1 Cinematica relativistă. Consecințele cinematice ale transformărilor Lorentz

1.1 Contracția relativistă a lungimilor

În mecanica clasică, conform transformărilor Galilei, se aplică invarianța intervalului spațial, adică dimensiunile corpurilor rămân constante la trecerea de la un SRI la altul.

Intervalul temporal este de asemenea considerat invariant la trecerea de la un SRI la altul.

Însă timpul și spațiul nu mai pot fi considerate mărimi absolute în teoria relativității creată de Einstein.

Prin trecerea de la un SRI la altul, dimensiunile longitudinale ale corpurilor suferă modificări.

De exemplu, considerăm un corp de formă liniară, precum o riglă, aflată pe axa Ox în repaus și având lungimea l_0 în sistemul S, numit *sistem de referință propriu* (SRP). Putem exprima l_0 prin diferența absciselor capetelor sale:

$$l_0 = x_2(t) - x_1(t)$$

Mai departe, măsurăm lungimea riglei în sistemul de referință inerțial S', care are o mișcare de translație uniformă de-a lungul Ox cu viteza V față de S. Fie x'_1 și x'_2 abscisele riglei măsurate la același moment de timp t', măsurat cu un ceas solidar cu S'. Conform transformărilor Lorentz, obținem

$$l_0 = x_2 - x_1 = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{x'_2 - x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{l'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

unde am notat $\beta = \frac{V}{c}$. De aici rezultă

$$l' = l_0\sqrt{1-\beta^2}$$

Se observă că lungimea l' măsurată în S' este mai mică decât lungimea proprie l_0. Rigla a rămas identică cu ea însăși, însă rezultatul măsurării lungimii diferă de la un SRI la altul.

Problemă rezolvată

Fie o riglă aflată în repaus într-un SRI S', care este aflat în translație uniformă față de un SRI S. Să se exprime lungimea riglei $l = x_2(t) - x_1(t)$ în referențialul S în funcție de lungimea $l' = l_0$ a riglei în sistemul S'.

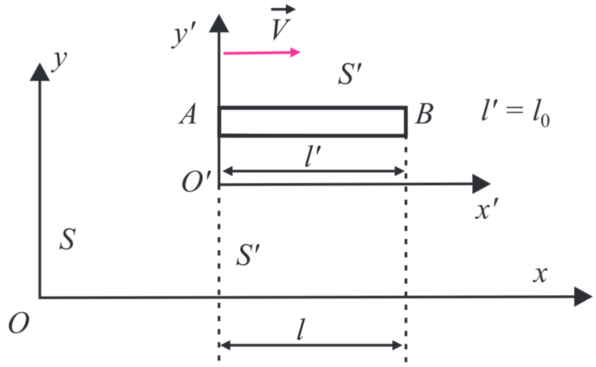

Fig. 1 Contractarea lungimilor. Rigla este solidară cu S'

Din $x' = \dfrac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ rezultă $x = x'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + Vt$. Atunci:

$$l = x_2'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} + Vt - x_1'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} - Vt$$

$$l = (x_2' - x_1')\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} < l_0$$

Dimensiunile transversale ale corpurilor nu se modifică: $y' = y$ și $z' = z$. Astfel, volumul corpului se modifică doar în direcția mișcării:

$$\mathscr{V}_0 = xyz$$

$$\mathscr{V}' = x'y'z' = x\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}yz = \mathscr{V}_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Privind o sferă dintr-un sistem de referință față de care se mișcă, aceasta apare turtită în direcția mișcării. Un cub devine un paralelipiped.

Aceste modificări reprezintă forma reală a obiectelor, nu doar ceea ce vede un observator. Atunci când observăm un obiect în mișcare rapidă, în realitate înregistrăm fotonii care ajung pe retină. Fotonii nefiind emiși simultan de toate punctele corpului, ochiul percepe o imagine deformată.

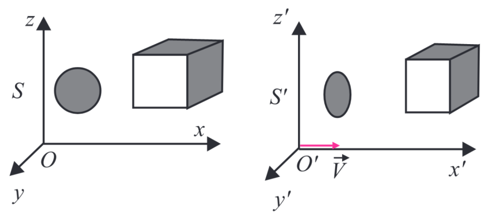

Fig. 2 Sfera se turtește, iar cubul se transformă în paralelipiped

Dacă viteza corpului ar fi $V = c$, dimensiunea sa longitudinală s-ar reduce la zero, corpul degenerând într-un plan transversal față de Ox.

Prin urmare, concepția spațiului absolut ($l' = l_0$) este înlocuită în teoria relativistă de concepția spațiului relativ, reprezentată de relația $l' = l_0\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$. Orice dimensiune poate fi cunoscută numai în mărime relativă.

Pentru $V \to 0$, avem $\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}} \to 1$ și deci relația clasică $l' = l_0$.

Pentru $V > c$, radicalul lui Lorentz devine imaginar, iar noțiunea de lungime își pierde sensul.

