微积分I考前辅导

张争茹

北京师范大学 数学科学学院

2016 年12 月 23 日

函数的概念

- **函数的定义**：设数集$D \subset \mathbf{R}$,则称映射$f: D \to \mathbf{R}$为定义在D上的函数，通常简记为$y = f(x), x \in D$，其中x称为自变量，y称为因变量．(考点：求函数定义域,值域)
- **有界性**：若存在K_1，使得$\forall x \in X \subset D$，有$f(x) \leq K_1$成立，则称$K_1$为$f(x)$在$X$上的**上界**;若存在$K_2$，使得$\forall x \in X \subset D$，有$f(x) \geq K_2$成立，则称$K_2$为$f(x)$在$X$上的**下界**; 若存在$M$，使得$\forall x \in X \subset D$，有$|f(x)| \leq M$成立，则称$f(x)$在$X$上**有界**.
- **单调性**：对于区间上的任意两点,当$x_1 < x_2$时，恒有$f(x_1) < f(x_2)$,则称函数在区间上**单调增加**; 对于区间上的任意两点,当$x_1 < x_2$时，恒有$f(x_1) > f(x_2)$,则称函数在区间上**单调减少**;
- **奇偶性**： $f(x)$的定义域D关于原点对称，若$\forall x \in D$，$f(x) = f(-x)$，则$f(x)$为**奇函数**; 若$\forall x \in D$，$f(x) = f(x)$，则$f(x)$为**偶函数**;
- **周期性**：若存在一个正数l，使得$\forall x \in D$，有$x \pm l \in D$，且$f(x + l) = f(x)$恒成立，那么称$f(x)$为**周期函数**，l称为函数的**周期**.

- **反函数：** 设函数$f: D \to f(D)$是单射，则它存在逆映射 $f^{-1}: f(D) \to D$,称此映射f^{-1}为函数f的反函数.
- **复合函数：** 设函数$y = f(u)$的定义域为D_f，函数$u = g(x)$的定义域为D_g，且其值域$R_g \subset D_f$，则由下式确定的函数 $y = f[g(x)], x \in D_g$称为由函数$u = g(x)$与函数$y = f(u)$构成的复合函数，它的定义域为D_g. 记作：$(f \circ g)(x) = f[g(x)]$.
- **初等函数：** 基本初等函数：$y = x^\mu (\mu \in \mathbf{R})$, $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$, $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$, $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x$, $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x$. 由常数和初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可以用一个式子表示的函数，称为**初等函数**.

- **数列极限定义：** 设x_n为一数列，如果存在常数a，对于任意给定的正数ϵ，总存在正整数N，使得当$n > N$时，不等式$|x_n - a| < \epsilon$都成立，那么就称常数a是数列x_n的极限，或者称数列x_n收敛于a，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \text{ 或 } x_n \to a(n \to \infty).$$

- **极限的唯一性：** 如果数列x_n收敛，那么它的极限唯一.
- **收敛数列的有界性：** 如果数列x_n收敛，那么数列x_n一定有界.
- **收敛数列的保号性：** 如果$\lim_{n\to\infty} x_n = a$且$a > 0$(或$a < 0$)，$\exists N \in \mathbb{N}^+$，当$n > N$时，都有$x_n > 0$(或$x_n < 0$).

- **数列极限运算法则：** 设x_n, y_n为数列, 若

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A, \lim_{n\to\infty} y_n = B,$$

则

(1)

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = A \pm B;$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = A \cdot B;$$

(3)$y_n \neq 0 (n = 1, 2, \cdots)$, $B \neq 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B};$$

- **函数极限定义：** 设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义，如果存在常数A,$\forall\epsilon(\epsilon>0)$, $\exists\delta>0$, 使得当x满足$0<|x-x_0|<\delta$时，对应的函数值$f(x)$满足$|f(x)-A|<\epsilon$, 则常数A叫做函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限，记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \text{ 或} f(x)\to A(x\to x_0).$$

自变量趋于无穷大时函数极限定义：

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\epsilon>0, \exists X>0, \text{当} |x|>X\text{时,有} |f(x)-A|<\epsilon.$$

- **左右极限：** 左极限：

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

右极限：

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A.$$

函数极限存在的充要条件是左右极限均存在且相等.

