Tema 1: Probabilidad

Parte 1: Probabilidad con R y python

septiembre 2023

Tabla de contenidos I

Lección 1

Probabilidades Básicas

Definiciones básicas

Experimento aleatorio: experimento que repetido en las mismas condiciones puede dar resultados diferentes, pero que a largo plazo son predecibles

Ejemplo

Tirar un dado de 6 caras y anotar el número de puntos de la cara superior.

Suceso elemental: cada uno de los posibles resultados del experimento aleatorio

Ejemplo

Los sucesos elementales del ejemplo anterior son:

Definiciones básicas

Espacio muestral: el conjunto Ω formado por todos los sucesos elementales del experimento aleatorio

Ejemplo

El espacio muestral del ejemplo anterior del dado es $\Omega =$ las figuras de la caras anteriores

pero por comodidad, y en general pondremos

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Definiciones básicas

Suceso : Cualquier subconjunto del espacio muestral.

Alguno sucesos notables que merece la pena nombrar son:

- Suceso seguro o cierto: Ω
- Suceso imposible o vacio: $\emptyset$
- Partes de un conjunto: $\mathcal{P}(\Omega)$: conjunto de todos los sucesos del experimento aleatorio (es decir, el conjunto de todos los subconjuntos de Ω)

Ejercicio

¿Cuantos elementos contiene el conjunto de partes de Ω del experimento anterior?

Ejemplo n-grama

Se define un n-grama de una palabra como el conjunto de n letras consecutivas de la misma (contando los blancos de inicio y final de palabra que marcamos como "_").

Ejemplo

Consideremos el experimento aleatorio que consiste en escoger al azar un 3-grama de la palabra "_Baleares_". Vamos a escribir el espacio muestral y algunos sucesos elementales del mismo.

En este caso, si consideramos la palabra "_Baleares_", el espacio muestral del experimento sería:

$$\Omega = \{\_Ba, Bal, ale, lea, ear, are, res, es\_\}$$

Ejemplo n-grama

Algunos sucesos serían:

- 3-gramas que empiezan por a: $\{ale, are\}$.
- 3-gramas de inicio y final de palabra: $\{\_Ba, es\_\}$.
- 3-gramas que contengan una l: $\{Bal, ale, lea\}$.

Operaciones con sucesos

Si tenemos dos sucesos $A, B \subseteq \Omega$, podemos definir:

- Ω: *suceso* total o *seguro*.
- $\emptyset$: suceso *vacío* o *imposible*.
- $A \cup B$: suceso *unión*; el que ocurre si sucede A o B.
- $A \cap B$: suceso *intersección*; el que ocurre si sucede A y B.
- A^c: suceso *complementario* el que sucede si NO sucede A.
- $A - B = A \cap B^c$: suceso *diferencia*, que acontece si sucede A y NO sucede B.

Sucesos incompatibles: A y B son *incompatibles* (o *disjuntos*) cuando $A \cap B = \emptyset$.

Ejemplo género

Ejemplo

Supongamos que el sexo se divide entre Mujeres y Hombres. Vamos a definir el espacio muestral, los sucesos elementales y a realizar algunas operaciones entre ellos.

- Estudiantes de esta clase: Ω.
- Mujeres de esta clase: A.
- Estudiantes que son zurdos B.

Algunas operaciones entre los conjuntos:

- $A \cup B$: Est. que son mujeres o que son zurdos.
- $A \cap B$: Mujeres de esta clase que son zurdas.
- A^c: Hombres de esta clase.
- $A - B$: Mujeres de la clases que NO son zurdas.
- $B - A$: Hombres de la clase que son zurdos.
- ¡Cuidado! No son incompatibles.

Propiedades

Conmutativas:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A$$

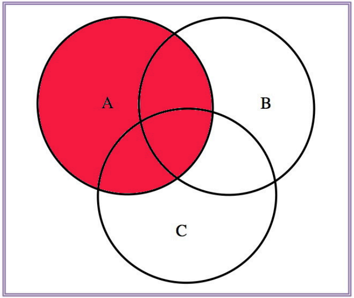
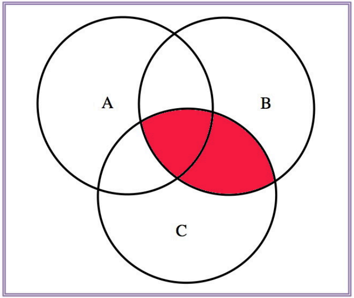
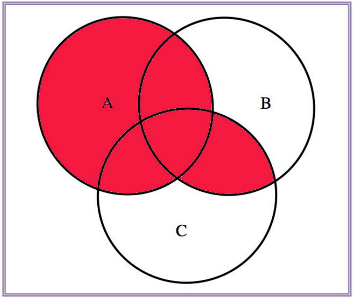
Asociativas:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

