# Tema 3: Distribuciones Notables Continuas, Cuantiles

Parte 1: Probabilidad con R y python

septiembre 2023

# Lección 1

## Distribución uniforme

# Distribución uniforme

Una v.a. continua $X$ tiene una distribución uniforme sobre el intervalo real $(a, b)$ ,con $a < b$, si su función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a < x < b, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

# Distribución uniforme

**Ejercicio**

Comprobar que el área comprendida entre $f_X$ y la horizontal vale 1.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_x(x)\cdot dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\cdot dx = \left.\frac{x}{b-a}\right]_{x=a}^{x=b} = \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1.$$

# Función de distribución uniforme.

Su función de distribución es

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a < x < b, \\ 1, & \text{si } b \leq x. \end{cases}$$

# Función de distribución uniforme: cálculo.

Efectivamente:

- Si $x \leq a$, entonces
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot dt = \int_{-\infty}^{x} 0 \cdot dt.$$
- Si $a < x < b$ entonces ,

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)\cdot dt = \int_{-\infty}^{a} 0\cdot dt + \int_{a}^{x} \frac{1}{b-a}\cdot dt \\ &= 0 + \left.\frac{t}{b-a}\right]_{t=a}^{t=x} = \frac{x}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}. \end{aligned}$$

# Función de distribución uniforme: cálculo.

- Por último si $x \geq b$ entonces,

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{a}^{b} \frac{1}{b-a}dt = \left.\frac{t}{b-a}\right]_{t=a}^{t=b} \\
&= \frac{b}{b-a} - \frac{a}{b-a} = \frac{b-a}{b-a} = 1.
\end{aligned}
$$

Denotaremos a la v.a. $X$ uniforme en el intervalo $(a,b)$ por $U(a,b)$.

# Esperanza y varianza para una v.a. $X$ $U(a,b)$

Calculemos la esperanza de $X$

$$
\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a} dx = \left.\frac{x^2}{2\cdot(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b} \\
&= \frac{b^2}{2\cdot(b-a)} - \frac{a^2}{2\cdot(b-a)} = \frac{b^2-a^2}{2\cdot(b-a)} \\
&= \frac{(b+a)\cdot(b-a)}{2\cdot(b-a)} = \frac{b+a}{2}.
\end{aligned}
$$

# Esperanza y varianza para una v.a. $X\ U(a, b)$

De cara a calcular su varianza, calculemos primero la esperanza de $X^2$:

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx = \left.\frac{x^3}{3\cdot(b-a)}\right]_{x=a}^{x=b} \\ &= \frac{b^3-a^3}{3\cdot(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}. \end{aligned}$$

**Ejercicio**

- Demostrad que la igualdad $b^3 - a^3 = (b-a)\cdot(b^2+ab+a^2)$ es cierta.
- Utilizadla para el cálculo final del valor de $E(X^2)$.

# Esperanza y varianza para una v.a. $X$ $U(a,b)$.

Calculemos $Var(X)$.

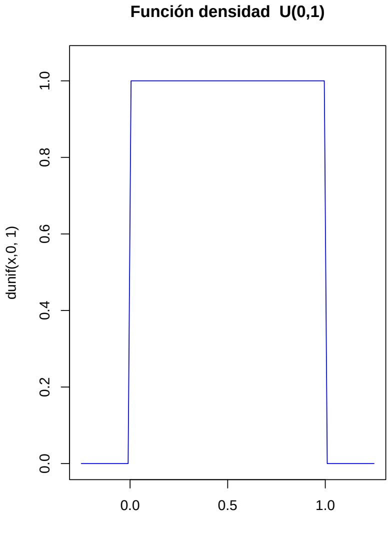
$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 \\ &= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} \\ &= \frac{4\cdot(b^2+ab+a^2) - 3\cdot(b^2+2ab+a^2)}{4\cdot 3} \\ &= \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}. \end{aligned}$$

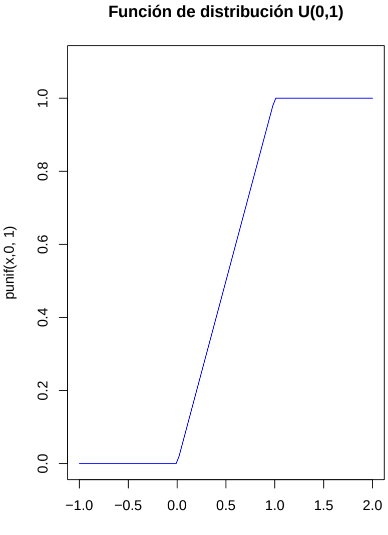
# Gráficas $U(0,1)$

El código en R para dibujar la función de densidad y la función de distribución de una distribución $U(0,1)$ es el siguiente:

```
par(mfrow=c(1,2))
a=0;b=1
curve(dunif(x,a,b),xlim=c(a-0.25,b+0.25),ylim=c(0,max(1/(b-a)+0.05,0.1)),
      col="blue",main=paste0("Función densidad  U(",a,",",b,")"),
      ylab=paste0("dunif(x,",a,", ",b,")")
      )
curve(punif(x,a,b),xlim=c(a-1,b+1),ylim=c(0,1.1),
      col="blue",main=paste0("Función de distribución U(",a,",",b,")"),
      ylab=paste0("punif(x,",a,", ",b,")",cex.axis=0.8)
      )
par(mfrow=c(1,1))
```

# Gráficas $U(0,1)$



# Transformación lineal de la v.a. uniforme

Si $X$ sigue una distribución $U(a,b)$ entonces $Z=\frac{X-a}{b-a}$ sigue una distribución $U(0,1)$.

