Liceul Teoretic de Informatică „Grigore Moisil”, Iași
Andrei Ancuța
clasa a XII-a B

Elemente de fizică cuantică

Cuprins

Deoarece este o radiație electromagnetică, lumina posedă proprietăți ondulatorii și corpusculare. Aspectul ondulatoriu se manifestă prin fenomenele de interferență, difracție, și polarizare. Natura corpusculară a radiației electromagnetice este implicată în efectul fotoelectric și în efectul Compton.

Vom demonstra că aceste două proprietăți nu se exclud reciproc, ci trebuie considerate ca două caracteristici diferite ale radiației electromagnetice.

Optica fotonică studiază natura fenomenelor luminoase și interacția radiațiilor luminoase cu substanța, sub aspectul corpuscular (fotonic).

1 Efectul fotoelectric extern

1.1 Legile efectului fotoelectric extern

Efectul fotoelectric reprezintă emisia de electroni, numiți fotoelectroni, de către o substanță sub acțiunea radiației electromagnetice.

Heinrich Hertz a descoperit acest fenomen în 1887, după ce a constatat că o descărcare electrică se produce mai ușor atunci când electrozii sunt iluminați de un arc electric, decât atunci când descărcarea se producea în întuneric.

Fizicianul englez Wilhelm Hallwachs a observat apoi în 1888 că, atunci când focaliza radiația pe o placă de zinc încărcată electric negativ, folosind o lentilă de cuarț, radiațiile ultraviolete conținute în arcul eletric ce cădeau pe placă cauzau pierderea sarcinii electrice a acesteia. În schimb, acest fenomen nu avea loc dacă înlocuia lentila de cuarț cu una de sticlă, care absorbea radiația ultravioletă. Repetând experiența pentru diferite stări de încărcare a plăcii de zinc, observând deviațiile foițelor de aur ale electrometrului, Hallwachs a concluzionat că, sub acțiunea radiațiilor ultraviolete, placa de zinc emite particule încărcate negativ, denumite ulterior electroni.

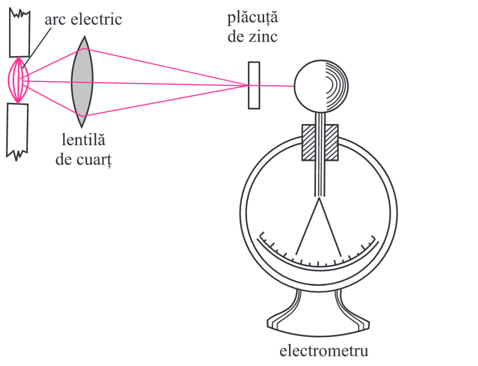

Fig. 1: Schema experienței lui Hallwachs

Pentru a studia efectul fotoelectric extern se utilizează un dispozitiv format dintr-un tub de sticlă vidat (T), prevăzut cu o fereastră de cuarț (Q), și doi electrozi interiori, catodul (C) și anodul (A). Prin fereastra Q, transparentă pentru radiațiile ultraviolete, se realizează iluminarea catodului fotoelectronoemisiv.

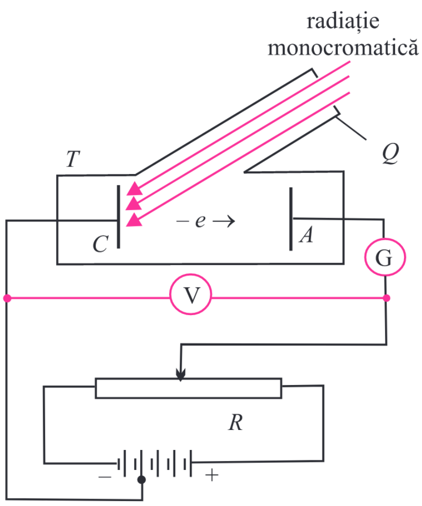

Fig. 2: Schema dispozitivului pentru studiul efectului fotoelectric extern

Electrozii catod și anod sunt conectați la o sursă de curent continuu, prin intermediul unui montaj potențiometric, folosind reostatul R.

Pentru determinarea relației curent-tensiune $I = f(U)$ a dispozitivului, se folosesc voltmetrul V și microampermetrul (galvanometrul) G.

