Liceul Teoretic de Informatică „Grigore Moisil”, Iași
Andrei Ancuța
clasa a XII-a B

# Elemente de cinematică și dinamică relativistă

## Cuprins



## 1 Cinematica relativistă. Consecințele cinematice ale transformărilor Lorentz

### 1.1 Contracția relativistă a lungimilor

În mecanica clasică, conform transformărilor Galilei, se aplică invarianța intervalului spațial, adică dimensiunile corpurilor rămân constante la trecerea de la un SRI la altul.

Intervalul temporal este de asemenea considerat invariant la trecerea de la un SRI la altul.

Însă timpul și spațiul nu mai pot fi considerate mărimi absolute în teoria relativității creată de Einstein.

Prin trecerea de la un SRI la altul, dimensiunile longitudinale ale corpurilor suferă modificări.

De exemplu, considerăm un corp de formă liniară, precum o riglă, aflată pe axa $Ox$ în repaus și având lungimea $l_0$ în sistemul S, numit *sistem de referință propriu* (SRP). Putem exprima $l_0$ prin diferența absciselor capetelor sale:

$$l_0 = x_2(t) - x_1(t)$$

Mai departe, măsurăm lungimea riglei în sistemul de referință inerțial $S'$, care are o mișcare de translație uniformă de-a lungul $Ox$ cu viteza $V$ față de $S$. Fie $x'_1$ și $x'_2$ abscisele riglei măsurate la același moment de timp $t'$, măsurat cu un ceas solidar cu $S'$. Conform transformărilor Lorentz, obținem

$$l_0 = x_2 - x_1 = \frac{x_2' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x_1' + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x_2' - x_1'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

unde am notat $\beta = \frac{V}{c}$. De aici rezultă

$$l' = l_0\sqrt{1-\beta^2}$$

Se observă că lungimea $l'$ măsurată în $S'$ este mai mică decât lungimea proprie $l_0$. Rigla a rămas identică cu ea însăși, însă rezultatul măsurării lungimii diferă de la un SRI la altul.

Dimensiunile transversale ale corpurilor nu se modifică: $y' = y$ și $z' = z$. Astfel, volumul corpului se modifică doar în direcția mișcării:

$$\mathscr{V}_0 = xyz$$

$$\mathscr{V}' = x'y'z' = x\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}yz = \mathscr{V}_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$$

Privind o sferă dintr-un sistem de referință față de care se mișcă, aceasta apare turtită în direcția mișcării. Un cub devine un paralelipiped.

Aceste modificări reprezintă forma reală a obiectelor, nu doar ceea ce vede un observator. Atunci când observăm un obiect în mișcare rapidă, în realitate înregistrăm fotonii care ajung pe retină. Fotonii nefiind emiși simultan de toate punctele corpului, ochiul percepe o imagine deformată.

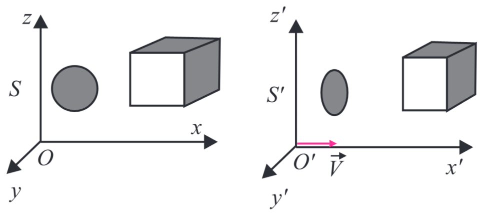

**Fig. 1:** Sfera se turtește, iar cubul se transformă în paralelipiped

Dacă viteza corpului ar fi $V = c$, dimensiunea sa longitudinală s-ar reduce la zero, corpul degenerând într-un plan transversal față de $Ox$.

Prin urmare, concepția spațiului absolut ($l' = l_0$) este înlocuită în teoria relativistă de concepția spațiului relativ, reprezentată de relația $l' = l_0\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}$. Orice dimensiune poate fi cunoscută numai în mărime relativă.

Pentru $V \to 0$, avem $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \to 1$ și deci relația clasică $l' = l_0$.

Pentru $V > c$, radicalul lui Lorentz devine imaginar, iar noțiunea de lungime își pierde sensul.

## 1.2 Dilatarea relativistă a timpului

Pe semiaxa $Ox$ a sistemului $S$, considerăm un eveniment temporar cu durata

$$\tau_0 = t_2(x) - t_1(x)$$

$\tau_0$ mai este numit și timp propriu.