**Propiedad: Transformación lineal de la v.a. uniforme**

Sea $X$ una v.a $U(a,b)$

Si $scale \neq 0$ y $loc$ son dos constantes reales entonces

- si $scale > 0$, $T = scale \cdot X + loc$ sigue una ley $U(scale\cdot a + loc, scale \cdot b + loc)$
- si $scale < 0$, $T = scale \cdot X + loc$ sigue una ley $U(scale\cdot b + loc, scale \cdot a + loc)$

# Cambio lineal v.a. uniforme.

**Demostración**

Supongamos que $X$ sigue una ley $U(a,b)$, que $scale > 0$ y que $T = scale \cdot X + loc$. Dejamos el caso $scale < 0$ como ejercicio.

La función de distribución de $X$ es:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 1 & \text{si } b \leq x \end{cases}$$

# Cambio lineal v.a. uniforme.

Si $T$ vale $T = scale \cdot X + loc$, su función de distribución será:

$$
\begin{aligned}
F_T(t) &= P(T \leq t) = P(scale \cdot X + loc \leq t) = P\left(X \leq \frac{t-loc}{scale}\right) = F_X\left(\frac{t-loc}{scale}\right) \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{t-loc}{scale} \leq a \\ \frac{\frac{t-loc}{scale}-a}{b-a}, & \text{si } a \leq \frac{t-loc}{scale} \leq b, \\ 1, & \text{si } b \leq \frac{t-loc}{scale}, \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq scale \cdot a + loc, \\ \frac{t-(scale\cdot a+loc)}{scale\cdot(b-a)}, & \text{si } scale \cdot a + loc \leq t \leq scal \\ 1, & \text{si } scale \cdot b + loc \leq t, \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq scale \cdot a + loc, \\ \frac{t-(scale\cdot a+loc)}{scale\cdot b+loc-(scale\cdot a+loc)}, & \text{si } scale \cdot a + loc \leq t \leq scale \cdot b + loc, \\ 1, & \text{si } scale \cdot b + loc \leq t, \end{cases}
\end{aligned}
$$

función que corresponde a la función de distribución de una v.a. $U(scale \cdot a + loc, scale \cdot b + loc)$, como queríamos demostrar.

# Cambio lineal v.a. uniforme.

**Ejercicio**

Sea $X$ una variable $U(0,1)$ y sea $T = scale \cdot X + loc$:

- Si $T$ es $U(-5,5)$ ¿qué valores toman $scale$ y $loc$?
- Si $loc = -10$ y $scale = 10$ ¿qué distribución de probabilidad sigue $T$?
- Si $loc = 0$ y $scale = -1$ ¿qué distribución probabilidad sigue $T$?

# Resumen v.a con distribución uniforme, $U(a,b)$

| Distribución uniforme $U(a,b)$ |
|---|
| Dominio $D_X = (a,b)$ |
| $f_X(x) \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } a < x < b, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$ |
| $F_X(x) = P(X \leq X) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{si } a \leq x \leq b, \\ 1, & \text{si } b \leq x. \end{cases}$ |
| $E(X) = \frac{a+b}{2}$; $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$ |

# Cálculos con R

Sea $X$ una $v.a.$ $U(a,b)$. Las funciones `dunif(x,a,b)` y `punif(x,a,b)` calculan la función de densidad y de distribución de $X$ en el valor $X$. Por ejemplo, para $a=-1$, $b=1$ y $x=0.5$, los valores $f_X(x)$ y $F_X(x)$ valen:

```
dunif(x=0.5, min=-1,max=1)
```

```
[1] 0.5
```

```
punif(q=0.5,min=-1,max=1)
```

```
[1] 0.75
```

# Cálculos con R

La función `runif(n,a,b)` calcula un muestra de observaciones de tamaño $n$ que sigan la distribución $U(a,b)$:

```
runif(n=5,min=-1,max=1)
```

```
[1] -0.6098797 -0.9066312  0.3312544 -0.4695030 -0.3616629
```

## Cálculos con R

Por defecto, el valor de los parámetros a y b son 0 y 1, respectivamente:

```r
dunif(x=0.5)
```

```
[1] 1
```

```r
punif(q=0.5)
```

```
[1] 0.5
```

```r
runif(n=5)
```

```
[1] 0.18194299 0.40369730 0.48813652 0.08093824 0.61742753
```

# Cálculos con python

Sea $X$ una $v.a.$ $U(-1,1)$. Tomando como "base" la v.a. $U(0,1)$, los parámetros $loc$ y $scale$ valen: $loc = -1$ y $scale = 2$, ya que como hemos visto $X = 2 * U(0,1) - 1 = U(-1,1)$.

