Parte1. Tema 3: Distribuciones Notables Parte II: Distribuciones Continuas. Cuantiles

Probabilidad con R y python

28 marzo, 2023

Lección 1

Distribución uniforme

Distribución uniforme

Una v.a. continua X tiene una distribución uniforme sobre el intervalo real (a, b) ,con $a < b$, si su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a < x < b, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

Distribución uniforme

Ejercicio

Comprobar que el área comprendida entre f_X y la horizontal vale 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\cdot dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\cdot dx = \left.\frac{x}{b-a}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

Función de distribución uniforme.

Su función de distribución es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a < x < b, \\ 1, & \text{si } b \leq x. \end{cases}$$

Función de distribución uniforme: cálculo.

Efectivamente:

- Si $x \leq a$, entonces
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt.$$
- Si $a < x < b$ entonces ,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t) \cdot dt = \int_{-\infty}^{a} 0 \cdot dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a} \cdot dt \\ &= 0 + \left.\frac{t}{b-a}\right]_{t=a}^{t=x} = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}. \end{aligned}$$

Función de distribución uniforme: cálculo.

- Por último si $x \geq b$ entonces,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt = \left.\frac{t}{b-a}\right]_{t=a}^{t=b} \\ &= \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1. \end{aligned}$$

Denotaremos a la v.a. X uniforme en el intervalo (a, b) por $U(a, b)$.

Esperanza y varianza para una v.a. X $U(a,b)$

Calculemos la esperanza de X

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f_X(x)dx = \int_a^b x\cdot \frac{1}{b-a}dx = \left.\frac{x^2}{2\cdot(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b}\\
&= \frac{b^2}{2\cdot(b-a)} - \frac{a^2}{2\cdot(b-a)} = \frac{b^2-a^2}{2\cdot(b-a)}\\
&= \frac{(b+a)\cdot(b-a)}{2\cdot(b-a)} = \frac{b+a}{2}.
\end{aligned}
$$

Esperanza y varianza para una v.a. X $U(a,b)$

De cara a calcular su varianza, calculemos primero la esperanza de X^2:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \left.\frac{x^3}{3\cdot(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b} \\ &= \frac{b^3-a^3}{3\cdot(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}. \end{aligned}$$

Ejercicio

- Demostrad que la igualdad $b^3-a^3=(b-a)\cdot(b^2+ab+a^2)$ es cierta.
- Utilizadla para el cálculo final del valor de $E(X^2)$.

Esperanza y varianza para una v.a. X $U(a,b)$.

Calculemos $Var(X)$.

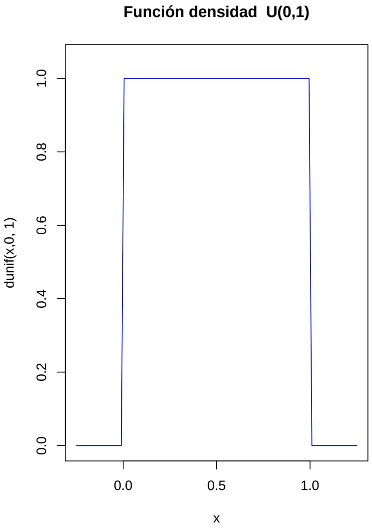
$$\begin{aligned}
Var(X) &= E(X^2)-(E(X))^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3}-\left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\
&= \frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{b^2+2ab+a^2}{4} \\
&= \frac{4\cdot(b^2+ab+a^2)-3\cdot(b^2+2ab+a^2)}{4\cdot 3} \\
&= \frac{b^2-2ab+a^2}{12}=\frac{(b-a)^2}{12}.
\end{aligned}$$

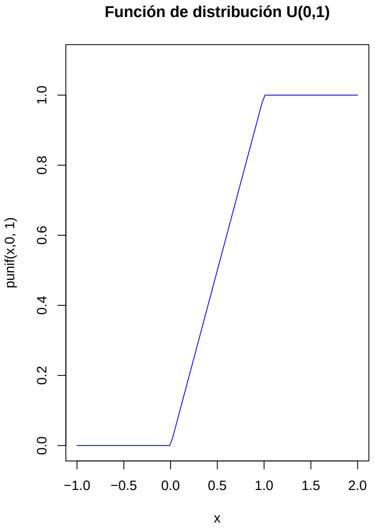
Gráficas $U(0,1)$

El código en R para dibujar la función de densidad y la función de distribución de una distribución $U(0,1)$ es el siguiente:

```
par(mfrow=c(1,2))
a=0;b=1
curve(dunif(x,a,b),xlim=c(a-0.25,b+0.25),ylim=c(0,max(1/(b-a)+0.05,0.1)),
      col="blue",main=paste0("Función densidad  U(",a,",",b,")"),
      ylab=paste0("dunif(x,",a,", ",b,")")
      )
curve(punif(x,a,b),xlim=c(a-1,b+1),ylim=c(0,1.1),
      col="blue",main=paste0("Función de distribución U(",a,",",b,")"),
      ylab=paste0("punif(x,",a,", ",b,")",cex.axis=0.8)
      )
par(mfrow=c(1,1))
```

Gráficas $U(0,1)$





Transformación lineal de la v.a. uniforme

Si X sigue una distribución $U(a,b)$ entonces $Z=\frac{X-a}{b-a}$ sigue una distribución $U(0,1)$.

