

MATHE 12/13

Frederik Höft Lennard Rizkallah

February 5, 2019

Contents

I	ANALYSIS	7
1	Infinitesimalrechnung	7
1.1	Differentialrechnung	7
1.1.1	Ableitungsregeln	7
1.2	Integralrechnung	9
1.2.1	1. Sonderfall: $x_{min} = 0$	9
1.2.2	2. Sonderfall: Nullstellen	10
1.3	Rotationsvolumen	11
2	Kurvendiskussionen	12
2.1	Symmetrie	12
2.1.1	Achsensymmetrie	12
2.1.2	Punktsymmetrie	12
2.2	Verhalten im Unendlichen	12
2.3	Schnittpunkt mit der Y - Achse	12
2.4	Nullstellen	12
2.4.1	PQ - Formel	12
2.4.2	CAS	12
2.5	Extremstellen	13
2.5.1	Extrempunkt	13
2.6	Wendestellen	13
2.6.1	Wendepunkt	13
3	Biegelinien	14
3.1	Wichtige Variablen	14
3.2	Mathematischer Ansatz & Beispiel	15
4	Wachstumsfunktionen	16
4.1	Wachstum und Zerfall	16
4.1.1	Bestand $f(t)$	16
4.1.2	Wachstumsfaktor c	16
4.1.3	Wachstumskonstante k	16
4.1.4	Verdopplungszeit	17
4.1.5	Halbierungszeit	17
4.1.6	Wachstumsgeschwindigkeit	17
5	e - Funktionen	18

II	VEKTOREN	19
6	Ortsvektoren	19
7	Addition und Subtraktion	19
8	Multiplikation	19
8.1	Multiplikation mit einem Skalar	19
8.2	Skalarprodukt	19
9	Betrag (Länge) eines Vektors	19
10	Vektor durch zwei Punkte	20
11	Orthogonalitätsbedingung	20
12	Winkel zwischen zwei Vektoren	20
12.1	Mathematischer Ansatz	20
12.2	CAS	20
13	Abstand windschiefer Geraden	21
13.1	Mathematischer Ansatz	21
13.2	CAS	21
14	Kreuzprodukt und Normalenvektor	22
15	Ebenen	22
15.1	Parameterform	22
15.2	Normalenform	22
15.3	Koordinatenform	22
15.4	Achsenabschnittsform	23
15.5	Umformen von Ebenengleichungen	23
15.5.1	Koordinatenform in Parameterform	23
15.5.2	Parameterform in Normalenform	24
16	Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene	24
16.1	1. Fall: Parallel	24
16.2	2. Fall: Schnittpunkt	24
16.3	3. Fall: Identisch	25
16.4	CAS	25
17	Lagebeziehung zwischen Punkt und Ebene	26
17.1	CAS	26

18 Winkel zwischen Gerade und Ebene	26
19 Flächenberechnung von Ebenen	27
19.1 Fläche eines Parallelogramms	27
19.2 Fläche eines Quadrates	27
19.3 Fläche eines Dreiecks	27
19.4 Fläche eines beliebigen Vierecks	27
20 Schnittpunkte von Ebene und Koordinatenachsen	28
21 Schnittgerade zwischen zwei Ebenen	28
21.1 Parameterform	28
21.1.1 CAS	29
21.2 Koordinatenform	29
22 Winkel zwischen zwei Ebenen	30
23 Spatvolumen	30
23.1 Grundfläche entspricht Parallelogramm	30
23.2 Volumen einer Pyramide	30
23.3 Volumen eines Tetraeders	30
24 CAS Commands	31
24.1 dotP	31
24.2 norm	31
24.3 crossP	31
III STOCHASTIK	32
24.4 Definitionen	32
24.4.1 statistische Erhebungen	32
24.4.2 Merkmalsträger	32
24.4.3 Merkmal	32
24.4.4 Grundgesamtheit	32
24.4.5 Stichprobe	32
24.4.6 Stichprobenumfang	32
24.4.7 Urliste	32
24.4.8 Stichprobenwert	32
24.4.9 qualitative Merkmale	32
24.4.10 quantitative Merkmale	33
24.4.11 absolute Häufigkeit $\left(H(ai)\right)$	33

