\{x\}\times Y)\cap R)_Y,\ R|_y=((X\times\{y\})\cap R)_X$

设 R 是 X 到 Y 的一个关系，$R \subseteq X \times Y$，$A_1 \subseteq X$，则 A_1 关于关系 R 的像集 $R(A_1)$ 为

$$R(A_1) = ((A_1 \times Y) \cap R)_Y$$

$$R(A_1)(y) = \underset{x \in X}{\vee} [(A_1(x) \wedge Y(y)) \wedge R(x,y)]$$

$$= \underset{x \in X}{\vee} [A_1(x) \wedge R(x,y)]$$

例如，A={a, b, c}, B={u, v, w}, R 是 A 到 B 的关系，

R={(a, u), (a, v), (b, u), (c, v), (c, w)},

如果 A_1={a, c}, 则

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(A_1)(y) = \underset{x \in X}{\vee} [A_1(x) \wedge R(x,y)] = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R(A_1) = \{u, v, w\}$$

经典决策模型

特别地，$A_1=\{x\}$，x 关于关系 R 的像集 R(x) 为

$$R(x)=((\{x\}\times Y)\cap R)_Y=R|_x$$

就是 R 在 x 处的截影。

特征函数公式：

$$A\bigcup B:\ (A\bigcup B)(x)=A(x)+B(x)-A(x)B(x)$$
$$=A(x)\vee B(x)$$
$$A\bigcap B:\ (A\bigcap B)(x)=A(x)B(x)=A(x)\wedge B(x)$$

定理 1 假定关系 $R\subseteq A\times B$，$A_1\subseteq A$， $A_2\subseteq A$， 则

(a) If $A_1\subseteq A_2$, then $R(A_1)\subseteq R(A_2)$.

(b) $R(A_1\cup A_2)=R(A_1)\cup R(A_2)$.

(c) $R(A_1\cap A_2)\subseteq R(A_1)\cap R(A_2)$.

证明： (a)

$\forall\ y\in R(A_1)$, *then there exists* $x\in A_1$ *such that*

$(x,y)\in R$, *so we have* $x\in A_2$ *and* $(x,y)\in R$

therefore, we have $y\in R(A_2)$

或

$$R(A_1)(y)=\bigvee_{(x,y)\in R}A_1(x)\le\bigvee_{(x,y)\in R}A_2(x)=R(A_2)(y)$$

(b)

$$For\ every\ y\in Y,\ R(A_1\cup A_2)(y)=\bigvee_{(x,y)\in R}(A_1\cup A_2)(x)$$

$$=\bigvee_{(x,y)\in R}(A_1(x)\vee A_2(x))=(\bigvee_{(x,y)\in R}A_1(x))\vee$$

$$(\bigvee_{(x,y)\in R}A_2(x))=R(A_1)(y)\vee R(A_2)(y)$$

$$=(R(A_1)\cup R(A_2))(y)$$

(c)

$$For\ every\ y\in Y,\ R(A_1\cap A_2)(y)=\bigvee_{(x,y)\in R}(A_1\cap A_2)(x)$$

$$=\bigvee_{(x,y)\in R}(A_1(x)\wedge A_2(x))\le\bigvee_{(x,y)\in R}A_1(x)=R(A_1)(y)$$

With the same reason, we have

$$R(A_1\cap A_2)(y)\le\bigvee_{(x,y)\in R}A_1(x)=R(A_2)(y)$$

Therefore, we have:

$$R(A_1\cap A_2)(y)\le R(A_1)(y)\wedge R(A_2)(y)$$

$$Namely,\ R(A_1\cap A_2)\subseteq R(A_1)\cap R(A_2)$$

定理 2　假定关系 R⊆A×B，S⊆A×B．如果 ∀a∈A, R(a)=S(a)，则 R=S．（逐点定义）

$\forall\,(a,b)\in R$, $and\ R(a)=\{y\,|\,(a,y)\in R\}=S(a)$
$then\, b\in R(a)=S(a)$, $thus\ we\ have\ (a,b)\in S$,
$we\ have\ R\subseteq S.$
$Similarly,\ we\ have\ S\subseteq R.$
$Therefore,\ we\ have\ R=S$

关系与有向图 The Digraph of a Relation

设 A 是一个有限集合，R 是 A 上的一个关系，R⊆A×A，我们可以使用图来表达。

称序对 G=(V,E)为图。其中，V 表示顶点集合，E 表示边集合（顶点之间的连线，称之为边）。进一步，如果顶点之间的连线具有方向性，则称该图为有向图。

例如，设 A={1,2,3,4}，R 是 A 上的一个关系，记

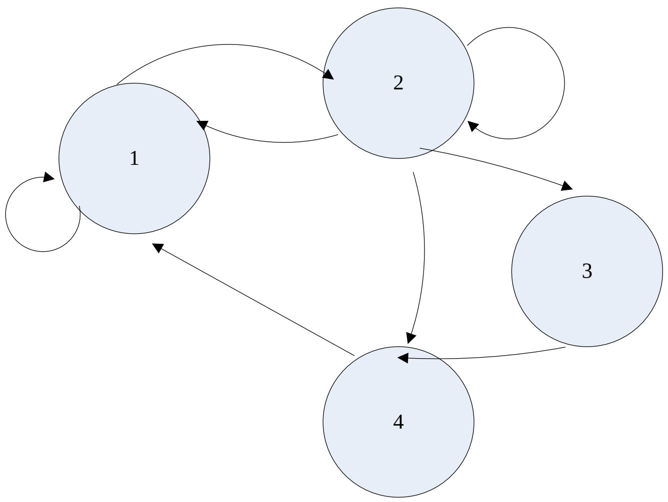
R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),

(2, 4), (3, 4), (4, 1)}
则由关系 R 可以得到如下的关系矩阵

$$R=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\1&0&0&0\end{pmatrix}$$

同时，设顶点为 1, 2, 3, 4，R 中的元素就构成顶点之间的边，于是就可以得到如下图：
R 中的元素(ai, aj)表示在图中存在从顶点 i 到顶点 j 的一条边，特别地，若 ai=aj，则表示在顶点 i 处存在一条环路。

R={(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 4), (4, 1)}



顶点的入度：进入该顶点的边数；
顶点的出度：离开该顶点的边数。

关于图的详细了解，我们将在第七章讲述。

由上述可知，针对有限论域，关系、矩阵和图是相互等价的。即，

由关系可以确定矩阵和图，由矩阵可以确定关系和图，由图可以确定关系和矩阵

Homework P126 22,23

P134-135 18,22,24,28

4.3 关系和图的路径 Paths in Relations and Digraphs

假定 R 是集合 A 上的一个关系，从顶点 a 到顶点 b 的长度为 n 的路径指的是一个序列 π： $a, x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}, b$

即，以顶点 a 为起点，顶点 b 为终点，中间有 n-1 个不同的顶点 $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}$ 且满足 aRx_1, $x_1Rx_2, \cdots\cdots,$ $x_{n-1}Rb$，因此，它们构成一条链。

例如， 1,2,5,4,3 是长度为 4 的路径；1,2,5,1 是长度为 3 的路径。

特别地，起点和终点为同一个顶点的路径称之为环。如上述中的 1,2,5,1.