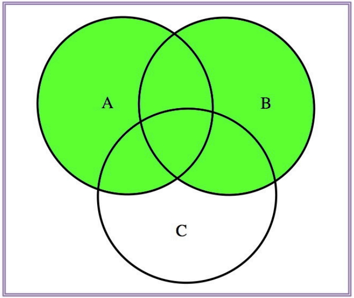
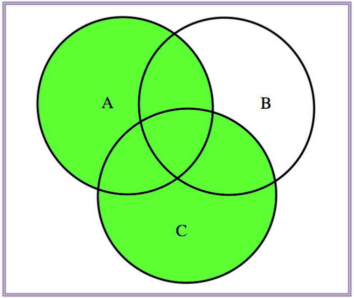
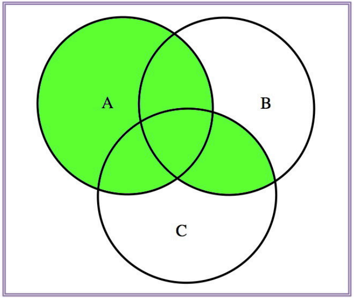
Distributivas:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Propiedades

A	$B \cap C$	$A \cup (B \cap C)$
		

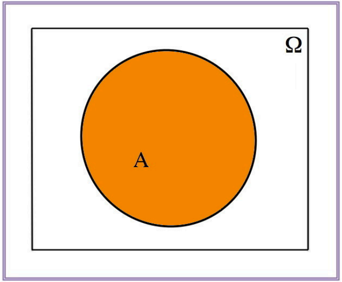
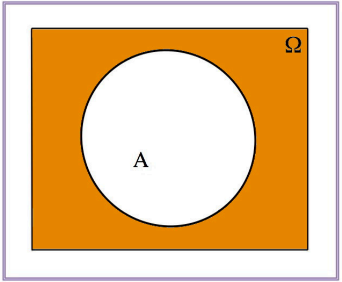
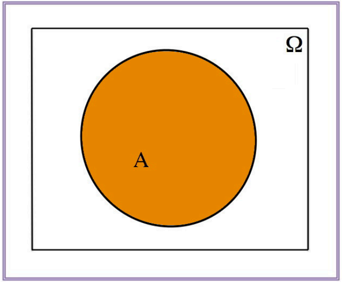
Propiedades

$A \cup B$	$A \cup C$	$(A \cup B) \cap (A \cup C)$
		

Propiedades

Complementario del complementario

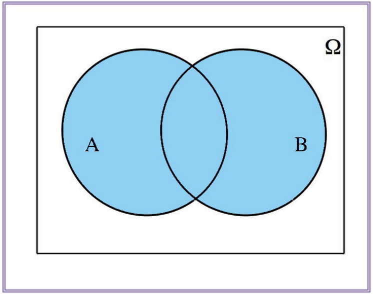
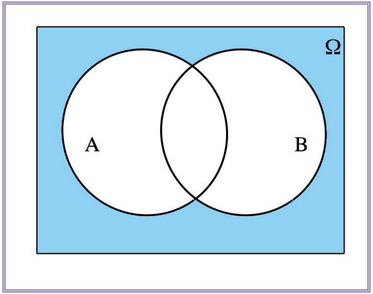
$$(A^c)^c = A$$

A	A^c	$(A^c)^c$
		

Propiedades

Leyes de De Morgan

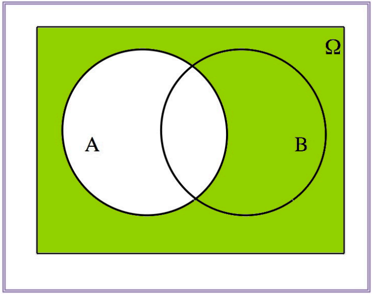
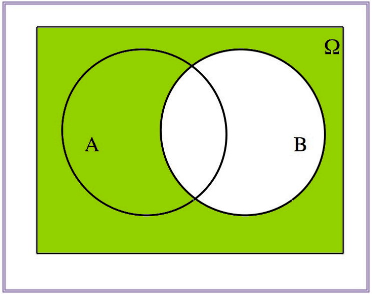
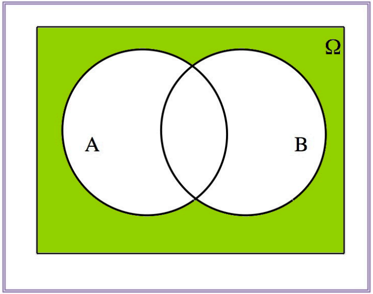
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$A \cup B$	$(A \cup B)^c$
	

Propiedades

Leyes de De Morgan

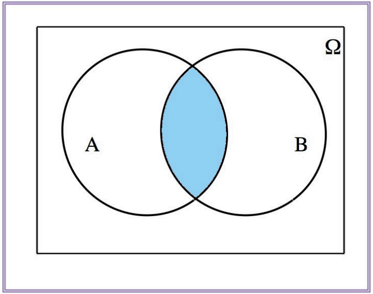
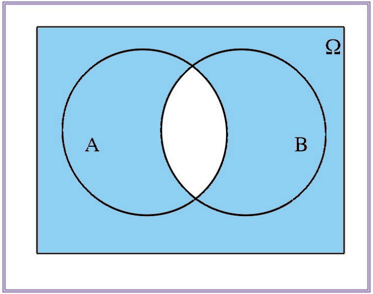
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