Propiedad: Transformación lineal de la v.a. uniforme

Sea X una v.a $U(a,b)$

Si $scale \neq 0$ y loc son dos constantes reales entonces

- si $scale > 0$, $T = scale \cdot X + loc$ sigue una ley $U(scale \cdot a + loc, scale \cdot b + loc)$
- si $scale < 0$, $T = scale \cdot X + loc$ sigue una ley $U(scale \cdot b + loc, scale \cdot a + loc)$

Cambio lineal v.a. uniforme.

Demostración

Supongamos que X sigue una ley $U(a,b)$, que $scale>0$ y que $T=scale\cdot X+loc$. Dejamos el caso $scale<0$ como ejercicio.

La función de distribución de X es:

$$F_X(x)=P(X\leq x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x\leq a\\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a\leq x\leq b\\ 1 & \text{si } b\leq x\end{cases}$$

Cambio lineal v.a. uniforme.

Si T vale $T = scale \cdot X + loc$, su función de distribución será:

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= P(T \leq t) = P(scale \cdot X + loc \leq t) = P\left(X \leq \frac{t-loc}{scale}\right) = F_X\left(\frac{t-loc}{scale}\right) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{t-loc}{scale} \leq a \\ \frac{\frac{t-loc}{scale}-a}{b-a}, & \text{si } a \leq \frac{t-loc}{scale} \leq b, \\ 1, & \text{si } b \leq \frac{t-loc}{scale}, \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq scale \cdot a + loc, \\ \frac{t-(scale\cdot a+loc)}{scale\cdot(b-a)}, & \text{si } scale \cdot a + loc \leq t \leq scale \cdot b + loc, \\ 1, & \text{si } scale \cdot b + loc \leq t, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq scale \cdot a + loc, \\ \frac{t-(scale\cdot a+loc)}{scale\cdot b+loc-(scale\cdot a+loc)}, & \text{si } scale \cdot a + loc \leq t \leq scale \cdot b + loc, \\ 1, & \text{si } scale \cdot b + loc \leq t, \end{cases}
\end{aligned}
$$

función que corresponde a la función de distribución de una v.a. $U(scale \cdot a + loc, scale \cdot b + loc)$, como queríamos demostrar.

Cambio lineal v.a. uniforme.

Ejercicio

Sea X una variable $U(0,1)$ y sea $T = scale \cdot X + loc$:

- Si T es $U(-5,5)$ ¿qué valores toman *scale* y *loc*?
- Si $loc = -10$ y $scale = 10$ ¿qué distribución de probabilidad sigue T?
- Si $loc = 0$ y $scale = -1$ ¿qué distribución probabilidad sigue T?

Resumen v.a con distribución uniforme, $U(a,b)$

Distribución uniforme $U(a,b)$
Dominio $D_X = (a,b)$
$f_X(x) \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a < x < b, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$
$F_X(x) = P(X \leq X) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{si } b \leq x. \end{cases}$
$E(X) = \frac{a+b}{2}$; $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Cálculos con R

Sea X una *v.a.* $U(a,b)$. Las funciones `dunif(x,a,b)` y `punif(x,a,b)` calculan la función de densidad y de distribución de X en el valor X. Por ejemplo, para $a=-1$, $b=1$ y $x=0.5$, los valores $f_X(x)$ y $F_X(x)$ valen:

```
dunif(x=0.5, min=-1,max=1)
```

```
[1] 0.5
```

```
punif(q=0.5,min=-1,max=1)
```

```
[1] 0.75
```

Cálculos con R

La función `runif(n,a,b)` calcula un muestra de observaciones de tamaño n que sigan la distribución $U(a,b)$:

```
runif(n=5,min=-1,max=1)
```

```
[1]  0.01712914 -0.47040806  0.55380258  0.53885781  0.10789840
```

Cálculos con R

Por defecto, el valor de los parámetros a y b son 0 y 1, respectivamente:

```
dunif(x=0.5)
```

```
[1] 1
```

```
punif(q=0.5)
```

```
[1] 0.5
```

```
runif(n=5)
```

```
[1] 0.6480490 0.4180667 0.9043109 0.8878810 0.5312269
```

Cálculos con python

Sea X una $v.a.$ $U(-1,1)$. Tomando como “base” la v.a. $U(0,1)$, los parámetros *loc* y *scale* valen: $loc = -1$ y $scale = 2$, ya que como hemos visto $X = 2 * U(0,1) - 1 = U(-1,1)$.

