

OPTIMISATION DE FORMES

Résumé : Optimiser la forme d'un objet est une ambition universelle qui fascine depuis toujours les scientifiques, mais aussi les artistes... Cette pratique est aujourd'hui au cœur des enjeux de la recherche scientifique et industrielle. Dans cet article, on introduit quelques idées générales autour de l'optimisation de formes et on présente certains de ses développements et applications récentes.

1. INTRODUCTION

L'optimisation de formes est une discipline multicéphale qui gravite autour de la recherche et la caractérisation des formes optimales au regard de critères géométriques ou physiques. Ses aspects théoriques empruntent des concepts et des outils au calcul des variations et au contrôle optimal, domaines qu'elle enrichit en retour de questions nouvelles. Du point de vue des applications, l'optimisation de formes est aujourd'hui une composante incontournable de la conception industrielle ; elle intervient également dans la modélisation de certains phénomènes, par exemple en sciences du vivant ou en chimie, qui s'expliquent par le caractère optimal des structures en jeu.

Cet article est essentiellement consacré aux développements numériques de l'optimisation de formes. La Partie 2 esquisse quelques-unes de ses incursions historiques. On débat ensuite dans la Partie 3 de la manière de poser un problème d'optimisation de formes, qui conditionne l'existence de formes optimales, et guide en pratique le choix de la représentation de la forme optimisée. Dans la Partie 4, on présente l'une des notions les plus fréquemment utilisées de dérivée par rapport au domaine, et on donne le cadre général des algorithmes s'appuyant sur celle-ci. La Partie 5 examine plus précisément deux telles stratégies numériques. On aborde enfin quelques perspectives récentes de l'optimisation de formes dans la Partie 6.

2. QUELQUES JALONS HISTORIQUES

L'histoire de l'optimisation de formes est indissociable de celles du calcul des variations, du contrôle optimal, et de l'optimisation en général. On se contente dans cette partie de survoler quelques apparitions historiques qui ont contribué à façonner la discipline d'aujourd'hui.

2.1. Le problème de la reine Dido et l'inégalité isopérimétrique

Le mythe de la fondation de Carthage rapporte qu'à son installation sur la côte tunisienne, en 814 av. J.-C., la reine Dido vint solliciter une terre auprès du souverain Iarbas. Sarcastique, ce dernier lui accorda autant de terrain que pourrait en comprendre la peau d'un bœuf. Découpant la peau en fines lanières, l'astucieuse reine encercla une région d'aire maximale, en forme de demi-disque s'appuyant sur le bord de mer, où s'implanterait Carthage.

En termes modernes, Dido pressentait que le disque est solution du problème isopérimétrique :

$$\max_{\Omega \subset \mathbb{R}^2} \text{Vol}(\Omega) \quad \text{avec} \quad \text{Per}(\Omega) \text{ donné,}$$

où le volume et le périmètre d'un domaine plan Ω sont définis par

$$\text{Vol}(\Omega) := \int_{\Omega} dx \quad \text{et} \quad \text{Per}(\Omega) := \int_{\partial\Omega} d\ell.$$

La même intuition sous-tend l'organisation circulaire des villes médiévales, dont on souhaitait minimiser le contour fortifié pour une aire urbaine donnée.

Le problème isopérimétrique et ses variantes ont inspiré de nombreux scientifiques et philosophes de l'Antiquité, parmi lesquels Euclide, Archimède, Zénodore, Pappus, ... La propriété d'optimalité du disque a fait l'objet d'élégantes tentatives de démonstration ; toutes étaient malheureusement incomplètes, car tenant

Vue de Carthage en forme de demi-disque contre la côte (image: J.-C. Golvin)



FIGURE 1

pour acquise l'existence d'une forme optimale – un aspect bien souvent épineux en optimisation de formes, comme nous le verrons. Il fallut attendre le milieu du XIX^{ème} siècle pour que Karl Weierstrass donne une démonstration rigoureuse de ce résultat intuitif, nécessitant la mise au point de nouveaux concepts en lien avec le calcul des variations.

Remarque 2.1. *L'étude de ces questions d'isopérimétrie présente des points communs avec celle des surfaces minimales. Ces objets mathématiques, qui s'incarnent entre autres dans les bulles de savon, sont définis comme les surfaces d'aire minimale parmi celles qui s'appuient sur un ensemble de contraintes (des régions fixées de l'espace).*

2.2. Conception optimale en architecture

Bien que l'on bâtisse des ouvrages depuis l'Antiquité, les premiers écrits témoignant d'un souci d'optimiser une construction au regard de considérations physiques sont dus au scientifique anglais Robert Hooke. En 1675, alors qu'il cherchait la forme d'une arche répondant aux efforts internes de compression avec un fléchissement minimal, celui-ci postula le principe

“As hangs the flexible line, so but inverted will stand the rigid arch.”

Concrètement, en retournant la forme d'une chaîne en équilibre lorsqu'elle est suspendue à ses deux extrémités et soumise à son poids et aux forces de traction – appelée “chaînette” –, on obtient une arche en équilibre sous les effets de son poids et des efforts de compression, voir la Figure 3 (a) et (b).

Les architectes s'inspirent de tels principes pour guider la silhouette générale de leurs constructions (la courbure d'un toit, l'orientation des piliers, ...) ; ils en déduisent également des motifs élémentaires pour optimiser leur structure fine (par exemple la forme des ouvertures dans les façades). Les techniques modernes d'optimisation de formes aident à rendre ces études plus systématiques et réalistes. En particulier, elles permettent de prendre en compte des contraintes sur la géométrie de la construction (par exemple, sur l'épaisseur de ses colonnes) ou bien sur sa performance physique (vibration, usure...).

La caténoïde est une surface minimale s'appuyant sur deux cercles parallèles (image de [2])

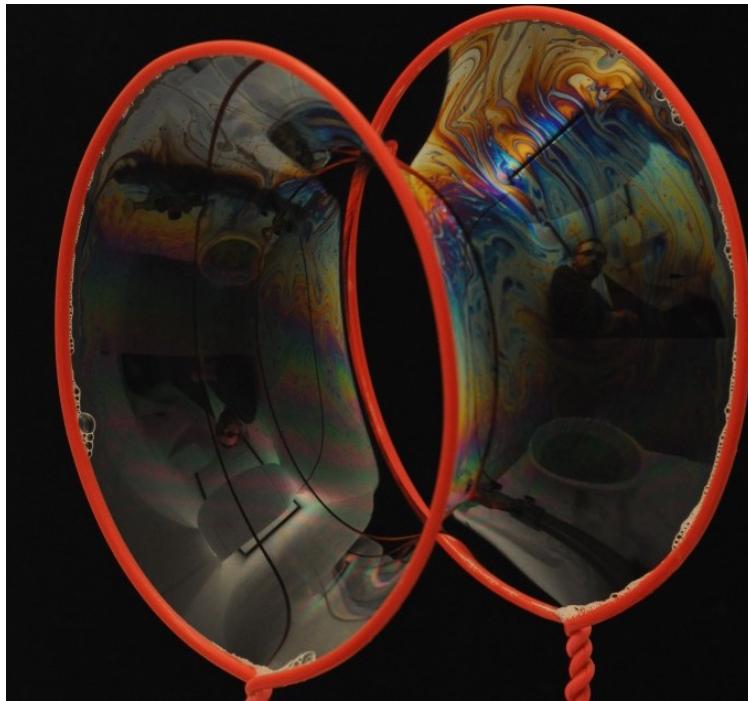


FIGURE 2

2.3. La conjecture de Rayleigh et l'optimisation spectrale

À partir du XVII^{ème} siècle, le développement du calcul différentiel et du calcul des variations a ouvert la voie à la formalisation mathématique de phénomènes physiques tels que l'électrostatique, l'acoustique, la mécanique des fluides, notamment par le biais d'Équations aux Dérivées Partielles (EDP) tout d'abord très simplifiées (reposant souvent sur l'opérateur Laplacien), puis de plus en plus complexes. De concert avec ces progrès, les premiers problèmes d'optimisation d'une forme au regard de son comportement dans un tel contexte physique virent le jour. Ainsi, Newton étudia la forme d'un projectile présentant la plus faible résistance possible aux frottements de l'air. Lagrange a considéré la forme de la colonne la plus robuste. Le président des États-Unis Thomas Jefferson lui-même a étudié la forme optimale d'un soc de charrue.

Parmi ces questions, en 1894, Lord Rayleigh conjectura dans l'ouvrage [15] que parmi toutes les membranes homogènes fixées sur leur frontière, celle qui a la plus petite fréquence fondamentale de vibration (i.e. celle qui émet le son le plus grave) est le disque ; en d'autres termes, le disque est l'unique solution du problème

$$\min_{\Omega} \lambda_{\Omega} \text{ avec } \text{Vol}(\Omega) \text{ donné,}$$

où λ_{Ω} désigne la première valeur propre du Laplacien avec conditions aux limites de Dirichlet, i.e. la plus petite valeur (positive) telle que l'équation

$$\begin{cases} -\Delta u_{\Omega} = \lambda_{\Omega} u_{\Omega} & \text{dans } \Omega, \\ u_{\Omega} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

a une solution u_{Ω} distincte de la solution triviale 0.

Cette conjecture ne fut démontrée que 30 ans plus tard, par Faber et Krahn, présidant au développement de l'optimisation spectrale.

Notons que les outils mis au point pour traiter ces considérations sont rassemblés dans l'ouvrage de référence [14] de Pólya et Szegő.