A^c	B^c	$A^c \cap B^c$
		

Propiedades

Leyes de De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

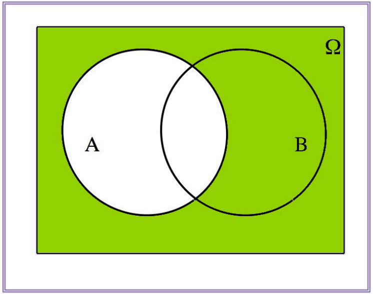
$A \cap B$	$(A \cap B)^c$
	

Propiedades

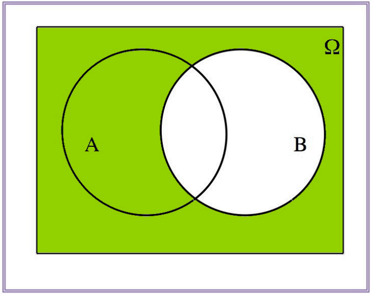
Leyes de De Morgan

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

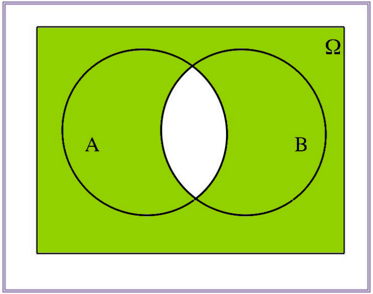
A^c



B^c



$A^c \cup B^c$



Definición de probabilidad

La probabilidad de un suceso es una puntuación (*score*) numérico entre 0 y 1 que mide la verosimilitud de que este evento se produzca.

Esta verosimilitud puede estar justificada por:

- Estimación personal
- Estimación de expertos
- La frecuencia con la que se da
- Cálculo formal

Definición de probabilidad

Definición formal de probabilidad

Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio. Supongamos que el número de posibles resultados, por el momento, es finito.

Una probabilidad sobre Ω es una aplicación $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ con las siguientes propiedades:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$, para todo suceso A.
2. $P(\Omega) = 1$.
3. Si $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ son sucesos disjuntos dos a dos, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

Si $a \in \Omega$ es un suceso elemental cometeremos el abuso de notación de poner $P(a)$ en lugar de $P(\{a\})$.

Ejemplo: grupos sanguíneos

Ejemplo

En la página de la Fundación Banco de Sangre y Tejidos de las Islas Baleares (17-08-2023) podemos encontrar información sobre los porcentajes de tipos de sangre de los donantes de las Islas Baleares:

$$A : 46\%;\ B : 7.5\%;\ AB : 3.5\%;\ O : 43\%.$$

¿Cuál es la probabilidad de que un balear donante de sangre no sea del tipo O?

Ejemplo: grupos sanguíneos

Experimento aleatorio: tipo de sangre de un paciente humano:

$$\Omega = \{\text{A,B,AB,O}\}$$

Probabilidad de un suceso: se asimila al porcentaje observado de individuos.

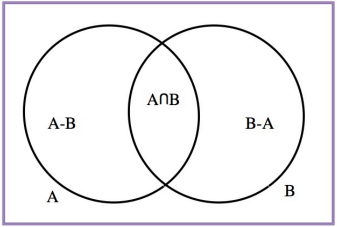
Suceso: $\{\text{O}\}^c = \{\text{A,B,AB}\}$.

$$P(\{\text{O}\}^c) = P(\{\text{A,B,AB}\}) = P(\text{A}) + P(\text{B}) + P(\text{AB}) = 0.57.$$

Propiedades

Propiedades básicas de la probabilidad

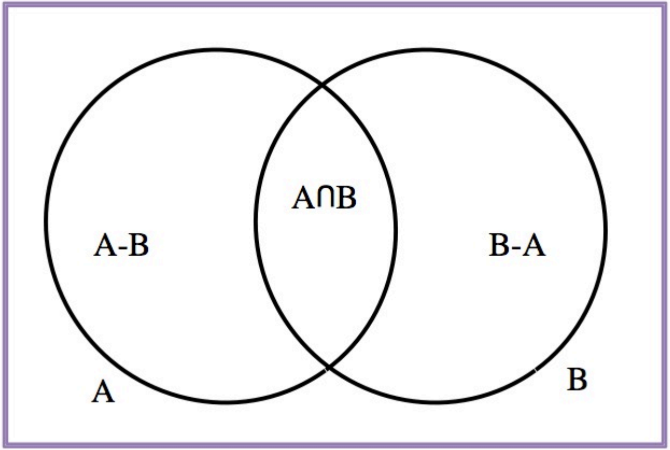
- $P(\emptyset) = 0$.
- $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$ porque $P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$.



- Si $B \subseteq A$, entonces $0 \leq P(B) \leq P(A)$.
- $P(A^c) = 1 - P(A)$.

