SOLUCIONES: Taller Evaluable 1. Entrega problemas. Probabilidades básico

Problemas

Problema 1 (1 punto.)

En una urna, hay 5 bolas del mismo tamaño y peso, de los cuales, 3 son rojas y 2 son azules. ¿De cuántas maneras se pueden extraer los colores sacando de una en una a una las bolas de la urna?

Solución

Podemos calcular con permutaciones de dos elementos con repeticiones 3,2 de longitud 5.

$$PR_5^{3,2} = \binom{5}{3,2} = \frac{5!}{3! \cdot 2!}.$$

También se puede hacer con combinaciones.

```
choose(5,3)
```

```
## [1] 10
```

Problema 2 (2 puntos.)

a. Cuantos resultados posibles tiene el euromillones: son 5 números enteros del 1 al 50 y dos estrellas números enteros del 1 al 12 [1].
b. Dado un sorteo del euromillones hemos obtenido de números: 46,47,48,49,50 y de estrellas 1,2. De todos los resultados posibles ¿cuántos tienen n=1,2,3,4 aciertos en los números y un acierto en la estrella?

Solución

Apartado a.

$$\binom{50}{5} \cdot \binom{12}{2} = \frac{50!}{(50-5)! \cdot 5!} \cdot \frac{12!}{(12-2)! \cdot 2!} = 2118760 \cdot 66 = 139838160.$$

```
choose(50,5)
```

```
## [1] 2118760
```

[1] Sin orden en ambos casos.

Aciertos	Casos
Aciertos 1 bolas y 1 estrella =	14899500
Aciertos 2 bolas y 1 estrella =	2838000
Aciertos 3 bolas y 1 estrella =	198000
Aciertos 4 bolas y 1 estrella =	4500
Aciertos 5 bolas y 1 estrella =	20

```
choose(12,2)
```

```
## [1] 66
```

```
choose(50,5)*choose(12,2)
```

```
## [1] 139838160
```

Apartado b.

Tenemos $n = 1, 2, 3, 4, 5$ aciertos estrelas 50 bolas y 1 acierto en la estrella

La idea es de los 5 números que han salido elijo n para acertar son $\binom{5}{n}$, para cada elección de n multiplico por los casos de los $5 - n$ restantes los tengo que elegir de los que no han salido que son $50 - 5$ que son $\binom{50-5}{5-n}$. De forma similar la para las estrellas tengo $\binom{2}{1} \cdot \binom{11}{1}$ casos. El producto de estas cantidades me dará en e resultado para $n = 1, 2, 3, 4, 5$ aciertos en las bolas y 1 en las estrellas

$$\binom{5}{n} \cdot \binom{50-5}{5-n} \cdot \binom{2}{1} \cdot \binom{11}{1}.$$

Lo podemos calcular manualmente (con calculadora es pesado) o con la siguiente función de R

```
loteria=function(n){
choose(5,n)*choose(45,5-n)*choose(2,1)*choose(10,1)
}
Casos=loteria(c(1,2,3,4,5))
Casos
```

[1] 14899500 2838000 198000 4500 20

```
Aciertos=paste("Aciertos ",c(1,2,3,4,5),"bolas y  1 estrella = ")
casos=data.frame(Aciertos,Casos)

library(kableExtra)
knitr::kable(casos,format="latex") %>% kable_styling(position="center", latex_options = )
```

Problema 3 (1 punto.)

Lanzamos un dado de 12 caras numeradas con enteros del 1 al 12 sobre una mesa plana. Observamos el número superior del dado. Calcular la probabilidad de que salga mayor que 8 si el resultado es par.

Solución

La probabilidad de obtener un valor e de este dado es $P(\text{Salir} k, \text{en el dado}) = \frac{1}{12}$. para $k = 1, 2, 3, \ldots, 12$.

Nos piden $A_{>8} = \{9, 10, 11, 12\}$ condicionado a $A_{\text{par}} = 2, 4, 6, 8, 10, 12$.

Por un lado tenemos que $P(A_{>8}) = \frac{4}{12}$ y $P(A_{\text{par}}) = \frac{6}{12}$

Calculemos lo que se pide

$$P\left(A_{>8}|A_{\text{par}}\right) = \frac{P\left(A_{>8} \cap A_{\text{par}}\right)}{P\left(A_{\text{par}}\right)} = \frac{\frac{4}{12}}{\frac{6}{12}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Problema 4 (2 puntos.)

Lanzamos una moneda con probabilidad de cara $p = \frac{1}{2}$ hasta que sale cara dos veces o bien la hemos lanzamos 5 veces, lo primero que ocurra.

Consideremos el experimento con resultados experimentales contar el número de tiradas

Se pide:

a. Describir adecuadamente[2] el espacio muestral de todos los sucesos posibles del experimento.
b. Si A_k es el suceso hemos tirado la moneda k veces calcular $P(A_k)$ para todos casos posibles.

Solución

Apartado a. Denotemos por C el suceso cara y por + el suceso cruz. Representemos cada sucesos del experimento por una cadena ordenada de caras y cruces hasta que se obtengan dos C o lleguemos a 5 intentos. Los resultados posibles son (16 casos):

$\Omega = \{CC, +CC, C+C, ++CC, +C+C, C++C, +++CC, ++C+C, +C++C, C+++C, ++++C, +++C+, ++C++, +C+++, C++++++++++\}$

Apartado b.

$$P(A_2) = P(\{CC\} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$
$$P(A_3) = P(\{+CC, C+C\}) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$
$$P(A_4) = P(\{++CC, +C+C, C++C,\}) = \cdots = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{16}.$$
$$\begin{aligned} P(A_5) = P((\{ & +++CC, ++C+C, +C++C, C+++C, \\ & ++++C, +++C+, ++C++, +C+++, C++++, +++++\}) \\ & = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} \end{aligned}$$

No se pedía pero efectivamente la suma de las probabilidades es 1:

```
sum(c(1/4,1/4,3/16,10/32))
```

```
## [1] 1
```

[2]Elegir alguna codificación para definir con una lista /tabla el espacio muestral de sucesos Ω.

