第四章　经典质点动力学

4-1已知质量为 2kg 的质点的运动学方程为 $\vec{r}=\left(6t^2-1\right)\vec{i}+\left(3t^2+4t+1\right)\vec{j}$，时间单位为s，长度单位为m，求证：质点所受合力为恒力。

证：

$$\dot{\vec{r}}=12t\,\vec{i}+\left(6t+4\right)\vec{j}\quad\left(\mathrm{m/s}\right)$$

$$\ddot{\vec{r}}=12\vec{i}+6\vec{j}\quad\left(\mathrm{m/s^2}\right)$$

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}$$

$$\vec{F}=12m\,\vec{i}+6m\,\vec{j}$$

$$=24\vec{i}+12\vec{j}\quad(\mathrm{N})$$

4-2 已知质量为1kg 的质点，在合力 $\vec{F}=12t\,\vec{i}+8\vec{j}\quad(\mathrm{N})$ 作用下运动。已知 $t=1$ s时，质点位于 $x=2$ m处，并以速率 3m/s 沿 Oy 正向运动。求质点运动学方程。

解：建立直角坐标系

$$m\ddot{\vec{r}}=\vec{F}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x}=12t \\ m\ddot{y}=8 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \ddot{x}=12t \\ \ddot{y}=8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}\dot{x}=12t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}\dot{y}=8\mathrm{d}t \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \int_0^{\dot{x}}\mathrm{d}\dot{x}=\int_1^t 12t\,\mathrm{d}t \\ \int_3^{\dot{y}}\mathrm{d}\dot{y}=\int_1^t 8\mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \dot{x}=6t^2-6 \\ \dot{y}=8t-5 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} \mathrm{d}x=\left(6t^2-6\right)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y=\left(8t-5\right)\mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} \int_2^{x}\mathrm{d}x=\int_1^t\left(6t^2-6\right)\mathrm{d}t \\ \int_0^{y}\mathrm{d}y=\int_1^t\left(8t-5\right)\mathrm{d}t \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=2t^3-6t+6 \\ y=4t^2-5t+1 \end{cases}$$

$$\therefore\quad \vec{\theta} = \left(6t^2-6\right)\vec{i} + \left(8t-5\right)\vec{j} \quad \left({}^{\mathrm{m}}\!/\!{}_{\mathrm{s}}\right)$$

$$\vec{r} = \left(2t^3-6t+6\right)\vec{i} + \left(4t^2-5t+1\right)\vec{j} \quad (\mathrm{m})$$

4-3 解: 在 Oy 坐标系中,根据牛顿第二定律有:

$$m\dot{\vec{v}} = -kv^2\vec{j}$$

即 $$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -kv^2\vec{j}$$

在 y 轴上进行投影得

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -kv^2$$

$$\frac{\mathrm{d}v}{-\frac{k}{m}v^2} = \mathrm{d}t$$

$$\int_{v_0}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{-\frac{k}{m}v^2} = \int_0^t \mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{v_0} = \frac{k}{m}t$$

$$v = \frac{v_0}{1+v_0\frac{k}{m}t}$$

4-4 跳水运动员由高处下落，设运动员入水后重力与浮力抵消，受水的阻力与速度平方成正比，比例系数 $k=0.4m\quad (m\text{为运动员质量})$。求运动员速率减为入水速率的 $\frac{1}{10}$ 时，其入水深度（均为国际单位）。

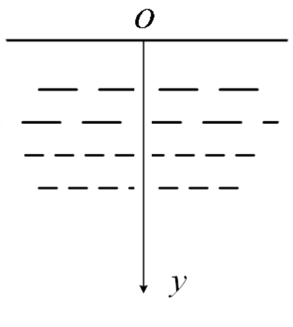


图4.4

解：以水面某点 O 为坐标原点建立 Oy 轴如图

根据牛顿第二定律

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{浮} + \vec{f}_{阻}$$

$$= -0.4mv\vec{v}$$

在 Oy 轴投影为

$$m\ddot{y} = -0.4m\dot{y}^2$$

$$\ddot{y} = -0.4\dot{y}^2$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t} = -0.4\dot{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{y} = -0.4\mathrm{d}y$$

$$\int_{v_0}^{\dot{y}}\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\dot{y}} = \int_0^y -0.4\mathrm{d}y$$

$$\ln\dot{y} - \ln v_0 = -0.4y$$

$$\dot{y} = v_0\,\mathrm{e}^{-0.4y}$$

当 $\dot{y} = \frac{v_0}{10}$ 时， $y = \frac{\ln 0.1}{-0.4} = 5.76 \quad (\mathrm{m})$

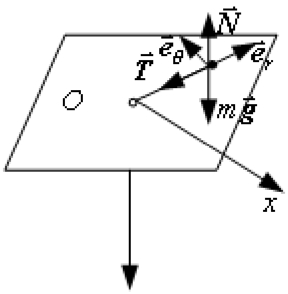


图4.5

4-5 质量为 m 的小球系在一不可伸长的轻绳一端，可在水平光滑桌面上滑动。绳的另一端穿过桌面上一小孔，握在一人手中使它以匀速率 a 向下运动，设初始时绳是拉直的，小球与小孔的距离为 R，初速度在垂直于绳的方向上的分量为 v_0，试求小球运动和绳子的张力。