En python, hay que usar dichos parámetros para calcular la función de densidad y de distribución:

```
from scipy.stats import uniform
uniform.pdf(0.5,loc=-1,scale=2)
```

```
0.5
```

```
uniform.ppf(0.5,loc=-1,scale=2)
```

```
0.0
```

# Cálculos con python

Para generar una muestra de valores aleatorios, hay que usar la función `uniform.rvs`:

```
uniform.rvs(size=30,loc=-1,scale=2)
```

```
array([ 0.94860611,  0.853084  ,  0.48308292,  0.2760633 , -0.95727994,
        0.22462385,  0.7871253 ,  0.99205201, -0.49511736,  0.88249127,
       -0.177855  ,  0.82839782,  0.34368081, -0.4104127 , -0.4469486 ,
        0.4769336 , -0.4627255 , -0.42737873, -0.5505082 , -0.13775838,
       -0.5747139 , -0.41178252,  0.72445967, -0.7330525 ,  0.82159187,
       -0.53665325, -0.07344616, -0.10149184,  0.72733655,  0.3629856 ])
```

# Cálculos con python

Los valores de los parámetros por defecto son `loc=0, scale=1`:

```
uniform.pdf(0.5)
```

```
1.0
```

```
uniform.ppf(0.5)
```

```
0.5
```

```
uniform.rvs(size=5)
```

```
array([0.63171684, 0.0499653 , 0.93431871, 0.92161438, 0.68565882])
```

Lección 2

# Cuantiles de variables aleatorias

# Cuantiles

**Cuantiles**

Si $X$ es una v.a. con dominio $D_X$ y $0 < p < 1$ llamaremos cuantil de orden $p$ al menor valor perteneciente al dominio $x_p \in D_X$ tal que

$$P(X \leq x_p) \geq p.$$

En `R`, cada distribución $X$ tiene la función `qX(p,...)` que devuelve precisamente el cuantil $x_p$ tal que $P(X \leq x_p) \geq p$.

# Cuantiles

Consideremos una v.a. $X$ de distribución $B(5, 0.5)$.

Los cuantiles $x_{0.3}$, $x_{0.6}$ y $x_{0.8}$ son los siguientes:

```
qbinom(c(0.3,0.6,0.8),5,0.5)
```

```
[1] 2 3 3
```

# Cuantiles

Calculemos a mano, el valor $x_{0.3}$ y verifiquemos que da el mismo resultado que nos ha dado R.

La función de distribución de $X$ es:

$$F_x(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.03125, & \text{si } 0 \leq x < 1, \\ 0.18750, & \text{si } 1 \leq x < 2, \\ 0.50000, & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 0.81250, & \text{si } 3 \leq x < 4, \\ 0.96875, & \text{si } 4 \leq x < 5, \\ 1.00000, & \text{si } 5 \leq x. \end{cases}$$

# Cuantiles

El cuantil $p = 0.3$ es el primer valor $x \in D_X$ tal que $F_X(x) = P(X \leq x_{0.3}) \geq 0.3$. Mirando la expresión anterior, comprobamos que $x_{0.3} = 2$ ya que $F_X(2) = P(X \leq 2) = 0.5 \geq 0.3$.

**Ejercicio**

Calcular los cuantiles de $0.6$ y $0.8$ de una $B(5, 0.5)$.

# Cuantiles

Dada una variable aleatoria $X$, si existe la inversa de la función de distribución de $X$, $F_X^{-1}$, el cuantil de orden $p$ sería el valor que tiene la función $F_X^{-1}$ en $p$: $x_p = F^{-1}(p)$.

En caso de no existir la inversa, dado $p$, definimos el conjunto $A_p$ como:

$$A_p = \{x \in \mathbb{R}, \mid F_X(x) \geq p\}.$$

Entonces el cuantil $p$ es el mínimo del conjunto $A_p$ considerando sólo valores del dominio de la variable: $x_p = \min\limits_{x \in D_X} (A_p)$. Este mínimo siempre existirá y nos da una fórmula explícita para calcular los cuantiles de cualquier variable aleatoria.

# Cuantiles

**Ejemplo: variable aleatoria que nos da el resultado del lanzamiento de un dado**

Sea $X$ la variable aleatoria uniforme discreta que nos da el número de puntos obtenidos en el lanzamiento de un dado (seis caras numeradas del 1 al 6).

Su dominio es $D_X = \{1,2,3,4,5,6\}$ y su función de probabilidad es

$$P_X(x) = P(X=x) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & \text{si } x = 1,2,3,4,5,6, \\ 0, & \text{en otro caso. } . \end{cases}$$

Su función de distribución es:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1, \\ \frac{k}{6} & \text{si } k \leq x < k+1 \text{ para } x = 1,2,3,4,6, \\ 1, & \text{si } x \geq 6. \end{cases}$$

# Cuantiles

La función siguiente llamada `ddado` nos define la función de probabilidad de $X$ para un dado de $n$ caras:

```r
ddado=function(x,n=6) {
  sapply(x,FUN=function(x) {
    if( x %in% c(1:n)){return(1/n)} else {return(0)}})
  }
```

# Cuantiles

Por ejemplo, el valor de $P_X(0.5)$ sería:

```
ddado(1.5,n=6)
```

```
[1] 0
```

y los valores de $P_X(i)$ para $i = 1, \ldots 10$ sería:

```
ddado(1:10,n=6)
```

```
 [1] 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.1666667 0.0000000
 [8] 0.0000000 0.0000000 0.0000000
```

# Cuantiles

La función pdado nos da la función de distribución de $X$:

```
pdado=function(x,n=6)
  {
  sapply(x,FUN=function(y){ if (y<1){ return(0)}else{if(y>=n){return(1)} el
  {return(sum(ddado(c(1:(floor(y))),n=n)))}}})
  }
```

