Parte1. Tema 0: Prerrequisito: Teoría de conjuntos y combinatoria

Probabilidad con R y python

2022-09-13

Lección 1

Antes de empezar

Consideraciones

Para aprender cálculo de probabilidades son necesarios conocimientos de:

1. Cálculo: Derivadas, integrales, límites, sumas de series. . .
2. Geometría básica y álgebra lineal : rectas, hiperplanos, volúmenes. . . Matrices, valores propios. . .
3. Teoría de conjuntos y combinatoria. . . ..

Consideraciones

Por experiencia sabemos que la mayoría de estudiantes tienen más conocimientos de cálculo, geometría y matrices.

Pero muchos tienen una falta de conocimientos en teoría básica de conjuntos y combinatoria (matemática discreta).

Teoría de conjuntos

Definición de conjunto

La definición de conjunto es una idea o noción primitiva. Es decir es una idea básica del pensamiento humano: un conjunto es una colección de objetos: números, imágenes... cualquier cosa, jugadores de fútbol, palabras, colores ....

La teoría de conjuntos básicas es simple y natural y es la que necesitamos para este curso.

La teoría de conjuntos matemática es más compleja y presenta varias paradojas como la paradoja de Russell.

Teoría de conjuntos

La idea o noción práctica de conjunto es la de una colección de objetos de un cierto tipo.

Estas colecciones o conjuntos se pueden definir por:

- Comprensión: reuniendo los objetos que cumplen una propiedad p
- Extensión: dando una lista exhaustiva de los miembros del conjunto

Conjuntos básicos

Los conjuntos suelen tener un conjunto madre como por ejemplo

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } q \neq 0. \right\}$
- $\mathbb{R} = \{\text{Todos los puntos de una recta.}\}$

Conjuntos básicos

- $\mathbb{C} = \left\{ a + b \cdot i \quad \middle| \quad a, b \in \mathbb{R} \right\}$ los números complejos $\quad a + b \cdot i$.
- Alfabeto $= \{a, b, c, \ldots, A, B, C, \ldots\}$.
- Palabras $= \{paz, guerra, amor, probabilidad, \ldots\}$.

Recordemos que i es la unidad imaginaria que cumple que $i = \sqrt{-1}$.

Características y propiedades básicas de los conjuntos

- Si a cada objeto x de Ω le llamaremos **elemento del conjunto** Ω y diremos que x pertenece a Ω. Lo denotaremos por $x \in \Omega$.
- Un **conjunto de un elemento**, por ejemplo $\{1\}$ recibe el nombre de **conjunto elemental** (o **singleton** del inglés).
- Sea A otro conjunto diremos que A **es igual a** B si todos los elementos A están en B y todos los elementos de B están en A. Por ejemplo $A = \{1, 2, 3\}$ es igual a $B = \{3, 1, 2\}$.

Características y propiedades básicas de los conjuntos

- Si B es otro conjunto, tal que si $x \in A$ entonces $x \in B$ diremos que A es un subconjunto de o que está contenido en B. Lo denotaremos por $A \subseteq B$.
- El conjunto que no tiene elementos se denomina conjunto vacío y se denota por el símbolo $\varnothing$.
- Dado A un conjunto cualquiera obviamente $\varnothing \subseteq A$.

Características y propiedades básicas de los conjuntos

Tomemos como conjunto base $\Omega = \{1, 2, 3\}$

- Ω es un conjunto de cardinal 3, se denota por $\#(\Omega) = 3$ o por $|\Omega| = 3$
- El conjunto Ω tiene $2^3 = 8$ subconjuntos.
  - el vacio $\emptyset$ y los elementales $\{1\}, \{2\}, \{3\}$
  - los subconjuntos de dos elementos: $\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$
  - el conjunto total de tres elementos $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

Características y propiedades básicas de los conjuntos

Dado un conjunto Ω podemos construir el **conjunto de todas sus partes** (todos sus subconjuntos) al que denotamos por $\mathcal{P}(\Omega)$. También se denomina de forma directa partes de Ω.

Cardinal de las partes de un conjunto

El **cardinal de la partes de un conjunto** es $\#(\mathcal{P}(\Omega)) = 2^{\#(\Omega)}$.