Durata acestui eveniment, măsurată în sistemul $S'$, aflat în mișcare față de $S$, este egală cu diferența momentelor respective în $S'$ luate pentru aceeași abscisă $x$:

$$\tau' = t'_2(x) - t'_1(x)$$

Din $t' = \dfrac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ rezultă:

$$\tau' = \frac{t_2 - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} > \tau_0$$

Prin urmare, durata $\tau'$ măsurată în sistemul $S'$ a unui eveniment într-un punct aflat în mișcare față de $S'$ este mai mare decât durata $\tau_0$ măsurată în sistemul $S$, față de care punctul se află în repaus: $\tau' > \tau_0$.

De aici rezultă că durata unui eveniment este minimă măsurată față de sistemul de referință propriu.

Pentru $V \ll c$ se obține $\tau = \tau_0$, ca în mecanica clasică.

Pentru $V \to c$, dimensiunile longitudinale ale corpurilor tind către 0, iar intervalul de timp către infinit.

Pentru $V = c$, corpul este redus la un plan transversal pe direcția mișcării, iar intervalul de timp devine infinit.

Pentru $V > c$, transformările Lorentz devin imaginare și își pierd sensul fizic, demonstrând că viteza luminii în vid nu poate fi atinsă de corpuri.

În concluzie, pentru un observator aflat în mișcare față de locul unde se produce un fenomen, acesta se desfășoară mai lent decât pentru un observator aflat în repaus față de eveniment.

Simultaneitatea a două evenimente este de asemenea dependentă de sistemul de referință față de care este descrisă mișcarea. Două evenimente simultane în $S$ nu sunt simultane în $S'$.

Fie două evenimente simultane în $S$ în punctele $x_1$ și $x_2$ la momentul $t$. În $S'$, aflat în mișcare față de $S$, vom măsura timpii:

$$t'_1(x_1) = \frac{t - \frac{Vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad t'_2(x_2) = \frac{t - \frac{Vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Observate din $S'$, evenimentele nu mai apar simultane, cu excepția cazului în care $x_1 = x_2$, adică atunci când evenimentele coincid.

Rolul principal al teoriei relativității este de a stabili *invarianții relativiști*: mărimi cu proprietatea de a rămâne invariante la trecerea de la un SRI la altul. Printre aceștia se numără constantele universale, sarcina electrică, mărimile măsurate față de SRP etc.

## 2 Compunerea vitezelor

Vom exprima legile relativiste de transformare a vitezelor corpurilor dintr-un SRI în altul, pornind de la transformările Lorentz deduse anterior:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Din relațiile de mai sus rezultă:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x' + V\mathrm{d}t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}y' \qquad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z' \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t' + \frac{V\mathrm{d}x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Împărțim primele trei ecuații la cea de-a patra și obținem:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x' + V\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t' + \frac{V\mathrm{d}x'}{c^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\mathrm{d}t' + \frac{V\mathrm{d}x'}{c^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\mathrm{d}t' + \frac{V\mathrm{d}x'}{c^2}}$$

sau:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}} \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}}$$

Rezultă astfel formulele de compunere a vitezelor în teoria relativității restrânse:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x} \qquad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x} \qquad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}$$

Pentru a obține formulele inverse, schimbăm accentele și înlocuim pe $V$ în $-V$:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x} \qquad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x} \qquad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}$$

Comparând formulele de mai sus cu cele clasice deduse din transformările Galilei

$$v_x = v'_x + V \qquad v_y = v'_y \qquad v_z = v'_z$$

se observă apariția numitorului $\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)$ la $v_x$, $v_y$ și $v_z$, și a radicalului Lorentz la numărătorul lui $v_y$ și al lui $v_z$.

Pentru $V \ll c$, avem $\frac{V^2}{c^2} \ll 1$ și astfel din transformările Lorentz obținem transformările Galilei din fizica clasică.