路径的合成 composition

设 π_1：$a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}$, 和 π_2：$b_1, b_2, \cdots, b_{m+1}$, 分

别是长度为 n 和 m 的两条路径，如果 $b_1=a_{n+1}$（首尾相连），则其合成

$\pi_2 \circ \pi_1$：$a_1, a_2, \cdots, a_{n+1}, b_2, \cdots, b_{m+1}$，就是长度为 n+m 的路径。

接下来，我们定义关系的合成运算“。”，关系的合成运算又被称为关系的乘法，在有限论域中，就构成矩阵的乘法。（见第一章）

设 R 是 A 到 B 的一个关系，S 是 B 到 C 的一个关系，则称 $R \circ S$ 是 A 到 C 的复合（合成）关系，指的是

$$(x,z) \in R \circ S \Leftrightarrow \exists y \in B \ \ such\ that$$

$$(x,y) \in R \ and \ (y,z) \in S$$

因此，使用特征函数表示为

$$(R\circ S)(x,z)=1 \Leftrightarrow \exists y\in Y,\ R(x,y)\wedge S(y,z)=1$$

$$R(x,y)\wedge S(y,z)\le (R\circ S)(x,z)\ \ \textit{for every}\ y\in Y$$

$$\textit{then we have}\ \bigvee_{y\in Y}(R(x,y)\wedge S(y,z))$$

$$\le \bigvee_{y\in Y}(R\circ S)(x,z)=(R\circ S)(x,z)$$

$$\textit{And}\ (R\circ S)(x,z)\le 1=R(x,y_0)\wedge S(y_0,z),\ \exists y_0\in Y,$$

$$\le \bigvee_{y\in Y}(R(x,y)\wedge S(y,z))$$

$$\text{So,}(R\circ S)(x,z)=\vee_{y\in Y}(R(x,y)\wedge S(y,z))$$

“。”运算，关系复合（合成）新鲜否？函数的复合

特别地，关于 A, B, C 均是有限论域时，其特征函数的计算为：

$$(R\circ S)(a_i,c_j)=\bigvee_{k=1}^{n}(R(a_i,b_k)\wedge S(b_k,c_j))$$

$$(R\circ S)_{ij}=\bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge s_{kj})$$

例如：A={1, 2, 3, 4}, B={3, 5, 7}, C={1, 2, 3}, R={(2, 7), (3, 5), (4, 3)}, S={(3, 3), (7, 2)}, 则换成矩阵表示，有：

$$R=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&1&0\end{pmatrix},\text{则}\ R\circ S=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

即

$R\circ S\subseteq A\times C$,是乘积集合$A\times C$的子集，并且

$A=\{1,2,3,4\}, C=\{1,2,3\}$

$(R\circ S)_{22}=1,\ (R\circ S)_{43}=1$, 故，$R\circ S=\{(2,2),(4,3)\}$

另外，我们也可以在 R，S 中来寻找中间桥梁(节点)，使得 x, y, z 连接起来(顺起来)，

例如，(2, 7) ∈R, (7, 2) ∈S,　2, 7, 2

(4, 3) ∈R, (3, 3) ∈S,　4, 3, 3

因此，$R\circ S$={(2, 2), (4, 3)},

有限论域上的关系合成变成关系矩阵的乘法。

例如：A={1,2,3,4},R,S 是 A 上的关系，
R={(1,2),(1,3),(3,4)},S={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)}， 则 $R\circ S=S\circ R$=R

$$R=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

则 $$R\circ S=S\circ R=\begin{pmatrix}0&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}=R$$

上述关系矩阵 S 就是 4 阶单位矩阵（单位元），关于矩阵乘法“。”

关系合成的性质：

单调性：$S\subseteq T\Rightarrow R\circ S\subseteq R\circ T;\ S\circ R\subseteq T\circ R$

$R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$， $R\circ(S\cap T)\subseteq(R\circ S)\cap(R\circ T)$

$(S\cup T)\circ R=(S\circ R)\cup(T\circ R)$， $(S\cap T)\circ R\subseteq(S\circ R)\cap(T\circ R)$

$R\circ(S\circ T)=(R\circ S)\circ T$

这些性质的证明可以由特征函数来得到。

$$
\begin{aligned}
(R\circ(S\cup T))(x,z) &= \bigvee_{y\in Y}(R(x,y)\wedge(S\cup T)(y,z)) \\
&= \bigvee_{y\in Y}(R(x,y)\wedge(S(y,z)\vee T(y,z))) \\
&= \bigvee_{y\in Y}[(R(x,y)\wedge S(y,z))\vee(R(x,y)\wedge T(y,z))] \\
&= \bigvee_{y\in Y}(R(x,y)\wedge S(y,z))\vee\bigvee_{y\in Y}(R(x,y)\wedge T(y,z)) \\
&= (R\circ S)(x,z)\vee(R\circ T)(x,z) \\
&= [(R\circ S)\cup(R\circ T)](x,z)
\end{aligned}
$$

因此，我们就可以由 R 出发，来定义矩阵的幂运算，如， $R^2, R^3, \cdots, R^n$,

其中

针对有限论域，我们定义幂运算：

特别地，如果 R=S，则关系的幂运算定义如下：

$$
R^2 = R\circ R,\quad r_{ij}^{(2)} = \bigvee_{k=1}^{n}(r_{ik}\wedge r_{kj})
$$

$$
R^n = R^{n-1}\circ R
$$

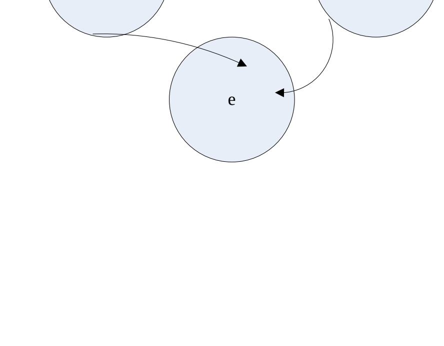
$$(R^n)^m = R^{nm}, \quad R^n \circ R^m = R^{n+m}$$

$$xR^2y \Leftrightarrow \exists x_1, xRx_1, x_1Ry,$$
$$xR^3y \Leftrightarrow \exists x_2, xR^2x_2, x_2Ry \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, xRx_1, x_1Rx_2, x_2Ry$$
……
$$xR^ny \Leftrightarrow \exists x_1, x_2, \cdots\cdots, x_{n-1}, xRx_1, x_1Rx_2,$$
$$x_2Rx_3 \cdots\cdots, x_{n-1}Ry$$

于是，可以帮助我们来计算 R 的幂次方。

例如，A={a,b,c,d,e},R 是 A 上的关系，R={(a,a),(a,b),(b,c),(c,d),(c,e),(d,e)},

其图如下。



一方面，我们可以从图中来寻找路径。
因为 aRa 和 aRa, 所以 aR^2a,
因为 aRa 和 aRb, 所以 aR^2b,
因为 aRb 和 bRc, 所以 aR^2c,
因为 bRc 和 cRd, 所以 bR^2d,
因为 bRc 和 cRe, 所以 bR^2e,
因为 cRd 和 dRe, 所以 cR^2e.