Los valores de $F_X(i)$ para $i = 0, \ldots, 11$ serían:

```
pdado(0:11,6)
```

```
 [1] 0.0000000 0.1666667 0.3333333 0.5000000 0.6666667 0.8333333 1.0000000
 [8] 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000 1.0000000
```

# Cuantiles

A continuación, construimos la función qdado que nos calcula el cuantil $p$, para $0\leq p\leq 1$, de la variable $X$ como el mínimo de la antiimagen de $p$ mediante la función de distribución $F_X^{-1}(p)$

```
qdado=function(p,n=6){
sapply(p,FUN=function(pp=p,nn=n)
  {
  if(pp<0 | pp>1) {return(NA)}
  else {
  aux=pp>=pdado(1:n,nn)
  aux
  ifelse(all(!aux),return(1),return(max(which(pp>=pdado(1:n,nn)))))}}
)
}
```

# Cuantiles

Efectivamente los cuantiles del dado $X$ son

```
qdado(1.5)
```

```
[1] NA
```

```
qdado(-1)
```

```
[1] NA
```

```
qdado(c(0.1,0.5,0.6,1,1.01,2))
```

```
[1]  1  3  3  6 NA NA
```

## Cuantiles

Por ejemplo si $X$ es una $B(n = 10, p = 0.3)$

```
set.seed(2222)
(q=runif(10,0,1))
```

```
 [1] 0.36765818 0.18187591 0.82617679 0.58497444 0.95886983 0.10179894
 [7] 0.75688767 0.24369144 0.67806543 0.06275295
```

```
qbinom(q,10,0.3)
```

```
 [1] 2 2 4 3 6 1 4 2 4 1
```

```
set.seed(2222)
rbinom(10,10,0.3)
```

# Cuantiles

Por ejemplo si $X$ es una $BN(n=3, p=0.1)$

```
set.seed(2222)
(q=runif(10,0,1))
```

```
 [1] 0.36765818 0.18187591 0.82617679 0.58497444 0.95886983 0.10179894
 [7] 0.75688767 0.24369144 0.67806543 0.06275295
```

```
qnbinom(q,3,0.1)
```

```
 [1] 19 12 41 27 61  9 36 15 32  7
```

```
set.seed(2222)
rnbinom(10,3,0.1)
```

# Lección 3

## Distribución exponencial

# Distribución del tiempo entre dos eventos Poisson

Supongamos que tenemos un proceso Poisson con parámetro $\lambda$ en una unidad de tiempo.

Dado un tiempo $t$, definimos $N_t$ como el número de eventos en el intervalo de tiempo $(0, t]$. La distribución de $N_t$ es una $Po(\lambda \cdot t)$. Consideremos la v.a. $T$ como el tiempo transcurrido entre dos eventos Poisson consecutivos.

Sea $t > 0$, entonces

$$\begin{aligned} P(T > t) &= P(\text{Cero eventos en el intervalo}(0, t]) \\ &= P(N_t = 0) = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t}. \end{aligned}$$

# Distribución del tiempo entre dos eventos Poisson

Tomando complementarios, la función de distribución de $T$ será:

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 1 - P(T > t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda t}, & \text{si } t > 0, \end{cases}$$

Para hallar la función de densidad de $T$, basta derivar la expresión anterior:

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda t}, & \text{si } t > 0, \\ 0, & \text{si } t \leq 0. \end{cases}$$

Llamaremos a la variable $T$ exponencial de parámetro $\lambda$ y la denotaremos por $Exp(\lambda)$.

# Propiedad de la falta de memoria

Sea $X$ una v.a. $Exp(\lambda)$ entonces

$$P(X > s + t \big| X > s) = P(X > t) \text{ para todo } s, t \in \mathbb{R}$$

**Demostración**

Si $X$ es una v.a. $Exp(\lambda)$ tenemos que
$P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - (1 - e^{-\lambda \cdot x}) = e^{-\lambda \cdot x}$ para todo $x > 0$

Por tanto,

$$\begin{aligned} P(X > s + t \big| X > s) &= \frac{P(\{X>s+t\}\cap\{X>s\})}{P(X>s)} = \frac{P(X>s+t)}{P(X>s)} = \frac{e^{-\lambda\cdot(s+t)}}{e^{-\lambda\cdot s}} = \frac{e^{-\lambda\cdot s}\cdot e^{-\lambda\cdot t}}{e^{-\lambda\cdot s}} \\ &= e^{-\lambda\cdot t} = P(X > t). \end{aligned}$$

# Ejemplo distribución exponencial

**El clásico problema del peluquero.**

Una pequeña peluquería es regentada por un único peluquero. El peluquero está esperando al próximo cliente mientras lee el periódico.

Supongamos que $N_T =$ número de clientes que llegan en el intervalo $[0,t)$ es una $Po(\lambda\cdot t)$ entonces la variable $T =$ tiempo entre dos clientes consecutivos sigue una ley $Exp(\lambda)$.

Supongamos que $t$ se mide en horas y que $\lambda = 4$ es el promedio de clientes por hora.

En este ejemplo la propiedad de la pérdida de memoria significa que si el peluquero lleva ya esperando más de $s>0.25$ un cuarto de hora la probabilidad de que espere $t=1/6$ de hora más (10 minutos) no cambia sigue siendo $P(T>0.25+1/6|T>0.25)=P(T>1/6)$.