En python, hay que usar dichos parámetros para calcular la función de densidad y de distribución:

```
from scipy.stats import uniform
uniform.pdf(0.5,loc=-1,scale=2)
```

```
0.5
```

```
uniform.ppf(0.5,loc=-1,scale=2)
```

```
0.0
```

Cálculos con python

Para generar una muestra de valores aleatorios, hay que usar la función `uniform.rvs`:

```
uniform.rvs(size=30,loc=-1,scale=2)
```

```
array([ 0.90013955,  0.54838125, -0.92631926,  0.33416355,  0.07900154,
        0.43359935,  0.2549875 ,  0.12308876,  0.25084858, -0.24400381,
       -0.27845354,  0.23030067, -0.07667098,  0.8581853 ,  0.38637629,
       -0.39910875, -0.20684777,  0.01480934, -0.93856622, -0.81267767,
       -0.23116871,  0.95443068, -0.13908318,  0.3347837 , -0.80965067,
        0.66640698, -0.07091471, -0.67161952,  0.94340403,  0.33890296])
```

Cálculos con python

Los valores de los parámetros por defecto son `loc=0, scale=1`:

```
uniform.pdf(0.5)
```

```
1.0
```

```
uniform.ppf(0.5)
```

```
0.5
```

```
uniform.rvs(size=5)
```

```
array([0.61921018, 0.73510387, 0.6254526 , 0.68086661, 0.45406382])
```

Lección 2

Cuantiles de variables aleatorias

Cuantiles

Cuantiles

Si X es una v.a. con dominio D_X y $0 < p < 1$ llamaremos cuantil de orden p al menor valor perteneciente al dominio $x_p \in D_X$ tal que

$$P(X \leq x_p) \geq p.$$

En R, cada distribución X tiene la función `qX(p,...)` que devuelve precisamente el cuantil x_p tal que $P(X \leq x_p) \geq p$.

Cuantiles

Consideremos una v.a. X de distribución $B(5, 0.5)$.

Los cuantiles $x_{0.3}$, $x_{0.6}$ y $x_{0.8}$ son los siguientes:

```
qbinom(c(0.3,0.6,0.8),5,0.5)
```

```
[1] 2 3 3
```

Cuantiles

Calculemos a mano, el valor $x_{0.3}$ y verifiquemos que da el mismo resultado que nos ha dado R.

La función de distribución de X es:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.03125, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0.18750, & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 0.50000, & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 0.81250, & \text{si } 3 \leq x < 4, \\ 0.96875, & \text{si } 4 \leq x < 5, \\ 1.00000, & \text{si } 5 \leq x. \end{cases}$$

Cuantiles

El cuantil $p = 0.3$ es el primer valor $x \in D_X$ tal que $F_X(x) = P(X \leq x_{0.3}) \geq 0.3$. Mirando la expresión anterior, comprobamos que $x_{0.3} = 2$ ya que $F_X(2) = P(X \leq 2) = 0.5 \geq 0.3$.

Ejercicio

Calcular los cuantiles de 0.6 y 0.8 de una $B(5, 0.5)$.

Cuantiles

Dada una variable aleatoria X, si existe la inversa de la función de distribución de X, F_X^{-1}, el cuantil de orden p sería el valor que tiene la función F_X^{-1} en p: $x_p = F^{-1}(p)$.

En caso de no existir la inversa, dado p, definimos el conjunto A_p como:

$$A_p = \{x \in \mathbb{R}, \mid F_X(x) \geq p\}.$$

Entonces el cuantil p es el mínimo del conjunto A_p considerando sólo valores del dominio de la variable: $x_p = \min_{x \in D_X} (A_p)$. Este mínimo siempre existirá y nos da una fórmula explícita para calcular los cuantiles de cualquier variable aleatoria.

Cuantiles

Ejemplo: variable aleatoria que nos da el resultado del lanzamiento de un dado

Sea X la variable aleatoria uniforme discreta que nos da el número de puntos obtenidos en el lanzamiento de un dado (seis caras numeradas del 1 al 6).

Su dominio es $D_X = \{1,2,3,4,5,6\}$ y su función de probabilidad es

$$P_X(x) = P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{si } x = 1,2,3,4,5,6, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}.$$

Su función de distribución es:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{k}{6} & \text{si } k \leq x < k+1 \text{ para } x = 1,2,3,4,6, \\ 1, & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$$

Cuantiles

La función siguiente llamada `ddado` nos define la función de probabilidad de X para un dado de n caras:

```
ddado=function(x,n=6) {
  sapply(x,FUN=function(x) {
    if( x %in% c(1:n)){return(1/n)} else {return(0)}})
  }
```

Cuantiles

Por ejemplo, el valor de $P_X(0.5)$ sería:

```
ddado(1.5,n=6)
```

```
[1] 0
```

y los valores de $P_X(i)$ para $i = 1, \ldots 10$ sería:

```
ddado(1:10,n=6)
```

```
 [1] 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.0000000
 [8] 0.0000000 0.0000000 0.0000000
```

Cuantiles

La función pdado nos da la función de distribución de X:

```
pdado=function(x,n=6)
  {
  sapply(x,FUN=function(y){ if (y<1){ return(0)}else{if(y>=n){return(1)} else
  {return(sum(ddado(c(1:(floor(y))),n=n)))}}})
  }
```

