

Probabilidad de éxito en dos configuraciones de un motor.

22-09-2023

Contents

Taller 1 Probabilidad	1
Enunciado	1
Esquemas	1

Taller 1 Probabilidad

Enunciado

Supongamos que tenemos un motor con dos partes diferenciadas: P_1 y P_2 : por ejemplo, P_1 activa la bomba de gasolina en el depósito y P_2 la enciende para iniciar la combustión. Para garantizar que nuestro motor funciona, decidimos poner dos interruptores, dos en P_1 y dos en P_2 que activan la bomba de gasolina y la combustión respectivamente. Se nos presentan dos formas de configurar estas partes:

- Opción 1: Tanto P_1 como P_2 tiene sus dos interruptores conectados en paralelo. De forma que los dos interruptores de P_1 se encuentran en serie con los dos de P_2 . Es decir, para que el motor funcione, se debería poner en marcha un interruptor de P_1 cualquiera, y un interruptor de P_2 cualquiera.
- Opción 2: Conectamos en serie un interruptor de P_1 y uno de P_2 , y en paralelo a estos dos un nuevo interruptor de P_1 en serie con otro de P_2 . En este caso, para que el motor se ponga en marcha debería actuar correctamente el interruptor de P_1 del primer circuito a la vez que el de P_2 del primer circuito o bien el segundo interruptor de P_1 junto con el segundo de P_2 .

Los interruptores funcionan con una probabilidad p fijada y de forma independiente. La pregunta es ¿cuál de las dos configuraciones es la más recomendable para instalar en nuestro motor en función del parámetro p ? Necesitaremos una justificación matemática del hecho, pero se puede combinar con un resultado numérico (por ejemplo, para ciertos valores de p , dar las probabilidades de los dos circuitos y ver si, a partir de cierto valor es más recomendable una configuración u otra).

Indicación: utilizar los esquemas que se dan a continuación para visualizar las dos opciones de configuración del motor

Esquemas

Solución forma 1

Lo resolveremos de dos maneras, la primera es más elegante y algebraica, la segunda es numérica.

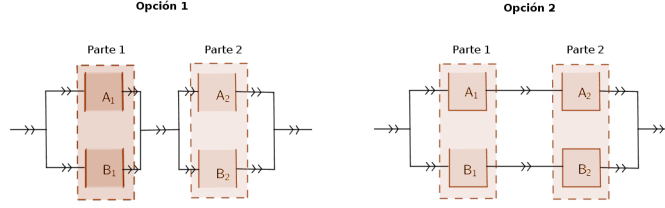


Figure 1: Esquemas opción 1 y 2

Solución 1 Denotemos por A_1 , A_2 , B_1 y B_2 los sucesos en los que los respectivos interruptores funcionan por lo tanto $P(A_i) = P(B_i) = p$ para $i = 1, 2$. Suponemos que estos sucesos son independientes. Denotemos por OP_i al suceso las opción i funciona para $i = 1, 2$.

Estos sucesos se pueden escribir en términos de los funcionamientos de los interruptores tal y como escribimos a continuación

$$OP_1 = (A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) \text{ y } OP_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)$$

La pregunta fundamental del problema es qué opción de configuración es más fiable, es decir, cuál tiene mayor probabilidad de funcionar.

La respuesta más sencilla es demostrar que el suceso OP_2 está contenido en OP_1 . Es sencillo ya que $(A_1 \cap A_2) \subseteq A_1 \subseteq (A_1 \cup B_1)$ y del mismo modo $(B_1 \cap B_2) \subseteq B_2 \subseteq (A_2 \cup B_2)$. Por lo tanto

$$OP_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2) \subseteq (A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2) = OP_1$$

y aplicando la monotonía de la probabilidad tenemos que si $OP_2 \subseteq OP_1$ entonces $P(OP_2) \leq P(OP_1)$

Así que la configuración de la opción 2 tiene siempre la misma (o igual) probabilidad de funcionar que la de la opción 1. Notemos que no hemos utilizado que las probabilidades de funcionamiento de los interruptores sean iguales a p , así que el resultado sería cierto si cada interruptor funciona con una probabilidad distinta, ni tampoco hemos utilizado la independencia.