解：研究对象 小球 m

受力分析如图。受 $\vec{N}, m\vec{g}$ 和 $\vec{T}$

以桌面小孔为坐标原点 O 建立极坐标系 Ox 轴，根据牛顿第二定律，有

$$m\vec{a} = \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{T}$$

在极坐标系中的投影

$$m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -T \quad (1)$$

$$m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right) = 0 \quad (2)$$

$$\vec{v} = -a\vec{e}_r$$

$$\therefore \quad \dot{r} = -a \quad (3)$$

由（3）得 $$\int_R^r \mathrm{d}r = \int_0^t -a\,\mathrm{d}t$$

$$r = R - at$$

代入（2）得 $$(R-at)\ddot{\theta} - 2a\dot{\theta} = 0$$

$$(R-at)\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\mathrm{d}t} = 2a\dot{\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = \frac{2a}{R-at}\mathrm{d}t$$

$$\int_{\dot{\theta}_0}^{\dot{\theta}} \frac{\mathrm{d}\dot{\theta}}{\dot{\theta}} = -2\int_0^t \frac{\mathrm{d}(R-at)}{R-at}$$

$$\ln\frac{\dot{\theta}}{\dot{\theta}_0} = \ln\left(\frac{R}{R-at}\right)^2$$

$$\because \quad R\dot{\theta}_0 = v_0 \quad \therefore \quad \dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{R}$$

$$\therefore \quad \dot{\theta} = \frac{v_0 R}{(R-at)^2}$$

$$\int_0^\theta \mathrm{d}\theta = \int_0^t -\frac{v_0 R}{a}\frac{\mathrm{d}(R-at)}{(R-at)^2}$$

$$\theta = \frac{v_0 R}{a}\frac{1}{R-at}\bigg|_0^t = \frac{v_0 t}{R-at}$$

由（1）得 $$T = mr\dot{\theta}^2 - m\ddot{r} = m(R-at)\left[\frac{v_0 R}{(R-at)^2}\right]^2$$

$$= \frac{m{v_0}^2 R^2}{(R-at)^3}$$

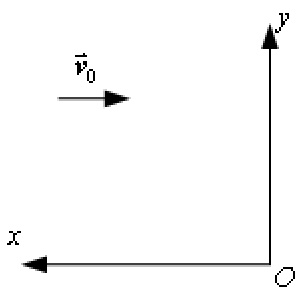
$$\vec{\boldsymbol{T}} = \frac{m{v_0}^2 R^2}{(R-at)^3}\vec{\boldsymbol{e}}_r$$

4-6 解： $$\vec{\boldsymbol{I}} = \int_0^t \vec{\boldsymbol{F}}\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin t\,\vec{\boldsymbol{i}} + \cos t\,\vec{\boldsymbol{j}} + \mathrm{e}^t\,\vec{\boldsymbol{k}}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,\mathrm{d}t\,\vec{\boldsymbol{i}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t\,\vec{\boldsymbol{j}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^t\mathrm{d}t\,\vec{\boldsymbol{k}}\quad=-\cos t\,\vec{\boldsymbol{i}}+\sin t\,\vec{\boldsymbol{j}}+\mathrm{e}^t\,\vec{\boldsymbol{k}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\vec{\boldsymbol{j}}+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\vec{\boldsymbol{k}}-\vec{\boldsymbol{i}}-\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$=-\vec{\boldsymbol{i}}+\vec{\boldsymbol{j}}+\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}-1\right)\vec{\boldsymbol{k}}$$



4-7 解：建立坐标系 Oxy， x 轴方向向西， y 轴竖直向上，球受击获得速度 $\vec{\boldsymbol{v}}_2$，继续做抛体运动，过程中只受重力，根据牛二定律

$$m\vec{\boldsymbol{a}}=m\vec{\boldsymbol{g}}\qquad\therefore\ \vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{g}}$$

在坐标轴上投影 $\begin{cases} m\ddot{x}=0 & (1)\\ m\ddot{y}=-mg & (2)\end{cases}$

由（1）得 $\dot{x}=\theta_x\quad x=\theta_x t$

$$\because\ x=80\mathrm{m}\quad\therefore\ v_x=\frac{x}{t}=\frac{80}{t}$$

由（2）得 $\dot{y}=v_y-gt\qquad y=v_y t-\frac{1}{2}gt^2$

当 $\dot{y}=0$ 时

$$v_y=gt\quad y=20\mathrm{m}\Rightarrow t_1=2(\mathrm{s})\quad v_y=20(\mathrm{m/s})$$

$$t=2t_1\qquad\therefore\ v_x=\frac{80}{4}=20(\mathrm{m/s})$$

$$\therefore\ \vec{\boldsymbol{v}}_2=20\vec{\boldsymbol{i}}+20\vec{\boldsymbol{j}}\quad\vec{\boldsymbol{v}}_1=-20\vec{\boldsymbol{i}}$$

