**逻辑与推理密切相关，主要是为论证或证明的有效性提供方法和技巧。它与许多学科有广泛的联系。如，与数学的交叉，数理逻辑，与计算机科学的交叉，计算复杂性与机器证明，人工智能的交叉，精确推理与不精确推理，这些广泛的联系，日益显示其重要作用。**

**德国哲学家、数学家莱布尼茨（与牛顿，同时独立提出微积分）是数理逻辑的创始人，至今有300多年的历史。大约经历三个阶段：**

1. **初始阶段，用数学方法研究和处理形式逻**

**辑，英国的布尔(Boole)，德.摩根(De Morgan)等人，逻辑代数和布尔代数；**

**2. 研究数学的思想方法及其基础问题。集合论的创建(康托)，公理方法的发展(希尔伯特，1900年，[希尔伯特](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B8%8C%E5%B0%94%E4%BC%AF%E7%89%B9" \o "希尔伯特)在**[**巴黎**](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%B7%B4%E9%BB%8E)**的**[**国际数学家大会**](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%9B%BD%E9%99%85%E6%95%B0%E5%AD%A6%E5%AE%B6%E5%A4%A7%E4%BC%9A)**上作了题为《数学问题》的演讲，提出了23个最重要的**[**数学**](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%95%B0%E5%AD%A6)**问题，这就是著名的希尔伯特的23个问题。希尔伯特问题对推动20世纪数学的发展起了积极的推动作用。由于时代的局限性，希尔伯特问题中未能包括[拓扑学](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E6%8B%93%E6%89%91%E5%AD%A6" \o "拓扑学)、**[**微分几何**](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BE%AE%E5%88%86%E5%87%A0%E4%BD%95)**等领域，也很少涉及**[**应用数学**](http://zh.wikipedia.org/wiki/%E5%BA%94%E7%94%A8%E6%95%B0%E5%AD%A6)**，更不曾预料到计算机的发展将对数学产生重大影响。)，逻辑演算的建立(皮亚诺、罗素)，证明论。**

1. **发展阶段，与数学的各分支和计算机科学的**

**广泛联系。**

**数理逻辑是计算机科学的基础理论之一。可分为5大部分：逻辑演算、集合论、证明论、模型论、递归论。数理逻辑既是数学，又是逻辑学，研究数学中的逻辑问题，或者用数学方法研究形式逻辑。计算机的软、硬件、算法和语言均与数理逻辑有关。这里我们仅涉及命题逻辑（数理逻辑的组成部分，也是谓词逻辑的基础）及其逻辑演算部分。**

**命题逻辑 Propositional Logic**

**一．命题propositional**

**2.1命题和命题联结词**

**语言的单位是句子，句子可分为疑问句，祁使句，感叹句，陈述句等。**

**下面，我们列出一些句子。**

**(1) 2是素数。 (2) 雪是黑色的。**

**(3)  2+3=5. (4) 明年十月一日是晴天。**

**(5) 3能被2整除。  (6) 这朵花真好看呀！**

**(7) 明天下午有会吗？ (8) 请关上门！**

**(9) x+y>5. (10) 地球外的星球上也有人。**

**命题statement是指一个能判断真假意义的陈述句。**

**注意：(1)命题的判断只有两种可能：正确与错误，前者称为命题的真值为真，后者称为命题的真值为假；**

**(2)命题的真值通常使用大写英文字母T和F表示，或使用1和0表示；**

**(3)命题必须是具有唯一真值的陈述句。**

**其中：(1)(2)(3)(4)(5)(10)为命题。**

**因为：(1)命题必须是陈述句，所以，非陈述句不是命题；**

**(2)命题必须有确定的真值，凡无确定真值的陈述句不是命题，特别注意：真值是否确定与我们是否知道它的真值不是一回事情；**

**(3)注意悖论：如：我正在说谎。**

[加入会员！送免财富值下载特权](http://yuedu.baidu.com/trade/browse/cashier?type=2&fr=downPop&pos=viewPage_down&ad_logo_type=1&click_type=11011002)