- **函数极限的唯一性：** 函数极限存在必唯一.
- **函数极限的局部有界性：** 若

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A,$$

则存在$M > 0$和$\delta > 0$, 使得当$0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 有$|f(x)| \leq M$.

极限运算法则

- 两个无穷小之和是无穷小.
- 有界函数与无穷小的乘积是无穷小.
- 若$\lim f(x) = A, \lim g(x) = B$, 则
  1. $\lim[f(x) \pm g(x)] = \lim f(x) \pm \lim g(x) = A \pm B.$
  2. $\lim[f(x) \cdot g(x)] = \lim f(x) \cdot \lim g(x) = A \cdot B.$
  3. $B \neq 0, \lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \dfrac{A}{B}.$

两类重要极限

- **极限存在准则**(1)单调有界数列必有极限. (2)夹逼准则.
- **两类重要极限**

(1)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

(2)

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e.$$

- 直接代入

$$\lim_{x\to 3}(x^2-x)=6.$$

- 因式分解

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=6.$$

- 分子或分母有理化

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\frac{1}{2}.$$

- 重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=2.$$

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x+3})^x=\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x+3})^{-(x+3)\cdot(-\frac{x}{x+3})}=\frac{1}{e}.$$

- 变量替换

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}(\text{令}x=t^6)=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}.$$

求极限的方法

- 三角恒等变换

$$\lim_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}=\lim_{x-a}\frac{-2\sin\frac{x-a}{2}\cdot\sin\frac{x+a}{2}}{x-a}=-\sin a.$$

- 等价无穷小

$$\sin x\sim x,\tan x\sim x,1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$$

$$e^x-1\sim x,\frac{a^x-1}{x}\sim\ln a,(1+x)^\alpha\sim\alpha x\ (x\to 0).$$

- 利用数列极限存在准则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}=1(\text{夹逼准则})$$

- **连续定义：** 设函数$y=f(x)$在x_0的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0),$$

那么就称函数$f(x)$在x_0点连续.

- **左右连续：** 如果

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0^-) = f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在点x_0点左连续.
如果

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0^+) = f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在点x_0点右连续.

- **连续函数：** 在区间每一点都连续的函数，叫做在该区间上的连续函数.

- **间断点:**设函数$f(x)$在x_0的某去心邻域内有定义, 如果$f(x)$满足以下情形之一

  (1)在x_0无定义;

  (2)在x_0有定义, 但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$不存在;

  (3)在x_0有定义, 且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在, 但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$;
  那么称x_0为$f(x)$的间断点.

- **间断点类型：** $f(x)$在$\cup^{\circ}(x_0)$有定义,在x_0可能有定义也可能无定义：
  第一类间断点：
  1.$f(x_0^-)=f(x_0^+)\neq f(x_0)$或$f(x_0^-)=f(x_0^+)$但$f$在$x_0$处无定义，则称$x_0$为可去间断点.

  2.$f(x_0^-),f(x_0^+)$均存在但不相等 则称x_0为跳跃间断点.

  第二类间断点： 不是第一类间断点的任何间断点.无穷间断点和振荡间断点属于第二类间断点.

- **例题** 判断

$$f(x)=\cos^2\frac{1}{x}$$

的间断点及类型.($x=0$第二类间断点).

- **连续函数的和,差,积,商的连续性:**
  $f(x), g(x)$, 在x_0连续, 则$f \pm g, f \cdot g, \dfrac{f}{g}(g(x_0) \neq 0)$都在$x_0$连续.
- **复合函数的连续性:**
  $f[g(x)]$由$u = g(x)$和$y = f(u)$复合而成, $\cup^\circ(x_0) \subset D_{f \circ g}$, 若 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = u_0$, 而$f(u)$在$u_0$连续, 则 $\lim\limits_{x \to x_0} f[g(x)] = \lim\limits_{u \to u_0} f(u)$ $= f(u_0)$.
- **基本初等函数的连续性:**
  基本初等函数在其定义域内都是连续的.

- **有界性与最值定理:**在闭区间上连续的函数在该区间上有界且一定能取到最大值和最小值.
- **零点定理:**$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)\cdot f(b)<0$, 则在开区间(a,b)内至少有一点ξ, 使得$f(\xi)=0$.
- **介值定理:**$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$f(a)=A, f(b)=B, A\neq B$, 则对于A,B之间的任意一个数C, 在开区间(a,b)内至少有一点ξ, 使得$f(\xi)=C$.