Menținând constante frecvența ν și fluxul radiației electromagnetice Φ care cade pe catod, din studiul caracteristicii curent-tensiune (fig. 3) putem observa următoarele proprietăți ale fenomenului:

- Pentru valori U mai mari decât o anumite tensiune U_s, intensitatea curentului atinge o anumită valoare maximă (de saturație) I_s.
- La anularea tensiunii, intensitatea curentului este nenulă (I_0).
- Pentru anularea intensității curentului, este necesară aplicarea unei tensiuni inverse U_f, numită *tensiune de frânare.*

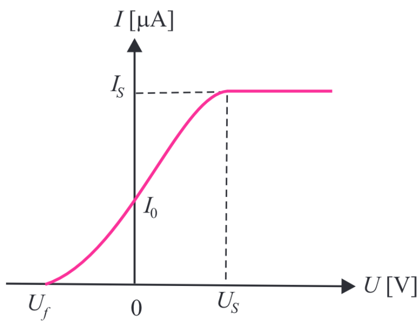

Fig. 3: Dependența $I = f(U)$ a efectului fotoelectric

Între tensiunea de frânare U_f și energia cinetică maximă a fotoelectronilor emiși E_{cM} există relația:

$$E_{cM} = eU_f$$

unde e este sarcina electronului.

Modificând fluxul și frecvența radiației electromagnetice, obținem legile efectului fotoelectric extern:

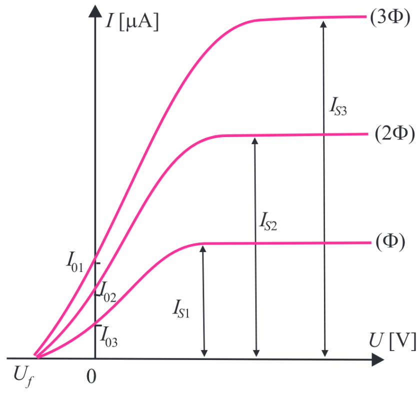

Fig. 4: Ilustrarea primei legi a efectului fotoelectric extern

I. Intensitatea curentului fotoelectric de saturație I_s este direct proporțională cu fluxul Φ al radiațiilor electromagnetice incidente, când frecvența ν este constantă (fig. 4).

II. Energia cinetică maximă E_{cM} a fotoelectronilor este proporțională cu frecvența radiației incidente, și nu depinde de fluxul acesteia (fig 5).

III. Efectul fotoelectric extern se produce doar pentru radiații incidente cu frecvența mai mare decât o anumită frecvență de prag ν_0, care este caracteristică a fiecărui metal în parte (fig 6).
Metalele au frecvențe de prag în domeniul vizibil și în ultra-violet.

IV. Efectul fotoelectric se produce practic instantaneu, intervalul de timp dintre căderea radiației incidente și emisia fotoelectronilor fiind de ordinul 10^{-10} s.

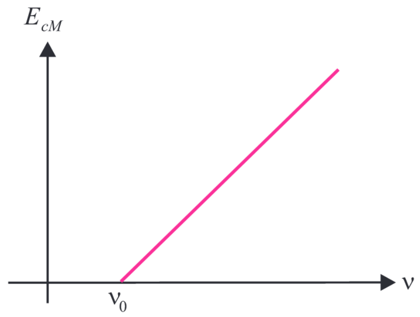

Fig. 5: Dependența liniară a energiei cinetice maxime a fotoelectronilor de frecvența radiației incidente

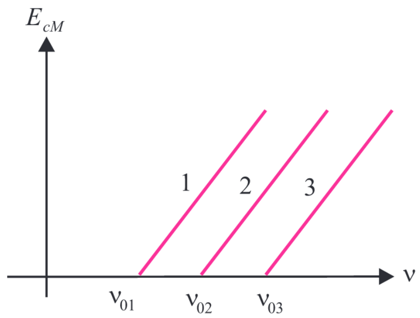

Fig. 6: Dependența liniară a energiei cinetice maxime a fotoelectronilor de frecvența radiațiilor incidente pentru fotocatozi diferiți

Lucrul de extracție L_e este o mărime caracteristică fiecărui metal, și reprezintă lucrul mecanic necesar pentru extragerea unui electron de pe suprafața acelui metal. Valorile sale sunt cuprinse între 0,5 și 5 eV.

1.2 Interpretarea legilor efectului fotoelectric extern

Legile efectului fotoelectric extern, stabilite pe cale experimentală, nu pot fi explicate cu ajutorul teoriei ondulatorii. Ajungem astfel la anumite neconcordanțe:

- Din figura 4, observăm că tensiunea de frânare are aceeași valoare, indiferent de valoarea fluxului de energie luminoasă Φ care cade pe catod. Înseamnă că energia cinetică a electronilor emiși nu crește, deci nu depinde de flux.

  Conform teoriei ondulatorii, unda electromagnetică ce interacționează cu substanța ar trebui să producă oscilații forțate ale electronilor din compunerea acesteia. Valoarea fluxului, energia undei, și pătratul amplitudinii sunt proporționale ($\Phi \sim E_t \sim A^2$), deci energia electronilor extrași ar trebui să fie proporțională cu amplitudinea undei incidente, și deci cu fluxul, ceea ce se află în neconcordanță cu legea a II-a.

- Legea a III-a afirmă că efectul fotoelectric se produce numai pentru o anumită frecvență de prag, însă conform teoriei ondulatorii fenomenul ar trebui să aibă loc pentru orice frecvență a radiațiilor incidente, dacă intensitatea lor este suficient de mare.