Optimisation de formes en architecture



FIGURE 3. (a) *Robert Hooke et la chaînette*, ; (b) l’arche de St Louis (Missouri) décrit une “chaînette à poids” ; (c) maquette d’un modèle funiculaire (assemblage de chaînettes) présidant à la construction de la Sagrada Familia par Gaudi ; (d) optimisation de la toiture du centre olympique de Munich (Image: H. Berberich).

2.4. L’optimisation de formes en ingénierie : mécanique des structures et aérodynamique externe

Les premiers développements de l’optimisation de formes en ingénierie mécanique remontent à Maxwell en 1869, dont les travaux furent repris par Michell en 1904. Tous deux s’intéressaient à l’optimisation de treillis, i.e. de réseaux de barres. Ils cherchaient notamment à identifier des conditions suffisantes pour que ces structures soient de masse minimale pour une amplitude de contrainte donnée dans chaque barre.

Les études menées sur ces sujets sont restées essentiellement théoriques jusqu’au début des années 1960. L’essor conjoint des algorithmes d’optimisation, de simulation des équations de la physique et de la mécanique

Une structure en treillis : le pylône électrique (image tirée de [1])



FIGURE 4

(tels que la méthode des éléments finis), et des moyens de calcul nécessaires à leur mise en œuvre ont alors marqué un tournant dans la conception de méthodes automatiques pour l'optimisation de structures. Ces progrès ont aussi profité à d'autres domaines, tels que celui de l'aéronautique externe. Ils ont en particulier permis de traiter efficacement la question de l'optimisation du profil des ailes d'avion, maximisant la portance de l'appareil (la force qui le maintient en l'air) tout en diminuant sa traînée (la résistance de l'air).

De nos jours, la hausse perpétuelle du coût des matières premières incite les ingénieurs à optimiser la forme des pièces mécaniques dès les premières étapes de leur conception ; plusieurs logiciels industriels dédiés à cet objectif ont vu le jour. La suite de cet article survole quelques considérations théoriques et pratiques présidant à ces développements modernes.

3. FORMULATION DES PROBLÈMES D'OPTIMISATION DE FORMES

Un problème d'optimisation de formes consiste à minimiser (sans contrainte, pour simplifier) une fonction objectif $J(\Omega)$ par rapport à la forme Ω :

$$(\mathcal{P}) \quad \min_{\Omega} J(\Omega).$$

Dans cette présentation, la forme Ω est comprise comme un domaine de \mathbb{R}^d ($d = 2$ ou 3 en pratique) ; nous verrons dans cette section que ce choix de modélisation intuitif n'est pas sans inconvénient.

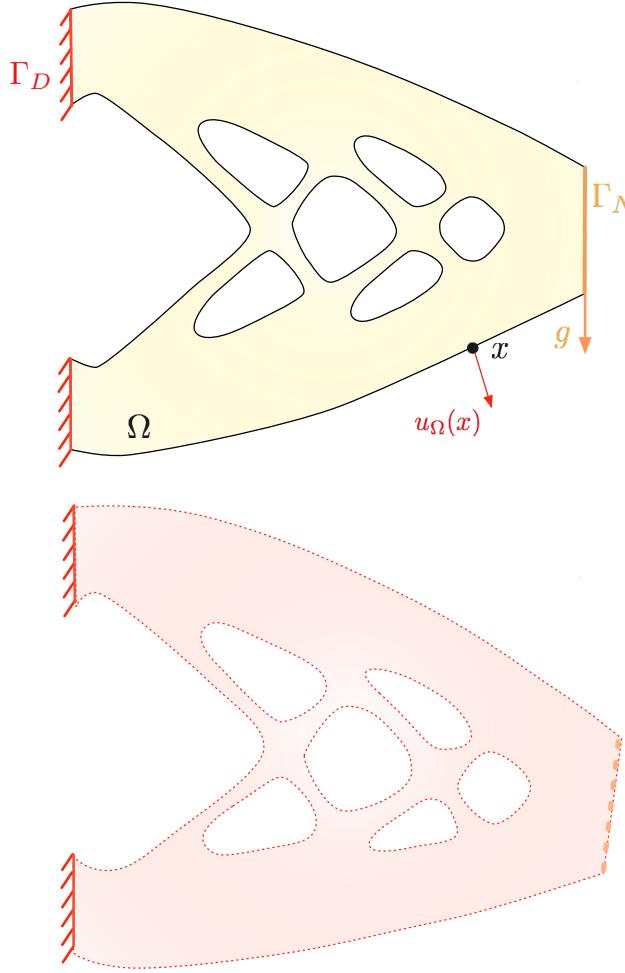
Dans les applications, $J(\Omega)$ dépend souvent de Ω via un “état” u_Ω . Comme dans l'exemple de la Section 2.3, celui-ci est solution d'une EDP posée sur Ω qui modélise la physique de la situation considérée.

Par exemple, dans le contexte de l'optimisation structurale, Ω représente une pièce mécanique, attachée sur une partie Γ_D de sa frontière $\partial\Omega$, et soumise à des efforts $g : \Gamma_N \rightarrow \mathbb{R}^d$ appliqués sur une autre région $\Gamma_N \subset \partial\Omega$. Le comportement de Ω dans cette situation est caractérisé par son déplacement $u_\Omega : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$: chaque point $x \in \Omega$ bouge vers la position $x + u_\Omega(x)$. Ce dernier est la solution des équations de l'élasticité linéaire :

$$(ELAS) \quad \begin{cases} -\operatorname{div}(Ae(u_\Omega)) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \Gamma_D, \\ Ae(u_\Omega)n = g & \text{sur } \Gamma_N, \\ Ae(u_\Omega)n = 0 & \text{sur } \Gamma := \partial\Omega \setminus (\overline{\Gamma_D} \cup \overline{\Gamma_N}). \end{cases}$$

Ici, $e(u) := \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T)$ est le tenseur des déformations, relié au tenseur des contraintes $\sigma(u) = Ae(u)$ par la loi de Hooke A , qui encode les propriétés mécaniques du matériau. Mathématiquement, $e(u)$ et $\sigma(u)$

Une structure élastique Ω (en haut) et sa configuration déformée sous l'effet du déplacement u_Ω (en bas)



sont des applications sur Ω à valeurs dans l'espace des matrices symétriques de taille d . Le champ de vecteurs n désigne la normale unitaire à $\partial\Omega$, pointant vers l'extérieur de Ω .

On peut alors souhaiter minimiser la compliance (ou souplesse) de Ω :

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} Ae(u_\Omega) : e(u_\Omega) \, dx,$$

où la notation $M : N = \sum_{i,j=1,\dots,d} M_{ij}N_{ij}$ désigne le produit scalaire de Frobenius de deux matrices carrées M et N de taille d . On peut également s'intéresser à l'écart entre u_Ω et un déplacement cible u_T , c'est-à-dire :

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_\Omega - u_T|^2 \, dx.$$

Un autre contexte physique d'intérêt est celui de la mécanique des fluides : si Ω représente maintenant une conduite traversée par un fluide, la vitesse u_Ω de celui-ci est solution des équations de Stokes ou de Navier-Stokes dans Ω . Le critère à optimiser $J(\Omega)$ peut alors porter sur la perte d'énergie dans Ω par le travail des efforts de viscosité.

3.1. (Non) Existence de formes optimales

Avant de s'intéresser au calcul des formes optimales pour un problème tel que (\mathcal{P}) , il convient de se demander s'il en existe.

Malheureusement, la plupart des problèmes d'optimisation de formes n'admettent pas de forme optimale – du moins tant que par “forme” on entend un domaine de \mathbb{R}^d . Le responsable principal de ce défaut d'existence est le phénomène d'*homogénéisation*, illustré sur la Figure 5 : les suites minimisantes de formes Ω^n pour le critère $J(\Omega)$, c'est-à-dire les suites telles que

$$J(\Omega^n) \rightarrow \inf_{\Omega} J(\Omega) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

développent des motifs de plus en plus fins, au point de “tendre” vers un design homogénéisé défini par les deux objets suivants :

- Une fonction de densité $h : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$, dont les valeurs “noir et blanc” $h(x) = 1$ ou 0 caractérisent les points x autour desquels il n'y a que du matériau ou du vide, respectivement, et les “zones de gris” $h(x) \in (0, 1)$ sont constituées d'un mélange de matériau et de vide.
- Un tenseur de microstructure $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$, qui encode l'agencement microscopique de matière et de vide autour de chaque point x .

Deux voies contraires sont possibles pour pallier ce problème de non existence de forme optimale :

- *Restriction* : On ajoute des contraintes sur la forme optimisée Ω (par exemple en imposant une régularité uniforme de sa frontière, un nombre maximum de trous, etc.) pour lui interdire de développer des structures arbitrairement fines.
- *Relaxation* : On enrichit l'ensemble des designs possibles en donnant un sens à (\mathcal{P}) lorsque la forme Ω est non plus seulement un domaine, mais plus généralement un design homogénéisé, donné par une fonction de densité et un tenseur de microstructure.

3.2. Représentation des formes

Jusqu'à présent, nous avons spontanément considéré que la forme Ω devait être un domaine de \mathbb{R}^d dans la formulation du problème (\mathcal{P}) . En réalité, ce choix n'a rien d'une évidence : la discussion précédente laisse entrevoir son impact sur les propriétés mathématiques du problème (existence, dérivabilité de l'objectif), et nous verrons aussi qu'il conditionne son traitement numérique.