Compunerea relativistă a vitezelor reconfirmă principiul conform căruia viteza luminii în vid $c$ este viteza maximă, și nu poate fi atinsă de corpuri și particule. Pentru $V = c$, se obține:

$$v_x = \frac{v'_x + c}{1 + \frac{cv'_x}{c^2}} = c$$

$$v'_x = \frac{v_x - c}{1 - \frac{cv_x}{c^2}} = -c$$

Un alt exemplu ar fi $v'_x = c$. Conform formulelor clasice ale lui Galilei, am obține:

$$v_x = c + V > c$$

Însă din transformările Lorentz ne rezultă:

$$v_x = \frac{c+V}{1+\frac{Vc}{c^2}} = \frac{c+V}{c+V} \cdot c = c$$

Dacă $v'_x = c$ și $V = c$, ar rezulta $v_x = c + c = 2c$, ceea ce contrazice experiențele lui Michelson și Morley.

# 3 Principiul fundamental al dinamicii

În mecanica newtoniană, legea dinamicii:

$$m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

are aceeași formă în orice SRI. De aici rezultă că dacă asupra unui corp se acționează cu o forță constantă un timp îndelungat, viteza acestuia poate crește oricât de mult.

Teoria relativității einsteiniene implică o schimbare fundamentală și în dinamică. Postulatul doi al lui Einstein afirmă că viteza limită a corpurilor sau a câmpurilor electromagnetice este viteza de propagare a luminii în vid: $c = 299792458$ m/s. Înseamnă că legea dinamicii newtoniene nu mai este valabilă pentru viteze mari ale corpurilor.

La baza dinamicii relativiste se află legea fundamentală a mecanicii newtoniene, scrisă sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

În relația de definiție a impulsului $\vec{p} = m\vec{v}$, masa $m$ nu mai este un factor de proporționalitate constant între impuls și viteză, ci depinde de viteza corpului.

Pentru a stabili dependența masei inerte în raport cu viteza corpului, vom folosi formulele relativiste de compunere a vitezelor și legea conservării impulsului.

Considerăm o ciocnire inelastică în raport cu un referențial $S$ și un referențial $S'$, aflat în mișcare față de $S$ cu viteza $v'$. Cele două corpuri au aceeași masă, $m_0$, atunci când se află în repaus față de $S$, iar în referențialul $S'$ se deplasează unul spre celălalt cu vitezele $v'$. În procesul ciocnirii masa $m = m_1 + m_2$ se conservă, iar după ciocnire se vor afla în repaus față de $S'$ și se vor deplasa cu viteza $v'$ față de $S$.

Conform formulelor de compunere a vitezelor, avem:

$$v_1 = \frac{v'+v'}{1+\frac{v'}{c^2}v'} = \frac{2v'}{1+\frac{v'^2}{c^2}} \qquad v_2 = \frac{v'-v'}{1+\frac{v'}{c^2}v'} = 0$$

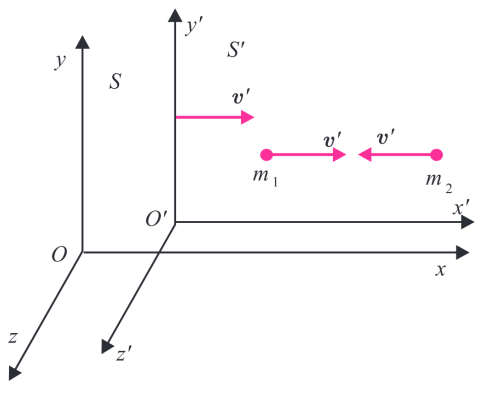

**Fig. 2:** Ciocnirea inelastică a două corpuri în raport cu S și S'

Înlocuind în legea conservării impulsului în raport cu $S$:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

rezultă:

$$m_1 \frac{2v'}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} = (m_1 + m_2)\, v'$$

$$m_1 \left( \frac{2}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} - 1 \right) = m_2$$

Din $v_2 = 0$ rezultă că cel de-al doilea corp se află în repaus față de $S$. Înseamnă că $m_2 = m_0$, și putem afla $m_1$ în funcție de $m_0$:

$$m_0 = m_1 \frac{1 - \frac{v'^2}{c^2}}{1 + \frac{v'^2}{c^2}}$$

Folosind ecuația:

$$1 - \frac{v_1^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{4v'^2}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)} = \left( \frac{1 - \frac{v'^2}{c^2}}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \right)$$

se obține:

$$m_0 = m_1 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$$

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$$

Așadar, dacă un corp are *masa de repaus* $m_0$, atunci când se deplasează cu viteza $v$ va avea masa:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Pentru $\frac{v}{c} \to 0$, rezultă $m \to m_0$, adică, în aproximația newtoniană, masa $m$ poate fi confundată cu masa de repaus $m_0$.