[常见问题]

1. 函数
   - 求函数定义域的问题;
   - 论函数简单性质的问题(单调性、奇偶性、周期性);
   - 求函数值或求函数表达式的问题.
2. 极限
   - 讨论极限存在性的问题;
   - 利用极限性质(保序性)处理的问题;
   - 利用重要极限求极限的问题;
   - 利用无穷小的比较(等价无穷小)处理的问题.
3. 连续
   - 讨论函数在一点连续性的问题;
   - 找出函数间断点并对其分类的问题;
   - 利用连续函数性质(最值存在性、介值存在定理、零点存在定理)处理的问题.

导数定义

- **定义**

$$f^{'}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0) + \Delta x - f(x_0)}{\Delta x}$$

称为$f(x)$在x_0处的导数.

- **单侧导数**

左导数：

$$f_{-}^{'}(x_0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

右导数：

$$f_{+}^{'}(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

函数在一点可导的充要条件是左右导数均存在且相等.

- **可导性与连续性的关系** 函数在某点可导必定在该点连续，在某点连续不一定可在该点可导.

- **函数的和,差,积,商的求导法则:**设$u(x),v(x)$都在x点具有导数,则

(1)
$$[u(x)\pm v(x)]^{'}=u^{'}(x)\pm v'(x);$$
(2)
$$[u(x)\cdot v(x)]^{'}=u^{'}(x)\cdot v(x)+v^{'}(x)\cdot u(x);$$
(3)
$$[\frac{u(x)}{v(x)}]^{'}=\frac{u^{'}(x)\cdot v(x)-v^{'}(x)\cdot u(x)}{v^{2}(x)}\qquad (v(x)\neq 0).$$

- **反函数求导法则：** 如果函数$x=f(y)$在区间I_y内单调，可导，且$f'(y)\neq 0$，那么它的反函数$y=f^{-1}(x)$ 在区间I_x内也可导，且
$$[f^{-1}(x)]'=\frac{1}{f'(y)}\text{或}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}.$$
- **复合函数求导法则:** 如果$u=g(x)$在点x可导，而$y=f(u)$，在点$u=g(x)$可导，那么复合函数$y=f[g(x)]$在点x可导，且其导数为
$$\frac{dy}{dx}=f'(u)\cdot g'(x)\text{或}\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}.$$

- $C' = 0$;
- $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$,
  $(\tan x)' = \sec^2 x$, $(\cot x)' = -\csc^2 x$.
- $(a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1)$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}(a > 0, a \neq 1)$,
  $(x^\mu)' = \mu x^{\mu - 1}$.
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$,
  $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$.

- **莱布尼茨公式：**

$$(uv)^{(n)} = \Sigma_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}.$$

- **例题：** $y = x^2 e^{2x}$, 求$y^{(20)}$.

解：设$u = e^{2x}$, $v = x^2$, 则$u^{(k)} = 2^k e^{2x} (k = 1, 2, \cdots, 20)$, $v' = 2x$, $v'' = 2$, $v^{(k)} = 0, (k = 3, 4, \cdots, 20)$, 代入莱布尼茨公式, 得

$$\begin{aligned} y^{(20)} &= (x^2 e^{2x})^{(20)} \\ &= 2^{20} e^{2x} \cdot x^2 + 20 \cdot 2^{19} e^{2x} \cdot 2x + \frac{20 \cdot 19}{2!} 2^{18} e^{2x} \cdot 2 \\ &= 2^{20} e^{2x} (x^2 + 20x + 95). \end{aligned}$$

- **例题：** 求由方程$e^y+xy-e=0$所确定的隐函数的导数$\frac{dy}{dx}$.