Los valores de $F_X(i)$ para $i = 0, \ldots, 11$ serían:

```
pdado(0:11,6)
```

```
 [1] 0.0000000 0.1666667 0.3333333 0.5000000 0.6666667 0.8333333 1.0000000
 [8] 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000
```

Cuantiles

A continuación, construimos la función qdado que nos calcula el cuantil p, para $0 \leq p \leq 1$, de la variable X como el mínimo de la antiimagen de p mediante la función de distribución $F_X^{-1}(p)$

```
qdado=function(p,n=6){
sapply(p,FUN=function(pp=p,nn=n)
  {
  if(pp<0 | pp>1) {return(NA)}
  else {
  aux=pp>=pdado(1:n,nn)
  aux
  ifelse(all(!aux),return(1),return(max(which(pp>=pdado(1:n,nn)))))}}
)
}
```

Cuantiles

Efectivamente los cuantiles del dado X son

```
qdado(1.5)
```

```
[1] NA
```

```
qdado(-1)
```

```
[1] NA
```

```
qdado(c(0.1,0.5,0.6,1,1.01,2))
```

```
[1]  1  3  3  6 NA NA
```

Cuantiles

Por ejemplo si X es una $B(n = 10, p = 0.3)$

```
set.seed(2222)
(q=runif(10,0,1))
```

```
 [1] 0.36765818 0.18187591 0.82617679 0.58497444 0.95886983 0.10179894
 [7] 0.75688767 0.24369144 0.67806543 0.06275295
```

```
qbinom(q,10,0.3)
```

```
 [1] 2 2 4 3 6 1 4 2 4 1
```

```
set.seed(2222)
rbinom(10,10,0.3)
```

```
 [1] 2 2 4 3 6 1 4 2 4 1
```

Cuantiles

Por ejemplo si X es una $BN(n = 3, p = 0.1)$

```
set.seed(2222)
(q=runif(10,0,1))
```

```
 [1] 0.36765818 0.18187591 0.82617679 0.58497444 0.95886983 0.10179894
 [7] 0.75688767 0.24369144 0.67806543 0.06275295
```

```
qnbinom(q,3,0.1)
```

```
 [1] 19 12 41 27 61  9 36 15 32  7
```

```
set.seed(2222)
rnbinom(10,3,0.1)
```

```
 [1] 18  9  6 46 66 49 24 44 19 26
```

Lección 3

Distribución exponencial

Distribución del tiempo entre dos eventos Poisson

Supongamos que tenemos un proceso Poisson con parámetro λ en una unidad de tiempo.

Dado un tiempo t, definimos N_t como el número de eventos en el intervalo de tiempo $(0, t]$. La distribución de N_t es una $Po(\lambda \cdot t)$. Consideremos la v.a. T como el tiempo transcurrido entre dos eventos Poisson consecutivos.

Sea $t > 0$, entonces

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(\text{Cero eventos en el intervalo}(0, t]) \\ &= P(N_t = 0) = \tfrac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

Distribución del tiempo entre dos eventos Poisson

Tomando complementarios, la función de distribución de T será:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

Para hallar la función de densidad de T, basta derivar la expresión anterior:

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Llamaremos a la variable T exponencial de parámetro λ y la denotaremos por $Exp(\lambda)$.

Propiedad de la falta de memoria

Sea X una v.a. $Exp(\lambda)$ entonces

$$P(X > s + t \big| X > s) = P(X > t) \text{ para todo } s, t \in \mathbb{R}$$

Demostración

Si X es una v.a. $Exp(\lambda)$ tenemos que $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot x}) = e^{-\lambda \cdot x}$ para todo $x > 0$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P(X > s + t \big| X > s) &= \frac{P(\{X>s+t\} \cap \{X>s\})}{P(X>s)} = \frac{P(X>s+t)}{P(X>s)} = \frac{e^{-\lambda \cdot (s+t)}}{e^{-\lambda \cdot s}} = \frac{e^{-\lambda \cdot s} \cdot e^{-\lambda \cdot t}}{e^{-\lambda \cdot s}} \\ &= e^{-\lambda \cdot t} = P(X > t). \end{aligned}$$

Ejemplo distribución exponencial

El clásico problema del peluquero.

Una pequeña peluquería es regentada por un único peluquero. El peluquero está esperando al próximo cliente mientras lee el periódico.

Supongamos que N_T = número de clientes que llegan en el intervalo $[0, t)$ es una $Po(\lambda \cdot t)$ entonces la variable T = tiempo entre dos clientes consecutivos sigue una ley $Exp(\lambda)$.

Supongamos que t se mide en horas y que $\lambda = 4$ es el promedio de clientes por hora.

En este ejemplo la propiedad de la pérdida de memoria significa que si el peluquero lleva ya esperando más de $s > 0.25$ un cuarto de hora la probabilidad de que espere $t = 1/6$ de hora más (10 minutos) no cambia sigue siendo $P(T > 0.25 + 1/6 | T > 0.25) = P(T > 1/6)$.