# Ejemplo distribución exponencial

El tiempo esperado (en horas) hasta el siguiente cliente es

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} = 0.25.$$

y la varianza es

$$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4^2} = 0.0625.$$

Por último ¿Cuál es la probabilidad de que nuestro peluquero esté sin clientes (leyendo el periódico) más de 30 minutos (0.5 horas)?

$$P(X > 0.5) = 1 - P(X \leq 0.5) = 1 - (1 - e^{-4\cdot 0.5}) = e^{-2} = 0.1353353.$$

# Ejemplo distribución exponencial

Si queremos hacer los cálculos con R,

```
pexp(0.5,rate=3)
```

```
[1] 0.7768698
```

```
1-pexp(0.5,rate=3)
```

```
[1] 0.2231302
```

```
pexp(0.5,rate=3,lower.tail = FALSE)
```

```
[1] 0.2231302
```

# Cálculos con R

La función de densidad, de distribución y la generación aleatoria de valores de una exponencial, se pueden obtener en R con:

```
dexp(0.001,rate=3)# no es una probabilidad es una densidad y puede ser >1
```

```
[1] 2.991013
```

```
pexp(0.5,rate=3) # P(X<0.5)
```

```
[1] 0.7768698
```

```
rexp(8,3)# ocho tiempos de una exponencial
```

```
[1] 0.5069426 0.4497573 0.2876943 0.5514840 1.0552252 0.3168070 0.2488148
[8] 0.2377065
```

# Cálculos con python

Y en python con:

```
from scipy.stats import expon
expon.pdf(0.0001,scale= 1./3)
```

```
2.9991001349865014
```

```
expon.cdf(0.5,scale= 1./3)
```

```
0.7768698398515702
```

```
expon.rvs(scale=1./3,size=10)
```

```
array([0.05434013, 0.20874924, 0.0539921 , 0.14730742, 0.1230773 ,
       0.81839407, 0.23189939, 0.22714003, 0.79156035, 0.15021791])
```

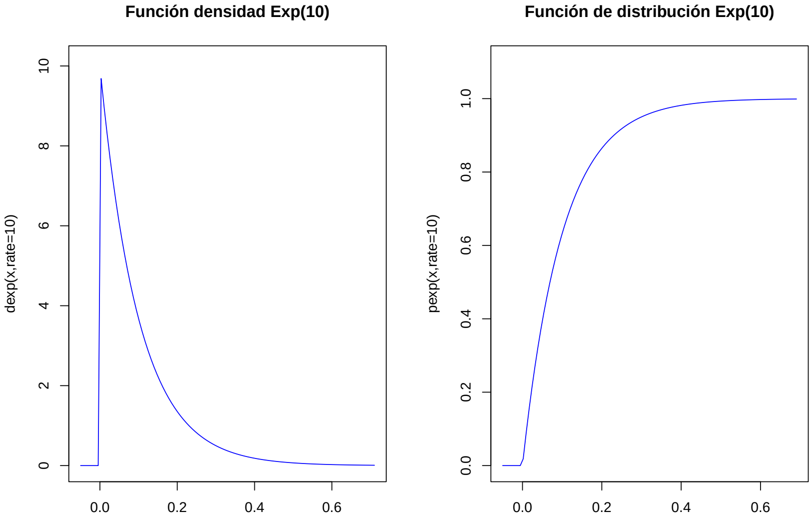
# Resumen v.a con distribución exponencial, $Exp(\lambda)$

| $X$ sigue una distribución $Exp(\lambda)$ |
|---|
| $D_X = (0, +\infty)$ |
| $f_X(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$ |
| $F_X(x) = P(X \leq X) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ |
| $E(X) = \frac{1}{\lambda}$; $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$ |

# Gráficas densidad y distribución $Exp(\lambda = 10)$

```
lambda=10
par(mfrow=c(1,2))
curve(dexp(x,rate=lambda)
      xlim=c(-0.05,round(qexp(0.99,rate=lambda,2),2)+0.25),
      ylim=c(0,dexp(0,lambda)+0.1),col="blue",
      main=paste0("Función densidad Exp(",lambda,")"),
      ylab=paste0("dexp(x,rate=",lambda,")"))
curve(pexp(x,rate=lambda),xlim=c(-0.05,qexp(0.999,10)),
      ylim=c(0,1.1),col="blue",
      main=paste0("Función de distribución Exp(",lambda,")"),
      ylab=paste0("pexp(x,rate=",lambda,")"))
par(mfrow=c(1,1))
```

# Gráficas densidad y distribución $Exp(\lambda = 10)$



# Gráficas densidad y distribución $Exp(\lambda = 10)$

**Ejercicio**

Consultad en el manual de python scipy.stats.

Dibujad la función de densidad y de distribución de una $Exp(10)$.

# Ejercicio: las bombillas que no envejecen.

**Ejercicio**

Supongamos que compramos una bombilla led que promete un **valor esperado** de duración de 10000 (1.14 años) horas de funcionamiento continuo. Además, nos aseguran que la distribución de $X$, el número de horas de funcionamiento continuo de una bombilla led, sigue una ley exponencial.

- Si $X$ es $Exp(\lambda)$ ¿cuál es el valor del parámetro $\lambda$?.
- ¿Cuál es la probabilidad de que una bombilla led ilumine más de 2 años?
- Supongamos que ya tengo una bombilla led funcionando 1 año ¿Cuál es la probabilidad de que dure dos años más?
- ¿Cuál es la varianza de la duración en horas de este tipo de bombillas?