于是，我们有，

R^2={(a, a), (a, b), (a, c), (b, d), (b, e), (c, e)}

另一方面，我们也可以通过计算来得到。

我们知道，关系 R 可以由矩阵 R 来表示, 即，

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$R^2 = R \circ R,\quad r_{ij}^{(2)} = \bigvee_{k=1}^{n} (r_{ik} \wedge r_{kj})$$

这样，我们有， R^2={(a, a), (a, b), (a, c), (b, d)，(b, e), (c, e)}

显然，相对于看图来说，代数计算显然更方便一些。因为有时图形复杂，看图容易出现偏差。

特别地，我们有：**R^∞关联关系 connectivity relation for R**

x R^∞y 表示在 R 中存在从 x 到 y 的某条路径。

因此，我们有 $R^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$

假定 R 是集合 A 上的关系，R^*是 R 的可达关系，x R^* y 指的是 x=y 或 x R^∞y，即，x=y 或存在从 x 到 y 的某条路径。

因此，用矩阵的语言来表示，我们有 $R^* = I_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，其中 I_n是 n 阶单位矩阵。

4.4 关系的性质 Properties of Relations

特殊的关系

自反和非自反关系 **Reflexive and Irreflexive Relations**

假定 **R** 是集合 **A** 上的关系， **$\forall a \in A$,** 如果 **$(a,a) \in R$**，则称 **R** 是自反关系 **Reflexive Relations**；

$\forall a \in A$, 如果 **$(a,a) \notin R$**，则称 **R** 是非自反关系 **Irreflexive Relations**。

例如，相等关系，整除关系，小于等于关系是自反关系；小于关系是非自反关系。

对称 **Symmetric**，非对称 **asymmetric**，反对称 **antisymmetric Relations** 关系

假定 **R** 是集合 **A** 上的关系， **$\forall a,b \in A$,** 如果 **$(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$**，则称 **R** 是对称关系

Symmetric Relations;

假定 **R** 是集合 **A** 上的关系，$\forall$**a,b**$\in$**A**，如果 **(a,b)**$\in$**R**$\Rightarrow$**(b,a)**$\notin$**R**，则称 **R** 是非对称关系 **asymmetric relations;**

假定 **R** 是集合 **A** 上的关系，$\forall$a,b$\in$A，如果 **(a,b)**$\in$**R** $\wedge$ **(b,a)**$\in$**R** $\Rightarrow$ **a=b**，则称 **R** 是反对称关系 **antisymmetric relations;**

R 是反对称关系等价于

a$\neq$**b**$\Rightarrow$ **(a,b)** $\notin$**R** 或者 **(b,a)** $\notin$**R**

例如，相等关系是对称关系，小于关系，真包含关系是非对称关系，小于等于关系，包含关系是反对称关系。

A={1,2,3,4}，R={(1,2),(2,2),(3,4),(4,1)}不是对称关系；否则(2,1)$\in$R，(4,3)$\in$R。

也不是非对称关系；否则(2,2)$\in$R，(2,2) $\notin$R，

矛盾。

是反对称关系。因为 $a \neq b \Rightarrow$ $(a,b) \notin R$ 或者 $(b,a) \notin R$。这里 $1 \neq 2$，我们有 $(2,1) \notin R$，$1 \neq 3$，我们有 $(1,3) \notin R$，$(3,1) \notin R$， $1 \neq 4$，我们有 $(1,4) \notin R$，$2 \neq 3$，我们有 $(2,3) \notin R$，$(3,2) \notin R$，$2 \neq 4$，我们有 $(2,4) \notin R$，$(4,2) \notin R$， $3 \neq 4$，我们有 $(4,3) \notin R$。

假定 R 是集合 A 上的关系， $\forall a,b,c \in A$，如果 $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$，则称 R 是传递关系 Transitive relations.（足标相连，字母相顺（连接））

.

大于等于，小于等于，恒等，整除关系，包含关系，兄弟关系等都是传递关系。平方关系显然不满足传递性。

a 是 b 的平方，b 是 c 的平方，但是 a 不是 c 的平方。

根据关系、关系矩阵与图的性质，我们可以总结如下（有限论域为例）：

自反关系，主对角线元素为 1，图中顶点有环， $I_A \subseteq R$；

非自反关系，主对角线元素为 0，图中顶点没有环，$I_A \cap R = \phi$；

对称关系，对称矩阵，图中的两顶点之间如果有边，则一定是一对方向相反的有向边；

非对称关系， $r_{ii} = 0, r_{ij} = 1, i \neq j \Rightarrow r_{ji} = 0$，图中两顶点之间如果有边，则一定是一条单独的有向边，顶点不存在有环；

反对称关系， $i \to j且j \to i \Rightarrow i = j$ ，即 $r_{ij} = 1且r_{ji} = 1 \Rightarrow i = j$，$i \neq j \Rightarrow r_{ji} = 0或r_{ij} = 0$，图中两顶点之间如果有边，则一定是一条单

独的有向边，也许存在顶点有环；

传递关系，图中 **1**，**2** 两顶点之间有边，**2,3** 两顶点之间有边，则从 **1** 到 **3** 一定有边。称为足标相连。

关系合成运算“。”满足下列性质(单调性)：

1） $R \subseteq S \Rightarrow R \circ T \subseteq S \circ T$；

2） $R \subseteq S \Rightarrow T \circ R \subseteq T \circ S$

证明：使用特征函数方法可以得到

$$\forall (x,z) \in A \times C,\ then\ we\ have\ (R \circ T)(x,z)$$
$$= \bigvee_{y \in Y} (R(x,y) \wedge T(y,z)) \le \bigvee_{y \in Y} (S(x,y) \wedge T(y,z))$$
$$= (S \circ T)(x,z)$$