Ejemplo distribución exponencial

El tiempo esperado (en horas) hasta el siguiente cliente es

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

y la varianza es

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4^2} = 0.0625.$$

Por último ¿Cuál es la probabilidad de que nuestro peluquero esté sin clientes (leyendo el periódico) más de 30 minutos (0.5 horas)?

$$P(X > 0.5) = 1 - P(X \leq 0.5) = 1 - (1 - e^{-4 \cdot 0.5}) = e^{-2} = 0.1353353.$$

Ejemplo distribución exponencial

Si queremos hacer los cálculos con R,

```r
pexp(0.5,rate=3)
```

```
[1] 0.7768698
```

```r
1-pexp(0.5,rate=3)
```

```
[1] 0.2231302
```

```r
pexp(0.5,rate=3,lower.tail = FALSE)
```

```
[1] 0.2231302
```

Cálculos con R

La función de densidad, de distribución y la generación aleatoria de valores de una exponencial, se pueden obtener en R con:

```
dexp(0.001,rate=3)## alerta no es una probabilidad
```

```
[1] 2.991013
```

```
#es una densidad y puede ser >1
pexp(0.5,rate=3) ##P(X<0.5)
```

```
[1] 0.7768698
```

```
rexp(10,3)## diez tiempos de una exponencial
```

```
 [1] 0.5069426 0.4497573 0.2876943 0.5514840 1.0552252 0.3168070 0.2488148
 [8] 0.2377065 0.2974863 0.2121646
```

Cálculos con python

Y en python con:

```
from scipy.stats import expon
expon.pdf(0.0001,scale= 1./3)
```

```
2.9991001349865014
```

```
expon.cdf(0.5,scale= 1./3)
```

```
0.7768698398515702
```

```
expon.rvs(scale=1./3,size=10)
```

```
array([0.39285068, 0.02575126, 0.14812395, 0.19532562, 0.02231576,
       0.9696436 , 0.2465799 , 0.02809619, 0.04401417, 0.39762804])
```

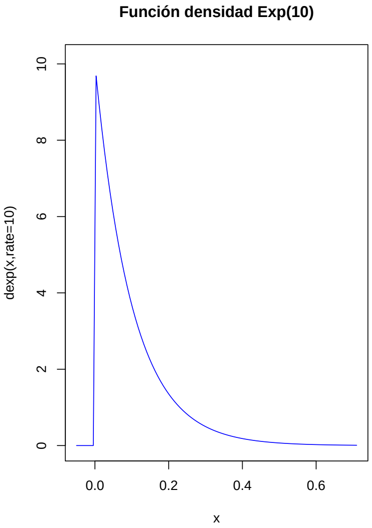
Resumen v.a con distribución exponencial, $Exp(\lambda)$

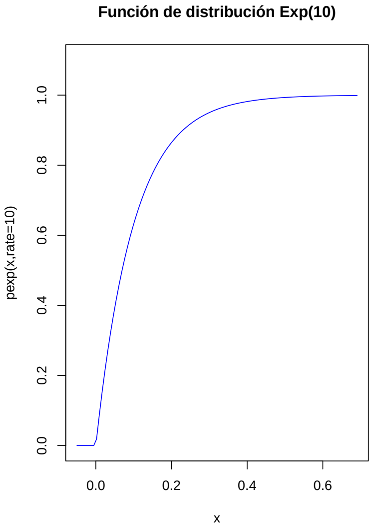
X sigue una distribución $Exp(\lambda)$
$D_X = (0, +\infty)$
$f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$
$F_X(x) = P(X \leq X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$
$E(X) = \frac{1}{\lambda};\ Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Gráficas densidad y distribución $Exp(\lambda = 10)$

```
lambda=10
par(mfrow=c(1,2))
curve(dexp(x,rate=lambda)
      xlim=c(-0.05,round(qexp(0.99,rate=lambda,2),2)+0.25),
      ylim=c(0,dexp(0,lambda)+0.1),col="blue",
      main=paste0("Función densidad Exp(",lambda,")"),
      ylab=paste0("dexp(x,rate=",lambda,")"))
curve(pexp(x,rate=lambda),xlim=c(-0.05,qexp(0.999,10)),
      ylim=c(0,1.1),col="blue",
      main=paste0("Función de distribución Exp(",lambda,")"),
      ylab=paste0("pexp(x,rate=",lambda,")"))
par(mfrow=c(1,1))
```

Gráficas densidad y distribución $Exp(\lambda = 10)$





Gráficas densidad y distribución $Exp(\lambda = 10)$

Ejercicio

Consultad en el manual de python scipy.stats.

Dibujad la función de densidad y de distribución de una $Exp(10)$.

Ejercicio: las bombillas que no envejecen.

Ejercicio

Supongamos que compramos una bombilla led que promete un **valor esperado** de duración de 10000 (1.14 años) horas de funcionamiento continuo. Además, nos aseguran que la distribución de X, el número de horas de funcionamiento continuo de una bombilla led, sigue una ley exponencial.