Suivant le contexte, on trouvera avantageux de décrire une forme par :

- peut être intéressant à explorer
- Un jeu de paramètres $\{p_1, \dots, p_N\}$ dans un espace de dimension finie. Ces paramètres peuvent être les points de contrôle d'une représentation de la forme par des courbes ou des surfaces polynomiales de Bézier (ou bien des versions plus complexes de celles-ci, telles que des B-splines ou des NURBS), comme cela est d'usage en Conception Assistée par Ordinateur (CAO). Ils peuvent aussi renvoyer aux sommets d'un maillage de la forme. Si cette pratique a l'avantage de placer le problème (\mathcal{P}) dans le contexte de l'optimisation en dimension finie, il peut être difficile (et réducteur) d'identifier les paramètres judicieux.
 - Un domaine de \mathbb{R}^d : s'il s'agit de la définition d'une forme la plus intuitive, elle n'est pas sans poser des difficultés, théoriques (au niveau de l'existence de forme optimale, comme nous l'avons vu), comme numériques.
 - Une fonction de densité $h : \mathbb{R}^d \rightarrow [0, 1]$, éventuellement accompagnée d'un tenseur de microstructure $A : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d}$. Les méthodes “d'optimisation topologique” reposant sur ce choix de modélisation sont très performantes et populaires en ingénierie ; nous renvoyons par exemple à l'ouvrage [5] sur ce sujet.

Remarque 3.1. *Même lorsqu'il n'existe pas de forme optimale pour un problème tel que (\mathcal{P}) , le fait de diminuer la valeur du critère $J(\Omega)$ à partir d'un design existant est en soi intéressant d'un point de vue applicatif.*

4. DÉRIVER PAR RAPPORT AU DOMAINE

Revenons à notre problème modèle (\mathcal{P})

$$\min_{\Omega} J(\Omega),$$

où Ω est un domaine de \mathbb{R}^d .

Le phénomène d'homogénéisation

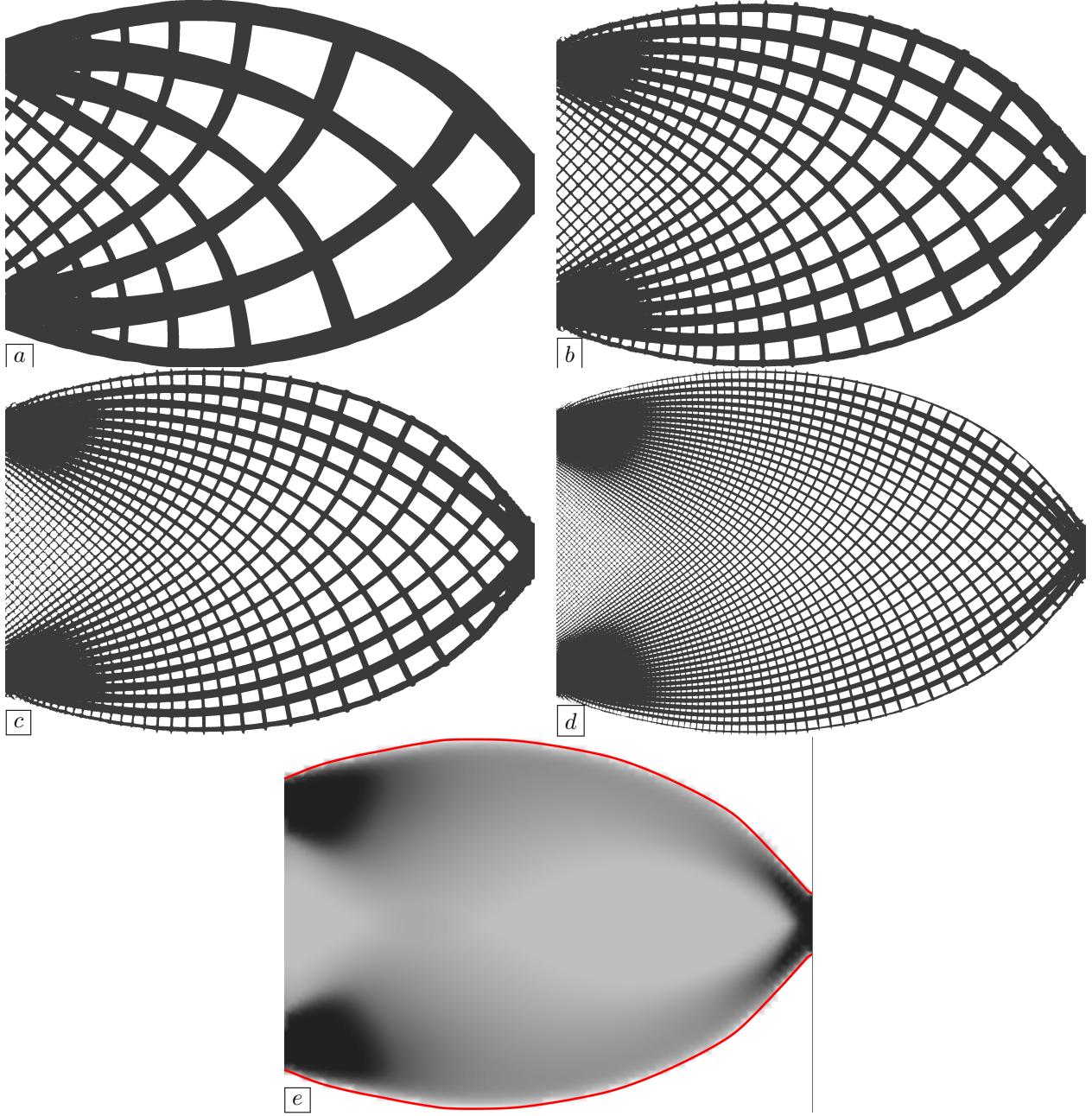


FIGURE 5. (a-d) Elements d'une suite minimisante de formes, tendant à minimiser la compliance pour un volume donné ; (e) densité de la forme optimale limite (Images tirées de [7]).

Comme dans le cadre plus familier de l'optimisation sur un espace de dimension finie, l'analyse, théorique comme numérique, de ce problème s'appuie sur la dérivée de la fonction objectif J . Il s'agit ainsi de se donner une notion de dérivation par rapport au domaine, ce qui peut se faire de plusieurs manières.

