SOLUCIONES Ejercicios Tema 3 Parte 1 - Distribuciones Notables: discretas.

Distribuciones notables discretas

22 mayo, 2023

Contents

1 Distribuciones notables discretas

2 Distribuciones notables discretas

2.1 Problema 1.

Se lanzan a la vez 5 dados (de parchís) bien balanceados. Sea X el número
de unos que se observan en la cara superior del dado. Calcular la esperanza de X, la varianza de X, $P(1 \leq X < 4)$ y $P(X \geq 2)$.

2.1.1 Solución

La variable X =número de unos en el lanzamiento de 5 dados, es una variable binomial $B(n = 5, p = 1/6)$.

Así que su valor esperado es $E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$ y su varianza es $Var(X) = n \cdot p \cdot (1-p) = 5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

$$
\begin{array}{rcl}
P(1 \leq X < 4) & = & P(X < 4) - P(X < 1) = P(X \leq 3) - P(X = 0) \\
 & = & \sum_{x=0}^{3} P(X = x) - P(X = 0) \\
 & = & P(X = 3) + P(X = 2) + P(X = 1) = \\
 & = & \binom{5}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \binom{5}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 + \binom{5}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^4 \\
 & = & \frac{5!}{3! \cdot (5-3)!}\frac{5^2}{6^5} + \frac{5!}{2! \cdot (5-2)!}\frac{5^3}{6^5} + \frac{5!}{1! \cdot (5-1)!}\frac{5^1}{6^5} \\
 & = & 10\frac{5^2}{6^5} + 10\frac{5^3}{6^5} + 5\frac{5^4}{6^5} = \frac{10 \cdot 25 + 10 \cdot 125 + 5 \cdot 625}{776} \\
 & = & \frac{4625}{7776} = 0.5947788
\end{array}
$$

Con R

$$
\begin{array}{rcl}
P(1 \leq X < 4) & = & P(X < 4) - P(X < 1) = P(X \leq 3) - P(X = 0) \\
 & = & 0.5947788.
\end{array}
$$

```
pbinom(3,size=5,prob=1/6)
```

```
## [1] 0.9966564
```

```
dbinom(0,size=5,prob=1/6)
```

```
## [1] 0.4018776
```

```
pbinom(3,size=5,prob=1/6)-dbinom(0,size=5,prob=1/6)
```

```
## [1] 0.5947788
```

2.2 Problema 2.

El 10% de los usb fabricados por una marca tienen algún defecto (pero son baratos). Si se seleccionan al azar 10 de los usb fabricados por esta fábrica, ¿cuáles la probabilidad de que ninguno sea defectuoso? ¿Cuántos usb defectuosos debemos esperar?

2.2.1 Solución

Bajo estas condiciones y suponiendo independencia entre la probabilidad de defecto, la variable X= número de usb defectuosos sigue una ley $B(n=10, p=0.1)$.

Nos piden

$$\begin{array}{rcl} P(\text{ningún defectuoso entre 10}) & = & P(X=0) = \binom{10}{0} 0.1^0 \cdot (1-0.1)^{10} = \\ & = & 0.9^{10} = 0.3486784. \end{array}$$

El valor esperado es $E(X) = n \cdot p = 10 \cdot 0.1 = 1$.

2.3 Problema 3.

Si Y sigue una distribución binomial con media $\mu_Y = 6$ y varianza $\sigma_Y^2 = 4$. Calcular la distribución de Y, es decir, encontrad los valores de n y p.

2.3.1 Solución

Tenemos que Y es una $B(n, p)$ luego

$$E(Y) = n \cdot p = \mu_Y = 6$$

y

$$Var(Y) = n \cdot p \cdot (1-p) = \sigma_Y^2 = 4.$$

Ahora $p = \frac{6}{n}$ y sustituyendo en la segunda igualdad $n \cdot \frac{6}{n} \cdot (1 - \frac{6}{n}) = 4$; de donde $6\left(1 - \frac{6}{n}\right) = 4$, $2 \cdot n = 36$ y finalmente $n = 18$. Sabiendo n podemos calcular ahora $p = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$.

2.4 Problema 4.

Un fabricante de **bombillas inteligentes** controladas por **Bluetooth** las vende a sus distribuidores en lotes de 20. Supongamos que la probabilidad de que una bombillas inteligentes esté defectuosa es del 0.05.

1. ¿Cuál es el número esperado de bombillas defectuosas por paquete.
2. ¿Cuál es la probabilidad de que un determinado lote no tenga ninguna bombilla defectuosa?

2.4.1 Solución

Suponiendo independencia entre la probabilidad de defecto del lote X = número de bombilla defectuosas en un o te de 20 sigue una ley $B(n=20, p=0.05)$

El valor esperado es $E(X) = n \cdot p = 20 \cdot 0.05 = 1$.

$P(X=0) = \text{`}dbinom(0, size=20, prob=0.05)\text{`} = 0.3584859$.

2.5 Problema 5.

Una urna contiene 10 bolas, una de color negro y las demás blancas. Sea Z el número de extracciones con reposición necesarias para extraer la bola negra. ¿Cuál es la distribución de la variable Z?