- Legea a IV-a stabilește că efectul fotoelectric are loc practic instantaneu, însă conform teoriei ondulatorii, între momentul punerii în oscilație forțată a electronilor și momentul emisiei (adică până când electronii preiau energia necesară), ar trebui să se scurgă un anumit interval de timp (aproximativ 4000 s).

1.3 Ipoteza lui Planck. Ipoteza lui Einstein. Ecuația lui Einstein

Teoria cuantelor, elaborată în 1900 de către Max Planck (Premiul Nobel în 1918), permite corecta interpretare a legilor efectului fotoelectric extern. Planck a emis ipoteza, confirmată ulterior, că *schimbul de energie între microsistemele fizice (atomi, moleucle, ioni, nucleu) prin intermediul radiației electromagnetice nu se realizează continuu, ci discret, energia schimbată fiind cuantificată în porții $h\nu$*, unde ν este frecvența undei, iar $h = 6{,}626075 \cdot 10^{-34}$ J $\cdot$ s este constanta lui Planck, constantă fizică universală, ce apare în fenomenele fizice la scară microscopică.

În 1905, Einstein a presupus că radiația electromagnetică cu frecvența ν este alcătuită dintr-o mulțime de particule, denumite ulterior fotoni, fiecare având energia $E_f = h\nu$. Atunci când părăsește metalul, electronul va avea o anumită energie cinetică. Bilanțul energetic conduce la *ecuația lui Einstein*:

$$h\nu = L_e + E_{cM}$$

S-a considerat energia cinetică maximă deoarece L_e reprezintă lucrul mecanic de extracție a unui electron de pe suprafața metalului. Pentru electronii aflați pe straturi interioare din metal, lucrul de extracție este mai mare ($L > L_e$), deci energia cinetică a fotoelectronilor este mai mică decât E_{cM}. În acest caz, ecuația se scrie sub forma:

$$h\nu = L + \frac{m_e v^2}{2}$$

Cum $eU_f = E_{cM}$, ecuația lui Einstein se mai poate scrie și sub forma:

$$h\nu = L_e + eU_f$$

Lumina este formată dintr-un ansamblu de fotoni, care, ca orice particule, au energie și impuls.

Cunoscând relația dintre energie și masă în teoria relativității, $E = mc^2$, și $E = h\nu$, rezultă $h\nu = mc^2$, și obținem *masa de mișcare* a fotonului:

$$m = \frac{h\nu}{c^2}$$

Viteza fotonului este egală cu viteza luminii, $v = c$. Din formula relativistă $m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$ rezultă că masa de repaus a fotonului este egală cu zero:

$$m_0 = m\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = 0$$

Impulsul este:

$$p = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Așadar, mărimile fizice ale fotonului sunt:

- energia $h\nu$
- viteza $v = c$
- masa de mișcare $m = \frac{h\nu}{c^2}$
- masa de repaus $m_0 = 0$
- impulsul $p = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$

Explicațiile legilor efectului fotoelectric extern în fizica cuantică sunt următoarele:

I. Legea I poate fi explicată atât prin teoria ondulatorie, cât și cu ajutorul fizicii cuantice.

Valoarea de saturație a curentului este atinsă atunci când toți electronii emiși de catod în unitatea de timp sunt captați de anod. Cu cât fluxul radiației incidente este mai mare, numărul fotonilor incidenți este mai mare. Deci numărul electronilor crește, ceea ce duce la creșterea valorii intensității de saturare.

II. Din relația $h\nu = L_e + E_{cM}$ rezultă că energia cinetică maximă a electronilor a fotoelectronilor emiși este:

$$E_{cM} = h\nu - L_e$$

Relația evidențiază variația liniară a energiei cinetice a electronilor emiși cu frecvența, după cum rezultă și din legea a II-a.

III. Pentru o anumită valoare a frecvenței, E_{cM} devine nulă, obținându-se:

$$L_e = h\nu_0$$

În acest caz energia absorbită de la foton este folosită doar pentru a extrage fotoelectronul, după cum afirmă legea a III-a. La frecvențele mai mici decât frecvența de prag ν_0, efectul fotoelectric extern nu mai apare.

IV. Interacțiunea dintre un foton și electron se produce într-un interval de timp neglijabil, așadar efectul fotoelectric extern se produce aproape instantaneu, după cum afirmă legea a IV-a.

În concluzie, ipoteza privind caracterul corpuscular al radiației electromagnetice explică legile efectului fotoelectric extern. Pe de altă parte, teoria ondulatorie a undelor electromagnetice trebuie menținută, deoarece legile clasice sunt valabile în privința propagării câmpului electromagnetic (difracția, interferența). Aceste două caracteristici diferite pot fi corelate, după cum se va arăta ulterior.