# Lección 4

## Distribución normal o Gaussiana

# Distribución normal o Gaussiana

Una de las variables aleatorias continua más populares es la llamada distribución normal o Gaussiana .

Distribución normal o de Gauss Diremos que una v.a. $X$ sigue una ley normal de parámetros $\mu$ y $\sigma$ y la denotaremos por $N(\mu, \sigma)$ si tiene por función de densidad:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi \cdot \sigma^2}} e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},$$

para todo $x \in \mathbb{R}$.

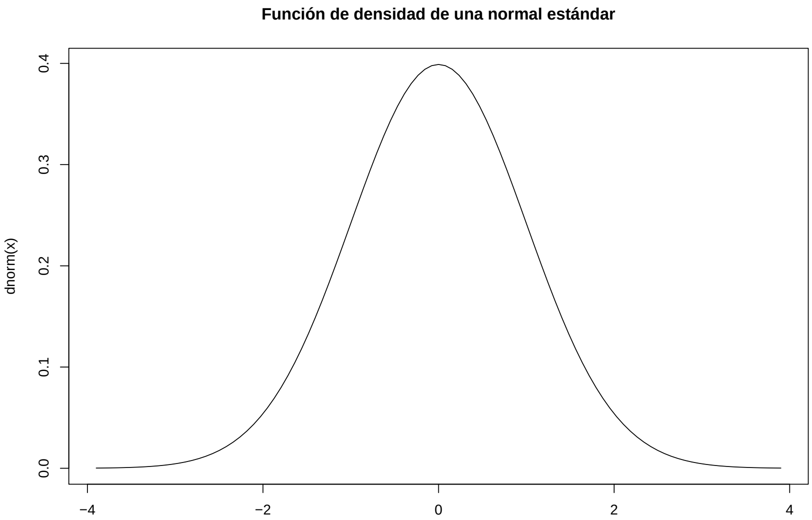
# Distribución normal o Gaussiana

La gráfica de esta función de densidad es conocida como **campana de Gauss.**

La v.a. normal con $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ recibe el nombre de normal estándar y se suele denotar por la letra $Z$ normal $N(0,1)$. El siguiente código la dibuja.

```
curve(dnorm(x),
      main="Función de densidad de una normal estándar",
      xlim=c(-3.9,3.9))
```

# Distribución normal o Gaussiana



# Propiedades de la función de densidad de la distribución normal

Propiedades de la función de densidad de la distribución normal

Sea $X$ una v.a. $N(\mu, \sigma)$ y sea $f_X$ su función de densidad. Entonces:

- La función $f_X$ verifica todas las propiedades de las funciones de densidad: $f_X(x) > 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$ y $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1$.
- La función $f_X(x)$ es simétrica respecto de la recta $x = \mu$: $f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $f_X$ tiene un único máximo absoluto en $x = \mu$ que vale $f_X(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$.

# Propiedades de la función de densidad de la distribución normal

- Si $F_X$ es la función de distribución de $X$, entonces $F_X(\mu+x) = 1 - F_X(\mu - x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- En particular si $Z$ es una $N(0,1)$ entonces $F_Z(-x) = 1 - F_Z(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.
- $Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$ es una v.a. $N(0,1)$ y $X = \sigma \cdot Z + \mu$ es una $N(\mu,\sigma)$ donde $Z$ es la normal estándar.

# Función de distribución N(0,1)

Su función de distribución es, como sabemos :

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt.$$

La función $F(x)$ no tiene ninguna expresión algebraica "decente". Es por esta razón, y por comodidad, que esta función está tabulada o hay que calcularla usando un software estadístico.

# Resumen v.a con distribución normal, $N(\mu,\sigma)$

| $X$ sigue una distribución $N(\mu,\sigma)$ |
|---|
| $D_X=\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ |
| $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\cdot\sigma^2}}\cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\cdot\sigma^2}}$ para todo $x\in\mathbb{R}$. |
| $F_X(x)=P(X\leq X)=\int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt.$ |
| $E(X)=\mu;\ Var(X)=\sigma^2.$ |

## Cálculos con R

Las funciones que calculan la función de densidad y de distribución de una variable $N(\mu,\sigma)$ en un valor x son `dnorm(x,mean=mu,sd=sigma)` y `pnorm(x,mean=mu,sd=sigma)`, respectivamente. Por ejemplo, para una variable $X\sim N(\mu=1,\sigma=2)$ la función de densidad $f_X(2)$ se puede calcular de la forma siguiente:

```
dnorm(2,mean=1,sd=2)
```

```
[1] 0.1760327
```

y la función de distribución $F_X(2)=P(X\leq 2)$ de la forma siguiente:

```
pnorm(2,mean=1,sd=2)
```

```
[1] 0.6914625
```

# Cálculos con R

El cuantil $x_{0.95}$ es el valor que cumple $P(X \leq x_{0.95}) = 0.95$ como

```
qnorm(0.95,mean=1,sd=2)
```

```
[1] 4.289707
```

Y la generación aleatoria de valores según $X$ como

```
rnorm(n=5,mean=1,sd=2)
```

```
[1]  0.9806747  5.5415845  2.8174087 -2.4085639  0.8920435
```