引理：关系 **R** 是传递的当且仅当 $R^2 \subseteq R$。

证明：**R** 是传递关系，**∀a,b,c∈A**，如果

(a,b)∈R ∧ (b,c)∈R ⇒ (a,c)∈R，

即，**R(a,b)=1** 且 **R(b,c)=1**，则 **R(a,c)=1**，

R(a,b) ∧ R(b,c) ≤R(a, c)，对于所有的 b 均成立

因此，我们有

$$R^{(2)}(a,c)=\bigvee_{b\in A}(R\ (a,b)\wedge R\ (b,c))\le R(a,c)$$

即，$R^2\subseteq R$

反之，$R^2\subseteq R$，并且**(a,b)∈R ∧ (b,c)∈R**，则有

$$R(a,c)\ge R^{(2)}(a,c)=\bigvee_{x\in A}(R\ (a,x)\wedge R\ (x,c))=1$$

因此，$R(a,c)=1$，即，R 是传递关系。

定理 **1**：关系 **R** 是传递的，则 $\mathbf{R^n\subseteq R}$，对于所有的 n≥1。即

$$R\ \supseteq\ R^2\ \supseteq\ R^3\ \supseteq\ \cdots R^n\ \supseteq\ \cdots$$

证明：**1）传递性：** $R^2\subseteq R$

2）合成运算的单调性：

根据 $R\subseteq S\Rightarrow R\circ T\subseteq S\circ T$**，则有** $R^3\subseteq R^2$,

3）数学归纳法： $R^{n+1}\subseteq R^n$,

因此，**$R^n \subseteq R$**。

定理：关系 R 是自反关系，则

$R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \cdots R^n \subseteq \cdots$。

证明：

$For\ every\ (i, j),$

$$r_{ij}^{(2)} = \mathop{\vee}_{k=1}^{n}(r_{ik} \wedge r_{kj}) \geq r_{ii} \wedge r_{ij} = 1 \wedge r_{ij} = r_{ij}$$

$so,\ we\ have\ R \subseteq R^2$

单调性，数学归纳法： $R^n \subseteq R^{n+1}$,

R(A1)={y∈B| x ∈ A1 且(x,y)∈R}

A1={x}时，

R(x)={y∈B| (x,y)∈R}, x 关于关系 R 的像集。

即，序对中的第二个元素所对应的集合

定理 2　　R 是 A 上关系，则

(a)　R 自反关系，则∀a∈A, a∈R(a);

(b)　R 对称关系，则 a∈R(b) 当且仅当 b∈R(a);

(c)　R 传递关系，则 b∈R(a), c∈R(b) ⇒

$c \in R(a)$

证明 1) 自反关系，$\forall a \in A$, $R(a,a)=1$, $(a,a) \in R$, 所以 $a \in R(a)$。

2) 对称关系，$\forall a \in A$, $a \in R(b)$，$(b,a) \in R$, 因为 R 是对称关系，故，$(a,b) \in R$, 即 $b \in R(a)$;

反之，也成立。

3) $b \in R(a)$, $c \in R(b)$，即$(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$, 因为 R 是传递关系，故，$(a,c) \in R$,
因此， $c \in R(a)$.

对于集合 A，偏序关系（partial order relation）R

1. 自反性 Reflexive

$\forall a \in A$, $(a,a) \in R$

2. 反对称性 antisymmetric

$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a=b$

3. 传递性 Transitive

$(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$.

称（A, R）为偏序集。

大于等于，小于等于，包含关系是偏序关系。

例如，$\subseteq$对于集合(幂集 P(A)）是偏序关系，（P(A), $\subseteq$）称为偏序集。
<=对于集合（区间 I=[0, 1]）是偏序关系，（I, <=）称为偏序集。

例如，A={a,b,c}，则(P(A), $\subseteq$)可以排列树状结构。而（I, <=）可以排列串型结构。

全序关系（线性序关系 linear order relation）

偏序关系 1, 2, 3,（+ 4）
4.$\forall a,b \in A$,有$(a,b)\in R \vee (b,a) \in R$. (可比较性)

称（A, R）为全序集。

大于等于>=，小于等于<=，是全序关系。

<=对于实数区间 I=[0，1]是全序关系，（I, <=）称为全序集。

Homework

P146-147: 10,12,25,26

选作题：试定义区间数的序关系，并讨论之。

$\bar{a} = [a,\ b]$, **a,b∈R(实数集)，称[a,b]为区间数。**

4.5 等价关系 Equivalence Relations

假定 **R** 是集合 **A** 上的一个关系，称
R 是 **A** 上的等价关系，如果 **R** 满足：

1． 自反性 **R(x,x)=1；**

2． 对称性 **R(x,y)=R(y,x)；**

3． 传递性 $R^2 \subseteq R$。

如果集合 **A** 是有限论域，则关系 **R**，又可称为关系矩阵，故，等价关系 **R** 也称为等价矩阵。其特点为：其主对角线上的元素为 **1**，

对称位置上的元素相等，且具有传递性（$R^2 \subseteq R$）。

例如，三角形全等，整数集合（**Z**）上的同余关系是等价关系

n∈Z+，a,b∈Z，a≡b(n) iff n|(a-b)，验证，同余关系是等价关系

“ iff ” = “ if and only if ”

试判断集合 **A={1,2,3,4}**上的关系 **R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,4),(4,3),(3,3),(4,4)}** 的性质，则关系矩阵表示为：

$$R=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

从矩阵中的元素可以看出，主对角线上元素为 **1**，对称位置上的元素取值相等，故，关系 **R** 满足自反性，对称性，并且通过计算，可以得到：

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = R$$

显然，$R^2 \subseteq R$成立，因此，**R** 是等价关系。也可以称为等价矩阵。

1) 等价矩阵的形式；2）等价矩阵（关系）R 满足$R^2 = R$，为什么？

等价关系与划分

设 A 为一个非空集合，A 的划分 P 指的是 A 的非空子集所组成的集合，满足：

A= $A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_n$，　$A_i \neq \varnothing$ ，$A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$，i, j=1, 2, ……, n ．（不交不漏）
记 P=｛A_1, A_2, ……, A_n｝.

则 P=｛A_1, A_2, ……, A_n｝是 A 的一个划分，**P** 中的元素（集合）被称为 **P** 的分块, A_i 是 **P** 的第 **i** 个分块。

由前面，我们知道，划分不是唯一的。

下面，我们来讨论等价关系与划分（分块）之间的关系。

首先，我们研究基于划分来构造集合 A 上的一个等价关系。

定理 1：设 P 是集合 A 的一个划分，P 中的元素（集合）被称为 P 的分块，R 是集合 A 上的一个关系：

aRb 当且仅当 a,b 属于 P 的同一分块

则 R 是集合 A 上的等价关系。

证明：1)自反性，a 属于它自身的分块，则 aRa；
2)对称性，aRb，表明 a,b 属于相同的分块，显然，b,a 也属于相同的分块，因此有 bRa;
3)传递性，aRb，bRc，表明 a,b 同属于一个

分块，b,c 同属于一个分块，由于划分的不交性，则表明 a,b,c 属于相同的分块，因此，我们有 aRc.