Solución forma 2

Utilizaremos las mismas notaciones que en la solución 1. Ahora atacaremos el problema calculado la probabilidad de OP_1 y OP_2

$$\begin{aligned} P(OP_1) &= P((A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2)) = 1 - P([(A_1 \cup B_1) \cap (A_2 \cup B_2)]^c) \\ &= 1 - P((A_1^c \cap B_1^c) \cup (A_2^c \cap B_2^c)) \\ &= 1 - (P(A_1^c \cap B_1^c) + P(A_2^c \cap B_2^c) - P(A_1^c \cap B_1^c \cap A_2^c \cap B_2^c)) \\ &= 1 - (P(A_1^c) \cdot P(B_1^c) + P(A_2^c) \cdot P(B_2^c) - P(A_1^c) \cdot P(B_1^c) \cdot P(A_2^c) \cdot P(B_2^c)) \\ &= 1 - ((1-p)^2 + (1-p)^2 - (1-p)^4) = 1 - 2 \cdot (1-p)^2 + (1-p)^4. \end{aligned}$$

Ahora de forma similar con la configuración 2

$$\begin{aligned} P(OP_2) &= P((A_1 \cap A_2) \cup (B_1 \cap B_2)) = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap B_2) - P(A_1 \cap A_2 \cap B_1 \cap B_2) \\ &= P(A_1) \cdot P(A_2) + P(B_1) \cdot P(B_2) - P(A_1) \cdot P(B_1) \cdot P(A_2) \cdot P(B_2) \\ &= p^2 + p^2 - p^4 = 2 \cdot p^2 - p^4. \end{aligned}$$

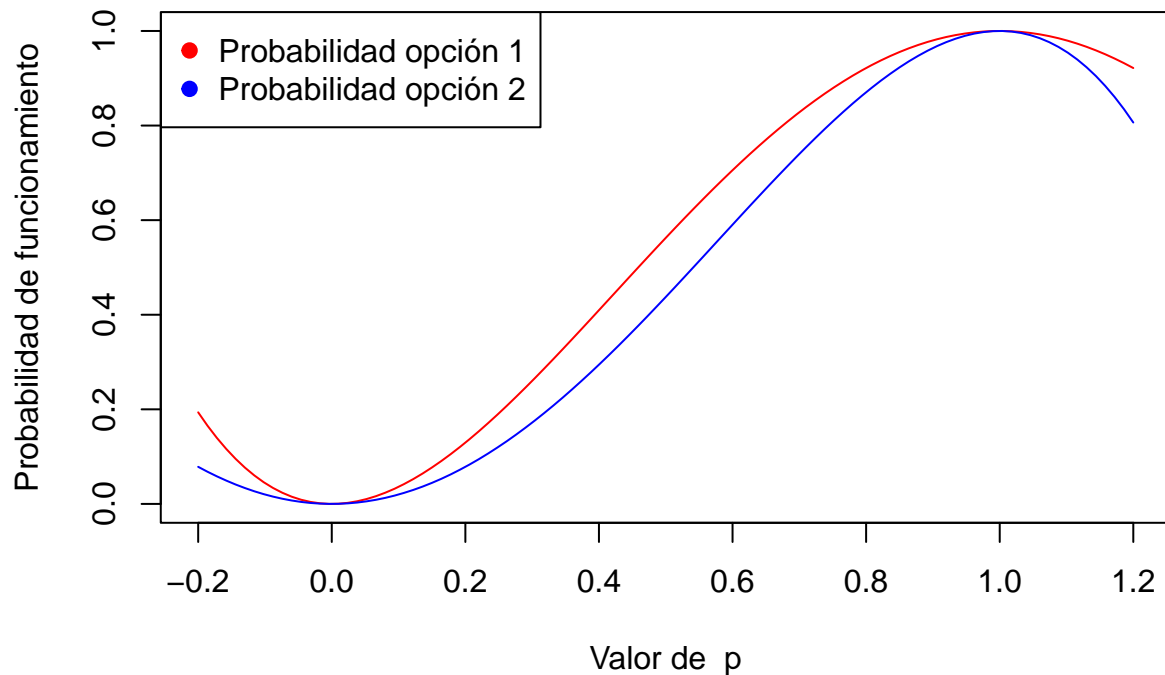
Definamos, con R dos funciones que nos calculen la fiabilidad (probabilidad de funcionamiento) de cada uno de las dos configuraciones del motor:

```
ProbOp1=function(p) 1-2*(1-p)^2+(1-p)^4
ProbOp2=function(p) 2*p^2-p^4
```