1.2 Dilatarea relativistă a timpului

Pe semiaxa Ox a sistemului S, considerăm un eveniment temporar cu durata

$$\tau_0 = t_2(x) - t_1(x)$$

τ_0 mai este numit și timp propriu.

Durata acestui eveniment, măsurată în sistemul S', aflat în mișcare față de S, este egală cu diferența momentelor respective în S' luate pentru aceeași abscisă x:

$$\tau' = t_2'(x) - t_1'(x)$$

Din $t' = \dfrac{t - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ rezultă:

$$\tau' = \frac{t_2 - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{Vx}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} > \tau_0$$

Prin urmare, durata τ' măsurată în sistemul S' a unui eveniment într-un punct aflat în mișcare față de S' este mai mare decât durata τ_0 măsurată în sistemul S, față de care punctul se află în repaus: $\tau' > \tau_0$.

De aici rezultă că durata unui eveniment este minimă măsurată față de sistemul de referință propriu.

Dependența intervalului de timp de sistemul de referință nu este intuitivă în comparație cu fenomenele pe care le observăm zi de zi în regim nerelativist, când $V \ll c$.

Un exemplu îl reprezintă prezența miuonilor la nivelul solului sau mării. Miuonii, care apar în atmosferă la altitudini de 10 km, datorită razelor cosmice ce pătrund în atmosfera planetei, au un timp de viață propriu – cel măsurat în SRP – extrem de scurt, $\tau_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ s. Având viteza $V = 2{,}994 \cdot 10^8$ m/s (valoare apropiată de viteza luminii), din calculul nerelativist al distanței rezultă că un miuon ar putea parcurge doar $V\tau_0 = 658{,}7$ m în intervalul de timp propriu, distanță insuficientă pentru a ajunge la nivelul solului. Deoarece observația se face în raport cu Pământul, trebuie să luăm în considerație intervalul de timp măsurat față de Pământ:

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \frac{2{,}2 \cdot 10^{-6}}{\sqrt{1-\left(\frac{2{,}994}{2{,}9979}\right)^2}} = 43{,}14 \cdot 10^{-6} \text{ s}$$

Calculând acum distanța parcursă de miuon față de Pământ, obținem:

$$D = c\tau = 12{,}933 \text{ km}$$

Rezultă că miuonul poate fi reperat la nivelul solului și chiar al mării.

Pentru $V \ll c$ se obține $\tau = \tau_0$, ca în mecanica clasică.

Pentru $V \to c$, dimensiunile longitudinale ale corpurilor tind către 0, iar intervalul de timp către infinit.

Pentru $V = c$, corpul este redus la un plan transversal pe direcția mișcării, iar intervalul de timp devine infinit.

Pentru $V > c$, transformările Lorentz devin imaginare și își pierd sensul fizic, demonstrând că viteza luminii în vid nu poate fi atinsă de corpuri.

În concluzie, pentru un observator aflat în mișcare față de locul unde se produce un fenomen, acesta se desfășoară mai lent decât pentru un observator aflat în repaus față de eveniment.

Simultaneitatea a două evenimente este de asemenea dependentă de sistemul de referință față de care este descrisă mișcarea. Două evenimente simultane în S nu sunt simultane în S'.

Fie două evenimente simultane în S în punctele x_1 și x_2 la momentul t. În S', aflat în mișcare față de S, vom măsura timpii:

$$t_1'(x_1) = \frac{t - \frac{Vx_1}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad\qquad t_2'(x_2) = \frac{t - \frac{Vx_2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Observate din S', evenimentele nu mai apar simultane, cu excepția cazului în care $x_1 = x_2$, adică atunci când evenimentele coincid.

Rolul principal al teoriei relativității este de a stabili *invarianții relativiști*: mărimi cu proprietatea de a rămâne invariante la trecerea de la un SRI la altul. Printre aceștia se numără constantele universale, sarcina electrică, mărimile măsurate față de SRP etc.

2 Compunerea vitezelor

Vom exprima legile relativiste de transformare a vitezelor corpurilor dintr-un SRI în altul, pornind de la transformările Lorentz deduse anterior:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Din relațiile de mai sus rezultă:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x' + V\mathrm{d}t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}y' \qquad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z' \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t' + \frac{V\mathrm{d}x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Împărțim primele trei ecuații la cea de-a patra și obținem:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x' + V\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t' + \frac{V\mathrm{d}x'}{c^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\mathrm{d}t' + \frac{V\mathrm{d}x'}{c^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\mathrm{d}t' + \frac{V\mathrm{d}x'}{c^2}}$$

sau:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}} \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}}$$

Rezultă astfel formulele de compunere a vitezelor în teoria relativității restrânse:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \qquad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x} \qquad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2} v'_x}$$

Pentru a obține formulele inverse, schimbăm accentele și înlocuim pe V în $-V$:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \qquad v'_y = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x} \qquad v'_z = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2} v_x}$$

Comparând formulele de mai sus cu cele clasice deduse din transformările Galilei

$$v_x = v'_x + V \qquad v_y = v'_y \qquad v_z = v'_z$$

se observă apariția numitorului $\left(1 + \frac{V v'_x}{c^2}\right)$ la v_x, v_y și v_z, și a radicalului Lorentz la numărătorul lui v_y și al lui v_z.