故，R 是等价关系。

例如，A={1,2,3,4}, A 的划分 P={{1,2},{3,4}}, 则我们由划分 P 定义的 A 上的关系 R 为：

R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3),(3,4),(4,3),(4,4)},其矩阵表示为

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$R^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = R$$

可以验证 R 满足自反性，对称性，传递性。

其次，我们研究基于等价关系所确定集合 A 的划分。

引理 1 设 R 是 A 上等价关系，$R(a)=\{y\in A|(a,y)\in R\}$ (a 关于关系 R 的像集)，则

aRb 当且仅当 $R(a)=R(b)$

证明："→"：$\forall c\in R(a)$，则 $(a, c)\in R$，由于 R 是等价关系，由对称性，即 $(c, a)\in R$，并且 aRb，$(a,b)\in R$，由传递性，则有 $(c,b)\in R$. 因此由对称性，有 $(b,c)\in R$，$c\in R(b)$. 于是有 $R(a)\subseteq R(b)$；

同理有 $R(b)\subseteq R(a)$.
因此，$R(a)=R(b)$。

"←"：因为 R 是等价关系，由自反性，则有 $(a, a)\in R$，则 $a\in R(a)=R(b)$，因此 $a\in R(b)$，故，我们有 $(b, a)\in R$，由对称性，可知 $(a, b)\in R$，即 aRb。

引理 2 设 R 是 A 上的等价关系，则

R(a)∩R(b)≠∅当且仅当 R(a)=R(b) (非空即相等)

证明：“→”：若交集非空，则存在 c∈R(a)∩R(b)，因此有 c∈R(a), c∈R(b)，则(a, c)∈R, (b, c)∈R，由于 R 是等价关系，根据对称性，则有(c, b)∈R，由传递性，我们有(a, b)∈R，即 aRb，由引理 1 可知，R(a)=R(b)。

“←”：若 R(a)=R(b)，则显然 R(a)∩R(b)≠∅。

定理 2：设 R 是 A 上的等价关系，P＝{R(x)|x∈A}，则 P 是 A 的一个划分。且基于划分 P 所确定的关系是等价关系 R.

证明：根据自反性，∀a∈A, a∈R(a)，则对于 **x∈A, R(x)**非空，因此，$A=\cup P=\bigcup_{a\in A} R(a)$,

由引理 1，2 可知，R(a)∩R(b)=∅ 或 R(a)＝R(b)。如果交集非空，则两者相等。

因此 P 是 A 的一个划分。

a, b 属于 P 的同一分块, a, b∈R(x), 则(x, a), (x, b) ∈R, 由于 R 是等价关系, 则由对称性和传递性，有(a, x), (x, b)∈R，则 (a, b)∈R, 即 aRb. 因此，P 确定的等价关系就是 R.

称 R(a)为 a 的等价类，用[a]表示，划分 P 记作 A/R，又称为商集。

例如，整数集合 Z 关于自然数 n（>0）的同余关系的划分，记作 Z_n=Z/(n)={[0],[1],…,[n-1]}，表示的是模 n 后的余数 0,1,2,…,n-1 所代表的类。

进一步，在等价类里，我们还可以定义一些运算。例如，

[a]+[b]=[a+b],

[a]×[b]=[a×b].

注：代表元的非歧义性

Homework p151-152 : 16, 20

4.6 关系的运算 Operations on Relations

第一章定义的布尔矩阵并、交、余运算是基于有限论域的关系运算，现在给予推广。

设 R 和 S 都是 A 到 B 的关系，则 R, S⊆A×B.

R∩S, R∪S， R^c 都是 A 到 B 的关系。

1.关系的交

(a,b)∈R∩S iff

(a,b)∈R 且(a,b)∈S

2. 关系的并

(a,b)∈R∪S iff

(a,b)∈R 或(a,b)∈S

3. 关系的余 complementary relation

R^c =A×B-R,

(a,b)∈ R^c iff (a,b)∉R.

4. 关系的逆 inverse relation

R^{-1}⊆B× A,
(b, a)∈R^{-1} iff (a, b)∈R.
类似于，代数矩阵中的转换矩阵。

因此，我们有性质
$(R^{-1})^{-1}$=R
Dom(R^{-1})=Ran(R),
Ran(R^{-1})=Dom(R).

例如，设 **A** 是全体实数集，**R** 是 **A** 上的关系≤，**S** 是 **A** 上的关系≥，则

$R^c = ">", \quad S^c = "<"$

并且

$aR^{-1}b \Leftrightarrow a \le^{-1} b \Leftrightarrow bRa \Leftrightarrow b \le a \Leftrightarrow a \ge b$
故，我们有

$\le^{-1} = \ge, \quad \ge^{-1} = \le$

$$a(R\cap S)b \Leftrightarrow aRb, aSb \Leftrightarrow a=b$$

$$a(R\cup S)b \Leftrightarrow aRb \text{ or } aSb \Leftrightarrow a\le b \text{ or } a\ge b$$

由关系、图和矩阵之间的转换，我们可以得到与关系运算相对应的图和矩阵

定理 1：设 R 和 S 都是 A 到 B 的关系，R, S⊆A×B，则

(a) $\mathbf{R\subseteq S \Rightarrow R^{-1}\subseteq S^{-1}}$（单调性）

(b) $\mathbf{R\subseteq S \Rightarrow S^{c}\subseteq R^{c}}$

(c) $\mathbf{(R\cap S)^{-1}= R^{-1}\cap S^{-1}}$

$\mathbf{(R\cup S)^{-1}= R^{-1}\cup S^{-1}}$

(d) $(R\cap S)^{c}=R^{c}\cup S^{c}$，$(R\cup S)^{c}=R^{c}\cap S^{c}$

证明：

a)
$$(a,b)\in R^{-1}\Rightarrow (b,a)\in R\subseteq S$$
$$\Rightarrow (b,a)\in S \Rightarrow (a,b)\in S^{-1}$$

因此，$\mathbf{R^{-1}\subseteq S^{-1}}$

同理类推。

定理 2

设 R 和 S 都是 A 上关系，R,S⊆A×A，则
(a) R 自反⇔$I_A \subseteq$ R。
(b) R 和 S 自反⇒ R∩S, R∪S 自反。
(c) R 和 S 自反⇒ R^{-1}, S^{-1}， $R \circ S$ **自反**