1.4 Aplicații ale dispozitivelor optoelectronice

Efectul fotoelectric extern stă la baza funcționării celulei fotoelectrice, care produce semnale electrice prin iluminare. Este folosită, de exemplu, la releul fotoelectric, la redarea sunetelor în cinematograful sonor, în televiziune, pentru transformarea semnalelor luminoase în semnale electrice.

Releul fotoelectric este un releu electromagnetic comandat de o celulă fotoelectrică (fig. 7). Lumina cade pe fotocatod, determindând apariția unui fotocurent de intensitate I_f care, după amplificare, trece prin circuitul unui electromagnet E_m, al cărui câmp magnetic provoacă închiderea circuitului comandat.

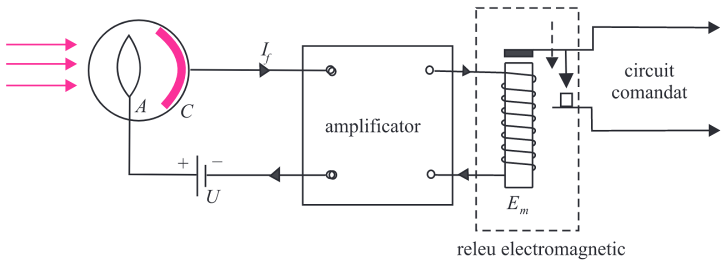

Fig. 7: Releul fotoelectric

Deoarece comanda este sigură, rapidă, practic fără inerție, releul fotoelectric este folosit pentru numărarea unor corpuri în mișcare, pentru semnalizarea prezenței umane, pentru conectarea automată a rețelei de iluminat când se întunecă, pentru acționarea ușilor în locurile de afluență mare, etc.

Fotomultiplicatorul este un dispozitiv care transformă semnalul luminos în semnal electric, realizat din asocierea unui multiplicator cu o fotocelulă.

Radiațiile luminoase cad pe fotocatod, determinând emisia unui fascicul de fotoelectroni, care este accelerat în câmpul electrostatic creat de un anod de accelerare. Fasciculul cade succesiv pe o serie de dinode, fiecare din acestea amplificându-l prin efectul de emisie secundară (numărul de electroni secundari este mai mare decât numărul electronilor primari, incidenți pe diodă). Curentul obținut pe anodul final este proporțional cu fluxul luminos incident.

Caracteristicile fotomultiplicatorului sunt:

- sensibilitate – variația intensității curentului la ieșire în funcție de variația fluxul radiațiilor incidente
- curentul de întuneric – intensitatea curentului de ieșire în absența radiațiilor
- zgomot – fluctuația intensități curentului de ieșire, ce determină un anumit raport semnal/zgomot

- caracteristica spectrală – variația sensibilității în funcție de lungimea de undă a radiației incidente
- sensibilitatea limitată de raportul semnal/zgomot

Fotomultiplicatorul este folosit în televiziune la sistemele de captare a imaginilor, și la detecția radiațiilor nucleare.

2 Efectul Compton

Atunci când un fascicul de raze X, provenit de la o sursă S, trece printr-un bloc de grafit G, radiațiile incidente sunt împrăștiate în toate direcțiile.

Pentru diferite unghiuri de împrăștiere θ, detectorul D înregistrează, pe lângă radiația incidentă cu lungimea de undă λ_0, și o altă radiație cu lungimea de undă $\lambda > \lambda_0$.

Din punct de vedere macroscopic, lumina, și în general radiația electromagnetică, este o undă. Din punct de vedere microscopic, lumina este un ansamblu de particule cuantice.

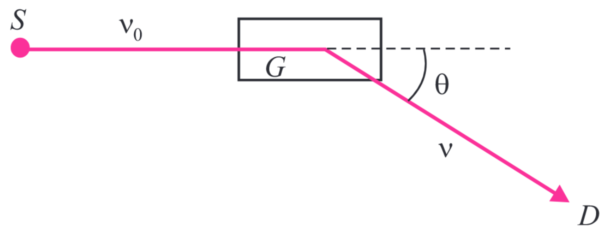

Fig. 8: Experimentul Compton, reprezentat schematic

Fenomenul, observabil pentru lungimi de undă mici, ca în cazul razelor X și γ, deci pentru frecvențe mari ($\lambda = \frac{c}{\nu}$), a fost explicat de către Compton pe baza naturii corpusculare a undelor electromagnetice, adică prin existența fotonilor.

Efectul Compton este fenomenul de împrăștiere elastică a fotonilor pe electronii liberi, în urma căreia, pe lângă radiația incidentă, apare și o radiație cu lungimea de undă mai mare (frecvența mai mică).