在碰撞中运用动量定理

$$\vec{\boldsymbol{I}}=m\vec{\boldsymbol{v}}_2-m\vec{\boldsymbol{v}}_1$$

$$=10\vec{\boldsymbol{i}}+10\vec{\boldsymbol{j}}+10\vec{\boldsymbol{i}}$$

$$=20\vec{\boldsymbol{i}}+10\vec{\boldsymbol{j}}\quad(\mathrm{N.s})$$

$$\bar{\vec{\boldsymbol{F}}}=\frac{\vec{\boldsymbol{I}}}{\Delta t}=\frac{20\vec{\boldsymbol{i}}+10\vec{\boldsymbol{j}}}{0.05}=400\vec{\boldsymbol{i}}+200\vec{\boldsymbol{j}}\quad(\mathrm{N})$$

4-8 解：橡皮泥在下落过程中只受重力 $\therefore$ 机械能守恒

$mgh=\frac{1}{2}mv_1^{\ 2}$ v_1 为落入盘前的速率

$$v_1=\sqrt{2gh}=\sqrt{2\times9.8\times4.9}=9.8 \quad (\mathrm{m/s})$$

橡皮泥落入秤盘,对秤盘有一冲力,每个橡皮泥对秤盘的冲力为

$$\frac{mv_1-mv_2}{\Delta t}=\frac{0.02\times(9.8-0)}{10}$$

Δt 时间注入的个数为 $n\Delta t$

秤盘受到总的冲力为 $\frac{m(v_1-v_2)}{\Delta t}.n\Delta t=nm(v_1-v_2)$

$$=100\times0.02\times9.8=19.6 \quad (\mathrm{N})$$

所有橡皮泥受到总的重力为 $n\Delta tmg=100\times10\times0.02\times9.8=196 \quad (\mathrm{N})$

秤的读数为 $19.6+196=215.6 \quad (\mathrm{N})$

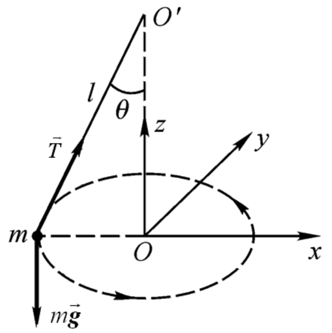


图4.9

4-9解: (1) $\because$ 摆锤合力方向指向 O 点,摆锤所受合力对 O 点的合力矩为0

$\therefore$ 质点对 O 点角动量守恒

(2) 质点对 O' 点的合力矩不为0 $\therefore$ 质点对 O' 点的角动量不受恒

(3) 质点所受合力的作用线过 Oz 轴

$\therefore$ 对 Oz 轴的合力矩为零 质点对 Oz 轴角动量守恒

(4) 质点所受合力与 Ox 平行

$\therefore$ 对 Ox 轴的合力矩为0

$\therefore$ 质点对 Ox 轴角动量守恒

4-10 解: $\vec{r}=3\vec{i}+4\vec{j}+5\vec{k}$

$$\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}} = \left(3\vec{\boldsymbol{i}} + 4\vec{\boldsymbol{j}} + 5\vec{\boldsymbol{k}}\right) \times \left(7\vec{\boldsymbol{i}} + 8\vec{\boldsymbol{j}} + 9\vec{\boldsymbol{k}}\right)$$

$$= 24\vec{\boldsymbol{k}} - 27\vec{\boldsymbol{j}} - 28\vec{\boldsymbol{k}} + 36\vec{\boldsymbol{i}} + 35\vec{\boldsymbol{j}} - 40\vec{\boldsymbol{i}}$$

$$= -4\vec{\boldsymbol{i}} + 8\vec{\boldsymbol{j}} - 4\vec{\boldsymbol{k}} \quad (\mathrm{N \cdot m})$$

$$M_x = \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}} \cdot \vec{\boldsymbol{i}} = -4\mathrm{N \cdot m}$$

4-11 解: (1) $\vec{\boldsymbol{v}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t}$ $\quad\therefore\ \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \vec{\boldsymbol{v}}\,\mathrm{d}t$

$$\int_{\vec{r}_o}^{\vec{r}} \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = \int_0^t \vec{\boldsymbol{v}}\mathrm{d}t \qquad \therefore\ \vec{\boldsymbol{r}} - \vec{\boldsymbol{r}}_o = \int_0^t 2\vec{\boldsymbol{i}} + 4\vec{\boldsymbol{j}} - 2t\,\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$\therefore\ \vec{\boldsymbol{r}} = (2t+2)\vec{\boldsymbol{i}} + 4t\,\vec{\boldsymbol{j}} - t^2\,\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times m\vec{\boldsymbol{v}} = \left[(2t+2)\vec{\boldsymbol{i}} + 4t\,\vec{\boldsymbol{j}} - t^2\,\vec{\boldsymbol{k}}\right] \times \left(4\vec{\boldsymbol{i}} + 8\vec{\boldsymbol{j}} - 4t\,\vec{\boldsymbol{k}}\right)$$