(d) R 自反⇔ R^c **非自反。**

注：I_A 是 A 上的单位矩阵所对应的关系（单位关系）

定理 3

设 R 是 A 上关系，R⊆A×A，则
(a) R 对称 ⇔ R=R^{-1}
(b) R 反对称 ⇔ R∩R^{-1}⊆I_A
(c) R 非对称 ⇔ R∩R^{-1}=∅

证明：b) “→”

$$\forall (a,b) \in R \cap R^{-1} \Rightarrow (a,b) \in R,$$

$$(b,a) \in R \Rightarrow aRb, bRa$$

$$(Because\ R\ is\ antisymmetric) \Rightarrow a = b$$

“←”

$$Because\ R\bigcap R^{-1}\subseteq I_A,\ then\ \forall(a,b)\in R\bigcap R^{-1}$$
$$\Rightarrow(a,b)\in R,\ (b,a)\in R\Rightarrow aRb,bRa$$
$$\Rightarrow(a,b)\in I_A\Rightarrow a=b$$

定理 4

设 R 和 S 都是 A 上关系，R,S⊆A×A，则
(a) R 对称 $\Rightarrow$ R^{-1}, R^c 对称。
(b) R,S 对称⇒R∩S, R∪S 对称。

定理 5

设 R 和 S 都是 A 上关系，R, S⊆A×A，则
(a) $(R\cap S)^2\subseteq R^2\cap S^2$.
(b) R,S 传递⇒R∩S 传递。
(c) R,S 是等价关系⇒R∩S 是等价关系。

a) 根据合成运算的单调性

$$R\bigcap S\subseteq R\Rightarrow(R\bigcap S)^2\subseteq(R\bigcap S)\circ R\subseteq R^2$$

$$R\bigcap S\subseteq S\Rightarrow(R\bigcap S)^2\subseteq(R\bigcap S)\circ S\subseteq S^2$$

因此，

$(R \bigcap S)^2 \subseteq R^2 \bigcap S^2$

b) R,S 传递，则

$R^2 \subseteq R, S^2 \subseteq S$，故，

$(R \bigcap S)^2 \subseteq R^2 \bigcap S^2 \subseteq R \bigcap S$

因此，**R∩S** 满足传递性。

c) R,S 是等价关系，于是 **R, S** 满足自反性和对称性，因此 **R∩S** 满足自反性和对称性，由上可知，**R∩S** 满足传递性，故 **R∩S** 是等价关系。

关系合成 **composition** 的性质

$$(R \circ S)(a,c) = \bigvee_{b \in B} (R(a,b) \wedge S(b,c))$$

定理：设 R 是集合 A 到 B 的关系，S 是集合 B 到 C 的关系， $A_1 \subseteq A$，则

$(R\circ S)(A_1)=S(R(A_1))$。

$R(A_1)=\{y\in B \mid \exists x\in A_1, (x, y)\in R\}$

$$
\begin{aligned}
\forall c\in(R\circ S)(A_1) &\Rightarrow \exists a\in A_1, such\ \ that\,(a,c)\in R\circ S \\
&\Rightarrow \exists b\in B, such\ that\,(a,b)\in R, \\
&\qquad (b,c)\in S \\
&\Rightarrow b\in R(A_1)\Rightarrow c\in S(R(A_1))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\forall c\in S(R(A_1)) &\Rightarrow \exists b\in R(A_1), such\ that\,(b,c)\in S \\
&\Rightarrow \exists a\in A_1, such\ \ that\,(a,b)\in R, \\
&\qquad (b,c)\in S \\
&\Rightarrow \exists a\in A_1, (a,c)\in R\circ S \\
&\Rightarrow c\in(R\circ S)(A_1)
\end{aligned}
$$

定理 7 结合律

设 R 是集合 A 到 B 的关系，S 是集合 B 到 C 的关系, T 是集合 C 到 D 的关系,则

$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T)$.

由合成公式、结合律、分配律，可以得到。

定理 8

$(R \circ S)^{-1} = S^{-1} \circ R^{-1}$

Homework P167：8, 10

闭包 closure

假定 R 是非空集合 A 上的关系，在 R 上添加一些性质，从而构成新的关系 S，这种最小的 S，被称为关系 R 的闭包。

显然，关系 R 的闭包具有下面特点：

1)具有某些性质; 2)$R \subseteq S$; 3)闭包是最小的。

下面将性质具体化：

设 R 是 A 上关系，$R \subseteq A \times A$.

R 的自反闭包，是 A 上包含 R 的最小的自反关系，记为 r(R)。即，1) r(R)是自反关系;

2) $R \subseteq r(R)$; 3) 对于任何包含 R 的自反关系 R_1, $R \subseteq R_1$，均有 $r(R) \subseteq R_1$。

R 的对称闭包，是 A 上包含 R 的最小的对称关系，记为 $s(R)$。即，1) $s(R)$是对称关系; 2) $R \subseteq s(R)$; 3) 对于任何包含 R 的对称关系 R_1, $R \subseteq R_1$，均有 $s(R) \subseteq R_1$。

R 的传递闭包，是 A 上包含 R 的最小的传递关系，记为 $tr(R)$。即，1) $tr(R)$是传递关系; 2) $R \subseteq tr(R)$; 3) 对于任何包含 R 的传递关系 R_1, $R \subseteq R_1$，均有 $tr(R) \subseteq R_1$。

因此，我们有：

$r(R)=R \cup I_A$,　$s(R)=R \cup R^{-1}$,　$tr(R)=R^{\infty}$.

4.8 传递闭包和 Warshall 算法 Transitive Closure and Warshall's Algorithm

定理 1 设 R 是 A 上的一个关系，则 R 的传递闭包 tr(R)= $R^{\infty}=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^{n}$

由于 $R\circ(S\cup T)=(R\circ S)\cup(R\circ T)$

证明: 1) 包含性，R⊆tr(R);

2) 传递性，

$$tr(R)\circ tr(R)=\bigcup_{n=1}^{\infty}R^{n}\circ\bigcup_{m=1}^{\infty}R^{m}=\bigcup_{k=2}^{\infty}R^{k}\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}R^{n}=tr(R)$$

3) 最小性，

设 R⊆S，S 满足传递性 $S^{2}=S\circ S\subseteq S$**，则运用数学归纳法，可以得到：**

$R^{k}\subseteq S^{k}$**，其中 k 是自然数，并且由于 S 是传递关系，因此有** $S^{k}\subseteq S^{k-1}\subseteq\cdots\subseteq S^{2}\subseteq S$**，因此，我们有 tr(R)=R^∞⊆S.**

例 1 A＝{1，2，3，4}，

R={(1,2),(2,3),(3,4),(2,1)}

求 tr(R)

解　tr(R)= R^{∞}.