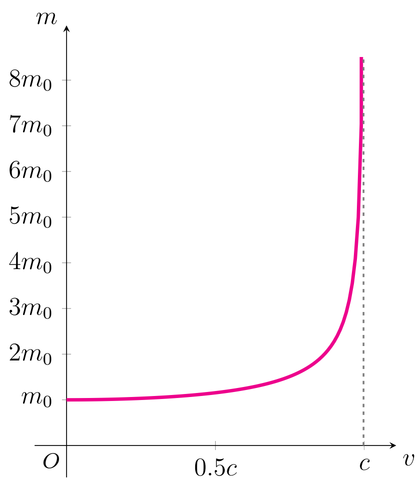

**Fig. 3:** Dependența $m = f(v)$.

# 4 Relația masă-energie

În teoria relativității restrânse sunt valabile și teoremele rezultate din principiul fundamental al mecanicii $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$, printre care se află și teorema variației energiei cinetice.

Din

$$\mathrm{d}E_c = \mathrm{d}L = \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} \qquad \vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\mathrm{d}t$$

rezultă:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}E_c &= \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}\vec{v}\mathrm{d}t = \vec{v}\mathrm{d}(m\vec{v}) \\
&= \vec{v}(m\mathrm{d}\vec{v} + \vec{v}\mathrm{d}m) \\
&= m\vec{v}\mathrm{d}\vec{v} + v^2\mathrm{d}m \\
&= mv\mathrm{d}v + v^2\mathrm{d}m
\end{aligned}$$

Folosind relația $m(v)$ aflată anterior, se obține:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}m &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)\mathrm{d}v \\
&= \frac{-m_0\left(-\frac{2v}{2c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\
&= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \cdot \frac{\frac{v}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} \cdot \mathrm{d}v \\
&= m \cdot \frac{v}{c^2 - v^2} \cdot \mathrm{d}v = \frac{mv\mathrm{d}v}{c^2 - v^2}
\end{aligned}$$

de unde rezultă: $mv\mathrm{d}v = (c^2 - v^2)\mathrm{d}m$. Înlocuind în relația anterioară, rezultă:

$$\mathrm{d}E_c = (c^2 - v^2)\mathrm{d}m + v^2\mathrm{d}m = c^2\mathrm{d}m$$

Integrăm de la masa de repaus $m_0$ (când $E_{c_0}$, $v_0 = 0$) la masa de mișcare $m(v)$:

$$E_c = c^2\int_{m_0}^{m}\mathrm{d}m = mc^2 - m_0c^2$$

Altfel spus: $E_c = E - E_0$, unde $E = mc^2$ este energia totală relativistă asociată masei de mișcare, iar $E_0 = m_0c^2$ energia totală relativistă asociată masei de repaus.

Unei creșteri infinit de mici a masei îi corespunde o energie cinetică finită, datorată factorului foarte mare $c^2 = 9 \cdot 10^{16}$ m$^2$/s$^2$.

Sub altă formă:

$$E_c = (m - m_0)c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)m_0c^2$$

Folosind dezvoltarea în serie Taylor:

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'_x(0) + \frac{1}{2!}f''_x(0)x^2 + ...$$

a funcției $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, după puterile raportului $x = \frac{v^2}{c^2}$, și reținând primii termeni:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{3}{2}}(-1) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(1-x)^{-\frac{5}{2}}(-1) = \frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}} \qquad f''(0) = \frac{3}{4}$$

obținem:

$$E_c = \left[\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{v^4}{c^4} + ...\right) - 1\right] m_0c^2$$

Dacă reținem un singur termen, obținem expresia clasică a energiei cinetice:

$$E_c \approx \frac{m_0v^2}{2}$$

Celebra formulă a lui Einstein, pe baza căreia s-a dezvoltat fizica nucleară după anul 1905, este expresia energiei totale a particulei libere:

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Formula aceasta a fost dedusă de fizicianul Friedrich Hasenohrl în 1904, din considerații nerelativiste.