$$= (16t+16)\vec{\boldsymbol{k}} + \left(8t^2 + 8t\right)\vec{\boldsymbol{j}} - 16t\,\vec{\boldsymbol{k}} - 16t^2\,\vec{\boldsymbol{i}} - 4t^2\,\vec{\boldsymbol{j}} + 8t^2\,\vec{\boldsymbol{i}}$$

$$= -8t^2\,\vec{\boldsymbol{i}} + \left(4t^2 + 8t\right)\vec{\boldsymbol{j}} + 16\vec{\boldsymbol{k}} \quad \left(\mathrm{kg \cdot m^2 / s}\right)$$

(2) $L_{Oy} = \vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}} \cdot \vec{\boldsymbol{j}} = 4t^2 + 8t \quad \left(\mathrm{kg \cdot m^2/s}\right)$

$$\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}} = \frac{\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}_{\boldsymbol{O}}}{\mathrm{d}t} = -16t\,\vec{\boldsymbol{i}} + (8t+8)\,\vec{\boldsymbol{j}} \quad (\mathrm{N \cdot m})$$

$$M_{Oy} = \frac{\mathrm{d}L_{Oy}}{\mathrm{d}t} = 8t + 8 \quad (\mathrm{N \cdot m})$$

4-12 解: (1) 对. $\vec{\boldsymbol{P}} = \vec{\boldsymbol{c}} \Rightarrow \vec{\boldsymbol{v}} = \vec{\boldsymbol{c}}$ $\quad\therefore\ \vec{\boldsymbol{v}} = v_x\vec{\boldsymbol{i}} + v_y\vec{\boldsymbol{j}}$

$$\vec{\boldsymbol{r}} = \left[(v_x t + x_0)\vec{\boldsymbol{i}} + (v_y t + y_0)\,\vec{\boldsymbol{j}}\right] \times m\left(v_x\vec{\boldsymbol{i}} + v_y\vec{\boldsymbol{j}}\right)$$

其中 v_x, v_y, x_0, y_0 为常量

$$\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times m\vec{\boldsymbol{v}} = \left[(v_x t + x_0)\vec{\boldsymbol{i}} + (v_y t + y_0)\,\vec{\boldsymbol{j}}\right] \times m\left(v_x\vec{\boldsymbol{i}} + v_y\vec{\boldsymbol{j}}\right)$$

$$= m\left(x_0 v_y + y_0 v_x\right)\vec{\boldsymbol{k}}$$

$$M_{\boldsymbol{Oz}} = \vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O}} \cdot \vec{\boldsymbol{k}} = m\left(x_0 v_y + y_0 v_x\right) = \text{常量}$$

$\therefore$ 对 Oz 轴角动量守恒

(2)不对. 质点在 Oxy 平面内做匀速圆周运动时,对 Oz 轴的角动量守恒,但是动量并不守恒

(3)不对.质点在 Oxy 平面做椭圆运动.它所受的合力是有心力,始终指向 O 点,所以对 Oz 轴的角动量守恒,但是动量的大小在变化.

(4)不对.做匀速直线运动的质点对 Oz 轴角动量守恒.

4-13 解: $\vec{r} = a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = -a\omega\sin\omega t\,\vec{i} + b\omega\cos\omega t\,\vec{j}$$

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times m\vec{v}$$

$$= \left(a\cos\omega t\,\vec{i} + b\sin\omega t\,\vec{j}\right) \times \left(-am\omega\sin\omega t\,\vec{i} + bm\omega\cos\omega t\,\vec{j}\right)$$

$$= abm\omega\cos^2\omega t\,\vec{k} + abm\omega\sin^2\omega t\,\vec{k}$$

$$= abm\omega\vec{k}$$

$$L_{Oz} = \vec{L}_{\mathbf{o}} \cdot \vec{k} = abm\omega$$

$$\frac{\mathrm{d}L_{oz}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \therefore\ M_z = 0$$

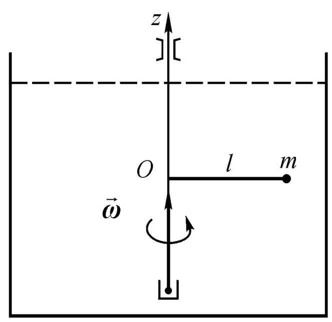


图4.14

4-14 解：以 l 杆与 Oz 的交点 O 为坐标原点建立坐标轴 Oz 轴。在垂直于 Oz 轴的平面内，建立极坐标系。令 Ox 轴在 $t=0$ 时与 l 杆重合，杆转动方向为正方向，则：

