第五章 相对论基础

5-1 解：
$$x'=\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$=\frac{180-0.8c\times2.0\times10^{-4}}{\sqrt{1-(0.8c)^2/c^2}}$$

$$=220\,\text{km}$$

$$y'=y=10\,\text{km}$$

$$z'=z=1\text{km}$$

$$t'=\frac{t-vx/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$=\frac{2.0\times10^{-4}-0.8c\times180/c^2}{\sqrt{1-(0.8c)^2/c^2}}$$

$$=-4.67\times10^{-4}\,\text{s}$$

5-2 解：事件一，事件二在 s 系 s' 系内的时空坐标分别为 (x_1,t_1)，(x_1',t_1')，(x_2,t_2)，(x_2',t_2')

$$x_2-x_1=5c\times1\text{s}$$

$$t_2-t_1=4\,\text{s}$$

$$t_2'-t_1'=0$$

$$t_2'-t_1'=\left[(t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)\right]r$$

$$\therefore\ (t_2-t_1)-\frac{v}{c^2}(x_2-x_1)=0$$

$$v=\frac{(t_2-t_1)c^2}{x_2-x_1}$$

$$=\frac{4\times c^2}{5c}$$

$$=0.8c$$

5-3 解: $L=L_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$

$$\frac{L}{L_0}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\frac{1}{2}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$\therefore\ v^2=0.75c^2$$

$$v=0.87c$$

5-4 解: (1) 以地面惯性系为 s 系,与 π^+ 介子相对静止的惯性系为 s' 系

对于 s 系, π^+ 介子的平均寿命为

$$\tau=\tau_0 r=2.6\times10^{-8}c\Big/\sqrt{1-{(0.995c)}\big/{c^2}}$$

$$=2.6\times10^{-7}\,(\mathrm{s})$$

π^+ 介子运动距离为

$$s=0.995c\times\tau=77.61(\mathrm{m})$$

$$h'=h-s=50000-77.61=49922.4(\mathrm{m})$$

(2) 若不是相对论效应,它飞跃的距离 s 为

$$s=0.995c\times2.6\times10^{-8}$$

$$=7.761(\mathrm{m})$$

5-5 解: 设事件一和事件二在 s 和 s' 系中的坐标分别为 (x_1,t_1)，(x_1',t_1')，(x_2,t_2)，(x_2',t_2')

由题知 $x_2-x_1=1.0\times10^3$

$$t_2-t_1=0$$

$$x_2'-x_1'=2.0\times10^3\,\mathrm{m}$$

由洛仑兹变换 $t_2'-t_1'=\left[\left(t_2-t_1\right)-\frac{v}{c^2}\left(x_2-x_1\right)\right]r$

$$t_2'-t_1'=-\frac{v}{c^2}\left(x_2-x_1\right)r$$

$$x_2'-x_1'=\left[\left(x_2-x_1\right)-v\left(t_2-t_1\right)\right]r$$

$$=\left(x_2-x_1\right)r$$

$$v=\frac{\sqrt{3}}{2}c$$

$$\therefore\ t_2'-t_1'=-\frac{v}{c^2}\left(x_2'-x_1'\right)$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2c}\times 2.0\times 10^3$$

$$=-5.77\times 10^{-6}\left(\mathrm{s}\right)$$

$$\therefore\ \Delta t'=5.77\times 10^{-6}\,\mathrm{s}$$

5-6 解: 以地球为 s 惯性系,以相对火箭静止的惯性系为 s' 系

由题知 $l_0=60\,\mathrm{m}$ $u_x'=0.8c$ $v=0.6c$

(1) $\Delta t'=\frac{l_0}{u_x'}=\frac{60}{0.8c}=\frac{60}{0.8\times 3\times 10^8}=2.5\times 10^{-7}\,\mathrm{s}$

(2) [法一] $\Delta t=t_2-t_1=\left[\left(t_2'-t_1'\right)+\frac{v}{c^2}\left(x_2'-x_1'\right)\right]r$

$$=\frac{\Delta t'+\frac{v}{c^2}\left(x_2'-x_1'\right)}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$=\frac{2.5\times 10^{-7}+\frac{0.6c}{c^2}\times 60}{\sqrt{1-\frac{\left(0.6c\right)^2}{c^2}}}$$

$$=4.625\times 10^{-7}\left(\mathrm{s}\right)$$

$$l = l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = 60\times\sqrt{1-\left(\frac{0.6c}{c}\right)^2} = 48\,\mathrm{m}$$

[法二]

$$u_x = \frac{u_x{}'+v}{1+\frac{v}{c^2}u_x} = \frac{0.8c+0.6c}{1+\frac{0.6c}{c^2}\times 0.8c} = \frac{35}{37}c$$