2.2**逻辑联结Logical Connective与复合命题 compound statement**

命题与命题的运算？

**命题符号化**：**既然命题有真假（分别用0，1来表示），故它就是一个变量，我们用小写字母p,q,r,s,t等符号表示命题变量**，**命题常元（具体确定内容的命题）与命题变元（任意的，没有赋予具体内容的抽象命题）。**

**命题：简单命题（原子命题，不能再分解为更简单的命题），复合命题（若干个简单命题通过命题联结词而构成的新命题），可以使用一些逻辑联结词来将若干命题联接成复合命题。**

**常用的逻辑联结词有5种，如，否定联结词negation ~,合取联结词conjunction ∧, 析取联结词disjunction ∨, 蕴涵联结词implication →, 等价联结词equivalent .**

**例如：s:明天出太阳，则，明天不会出太阳（~s）。**

**p：“李军聪明”，q：“李军用功” , 则**

**p∧q：“李军聪明且用功”。.**

**p：“开关坏了”，q：“灯泡坏了”，则**

**p∨q:“开关或灯泡坏了”。**

**设p和q为两个命题，由p与q用二元联结词 “→”组成复合题，记为“p→q”。读作“如果p，则q”，其中p为前件，q为后件。**

**只有当前件为真，后件为假时，p→q为假。**

**如果(p)地球是圆的，则(s)明天会出太阳, p→s。**

**设p和q为两个命题，由p与q用二元联结词 “↔”组成复合命题，称为等价复合命题, 记为“p↔q”。读作“p当且仅当q”。**

**当且仅当p和q的真值相同时，p↔q为真。否则为假。**

**(p)三角形全等↔(q)三角形三边相等。**

**在命题符号化的过程中，需要注意的是：命题语言与自然语言的区别。**

**例如，小王现在在宿舍或在图书馆，小王现在在宿舍(p), 小王现在在图书馆(q)，**

**小王不可能既在宿舍，又在图书馆，用p∨q表示可以，但是必须注明p与q不能同时为真；**

**最好用：使用(p∧~q)∨(~p∧q) 来表示。**

**注释：前者是相容性或，后者是排斥性或。**

**2.3条件命题conditional statements**

**若p, q是命题，称“if p then q”这种形式的复合命题为条件命题或称为蕴涵 implication。简单记为 p→q。相应地，p 称为前提（前件）antecedent, hypothesis, q 称为结论（后件）consequent, conclusion.**

**规定：p→q是假的，当且仅当p是真的并且q是假的。**

**例如：有位父亲对儿子说：“如果我去书店，那么我一定给你买光盘。”** **试问：在何种情况下，这位父亲算失信？**

**P：父亲去书店，Q：给儿子买光盘**

**1) P=1，Q=1 2) P=1，Q=0**

**3) P=0，Q=1 4) P=0，Q=0**

**相应地, 我们有**

**逆命题converse of the implication**

**q→p**

**否命题negation of the implication**

**~p→q**

**逆否命题**

**contrapositive of the implication**

**~q→~p**

**在中学，众所周知, 原命题与逆否命题是等价的（这里所指的等价，指的是其真值相同，或者逻辑等价）, 即, p→q ⇔ ~q→~p**

**下面，我们将这5种逻辑联结词的真值计算方法，列举如下：**

**否定negation ~ ~p**

**合取 conjunction ∧ p∧q**

**析取 disjunction ∨ p∨q**

**蕴含 implication → p→q**

**等价equivalence, biconditional ↔ p↔q**

**其真值计算为:**

**~p=1-p**

**p→q=~p∨q**

**p↔q=( p→q) ∧(q→p)= (~p∨q) ∧(~q∨p)**

**联结词的运算顺序：**

**1)逻辑词的优先级别分别为：~ ，∧，∨，→，↔ ，括号中的运算为最优先级。**

**2)同级联结词，按从左到右的次序运算。**

**联结词的真值表truth table**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **~p** | **p∧q** | **p∨q** | **p→q** | **q→p** | **p↔q** |
| **0** | **0** | **1** | **0** | **0** | **1** | **1** | **1** |
| **0** | **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | **0** | **0** |
| **1** | **0** | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** |
| **1** | **1** | **0** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |

**当然，由上面5种逻辑联结词还可以产生更多的联结词，如，异或联结词（p,q之中恰有一个成立）pq，与非联结词(p与q合取的否定)↑，或非联结词(p与q析取的否定)↓，等等。**

**Theorem 1. 逻辑运算性质**

**交换律commutativeproperties**

1. **p∧q=q ∧p**
2. **p∨q=q∨p**

**结合律associative properties**

1. **(p∧q) ∧r=p∧(q∧r)**
2. **(p∨q)∨r=p∨(q∨r)**

**分配律distributive properties**

1. **p∧ (q∨r) = (p∧q)∨(p∧r)**
2. **p∨(q∧r) = (p∨q) ∧(p∨r)**

**幂等律idempotent properties**

1. **p∨p=p**
2. **p∧p=p**

**双重否定property of negation**

**9．~(~p) =p**

**De Morgan律**

**10. ~( p∨q) =~p∧~q**

**11. ~(p∧q) =~p∨~q**

**吸收律absorb properties**

**12. p∨(p∧q) = p**

**13. p∧ (p∨q) = p**

**零一律**

**14．p∨~p=1**

**15．p∧~p=0**

**16．p∨1=1**

**17．p∧1=p**

**18．p∨0=p**

**19．p∧0=0**

**Theorem 2.**

1. **p→q= ~q→~p**
2. **~(p→q) = p∧~q**
3. **~(p↔q) = (p∧~q)∨(q∧~p)**

**需要说明的是，上述等号指的是逻辑真值相等。**

**2.4命题公式 propositional formulas**

**使用p,q来表示命题，如果其真值确定的话，则称其为命题常项或命题常元；如果其真值可以变化的话，则称其为命题变项或命题变元；由命题常元、命题变元、命题联结词及括号等所组成的字符串称为命题公式。为了区别，命题公式用大写英文字母来表示，如，A,B,C.**

**下面，我们给出命题公式的递归定义**

**（1）命题变元和命题常元是命题公式。**

**（2）如果A, B是命题公式，则有限次地应用命题联结词，如，(~A), (A∧B), (A∨B), (A→B), (A↔B)，所得到的命题是命题公式。**

**例 A=((p∧(~q)) →(((~p)∨q) ∧q)) 是命题公式.**

**如果化简的话, 我们可以省略最外层的括号:**

**A=(p∧(~q)) →(((~p)∨q) ∧q)**

**为了方便计算, 我们按照命题联结词的优先级：**

**~，∧，∨，→，↔，从左到右的顺序进行。**

**这样的话，命题公式A可以化简为：**

**A= p∧~q →(~p∨q) ∧q=~p∨q**

**由于p, q是变元，故A可以看成关于p,q的二元函数，记作为A(p,q).**

**利用基本等价公式可以进行公式的等价变换（等真值运算），即把一个公式化为与之相等价的另一个公式。从而将公式化简，或化为某种特定形式。**

**命题公式的真值是不确定的，设A为一命题公式，p1,p2,…, pn为A中的命题变元，给定p1,p2,…, pn的一组真值，则称为对A的一个赋值。若给定p1,p2,…, pn的一组值，使得A的值为真，称这组值为A的成真赋值；反之，为成假赋值。**

**对应于命题变元的一种真假取值。n个变元共有2n种不同的赋值。因此，命题公式A就得到其相对应的真值表(所有赋值之下取值的真值所生成的表)。**

**命题公式的真值表**

**truth table of propositions**

**A的真值表**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **~p** | **~q** | **p∧~q** | **~p∨q** | **(~p∨q) ∧q** | **p∧~q →(~p∨q) ∧q** |
| **0** | **0** | **1** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| **0** | **1** | **1** | **0** | **0** | **1** | **1** | **1** |
| **1** | **0** | **0** | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** |
| **1** | **1** | **0** | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** |