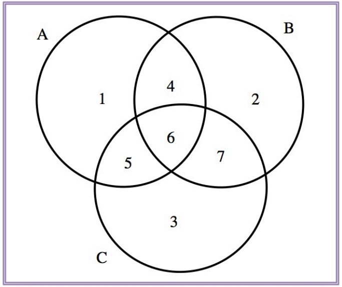
Propiedades

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



Propiedades

Propiedades



$$P(A \cup B \cup C) = P(1) + P(2) + P(3) + P(4) + P(5) + P(6) + P(7).$$

Propiedades

- Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$, entonces

$$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_k).$$

- Si todos los sucesos elementales tienen la misma probabilidad,

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \left(= \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} \right).$$

Ejemplo: Frecuencia de vocales

Ejemplo

Los porcentajes de vocales de un determinado idioma (de alfabeto latino) según la Wikipedia son:

$$A: 18.7\%;\ E: 26.1\%;\ I: 25.7\%;\ O: 24.4\%;\ U: 5.1\%.$$

¿Cuál es la probabilidad que una vocal escogida al azar de este idioma sea una E o una O?

El espacio muestral del experimento es $\Omega = \{A, E, I, O, U\}$.

El suceso que deseamos analizar es $\{E, 0\}$.

Y su probabilidad es

$$P(\{E, O\}) = P(E) + P(O) = 0.261 + 0.244 = 0.505.$$

Ejemplo: Consumo de drogas

Segun un árticulo de El País, en un control especial de la policía el 0.1% de todos los conductores analizados en un control de tráfico dan positivo en un el test en cocaína, y el 1% da positivo en cannabis. Un 1.05% da positivo en alguno de los dos test.

¿Cuál es la probabilidad que un individuo analizado en el control de drogas escogido al azar no de positivo en ninguno de lo dos test?

Los sucesos elementales del enunciado del problema son:

- A: dar positivo en cocaína; $P(A) = 0.001$.
- B: dar positivo en cannabis; $P(B) = 0.01$.

En este caso nos interesa estudiar los sucesos:

- $A \cup B$: dar positivo en alguno de los dos test; $P(A \cup B) = 0.0105$.
- $(A \cup B)^c$: no dar positivo en ninguno de los test,

por tanto:

$$P((A \cup B)^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.0105 = 0.9895$$

Ejemplo: Consumo de drogas

Ejemplo

En un control especial de la policía el 0.1% de todos los conductores analizados en un control de tráfico dan positivo en un el test en cocaína, y el 1% da positivo en cannabis. Un 1.05% da positivo en alguno de los dos test.

¿Cuál es la probabilidad que un analizado al azar de positivo en los dos test en cocaína y cannabis?

Ejemplo: Consumo de drogas

Los sucesos elementales son:

- A: dar positivo en cocaína; $P(A) = 0.001$.
- B: dar positivo en cannabis; $P(B) = 0.01$.

En este caso nos interesa estudiar los sucesos:

- $A \cup B$: dar positivo en algún de los dos test; $P(A \cup B) = 0.0105$.
- $A \cap B$: dar positivo en los dos test

Ejemplo: Consumo de drogas

de donde, por tanto:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0.001 + 0.01 - 0.0105 = 0.0005. \end{aligned}$$

Ejemplo: Control de drogas

Ejemplo

En un control especial de la policía el 0.1% de todos los conductores analizados en un control de tráfico dan positivo en un el test en cocaína, y el 1% da positivo en cannabis. Un 1.05% da positivo en alguno de los dos test.

¿Cuál es la probabilidad de que un conductor analizado de positivo en cocaína pero no en cannabis?

Ejemplo: Consumo de drogas

::: example-sol Los sucesos elementales son:

- A: dar positivo en cocaína; $P(A) = 0.001$.
- B: dar positivo en cannabis; $P(B) = 0.01$.

Ejemplo: Consumo de drogas

En este caso nos interesa estudiar los sucesos:

- $A\cap B$: dar positivo en los dos test; $P(A\cap B)=0.0005.$
- $A-B$: dar positivo en cocaína pero no en cannabis, por lo tanto tenemos que :

$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0.001-0.0005=0.0005.$$

Lección 2

Probabilidad condicionada

Probabilidad condicionada

Probabilidad condicionada: Dados dos sucesos A y B, con $P(A) > 0$, la probabilidad $P(B|A)$ de B condicionado a A es la probabilidad

- de que suceda B suponiendo que pasa A,
- de que si pasa A, entonces suceda B,
- de que un resultado de A también pertenezca a B.