- Si X es $Exp(\lambda)$ ¿cuál es el valor del parámetro λ?.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla led ilumine más de 2 años?
- Supongamos que ya tengo una bombilla led funcionando 1 año ¿Cuál es la probabilidad de que dure dos años más?
- ¿Cuál es la varianza de la duración en horas de este tipo de bombillas?

Lección 4

Distribución normal o Gaussiana

Distribución normal o Gaussiana

Una de las variables aleatorias continua más populares es la llamada distribución normal o Gaussiana .

Distribución normal o de Gauss Diremos que una v.a. X sigue una ley normal de parámetros μ y σ y la denotaremos por $N(\mu,\sigma)$ si tiene por función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

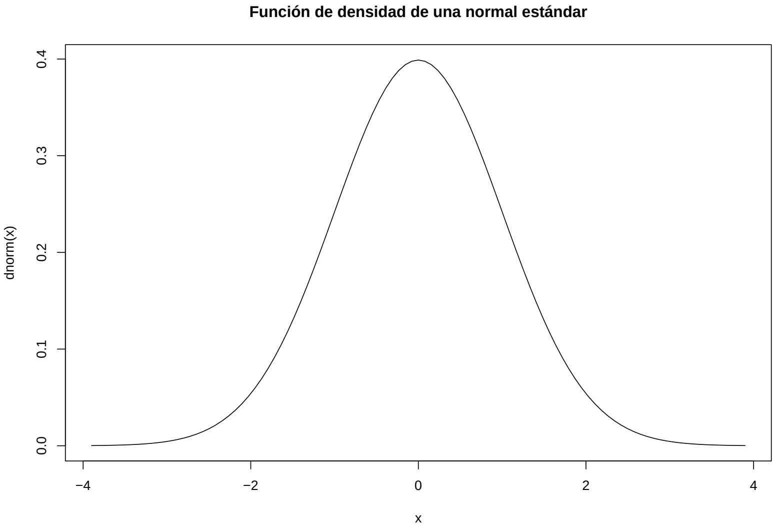
Distribución normal o Gaussiana

La gráfica de esta función de densidad es conocida como **campana de Gauss.**

La v.a. normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ recibe el nombre de normal estándar y se suele denotar por la letra Z normal $N(0, 1)$. El siguiente código la dibuja.

```
curve(dnorm(x),
      main="Función de densidad de una normal estándar",
      xlim=c(-3.9,3.9))
```

Distribución normal o Gaussiana



Propiedades de la función de densidad de la distribución normal

Propiedades de la función de densidad de la distribución normal

Sea X una v.a. $N(\mu, \sigma)$ y sea f_X su función de densidad. Entonces:

- La función f_X verifica todas las propiedades de las funciones de densidad: $f_X(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$.
- La función $f_X(x)$ es simétrica respecto de la recta $x = \mu$: $f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- f_X tiene un único máximo absoluto en $x = \mu$ que vale $f_X(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$.

Propiedades de la función de densidad de la distribución normal

- Si F_X es la función de distribución de X, entonces $F_X(\mu + x) = 1 - F_X(\mu - x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- En particular si Z es una $N(0,1)$ entonces $F_Z(-x) = 1 - F_Z(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ es una v.a. $N(0,1)$ y $X = \sigma \cdot Z + \mu$ es una $N(\mu, \sigma)$ donde Z es la normal estándar.

Función de distribución N(0,1)

Su función de distribución es, como sabemos :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt.$$

La función $F(x)$ no tiene ninguna expresión algebraica "decente". Es por esta razón, y por comodidad, que esta función está tabulada o hay que calcularla usando un software estadístico.

Resumen v.a con distribución normal, $N(\mu, \sigma)$

X sigue una distribución $N(\mu, \sigma)$
$D_X = \mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2 \cdot \sigma^2}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
$F_X(x) = P(X \leq X) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) dt.$
$E(X) = \mu;\ Var(X) = \sigma^2.$

Cálculos con R

Las funciones que calculan la función de densidad y de distribución de una variable $N(\mu, \sigma)$ en un valor `x` son `dnorm(x,mean=mu,sd=sigma)` y `pnorm(x,mean=mu,sd=sigma)`, respectivamente. Por ejemplo, para una variable $X \sim N(\mu = 1, \sigma = 2)$ la función de densidad $f_X(2)$ se puede calcular de la forma siguiente:

```
dnorm(2,mean=1,sd=2)
```

```
[1] 0.1760327
```

y la función de distribución $F_X(2) = P(X \leq 2)$ de la forma siguiente:

```
pnorm(2,mean=1,sd=2)
```

```
[1] 0.6914625
```

Cálculos con R

El cuantil $x_{0.95}$ es el valor que cumple $P(X \leq x_{0.95}) = 0.95$ como

```
qnorm(0.95,mean=1,sd=2)
```

```
[1] 4.289707
```

Y la generación aleatoria de valores según X como

```
rnorm(n=5,mean=1,sd=2)
```

```
[1]  2.19858942  0.03274072 -0.59125322 -0.88202614  1.95160505
```