**设A为一个命题公式，**

**1) 无论命题变元取什么值，命题公式A的取值都是1(真)，则称A为tautology重言式，恒真式。**

**2) 无论命题变元取什么值，命题公式A的取值都是0(假)，则称A为contradiction, absurdity矛盾式, 恒假式。**

**3) 若A至少存在一组赋值，使得命题公式A的取值为1(真)，则称A为contingency 可满足式。**

**2.5（逻辑）等价公式A⇔B**

**设A, B为两命题公式，无论公式A, B中的命题变元如何取值, A, B都有相同的真值表，则称A与B是等价公式，记作A⇔B。**

**等价公式：对命题公式进行化简得到相同的表达式；或者计算其真值，得到相同的真值表。**

**例如，验证A=p∧q与B= q∧p的等价性。**

**A与B的真值表**

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **p∧q** | **p∨q** | **q∧p** | **q∨p** |
| **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** |
| **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| **1** | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** |
| **1** | **1** | **1** | **1** | **1** | **1** |

**验证： P→(Q→R)与(P∧Q)→R 与(P→Q)→R与(P∧Q)→R 的等价性。**

**P→(Q→R)= P→(~Q∨R)=~P∨(~Q∨R)**

**=~P∨~Q∨R**

**(P∧Q)→R=~(P∧Q)∨R=~P∨~Q∨R**

**(P→Q)→R=(~P∨Q)→R=(P ∧~Q)∨R**

**=(P ∨R) ∧ (~Q∨R)**

**表明：蕴含不满足结合律。**

**另外，用真值表可以判定一个公式是否为恒真式，恒假式和可满足公式，也可以判断两个公式是否为等价。因此，可以使用真值表来证明命题公式的等价性。**

**例 证明下列公式都是恒真式：**

**(1) p→p**

**(2) ~(~p)→p**

**(3) p→(q→p)**

**(4) (p→((q→r))→((p→q) →(p→r))**

**(5) (~q→~p) →(p→q)**

**Proof (3). 证法1：真值表法**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **p** | **q** | **q→p**  **(~q∨p)** | **p→(q→p)**  **(~p∨(~q∨p))** |
| **0** | **0** | **1** | **1** |
| **0** | **1** | **0** | **1** |
| **1** | **0** | **1** | **1** |
| **1** | **1** | **1** | **1** |

**证法2：**

**p→(q→p) =(~p∨(~q∨p))**

**=~p∨~q∨p=1∨~q =1**

**因此，p→(q→p)是恒真式。**

**例： 下列是恒真式**

* 1. **p∧q→p**
  2. **p∧q→q**
  3. **p→p∨q**
  4. **q→p∨q**
  5. **~p→(p→q)**
  6. **~(p→q) →p**
  7. **p ∧(p→q) →q**
  8. **~p∧(p∨q) →q**
  9. **~q∧(p→q) →~p**
  10. **(p→q) ∧ (q→r) →( p→r)**

