Tema 3 - Distribuciones Notables: resumen de cada distribución

Probabilidad con R y python

04 mayo, 2023

Resumen v.a con distribución binomial $B(n, p)$

X binomial: $B(n,p)$
$D_X=\{0,1,\ldots n\}$
$P_X(x)=P(X=x)=\begin{cases} \binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x} & \text{si } x = 0, 1, \ldots, n \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
$F_X(x)=P(X\leq X)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<0 \\ \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i} & \text{si } k\leq x<k+1 \text{para } k=0,1,\ldots,n \\ 1 & \text{si } x\geq n \end{cases}$.
$E(X)=n\cdot p$; $Var(X)=n\cdot p\cdot(1-p)$

Cálculos binomial con R

Sea X con distribución binomial $B(n = 10, p = 0.25)$.

- `dbinom(0,size=10,prob=0.25)` : $P_X(0) = P(X = 0)$.
- `pbinom(4,size=10,prob=0.25)` : $F_X(4) = P(X \leq 4)$.
- `qbinom(0.91,size=10,prob=0.25)`: Cuantil 0.91 $P(X \leq x_{0.91}) \geq 0.91$.
- `rbinom(100,size=10,prob=0.25)`: Muestra aleatoria de tamaño de una Binomial.

Resumen distribución geométrica $Ge(p)$ empezando en 0

X = Geométrica (empieza en 0) número de fracasos para conseguir el primer éxito
$D_X = \{0, 1, \ldots n, \ldots\}$
$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} (1-p)^x \cdot p & \text{si } x = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
$F_X(x) = P(X \leq X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1-(1-p)^{k+1} & \text{si } \begin{cases} k \leq x < k+1 \\ \text{para } k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \end{cases}$
$E(X) = \frac{1-p}{p}$; $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Resumen distribución geométrica $Ge(p)$ empezando en 1.

Y geométrica (que cuenta el éxito) número de INTENTOS para OBTENER el primer éxito
$D_Y = \{1, 2, \ldots n, \ldots\}$
$P_Y(y) = P(Y = y) = \begin{cases} (1-p)^{y-1} \cdot p & \text{si } y = 1, 2, 3, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
$F_Y(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y < 1 \\ 1 - (1-p)^k & \text{si } \begin{cases} k \leq y < k+1 \\ \text{para } k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \end{cases}$
$E(X) = \frac{1}{p}$; $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

Cálculos geométrica con R

Sea X con distribución geométrica $Ge(p = 0.25)$.

- `dgeom(0,prob=0.25)` : $P_X(0) = P(X = 0)$.
- `pgeom(4,prob=0.25)` : $F_X(4) = P(X \leq 4)$.
- `qgeom(0.91,prob=0.25)`: Cuantil 0.91 $P(X \leq x_{0.91}) \geq 0.91$.
- `rgeom(100,prob=0.25)`: Muestra aleatoria de tamaño de una Geométrica.
- Propiedad de la falta de memoria $P\left(X > k + j \middle| X \geq j\right) = P(X > k)$ para todo $k, j = 0, 1, 2, 3 \ldots$.

Resumen distribución Binomial Negativa $BN(n, p)$

X = Número de fracasos antes de conseguir el n-ésimo éxito, $P(\text{Éxito}) = p$. $BN(n, p)$
$D_X = \{0, 1, 2, 3 \ldots\}$
$P_X(k) = P(X = k) = \begin{cases} \binom{k+n-1}{n-1} \cdot (1-p)^k \cdot p^n, & \text{si } k = 0, 1, \ldots \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \sum_{i=0}^{k} P(X = i) & \text{si } \begin{cases} k \leq x < k+1, \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \end{cases}$
$E(X) = n \cdot \frac{1-p}{p}$; $Var(X) = n \cdot \frac{1-p}{p^2}$.

Cálculos distribución binomial negativa con R

Sea X una variable aleatoria $BN(n=2, p=0.1)$.

- `dnbinom(0,size=2,prob=0.25)` : $P_X(0) = P(X=0)$.
- `pnbinom(4,size=2,prob=0.25)` : $F_X(4) = P(X \leq 4)$.
- `qnbinom(0.91,size=2,prob=0.25)`: Cuantil 0.91 $P(X \leq x_{0.91}) \geq 0.91$.
- `rnbinom(100,size=2,prob=0.25)`: Muestra aleatoria de tamaño de una Binomial Negativa.

Resumen distribución Poisson $X \equiv Po(\lambda)$

X con distribución Poisson de media o promedio λ, $Po(\lambda)$
$D_X = \{0, 1, \ldots\}$
$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{si } x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
$F_X(x) = P(X \leq X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{i=0}^{k} P(X=i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} & \text{si } \begin{cases} k \leq x < k+1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \end{cases}$
$E(X) = \lambda$; $Var(X) = \lambda$

Resumen proceso Poisson $X_t \equiv Po(\lambda \cdot t)$

X_t = número de eventos en el intervalo $(0, t]$ $Po(\lambda \cdot t)$ donde λ promedio por u.t.
$D_X = \{0, 1, \ldots\}$
$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{(\lambda \cdot t)^x}{x!} e^{-\lambda \cdot t} & \text{si } x = 0, 1, \ldots \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$
$F_X(x) = P(X \leq X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sum_{i=0}^{k} P(X=i) = \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda \cdot t)^i}{i!} \cdot e^{-\lambda \cdot t} & \text{si } \begin{cases} k \leq x < k+1 \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases} \end{cases}$
$E(X) = \lambda \cdot t;\ Var(X) = \lambda \cdot t$

Cálculos de la distribución Poisson con R

Sea X una variable aleatoria $Po(\lambda = 10)$..