Quatre représentations différentes d'une forme

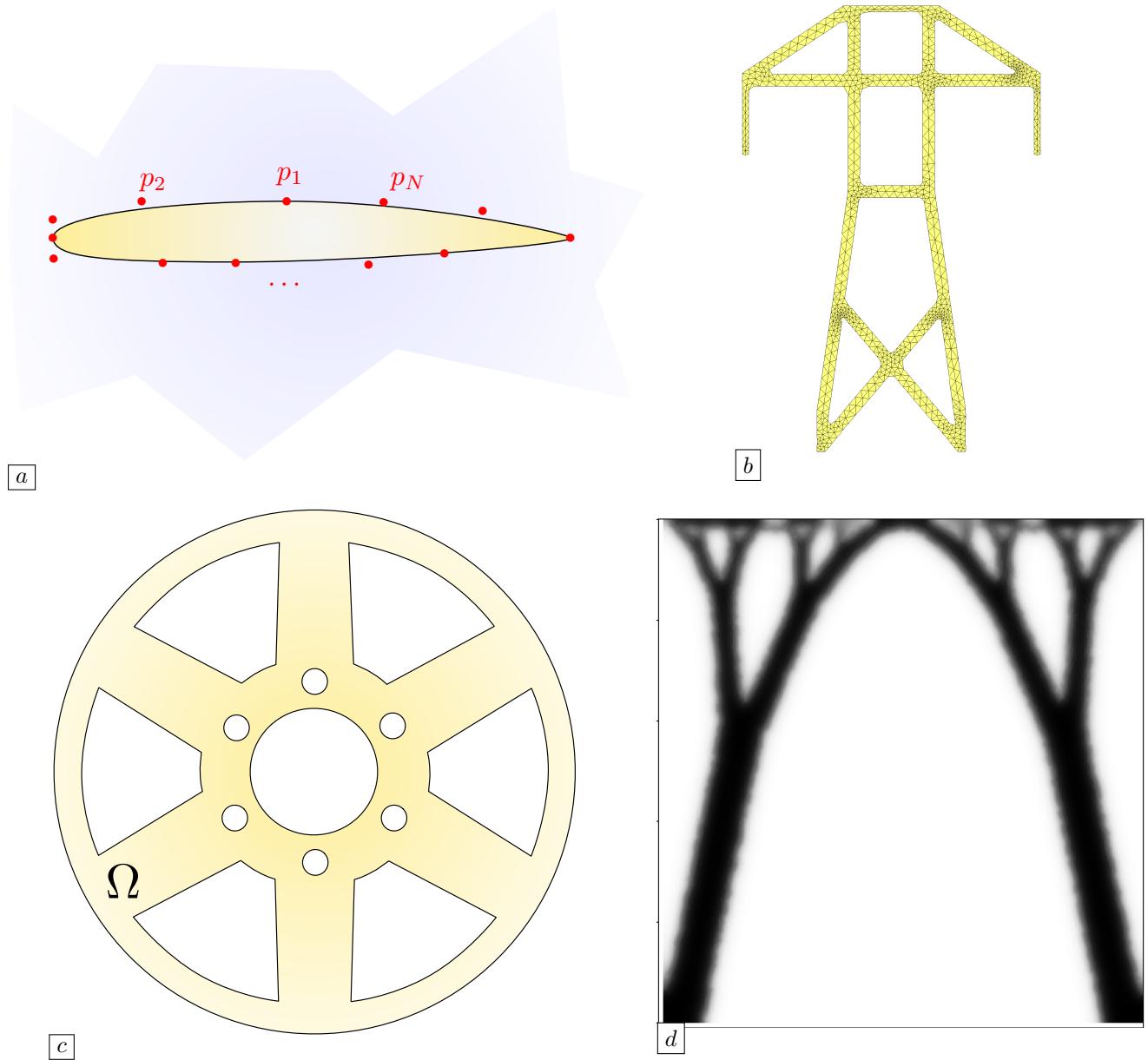


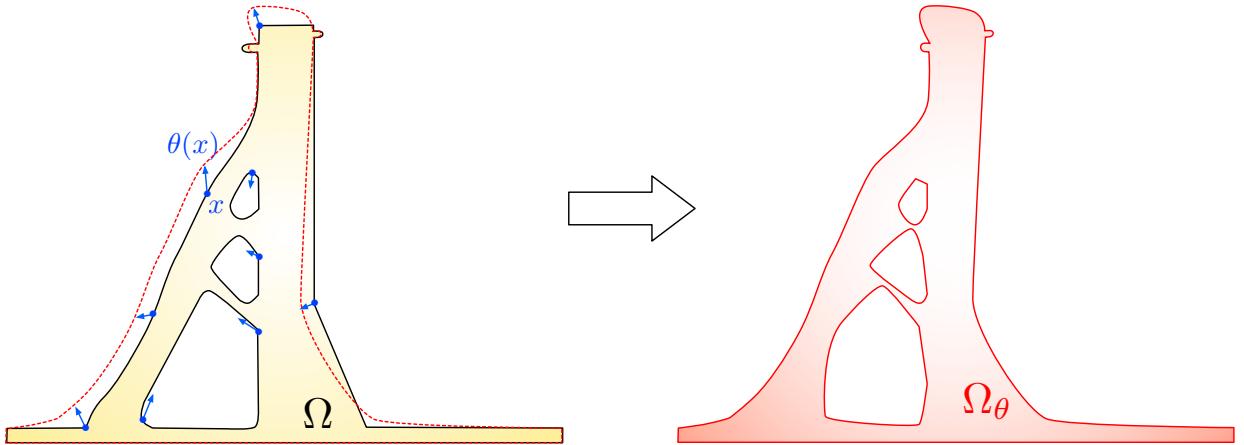
FIGURE 6. Paramétrage d'une forme (a) par les points de contrôle p_1, \dots, p_N de courbes splines définissant sa frontière, (b) par les sommets d'un maillage, (c) par un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, (d) par une fonction de densité h telle que $h(x) = 1$ en présence de matériau (couleur noire), 0 en présence de vide (couleur blanche) et $0 < h(x) < 1$ décrit un mélange de matériau et de vide.

4.1. La méthode de variation de frontières de Hadamard

La méthode de Hadamard, introduite dans le mémoire [8] et analysée méticuleusement dans l'article [11], repose sur des variations d'un domaine donné Ω du type :

$$\Omega_\theta := (\text{Id} + \theta)(\Omega),$$

La variation Ω_θ de Ω est obtenue en déplaçant chaque point x de Ω par le vecteur $\theta(x)$



où $\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est un “petit” champ de vecteurs.

La dérivée de forme $\theta \mapsto J'(\Omega)(\theta)$ d’une fonction du domaine J en Ω est définie comme la différentielle (lorsqu’elle existe) en $\theta = 0$ de l’application $\theta \mapsto J(\Omega_\theta)$, ce qui donne lieu au développement limité suivant :

$$J(\Omega_\theta) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) + o(\theta), \text{ où } \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|} \xrightarrow{\theta \rightarrow 0} 0.$$

La connaissance de la dérivée de forme de l’objectif J est précieuse pour l’étude du problème (\mathcal{P}) . Elle sert d’une part à écrire ses conditions d’optimalité ; elle permet d’autre part de calculer une direction de descente, i.e. un champ de vecteurs θ tel que $J'(\Omega)(\theta) < 0$. Ceci garantit que pour $t > 0$ assez petit, on a :

$$J(\Omega_{t\theta}) \approx J(\Omega) + tJ'(\Omega)(\theta) < J(\Omega), \quad \begin{array}{l} \text{Nouveau } J \text{ après saut dans la directions de} \\ \text{descent ed'un pas } t \end{array}$$

i.e. θ indique comment il faut déplacer chaque point de Ω pour diminuer la valeur de J .

Remarque 4.1. Une notion alternative de dérivée par rapport au domaine s’appuie sur de petites variations $\Omega_{x,r}$ d’une forme Ω obtenues en forant un trou $B(x,r)$ centré en $x \in \Omega$ et de petit diamètre r :

$$\Omega_{x,r} := \Omega \setminus \overline{B(x,r)}.$$

La dérivée de la fonction $r \mapsto J(\Omega_{x,r})$ est appelée dérivée topologique, et mesure la sensibilité de $J(\Omega)$ à la création d’un petit trou autour de x dans Ω .

4.2. Calcul d’une dérivée de forme : la méthode de l’état adjoint

Beaucoup de fonctions du domaine Ω dépendent de celui-ci de manière complexe, à travers la solution d’une EDP posée sur lui. Il est néanmoins possible de calculer leur dérivée de forme de manière propice au traitement numérique grâce à la méthode de l’état adjoint. Celle-ci a été introduite dans [10], dans le cadre général du contrôle optimal. Nous la décrivons schématiquement dans ce paragraphe, renvoyant à [13] pour une introduction didactique.

4.2.1. Présentation formelle de la méthode

Afin de mieux rendre compte du caractère systématique de cette méthode, on se place dans le cadre abstrait et formel suivant. La variable de design (qui sera la forme Ω dans nos applications) est notée h ; elle appartient à un espace H , que l’on suppose être un espace de Hilbert pour simplifier, et dont on note le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_H$. On considère une fonction objectif

$$J(h) = j(u(h)),$$

dépendant de h via un état $u(h)$ appartenant à un autre espace de Hilbert $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle_V)$. Celui-ci est caractérisé comme la solution d’une équation, que l’on écrit à l’aide d’une fonction $\mathcal{F} : H \times V \rightarrow V$:

(E)

$$\mathcal{F}(h, u(h)) = 0.$$

Dans le contexte de l'optimisation structurale évoqué en Section 3, $u(h)$ est le déplacement élastique associé au design h , et (E) est le système de l'élasticité (ELAS).

Pour commencer, on montre en appliquant le théorème des fonctions implicites à (E) que l'application $H \ni h \mapsto u(h) \in V$ est différentiable. En dérivant alors (E) par rapport à h , on obtient la relation

$$(D) \quad \forall k \in H, \quad \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h}(h, u(h)) \right] k + \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}(h, u(h)) \right] u'(h)(k) = 0,$$

qui caractérise la dérivée $u'(h)(k) \in V$ de $h \mapsto u(h)$ dans une direction arbitraire $k \in H$.

On peut d'autre part différentier l'expression de $J(h)$, ce qui donne :

$$\forall k \in H, \quad J'(h)(k) = \left\langle j'(u(h)), u'(h)(k) \right\rangle_V.$$

Ici, on a introduit le gradient $j'(u) \in V$ de la fonction $u \mapsto j(u)$.

À ce stade, on a obtenu l'expression de la dérivée de $J(h)$, sous une forme qui est toutefois malcommode pour notre propos. Rappelons en effet que l'on souhaite extraire de la connaissance de $J'(h)(k)$ une direction de descente pour J , i.e. un élément $k \in H$ tel que $J'(h)(k) < 0$. Or, la dérivée $u'(h)(k)$ n'a pas d'expression simple par rapport à k – elle est seulement connue implicitement, comme solution de (D).

Pour remédier à cet écueil, il s'agit de transformer l'expression ci-dessus ; la clé de voûte de cette opération est l'introduction d'un état adjoint $p(h) \in V$, défini comme la solution de l'équation suivante :

$$(ADJ) \quad \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}(h, u(h)) \right]^T p(h) = -j'(u(h)),$$

où la notation T désigne l'adjoint d'un opérateur défini entre deux espaces de Hilbert.

Cette définition, mystérieuse de prime abord, est exactement ce dont nous avons besoin pour rendre explicite la dépendance de $J'(h)(k)$ en k :

$$\begin{aligned} J'(h)(k) &= \left\langle j'(u(h)), u'(h)(k) \right\rangle_V \\ &= -\left\langle \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}(h, u(h)) \right]^T p(h), u'(h)(k) \right\rangle_V \\ &= -\left\langle \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}(h, u(h)) \right] u'(h)(k), p(h) \right\rangle_V \\ &= \left\langle \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h}(h, u(h)) \right] k, p(h) \right\rangle_V \\ &= \left\langle \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h}(h, u(h)) \right]^T p(h), k \right\rangle_H. \end{aligned}$$

Cette suite d'égalités, d'apparence anodine, est fondamentale. On a utilisé :

- La définition (ADJ) de $p(h)$ pour passer de la première ligne à la seconde ;
- La définition de l'adjoint de l'opérateur

$$V \ni w \mapsto \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial u}(h, u(h)) \right] w \in V$$

pour passer de la seconde ligne à la troisième ;

- L'équation (D) satisfaite par la dérivée $u'(h)(k)$ pour passer de la troisième ligne à la quatrième.
- La définition de l'adjoint de l'application

$$H \ni k \mapsto \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h}(h, u(h)) \right] k \in V$$

pour passer de la quatrième ligne à la dernière.

À la lueur de ce calcul, il est plus facile d'apprécier comment l'équation adjointe (ADJ) a été construite : son second membre est exactement ce qu'il faut pour passer de la première ligne à la seconde, tandis que l'opérateur au membre de gauche permet d'éliminer la dérivée $u'(h)(k)$ dans la troisième ligne en utilisant la relation (D) qui la caractérise.