Características y propiedades básicas de los conjuntos

Por ejemplo $\#\left(\mathcal{P}(\{1,2,3\})\right) = 2^{\#(\{1,2,3\})} = 2^3 = 8$.

Efectivamente

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}.$$

Características y propiedades básicas de los conjuntos

Dado un subconjunto A de Ω podemos construir la función característica de A

$$\chi_A : \Omega \to \{0, 1\}$$

dado un $\omega \in \Omega$

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

Operaciones conjuntos: Intersección.

Sea Ω un conjunto y A y B dos subconjuntos de Ω.

El conjunto **intersección** de A y B es el formado por todos los elementos que perteneces a A **Y** B, se denota por $A \cap B$.

Más formalmente

$$A \cap B = \left\{ x \in \Omega \middle| x \in A \text{ y } x \in B \right\}.$$

Operaciones conjuntos: Unión.

El conjunto **unión** de A y B es el formado por todos los elementos que perteneces a A **O** pertenecen a B, se denota por $A \cup B$.

Más formalmente

$$A \cup B = \left\{ x \in \Omega \middle| x \in A \text{ o } x \in B \right\}.$$

Operaciones conjuntos: Diferencia.

El conjunto **diferencia** de A y B es el formado por todos los elementos que perteneces a A **Y NO** pertenecen a B, se denota por $A - B = A - (A \cap B)$.

Más formalmente

$$A - B = \left\{ x \in \Omega \middle| x \in A \text{ y } x \notin B \right\}.$$

Operaciones conjuntos: Complementario

El **complementario** de un subconjunto A de Ω es $\Omega - A$ y se denota por A^c o $\overline{A}$.

Más formalmente

$$A^c = \left\{ x \in \Omega \middle| x \notin A \right\}.$$

Más propiedades y definiciones

Sea Ω un conjunto y A, B, C tres subconjuntos de Ω

- Se dice que dos conjuntos A y B **son disjuntos** si $A \cap B = \emptyset$.
- $\Omega^c = \emptyset$.
- $\emptyset^c = \Omega$.
- $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ conmutativas.
- $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ asociativas.
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ distributivas.
- $(A^c)^c = A$ doble complementario.
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ leyes de De Morgan.

Con R, ejemplos.

Con R los conjuntos de pueden definir como vectores

```
Omega=c(1,2,3,4,5,6,7,8,9,10)
A=c(1,2,3,4,5)
B=c(1,4,5)
C=c(4,6,7,8)
Omega
```

```
##  [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
```

Con R, ejemplos.

```
A
```

```
## [1] 1 2 3 4 5
```

```
B
```

```
## [1] 1 4 5
```

```
C
```

```
## [1] 4 6 7 8
```

Con R, ejemplos.

$A \cap B$

```
A
```

```
## [1] 1 2 3 4 5
```

```
B
```

```
## [1] 1 4 5
```

```
intersect(A,B)
```

```
## [1] 1 4 5
```

Con R, ejemplos.

$A \cup B$

```r
A
```

```
## [1] 1 2 3 4 5
```

```r
B
```

```
## [1] 1 4 5
```

```r
union(A,B)
```

```
## [1] 1 2 3 4 5
```

Con R, ejemplos.

$B - C$

```
B
```

```
## [1] 1 4 5
```

```
C
```

```
## [1] 4 6 7 8
```

```
setdiff(B,C)
```

```
## [1] 1 5
```

Con R, ejemplos.

$A^c = \Omega - A$

```
Omega
```

```
## [1]  1  2  3  4  5  6  7  8  9 10
```

```
A
```

```
## [1] 1 2 3 4 5
```

```
setdiff(Omega,A)
```

```
## [1]  6  7  8  9 10
```

Con python

```python
Omega=set([1,2,3,4,5,6,7,8,9,10])
A=set([1,2,3,4,5])
B=set([1,4,5])
C=set([4,6,7,8])
Omega
```

```
## {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
```

Con python

```
A
```

```
## {1, 2, 3, 4, 5}
```

```
B
```

```
## {1, 4, 5}
```

```
C
```

```
## {8, 4, 6, 7}
```

Con python

```python
A & B    # intersección (&: and/y)
```

```
## {1, 4, 5}
```

```python
A | B    # unión (|: or/o)
```

```
## {1, 2, 3, 4, 5}
```

Con python

```
A - C    # diferencia
```

```
## {1, 2, 3, 5}
```

```
Omega-C # complementario.
```

```
## {1, 2, 3, 5, 9, 10}
```

Lección 2

Combinatoria

Combinatoria. Introducción.

