

Ejercicios Tema 2 - Variables aleatorias. Soluciones.

Variables Aleatorias

29 marzo, 2023

Contenidos

1	Variables aleatorias discretas	1
1.1	Problema 1.	1
1.2	Problema 2.	2
1.3	Problema 3.	2
1.4	Problema 4.	2
1.5	Problema 5.	2
2	Variables aleatorias continuas	2
2.1	Problema 6.	2
2.2	Problema 7.	3
2.3	Problema 8.	3
2.4	Problema 9.	3
2.5	Problema 10.	3
3	Transformación de variables aleatorias	3
3.1	Problema 11.	3
3.2	Problema 12.	3

1 Variables aleatorias discretas

1.1 Problema 1.

Hay 10 estudiantes inscritos en una clase de Estadística, de entre los cuales 3 tienen 19 años, 4 tienen 20 años, 1 tiene 21 años, 1 tiene 24 años y 1 tiene 26 años. De esta clase se seleccionan dos estudiantes sin reposición. Sea X la edad media de los dos estudiantes seleccionados. Hallar la función de probabilidad para X .

1.2 Problema 2.

Verificar que:

$$F_W(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 3, \\ \frac{1}{3}, & \text{si } 3 \leq t < 4, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } 4 \leq t < 5, \\ \frac{2}{3}, & \text{si } 5 \leq t < 6, \\ 1, & \text{si } t \geq 6, \end{cases}$$

es una función de distribución y especificar la función de probabilidad para W . Hallar también $P(3 < W \leq 5)$.

1.3 Problema 3.

La variable aleatoria Z tiene por función de probabilidad:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } x = 0, 1, 2, \\ 0, & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

¿Cuál es la función de distribución para Z ?

1.4 Problema 4.

Sea X_n una variable aleatoria dependiendo de un valor natural n cuya función de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot i, & \text{si } i = 1, 2, \dots, n, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1. Hallar el valor de k y la función de distribución de X .
2. Calcular la probabilidad de que X tome un valor par.

1.5 Problema 5.

Un examen tipo test consta de cinco preguntas con tres posibles opciones cada una. Un alumno contesta al azar las cinco cuestiones. Suponiendo que cada respuesta acertada vale dos puntos, hallar la distribución de número de puntos obtenidos por el alumno.

2 Variables aleatorias continuas

2.1 Problema 6.

Verificar que:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -1, \\ \frac{t+1}{2}, & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

es una función de distribución y hallar la función de densidad para X . Calcular también $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$.

2.2 Problema 7.

Sea Y una variable continua con función de densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & \text{si } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

Hallar la función de distribución $F_Y(t)$.

2.3 Problema 8.

Verificar que:

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ \sqrt{t}, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

es una función de distribución y especificar la función de densidad para Y . Usar este resultado para hallar $P\left(-\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{4}\right)$.

2.4 Problema 9.

Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1. Representar gráficamente dicha función.
2. Hallar y dibujar la función de distribución.
3. Calcular las siguientes probabilidades: $P(X \geq 0)$ y $P(|X| < \frac{1}{2})$.

2.5 Problema 10.

Hallar la esperanza y la varianza de las variables de los ejercicios anteriores.

3 Transformación de variables aleatorias

3.1 Problema 11.

A partir de

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -1, \\ \frac{t+1}{2}, & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

hallar la función de distribución para $Y = 15 + 2X$ y la función de densidad para Y .

3.2 Problema 12.

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x)$. Consideramos la variable aleatoria $Y = e^X$. Hallar la función de densidad de la variable aleatoria Y , $f_Y(y)$.