解：方程两边分别对x求导，得

$$\frac{d}{dx}(e^y+xy-e=0)=e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dx}{dy}=0$$

则

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+e^y}(x+e^y\neq 0).$$

- **例题：** 计算求由摆线的参数方程

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$$

所确定的函数$y = y(x)$的二阶导数.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{a\sin t}{a(1-\cos t)} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \cos\frac{t}{2}(t \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}) \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dt}(\cos\frac{t}{2}) \cdot \frac{1}{dx/dt} = -\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{a(1-\cos t)} \\
&= -\frac{1}{a(1-\cos t)^2}(t \neq 2n\pi, n \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

- **函数的微分：** $dy = f^{'}(x)dx.$
- **例题1：** $y = \sin(2x+1)$，求dy.
  解：令$u = 2x+1$，则

$$\begin{aligned} dy &= d(\sin u) = \cos u du = \cos(2x+1)d(2x+1) \\ &= \cos(2x+1)\cdot 2dx = 2\cos(2x+1)dx. \end{aligned}$$

- **例题2：** 在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立.
  $(1)d(\quad) = xdx;$
  $(2)d(\quad) = \cos\omega t dt(\omega \neq 0).$

[常见问题]

1. 利用定义判断函数在一点的可导性与可微性及求导数值或微分值的问题;
2. 利用导数定义求极限的问题;
3. 利用几何意义求导数值或求切线方程和法线方程的问题;
4. 利用四则运算法则或复合函数的链导法则求导数的问题;
5. 复合函数和隐函数求二阶导数的问题;
6. 简单函数($a^x, (1+x)^\alpha, \ln(1+x), \sin x, \cos x$)求高阶导数的问题。

- **罗尔定理:**如果函数$f(x)$满足:
  1. 在闭区间$[a,b]$上连续;
  2. 在开区间(a,b)内可导;
  3. 在区间端点处的函数值相等,即$f(a)=f(b)$,

  则在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$, 使得$f^{'}(\xi)=0$.

- **拉格朗日中值定理:**如果函数$f(x)$满足:
  1. 在闭区间$[a,b]$上连续;
  2. 在开区间(a,b)内可导;

  则在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$, 使得
  $f(b)-f(a)=f^{'}(\xi)(b-a)$.

- **柯西中值定理:**如果函数$f(x)$及$F(x)$满足:
  1. 在闭区间$[a,b]$上连续;
  2. 在开区间(a,b)内可导;
  3. 对任一$x\in(a,b)$, $F'(x)\neq 0$,

  则在(a,b)内至少有一点$\xi(a<\xi<b)$, 使得$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f^{'}(\xi)}{F^{'}(\xi)}$.

- **定理1:**如果函数$f(x),F(x)$满足：

  1. 当$x\to a$，时，函数$f(x)$及$F(x)$都趋于0;
  2. 在点a的去心邻域内，$f^{'}(x)$及$F^{'}(x)$都存在且$F^{'}(x)\neq 0$;
  3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{'}(x)}{F'(x)}$存在或为无穷大.

  则$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f^{'}(x)}{F'(x)}$.

- **定理2:**如果函数$f(x),F(x)$满足：

  1. 当$x\to\infty$，时，函数$f(x)$及$F(x)$都趋于0;
  2. 当$|x|>N$时，$f^{'}(x)$及$F^{'}(x)$都存在，且$F^{'}(x)\neq 0$;
  3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{'}(x)}{F'(x)}$存在或为无穷大.

  则$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f^{'}(x)}{F'(x)}$.

- **泰勒定理1:**如果函数$f(x)$在x_0处具有n阶导数，那么存在x_0的一个邻域，对于该邻域内的任一x，有：

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$+R_n(x)$，其中

$$R_n(x)=o((x-x_0)^n).$$

- **泰勒定理2:**如果函数$f(x)$在x_0的某个邻域内具有$n+1$阶导数，那么$\forall x\in U(x_0)$ 有：

$$f(x)=f(x_0)+f^{'}(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{''}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$+R_n(x)$，其中

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}.$$

泰勒公式

1. 对给定的函数能写出Peano余项，拉格朗日余项的泰勒公式
2. 熟练写出常见的几种函数的泰勒公式，如$\sin x$, $\cos x$, e^x, $\ln(1+x)$等

单调性判定与曲线凹凸性

- **单调性判定：** 函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导.
  1. 在(a,b)内$f'(x) \geq 0$，且等号仅在有限多个点处成立，那么函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调增加.
  2. 在(a,b)内$f'(x) \leq 0$，且等号仅在有限多个点处成立，那么函数$y=f(x)$在$[a,b]$上单调减少.