Dibujemos ambas curvas con las decoraciones adecuadas (colores, leyenda, etiquetas de los ejes, etc.)

```
curve(ProbOp1(x),col="red",xlim=c(-0.2,1.2),
      xlab=paste("Valor de ",expression("p")),collapse=" "),
      ylab="Probabilidad de funcionamiento", main="Fiabilidad de las dos configuraciones.")
curve(ProbOp2(x),add=TRUE,col="blue")
legend(x="topleft",legend=c("Probabilidad opción 1",
                           "Probabilidad opción 2"),col=c("red","blue"),pch = 19)
```

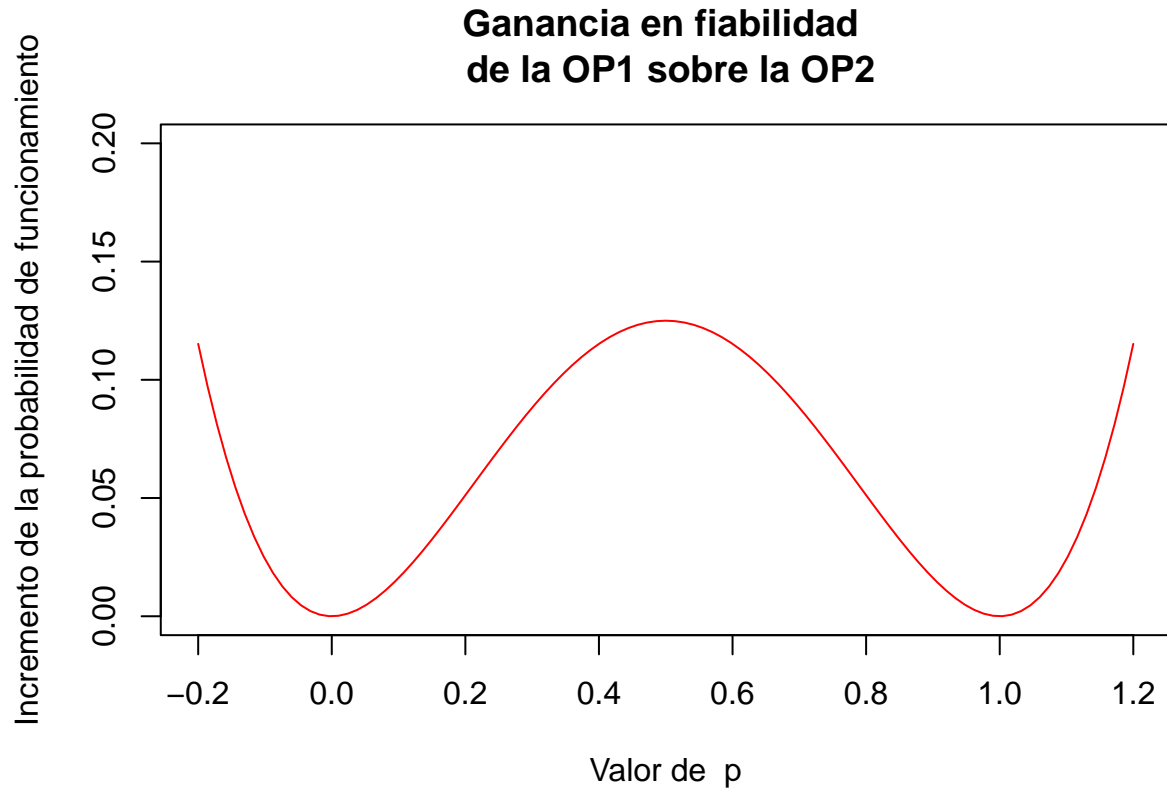
Fiabilidad de las dos configuraciones.