La combinatoria es una rama de la matemática discreta que entre otras cosas cuenta distintas configuraciones de objetos de un conjunto.

Por ejemplo si tenemos un equipo de baloncesto con 7 jugadores ¿cuántos equipos de 5 jugadores distintos podemos formar?

Combinatoria. Número binomial.

Número combinatorio o número binomial

Nos da el número de subconjuntos de tamaño k de un conjunto de tamaño n. Este número es

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

Recordemos que

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n.$$

Combinatoria. Número binomial.

En nuestro caso con 7 jugadores $n=7$ el número de equipos distintos de $k=5$ es

$$\begin{aligned} C_7^5 &= \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!\cdot(7-5)!} = \frac{7!}{5!\cdot 2!} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1\cdot 2} = \frac{6\cdot 7}{2} = \frac{42}{2} = 21. \end{aligned}$$

Puedo formar 21 equipos distintos.

Ejercicio

Carga el paquete `gtools` de R y investiga la función `combinations(n, r, v, set, repeats.allowed)` para calcular todas las combinaciones anteriores.

Combinatoria. Combinaciones con repetición

En combinatoria, las combinaciones con repetición de un conjunto son las distintas formas en que se puede hacer una selección de elementos de un conjunto dado, permitiendo que las selecciones puedan repetirse.

El número CR_n^k de multiconjuntos con k elementos escogidos de un conjunto con n elementos satisface:

- Es igual al número de combinaciones con repetición de k elementos escogidos de un conjunto con n elementos.
- Es igual al número de formas de repartir k objetos en n grupos.

$$CR_n^k = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Combinatoria. Combinaciones con repetición

Ejemplo

Vamos a imaginar que vamos a repartir 12 caramelos entre Antonio, Beatriz, Carlos y Dionisio (que representaremos como A, B, C, D). Una posible forma de repartir los caramelos sería: dar 4 caramelos a Antonio, 3 a Beatriz, 2 a Carlos y 3 a Dionisio. Dado que no importa el orden en que se reparten, podemos representar esta selección como AAAABBBCCDDD.

Otra forma posible de repartir los caramelos podría ser: dar 1 caramelo a Antonio, ninguno a Beatriz y Carlos, los 11 restantes se los damos a Dionisio. Esta repartición la representamos como ADDDDDDDDDDD

Combinatoria. Combinaciones con repetición

Recíprocamente, cualquier serie de 12 letras A, B, C, D se corresponde a una forma de repartir los caramelos. Por ejemplo, la serie AAAABBBBBDDD corresponde a: Dar 4 caramelos a Antonio, 5 caramelos a Beatriz, ninguno a Carlos y 3 a Dionisio.

De esta forma, el número de formas de repartir los caramelos es:

$$CR_4^{12} = \binom{4 + 12 - 1}{4}$$

Combinatoria. Variaciones.

Variaciones

Con los número $\{1, 2, 3\}$ ¿cuántos números de dos cifras distintas podemos formar sin repetir ninguna cifra?

La podemos escribir

$$12, 13, 21, 23, 31, 32$$

Luego hay seis casos

Combinatoria. Variaciones (sin repetición).

Denotaremos las variaciones (sin repetición) de k elementos (de orden k) de un conjunto de n elementos por V_n^k su valor es

$$V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = (n-k+1)\cdot(n-k+2)\cdots n.$$

Combinatoria. Variaciones.

En nuestro ejemplo con $n = 3$ dígitos podemos escribir las siguientes variaciones de orden $k = 2$

$$V_{n=3}^{k=2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1} = 6.$$

Ejercicio

Carga el paquete `gtools` de R y investiga la función `permutations(n, r, v, set, repeats.allowed)` para calcular todas las variaciones anteriores.