Se calcula a través de la definición:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Ejemplo: frecuencia género y gafas

Ejemplo

En una clase de 20 hombres y 30 mujeres, 15 hombres y 18 mujeres llevan gafas. Contestemos las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno lleve gafas?

$$\frac{33}{50}$$

- ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno sea mujer y lleve gafas?

$$\frac{18}{50}$$

Ejemplo: sexo y gafas

Ejemplo

En una clase de 20 hombres y 30 mujeres, 15 hombres y 18 mujeres llevan gafas. Contestemos las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que un chica lleve gafas?

$$\frac{18}{30}=\frac{18/50}{30/50}=\frac{P(\text{mujer y gafas})}{P(\text{mujer})}.$$

- Si escogemos un estudiante al azar ¿Cuál es la probabilidad que si es mujer, entonces lleve gafas?

$$\frac{18}{30}.$$

Ejemplo

Ejemplo

En una clase de 20 hombres y 30 mujeres, 15 hombres y 18 mujeres llevan gafas. Contestemos las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es la probabilidad de que un alumno que lleve gafas sea mujer?

$$\frac{18}{33} = \frac{18/50}{33/50} = \frac{P(\text{mujer y gafas})}{P(\text{gafas})}.$$

- Si escogemos un estudiante al azar ¿Cuál es la probabilidad de que si lleva gafas, entonces sea mujer?

$$\frac{18}{33}$$

¡Atención!

Hay que distinguir bien entre

- $P(A \cap B)$: probabilidad de A y B.

Probabilidad de que sea mujer y lleve gafas.

- $P(A|B)$: probabilidad de que si pasa B, entonces pase A.

Probabilidad de que, si es mujer, lleve gafas.

Cuando utilizamos probabilidad condicional $P(A|B)$ estamos restringiendo el espacio muestral a B.

Probabilidad condicionada. Propiedades

La probabilidad condicionada es una probabilidad

Proposición

Sea $A \subseteq \Omega$ un suceso tal que $P(A) > 0$, entonces

$$\begin{array}{rccl} P(-|A): & \mathcal{P}(\Omega) & \to & [0,1] \\ & B & \mapsto & P(B|A). \end{array}$$

satisface las propiedades de las probabilidades, como por ejemplo:

$$\begin{array}{l} P(B^c|A) = 1 - P(B|A), \\ P(B_1 \cup B_2|A) = P(B_1|A) + P(B_2|A) - P(B_1 \cap B_2|A). \end{array}$$

Ejercicio

Escribid el resto de propiedades que cumpliría una probabilidad condicionada al evento A.

Ejemplo

Ejemplo

Un 15% de los adultos son hipertensos, un 25% de los adultos creen que son hipertensos, y un 9% de los adultos son hipertensos y creen que lo son.

Si un adulto cree que es hipertenso, ¿cuál es la probabilidad que lo sea?

Ejemplo

Sean los sucesos

- A: ser hipertenso, $P(A) = 0.15$,
- B: creer ser hipertenso, $P(B) = 0.25$,

entonces podemos definir el suceso:

- $A \cap B$: ser hipertenso y creerlo, $P(A \cap B) = 0.09$.

Ejemplo

de donde, la probabilidad condicionada de ser hipertenso creyéndonos que lo somos es:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.09}{0.25} = 0.36.$$

Ejemplo

Ejemplo

Un 15% de los adultos son hipertensos, un 25% de los adultos creen que son hipertensos, y un 9% de los adultos son hipertensos y creen que lo son.

Si un adulto es hipertenso, ¿cuál es la probabilidad que crea que lo es?

Si tenemos los sucesos:

- A: ser hipertenso,
- B: creer ser hipertenso

entonces buscamos la probabilidad $P(B|A)$:

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{0.09}{0.15} = 0.6$$

Ejemplos: dígitos de control

Ejemplo

Un dígito de control de error toma el valor 0 en el 99% de los casos en que hay un error. Si la probabilidad de error en un mensaje es del 0.5%. ¿cuál es la probabilidad de que el mensaje sea erróneo y el código de error tenga valor 0?

- B: mensaje con error; $P(B) = 0.005$,
- A: código de error vale 0,
- $P(A|B) = 0.99$,

entonces:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B) = 0.005 \cdot 0.99 = 0.00495.$$

Ejemplos

Ejemplo: SPAM

Un 50% de correos recibidos en un servidor llevan adjuntos y un 65% son publicidad no deseada (SPAM). Sólo un 15% de estos correos no llevan adjuntos y no son SPAM.

- ¿Cuál es la probabilidad que un correo lleve adjunto si es SPAM?
- ¿Cuál es la probabilidad que un correo **no** tenga adjuntos si **no** es SPAM?

Ejemplos

Ejemplo

Un 50% de correos recibidos en un servidor llevan adjuntos y un 65% son publicidad no deseada (SPAM). Sólo un 15% de estos correos no llevan adjuntos y no son SPAM.

- ¿Cuál es la probabilidad que un correo lleve adjunto si es SPAM?

- A: llevar adjuntos; $P(A) = 0.5$,
- S: SPAM; $P(S) = 0.65$,
- $A^c \cap S^c = (A \cup S)^c$: no llevar adjunto y no ser SPAM; $P((A \cup S)^c) = 0.15$,

$$P(A|S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = ?$$

Ejemplos

Ejemplo

Un 50% de correos recibidos en un servidor llevan adjuntos y un 65% son publicidad no deseada (SPAM). Sólo un 15% de estos correos no llevan adjuntos y no son SPAM.