- **曲线凹凸性判定：** 函数$f(x)$在区间$[a,b]$上连续,在(a,b)内具有一阶和二阶导数，那么
  1. 若在(a,b)内$f''(x) > 0$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凹的;
  2. 若在(a,b)内$f''(x) < 0$，则$f(x)$在$[a,b]$上的图形是凸的;

- **极值点判定1：** 函数$f(x)$在x_0处连续，在x_0的去心邻域$\cup^\circ(x_0,\delta)$内可导.
  1. 若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f^{'}(x)>0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f^{'}(x)<0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值.
  2. 若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f^{'}(x)<0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f^{'}(x)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值.
  3. 若$x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$时，$f^{'}(x)$的符号保持不变，则$f(x)$在$x_0$处没有极值.

- **极值点判定2：** 函数$f(x)$在x_0处具有二阶导数且$f^{'}(x_0)=0, f^{''}(x_0)\neq 0$, 则
  1. $f^{''}(x)<0$, 则$f(x)$在x_0处取得极大值.
  2. $f^{''}(x)>0$, 则$f(x)$在x_0处取得极小值.

1. 最值
2. 拐点

[常见问题]

1. 直接利用费马引理、罗尔定理或拉格朗日中值定理处理的问题;
2. 判断函数单调性和求函数极值的问题;
3. 证明函数不等式的问题;
4. 讨论方程实根个数的问题;
5. 求函数最大、最小值的问题;
6. 判断函数的凹凸性和求拐点的问题;
7. 利用洛必达法则求不定式极限的问题;
8. 求曲线的水平或铅直渐近线的问题;
9. 泰勒公式的应用.

- 原函数的定义：若$F'(x)=f(x), x\in I$, 则$F(x)$是$f(x)$的原函数; $f(x)$在区间I上的所有原函数可以表示为$F(x)+C$, 其中C是任一常数.
- 不定积分的定义与性质：$\int f(x)dx=F(x)+C$;

$$\int [f(x)+g(x)]dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx,$$

$$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx.$$

- 不定积分的换元积分法
(1)第一换元积分法(凑微分法); (2)第二换元积分法.
- 不定积分的分部积分法：
$\int u(x)dv(x)=u(x)v(x)-\int v(x)du(x)$.

[常见问题]

1. 利用原函数的概念与不定积分的定义处理的问题;
2. 求简单函数原函数的问题;
3. 利用凑微分法或分部积分法求不定积分的问题.

[典型题型]

- 第一换元积分法

$$\int \frac{e^{3\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\, dx \qquad \int \tan x\, dx \qquad \int \sec^6 x\, dx$$

- 第二换元积分法

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad (a > 0) \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} \quad (a > 0)$$

- 分部积分法

$$\int x^2 \arcsin x\ dx \qquad \int e^x \sin x\ dx \qquad \int \sec^3 x\ dx \qquad \int \ln^2 x\ dx$$

- 有理函数的积分

$$\int \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}\, dx \qquad \int \frac{x-3}{(x-1)(x^2-1)}\, dx$$

- 万能公式$u = \tan\frac{x}{2}(-\pi < x < \pi)$

$$\int \frac{1 + \sin x}{\sin x(1 + \cos x)}\, dx$$

[典型例题]

例1. 在(1) $\sin^2 x$, (2) $\cos^2 x$, (3)$1-\frac{1}{2}\sin 2x$, (4)$1-\frac{1}{2}\cos 2x$ 四个函数中，能成为函数$\sin 2x$的原函数的是(　).

A.(1)(2)　　B.(2)(3)　　C.(3)(4)　　D.(1)(4)

答案：**D**.

分析：本题主要考察了原函数的概念及简单运算.

例2. 已知$f(x)$的一个原函数为e^{x^2}, 则$\int xf'(x)dx=$ ( ).

A.$(2x^2-1)e^{x^2}+C$　　B.$(2x-1)e^{x^2}+C$
C.$(x^2-1)e^{x^2}+C$　　D.$(2x-1)xe^{x^2}+C$

答案:**A**.

分析: 本题主要考察了原函数的概念和不定积分的分部积分法.
因为e^{x^2}是$f(x)$的一个原函数, 所以$f(x)=(e^{x^2})'=2xe^{x^2}$, 从而

$$\int xf'(x)dx = xf(x)-\int f(x)dx = 2x^2e^{x^2}-e^{x^2}+C.$$

故选项A正确.

例3. 设$\int f(x)dx=\arctan x+C$,则$\int \frac{1}{f(x)}dx=(\quad)$.