Combinatoria. Variaciones con repetición.

Variaciones con repetición

¿Y repitiendo algún dígito?

$$VR_n^k = n^k$$

Efectivamente en nuestro caso

$$11, 12, 13, 21, 22, 23, 31, 32, 33$$

$$VR_{n=3}^{k=2} = n^k.$$

Permutaciones

Las permutaciones de un conjunto de cardinal n son todas las variaciones de orden máximo n. Las denotamos y valen:

$$P_n = V_n^n = n!$$

Permutaciones

Por ejemplo todos los números que se pueden escribir ordenando todos los dígitos $\{1,2,3\}$ sin repetir ninguno

```
library(combinat)
for(permutacion in permn(3)) print(permutacion)
```

```
## [1] 1 2 3
## [1] 1 3 2
## [1] 3 1 2
## [1] 3 2 1
## [1] 2 3 1
## [1] 2 1 3
```

Efectivamente

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3.$$

Permutaciones

Ejercicio

Carga el paquete `combinat` de R e investiga la funcion `permn` para calcular todas las permutaciones anteriores.

Ejercicio

Investiga el paquete `itertools` y la función `comb` de `scipy.misc` de Python e investiga sus funciones para todas las formas de contar que hemos visto en este tema.

Ejercicio

La función gamma de Euler, cobrará mucha importancia en el curso de estadística. Comprueba que la función `gamma(x+1)` da el mismo valor que la función `factorial(x)` en `R` para todo $x = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$.

Números multinomiales. Permutaciones con repetición.

Consideremos un conjunto de elementos $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$.

Entoces, si cada uno de los objetos a_i de un conjunto, aparece repetido n_i veces para cada i desde 1 hasta k, entonces el número de permutaciones con elementos repetidos es:

$$PR_n^{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \begin{pmatrix} & & n & \\ n_1 & n_2 & \ldots & n_k \end{pmatrix} = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!},$$

donde $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Números multinomiales. Permutaciones con repetición.

Ejemplo

¿Cuantas palabras diferentes se pueden formar con las letras de la palabra `PROBABILIDAD`?

El conjunto de letras de la palabra considerada es el siguiente: $\{A, B, D, I, L, O, P, R\}$ con las repeticiones siguientes: las letras A, B, D, e I, aparecen 2 veces cada una; y las letras L, O, P, R una vez cada una de ellas.

Por tanto, utilizando la fórmula anterior, tenemos que el número de palabras (permutaciones con elementos repetidos) que podemos formar es

$$PR_{12}^{2,2,2,2,1,1,1,1} = \frac{12!}{(2!)^4(1!)^4} = 29937600.$$

Lección 3

Para acabar

Principios básicos para contar cardinales de conjuntos

El principio de la suma

Sean $A_1, A_2, \ldots, A_n$ conjuntos disjuntos dos a dos, es decir $A_i \cap A_j = \varnothing$ para todo $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots n$. Entonces

$$\#(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \#(A_i).$$

Principios básicos para contar cardinales de conjuntos

Principio de unión exclusión

Consideremos dos conjuntos cualesquiera A_1, A_2 entonces el cardinal de su unión es

$$\#(A_1 \cup A_2) = \#(A_1) + \#(A_2) - \#(A_1 \cap A_2).$$

Principios básicos para contar cardinales de conjuntos

El principio del producto

Sean $A_1, A_2, \ldots A_n$

$$\begin{aligned}\#(A_1 \times A_2 \times \cdots A_n) = &\ \#\left(\{(a_1, a_2, \ldots a_n) | a_i \in A_i, i = 1, 2, \ldots n\}\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \#(A_i).\end{aligned}$$

Otros aspectos a tener en cuenta

Evidentemente nos hemos dejado muchas otras propiedades básicas de teoría de conjuntos y de combinatoria como:

- Propiedades de los números combinatorios.
- Binomio de Newton.
- Multinomio de Newton.

Si nos son necesarias las volveremos a repetir a lo largo del curso o bien daremos enlaces para que las podáis estudiar en paralelo.