- ¿Cuál es la probabilidad que un correo lleve adjunto si es SPAM?

- $P(A)=0.5, P(S)=0.65, P(A^c\cap S^c)=P((A\cup S)^c)=0.15,$
- $P(A\cup S)=1-P((A\cup S)^c)=0.85,$
- $P(A\cap S)=P(A)+P(S)-P(A\cup S)=0.3,$

$$P(A|S)=\frac{P(A\cap S)}{P(S)}=\frac{0.3}{0.65}\approx 0.46.$$

Ejemplos SPAM continuación

Ejemplo

Un 50% de correos recibidos en un servidor llevan adjuntos y un 65% son publicidad no deseada (SPAM). Sólo un 15% de estos correos no llevan adjuntos y no son SPAM.

- ¿Cuál es la probabilidad de que un correo no lleve adjuntos si no es SPAM?
- $P(A) = 0.5, P(S) = 0.65, P(A^c \cap S^c) = P((A \cup S)^c) = 0.15.$

$$P(A^c|S^c) = \frac{P(A^c \cap S^c)}{P(S^c)} = \frac{P(A^c \cap S^c)}{1 - P(S)} = \frac{0.15}{0.35} \approx 0.43.$$

Teorema de la probabilidad total

Teorema de la probabilidad total

Dados dos sucesos A y B se tiene que

$$
\begin{aligned}
P(B) &= P(B \cap A) + P(B \cap A^c) \\
&= P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c).
\end{aligned}
$$

Teorema de la probabilidad total

Partición del espacio espacio muestral

Los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son una **partición** del espacio muestral Ω de un determinado experimento aleatorio, si cumplen las condiciones siguientes:

1. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$,
2. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son incompatibles dos a dos ($A_i \cap A_j = \emptyset$).

Teorema de la probabilidad total

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición de Ω. Sea B un suceso cualquiera. Entonces

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap A_1) + \cdots + P(B \cap A_n) \\ &= P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \ldots + P(A_n) \cdot P(B|A_n). \end{aligned}$$

Ejemplos

Ejemplo

Un dígito de control de error toma el valor 0 en un 99% de los casos en que hay un error y en un 5% de los mensajes sin error. La probabilidad de error en un mensaje es del 0.5%.

¿Cuál es la probabilidad de que un mensaje escogido al azar tenga el dígito de control a 0?

Ejemplo

::: example-sol Sean los sucesos del enunciado:

- B: mensaje con error; $P(B) = 0.005$,
- A: código de error vale 0,

entonces obtenemos las probabilidades a partir del enunciado:

- $P(A|B) = 0.99$,
- $P(A|B^c) = 0.05$

Ejemplo

y por tanto,

$$\begin{aligned} P(A) = \quad & P(B) \cdot P(A|B) + P(B^c) \cdot P(A|B^c) \\ & = 0.005 \cdot 0.99 + 0.995 \cdot 0.05 = 0.0547. \end{aligned}$$

Clasificación o Diagnósticos

Consideremos alguna de las siguientes situaciones:

- Un algoritmo detecta si una transacción con tarjeta de crédito es fraude o no.
- Un algoritmo detecta si tiene o no que mostrar un anuncio en una web.
- Un prueba de embarazo.
- Una prueba médica para una enfermedad concreta.

Nos ceñiremos a la casuística más elemental el algoritmo de clasificación o la diagnosis solo da dos resultado **Positivo** (sí tienes la enfermedad, sí es un fraude) o **Negativo** (en caso contrario).

Clasificación o Diagnósticos

En todas estas situaciones podemos calcular lo que se llama **matriz de confusión** que representa todas las situaciones posibles. En el caso de estudiar una condición de tipo binario,

	El Test da Positivo	El Test da Negativo
Condición Positiva	Correcto	Error
Condición Negativa	Error	Correcto

Clasificación o Diagnósticos

En general los modelos y algoritmos de clasificación suelen aportar puntuaciones (*scores*) que determinan el grado de pertenencia a una clase, o que miden si dos objetos están en la misma clase.

Así el resultado del clasificador o del diagnóstico puede ser:

- **un número real**, en cuyo caso debe clasificador entre cada clase debe determinarse por un valor umbral (*threshold*) por ejemplo para determinar si una persona está estresado podemos dar un *scores* entre 0 y 1 (1 máximo estrés 0 estrés nulo),
- **un resultado discreto** que indica directamente una de las clases (esto es necesario si es un algoritmo que debe decidir qué hacer con el objeto.

Clasificación o Diagnósticos

Positivos y Negativos Consideremos un problema de predicción de clases binario, en la que los resultados se etiquetan positivos (P) o negativos (N). Hay cuatro posibles resultados a partir de un clasificador binario como el propuesto.