2.5.1 Solución

La extracciones son con reposición, así en cada extracción la probabilidad de extraer negra es $p = \frac{1}{10}$.

La variables X tendrá una distribución geométrica $Ge(p = 0.1)$ con dominio $D_X = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ya que se se cuanta la extracción en la que sale negra y se acaba el experimento.

Su función de probabilidad es $P(X = x) = (1 - p)^{x-1} \cdot p = 0.9^x \cdot 0.1$ para $x = 1, 2, 3 \ldots$.

Ejercicio dar su función de distribución su valor esperado y su varianza.

2.6 Problema 6.

Se lanza una moneda al aire hasta que sale cara. Supongamos que cada tirada es independiente de las otras y que la probabilidad de que salga cara cada vez es p.

1. Demostrar que la probabilidad de que hagan falta un número impar de lanzamientos es $\frac{p}{1-q^2}$ donde $q = 1 - p$.
2. Encontrar el valor de p tal que la probabilidad de que necesitemos un número impar de intentos sea 0.6.
3. ¿Existe un valor de p tal que la probabilidad de que haga falta un número impar de intentos sea 0.5?

2.6.1 Solución

Claramente X número de lanzamientos independientes hasta que salga cara (incluiremos la cara) es un $Ge(p)$.

Su función de probabilidad es $P(X = x) = (1 - p)^{x-1} \cdot p$ para $x = 1, 2, 3 \ldots$.

La probabilidad de impar es

$$\begin{array}{rcl}\sum_{k=0}^{+\infty} P(2 \cdot k + 1) & = & \sum_{k=0}^{+\infty} (1-p)^{2k+1-1} \cdot p \\ & = & p \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \left((1-p)^2\right)^k \\ & = & p \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = \frac{p}{1-q^2}.\end{array}$$

Nos piden p tal que $p \cdot \frac{1}{1-(1-p)^2} = 0.6$ operando obtenemos que

$p = 0.6 \cdot (1 - (1 - p)^2$ entonces $p = 0.6 \left(1 - 1 + 2p - p^2\right)$ operando

$0.6p^2 - 0.2p = 0$ luego $p \cdot (0.6p - 0.2) = 0$.

Las soluciones son $p = 0$ que no es posible y $p = \frac{1}{3}$ que es la única solución.

Repitiendo la ecuación anterior para que la probabilidad de impar sea 0.5 obtenemos que la único solución es $p = 0$ así que no es posible.

2.7 Problema 7.

Se ha observado que el aforo medio de vehículos en un determinado paso de un camino rural es de 3 coches/hora. Suponer que los instantes en que pasan automóviles son independientes. Sea X el número de coches que pasan por este lugar en un intervalo de 20 minutos. Calcular $P(X = 0)$ y $P(X \geq 2)$.

2.7.1 Solución

Bajo estas condiciones la variable aleatoria X_t número coches en t horas sólo puede seguir la distribución notable con promedio de llegadas por hora $\lambda = 3$ y por lo tanto el proceso de Poisson asociado X_t sigue una ley de probabilidad $Po(\lambda \cdot t = 3 \cdot t)$

Como 20 minutos es un $\frac{1}{3}$ de hora luego $X_{\frac{1}{3}}$ es una $Po(3 \cdot \frac{1}{3} = 1)$.

Nos piden $P(X_{\frac{1}{3}} = 0)$ y que $P\left(X_{\frac{1}{3}} \geq 2\right)$. Sabemos que $P(X_{\frac{1}{3}} = x) = \frac{1^x}{x!} e^{-1}$ para $x = 0, 1, 2, \ldots$.

Así que $P\left(X_{\frac{1}{3}} = 0\right) = \frac{(1)^0}{0!} e^{-1} = e^{-1} = 0.3678794$.

$$\begin{array}{rcl} P\left(X_{\frac{1}{3}} \geq 2\right) & = & P\left(X_{\frac{1}{3}} < 2\right) = P\left(X_{\frac{1}{3}} \leq 1\right) \\ & = & \sum_{x=0}^{1} \frac{1^x}{x!} e^{-1} \\ & = & \frac{1^0}{0!} e^{-1} + \frac{1^1}{1!} e^{-1} \\ & = & e^{-1}(1+1) = 2 \cdot e^{-3} = 0.1991483. \end{array}$$

Con R

```
dpois(0,lambda=1)# P(X=1)
```

```
## [1] 0.3678794
```

```
ppois(1,lambda=1)# P(X<=1)
```

```
## [1] 0.7357589
```

```
1-ppois(1,lambda=1)# 1-P(X<=1)=P(X>=2)
```

```
## [1] 0.2642411
```

```
ppois(1,lambda=1,lower.tail = FALSE)# P(X>1)=P(X>=2)
```

```
## [1] 0.2642411
```

2.8 Problema 8.

La proporción de niños pelirrojos es 1 cada 10.000. En una gran ciudad se produjeron 5.000 nacimientos en 2020, aproximar por la distribución de Poisson la probabilidad que ninguno de los nacidos ese año sea pelirrojo. Aproximar la probabilidad de que nazca exactamente 1 niño pelirrojo y la de que hayan nacido al menos 2 pelirrojos.