**仅证明(j):**

**原式= ((~p∨q)∧(~q∨r)) → (~p∨r)**

**=((~p∨q)∧~q)∨((~p∨q)∧r) )→ (~p∨r)**

**=((~p∧~q)∨(q∧~q))∨((~p∧r) ∨(q∧r))→ (~p∨r)**

**=((p∨q)∧(p∨~r) ∧(~q∨~r)) ∨ (~p∨r)**

**=((~p∨r)∨((p∨q)∧(p∨~r)))∧((~p∨r) ∨(~q∨~r))**

**=((~p∨r)∨(p∨q))∧((~p∨r)∨(p∨~r)) ∧((~p∨r)∨(~q∨~r))**

**=1∧1∧1**

**=1**

**上述命题公式，表明推理具有传递性**

2.6命题逻辑的推理deduction on proposition logic

**单前提推理**

**设A, B都是命题公式，如果A→B是恒真式，就称由A推出B是一个正确的推理，记作A⇒B。**

**因此，关于上述恒真式的命题，我们就可以写成下面的推理规则：**

T**heorem 4 基本推理（推理规则）Rule of deduction**

* 1. **p⇒p**
  2. **~~p⇒p**
  3. **p∧q⇒p**
  4. **p∧q⇒q**
  5. **p⇒p∨q**
  6. **q⇒p∨q**
  7. **~p⇒p→q**
  8. **~(p→q) ⇒p**
  9. **p∧(p→q)⇒q**
  10. **~p∧(p∨q)⇒q**
  11. **~q∧(p→q)⇒~p**
  12. **(p→q) ∧ (q→r)⇒ p→r**
  13. **(p↔q)⇒ (p→q)∧(q→p)**
  14. **(p∨q) ∧ (p→r)∧(q→s) ⇒r∨s**
  15. **(p∨q) ∧(p→r) ∧(q→r) ⇒r**