Convection d'un domaine Ω par déformation suivant un champ de vecteurs tangentiel θ

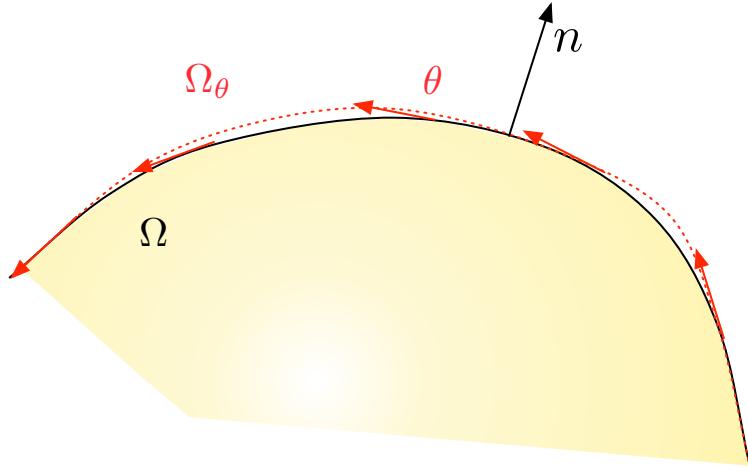


FIGURE 7

L'expression de $J'(h)(k)$ résultant de ce calcul suggère une direction de descente naturelle pour la fonctionnelle J :

$$k = - \left[\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial h}(h, u(h)) \right]^T p(h).$$

4.2.2. Application de la méthode de l'état adjoint dans le contexte de l'optimisation de formes

L'application de cette méthodologie au contexte de l'optimisation de formes révèle que la “plupart” des fonctions $J(\Omega)$ du domaine ont une dérivée de forme jouissant de la structure

$$(S) \quad J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} v_\Omega \theta \cdot n \, ds,$$

où la fonction $v_\Omega : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ dépend de la fonction optimisée $J(\Omega)$, de l'état u_Ω , et de l'état adjoint p_Ω , solution d'une EDP proche de celle caractérisant u_Ω , mais avec un second membre différent.

L'expression (S) se prête à l'identification d'une direction de descente pour $J(\Omega)$; en effet, en choisissant un champ de vecteurs θ tel que

$$\theta = -v_\Omega n \quad \text{sur } \partial\Omega,$$

on voit immédiatement que $J'(\Omega)(\theta) < 0$.

Remarque 4.2. La structure (S) révèle que la dérivée de forme $J'(\Omega)(\theta)$ ne dépend que des valeurs de la composante normale $\theta \cdot n$ de la déformation θ sur le bord $\partial\Omega$. Ceci exprime le fait naturel qu'un champ de vecteurs θ qui est purement tangentiel sur $\partial\Omega$ (a fortiori, un champ θ qui s'annule sur $\partial\Omega$) produit une variation Ω_θ qui est une reparamétrisation de Ω au premier ordre : la valeur de $J(\Omega_\theta)$ coincide avec $J(\Omega)$ (au premier ordre) et $J'(\Omega)(\theta) = 0$, voir la Figure 7.

4.3. Vers un algorithme numérique

Tous les ingrédients sont désormais réunis pour esquisser un algorithme de gradient de forme dédié à la résolution du problème (\mathcal{P}) .

Un algorithme de gradient de forme

- **Initialisation :** Forme initiale Ω^0 .
- **Pour** $n = 0, \dots$:
 - (1) Résoudre l'EDP pour u_{Ω^n} (resp. l'équation adjointe pour p_{Ω^n}) sur Ω^n .
 - (2) En déduire une direction de descente θ^n pour $J(\Omega)$, par exemple en s'appuyant sur la structure (S) de la dérivée de forme $J'(\Omega)$.
 - (3) Déformer Ω^n par le champ θ^n pour un pas de temps $\tau^n > 0$, de sorte que

$$\Omega^{n+1} := (\text{Id} + \tau^n \theta^n)(\Omega^n)$$
 améliore Ω^n , i.e. $J(\Omega^{n+1}) < J(\Omega^n)$.

Les deux points saillants de ce programme sont, à chaque itération $n = 0, \dots$

- La résolution des EDP pour u_{Ω^n} et p_{Ω^n} , qui sont posées sur la forme Ω^n ;
- La mise à jour de Ω^n vers la nouvelle forme Ω^{n+1} obtenue par déformation suivant le champ de vecteurs θ^n .

Une mise en œuvre classique de ce programme utilise une représentation numérique de chaque forme Ω^n par un *maillage* \mathcal{T}^n , i.e. un recouvrement de Ω^n par des triangles en dimension 2, ou des tétraèdres en dimension 3.

Alors, les EDP caractérisant u_{Ω^n} et p_{Ω^n} peuvent être résolues par la méthode des éléments finis et le calcul numérique d'une direction de descente θ^n s'en déduit.

Malheureusement, ce choix de représentation rend la mise à jour de la forme Ω^n vers Ω^{n+1} très difficile à réaliser. En effet, les techniques de déformation d'un maillage suivant un champ de vecteurs échouent notamment à produire un maillage de bonne qualité (i.e. dont les éléments sont proches d'être équilatéraux), à commencer par la plus naïve d'entre elles, qui consiste à déplacer chaque sommet tout en maintenant les connectivités du maillage, voir la Figure 9. Cette limitation est particulièrement flagrante dans le cas où le mouvement de la forme implique un changement de sa topologie, par exemple une fusion de deux trous.

Ainsi, le choix d'une représentation maillée de la forme pour réaliser l'algorithme de gradient ci-dessus est à réserver lorsque de petites variations de la forme sont attendues.

En général, la résolution numérique des problèmes d'optimisation de formes est minée par la nécessité de représenter la forme optimisée Ω d'une manière qui se prête à la fois au calcul par éléments finis et au suivi robuste de ses déformations. Cette difficulté a conduit les numériciens à se tourner vers d'autres manières de décrire la forme.

Remarque 4.3. *Tous les algorithmes reposant sur le canevas ci-dessus sont intrinsèquement destinés à converger vers l'un des nombreux minima locaux de $J(\Omega)$.*

5. DEUX IDÉES RÉCENTES

Nous présentons maintenant la méthode des *lignes de niveaux* (ou méthode “level set” dans la littérature anglo-saxonne) pour l'optimisation de formes ainsi que l'une de ses variantes, comme deux moyens plus robustes de décrire la forme et son évolution au cours de l'optimisation.

5.1. Digression autour de la méthode des lignes de niveaux

La méthode des lignes de niveaux, introduite dans l'article [12], est un paradigme très général pour décrire l'évolution d'une forme, aussi bien d'un point de vue théorique que pratique. Elle repose sur une description implicite d'un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, comme le sous-ensemble négatif d'une fonction “level set” $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$:

$$(LS) \quad \begin{cases} \phi(x) < 0 & \text{si } x \in \Omega, \\ \phi(x) = 0 & \text{si } x \in \partial\Omega, \\ \phi(x) > 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

voir la Figure 12 (b) pour une illustration.

Cette représentation est idéale lorsqu'il s'agit de suivre l'évolution d'un domaine $\Omega(t)$, évoluant sur un intervalle de temps $(0, T)$ sous l'effet d'un champ de vitesse $V(t, x)$. Soit en effet $\phi(t, \cdot) : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction

La méthode des éléments finis

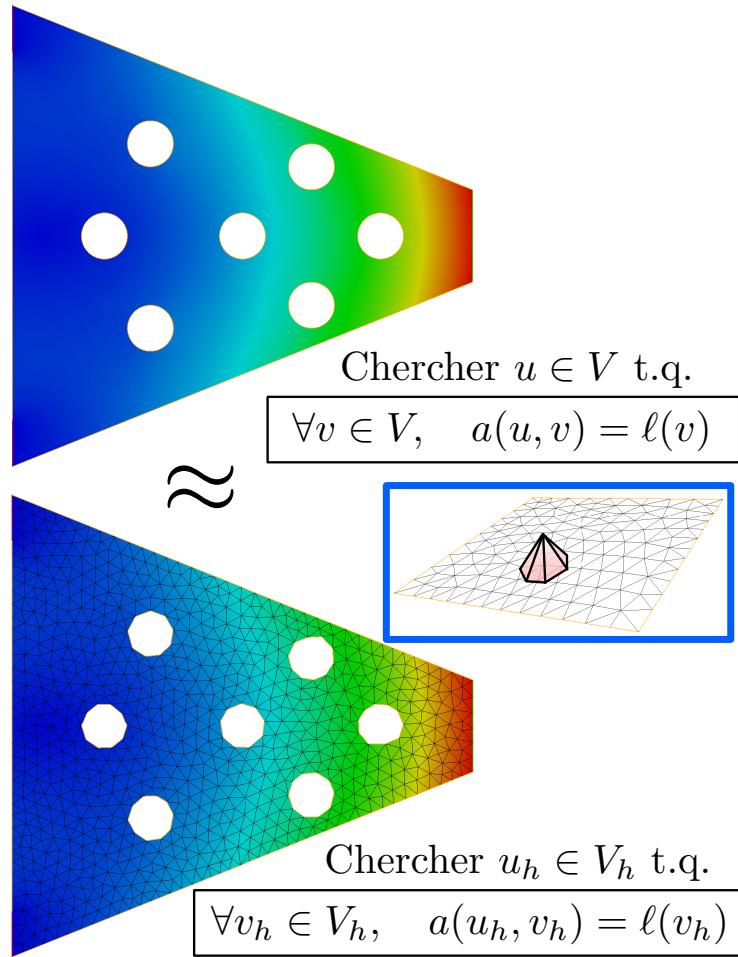


FIGURE 8. La méthode des éléments finis discrétise une EDP en restreignant sa formulation variationnelle à un espace de dimension finie V_h dont les fonctions de base sont définies grâce à un maillage de la forme. La précision du résultat dépend fortement de la qualité des éléments du maillage.

level set associée à $\Omega(t)$, i.e. (LS) a lieu à chaque instant t ; on montre que ϕ satisfait l'équation d'advection suivante :

$$(ADV) \quad \begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) + V(t, x) \cdot \nabla \phi(t, x) = 0, & t \in (0, T), \quad x \in \mathbb{R}^d \\ \phi(0, x) = \phi_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

où ϕ_0 est une fonction level set pour $\Omega(0)$.