A.$\frac{1}{\arctan x}+C$　B.$2x+C$　C.$1+x^2+C$　D.$x(1+\frac{1}{3}x^2)+C$

答案：**D.**

分析：本题主要考查了不定积分的概念.

因为设$\int f(x)dx=\arctan x+C$, 所以$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$,

$$\int \frac{1}{f(x)}dx=\int 1+x^2dx=x+\frac{1}{3}x^3+C.$$

故正确选项为D.

例4. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx =(\quad)$.

A. $\ln(\ln x) + C$　　B. $\ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + C$
C. $\ln x - \ln(\ln x) + C$　　D. $\ln x \cdot \ln(\ln x) + \ln x + C$

答案：**B**.

分析：本题主要考查了不定积分的凑微分法和分部积分法.
因为

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx = \int \ln(\ln x) d(\ln x) = \ln x \cdot \ln(\ln x) - \ln x + C,$$

所以正确选项为B.

- 定积分的定义：$\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$; 平均值$f = \dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$.
- 定积分的几何意义：当$f(x)\geq 0$时，$\int_a^b f(x)dx$大小与由$x=a, x=b, y=0$及$y=f(x)$围成的曲边梯形的面积相等.
- 定积分的性质

$$A.\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt;$$

B.线性性质:

$$\int_a^b [k_1 f(x) + k_2 g(x)]dx = k_1\int_a^b f(x)dx + k_2\int_a^b g(x)dx;$$

C.区间可加性: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$

D.函数奇偶性:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 0 & , \quad f(x)\text{是奇函数}, \\ 2\int_0^a f(x)dx & , \quad f(x)\text{是偶函数}; \end{cases}$$

E. 函数周期性：若函数$f(x)$以l为周期，则

$$\int_a^{a+l} f(x)dx = \int_0^l f(x)dx;$$

F. 比较定理：若$f(x) \geq g(x), x \in [a,b]$, 则 $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx;$

G. 积分中值定理：若函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，则存在$\xi \in (a,b)$, 使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

- 变限定积分函数

  A.变限定积分函数的定义：$F(x)=\int_a^x f(t)dt$;

  B.变限定积分函数的导数：当函数$f(x)$在$[a,b]$上连续时，

  $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ 可导，且$(\int_a^x f(t)dt)'=f(x)$.

- 牛顿—莱布尼兹公式：函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$在$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a).$$

- 定积分的换元积分法和分部积分法.

  注：掌握换元积分法和分部积分法的公式，并要了解利用换元积分法和分部积分法处理的一般问题：利用一个积分求另一个积分的问题，比较两个积分是否相等或将积分关系式变形的问题.

定积分的几何应用：

- 平面图形的面积问题；
- 旋转体的体积问题.

[常见问题]

1. 注意直角坐标系和极坐标系下的面积元素；弧长元素；旋转体体积元素等微元的表达；
2. 利用几何意义和性质（面积、函数奇偶性和周期性等）求积分值的问题;
3. 利用牛顿—莱布尼兹公式求积分值的问题;
4. 利用换元积分法和分部积分法求积分值或证明积分等式的问题;
5. 利用比较定理判断两个积分大小的问题;
6. 关于变限定积分函数（求导数、讨论性质等）的问题;
7. 求平面图形面积或旋转体体积的问题.

例1. 设$a>0$, 则定积分$I_1=\int_0^a \frac{x}{1+x}\,dx$与$I_2=\int_0^a \ln(1+x)dx$的大小关系是(　).

A.$I_1<I_2$　　B.$I_1=I_2$　　B.$I_1>I_2$　　D.与a的取值有关

答案:**A**.

分析:本题主要考查了定积分的比较定理和证明函数不等式的一般方法.
令$f(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)$, 则$f'(x)=-\frac{x}{(1+x)^2}\ (x>0)$且$f(0)=0$, 所以$f(x)=\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)<f(0)=0\ (x>0)$,
从而$I_1<I_2$.

例2. 设$I=\int_0^{\pi}\sin(\cos x)dx$, 则( ).

A.$I=1$ B.$I<0$ C.$0<I<1$ D.$I=1$

答案:**D**.