$\vec{r} = l\,\vec{e}_r \qquad \vec{F} = -km\omega_z\,\vec{e}_\theta$

$\vec{M}_o = \vec{r} \times \vec{F}$

$$= l\,\vec{e}_r \times \left(-km\omega_z\,\vec{e}_\theta\right)$$

$$= -klm\omega_z\,\vec{k}$$

$$M_z = \vec{M}_o \cdot \vec{k} = -klm\omega_z$$

$$\vec{L}_o = \vec{r} \times m\vec{v} = l\,\vec{e}_r \times ml\omega_z\,\vec{e}_\theta$$

$$= ml^2\omega_z\,\vec{k}$$

$$L_z = \vec{L}_o \cdot \vec{k} = ml^2\omega_z$$

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_z$$

$$ml^2\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\mathrm{d}t} = -klm\omega_z$$

$$\int\frac{\mathrm{d}\omega_z}{\omega_z} = -\frac{k}{l}\mathrm{d}t$$

$$\ln\omega_z = -\frac{k}{l}t + \ln C$$

$t = 0$ 时 $\omega_z = \omega_0$

则 $\omega_z = \omega_0 \mathrm{e}^{-\frac{k}{l}t}$

当 $\omega_z = \dfrac{\omega_0}{l}$ 时 $t = l/k$

4-15 解：（1）小球受力分析如图。受重力 $m\vec{g}$ 和绳的 张力 $\vec{T}$

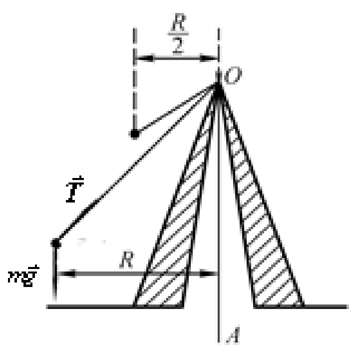


图4.15

$\because$ $m\vec{g}$ // OA $\therefore$ 对 OA 轴的力矩为0

$\because$ $\vec{T}$ 过 OA 轴 $\therefore$ 对 OA 轴的力矩为0

$\therefore$ 小球在运动过程中角动量守恒

$$mR^2\omega_1 = m\left(\frac{R}{2}\right)^2\omega_2$$

$$4\omega_1 = \omega_2$$

$$4\times\frac{2\pi n_1}{60} = \frac{2\pi n_2}{60}$$

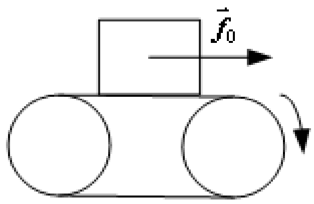
$$\therefore \qquad n_2 = 4n_1 = 4\times120 = 480 \quad 转/\text{min}$$

(2) 不守恒..

$$\vec{\boldsymbol{M}}_{Og} = \vec{\boldsymbol{r}}\times m\vec{\boldsymbol{g}} \neq 0$$

$\therefore$ 小球对 O 点角动量不守恒.

4-16 答: (1) 不正确. 如下图，静摩擦力 $\vec{\boldsymbol{f}}_0$ 相对于地面做的功不为零.



(2) 不正确.

(3) 不正确.人在行走过程中,地对人的摩擦力是与人的前进方向一致的.

(4) 不正确.如(1)中所示,木块在 $\vec{\boldsymbol{f}}_0$ 作用下,能量可以保持不变.

(补充内容) 因为相对于惯性系作匀速直线运动的一切参考系都是惯性系.相对于某一个惯性系如果作用力对质点作正功,那么总可以选择另一合适的惯性系,使作用力对质点作负功.由此看来,从不同惯性系去分析作用力对质点所做的功,由于观察到质点的位移不同,因此功的数值和功的正负都可以不同.例如,一物体在粗糙的水平面上滑动,相对于地面初速度为 $\vec{\boldsymbol{v}}_0$,末速度为 $\vec{\boldsymbol{v}}$.物体在水平方向只受摩擦力作用.摩擦力作负功

$$A = \vec{\boldsymbol{f}}\cdot\vec{\boldsymbol{s}} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 < 0$$

另外,考虑有一汽车相对地面以速度 $\vec{\boldsymbol{V}}$ 作匀速直线运动.选汽车为另一惯性系,物体相对于汽车的初速为 $\left(\vec{\boldsymbol{v}}_0 - \vec{\boldsymbol{V}}\right)$,末速为 $\left(\vec{\boldsymbol{v}} - \vec{\boldsymbol{V}}\right)$,如果 $\vec{\boldsymbol{V}}$ 的方向与 $\vec{\boldsymbol{v}}_0$ 相同,且 $|V| > |\vec{\boldsymbol{v}}_0|$,则车上的观察者将看到物体向后运动,运动方向与滑动摩擦力方向一致.摩擦力作正功.