În cazul în care atomii substanței pe care se produce împrăștierea sunt ușori, ca în cazul atomilor de siliciu, bor sau bariu, atunci energia de legătură a electronilor de valență este mult mai mică decât energia fotonului incident $h\nu_0$, iar electronul poate fi considerat practic liber.

Vom exprima legile relativiste de transformare a vitezelor corpurilor dintr-un SRI în altul, pornind de la transformările Lorentz deduse anterior:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad y = y' \qquad z = z' \qquad t = \frac{t' + \frac{Vx'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Din relațiile de mai sus rezultă:

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x' + V\mathrm{d}t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \qquad \mathrm{d}y = \mathrm{d}y' \qquad \mathrm{d}z = \mathrm{d}z' \qquad \mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}t' + \frac{V\mathrm{d}x'}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Împărțim primele trei ecuații la cea de-a patra și obținem:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x' + V\mathrm{d}t'}{\mathrm{d}t' + \frac{V\mathrm{d}x'}{c^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\mathrm{d}t' + \frac{V\mathrm{d}x'}{c^2}} \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z'\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{\mathrm{d}t' + \frac{V\mathrm{d}x'}{c^2}}$$

sau:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} + V}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}} \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}}$$

Rezultă astfel formulele de compunere a vitezelor în teoria relativității restrânse:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x} \qquad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x} \qquad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{V}{c^2}v'_x}$$

Pentru a obține formulele inverse, schimbăm accentele și înlocuim pe V în $-V$:

$$v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{V}{c^2}v_x} \qquad v'_y = \frac{v_y\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x} \qquad v'_z = \frac{v_z\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 - \frac{V}{c^2}v_x}$$

Comparând formulele de mai sus cu cele clasice deduse din transformările Galilei

$$v_x = v'_x + V \qquad v_y = v'_y \qquad v_z = v'_z$$

se observă apariția numitorului $\left(1 + \frac{Vv'_x}{c^2}\right)$ la v_x, v_y și v_z, și a radicalului Lorentz la numărătorul lui v_y și al lui v_z.

Pentru $V \ll c$, avem $\frac{V^2}{c^2} \ll 1$ și astfel din transformările Lorentz obținem transformările Galilei din fizica clasică.

Compunerea relativistă a vitezelor reconfirmă principiul conform căruia viteza luminii în vid c este viteza maximă, și nu poate fi atinsă de corpuri și particule. Pentru $V = c$, se obține:

$$v_x = \frac{v'_x + c}{1 + \frac{cv'_x}{c^2}} = c$$

$$v'_x = \frac{v_x - c}{1 - \frac{cv_x}{c^2}} = -c$$

Un alt exemplu ar fi $v'_x = c$. Conform formulelor clasice ale lui Galilei, am obține:

$$v_x = c + V > c$$

Însă din transformările Lorentz ne rezultă:

$$v_x = \frac{c + V}{1 + \frac{Vc}{c^2}} = \frac{c + V}{c + V} \cdot c = c$$

Dacă $v'_x = c$ și $V = c$, ar rezulta $v_x = c + c = 2c$, ceea ce contrazice experiențele lui Michelson și Morley.

3 Principiul fundamental al dinamicii

În mecanica newtoniană, legea dinamicii:

$$m\vec{a} = m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

are aceeași formă în orice SRI. De aici rezultă că dacă asupra unui corp se acționează cu o forță constantă un timp îndelungat, viteza acestuia poate crește oricât de mult.

Teoria relativității einsteiniene implică o schimbare fundamentală și în dinamică. Postulatul doi al lui Einstein afirmă că viteza limită a corpurilor sau a câmpurilor electromagnetice este viteza de propagare a luminii în vid: $c = 299792458$ m/s. Înseamnă că legea dinamicii newtoniene nu mai este valabilă pentru viteze mari ale corpurilor.

La baza dinamicii relativiste se află legea fundamentală a mecanicii newtoniene, scrisă sub forma:

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$$

În relația de definiție a impulsului $\vec{p} = m\vec{v}$, masa m nu mai este un factor de proporționalitate constant între impuls și viteză, ci depinde de viteza corpului.

Pentru a stabili dependența masei inerte în raport cu viteza corpului, vom folosi formulele relativiste de compunere a vitezelor și legea conservării impulsului.

Considerăm o ciocnire inelastică în raport cu un referențial S și un referențial S', aflat în mișcare față de S cu viteza v'. Cele două corpuri au aceeași masă, m_0, atunci când se află în repaus față de S, iar în referențialul S' se deplasează unul spre celălalt cu vitezele v'. În procesul ciocnirii masa $m = m_1 + m_2$ se conservă, iar după ciocnire se vor afla în repaus față de S' și se vor deplasa cu viteza v' față de S.