Cálculos con python

De forma la forma habitual importaremos `norm` de `scipy.stas` los parámetros son `loc` y `scale` la media μ y la desviación estándar σ.

```
from scipy.stats import norm
```

Por ejemplo para una $X \sim N(\mu = 1, \sigma = 2)$, la función de densidad $f_X(2)$:

```
norm.pdf(2,loc=1,scale=2)
```

```
0.17603266338214976
```

y la función de distribución $F_X(2) = P(X \leq 2)$:

```
norm.cdf(2,loc=1,scale=2)
```

```
0.6914624612740131
```

Cálculos con python

El cuantil $x_{0.95}$ es el valor que cumple $P(X \leq x_{0.95}) = 0.95$ como

```
norm.ppf(0.95,loc=1,scale=2)
```

```
4.289707253902945
```

Y la generación aleatoria de valores según X como

```
norm.rvs(loc=1,scale=2,size=5)
```

```
array([ 3.16050432,  3.25573936, -1.57951221,  0.56838803, -1.68750391])
```

Consultad SciPy.org para dibujar las funciones de densidad y de distribución con python.

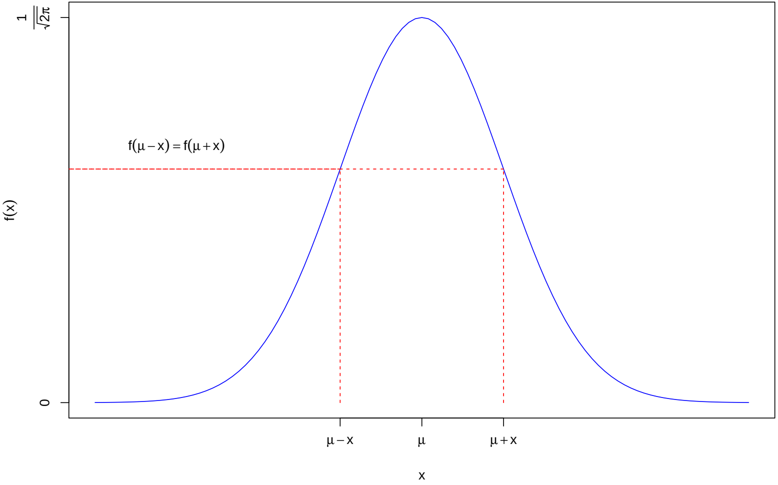
Propiedades de la distribución normal.

Propiedades

La función de densidad de la distribución normal tiene las siguientes propiedades:

- La función f_X es continua.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$. (propiedad de todas las densidades).
- $f(\mu + x) = f(\mu - x)$.
- $F(\mu - x) = 1 - F(\mu + x)$.

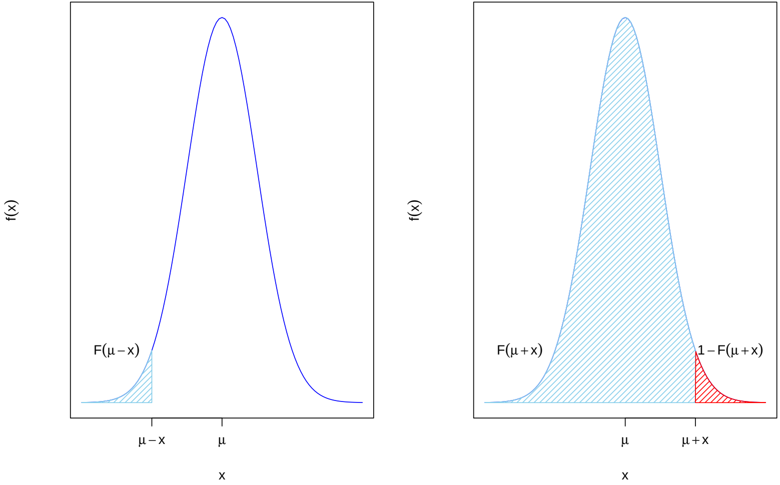
Propiedades de la distribución normal.



Propiedades de la distribución normal

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ es decir tiene asíntota horizontal a derecha e izquierda.
- f es estrictamente creciente si $x < \mu$ y decreciente si $x > \mu$.
- Alcanza el máximo en $x = \mu$ y en este punto vale $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
- Tiene dos puntos de inflexión en $x = \mu + \sigma$ y en $x = \mu - \sigma$.

Propiedades de la distribución normal.



Transformaciones lineales de variables aleatorias normales

Propiedad: transformación lineal la distribución normal

Sea X una variable $N(\mu,\sigma)$ entonces la variable $Y = aX + b$ con $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ tiene distribución $N(a\mu + b, |a|\sigma)$

En particular si X sigue una $N(\mu,\sigma)$, tomando $a = \frac{1}{\sigma}$ y $b = \frac{-\mu}{\sigma}$ obtenemos la tipificación o estandarización de la v.a.

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

se distribuye $N(0,1)$, es decir $E(X) = 0$ y $Var(X) = 1$.

Transformaciones lineales de variables aleatorias normales

Esta propiedad es muy útil, ya que utilizándola sólo necesitaremos tabular la $N(0,1)$.