Pentru $V \ll c$, avem $\frac{V^2}{c^2} \ll 1$ și astfel din transformările Lorentz obținem transformările Galilei din fizica clasică.

Compunerea relativistă a vitezelor reconfirmă principiul conform căruia viteza luminii în vid c este viteza maximă, și nu poate fi atinsă de corpuri și particule. Pentru $V = c$, se obține:

$$v_x = \frac{v'_x + c}{1 + \frac{c v'_x}{c^2}} = c$$

$$v'_x = \frac{v_x - c}{1 - \frac{c v_x}{c^2}} = -c$$

Un alt exemplu ar fi $v'_x = c$. Conform formulelor clasice ale lui Galilei, am obține:

$$v_x = c + V > c$$

Însă din transformările Lorentz ne rezultă:

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{Vc}{c^2}} = \frac{c + V}{c + V} \cdot c = c$$

Dacă $v'_x = c$ și $V = c$, ar rezulta $v_x = c + c = 2c$, ceea ce contrazice experiențele lui Michelson și Morley.

Problemă rezolvată

O navă cosmică, îndepărtându-se de Pământ cu viteza de $0{,}9c$, lansează un vehicul cosmic pe aceeași direcție cu mișcarea ei. Viteza vehiculului este $0{,}9c$ față de navă ($c = 2{,}99792 \cdot 10^8$ m/s). Care este viteza vehiculului cosmic în raport cu Pământul?

Considerăm S referențialul legat de Pământ, S' referențialul legat de navă, v viteza vehiculului față de Pământ, v' viteza vehiculului față de navă, și V viteza navei față de Pământ. Rezultă că legea de compunere relativistă a vitezelor are forma:

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{Vv'}{c^2}}$$

Calculând, obținem:

$$v = \frac{0{,}9c + 0{,}9c}{1 + \frac{0{,}9^2 c^2}{c^2}} = 0{,}994c = 297993 \text{ km/s}$$

Dacă am fi folosit transformările Galilei pentru calculul nerelativist al vitezei, am fi obținut o viteză a vehiculului față de Pământ imposibilă, egală cu $1{,}8c$.

3 Principiul fundamental al dinamicii

În mecanica newtoniană, legea dinamicii:

$$m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

are aceeași formă în orice SRI. De aici rezultă că dacă asupra unui corp se acționează cu o forță constantă un timp îndelungat, viteza acestuia poate crește oricât de mult.

Teoria relativității einsteiniene implică o schimbare fundamentală și în dinamică. Postulatul doi al lui Einstein afirmă că viteza limită a corpurilor sau a câmpurilor electromagnetice este viteza de propagare a luminii în vid: $c = 299792458$ m/s. Înseamnă că legea dinamicii newtoniene nu mai este valabilă pentru viteze mari ale corpurilor.

La baza dinamicii relativiste se află legea fundamentală a mecanicii newtoniene, scrisă sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

În relația de definiție a impulsului $\vec{p} = m\vec{v}$, masa m nu mai este un factor de proporționalitate constant între impuls și viteză, ci depinde de viteza corpului.

Pentru a stabili dependența masei inerte în raport cu viteza corpului, vom folosi formulele relativiste de compunere a vitezelor și legea conservării impulsului.

Considerăm o ciocnire inelastică în raport cu un referențial S și un referențial S', aflat în mișcare față de S cu viteza v'. Cele două corpuri au aceeași masă, m_0, atunci când se află în repaus față de S, iar în referențialul S' se deplasează unul spre celălalt cu vitezele v'. În procesul ciocnirii masa $m = m_1 + m_2$ se conservă, iar după ciocnire se vor afla în repaus față de S' și se vor deplasa cu viteza v' față de S.

Conform formulelor de compunere a vitezelor, avem:

$$v_1 = \frac{v' + v'}{1 + \frac{v'}{c^2}v'} = \frac{2v'}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \qquad\qquad v_2 = \frac{v' - v'}{1 + \frac{v'}{c^2}v'} = 0$$

Înlocuind în legea conservării impulsului în raport cu S:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

rezultă:

$$m_1 \frac{2v'}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} = (m_1 + m_2)\, v'$$

$$m_1 \left(\frac{2}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} - 1 \right) = m_2$$

Din $v_2 = 0$ rezultă că cel de-al doilea corp se află în repaus față de S. Înseamnă că $m_2 = m_0$, și putem afla m_1 în funcție de m_0:

$$m_0 = m_1 \frac{1 - \frac{v'^2}{c^2}}{1 + \frac{v'^2}{c^2}}$$

Folosind ecuația:

$$1 - \frac{v_1^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{4v'^2}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)} = \left(\frac{1 - \frac{v'^2}{c^2}}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \right)$$

se obține:

$$m_0 = m_1 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$$

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$$