L'utilisation pratique de cette idée fait intervenir un “grand” domaine de calcul D qui joue le rôle de l'espace infini \mathbb{R}^d ; celui-ci est muni d'un maillage \mathcal{T} fixé une fois pour toutes. Chaque forme $\Omega(t)$ est représentée par une fonction level set $\phi(t, \cdot)$, discrétisée par la donnée de ses valeurs aux sommets de \mathcal{T} , et l'équation (ADV) régissant l'évolution de ϕ est résolue par un schéma numérique adapté.

Ainsi, la méthode des lignes de niveaux convertit le suivi de l'évolution d'une forme $\Omega(t)$, qui peut être très complexe (et même présenter des changements de topologie), en la résolution d'une EDP – une tâche plus familière, qui peut être réalisée de manière robuste.

Mise à jour d'une forme par déplacement des sommets de son maillage

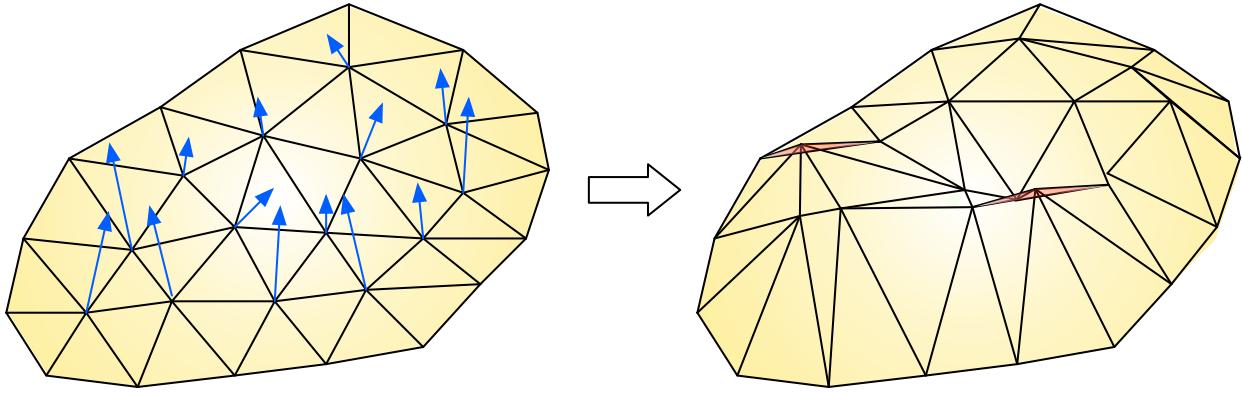


FIGURE 9. *Déplacer les sommets d'un maillage par un champ de vecteurs conduit souvent à un maillage de très mauvaise qualité, voire invalide (éléments qui s'intersectent, en rouge).*

5.2. Application de la méthode des lignes de niveaux en optimisation de formes

La méthode des lignes de niveaux a été introduite dans le contexte de l'optimisation de formes dans l'article [4].

Le processus d'optimisation emprunte les grandes lignes de la stratégie décrite dans la Section 4.3 pour résoudre le problème (\mathcal{P}) . À chaque itération $n = 0, \dots$, la forme Ω^n est représentée par la donnée d'une fonction $\phi^n : D \rightarrow \mathbb{R}$, définie aux sommets d'un maillage fixe \mathcal{T} du domaine de calcul D . Ainsi, comme nous l'avons vu, dès qu'une direction de descente θ^n pour le problème d'optimisation (\mathcal{P}) est connue, il est possible de rendre compte du mouvement de la forme $\Omega^n \rightarrow \Omega^{n+1}$, en résolvant l'équation d'advection (ADV) sur le maillage \mathcal{T} , avec le champ de vitesse $V(t, x) = \theta^n(x)$, l'état initial $\phi_0 = \phi^n$ et le temps final $T = \tau^n$.

La difficulté posée par ce cadre de travail est que l'on ne dispose à aucun moment d'un maillage de Ω^n , de sorte que l'on ne peut pas immédiatement utiliser la méthode des éléments finis pour calculer les quantités $u_{\Omega^n}, p_{\Omega^n}$, et donc θ^n .

Heureusement, plusieurs alternatives existent. On peut en particulier utiliser une méthode de "domaine fictif", et approcher les EDP pour u_{Ω^n} et p_{Ω^n} par des équations posées sur le domaine de calcul D entier. Par exemple, dans le contexte de l'optimisation structurale, le système de l'élasticité linéaire (ELAS), posé sur la forme $\Omega \subset D$, peut être remplacé par une version de (ELAS) posée sur D entier, où le vide $D \setminus \Omega$ est rempli par un matériau "ersatz" très mou, de loi de Hooke εA , $\varepsilon \ll 1$.

La méthode des lignes de niveaux est une méthode robuste pour décrire des variations arbitraires de la forme au cours de son optimisation. Elle a été appliquée avec succès dans les contextes de la mécanique des structures et des fluides, de la nanophotonique, etc., voir les Figures 10 et 11.

L'inconvénient principal de cette méthode est la nécessité d'approcher les EDP pour u_Ω et p_Ω . Si cette tâche peut être menée avec une précision acceptable dans certains contextes physiques tels que celui de l'élasticité, elle s'avère par exemple nettement plus ardue dans le cas de systèmes figurant une interaction fluide-structure.

5.3. Combiner la méthode des lignes de niveaux avec des algorithmes de remaillage

Dans cette partie, nous décrivons brièvement une variante récente de la méthode des lignes de niveaux pour l'optimisation de formes, introduite dans l'article [3] afin de pallier le besoin d'approcher les EDP associées aux quantités physiques u_Ω et p_Ω .

Comme dans la section précédente, on introduit un domaine de calcul D fixé qui contient toutes les formes Ω^n produites au cours de l'optimisation. Cette fois-ci cependant, le maillage \mathcal{T}^n de D change à chaque itération, de telle sorte que la forme Ω^n est explicitement discrétisée, comme un sous-maillage $\mathcal{T}_{\text{int}}^n$ de \mathcal{T}^n . Ainsi, à chaque itération $n = 0, \dots$, deux représentations complémentaires de Ω^n sont disponibles :

Optimisation d'une console élastique par la méthode des lignes de niveaux

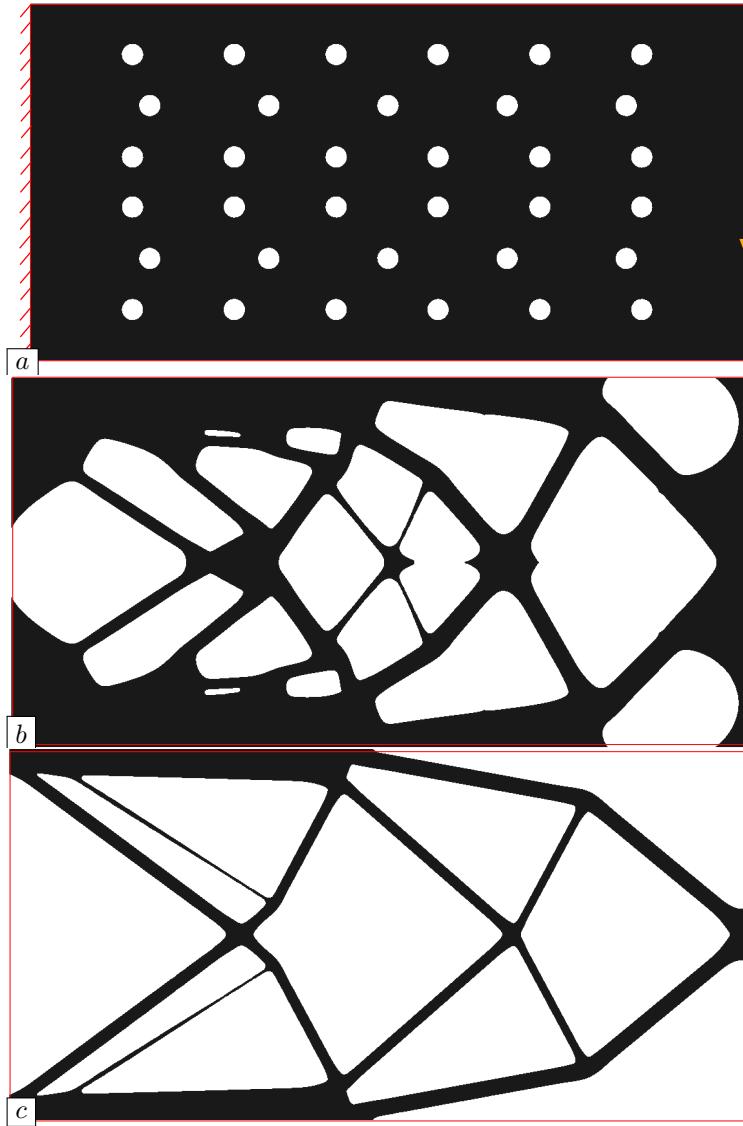


FIGURE 10. *Optimisation de la forme d'une poutre cantilever au regard de sa compliance. La forme est attachée sur sa gauche, soumise à une force verticale sur une partie de son bord droit, et on impose une contrainte de volume ; (a) forme initiale ; (b) une forme intermédiaire ; (c) forme optimisée. Seul le sous-domaine négatif de la fonction level set associée à la forme (définie sur le maillage de calcul de D qui n'est pas représentée) est affiché, en noir.*

- Une représentation par une fonction level set $\phi^n : D \rightarrow \mathbb{R}$, discrétisée aux sommets du maillage total \mathcal{T}^n du domaine de calcul D ;
- Une représentation par le sous-maillage $\mathcal{T}_{\text{int}}^n$ de \mathcal{T} ;

celles-ci sont illustrées sur la Figure 12.