4-17 证明: (法一)

$$W = \int_{(L)}{}_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\vec{\boldsymbol{F}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$$

$$= \int_{(L)}{}_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}\left(3x^2 + \sin x + \mathrm{e}^x\right)\vec{\boldsymbol{i}}\cdot\left(\mathrm{d}x\,\vec{\boldsymbol{i}} + \mathrm{d}y\,\vec{\boldsymbol{j}} + \mathrm{d}z\,\vec{\boldsymbol{k}}\right)$$

$$= \int_0^1\left(3x^2 + \sin x + \mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$$

$$= x^3 - \cos x + \mathrm{e}^x\Big|_0^1$$

$$= 1 - \cos 1 + \mathrm{e} + 1 - 1$$

$$= 1 - \cos 1 + \mathrm{e}$$

(法二) $\because$ $\vec{\boldsymbol{F}}$ 为保守力

$$\therefore \quad -\mathrm{d}E_P = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}}$$

$$= \left(3x^2 + \sin x + \mathrm{e}^x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \mathrm{d}\left(x^3 - \cos x + \mathrm{e}^x\right)$$

$$\therefore \quad E_P = -\left(x^3 - \cos x + \mathrm{e}^x\right) + C$$

$$\therefore \quad W = -\left(E_{P_2} - E_{P_1}\right)$$

$$= 1 - \cos 1 + \mathrm{e} + 1 - 1$$

$$= 1 - \cos 1 + \mathrm{e}$$

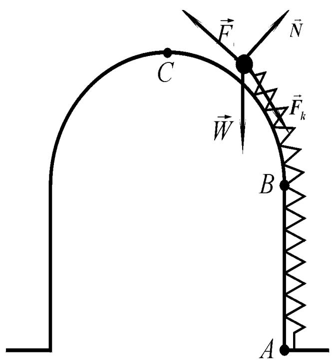


图4-18

4-18 解: 质点在由 B 到 C 点的过程中,受弹簧弹性力 $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k}}$ 和力 $\vec{\boldsymbol{F}}$ 和 $\vec{\boldsymbol{W}}$, $\vec{\boldsymbol{N}}$.弹簧弹性力 $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{k}}$ 为保守力,重力为保守力.

$$\vec{\boldsymbol{N}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{r}} = 0$$

$$\therefore \quad W_F = E_C - E_B$$

以 B 点为重力势能及弹性势能零点

$$W = \frac{1}{2}m{v_c}^2 + mgR + \frac{1}{2}k\left(\frac{\pi R}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m{v_c}^2 + mgR + \frac{k\pi^2R^2}{8}$$

4-19 解: 质点平衡时 $mg = k\Delta l$ $\quad \Delta l = \dfrac{mg}{k}$, 质点位于 B 点下方 $\dfrac{mg}{k}$ 处.根据机械能守恒定律 $E_2 = E_1$

以 B 点为势能零点 $\quad E_1 = \dfrac{1}{2}m{v_c}^2 + mgR + \dfrac{k\pi^2R^2}{8}$

$$E_2 = \frac{1}{2}mv^2 - mg\Delta l + \frac{1}{2}k\left(\Delta l\right)^2$$

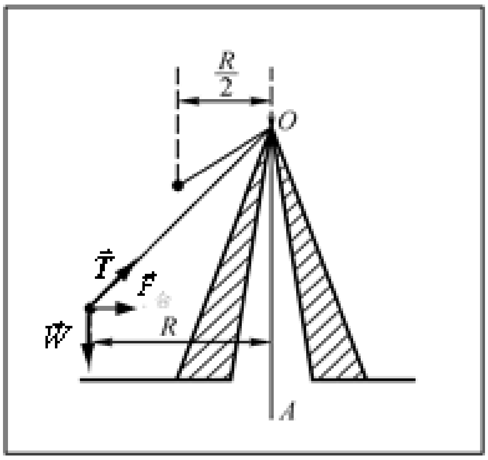
$$=\frac{1}{2}mv^2-\frac{m^2g^2}{k}+\frac{m^2g^2}{2k}$$

$$=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2k}m^2g^2$$

$$E_2=E_1$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}mv_c{}^2+mgR+\frac{k\pi^2R^2}{8}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2k}m^2g^2$$

$$v=\left[v_c{}^2+2gR+\frac{mg^2}{k}+\frac{k\pi^2R^2}{4m}\right]^{\frac{1}{2}}$$



4-20 解:以小球为隔离体,受重力 $\vec{W}=m\vec{g}$,绳的张力 $\vec{T}$ 如图.最初时, $l_1=2\text{m}$, $\theta_1=30^\circ$,小球做水平圆周运动,合力 $F_合=\vec{T}+\vec{W}$,指向圆轨道圆心 $F_合=mg\text{tg}\theta$.由牛二定律

$$mg\text{tg}\theta_1=m\frac{v_1{}^2}{R}=m\frac{v_1{}^2}{l_1\sin\theta}$$

$$\therefore\quad v_1=\sqrt{l_1g\frac{\sin^2\theta_1}{\cos\theta_1}}=\sqrt{2\times9.8\times\frac{1}{2\sqrt{3}}}=2.38\ \text{m}/\text{s}$$