# Cálculos con python

De forma la forma habitual importaremos `norm` de `scipy.stas` los parámetros son `loc` y `scale` la media $\mu$ y la desviación estándar $\sigma$.

```
from scipy.stats import norm
```

Por ejemplo para una $X \sim N(\mu = 1, \sigma = 2)$, la función de densidad $f_X(2)$:

```
norm.pdf(2,loc=1,scale=2)
```

```
0.17603266338214976
```

y la función de distribución $F_X(2) = P(X \leq 2)$:

```
norm.cdf(2,loc=1,scale=2)
```

## Cálculos con python

El cuantil $x_{0.95}$ es el valor que cumple $P(X \leq x_{0.95}) = 0.95$ como

```
norm.ppf(0.95,loc=1,scale=2)
```

```
4.289707253902945
```

Y la generación aleatoria de valores según $X$ como

```
norm.rvs(loc=1,scale=2,size=5)
```

```
array([-2.20437219,  1.33563682,  0.0653277 ,  1.2999204 ,  0.21280019])
```

Consultad SciPy.org para dibujar las funciones de densidad y de distribución con python.

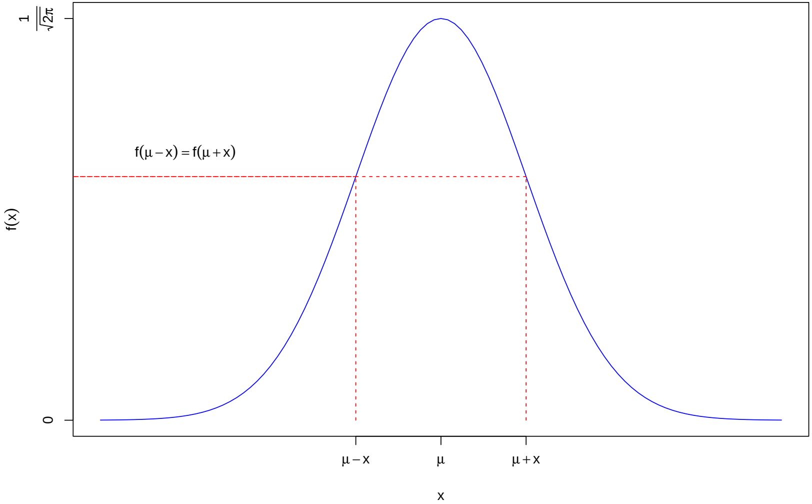
# Propiedades de la distribución normal.

## Propiedades

La función de densidad de la distribución normal tiene las siguientes propiedades:

- La función $f_X$ es continua.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi\cdot\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx = 1$. (propiedad de todas las densidades).
- $f(\mu + x) = f(\mu - x)$.
- $F(\mu - x) = 1 - F(\mu + x)$.

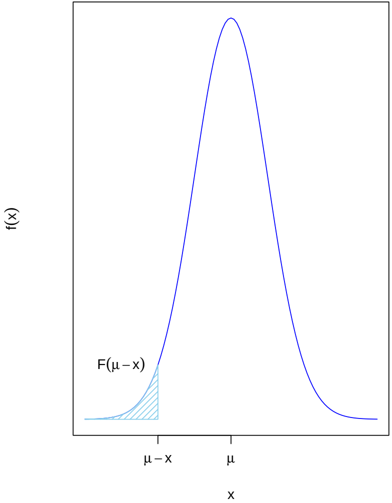
# Propiedades de la distribución normal.

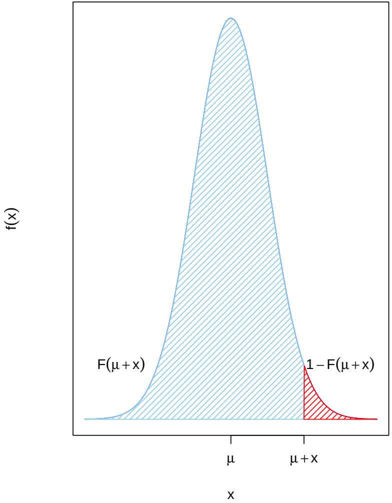


# Propiedades de la distribución normal

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ es decir tiene asíntota horizontal a derecha e izquierda.
- $f$ es estrictamente creciente si $x < \mu$ y decreciente si $x > \mu$.
- Alcanza el máximo en $x = \mu$ y en este punto vale $f(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$
- Tiene dos puntos de inflexión en $x = \mu + \sigma$ y en $x = \mu - \sigma$.

# Propiedades de la distribución normal.



# Transformaciones lineales de variables aleatorias normales

Propiedad: transformación lineal la distribución normal

Sea $X$ una variable $N(\mu, \sigma)$ entonces la variable $Y = aX + b$ con $a \neq 0, b \in \mathbb{R}$ tiene distribución $N(a\mu + b, |a|\sigma)$

En particular si $X$ sigue una $N(\mu, \sigma)$, tomando $a = \frac{1}{\sigma}$ y $b = \frac{-\mu}{\sigma}$ obtenemos la tipificación o estandarización de la v.a.

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

se distribuye $N(0, 1)$, es decir $E(X) = 0$ y $Var(X) = 1$.

# Transformaciones lineales de variables aleatorias normales

Esta propiedad es muy útil, ya que utilizándola sólo necesitaremos tabular la $N(0,1)$.

Si $Z$ sigue una distribución $N(0,1)$ diremos que $Z$ sigue una distribución normal estándar.