1．作图法。

2. $R^{\infty}=\bigcup_{n=1}^{\infty} R^{n}$。

计算

$$R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad R^{2}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},$$

$$R^{3}=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix},\qquad R^{4}=R^{2}=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$R^5 = R^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

因此，$tr(R) = R \cup R^2 \cup R^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

有限论域上计算 $R^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$，为什么计算到有限步，就可以中止呢？

定理 2　设 $|A|=n$, $R \subseteq A \times A$.

则 $R^\infty = R \cup R^2 \cup \cdots\cdots \cup R^n$.

证明.

$tr(R) = R^\infty = R \cup R^2 \cup \cdots \cup R^n \cup \cdots$.

由 R^∞ 可知，若 $(a, b) \in R^\infty$, 则有路径 a，x_1，x_2，$\cdots\cdots$，x_m，b，如有重复顶点 x_i，x_j，则

x_i，x_j 之间构成环路，于是可以去掉环路。依次类推，于是可假设路径 a，x_1，x_2，……，x_m，b 中没有重复顶点，这样一来，其长度至多为 n，因此(a，b)∈R^k，k≤n。

或者，我们需要证明 $\bigcup_{k=n+1}^{\infty} R^k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} R^k$

因为

$$r_{ij}^{(2)} = \bigvee_{i_1=1}^{n} (r_{ii_1} \wedge r_{i_1 j})$$

$$r_{ij}^{(3)} = \bigvee_{i_1=1}^{n} \bigvee_{i_2=1}^{n} (r_{ii_1} \wedge r_{i_1 i_2} \wedge r_{i_2 j})$$

……

$$r_{ij}^{(k)} = \bigvee_{i_1=1}^{n} \bigvee_{i_2=1}^{n} \cdots \bigvee_{i_{k-1}=1}^{n} (r_{ii_1} \wedge r_{i_1 i_2} \wedge \cdots \wedge r_{i_{k-2} i_{k-1}} \wedge r_{i_{k-1} j})$$

中间插入 k-1 个顶点，

即，当 k≥n+1 时，　我们有

$$r_{ij}^{(k)} \le \bigvee_{m=1}^{n} r_{ij}^{(m)}$$

故，结论成立。

Warshall 算法

当元素较多时，图上计算传递闭包的方法比较麻烦，Warshall 在 1962 年提出的一个求关系 R 传递闭包的有效算法，称之为 Warshall 算法。其具体过程如下：

设 $A=\{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$，R 是 A 上关系，其关系矩阵 $M=[m_{ij}]$。

(1) 置新矩阵 W=M；（赋值语句）

(2) i=1；（计算第一列）

(3) 对 j（行）进行循环，j=1,2,…,n, 如果 W[j,i]=1, 则对 k=1,2,..,n, W[j,k]=W[j,k]∨W[i,k]；（将第 j 行和第 i 行各对应元素进行逻辑相加(取大运算)，结果赋值为第 j 行）

(4) i=i+1；（循环语句）

(5) 如果 i<=n, 则转到步骤（3），否则停止。

同例 1 计算传递闭包 $M=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$，设 W=M,

i=1 时，考虑第 1 列，则有 W[2,1]=1，于是将第二行和第一行各对应元素进行逻辑相加，仍然记为第二行，得到

$$W=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

i=2 时，考虑第 2 列，则有 W[1,2]=1，W[2,2]=1，于是将第一行和第二行各对应元素进行逻辑相加，仍然记为第一行；将第二行和第二行各对应元素进行逻辑相加，仍然记为第二行，得到

$$W=\begin{bmatrix}1&1&1&0\\1&1&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

i=3 时，考虑第 3 列，则有 W[1,3]=1，W[2,3]=1，于是将第一行和第三行各对应元

素进行逻辑相加，仍然记为第一行；将第二行和第三行各对应元素进行逻辑相加，仍然第二行，得到

$$W=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i=4 时, 考虑第 4 列，则有 W[1,4]=1, W[2,4]=1, W[3,4]=1, 于是将第一行、第二行、第三行分别和第四行各对应元素进行逻辑相加，仍然分别记为第一行、第二行、第三行，得到

$$W=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

故，矩阵 M 的传递闭包为 $tr(M)=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

注：若图 G 中两顶点 vi 和 vj 之间有一条路径，但没有 vi 到 vj 的直接路径，则在图 G 中增加一条从 vi 到 vj 的直接路径。

计算关系的乘幂，可以得到：

$$R=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad R^2=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$R^3=\begin{pmatrix}0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\qquad R^4=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$$tr(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

定理 3　设 R 和 S 是 A 上的等价关系，则包含 R 和 S 的最小等价关系是

$(R\cup S)^{\infty}$

证明

1. 自反性

$I_A \subseteq R, I_A \subseteq S$

$\Rightarrow I_A \subseteq R\cup S \subseteq (R\cup S)^\infty$,

2. 对称性

R, S 是对称的，故 $R\cup S$ 也是对称的，数学归纳法证明$(R\cup S)^k$是对称的，因此，$(R\cup S)^\infty$是对称的。

3. 传递性

$(R\cup S)^\infty$是传递闭包，故$(R\cup S)^\infty$满足传递性.

因此，$(R\cup S)^\infty$是 $R\cup S$ 的等价关系。

例 A＝{1,2,3,4,5}，R，S 是 A 上的关系，
R={(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),
(3,3),(3,4),(4,3),(4,4),(5,5)}
S={(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),
(5,4),(4,5), (5,5)}
计算 A/R, A/S, 包含 $R\cup S$ 的最小的等价关系。

解

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

通过计算，可以验证 R 和 S 均是等价关系。

因此，分别可以得到其相应的等价划分：

A/R={1,2}∪{3，4}∪{5}
A/S={1}∪{2}∪{3}∪{4,5}
现在，我们来计算
R∪S＝{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),
(3,3),(3,4),(4,3,),(4,4),
(5,4),(4,5), (5,5)}

其矩阵为

$$R \cup S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可以发现：虽然 R，S 是等价关系，但是 R∪S 并不是等价关系。因为 R∪S 不满足传递性。

计算如下：

$$R \cup S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(R \cup S)^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