**多前提推理（三段论式推理）**

**设A1,A2,…,An, B都是命题公式，如果A1∧A2∧…∧An→B是恒真式，就称由A1, A2,…,An推出B是一个正确的推理，记作A1,A2,…,An⇒B。**

**Theorem 5 多前提基本推理**

**(a) p, p→q ⇒q**

**(b) ~q, p→q ⇒ ~p**

**(c) ~q, p∨q ⇒p**

**(d) p→q, q→r ⇒ p→r**

**(e) p∨q, p→r , q→s ⇒r∨s**

**(f) p∨q, p→r , q→r ⇒r**

**~q**

**p→q**

**~p**

**p→q**

**p\_\_\_\_**

**q**

**(a)(肯定前件)**

**p∧ (p→q) →q=p∧(~p∨q) →q**

**=(p∧~p) ∨ (p∧q)→q**

**=(p∧q)→q**

**=~p∨~q∨q**

**=1**

**(b)(否定后件)**

**~q∧ (p→q) →~p=~q∧(~p∨q) →~p**

**=(~q∧~p) ∨ (~q∧q)→~p**

**=(~q∧~p)→~p**

**=q∨p∨~p**

**=1**

**(c) (否定部分)**

**~q∧ (p∨q) →p=~q∧(p∨q) →p**

**=(~q∧p) ∨ (~q∧q)→p**

**=(~q∧p)→p**

**=q∨~p∨p**

**=1**

**(d)(推理的传递性)**

**(p→q) ∧(q→r) →(p→r)**

**= (~p∨q) ∧ (~q∨r)→(p→r)**

**=((~p∨q) ∧ ~q)∨ ((~p∨q) ∧r)→(p→r)**

**=(~p∧~q)∨*(q∧~q)*∨(~p∧r)∨(q∧r)→(p→r) =(~p∧~q)∨ (~p∧r)∨(q∧r)→(~ p∨r)**

**=((p∨q) ∧(p∨~r) ∧(~q∨~r)) ∨ (~ p∨r)**

**=((~ p∨r) ∨ ((p∨q) ∧(p∨~r))) ∧((~ p∨r)∨ (~q∨~r))**

**=((~ p∨r) ∨ (p∨q)) ∧((~ p∨r) ∨ (p∨~r))**

**∧((~ p∨r)∨ (~q∨~r))**

**=1∧1∧1**

**=1**

**p∨q**

**p→r**

**q→s**

**r∨s**

**p→q**

**q→r**

**p→r**

**~q**

**p∨q**

**p**

**(e) p∨q, p→r , q→s ⇒r∨s**

**(p∨q) ∧ (p→r) ∧ (q→s) → r∨s**

**=(p∨q) ∧ (~p∨r) ∧ (~q∨s) → r∨s**

**=[((p∨q) ∧ ~p)∨((p∨q) ∧r))]∧ (~q∨s) → r∨s**

**=[ (~p∧q)∨((p∧r)∨(q ∧r)]∧ (~q∨s) → r∨s**

**=[((~p∧ q) ∧ (~q∨s))∨((p∧r) ∧ (~q∨s))∨((q ∧r)∧ (~q∨s))] → r∨s**

**=[(~p∧ q ∧s)∨(p∧r ∧~q)∨(p∧r ∧s)∨(q ∧r∧s)] → r∨s**

**=~[(~p∧ q ∧s)∨(p∧r ∧~q)∨(p∧r ∧s)∨(q ∧r∧s)]∨( r∨s)**

**=(p∨~q∨~s) ∧ (~p∨~r∨q) ∧ (~p∨~r ∨~s) ∧(~q∨~r∨~s)]∨( r∨s)**

**=[(p∨~q∨~s)∨( r∨s)] ∧ [(~p∨~r∨q) ∨( r∨s) ]∧ [(~p∨~r∨~s)∨( r∨s)]∧ [(~q∨~r∨~s)∨( r∨s)]**

**=1 ∧1∧1∧1**

**=1**

**这样将构成推理渠道。**

**例：马芳或者去看电影，或去游泳。她没去看电影，所以她去游泳了。**

**解：P：马芳去看电影，Q：马芳去游泳**

**前提：P∨Q（使用相容性或），~P 结论：Q**

**即，验证(P∨Q)∧~ P→Q为重言式。因此，有，推理形式：(P∨Q)∧~ P⇒Q (性质c)**

**计算(P∨Q)∧~ P→Q 的真值**

(P∨Q)∧~ P**→Q=((P**∧~ P)∨(Q∧~ P))**→Q**

**=**(Q∧~ P)**→Q**

**= ~Q**∨ P∨ Q

**= ~Q**∨Q ∨P

=1

**最好使用“排斥性或”：**

**((P∧~Q)∨(~P∧Q)) ∧~ P→Q**

**=((~ P∧P∧~Q)∨(~ P∧~P∧Q)) →Q**

**=(~P∧Q)→Q**

**= ~(~P∧Q)∨Q**

**= P∨~Q∨Q**

**=1**

**例，p→q⇒~q→~p (原命题推出逆否命题)**

**证明：(p→q) →(~q→~p)**

**=(~p∨q) →(q∨~p)**

**=(~p∨q) →(~p∨q)=1**

**反之，~q→~p ⇒ p→q (逆否命题推出原命题)**

**证明：(~q→~p) →(p→q)**

**=( q∨~p) →(~p∨ q)**

**=(~p∨q) →(~p∨q)**

**=1**

**因此，p→q ⇔~q→~p，即，原命题与逆否命题等价。**

**例. 构造下列推理的论证deduction**

**(1) p∨q, p→~r, s→t, ~s→r, ~t⇒q**

**①s→t hypothesis**

**②~t hypothesis**

**③~s Thm5(b)**

**④~s→r hypothesis**

**⑤r Thm5(a)**

**⑥p→~r hypothesis**

**⑦~p Thm5(b)**

**⑧p∨q hypothesis**

**⑨q Thm5(c)**

**即，s→t ⇒ ~t→~s (逆否命题等价)**

**~s→r ⇒ ~t→r (传递性)**

**p→~r ⇒ r→~p (逆否命题等价)**

**~t→r，r→~p⇒ ~t →~p (传递性)**

**p∨q, ~p⇒q (定理5，性质3，否定部分)**

**因此，上述结论成立。**

**例3：若下午温度超过30度，则小王必去游泳；若她去游泳，她就不去看电影。所以若小王去看电影，下午气温必不超过30度。**

**解：P：下午温度超过30度**

**Q：小王必去游泳，R：小王去看电影**

**前提：P→Q，Q→~R**

**结论：R→~P**

**即，验证((P→Q)∧( Q→~R)) →( R→~P)是否为重言式。正确的话，则有推理形式：(P→Q)∧( Q→~R) ⇒( R→~P)。**

**证明：1）根据运算性质：**

**因为 (P→Q)∧(Q→~R)⇒P→~R(传递性) ； P→~R⇒ R→~P(逆否命题等价)**

**2）计算((P→Q)∧( Q→~R)) →( R→~P)的真值**

((P→Q)∧( Q→~R)) **→**( R→~P)