- Si el resultado de una exploración es P y el valor dado es también P, entonces se conoce como un Verdadero Positivo (VP).
- Sin embargo si el valor real es N entonces se conoce como un Falso Positivo (FP).
- De igual modo, tenemos un Verdadero Negativo (VN) cuando tanto la exploración como el valor dado son N.
- Un Falso Negativo (FN) cuando el resultado de la predicción es N pero el valor real es P.

Clasificación o Diagnósticos

Un ejemplo aproximado de un problema real es el siguiente: consideremos una prueba diagnóstica que persiga determinar si una persona tiene una cierta enfermedad.

- Un falso positivo en este caso ocurre cuando la prueba predice que el resultado es positivo, cuando la persona no tiene realmente la enfermedad.
- Un falso negativo, por el contrario, ocurre cuando el resultado de la prueba es negativo, sugiriendo que no tiene la enfermedad cuando realmente sí la tiene.

Clasificación o Diagnósticos

En un diagnósticos de una cierta condición (por ejemplo, test embarazo, test de enfermedad), tenemos dos tipos de sucesos:

- T: el test da positivo,
- M: el sujeto satisface la condición.

Falsos Positivos y Falsos Negativos

- **Falsos positivos** $T \cap M^c$: El test da positivo, pero la condición no se da,
- **Coeficiente de falsos positivos** $P(T|M^c)$,
- **Falsos negativos** $T^c \cap M$: El test da negativo, pero la condición sí que se da,
- **Coeficiente de falsos negativos**: $P(T^c|M)$.

Clasificación o Diagnósticos

Ejemplo

Un test diseñado para diagnosticar una determinada enfermedad tiene un coeficiente de falsos negativos de 0.06, y un coeficiente de falsos positivos de 0.04. En un estudio masivo se observa que un 15% de la población da positivo al test.

¿Cuál es la probabilidad que una persona escogida aleatoriamente tenga esta enfermedad?

Los datos del problema son:

- T: dar positivo al test; $P(T) = 0.15$,
- M: tener la enfermedad,
- $P(T) = 0.15$, $P(T^c|M) = 0.06$, $P(T|M^c) = 0.04$,
- ¿$P(M)$?

Ejemplos

- $P(T) = 0.15$, $P(T^c|M) = 0.06$, $P(T|M^c) = 0.04$.

$$P(T) = P(M) \cdot P(T|M) + P(M^c) \cdot P(T|M^c).$$

donde

$$\begin{array}{l} P(T|M) = 1 - P(T^c|M) = 0.94 \\ P(M^c) = 1 - P(M). \end{array}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} 0.15 &= P(M) \cdot 0.94 + (1 - P(M)) \cdot 0.04 \\ &= 0.04 + 0.9 \cdot P(M) \\ P(M) &= \frac{0.11}{0.9} \approx 0.1222. \end{aligned}$$

Lección 3

Bayes

Fórmula de Bayes

Teorema de Bayes

Sean A y B dos sucesos. Si $P(B) > 0$, entonces

$$P(A|B) = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(A^c) \cdot P(B|A^c)}.$$

Ejercicio

Demostrar el teorema de Bayes utilizando que

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \cdots$$

Fórmula de Bayes

Teorema de Bayes

Sea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ una partición de Ω. Sea B un suceso tal que $P(B) > 0$. entonces(para cualquier $i = 1, 2, \ldots, n$):

$$\begin{aligned} P(A_i|B) &= \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A_i) \cdot P(B|A_i)}{P(A_1) \cdot P(B|A_1) + \cdots + P(A_n) \cdot P(B|A_n)}, \end{aligned}$$

Ejercicio

Demostrar el teorema de Bayes utilizando que

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \cdots$$

Ejemplos

Ejemplo

Un test para detección de VIH da positivo un 99% de los casos en los que está presente y en un 5% de los casos en los que el virus está ausente. En una población con un 0.5% de infectados por VIH, ¿cuál es la probabilidad que un individuo que haya dado positivo en el test esté infectado?

Los sucesos del ejemplo son:

- A: individuo infectado,
- B: el test da positivo,

de donde podemos calcular:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c)} = \frac{0.99 \cdot 0.005}{0.005 \cdot 0.99 + 0.995 \cdot 0.05} = 0.09.$$

Ejemplos

Ejemplo

Un test para detección de VIH da positivo un 99% de los casos en los que está presente y en un 5% de los casos en los que el virus está ausente. En una población con un 0.5% de infectados por VIH, ¿cuál es la probabilidad de que un individuo que haya dado **negativo** en el test **no** esté infectado?

Los sucesos del ejemplo son:

- A: individuo infectado,
- B: el test da positivo,

de donde podemos calcular:

$$P(A^c|B^c) = \frac{P(B^c|A^c)\cdot P(A^c)}{P(B^c|A)\cdot P(A) + P(B^c|A^c)\cdot P(A^c)} = \frac{0.95\cdot 0.995}{0.01\cdot 0.005 + 0.95\cdot 0.995} = 0.999947.$$

Ejemplos

Ejercicio

Se ha observado que los cientes de una empresa de ventas por internet son de tres tipos, A, B y C, disjuntos dos a dos. La probabilidad que ser de cualquiera de cada uno de los tipos es $1/3$, pero la probabilidad de compra de cada tipo es diferente: si es de tipo A compra un 50% de las veces, si de tipo B, un 75% de las veces, y de tipo C, un 60%.

