Ejercicios Tema 5 - Variables aleatorias bidimensionales

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso de Probabilidad y Variables Aleatorias con R y Python

Variables aleatorias bidimensionales discretas

1. Una moneda no trucada tiene un 1 pintado en una cara y un 2 en la otra cara. Se llanza al aire dos veces la moneda. Sea X la suma de los dos números obtenidos y sea Y la diferencia de los dos números (el primero menos el segundo). Hallar la función de probabilidad conjunta $P_{XY}(x,y)$, la función de probabilidad de X, $P_X(x)$ y la función de probabilidad de Y, $P_Y(y)$.
2. Suponemos que se pinta un "+1" en una cara de una moneda no trucada y un "-1" en la otra cara. La moneda se llanza al aire dos veces. Sea X el número que sale la primera vez y Y el número que sale la segunda vez. Hallar $P_{XY}(x,y)$, $E(X)$, $E(Y)$ y $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.
3. Se llanza 3 veces una moneda no trucada. Sea X el número de caras que se obtienen e Y el número de cruces. Hallar la función de probabilidad conjunta para (X,Y) y hallar $\sigma_{XY} = E(XY) - E(X) \cdot E(Y)$.
4. Sean X y Y variables aleatorias discretas con función de probabilidad conjunta:

$$P_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{n^2}, & \text{por } x = 1,2,\ldots,n, \quad y = 1,2,\ldots,n, \\ 0, & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

   Comprobar que X e Y son independientes.
5. Si la probabilidad conjunta para (X,Y) no se anula en exactamente 3 puntos, ¿qué se tiene que cumplir para que X y Y sean independientes?
6. Sea (X,Y) la variable aleatoria bidimensional con función de probabilidad conjunta:

$Y\backslash X$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
1	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{2}{9}$

Hallar $E(Y|X=1)$.

Variables aleatorias bidimensionales continuas

1. ¿Cuál es el valor de A si se quiere que la siguiente función

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} A\frac{x}{y}, & \text{si } 0 < x < 1,\ 1 < y < 2, \\ 0, & \text{en los otros casos,} \end{cases}$$

   sea una función de densidad para la variable aleatoria conjunta (X,Y).

2. Suponemos que (X, Y) es una variable aleatoria bidimensional continua con función de densidad:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{si } 0 < y < x,\ 0 < x < 1, \\ 0, & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

   Hallar las funciones de densidad marginales para X y Y.

3. Suponemos que (X, Y) tiene densidad $f_{XY} = c$ para (x, y) en el cuadrilátero de vértices $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(a, 1-a)$ y $(1-a, a)$ donde $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$.
   - Hallar el valor de c.
   - Hallar ρ_{XY} si $a = 0$ y $a = \frac{1}{2}$.

4. Consideramos la función:

$$f(x,y) = \begin{cases} 3x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } x \leq y \leq 1, \\ 3y, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq x, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

   - Comprobar que es una función de densidad.
   - Hallar la función de distribución.
   - Hallar la función de densidad de X, Y, $X|Y = y$ y $Y|X = x$.

5. La variable (X, Y) está distribuida uniformemente en el círculo $x^2 + y^2 \leq 4$. Calcular:
   - $P(Y > kX)$, para cualquier valor de k.
   - Densidad marginal de la variable aleatoria X.
   - Densidad para la variable aleatoria condicionada $X|Y = 1$.
   - $P(|X| < 1|Y = 0.5)$.