=((~P∨Q)∧(~Q∨~R)) **→**( R→~P)

=((~P∨Q) ∧~Q) ∨ ((~P∨Q) ∧ ~R)) **→**( R→~P)

=(~P ∧~Q) ∨*(Q ∧~Q)* ∨ (~P∧~R) ∨(Q ∧~R) **→**( ~R∨~P)

=((P ∨Q) ∧ (P∨R) ∧ (~Q∨R))∨ ( ~R∨~P)

=(( ~R∨~P) ∨((P ∨Q) ∧ (P∨R))) ∧ (( ~R∨~P) ∨ (~Q∨R))

**=[((** ~R∨~P)∨(P ∨Q))] ∧[((~R∨~P) ∨(P ∨R)) ]∧ [(( ~R∨~P) ∨ (~Q∨R))]=1

**2.7量词Quantifier**

**简单命题可以被分解成个体词和谓词两部分。个体词可以是一个具体的事物，也可以是一个抽象的概念（类似于主语）；而谓词是用来刻画个体词的性质或个体词之间关系的词（类似于谓语）。**

**如：“小李是程序员”，“2是整数”**

**，**

**在这里，“小李”、“2”是个体词，“…是程序员”、“…是整数”是谓词。**

**一般来说，除了个体词和谓词以外，还有表示数量的词，称表示数量的词为量词Quantifier.**

**量词有两种：**

**1. 全称量词Universal Quantifier ，其日常意义为“一切”、“所有的”、“任意的”，用符号“∀”来表示。**

**“∀x P(x)”, 表示对于所有的个体x，都有性质P(x).**

**例如，**

**1) P(x): -(-x)=x，x是实数，是谓词,记为∀x P(x)；**

**2) Q(x): x+1<4, 则 ∀x Q(x) 假。**

**2. 存在量词Existential Quantifier 其日常意义为“存在着”、“有一个”、“至少有一个”，用符号“∃”来表示。**

**“∃x P(x)”, 表示存在着某个个体，具有性质P(x).**

**令 Q(x): x+1<4, 则 ∃x Q(x) 真。**

**有了这些符号，叙述就变得简单。如，**

**∀x ∃y Q(x,y)**

**令R是实数集，我们有∀a ∃b(a+b=0), 其中0是单位元。**

**在线性代数中，令A,B是n行n列的矩阵，有 ∀A ∃B (A+B=I), 其中I是单位矩阵。**

**数列极限的描述：**

**令是数列，等价于 ∀>0 ∃ ∀,.**

**反之，令是数列，如果极限不为a，等价于 ∃>0 ∀ ∃,.**

**Theorem 3.**

1. **~(∀x P(x))=∃x~P(x);**
2. **~(∃x P(x))= ∀x (~P(x));**
3. **∃x (P(x)→Q(x))= ∀x P(x) →∃x Q(x);**
4. **∃x（P(x) ∨Q(x))= ∃x P(x) ∨∃x Q(x)**
5. **∀x (P(x) ∧Q(x))= ∀x P(x) ∧∀x Q(x)**
6. **((∀x P(x)) ∨(∀x Q(x))) ⇒∀x (P(x) ∨Q(x)) 是恒真式；**
7. **∃x (P(x) ∧Q(x)) ⇒ ∃x P(x) ∧∃x Q(x) 是恒真式。**

**Homework P56, 23,24,25,26,27**

**2.9数学归纳法**

**数学归纳原则：**

****

**特别注意：**

****

**可以验证，**

****