Por lo tanto podemos calcular cualquier distribución normal desde la distribución normal estándar:

$$F_X(x) = F_Z\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

# Propiedades de la distribución normal estándar

Sea $Z$ una $N(0,1)$.

En este caso, $\mu = 0$ y $\sigma = 1$. Podemos escribir algunas de las propiedades vistas para una distribución normal cualquiera de la forma siguiente:

- La propiedad $f_X(\mu - x) = f_X(\mu + x)$ se traduce a $f_Z(-x) = f_Z(x)$
- La propiedad $F_X(\mu - x) = 1 - F_X(\mu + x)$ se traduce a $F_Z(-x) = 1 - F(x)$.
- Dado $\delta > 0$,

$$P(-\delta \leq Z \leq \delta) = F_Z(\delta) - F_Z(-\delta) = F_Z(\delta) - (1 - F_Z(\delta)) = 2 \cdot F_Z(\delta) - 1.$$

# Cálculos con la distribución normal

**Ejercicio Cálculos con la distribución normal estándar**

Sea $Z$ una distribución $N(0,1)$, calcular las siguientes probabilidades en función de $F_Z$.

- $P(-4 \leq Z \leq 4)$.
- $P(-2 \leq Z \leq 2)$.
- $P(Z \leq -2)$.
- $P(Z \leq 2)$.
- $P(Z \geq 2)$.
- $P(Z > 2)$.
- $P(Z = 2)$.
- $P(Z \geq -2)$.

# Cálculos con la distribución normal

Resolución:

- $P(-4 \leq Z \leq 4) = F_Z(4) - F_Z(-4) = 2 \cdot F_Z(4) - 1.$
- $P(-2 \leq Z \leq 2) = F_Z(2) - F_Z(-2) = 2 \cdot F_Z(2) - 1.$
- $P(Z \leq -2) = F_Z(-2) = 1 - F_Z(2).$
- $P(Z \leq 2) = F_Z(2).$
- $P(Z \geq 2) = 1 - P(Z < 2) = 1 - F_Z(2).$
- $P(Z > 2) = 1 - P(Z \leq 2) = 1 - F_Z(2).$
- $P(Z = 2) = 0$ ya que es una distribución continua.
- $P(Z \geq -2) = 1 - P(Z < -2) = 1 - F_Z(-2) = 1 - (1 - F_Z(2)) = F_Z(2).$

# Relación entre una distribución normal y la normal estándar.

Para hallar la probabilidad de que $X$ esté en un intervalo $(a, b)$ cualquiera, podemos usar la función de distribución de $Z$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < \frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = \\ &= P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} < Z < \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = F_Z\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - F_Z\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

Para el caso particular en que el intervalo esté centrado en la media $\mu$, o sea existe un valor $\delta > 0$ tal que $(a, b) = (\mu - \delta, \mu + \delta)$, obtenemos:

$$P\left(\mu - \delta \leq X \leq \mu + \delta\right) = 2 \cdot F_Z\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1.$$

# Ejemplo cálculo probabilidades normal

**Ejercicio**

Sea $X$ una normal con media $2$ y varianza $4$. Calcular

- $P(1 < X < 2)$.
- $P(X > 3)$.

# Ejemplo cálculo probabilidades normal

**Solución**

La primera probabilidad se calcula de la forma siguiente:

$$
\begin{aligned}
P(1 < X < 2) &= P\left(\tfrac{1-2}{2} < \tfrac{X-2}{2} < \tfrac{2-2}{2}\right) = P\left(\tfrac{-1}{2} < Z < 0\right) \\
&= F_Z(0) - F_Z(-0.5) = \tfrac{1}{2} - 1 + F_Z(0.5) = -\tfrac{1}{2} + F_Z(0.5).
\end{aligned}
$$

La segunda probabilidad se calcular de la forma siguiente:

$$
P(X > 3) = P\left(\frac{X-2}{2} > \frac{3-2}{2}\right) = P(Z > 0.5) = 1 - F_Z(0.5).
$$

# Ejemplo normal con R y python

**Ejercicio**

Sea $X$ una normal con media $2$ y varianza $4$. Calcular con R y con python las probabilidades

- $P(1 < X < 2)$.
- $P(X > 3)$.

# Ejemplo normal con R y python

## Solución con R

```r
pnorm(2,mean=2,sd=2)-pnorm(1,mean=2,sd=2) #P(1< X< 2)
```

```
[1] 0.1914625
```

```r
pnorm(3,mean=2,sd=2,lower.tail =FALSE) #P(X>3)
```

```
[1] 0.3085375
```

```r
1-pnorm(3,mean=2,sd=2,lower.tail=TRUE) #P(X>3) = 1-P(X<=3)
```

```
[1] 0.3085375
```

# Ejemplo normal con R y python

## Solución con python

```
norm.cdf(2,loc=2,scale=2)-norm.cdf(1,loc=2,scale=2) #P(1< X< 2)
```

```
0.1914624612740131
```

```
1-norm.cdf(3,loc=2,scale=2) #P(X>3) = 1-P(X<=3)
```

```
0.3085375387259869
```

# La distribución normal aproxima otras distribuciones

En los temas que siguen veremos como, bajo determinadas condiciones,

- la distribución normal puede aproximar la distribución binomial,
- la distribución normal puede aproximar la distribución Poisson
- la distribución normal es la distribución límite de la media aritmética de una muestra de variables aleatorias.