Deși este numită de obicei energia totală, această formulă nu include energia potențială a particulei aflată într-un câmp exterior.

Formula $E = mc^2$ exprimă o legătură directă, de *proporționalitate*, între energie și masă.

Prin experiențe de optică fotonică și fizică nucleară, s-a demonstrat că relația este universală, valabilă pentru *orice formă de energie*. Orice variație de energie implică o variație a masei corpului: $\Delta E = c^2\Delta m$.

Legea conservării energiei este și legea conservării masei.

Pentru $v = c$, rezultă $m \to \infty \Rightarrow E \to \infty$, ceea ce este inadmisibil din punct de vedere fizic. Prin urmare, și din această formulă rezultă că viteza luminii nu poate fi atinsă.

Formula lui Einstein evidențiază energia conținută în materia aflată sub formă de substanță. Un kilogram de substanță conține o energie imensă, $E_0 = 9 \cdot 10^{16}$ J, egală cu energia necesară pentru ridicarea a 28,7 miliarde de tone de la sol până la vârful turnului Eiffel (aproximativ 320 m).

Uneori, relația este greșit interpretată ca exprimând transformarea materiei în energie. Energia este însă o proprietate a materiei, deci nu are sens să afirmăm că materia se transformă într-o proprietate a sa. Formula exprimă un proces de transformare a materiei dintr-o formă *ponderată* (substanța) într-o formă *radiantă* (câmpul), sau invers.

*Defectul de masă*, o micșorare a masei ponderale, este cauza energiei imense ce apare în reacțiile nucleare.

Un fenomen ce verifică formula lui Einstein este cel prin care un foton $\gamma$ absorbit de un corp se transformă în două particule corpusculare (materie ponderală): electron $e^-$ și pozitron $e^+$. Această transformare poate avea loc doar în cazul în care energia fotonului este cel puțin egală cu de două ori energia relativistă de repaus a electronului sau pozitronului:

$$\begin{aligned} E_{min} &= h\nu_{min} = 2m_0c^2 = 2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} \\ &= 1{,}64 \cdot 10^{-13} \text{ J} \\ &= 1{,}022 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Din $\frac{hc}{\lambda_{max}} = 2m_0c^2$ ($h$ – constanta lui Planck) rezultă:

$$\lambda_{max} = \frac{h}{2m_0c} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^{8}} = 1{,}21 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 0{,}012 \text{ Å}$$

Spre comparație, $\lambda_{verde} = 5460$ Å $\gg \lambda_{max}$, deci fotonii cu lungimea de undă $\lambda_{max}$ trebuie să fie fotoni cu energii mari, adică fotoni $\gamma$ sau fotoni neutrino.

## 4.1 Relația dintre energia totală, impulsul și masa de repaus în teoria relativității restrânse

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad \vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow v^2 = \frac{p^2}{m^2}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2}{m^2c^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2c^2}{(mc^2)^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - \frac{p^2c^2}{E^2}}} \\ E^2 &= \frac{(m_0c^2)^2}{1 - \frac{p^2c^2}{E^2}} = \frac{E^2(m_0c^2)^2}{E^2 - p^2c^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E^2 - p^2c^2 = m_0c^2 \Leftrightarrow E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

Ajungem la relația:

$$E = c\sqrt{p^2 + (m_0c)^2}$$

Aceasta este exprimarea energiei în funcție de impuls în mecanica relativistă, analoagă relației $E_c = \frac{p^2}{2m}$ din mecanica newtoniană.

Rezultatul poate fi interpretat ca o relație de unificare pentru particulele relativiste a energiei $E$, impulsului $p$, și masei de repaus $m_0$.