分析:主要考查了定积分的换元积分法和定积分的性质.
令$t=\cos x$,则$dx=-\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt$,从而

$$I=\int_0^{\pi}\sin(\cos x)dx=\int_1^{-1}-\frac{\sin t}{\sqrt{1-t^2}}dt.$$

由于$\dfrac{\sin t}{\sqrt{1-t^2}}$是奇函数,所以$\displaystyle\int_1^{-1}-\frac{\sin t}{\sqrt{1-t^2}}dt=0.$

例3. 设$f(x)$为连续函数，且

$\int_0^\pi f(x\sin x)\sin x dx = 1$, 则 $\int_0^\pi f(x\sin x)x\cos x dx =($ $)$.

A.0 B.1 C.-1 A.π

答案:**C**.

分析:主要考查了定积分的换元积分法和定积分的性质.因为

$$\int_0^\pi f(x\sin x)\sin x dx + \int_0^\pi f(x\sin x)x\cos x dx$$

$$= \int_0^\pi f(x\sin x)d(x\sin x) = \int_0^0 f(u)du = 0,$$

所以 $\int_0^\pi f(x\sin x)x\cos x dx = -\int_0^\pi f(x\sin x)\sin x dx = -1.$

例4. 设函数$f(x)$可导，且$f(0)=1, f^{'}(-\ln x)=x$, 则$f(1)=($ $)$.

A.$2-e^{-1}$ B.$1-e^{-1}$ C.$1+e^{-1}$ D.e^{-1}

答案:**A**.

分析:主要考查微积分基本公式及简单定积分的计算.
利用变量置换$t=-\ln x$, 得$f^{'}(t)=e^{-t}$.所以

$$f(1)-f(0)=\int_0^1 f^{'}(t)dt=\int_0^1 e^{-t}dt=1-e^{-1}.$$

故$f(1)=f(0)+1-e^{-1}=2-e^{-1}$.

例5. 当$x\geq 0$时,函数$f(x)$可导，有非负的反函数$g(x)$,且恒等式

$$\int_1^{f(x)} g(t)dt = x^2-1$$成立，则函数$f(x)=($　$)$.

A.$2x+1$　　B.$2x-1$　　A.x^2+1　　D.x^2

答案:**B.**

分析:本题考查了变限定积分求导、反函数概念和定积分性质.

由$\int_1^{f(x)} g(t)dt = x^2-1$, 两边求导,得$f'(x)g(f(x))=2x$,

又$g(f(x))=x$, 所以$f'(x)=2$, 即$f(x)=2x+C$.

又由$\int_1^{f(x)} g(t)dt = x^2-1$, 知$\int_1^{f(1)} g(t)dt=0$, 即$f(1)=1$,所以$C=-1$.

例6. 若连续函数$f(x)$满足$\int_0^x uf(x-u)du=-\sqrt{x}+\ln 2$,

则$\int_0^1 f(x)dx=($ $)$.

A.$-\frac{1}{2}$ B.0 C.$\frac{1}{2}$ D.1

答案:**A.**

分析:本题是微积分中定积分部分的问题，考查了定积分的换元积分法与变限定积分函数的求导法.

$$F(x)=\int_0^x uf(x-u)du=\int_x^0 (x-t)f(t)(-dt)$$
$$=x\int_0^x f(t)dt-\int_0^x tf(t)dt, \qquad (x-u=t)$$
$$F^{'}(x)=\int_0^x f(t)dt+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(t)dt,$$

所以$\int_0^x f(t)dt=-\frac{1}{2\sqrt{x}}$.从而$\int_0^1 f(x)dx=-\frac{1}{2}$.

- 利用合适的换元法: 去根号$u=\sqrt{2x-1}$ 恒等式$\sin^2 x+\cos^2 x=1$, $1+\tan^2 x=\sec^2 x$ 等
- 有理分式$\dfrac{P(x)}{Q(x)}$
- 需要熟练记住的导数公式$\mathrm{d}\tan x=\sec^2 x\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}\sec x=\tan x\sec x\mathrm{d}x$ 等
- 多做练习$\cdots$, $\cdots$

- 一阶微分方程:变量可分离，齐次微分方程，一阶线性微分方程(各类方程的形式以及求解方法);
- 可降阶微分方程(n阶导,不显含y,不显含x,不显含x,y);
- 二阶线性微分方程
  - 性质:齐次通解+非齐次特解=非齐次通解
  - 齐次通解的求解方法:特征方程法;(解的表示)
  - 非齐次的特解假设(待定系数法)(指数+多项式+三角函数).

感谢大家的参与！