最后 $l=l_2\quad \theta_2=60^\circ$,小球做水平圆周运动

$$v_2{}^2=l_2g\frac{\sin^2\theta_2}{\cos\theta_2}$$

$$\therefore\quad \frac{v_1{}^2}{v_2{}^2}=\frac{l_1}{l_2}\frac{\sin^2\theta_1}{\cos\theta_1}\frac{\cos\theta_2}{\sin^2\theta_2}=\frac{1}{3\sqrt{3}}\frac{l_1}{l_2}\qquad(1)$$

$\because$ 小球所受对铅直轴 AB 的合力矩为零,所以小球对轴 AB 的角动量守恒

$$mv_1l_1\sin\theta_1=mv_2l_2\sin\theta_2$$

$$\therefore \quad \frac{v_1}{v_2}=\frac{l_2}{l_1}\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1}=\sqrt{3}\frac{l_2}{l_1} \qquad (2)$$

$(1)\times(2)$ 得 $$\frac{v_1^{\ 3}}{v_2^{\ 3}}=\frac{1}{3}$$

$$v_2=(3v_1)^{1/3}=3.43(\mathrm{m}/s)$$

$(1)/(2)$ 得 $$\frac{l_1^{\ 3}}{l_2^{\ 3}}=9\sqrt{3}$$

$$l_2=\left(\frac{l_1^{\ 3}}{9\sqrt{3}}\right)^{1/3}=0.801\mathrm{m}$$

由动能定理,以 O 点为势能零点

$$W=\Delta E_k+\Delta E_p$$

$$=\frac{1}{2}m\left(v_2^{\ 2}-v_1^{\ 2}\right)+mg\left(l_1\cos30^\circ-l_2\cos60^\circ\right)$$

$$=0.00805\,\mathrm{J}$$

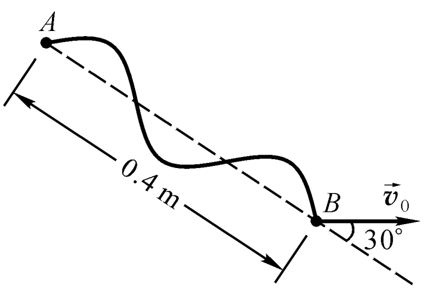


图4.21

4-21 解: 小球在竖直方向受到重力 $\vec{W}$ 和支持力 $\vec{N}$.两者矢量和为0.小球在水平面上仅受弹性力 $\vec{F}$.选择 A 点作为参考点,则在小球的运动过程中 $\vec{F}$ 始终与小球的位置矢量平行

$$\therefore \quad \vec{M}_A=\vec{r}\times\vec{F}=0$$

$\therefore$ 对 A 点的角动量守恒

初始时 $L_1=0.4\sin30^\circ mv_0$ 末态时,因为与 A 点距离最大,故小球的径向速度为0,只具有横向速度

$$\therefore \quad L_2=0.8mv_1$$

$$\therefore \quad 0.4\sin30^\circ mv_0=0.8mv$$

$\because$ 弹性力、重力为保守力,支持力不做功

$\therefore$ 过程中小球机械能守恒.小球在初始位置时,绳弯曲;小球没有受到弹力,不具有势能

$$\therefore \quad E_1=\frac{1}{2}mv_0^{\ 2}$$

$$E_2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\Delta l^2$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}m{v_0}^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\times 8\times(0.8-0.6)^2$$

$$\therefore\quad \begin{cases} v_0=2v \\ \frac{1}{2}m{v_0}^2-\frac{1}{2}mv^2=0.16 \end{cases}$$

$$\therefore\quad v_0=1.32\ \mathrm{m/s}$$

$$v=0.33\ \mathrm{m/s}$$

4-22 解: 以升降机为参考系
根据牛顿第二定律

$$\vec{\boldsymbol{N}}+m\vec{\boldsymbol{g}}+\vec{\boldsymbol{f}}^{*}=m\vec{\boldsymbol{a}}'$$

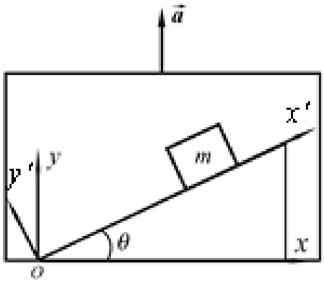


图4.22

建立坐标系 $Ox'y'$ 如图

在坐标系投影

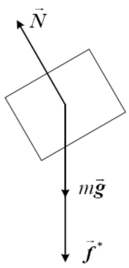
$$\begin{cases} N-m(g+a)\cos\theta=0 \\ -m(g+a)\sin\theta=m\ddot{x}' \end{cases}$$

$$\therefore\quad \vec{\boldsymbol{N}}=m(g+a)\cos\theta\,\vec{\boldsymbol{j}}'$$

$$\vec{\boldsymbol{N}}'=-m(g+a)\cos\theta\,\vec{\boldsymbol{j}}'$$

$$\vec{\boldsymbol{a}}'=-(g+a)\sin\theta\,\vec{\boldsymbol{i}}'$$

m



$$\vec{\boldsymbol{a}}=\vec{\boldsymbol{a}}_0+\vec{\boldsymbol{a}}'$$

$$=a\sin\theta\,\vec{\boldsymbol{i}}'+a\cos\theta\,\vec{\boldsymbol{j}}'-(g+a)\sin\theta\,\vec{\boldsymbol{i}}'$$

$$=-g\sin\theta\,\vec{\boldsymbol{i}}'+a\cos\theta\,\vec{\boldsymbol{j}}'$$

若建立坐标系 Oxy 如图

则 $$\vec{\boldsymbol{a}}=-(a+g)\sin\theta\cos\theta\,\vec{\boldsymbol{i}}+\left(a\cos^2\theta-g\sin^2\theta\right)\vec{\boldsymbol{j}}$$