Conform formulelor de compunere a vitezelor, avem:

$$v_1 = \frac{v' + v'}{1 + \frac{v'}{c^2}v'} = \frac{2v'}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \qquad v_2 = \frac{v' - v'}{1 + \frac{v'}{c^2}v'} = 0$$

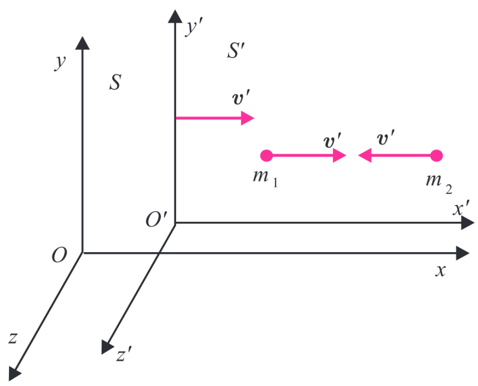

Fig. 9: Ciocnirea inelastică a două corpuri în raport cu S și S'

Înlocuind în legea conservării impulsului în raport cu S:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v'$$

rezultă:

$$m_1 \frac{2v'}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} = (m_1 + m_2)\, v'$$

$$m_1 \left(\frac{2}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} - 1 \right) = m_2$$

Din $v_2 = 0$ rezultă că cel de-al doilea corp se află în repaus față de S. Înseamnă că $m_2 = m_0$, și putem afla m_1 în funcție de m_0:

$$m_0 = m_1 \frac{1 - \frac{v'^2}{c^2}}{1 + \frac{v'^2}{c^2}}$$

Folosind ecuația:

$$1 - \frac{v_1^2}{c^2} = 1 - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{4v'^2}{\left(1 + \frac{v'^2}{c^2}\right)} = \left(\frac{1 - \frac{v'^2}{c^2}}{1 + \frac{v'^2}{c^2}} \right)$$

se obține:

$$m_0 = m_1 \sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}$$

$$m_1 = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}}$$

Așadar, dacă un corp are *masa de repaus* m_0, atunci când se deplasează cu viteza v va avea masa:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

Pentru $\frac{v}{c} \to 0$, rezultă $m \to m_0$, adică, în aproximația newtoniană, masa m poate fi confundată cu masa de repaus m_0.

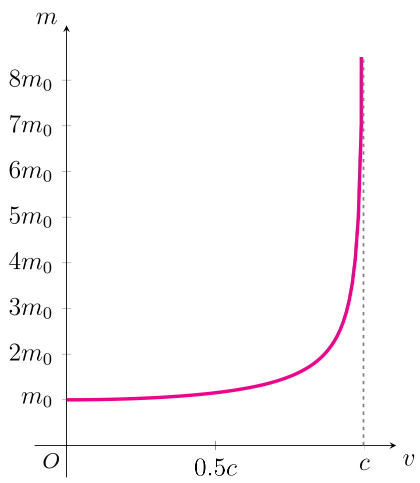

Fig. 10: Dependența $m = f(v)$.

4 Relația masă-energie

În teoria relativității restrânse sunt valabile și teoremele rezultate din principiul fundamental al mecanicii $\vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}$, printre care se află și teorema variației energiei cinetice.

Din

$$\mathrm{d}E_c = \mathrm{d}L = \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} \qquad \vec{F} = \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}\vec{r} = \vec{v}\mathrm{d}t$$

rezultă:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}E_c &= \frac{\mathrm{d}(m\vec{v})}{\mathrm{d}t}\vec{v}\mathrm{d}t = \vec{v}\mathrm{d}(m\vec{v}) \\ &= \vec{v}(m\mathrm{d}\vec{v} + \vec{v}\mathrm{d}m) \\ &= m\vec{v}\mathrm{d}\vec{v} + v^2\mathrm{d}m \\ &= mv\mathrm{d}v + v^2\mathrm{d}m\end{aligned}$$

Folosind relația $m(v)$ aflată anterior, se obține:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}m &= \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}v}\mathrm{d}v = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)\mathrm{d}v \\ &= \frac{-m_0\left(-\frac{2v}{2c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\right)}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\ &= \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}\cdot\frac{\frac{v}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\cdot\mathrm{d}v \\ &= m\cdot\frac{v}{c^2-v^2}\cdot\mathrm{d}v = \frac{mv\mathrm{d}v}{c^2-v^2}\end{aligned}$$

de unde rezultă: $mv\mathrm{d}v = (c^2 - v^2)\mathrm{d}m$. Înlocuind în relația anterioară, rezultă:

$$\mathrm{d}E_c = (c^2 - v^2)\mathrm{d}m + v^2\mathrm{d}m = c^2\mathrm{d}m$$

Integrăm de la masa de repaus m_0 (când E_{c_0}, $v_0 = 0$) la masa de mișcare $m(v)$:

$$E_c = c^2\int_{m_0}^{m}\mathrm{d}m = mc^2 - m_0c^2$$

Altfel spus: $E_c = E - E_0$, unde $E = mc^2$ este energia totală relativistă asociată masei de mișcare, iar $E_0 = m_0c^2$ energia totală relativistă asociată masei de repaus.