Pero no es suficiente, podemos hacer más. Por ejemplo la configuración en serie de los dos interruptores en paralelo podría ser más cara pues necesita dos conexiones adicionales.

Necesitamos dibujar la curva de la mejora de la probabilidad de funcionamiento de la opción 1 contra la 2:

```
curve(ProbOp1(x)-ProbOp2(x),col="red",xlim=c(-0.2,1.2), ylim=c(0,0.2),xlab=paste("Valor de ",expression
```



Pero además podemos calcular esto numéricamente.

La pregunta es ¿cuándo $P(OP_1) \geq P(OP_2)$? Para ello definamos

$$Dif(p) = P(OP_1) - P(OP_2) = 1 - 2 \cdot (1 - p)^2 + (1 - p)^4 - (2 \cdot p^2 - p^4)$$

.

Operando obtenemos que

$$\begin{aligned} Dif(p) &= P(OP_1) - P(OP_2) = 1 - 2 \cdot (1 - p)^2 + (1 - p)^4 - (2 \cdot p^2 - p^4) \\ &= 1 - 2(1 - 2 \cdot p + p^2) + 1 - 4 \cdot p + 6 \cdot p^2 - 4 \cdot p^3 + p^4 - 2 \cdot p^2 + p^4 - 2 \cdot p^2 + p^4 = \\ &= 2 \cdot p^2 - 4p^2 + 2 \cdot p^3 = 2 \cdot p^2(1 - 2 \cdot p + p^2) \\ &= 2 \cdot p^2(1 - p)^2. \end{aligned}$$

Como $Dif(p)$ es una función continua para saber cuando es positiva resolvemos la desigualdad

$$Dif(p) = 2 \cdot p^2(1 - p)^2 > 0.$$

La soluciones corresponden a las de las ecuaciones

$$\begin{cases} p^2 = 0 \\ (1 - p)^2 = 0 \end{cases}$$

que son $p = 0$ y $p = 1$. Como $Dif\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = 0.125 > 0$ tenemos que $Dif(p) > 0$ para todo p tal que $0 < p < 1$.

Los candidatos a diferencia máxima se alcanza en los valores de p tales que

$$(Dif(p))' = 4 \cdot p(1-p)^2 - 4 \cdot p^2 \cdot (1-p) = 4 \cdot p - 12 \cdot p^2 + 8 \cdot p^3$$

La soluciones son $p = 0, 1, \frac{1}{2}$. Calculemos la segunda derivada

$$(Dif(p))'' = 4 - 24 \cdot p + 24 \cdot p^2$$

Podemos averiguar sin los candidatos a puntos singulares son máximos mínimos o puntos de inflexión estudiando si la segunda derivada es positiva o negativa en los puntos adecuados.

$$(Dif(-1))'' = 52 > 0$$

$$(Dif(0))'' = 4 > 0$$

$$\left(Dif\left(\frac{1}{2}\right)\right)'' = -2 < 0$$

$$(Dif(1))'' = 4 > 0$$

$$(Dif(2))'' = 52 > 0$$

Dejamos al lector los detalles pero el máximo se alcanza en $p = \frac{1}{2}$ y su valor es $Dif\left(\frac{1}{2}\right) = 0.125$