Si Z sigue una distribución $N(0,1)$ diremos que Z sigue una distribución normal estándar.

Por lo tanto podemos calcular cualquier distribución normal desde la distribución normal estándar:

$$F_X(x) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Propiedades de la distribución normal estándar

Sea Z una $N(0,1)$.

En este caso, $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Podemos escribir algunas de las propiedades vistas para una distribución normal cualquiera de la forma siguiente:

- La propiedad $f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$ se traduce a $f_Z(-x) = f_Z(x)$
- La propiedad $F_X(\mu - x) = 1 - F_X(\mu + x)$ se traduce a $F_Z(-x) = 1 - F(x)$.
- Dado $\delta > 0$,

$$P(-\delta \leq Z \leq \delta) = F_Z(\delta) - F_Z(-\delta) = F_Z(\delta) - (1 - F_Z(\delta)) = 2 \cdot F_Z(\delta) - 1.$$

Cálculos con la distribución normal

Ejercicio Cálculos con la distribución normal estándar

Sea Z una distribución $N(0,1)$, calcular las siguientes probabilidades en función de F_Z.

- $P(-4 \leq Z \leq 4)$.
- $P(-2 \leq Z \leq 2)$.
- $P(Z \leq -2)$.
- $P(Z \leq 2)$.
- $P(Z \geq 2)$.
- $P(Z > 2)$.
- $P(Z = 2)$.
- $P(Z \geq -2)$.

Cálculos con la distribución normal

Resolución:

- $P(-4 \leq Z \leq 4) = F_Z(4) - F_Z(-4) = 2 \cdot F_Z(4) - 1.$
- $P(-2 \leq Z \leq 2) = F_Z(2) - F_Z(-2) = 2 \cdot F_Z(2) - 1.$
- $P(Z \leq -2) = F_Z(-2) = 1 - F_Z(2).$
- $P(Z \leq 2) = F_Z(2).$
- $P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - F_Z(2).$
- $P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - F_Z(2).$
- $P(Z = 2) = 0$ ya que es una distribución continua.
- $P(Z \geq -2) = 1 - P(Z < -2) = 1 - F_Z(-2) = 1 - (1 - F_Z(2)) = F_Z(2).$

Relación entre una distribución normal y la normal estándar.

Para hallar la probabilidad de que X esté en un intervalo (a, b) cualquiera, podemos usar la función de distribución de Z de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = F_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Para el caso particular en que el intervalo esté centrado en la media μ, o sea existe un valor $\delta > 0$ tal que $(a, b) = (\mu - \delta, \mu + \delta)$, obtenemos:

$$P(\mu - \delta \leq X \leq \mu + \delta) = 2 \cdot F_Z\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1.$$

Ejemplo cálculo probabilidades normal

Ejercicio

Sea X una normal con media 2 y varianza 4. Calcular

- $P(1 < X < 2)$.
- $P(X > 3)$.

Ejemplo cálculo probabilidades normal

Solución

La primera probabilidad se calcula de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} P(1 < X < 2) &= P\left(\frac{1-2}{2} < \frac{X-2}{2} < \frac{2-2}{2}\right) = P\left(\frac{-1}{2} < Z < 0\right) \\ &= F_Z(0) - F_Z(-0.5) = \frac{1}{2} - 1 + F_Z(0.5) = -\frac{1}{2} + F_Z(0.5). \end{aligned}$$

La segunda probabilidad se calcular de la forma siguiente:

$$P(X > 3) = P\left(\frac{X-2}{2} > \frac{3-2}{2}\right) = P(Z > 0.5) = 1 - F_Z(0.5).$$

Ejemplo normal con R y python

Ejercicio

Sea X una normal con media 2 y varianza 4. Calcular con R y con python las probabilidades

- $P(1 < X < 2)$.
- $P(X > 3)$.

Ejemplo normal con R y python

Solución con R

```
pnorm(2,mean=2,sd=2)-pnorm(1,mean=2,sd=2) #P(1< X< 2)
```

```
[1] 0.1914625
```

```
pnorm(3,mean=2,sd=2,lower.tail =FALSE) #P(X>3)
```

```
[1] 0.3085375
```

```
1-pnorm(3,mean=2,sd=2,lower.tail=TRUE) #P(X>3) = 1-P(X<=3)
```

```
[1] 0.3085375
```

Ejemplo normal con R y python

Solución con python

```
norm.cdf(2,loc=2,scale=2)-norm.cdf(1,loc=2,scale=2) #P(1< X< 2)
```

```
0.19146246127401312
```

```
1-norm.cdf(3,loc=2,scale=2) #P(X>3) = 1-P(X<=3)
```

```
0.3085375387259869
```

La distribución normal aproxima otras distribuciones

En los temas que siguen veremos como, bajo determinadas condiciones,

- la distribución normal puede aproximar la distribución binomial,
- la distribución normal puede aproximar la distribución Poisson
- la distribución normal es la distribución límite de la media aritmética de una muestra de variables aleatorias.