24.4.12 relative Häufigkeit $(h(ai))$	33
24.4.13 Häufigkeitstabelle / Häufigkeitsverteilung	33
24.4.14 Klasseneinteilung	33
24.4.15 Histogramm	33
24.4.16 Häufigkeitspolygon	33
24.4.17 Summenpolygon	33
24.4.18 Spannweite R	33
24.4.19 Standardabweichung σx	33
25 REGRESSION	34
25.1 Korrelation r	34
25.2 Aufgaben zur Regression	34
25.2.1 Aufgabe 3	34
25.2.2 Nicht-lineare Regression	35
26 WAHRSCHEINLICHKEITEN	36
26.1 Definitionen	36
26.1.1 Ergebnismenge S	36
26.1.2 Laplace-Versuche	36
26.1.3 Nicht-Laplace-Versuche	36
26.1.4 Wahrscheinlichkeit P	36
26.1.5 Ereignis	36
26.1.6 unmögliches Ereignis	36
26.1.7 sicheres Ereignis	36
26.1.8 Inverses Baumdiagramm	37
26.1.9 Totale Wahrscheinlichkeit	37
26.1.10 Bedingte Wahrscheinlichkeit / Häufigkeit	37
26.2 Beispiele	37
27 Von der Gesamtheit auf die Stichprobe	45
28 Von der Stichprobe auf die Gesamtheit	47
29 n unbekannt	49
30 Wahl eines Stichprobenumfangs	50
30.1 1. Möglichkeit	50
30.2 2. Möglichkeit	50
31 Normalverteilungen	51
32 Normalverteilte Zufallsgrößen	53

33 σ - Regeln Erweiterung: Berechnung von c - Werten	53
34 CAS Commands	54
34.1 nCr	54
34.2 binompdf	54
34.3 binomcdf	54
34.4 nsolve	55
34.5 normpdf	55
34.6 normcdf	55
34.7 invnorm	56

Part I

ANALYSIS

1 Infinitesimalrechnung

1.1 Differentialrechnung

Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ beschreibt den Verlauf der Steigung von $f(x)$.

1.1.1 Ableitungsregeln

Für $\{a, b, n\} \in \mathbb{R}$ und $\{g, h\}$ als Variable gilt:

- Konstante Funktion

$$(a)' = 0$$

- Faktorregel

$$(a \cdot g)' = a \cdot g'$$

- Summenregel

$$(h \pm g)' = g' \pm h'$$

- Produktregel

$$(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$$

- Quotientenregel

$$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$$

- Reziprokenregel

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

- Potenzregel

$$(g^n)' = n \cdot g^{n-1}$$

- Kettenregel

$(g \circ h)'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ wobei $g'(x)$ die äußere und $h'(x)$ die innere Ableitung ist.

Beispiel:

Gegeben sei $f(x) = (x^3 + 1)^2$, was sich als Verkettung von

$$g(h) = h^2$$

mit der Funktion

$$h(x) = x^3 + 1$$

darstellen lässt, da gilt $f(x) = g(h(x))$, also $f = g \circ h$. Somit ergibt sich:

$$g'(h) = 2h$$

sowie

$$h'(x) = 3x^2$$

Da $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ ergibt sich

$$f'(x) = 2(x^3 + 1) \cdot 3x^2$$

1.2 Integralrechnung

Die Aufleitung $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ beschreibt die Fläche unter der Funktion $F(x)$. Um die Fläche von x_{min} bis x_{max} unter der Funktion $f(x)$ zu bestimmen, berechnet man:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) \, dx = F(x_{max}) - F(x_{min}) = [F(x)]_{x_{min}}^{x_{max}}$$

Beispiel:

Gegeben sei $f(x) = 2x^3 + 4x + 2$, $x_{min} = 1$ und $x_{max} = 5$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 4x + 2 \\ \int_1^5 f(x) \, dx &= F(5) - F(1) \\ \int_1^5 f(x) \, dx &= \left[\frac{2}{4}x^4 + 2x^2 + 2x \right]_1^5 \\ \int_1^5 f(x) \, dx &= \left(\frac{2}{4} \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 \right) - \left(\frac{2}{4} \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \right) \quad (1) \\ \int_1^5 f(x) \, dx &= 372.5 - 4.5 \\ \int_1^5 f(x) \, dx &= \underline{\underline{368}} \end{aligned}$$

1.2.1 1. Sonderfall: $x_{min} = 0$

Wenn $x_{min} = 0$ ist, dann ist $F(x_{min}) = 0$, deshalb kann die Untergrenze vernachlässigt werden. Gegeben sei $f(x) = 2x^3 + 4x + 2$, $x_{min} = 0$ und $x_{max} = 5$.

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 4x + 2 \\ \int_0^5 f(x) \, dx &= F(5) - F(0) \\ \int_0^5 f(x) \, dx &= \left[\frac{2}{4}x^4 + 2x^2 + 2x \right]_0^5 \\ \int_0^5 f(x) \, dx &= \left(\frac{2}{4} \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 \right) - 0 \\ \int_0^5 f(x) \, dx &= \underline{\underline{372.5}} \quad (2) \end{aligned}$$

