北京师范大学 2015～2016 学年第二学期期末考试试卷

课程名称： 微积分 II　　　　**任课教师姓名：** 张博宇

卷面总分：100 分　　考试时长：120 分钟　　考试类别：闭卷 ■　　开卷 □　　其他 □

院（系）：______________　专　业：______________　年级：__________

姓　名：____________　学　号：______________

题号	第一题	第二题	第三题	第四题	第五题	第六题	总分
得分							

阅卷教师（签字）：______________

装

订

线

1 选择题。（单选题，每题 4 分，共 20 分）

(1) 二元函数 $z=\sqrt{\ln\frac{4}{x^2+y^2}}+\arcsin\frac{1}{x^2+y^2}$ 的自然定义域为（ **A** ）。

(A) $1\le x^2+y^2\le 4$　(B) $1<x^2+y^2\le 4$　(C) $1\le x^2+y^2<4$　(D) $1<x^2+y^2<4$

(2) 平面 $x+2y+3z=1$ 和直线 $x-1=2-y=3z$ 的夹角为（ **A** ）。

(A) 0°　(B) 30°　(C) 60°　(D) 90°

(3) 方程 $x^2+2y^2-z^2+4x+2z=0$ 表示的曲面为（ **B** ）。

(A) 椭球面　(B) 单叶双曲面　(C) 双叶双曲面　(D) 椭圆锥面

(4) 已知二元函数在一点偏导数存在，则在该点函数（ **D** ）。

(A) 连续　(B) 可微　(C) 方向导数存在　(D) 选项(A),(B),(C)都不对

(5) 数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是（ **B** ）。

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}u_i$ 存在　(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}<1$

2 多元函数微分。（每题 5 分，共 10 分）

(1) $z = x^{\ln y}$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 和 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

解： $\dfrac{\partial z}{\partial x} = x^{\ln y - 1} \ln y,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = x^{\ln y - 2} \ln y(\ln y - 1),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^{\ln y} \ln x}{y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{x^{\ln y}(\ln x - 1)\ln x}{y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{x^{\ln y}}{xy} + \frac{x^{\ln y} \ln x \ln y}{xy}.$$

(2) 设 $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$ ，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$。（3-28 隐函数求导，例 2）

解： 设 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4z$，则有 $F_x = 2x, F_z = 2z - 4$。

由此可知 $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = \dfrac{x}{2 - z}$。

上式两边同时对 x 求偏导， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{2 - z}\right) = \dfrac{(2 - z) + x\dfrac{\partial z}{\partial x}}{(2 - z)^2} = \dfrac{(2 - z)^2 + x^2}{(2 - z)^3}$。

3 重积分。（每题 5 分，共 10 分）

(1) 计算二重积分 $\iint_D \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是直线 y=x, y=0 和 $x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的闭区域。（4-20 二重积分，例 4）

解：取 D 为 X-型区域，$D:\begin{cases} 0\le y\le x \\ 0\le x\le \frac{\pi}{2} \end{cases}$。

则有 $\iint_D \frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x\int_0^x \mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

(2) 计算抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x+y-2=0$ 和 $x+y-12=0$ 所围成的区域面积。（D10 习题课，例 4）

解：所围区域可表示为 $D=D_2\setminus D_1$，其中 D_2 为抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x+y-12=0$ 所围区域，D_1 为抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x+y-2=0$ 所围区域。

$$A=\iint_{D_2}\mathrm{d}\sigma-\iint_{D_1}\mathrm{d}\sigma=\int_{-4}^{3}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{12-y}\mathrm{d}x-\int_{-2}^{1}\mathrm{d}y\int_{y^2}^{2-y}\mathrm{d}x$$

$$=\left[\,12y-\tfrac{1}{2}y^2-\tfrac{1}{3}y^3\,\right]_{-4}^{3}-\left[\,2y-\tfrac{1}{2}y^2-\tfrac{1}{3}y^3\,\right]_{-2}^{1}=\frac{158}{3}$$

4 曲线和曲面积分。（每题 5 分，共 20 分）

(1) 计算曲线积分 $\int_{\Gamma} x^2 \mathrm{d}s$，其中 Γ 为圆周 $x^2+y^2=a^2$ 在第一象限的部分。

解： 由 $x^2+y^2=a^2$，记 $x=a\cos t$， $y=a\sin t$，其中 t 的取值范围为 $[0,\pi/2]$。

则 $\int_{\Gamma} x^2 \mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3\cos^2 t dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^3 \frac{\cos 2t+1}{2} dt=\frac{\pi a^3}{4}$

(2) 计算曲线积分 $I=\int_L (x+y)(\mathrm{d}x+\mathrm{d}y)$，其中 L 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 沿逆时针方向在第一象限的部分。

解： $I=\int_L (x+y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y$。设 $P=Q=x+y$，由格林公式可知 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=1$，即积分与路径无关。记点($a$,0)为 A，点(0,$b$)为 B，则沿积分路径 AOB 的积分为

$$I=\int_{AO\cup OB}(x+y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y=\int_{AO} x\mathrm{d}x+\int_{OB} y\mathrm{d}y=\int_a^0 x\,\mathrm{d}\,x+\int_0^b y\,\mathrm{d}\,y=\frac{b^2-a^2}{2}$$

(3) 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$ ，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ ，被积函数为

$f(x,y,z)=\begin{cases} x^2+y^2, & 当 z\ge\sqrt{x^2+y^2} \\ 0 & 当 z<\sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$ 。（5-9，第一曲面积分例 3）

解： 锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与上半球面 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 的交线为 $x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2},\ z=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ 。