Unei creșteri infinit de mici a masei îi corespunde o energie cinetică finită, datorată factorului foarte mare $c^2 = 9\cdot 10^{16}\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$.

Sub altă formă:

$$E_c = (m - m_0)c^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} - 1\right)m_0c^2$$

Folosind dezvoltarea în serie Taylor:

$$f(x) = f(0) + \frac{1}{1!}f'_x(0) + \frac{1}{2!}f''_x(0)x^2 + ...$$

a funcției $\frac{1}{\sqrt{1-x}}$, după puterile raportului $x = \frac{v^2}{c^2}$, și reținând primii termeni:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-\frac{1}{2}} \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = \left(-\frac{1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{3}{2}}(-1) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \qquad f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\right)(1-x)^{-\frac{5}{2}}(-1) = \frac{3}{4}(1-x)^{-\frac{5}{2}} \qquad f''(0) = \frac{3}{4}$$

obținem:

$$E_c = \left[\left(1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8}\cdot\frac{v^4}{c^4} + ...\right) - 1\right] m_0c^2$$

Dacă reținem un singur termen, obținem expresia clasică a energiei cinetice:

$$E_c \approx \frac{m_0v^2}{2}$$

Celebra formulă a lui Einstein, pe baza căreia s-a dezvoltat fizica nucleară după anul 1905, este expresia energiei totale a particulei libere:

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}$$

Formula aceasta a fost dedusă de fizicianul Friedrich Hasenohrl în 1904, din considerații nerelativiste.

Deși este numită de obicei energia totală, această formulă nu include energia potențială a particulei aflată într-un câmp exterior.

Formula $E = mc^2$ exprimă o legătură directă, de *proporționalitate*, între energie și masă.

Prin experiențe de optică fotonică și fizică nucleară, s-a demonstrat că relația este universală, valabilă pentru *orice formă de energie*. Orice variație de energie implică o variație a masei corpului: $\Delta E = c^2\Delta m$.

Legea conservării energiei este și legea conservării masei.

Pentru $v = c$, rezultă $m \to \infty \Rightarrow E \to \infty$, ceea ce este inadmisibil din punct de vedere fizic. Prin urmare, și din această formulă rezultă că viteza luminii nu poate fi atinsă.

Formula lui Einstein evidențiază energia conținută în materia aflată sub formă de substanță. Un kilogram de substanță conține o energie imensă, $E_0 = 9\cdot 10^{16}$ J, egală cu energia necesară pentru ridicarea a 28,7 miliarde de tone de la sol până la vârful turnului Eiffel (aproximativ 320 m).

Uneori, relația este greșit interpretată ca exprimând transformarea materiei în energie. Energia este însă o proprietate a materiei, deci nu are sens să afirmăm că materia se transformă într-o proprietate a sa. Formula exprimă un proces de transformare a materiei dintr-o formă *ponderată* (substanța) într-o formă *radiantă* (câmpul), sau invers.

Defectul de masă, o micșorare a masei ponderale, este cauza energiei imense ce apare în reacțiile nucleare.

Un fenomen ce verifică formula lui Einstein este cel prin care un foton γ absorbit de un corp se transformă în două particule corpusculare (materie ponderală): electron e^- și pozitron e^+. Această transformare poate avea loc doar în cazul în care energia fotonului este cel puțin egală cu de două ori energia relativistă de repaus a electronului sau pozitronului:

$$\begin{aligned} E_{min} &= hv_{min} = 2m_0c^2 = 2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 9 \cdot 10^{16} \\ &= 1{,}64 \cdot 10^{-13}\ \text{J} \\ &= 1{,}022\ \text{MeV} \end{aligned}$$

Din $\frac{hc}{\lambda_{max}} = 2m_0c^2$ (h – constanta lui Planck) rezultă:

$$\lambda_{max} = \frac{h}{2m_0c} = \frac{6{,}62 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31} \cdot 3 \cdot 10^8} = 1{,}21 \cdot 10^{-12}\ \text{m} = 0{,}012\ \text{Å}$$

Spre comparație, $\lambda_{verde} = 5460$ Å $\gg \lambda_{max}$, deci fotonii cu lungimea de undă λ_{max} trebuie să fie fotoni cu energii mari, adică fotoni γ sau fotoni neutrino.