Știind că fotonii au $m_0 = 0$ și $\lambda = \frac{c}{v}$, rezultă:

$$E_f = p_fc \Rightarrow p_f = \frac{E_f}{c} = \frac{hv}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Prin urmare, fotonii au impulsul $p = mc = \frac{h}{\lambda}$ și se deplasează cu viteza $c$ în orice sistem inerțial, oricare ar fi impulsul lor $p$.

## 4.2 Mărimi normate. Definirea regimurilor dinamice: newtonian, relativist și extrem relativist

Pentru tratarea unitare a mișcării particulelor, se recurge la normarea mărimilor ce caracterizează mișcarea acestora, adică raportarea vitezei $\vec{v}$ a particulei la viteza luminii $c$ în spațiul liber, respectiv a masei, energiei, și impulsului la expresiile corespunzătoare particulei în repaus.

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \qquad \gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0}$$

$$\eta = \frac{E_c}{E_0} \qquad \vec{\xi} = \frac{\vec{p}}{m_0 c} = \gamma\vec{\beta}$$

Viteza luminii este o constantă universală și este considerată în modul, astfel încât $\vec{\beta}$ și $\vec{\xi}$ sunt vectori.

Fiecare din mărimile normate se poate exprima în funcție de celelalte:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\beta$ | $(1+\eta)^{-1}(\eta^2+2\eta)^{\frac{1}{2}}$ | $(\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}}\gamma^{-1}$ | $\xi(1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}$ |
| $\gamma$ | $(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ | $\eta+1$ | $(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}$ |
| $\eta$ | $(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}-1$ | $\gamma-1$ | $(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}-1$ |
| $\xi$ | $(\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}}$ | $[\eta(\eta+2)]^{\frac{1}{2}}$ | $\beta(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ |

În figura 4 este ilustrată variația mărimilor normate $\beta$, $\gamma$, și $\xi$ în funcție de energia cinetică normată $\eta$.

După intervalul cinetic în care iau valori *parametrii reduși*, putem delimita trei domenii dinamice:

- domeniul nerelativist, în care masa particulei poate fi considerată aproximativ constantă și egală cu masa de repaus ($\gamma \approx 1$, $\beta \approx 0{,}4$).
- domeniul relativist, pentru $10^{-1} < \eta < 7$.
- domeniul extrem relativist, în care viteza particulei poate fi considerată constantă și egală cu viteza luminii ($\beta \approx 1$).

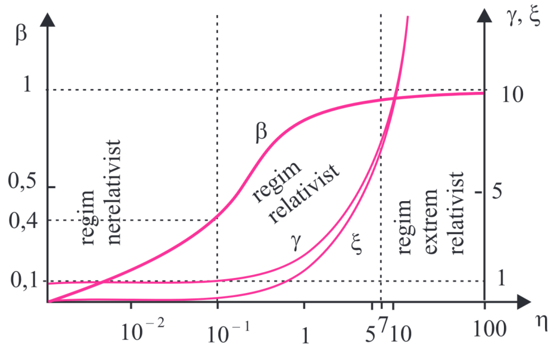


**Fig. 4:** Reprezentare semilogaritmică a dependenței vitezei, energiei, și impulsului normate de energia cinetică normată

În tehnica accelerării particulelor, în fizica atomică și nucleară, se folosesc, pentru măsurarea energiei și impulsului, unități care nu fac parte din SI, dar care prezintă avantaje în calculele curente.

Pentru măsurarea energiei unei particule se utilizează de regulă electron-voltul [eV]. Acesta reprezintă energia câștigată de un electron accelerat sub o diferență de potențial de 1 V.

$$1\ \text{eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

Deoarece în domeniul extrem relativist impulsul este $p \approx mc = \frac{E}{c}$, putem introduce o unitate arbitrară pentru impuls $\left[\frac{eV}{c}\right]$.

$$1\frac{eV}{c} = 5{,}35 \cdot 10^{-28}\ \text{N} \cdot \text{s}$$

# Bibliografie


- Manualul de fizică pentru clasa a XII-a
  Cleopatra Gherbanovschi, Nicolae Gherbanovschi
  Editura NICULESCU ABC
  2016