设 Σ_1 为上半球面夹于锥面间的部分，则它在 xOy 面上的投影为

$D_{xy}=\left\{\,(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2\le\dfrac{a^2}{2}\,\right\}$，并且积分可写为 $I=\iint_{\Sigma_1}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}S$ 。由公式，

$\mathrm{d}S=\dfrac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 。积分求解可得

$$I=\iint_{D_{xy}}(x^2+y^2)\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{2}a}{2}}\frac{a\,r^2}{\sqrt{a^2-r^2}}r\,\mathrm{d}r=\frac{1}{6}\pi a^4(8-5\sqrt{2})\text{。}$$

(4) 计算曲面积分 $I=\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 外侧在 $x\ge 0$， $y\ge 0$ 的部分。（p226 例 2）

解： 把 Σ 分为下面 Σ_1 和上面 Σ_2 两部分，其中 Σ_1 的方程为 $z_1=-\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ ， Σ_2 的方程为 $z_2=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 。则积分可写为 $\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_2} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{\Sigma_1} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ ，其中右边第一个积分曲面 Σ_2 取上侧，第二个积分曲面 Σ_1 取下侧。则有

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} xyz\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_{xy}} xy\left(-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

其中 D_{xy} 为 Σ_1 和 Σ_2 在 xOy 面上的投影，即第一象限内的扇形 $x^2+y^2\le a^2\ (x\ge 0, y\ge 0)$ 。可利用极坐标计算二重积分。

$$\begin{aligned}2\iint_{D_{xy}} xy\sqrt{a^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=2\iint_{D_{xy}} r^2\sin\theta\cos\theta\sqrt{a^2-r^2}\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta\int_0^a r^3\sqrt{a^2-r^2}dr=\frac{2a^5}{15}\end{aligned}$$

5 无穷级数。（每题 5 分，共 20 分）

(1) 研究数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$的收敛性。

解： 当$n \geq 2$时为正项级数，且满足$0 \leq 2^n \sin\frac{\pi}{3^n} \leq \pi\frac{2^n}{3^n} = \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$。

根据比值法$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{an} = \frac{2}{3} < 1$，级数$\sum_{n=1}^{\infty} \pi\left(\frac{2}{3}\right)^n$收敛。

由此可知$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin\frac{\pi}{3^n}$收敛。

(2) 研究交错级数$\sum_{n=2}^{\infty} \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]$的收敛性。

解： $\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right] = \frac{(-1)^n}{n} - \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$。

$a_n = \ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right], b_n = \frac{(-1)^n}{n}, c_n = b_n - a_n \sim \frac{1}{2n^2} \ (n \to \infty)$。由莱布尼茨判别法$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$条件收敛，而$\sum_{n=1}^{\infty} c_n$绝对收敛，因此可知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛。

(3) 求数项级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)\,!}$的和函数。（6-6 级数习题课，例 3）

解：考虑幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)\,!}x^{2n+1}$，级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$。

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)\,!}x^{2n+1}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}(x^{2n+2})'=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right)'$$

$$=\frac{1}{2}(x\sin x)'=\frac{1}{2}\sin x+\frac{x}{2}\cos x.$$

由此可得$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{(2n+1)\,!}=\frac{\sin1+\cos1}{2}$

(4) 求 $f(x)=\cos^2 x$ 在 x=0 的泰勒展开式，并求其收敛域。

解： $f(x)=\cos^2 x=\frac{\cos 2x+1}{2}=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}$，由此可知收敛域为$(-\infty,+\infty)$。

由$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

$$f(x)=\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}=1-\frac{2x^2}{2!}+\frac{2^3x^4}{4!}-\frac{2^5x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}$$

6　应用题。（每题 10 分，共 20 分）

(1) 已知平面上两定点 A (1,3)，B (4,2)，试在椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1\ (x>0, y>0)$ 圆周上求一点 C，使得三角形 ABC 的面积最小。

解：设 C 点坐标为 (x, y)，则三角形 ABC 的面积

$$S_\Delta=\frac{1}{2}\left|\ AB\times AC\ \right|=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 3 & -1 & 0\\ x-1 & y-3 & 0\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\left|(0,0,x+3y-10)\right|=\frac{1}{2}\left|x+3y-10\right|。$$

设拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=(x+3y-10)^2+\lambda(1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4})$，解方程组

$$\begin{cases}F_x=2(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{9}x=0\\ F_y=6(x+3y-10)-\frac{2\lambda}{4}y=0\\ \quad F_\lambda=1-\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=0\end{cases}$$

可解的驻点 $x=\frac{3}{\sqrt{5}}, y=\frac{4}{\sqrt{5}}$，对应的面积约为 $S\approx 1.646$。

进一步计算椭圆的两个边界点 D (0,2)，E (3,0) 处的面积，可得 $S_D=2, S_E=3.5$。比较可知，取 C 点为 $(x,y)=\left(\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$时，三角形 ABC 的面积最小。

(2) 研究幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$的收敛半径与收敛域。

解： $\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{3^n\left(1+\left(\frac{-2}{3}\right)^n\right)}{n}}=3\Rightarrow$收敛半径$R=\frac{1}{3}$。

$x=-\frac{4}{3}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{n}+\frac{\left(2/3\right)^n}{n}\right)$。由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n}{n}$收敛，可知$x=-\frac{4}{3}$时级数收敛。

$x=-\frac{2}{3}$时，级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{\left(-2/3\right)^n}{n}\right)$. 由$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}$收敛，可知$x=-\frac{2}{3}$时级数发散。

综上所述，收敛域为$[-\frac{4}{3},-\frac{2}{3})$。