4.1 Relația dintre energia totală, impulsul și masa de repaus în teoria relativității restrânse

$$E = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} \qquad\qquad \vec{p} = m\vec{v} \Rightarrow v^2 = \frac{p^2}{m^2}$$

$$\begin{aligned} E &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{p^2}{m^2c^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{p^2c^2}{(mc^2)^2}}} = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{p^2c^2}{E^2}}} \\ E^2 &= \frac{(m_0c^2)^2}{1-\frac{p^2c^2}{E^2}} = \frac{E^2(m_0c^2)^2}{E^2-p^2c^2} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E^2 - p^2c^2 = m_0c^2 \Leftrightarrow E = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

Ajungem la relația:

$$E = c\sqrt{p^2 + (m_0c)^2}$$

Aceasta este exprimarea energiei în funcție de impuls în mecanica relativistă, analoagă relației $E_c = \frac{p^2}{2m}$ din mecanica newtoniană.

Rezultatul poate fi interpretat ca o relație de unificare pentru particulele relativiste a energiei E, impulsului p, și masei de repaus m_0.

Știind că fotonii au $m_0 = 0$ și $\lambda = \frac{c}{v}$, rezultă:

$$E_f = p_fc \Rightarrow p_f = \frac{E_f}{c} = \frac{hv}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Prin urmare, fotonii au impulsul $p = mc = \frac{h}{\lambda}$ și se deplasează cu viteza c în orice sistem inerțial, oricare ar fi impulsul lor p.

4.2 Mărimi normate. Definirea regimurilor dinamice: newtonian, relativist și extrem relativist

Pentru tratarea unitare a mișcării particulelor, se recurge la normarea mărimilor ce caracterizează mișcarea acestora, adică raportarea vitezei $\vec{v}$ a particulei la viteza luminii c în spațiul liber, respectiv a masei, energiei, și impulsului la expresiile corespunzătoare particulei în repaus.

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c} \qquad \gamma = \frac{E}{E_0} = \frac{m}{m_0}$$

$$\eta = \frac{E_c}{E_0} \qquad \vec{\xi} = \frac{\vec{p}}{m_0 c} = \gamma\vec{\beta}$$

Viteza luminii este o constantă universală și este considerată în modul, astfel încât $\vec{\beta}$ și $\vec{\xi}$ sunt vectori.

Fiecare din mărimile normate se poate exprima în funcție de celelalte:

β	$(1+\eta)^{-1}(\eta^2+2\eta)^{\frac{1}{2}}$	$(\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}}\gamma^{-1}$	$\xi(1+\xi^2)^{-\frac{1}{2}}$
γ	$(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$	$\eta+1$	$(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}$
η	$(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}-1$	$\gamma-1$	$(\xi^2+1)^{\frac{1}{2}}-1$
ξ	$(\gamma^2-1)^{\frac{1}{2}}$	$[\eta(\eta+2)]^{\frac{1}{2}}$	$\beta(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$

În figura 4 este ilustrată variația mărimilor normate β, γ, și ξ în funcție de energia cinetică normată η.

După intervalul cinetic în care iau valori *parametrii reduși*, putem delimita trei domenii dinamice:

- domeniul nerelativist, în care masa particulei poate fi considerată aproximativ constantă și egală cu masa de repaus ($\gamma \approx 1$, $\beta \approx 0{,}4$).
- domeniul relativist, pentru $10^{-1} < \eta < 7$.
- domeniul extrem relativist, în care viteza particulei poate fi considerată constantă și egală cu viteza luminii ($\beta \approx 1$).

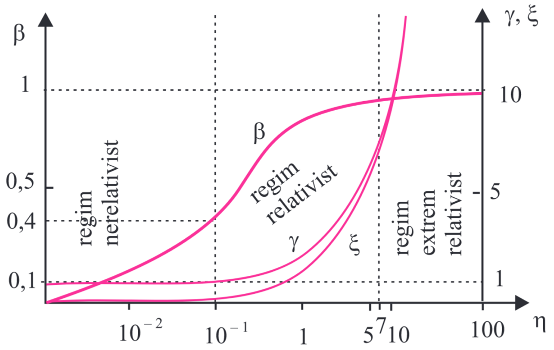

Fig. 11: Reprezentare semilogaritmică a dependenței vitezei, energiei, și impulsului normate de energia cinetică normată

În tehnica accelerării particulelor, în fizica atomică și nucleară, se folosesc, pentru măsurarea energiei și impulsului, unități care nu fac parte din SI, dar care prezintă avantaje în calculele curente.

Pentru măsurarea energiei unei particule se utilizează de regulă electron-voltul [eV]. Acesta reprezintă energia câștigată de un electron accelerat sub o diferență de potențial de 1 V.

$$1 \text{ eV} = 1{,}602 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Deoarece în domeniul extrem relativist impulsul este $p \approx mc = \frac{E}{c}$, putem introduce o unitate arbitrară pentru impuls $\left[\frac{eV}{c}\right]$.

$$1\frac{eV}{c} = 5{,}35 \cdot 10^{-28} \text{ N} \cdot \text{s}$$

Bibliografie

- Manualul de fizică pentru clasa a XII-a
  Cleopatra Gherbanovschi, Nicolae Gherbanovschi
  Editura NICULESCU ABC
  2016