Supongamos que llega un cliente ¿cuál es la probabilidad de que si ha comprado sea del tipo B?

- Los sucesos del ejercicio son A: el cliente es de tipo A, B: el cliente es de tipo B, C: el cliente es de tipo C y

$$P(A) = P(B) = P(C) = 1/3.$$

Buscamos estudiar el suceso E: el cliente compra, se tiene que:

Ejemplos

Ejercicio

Un test de detección precoz de abandono de clientes de una empresa de telefonía da positivo el 97.5% de las ocasiones en las que, posteriormente, el cliente se da de baja, y un 12% de las veces en que no se dio de baja. La probabilidad que un cliente escogido al azar se dé de baja es de un 2%.

- ¿Cuál es la probabilidad que un individuo escogido al azar de positivo en el test?
- ¿Cuál es la probabilidad que un individuo escogido al azar se de de baja y dé positivo en el test?
- ¿Cuál es la probabilidad que un individuo que dé negativo en el test se dé de baja?

Definimos los sucesos y datos del ejercicio:

- T: Dar positivo al test,
- B: darse de baja; $P(B)=0.02$,
- $P(T|B)=0.975, P(T|B^c)=0.12.$

Ejemplos

$$P(B) = 0.02, P(T|B) = 0.975, P(T|B^c) = 0.12.$$

- ¿Cuál es la probabilidad que un individuo escogido al azar de positivo en el test?

$$\begin{aligned} P(T) = & \ P(B) \cdot P(T|B) + P(B^c) \cdot P(T|B^c) \\ & = 0.02 \cdot 0.975 + 0.98 \cdot 0.12 = 0.1371. \end{aligned}$$

- ¿Cuál es la probabilidad que un individuo escogido al azar se de de baja y dé positivo en el test?

$$P(B \cap T) = P(B) \cdot P(T|B) = 0.02 \cdot 0.975 = 0.0195.$$

Ejemplos

$$P(B) = 0.02, P(T|B) = 0.975, P(T|B^c) = 0.12.$$

- ¿Cuál es la probabilidad que un individuo que dé negativo en el test se dé de baja?

$$\begin{aligned} P(B|T^c) = & \frac{P(B \cap T^c)}{P(T^c)} = \frac{P(B) - P(B \cap T)}{1 - P(T)} \\ & = \frac{0.02 - 0.0195}{1 - 0.1371} \approx 0.00058 \end{aligned}$$

- O también se obtiene así

$$P(B|T^c) = \frac{P(T^c|B) \cdot P(B)}{P(T^c|B) \cdot P(B) + P(T^c|B^c) \cdot P(B^c)},$$

donde $P(T^c|B) = 1 - P(T|B) = 0.025$ y $P(T^c|B^c) = 1 - P(T|B^c) = 0.88.$

Lección 4

Independencia de sucesos

Sucesos independientes

Sucesos Independientes

Diremos que los sucesos A y B son **independientes** si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$A_1, \ldots, A_n$ son sucesos **independientes** cuando, para toda subfamilia $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$,

$$P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdots P(A_{i_k}).$$

Sucesos independientes

Proposición

Dados dos sucesos A y B con $P(A), P(B) > 0$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A y B son independientes.
2. $P(A|B) = P(A)$.
3. $P(B|A) = P(B)$.

Sucesos independientes

Proposición

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A y B son independientes
2. A^c y B son independientes.
3. A y B^c son independientes.
4. A^c y B^c son independientes.

Ejemplo billete avión

Ejemplo

En la web de viajes WEBTravel, el 55% de los clientes compra billete de avión, el 20% alojamiento en hotel, y el 60% billete de avión o alojamiento en hotel. ¿Son los sucesos comprar billete de avión y comprar alojamiento en hotel independientes?

Los sucesos y datos del ejemplo son:

- A: comprar billete de avión; $P(A) = 0.55$,
- B: comprar alojamiento; $P(B) = 0.2$,

por tanto, podemos calcular las probabilidades siguientes

$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0.55 + 0.2 - 0.6 = 0.15$ y
$P(A) \cdot P(B) = 0.55 \cdot 0.2 = 0.11.$

Concluimos que son dependientes, ya que $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$.

Sucesos independientes vs disjuntos

Ejercicio

1. Dos sucesos A y B disjuntos, ¿son necesariamente independientes?
2. Dos sucesos A y B independientes, ¿son necesariamente disjuntos?
3. $\emptyset$ y un suceso cualquiera A, ¿son necesariamente independientes?
4. Ω y un suceso cualquiera A, ¿son necesariamente independientes?
5. ¿Qué condiciones se tienen que dar para que un suceso A sea independiente de si mismo?