- `dpois(0,lambda=10)` : $P_X(0) = P(X = 0)$.
- `ppois(4,lambda=10)` : $F_X(4) = P(X \leq 4)$.
- `qpois(0.91,lambda=10)`: Cuantil 0.91 $P(X \leq x_{0.91}) \geq 0.91$.
- `rpois(100,lambda=10)`: Muestra aleatoria de tamaño 100 de una Poisson.

Resumen distribución Hipergeométrica $H(m,n,k)$.

$X = \begin{cases} \text{número de bolas blancas en } k \text{ extracciones} \\ \text{sin reposición de una urna conm} \\ \text{bolas blancas y n negras.} \end{cases}$; $H(m,n,k)$
$D_X = \{x \in \mathbb{N} \mid \max\{0, k-n\} \leq x \leq \min\{m,k\}\}$
$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{\binom{m}{x}\cdot\binom{n}{k-x}}{\binom{m+n}{k}}, & \text{si } \max\{0,k-n\} \leq x \leq \min\{m,k\}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$
$F_X(x) = P(X \leq x)$.
$E(X) = \frac{k\cdot m}{m+n}$; $Var(X) = k \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \left(1 - \frac{m}{m+n}\right) \cdot \frac{m+n-k}{m+n-1}$

Cálculos distribución Hipergeométtrica con R

Sea X una v.a. $H(m = 15, n = 10, k = 3)$. La función de `R`

- `dhyper(0,m=15,10,k=3)` : $P_X(0) = P(X = 0)$.
- `phyper(4,m=15,10,k=3)` : $F_X(4) = P(X \leq 4)$.
- `qhyper(0.91,m=15,10,k=3)`: Cuantil 0.91 $P(X \leq x_{0.91}) \geq 0.91$.
- `rhyper(100,m=15,10,k=3)`: Muestra aleatoria de tamaño 100 de una Hypergeometrica.

Resumen v.a con distribución uniforme, $U(a, b)$

Distribución uniforme $U(a, b)$
Dominio $D_X = (a, b)$
$f_X(x) \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a < x < b, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$
$F_X(x) = P(X \leq X) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{si } b \leq x. \end{cases}$
$E(X) = \frac{a+b}{2}$; $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Cálculos distribución uniforme con R

Sea X una *v.a.* $U(a=-1, b=-1)$.

- Por defecto los parámetros son `min=0` y `max=1`.
- `dunif(0,min=-1,max=1)` : $f_X(0)$.
- `punif(4,min=-1,max=1)` : $F_X(4) = P(X \leq 4)$.
- `qunif(0.91,min=-1,max=1)`: Cuantil 0.91 $P(X \leq x_{0.91}) = 0.91$.
- `runif(100,min=-1,max=1)`: Muestra aleatoria de tamaño 100 de una uniforme.

Resumen v.a con distribución exponencial, $Exp(\lambda)$

X sigue una distribución $Exp(\lambda)$
$D_X = (0, +\infty)$
$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
$F_X(x) = P(X \leq X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
$E(X) = \frac{1}{\lambda};\ Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Cálculos distribución exponencial con R

Sea X una $v.a.$ $Exp(\lambda = 3)$.

- La $\lambda = 3$ es el parámetro `rate`.
- `dexp(0,rate=3)` : $f_X(0)$).
- `pexp(4,rate=3)` : $F_X(4) = P(X \leq 4)$.
- `qexp(0.91,rate=3)`: Cuantil 0.91 $P(X \leq x_{0.91}) = 0.91$.
- `rexp(100,rate=3)`: Muestra aleatoria de tamaño 100 de una exponencial.

Resumen v.a con distribución normal, $N(\mu, \sigma)$

X sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$
$D_X = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\sigma^2}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
$F_X(x) = P(X \leq X) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$
$E(X) = \mu;\ Var(X) = \sigma^2.$

Cálculos distribución normal con R

Sea X una $v.a.$ normal $N(\mu = 1.\sigma = 2)$. Los parámetros son `mean` para μ y `sd` para σ

- Los parámetros por defecto son `mean=0,`sd$=$1‘, es decir, los de la normal estándar.
- `dnorm(0,mean=0,sd=1)` : $f_X(0)$.
- `pnorm(4,mean=0,sd=1)` : $F_X(4) = P(X \leq 4)$.
- `qnorm(0.91,mean=0,sd=1)`: Cuantil 0.91 $P(X \leq x_{0.91}) = 0.91$.
- `rnorm(100,mean=0,sd=1)`: Muestra aleatoria de tamaño 100 de una normal.