On utilise alors l'une ou l'autre de ces représentations selon son adéquation avec chaque étape de l'algorithme de gradient de forme de la Section 4.3. Les EDP pour u_{Ω^n} et p_{Ω^n} sont résolues par la méthode des éléments finis sur le maillage exact $\mathcal{T}_{\text{int}}^n$ de Ω^n , tandis que la mise à jour de Ω^n vers $\Omega^{n+1} = (\text{Id} + \tau^n \theta^n)(\Omega^n)$ repose sur la méthode des lignes de niveaux, pratiquée sur le maillage \mathcal{T}^n du domaine de calcul D .

Optimisation de dispositifs nanophotoniques (d'après [9])

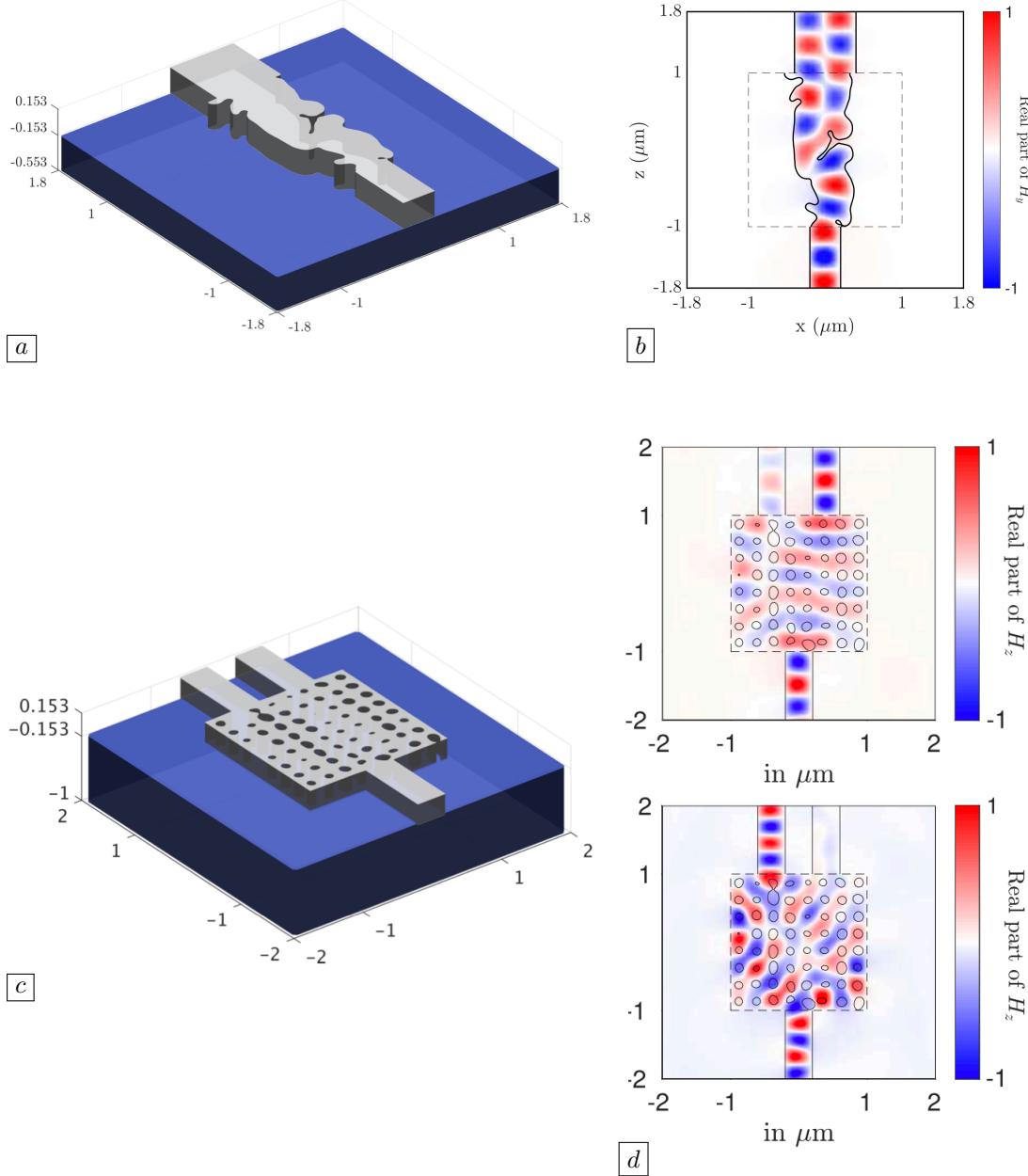


FIGURE 11. (a) Forme optimisée d'un convertisseur de modes électromagnétiques ; (b) intensité du champ magnétique associé ; (c) forme optimisée d'un diplexeur, distribuant l'énergie d'ondes de fréquences différentes dans des canaux de sortie distincts.

Cette stratégie repose de manière cruciale sur des algorithmes efficaces permettant de passer d'une représentation à l'autre. Plus précisément, elle utilise

- Un algorithme de calcul d'une fonction level set $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ associée à un domaine Ω aux sommets d'un maillage \mathcal{T} du domaine D ;
- Un algorithme qui, à partir d'un maillage \mathcal{T} de D et d'une fonction level set $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ pour une forme $\Omega \subset D$, donnée aux sommets de \mathcal{T} , crée un nouveau maillage $\tilde{\mathcal{T}}$ de D dans lequel Ω est explicitement discréte, par un sous-maillage $\tilde{\mathcal{T}}_{\text{int}}$.

Les méthodes des lignes de niveaux pour l'optimisation de formes

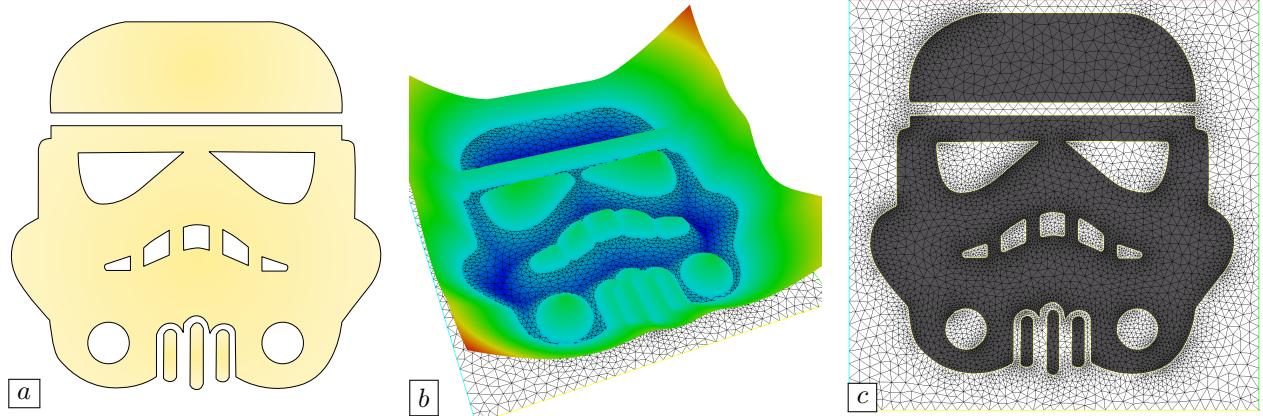


FIGURE 12. La forme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ en (a) peut être décrite comme le sous-ensemble négatif d'une fonction $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}$ (b) ou bien comme un sous-maillage T_{int} (composé des triangles en noir) du maillage T du domaine de calcul D (c).

Optimisation de formes en conduction thermique par la variante de la méthode des lignes de niveaux utilisant du remaillage (d'après [6])

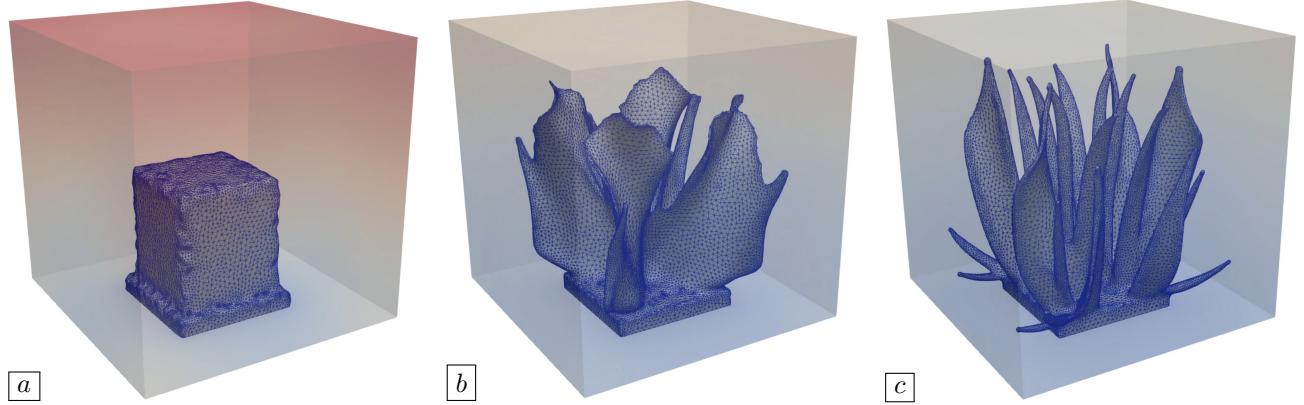


FIGURE 13. Une enceinte cubique D est chauffée uniformément, et reliée sur la face inférieure à un puit de chaleur. On optimise la répartition d'un bon (coûteux) et d'un mauvais (peu coûteux) matériaux conducteur thermiques pour minimiser la température moyenne au sein de D , avec une contrainte sur le volume de bon conducteur ; (a) forme initiale, (b) forme intermédiaire, et (c) forme optimisée.