在 s 系观测到子弹相对于火箭的速率

$$w = u_x - v = \frac{35}{37}c - 0.6c$$

$$\Delta t = \frac{l}{w} = \frac{48}{\frac{35}{37}c-0.6c} = 4.625\times10^{-7}\left(\mathrm{s}\right)$$

5-7 解: 以地球为 s 惯性系,以其中一质点为 s' 惯性系,该星系运动方向为 Ox 轴正向

$$v = 0.3c \qquad u_x = -0.3c$$

则另一星系相对于 s' 系速度为

$$u_x{}' = \frac{-0.3c-0.3c}{1+\left(0.3c\right)^2/c^2} = -0.55c$$

5-8 解: 其中一尺相对于另一尺相对静止惯性系的速度为

$$u_x{}' = \frac{-v-v}{1+v^2/c^2} = \frac{-2v}{1+\frac{v^2}{c^2}}$$

在与其中一尺固连的惯性系内测量另一尺的长度

$$l = l_0\sqrt{1-\beta^2} = l_0\sqrt{1-\frac{u_x{}'^2}{c^2}}$$

$$= \frac{c^2-v^2}{c^2+v^2} = \frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2}$$

5-9 解: (1) $\tau = \tau_0 r$ $\qquad \tau_0 = 2.2\times10^{-6}\,\mathrm{s}$ $\qquad \tau = 6.6\times10^{-6}$

$$v = c\sqrt{1-\frac{\tau_0{}^2}{\tau^2}}$$

$$=3.0\times10^{8}\times\sqrt{1-\left(\frac{2.2\times10^{-6}}{6.6\times10^{-6}}\right)^{2}}$$

$$=0.94c$$

(2) $$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}=\frac{207m_e}{\sqrt{1-\frac{(0.94c)^2}{c^2}}}=621m_e$$

(3) $$E_k=mc^2-m_0c^2$$

$$=621m_ec^2-207m_ec^2$$

$$=414\times9.11\times10^{-31}\times\left(3.0\times10^{8}\right)^{2}$$

$$=3.394\times10^{11}\ \ \mathrm{J}$$

$$=212\ \ \mathrm{MeV}$$

$$P=mu=621m_e\times0.94c$$

$$=621\times9.11\times10^{-31}\times0.94\times3\times10^{8}$$

$$=1.595\times10^{-19}\quad \mathrm{kg\cdot m/s}$$

5-10 解: $$Q=c'\,m\Delta t$$

$$=390\times100\times100$$

$$=3.9\times10^{6}\quad(\mathrm{J})$$

$$\Delta m=\frac{\Delta E}{c^2}=\frac{Q}{c^2}=\frac{3.9\times10^{6}}{\left(3.0\times10^{8}\right)^{2}}=4.3\times10^{-11}\ \mathrm{kg}$$

5-11 解: $$\Delta M=\sum m_{0i}-M_0$$

$$=503-501$$

$$=2\quad \mathrm{g}$$

$$\Delta E=(\Delta M)c^2$$

$$=2\times10^{-3}\times\left(3\times10^{8}\right)^{2}$$

$$=1.8\times10^{14} \quad \text{J}$$

5-12 解:
$$l=l_0\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$V=l\cdot l_0{}^2=l_0{}^3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m_0\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}{l_0{}^3\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$=\frac{m_0}{l_0{}^3\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

5-13 解: (1)
$$E_k=mc^2-m_0c^2=m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u_1{}^2}{c^2}}}-1\right)$$

$$\approx\frac{1}{2}m_0u_1{}^2+\frac{3}{8}m_0c^2\left(u_1/c\right)^4$$

$$E_k{}'=\frac{1}{2}m_0u_1{}^2$$

$$\frac{E_k-E_k{}'}{E_k{}'}=\frac{\frac{3}{8}\frac{m_0u_1{}^4}{c^2}}{\frac{1}{2}m_0u_1{}^2}\le 5\%$$

$$\therefore\ u_1\le 0.258c$$

(2)
$$E_k=mc^2-m_0c^2=mc^2\left(1-m_0/m\right)$$

$$= mc^2\left[1-\sqrt{1-\frac{u_2{}^2}{c^2}}\right]$$

$$\approx \frac{1}{2}mu_2{}^2+\frac{1}{8}mc^2\left(u_2/c\right)^4$$

$$\frac{E_k - E_k'}{E_k'} = \frac{\frac{1}{8}\frac{m_0 u_2{}^4}{c^2}}{\frac{1}{2}m_0 u_2{}^2} \le 5\%$$

$\therefore \quad u_2 \le 0.447c$