2.8.1 Solución

La variable de interés es $X=$ número de niños pelirrojos nacidos entre 5000 niños con probabilidad de pelirrojo $\frac{1}{10000}$. Si suponemos independencia entre los tratamientos X seguirá un una ley $B(n = 5000, p = \frac{1}{10000})$. En teoría hemos visto que se puede aproximar por una $Po(\lambda = n \cdot p = \frac{5000}{1000} = 0.1)$.

Con la binomial las probabilidades son

```r
dbinom(1,size=5000,prob=1/10000)
```

```
## [1] 0.3032881
```

```r
1-pbinom(1,size=5000,prob=1/10000)
```

```
## [1] 0.09019643
```

Con la poisson las probabilidades son

```r
dpois(1,lambda=0.5)
```

```
## [1] 0.3032653
```

```r
1-ppois(1,lambda=0.5)
```

```
## [1] 0.09020401
```

Como se ve las probabilidades se parecen bastante.

2.9 Problema 9.

Un vendedor de vehículos usados utiliza la web ComproMotos. Supongamos que el número de ventas sigue un proceso de Poisson de parámetro $\lambda = 1$ vehículo por semana.

1. ¿Cuál es la probabilidad que haya exactamente 3 ventas en un periodo de 2 semanas?
2. ¿Y como mínimo 3 ventas? ¿Y cómo máximo 3 ventas?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que pasen 3 periodos de 2 semanas consecutivas sin ventas?

2.9.1 Solución

X_t número de motos vendidas en t semanas eres un proceso poisson $Po(\lambda \cdot t = 1 \cdot t = t)$. Así que X_t es una $Po(t)$.

Apartado 1. Nos piden $P(X_2 = 3)$ será una $Po(\lambda = 2) = \frac{2^3}{3!} \cdot e^{-2} = 0.180447$.

Con R

```r
dpois(3,lambda=2)
```

```
## [1] 0.180447
```

Apartado 2. Nos piden

$P(X_2 \geq 3) = 1 - P(X_2 < 3) = 1 - P(X_2 \leq 2)$

```r
1-ppois(2,lambda=2)
```

```
## [1] 0.3233236
```

Como máximo 3 es $P(X_2 \leq 3) =$, con R

```r
ppois(3,lambda=2)
```

```
## [1] 0.8571235
```

Apartado 3. La variable T tiempo entre dos ventas consecutivas de este proceso poisson es una v.a. $Exp(\lambda = 1)$. Ahora nos piden 3 periodos de 2 semanas en total 6 semanas $P(X > 5) = 1 - P(X \geq 6) = 1 - \left(1 - e^{-1\cdot 6}\right) = 0.0024788$.

Con R

```r
1-pexp(6,rate=1)
```

```
## [1] 0.002478752
```

```r
pexp(6,rate=1,lower.tail=FALSE)
```

```
## [1] 0.002478752
```

O también es $P(X_6 = 0) = \frac{6^0}{0!} \cdot \exp -6 = 0.0024788$.

```r
exp(-6)
```

```
## [1] 0.002478752
```

```r
dpois(0,lambda=6)
```

```
## [1] 0.002478752
```

2.10 Problema 10.

Lanzamos un moneda hasta que obtenemos como mínimo 3 caras y 3 cruces. Encontrar la probabilidad de que el juego no se acabe en 10 lanzamientos.

2.10.1 Solución

$X =$ número de tiradas hasta obtener 3 cara o tres cruces

Nos piden la probabilidad de no acabar en 10 tiradas esto es $P(X > 10)$

$$\begin{aligned} P(X > 10) &= P\left(\{10 \text{ caras}\} \cup \{10 \text{ cruces}\}\right. \\ &\quad \cup\{9 \text{ caras y una cruz}\} \cup \{9 \text{ cruces y una cara}\} \\ &\quad \left.\cup\{8 \text{ caras y dos cruces}\} \cup\{8 \text{ cruces y dos caras}\}\right) \end{aligned}$$

$P(\{10 \text{ caras}\}) = P(\{10 \text{ cruces}\}) = \frac{1}{2^10}$

$P(\{9 \text{ caras y una cruz}\}) = P(\{9 \text{ cruces y una cara}\}) = \binom{10}{1} \cdot \frac{1}{2^{10}} = 10 \cdot \frac{1}{2^{10}}$

$P(\{8 \text{ caras y dos cruces}\}) = P(\{8 \text{ cruces y dos caras}\}) = \binom{10}{2} \cdot \frac{1}{2^{10}} = 45 \cdot \frac{1}{2^{10}}$

$P(X > 10) = \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{10}} + 10 \cdot \frac{1}{2^{10}} + 10 \cdot \frac{1}{2^{10}} + 45 \cdot \frac{1}{2^{10}} + 45 \cdot \frac{1}{2^{10}} = \frac{2+20+90}{2^{10}} = \frac{112}{2^{10}} = 0.109375.$