Ronda	4	5	6	7	probabilidad
Caso 1 Gana C	C	C	C	-	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$
Caso 2 Gana C	B	C	C	C	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$
Caso 3 Gana C	C	B	C	C	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$
Caso 4 Gana C	C	C	B	C	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$

Problema 5 (2 puntos.)

Tres jugadores A, B y C juegan rondas de un juego de cartas. En cada ronda puede ganar con igual probabilidad cualquiera de los tres jugadores y el ganador de cada ronda es independientes del anterior. Gana el juego el primero que consiga ganar tres rondas. Si resulta que A gana la primera y la tercera ronda y B gana la segunda. ¿Cual es la probabilidad de que C gane el juego

Soluciones

Representemos por A, B y C que gana una ronda el jugado A, B o C, representemos las partidas ya jugadas en la siguiente tabla en las siguiente tabla:

Ronda	1	2	3
Gana A	A	B	A

Para que gane C se tiene que dar alguno de los resultados siguientes:

$$P(\text{Gana C}) = P(\{CCC, BCCC, CBCC, CCBC\}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{2}{3^3} = \frac{2}{27}.$$

Problema 6 (1 punto.)

Sean A y B dos sucesos disjuntos e independientes. Demostrar o justificar si cada una de las siguientes afirmaciones son correctas:

a. $P(B) \neq 0 \Rightarrow P(A|B) > P(B)$.
b. $P(A) \neq 0 \Rightarrow P(B|A) = 0$.
c. $P(A \cup B) < P(A) + P(B)$.
d. $P(A) = P(B) = 0$.

Solución

La afirmación a. es falsa ya que al ser disjuntos $P(A \cap B) = 0$ por lo que $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = 0 > P(B) \neq 0$ ¡Contradicción!. La afirmación b. es cierta siempre independientemente del valor de $P(A)$ ya que al ser disjuntos $P(B \cap A) = 0$ por lo que $P(B|A) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} = 0$. La afirmación c. es falsa ya que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(\varnothing) = P(A) + P(B)$ ¡Contradicción! con $P(A \cup B) < P(A) + P(B)$. La afirmación d. es falsa ya que si $A = \Omega$ suceso seguro y $B = \varnothing$ suceso imposibles se cumple que son disjuntos $A \cap B = \varnothing$ y que $P(A \cap B) = P(\varnothing) = P(A) \cdot P(B) = 1 \cdot 0 = 0$!Contraejemplo¡

Problema 7 (1 punto.)

Sean A, B y C tres sucesos tales que A es independiente de $B^c \cap C$ y de $B \cap C$. Demostrar o justificar si cada una de las siguientes afirmaciones son correctas:

a. A, B y C son independientes.
b. A es independiente de C.
c. A es independiente de B

Solución

Aquí partimos de que si la afirmación (a.) es cierta entonces lo son (b.) y (c.) pues la independencia de una familia de tres sucesos es equivalente que la probabilidad de la intersección de los tres es igual al producto de las probabilidades así como todas las intersecciones dos a dos.

La afirmación (b.) es cierta

$$\begin{aligned}
P(A \cap B) &= P((A \cap (C \cap B^c)) \cup (A \cap (C \cap B)) \\
&= P((A \cap (C \cap B^c)) + P(A \cap (C \cap B)) - P((A \cap (C \cap B^c)) \cap (A \cap (C \cap B)) \\
&= P(a) \cdot P(C \cap B^c) + P(A) \cdot P(C \cap B)) - P(\varnothing) \\
&= P(A) \cdot (P(C \cap B^c) + P(C \cap B)) \\
&= P(A) \cdot P(C).
\end{aligned}$$

Luego vamos a ver que (c). es falsa así (a) también será falsa:

Vamos a buscar tres sucesos tales que

$P(A \cap (B^c \cap C) = P(A) \cdot P(B^c \cap C)$ y $P(A \cap (B \cap C) = P(A) \cdot P(B \cap C)$.

Consideremos $\Omega = \{k \in \mathbb{N} | 0 < k < 40\}$ un espacio muestral tal que todos los valores sean equiprobables

Consideremos los siguientes sucesos

$$\begin{aligned}
A &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\} \\
B &= \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 31, 32, 33, 34, 35\}, \\
C &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}.
\end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
P(A) &= \frac{20}{40} = \frac{1}{2} \\
P(B) &= \frac{15}{40} = \frac{3}{8} \\
P(B^c \cap C) &= \frac{10}{40} = \frac{1}{4} \\
P(A \cap B) &= \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \\
P(A \cap B^c \cap C) &= \frac{5}{40} = \frac{1}{8} \\
P(A \cap B \cap C) &= \frac{5}{40} = \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

luego

$$P(A) \cdot P(B^c \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(A \cap B^c \cap C).$$

$$P(A) \cdot P(B \cap C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} = P(A \cap B \cap C).$$

... pero

$$P(A \cap C) = \frac{15}{40} = \frac{3}{8} \neq P(A) \cdot P(C) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

En definitiva hemos obtenido un contraejemplo para la opción (c).