Au prix d'un surcroît de technicité dans la mise en œuvre numérique, elle permet de rendre compte de variations très importantes de la forme (y compris des changements de sa topologie), tout en jouissant de la précision numérique garantie par des calculs mécaniques menés sur des maillages exacts des formes en jeu.

Deux exemples d'application de cette stratégie sont présentés sur les Figures 13 et 14, dans les contextes physiques de la conduction thermique et de l'interaction fluide-structure.

6. PERSPECTIVES

Les techniques numériques d'optimisation de formes, dont nous avons seulement évoqué une petite partie, sont aujourd'hui relativement matures. La diversification et l'intensification de leur utilisation, dans les contextes académique comme industriel, s'accompagnent de nombreux défis. Notamment, des efforts substantiels sont consentis en vue d'utiliser ces méthodes dans des contextes physiques toujours plus réalistes

Optimisation de la compliance d'un obstacle s'opposant à l'écoulement d'un fluide sous une contrainte de volume (d'après [6])

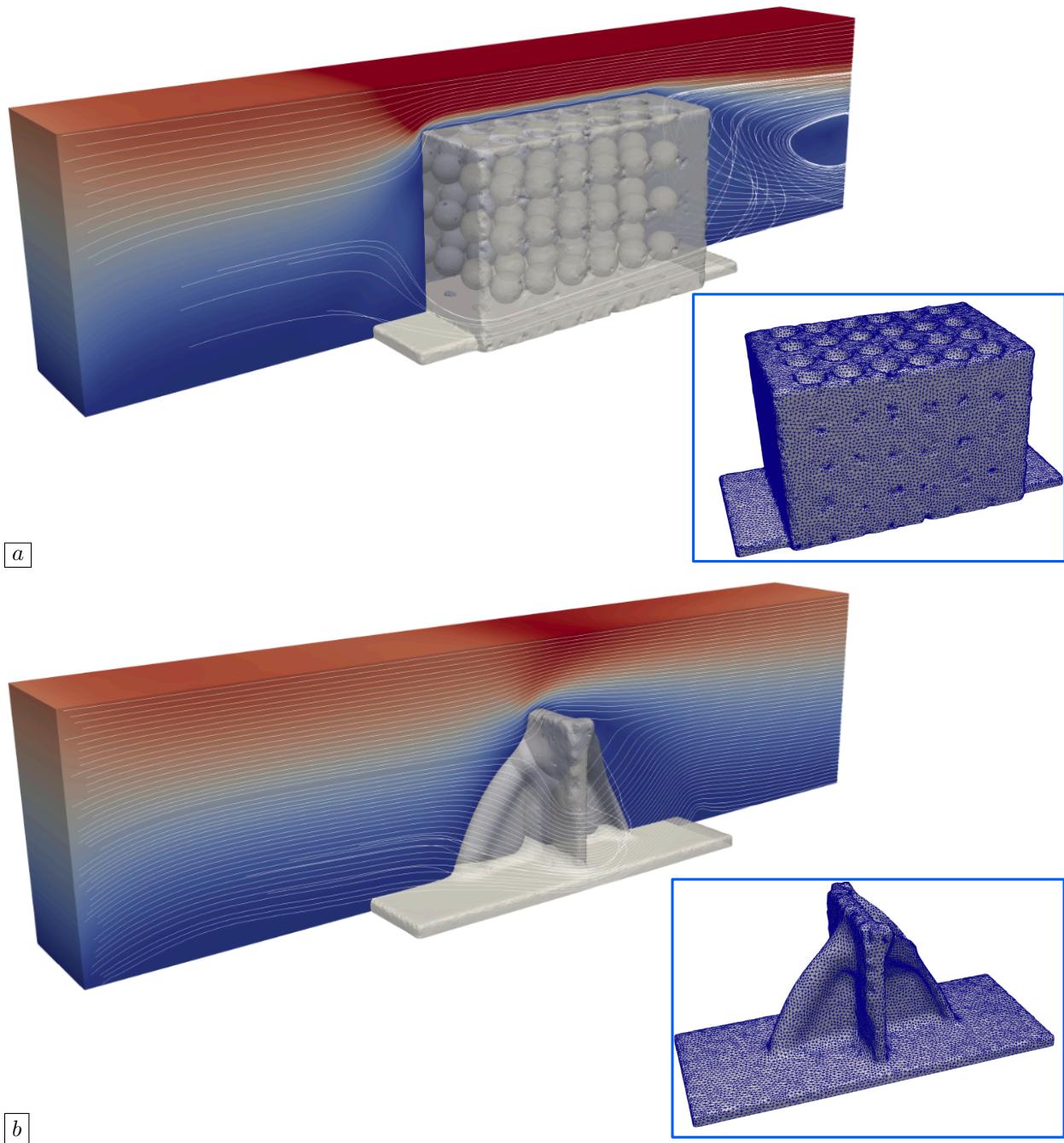


FIGURE 14. (a) Forme initiale, (b) forme optimisée.

et complexes (tels que ceux de l'interaction fluide-structure, de la mécanique de la rupture, etc.). D'autre part, la sensibilité du caractère optimal d'une forme aux données physiques de la situation en jeu (dans le cas de la mécanique des structures, les efforts appliqués ou les propriétés des matériaux) soulève le besoin d'optimiser les formes de manière robuste par rapport aux incertitudes qui pèsent sur celles-ci. Enfin, on a longtemps reproché à l'optimisation de formes de prédire des designs à la géométrie trop complexe pour

les procédés d'assemblage traditionnels (fonderie, fraisage, ...). L'avènement des techniques de fabrication additive (ou impression 3d), qui s'accommodeent de géométries à la complexité inédite, promet de lever ce verrou ; néanmoins, ces techniques de construction imposent en retour de nouvelles contraintes sur les structures assemblées, qu'il est essentiel de comprendre et de modéliser.



Charles Dapogny

CNRS et Laboratoire Jean Kuntzmann (Université Grenoble-Alpes)
charles.dapogny@univ-grenoble-alpes.fr

Charles Dapogny est chargé de recherche au CNRS, affilié au Laboratoire Jean Kuntzmann de Grenoble. Sa recherche s'articule autour de l'optimisation de formes, notamment sous ses aspects numériques, et de l'analyse asymptotique des équations aux dérivées partielles.

Remerciements. L'auteur remercie chaleureusement Blanche Buet, Dorian le Peutrec et Magali Ribot pour leur relecture attentive et leurs conseils avisés.

REFERENCES

- [1] *Kreuzschnabel*, <https://commons.wikimedia.org/wiki/>.
- [2] *Soapbubbledk*, <https://www.soapbubble.dk/en/articles/former>.
- [3] G. ALLAIRE, C. DAPOGNY, AND P. FREY, *Shape optimization with a level set based mesh evolution method*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 282 (2014), pp. 22–53.
- [4] G. ALLAIRE, F. JOUVE, AND A.-M. TOADER, *Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method*, Journal of computational physics, 194 (2004), pp. 363–393.
- [5] M. P. BENDSOE AND O. SIGMUND, *Topology optimization: theory, methods, and applications*, Springer Science & Business Media, 2013.
- [6] F. FEPPON, G. ALLAIRE, C. DAPOGNY, AND P. JOLIVET, *Topology optimization of thermal fluid–structure systems using body-fitted meshes and parallel computing*, Journal of Computational Physics, (2020), p. 109574.
- [7] P. GEOFFROY-DONDERS, G. ALLAIRE, G. MICHAELIDIS, AND O. PANTZ, *Coupled optimization of macroscopic structures and lattice infill*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 123 (2022), pp. 2963–2985.
- [8] J. HADAMARD, *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées*, vol. 33, Imprimerie nationale, 1908.
- [9] N. LEBBE, C. DAPOGNY, E. OUDET, K. HASSAN, AND A. GLIERE, *Robust shape and topology optimization of nanophotonic devices using the level set method*, Journal of Computational Physics, 395 (2019), pp. 710–746.
- [10] J.-L. LIONS, *Optimal control of systems governed by partial differential equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, 1971.
- [11] F. MURAT AND J. SIMON, *Sur le contrôle par un domaine géométrique*, Pré-publication du Laboratoire d'Analyse Numérique,(76015), (1976).
- [12] S. OSHER AND J. A. SETHIAN, *Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on hamilton-jacobi formulations*, Journal of computational physics, 79 (1988), pp. 12–49.
- [13] R.-E. PLESSIX, *A review of the adjoint-state method for computing the gradient of a functional with geophysical applications*, Geophysical Journal International, 167 (2006), pp. 495–503.
- [14] G. PÓLYA AND G. SZEGÖ, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics.(am-27), volume 27*, in Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics.(AM-27), Volume 27, Princeton University Press, 2016.
- [15] J. W. S. B. RAYLEIGH, *The theory of sound*, vol. 2, Macmillan, 1896.