4-23 解: 以升降机为参考系，根据牛二定律

$$\vec{\boldsymbol{T}}_1+\vec{\boldsymbol{f}}_1^{*}+m_1\vec{\boldsymbol{g}}=m_1\vec{\boldsymbol{a}}_1'$$

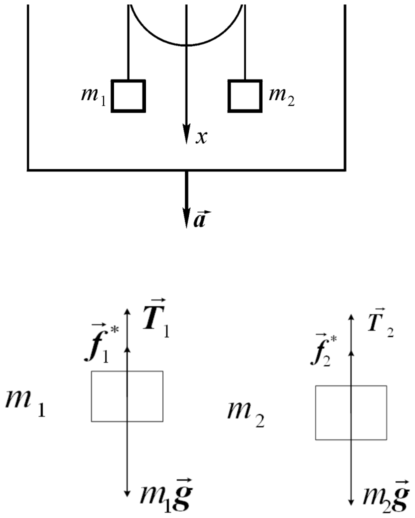


图4.23

$$\vec{T}_1 - m_1\vec{a} + m_1\vec{g} = m_1\vec{a}_1{}'$$

$$\vec{T}_2 - m_2\vec{a} + m_2\vec{g} = m_2\vec{a}_2{}'$$

牛三定律

$$\left|\vec{T}_1\right| = \left|\vec{T}_2\right| = T$$

以滑轮中心为坐标原点 O ,建立 Ox 轴,方向竖直向下.将方程投影

$$-T - m_1 a + m_1 g = m_1 \ddot{x}_1{}'$$

$$-T - m_2 a + m_2 g = m_2 \ddot{x}_2{}'$$

约束方程 $x_1{}' + x_2{}' + \pi R = l \Rightarrow \ddot{x}_1{}' = -\ddot{x}_2{}'$

$$\ddot{x}_1{}' = -\ddot{x}_2{}' = \frac{\left(m_1 - m_2\right) g + \left(m_2 - m_1\right) a}{m_1 + m_2}$$

$$\therefore \vec{a}_1{}' = -\vec{a}_2{}' = \frac{\left(m_1 - m_2\right) g + \left(m_2 - m_1\right) a}{m_1 + m_2}\vec{i}$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(g - a\right)$$

$$\vec{a}_1 = \vec{a} + \vec{a}_1{}' = a\vec{i} + \frac{\left(m_1 - m_2\right) g + \left(m_2 - m_1\right) a}{m_1 + m_2}\vec{i} = \frac{\left(m_1 - m_2\right) g + 2m_2 a}{m_1 + m_2}\vec{i}$$

$$\vec{a}_2 = \vec{a} + \vec{a}_2{}' = a\vec{i} + \frac{\left(m_2 - m_1\right) g + \left(m_1 - m_2\right) a}{m_1 + m_2}\vec{i} = \frac{\left(m_2 - m_1\right) g + 2m_1 a}{m_1 + m_2}\vec{i}$$

4.24 解: 以转台为参考系,则质点受重力,绳的拉力,惯性离心力.建立坐标系 $Ox'y'z'$

$$\vec{W} = m\vec{g} = -mg\,\vec{j}\,'$$

$$\vec{f}^{\,*} = -m\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

$$= -m\omega^2\left(R + l\sin\theta\right)\vec{i}\,'$$

$\because$ 质点相对于转台静止

$\therefore$ 根据牛顿第二定律有

图4.24

$$\vec{W}+\vec{f}^{*}+\vec{T}=0$$

$$-mg\,\vec{j}\,'-m\omega^2\left(R+l\sin\theta\right)\vec{i}\,'+T\cos\theta\,\vec{j}\,'+T\sin\theta\,\vec{i}\,'=0$$

$\therefore \quad T=mg\cos\theta$

$$m\left(R+l\sin\theta\right)\omega^2=T\sin\theta=mg\mathrm{tg}\theta$$

$$\therefore \quad \omega=\left(\frac{g\mathrm{tg}\theta}{R+l\sin\theta}\right)^{\frac{1}{2}}$$

4.25 解: 小球相对于转台有速度,则以转台为参考系,小球要受重力、支持力、惯性离心力和科里奥利力.其中重力和支持力在竖直方向合力为0.

在水平方向小球要受与 OA 平行的惯性离心力,还要受与 OA 垂直的科里奥利力

$\therefore$ 小球不可能沿转台上的直线 OA 运动