可以发现：$(R \cup S)^2 \subseteq R \cup S$ 不成立。即传递性不成立。

$$(R\bigcup S)^4=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}=(R\bigcup S)^2$$

$$tr(R\bigcup S)=(R\bigcup S)^4=\begin{pmatrix}1&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\\0&0&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$=(R\bigcup S)\bigcup(R\bigcup S)^2\bigcup(R\bigcup S)^3\bigcup(R\bigcup S)^4\bigcup(R\bigcup S)^5$$

$$\neq R\bigcup S$$

于是，包含 R∪S 的最小的等价关系为，tr(R∪S)=(R∪S)^4

通过改造，可以发现 tr(R∪S)满足自反性、对称性和传递性，是等价关系。因此，可以进行等价划分：

A/(R∪S)$^\infty$＝{1,2}∪{3,4,5}

注：在上述计算传递闭包中，为什么不需要计算$(R\cup S)^3$和$(R\cup S)^5$？

相似关系（自反性，对称性）的改造，如何添加传递性？将其改造成为等价关系？

设 A={1,2,..,n},R 是 A 上的相似关系，k 是自然数，使用数学归纳法可以证明如下结论。

结论 1：R^k是相似关系（自反性，对称性）;
结论 2：单调性$R \subseteq R^2 \subseteq \cdots\cdots \subseteq R^n \subseteq \cdots$

结论 3：$tr(R) = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^k = \bigcup_{k=1}^{n} R^k = R^n$

结论 4:存在自然数k, $k \le n$, 使得$tr(R) = R^k$。对一切大于 k 的自然数 l，我们有$tr(R) = R^k = R^l$。

这样表明,我们可以从相似矩阵（相似关系）出发,利用平方法来求得其传递闭包 tr(R).

$$R \to R^2 \to R^4 \to \cdots \to R^{2^l} \to \cdots$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

等价关系（矩阵）的形式（格式）

定理：设有限论域 $A = \{a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n\}$，

$$R = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdots \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$ 是 A 上的等价关系，

则

1) $a_i R a_j \Leftrightarrow r_i \geq r_j$, 即， $r_{ik} \geq r_{jk}, k = 1,2,\cdots,n$

2) $a_i \; R \; a_j \Leftrightarrow r_i = r_j$

证明：1）设 $a_i R a_j$，考虑向量 r_i, r_j

$r_{jk}=1 \Rightarrow a_j R a_k \Rightarrow a_i R a_k \Rightarrow r_{ik}=1$,因此，$r_i \geq r_j$

反之，$r_i \geq r_j \Rightarrow r_{ij} \geq r_{jj}=1 \Rightarrow a_i R a_j$

2) R 是等价关系，$a_i R\ a_j \Leftrightarrow a_i R a_j$ 且 $a_j R a_i$，

由 1) 可知，我们有 $a_i R a_j \Leftrightarrow r_i \geq r_j$，并且。

$a_j R a_i \Leftrightarrow r_j \geq r_i$，因此，$r_i = r_j$。

Homework P174-175：2,16,18

拟序关系（自反性，传递性）

对于有限集合 A 来说，R 就是一个主对角线元素为 1 的传递矩阵。

因此，设 R 是 A 上的一个拟序关系，在 A 中我们定义关系“～”：

x～y$\Leftrightarrow xRy$ 且 yRx

则，“～”就是由拟序关系 R 所诱导的等价关系。

首先，x～x,因为 xRx 且 xRx;
其次，x～y,因为 xRy 且 yRx,
最后，x～y，y～z,故 xRy 且 yRx，yRz 且 zRy,根据传递性,因此,有 xRz 且 zRx,故，x～z

因此，我们可以得到 A 的分类:A/～,

A/～={〈x〉|x∈A}

〈x〉↦〈y〉$\Leftrightarrow xRy$,则↦为 R 诱导的偏序关系。(⩾,偏序关系)

定理：设 $A=\{a_1,a_2,\cdots\cdots,a_n\}$,

$$R=\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \cdots \\ r_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{pmatrix}$$ 是 A 上的拟序关系，

则

1)

$a_i R a_j \Leftrightarrow r_i \geq r_j$,即， $r_{ik} \geq r_{jk}, k=1,2,\cdots,n$

2) $a_i \sim a_j \Leftrightarrow r_i = r_j$

证明：1）设 $a_i R a_j$，考虑向量 r_i, r_j

$r_{jk}=1 \Rightarrow a_j R a_k \Rightarrow a_i R a_k \Rightarrow r_{ik}=1$,因此， $r_i \geq r_j$

反之， $r_i \geq r_j \Rightarrow r_{ij} \geq r_{jj}=1 \Rightarrow a_i R a_j$

2) $a_i \sim a_j \Leftrightarrow a_i R a_j$ 且 $a_j R a_i$，由 1)可知，

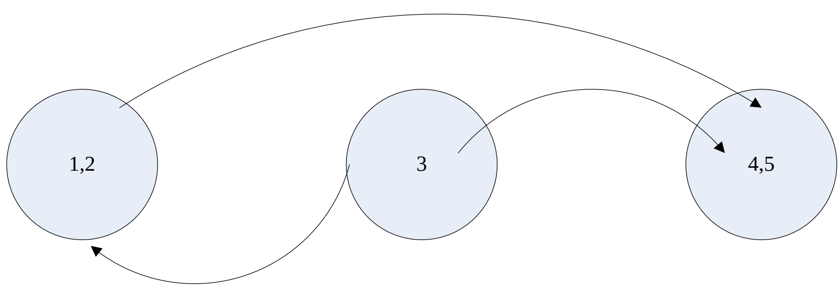
我们有 $a_i R a_j \Leftrightarrow r_i \geq r_j$，并且。

$a_j R a_i \Leftrightarrow r_j \geq r_i$, 因此， $r_i = r_j$。

例如

$$R=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

由于 $r_{ii}=1, R\circ R=R$，故 R 是拟序关系，其分类以及不同类之间的偏序如下图所示。



如果(A, ≤)，(B, ≤)是偏序集，
则(A×B，≤)是乘积偏序 product partial order，其中“≤”定义为：

$$(a,b) \leq (a',b') \Leftrightarrow a \leq a',\ b \leq b'$$

乘积偏序(A×B，≤)中，令

$$(a,b) < (a',b') \Leftrightarrow a < a' \text{ or } a = a', b < b'$$

“<”被称为字典序 lexicographic

推广之

（A，≤）是偏序，
$A^n = A \times A \times \cdots\cdots \times A$
$(a_1,a_2,\ldots\ldots,a_n) < (b_1,b_2,\ldots\ldots,b_n)$
$\Leftrightarrow$ $a_1<b_1$ 或 $a_1=b_1$, $a_2<b_2$ 或……, 或 $a_1=b_1$，$a_2=b_2$，……，$a_{n-1}=b_{n-1}$, $a_n<b_n$

上界 upper bound

偏序集 A 中，$B \subseteq A$，$a \in A$，$\forall b \in B$，$b<a$.

下界 lower bound

偏序集 A 中，$B \subseteq A$，$a \in A$，$\forall b \in B$，$a<b$.

上确界 LUB least upper bound

最小上界，$\vee$

下确界 GLB greatest lower bound

最大下界，$\wedge$