1.2.2 2. Sonderfall: Nullstellen

Befindet sich eine oder mehrere Nullstelle(n) zwischen x_{min} und x_{max} , so muss die Fläche an diesen geteilt und deren Beträge anschließend aufsummiert werden, da es sich bei dem Abschnitt, bei dem gilt $f(x) < 0$, sonst um eine "negative Fläche" handeln würde. Bei einer Funktion $f(x) = x^3 + 1$ mit einer Nullstelle x_0 bei $x = 1$ müssen die Ober und Untergrenzen zur bestimmung der Intervals von $x_{min} = -1$ bis $x_{max} = 5$ wie folgt gelegt werden:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 + 1 \\
 \int_{-1}^5 f(x) \, dx &= \left| \int_{-1}^1 f(x) \, dx \right| + \left| \int_1^5 f(x) \, dx \right| \\
 \int_{-1}^5 f(x) \, dx &= |F(1) - F(-1)| + |F(5) - F(1)| \\
 \int_{-1}^5 f(x) \, dx &= \left| \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_{-1}^1 \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_1^5 \right| \\
 \int_{-1}^5 f(x) \, dx &= \left| \left(\frac{1^4}{4} + 1 \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} + (-1) \right) \right| + \quad (3) \\
 &\quad \left| \left(\frac{5^4}{4} + 5 \right) - \left(\frac{1^4}{4} + 1 \right) \right| \\
 \int_{-1}^5 f(x) \, dx &= \left| 1.25 - (-1.25) \right| + \left| 161.25 - 1.25 \right| \\
 \int_{-1}^5 f(x) \, dx &= \underline{\underline{162.5}}
 \end{aligned}$$

1.3 Rotationsvolumen

Beim Rotationsvolumen werden die Grundregel der Integralrechnungen benötigt. Das am Ende berechnete Volumen ist das der Funktion, welche entweder um die x-Achse oder die y-Achse rotiert wurde. Die folgende Formel ist Grundlage für die Berechnung:

$$V = \pi \cdot \int_a^z (f(x))^2 dx$$

Mit dieser Formel zur Hand können wir eine Funktion $f(x)$ untersuchen. Zum Zweck der Berechnung benutzen wir einen Halbkreis, dessen Funktion $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ist. Zum Zwecke der Berechnung gehen wir des weiteren davon aus (da diese bereits berechnet wurden), dass die Nullstellen der Funktion 3 und -3 sind.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{9 - x^2} \\ V &= \pi \cdot \int_{-3}^3 (f(x))^2 dx \\ V &= \pi \cdot \int_{-3}^3 (\sqrt{9 - x^2})^2 dx \\ V &= \pi \cdot \int_{-3}^3 (9 - x^2) dx \\ V &= \pi \cdot \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^3 \\ V &= \pi \cdot \left[\left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left(9 \cdot -3 - \frac{(-3)^3}{3} \right) \right] \\ V &= \pi \cdot \left[\left(27 - \frac{27}{3} \right) - \left(-27 - \frac{-27}{3} \right) \right] \\ V &= \pi \cdot [(27 - 9) - (-27 + 9)] \\ V &= \pi \cdot [18 + 18] = \underline{\underline{36\pi}} \end{aligned} \tag{4}$$

2 Kurvendiskussionen

Die Funktion $f(x)$ soll untersucht werden.

2.1 Symmetrie

2.1.1 Achsensymmetrie

Achsensymmetrie ist vorhanden wenn gilt:

$$f(x) = f(-x)$$

2.1.2 Punktsymmetrie

Punktsymmetrie ist vorhanden wenn gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

2.2 Verhalten im Unendlichen

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

2.3 Schnittpunkt mit der Y - Achse

Für den Schnittpunkt mit der Y - Achse gilt:

$$S_y = f(0)$$

2.4 Nullstellen

2.4.1 PQ - Formel

Gegeben sei $f(x) = x^2 - px - q$.

Es gilt:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

2.4.2 CAS

$$\text{solve}(f(x) = 0, x)$$

2.5 Extremstellen

Die Extremstellen von $f(x)$ entsprechen den Nullstellen von $f'(x)$.
Wobei gilt:

- wenn $f''(x_0) < 0$, so handelt es sich um einen Hochpunkt.
- wenn $f''(x_0) > 0$, so handelt es sich um einen Tiefpunkt.

2.5.1 Extrempunkt

$$P_{Ex} = (f''(x_0) | f(f''(x_0)))$$

2.6 Wendestellen

Die Extremstellen von $f(x)$ entsprechen den Nullstellen von $f''(x)$.
Wobei gilt:

- wenn $f'''(x_0) < 0$, so handelt es sich um einen Links - Rechts - Wendepunkt.
- wenn $f'''(x_0) > 0$, so handelt es sich um einen Rechts - Links - Wendepunkt.

2.6.1 Wendepunkt

$$P_W = (f'''(x_0) | f(f'''(x_0)))$$

3 Biegelinien

3.1 Wichtige Variablen

- Elastizitätsmodul E :

Werkstoffspezifischer Wert in $\frac{N}{m^2}$

- Flächenträgheitsmoment I : Formspezifischer Wert in m^4
- Streckenlast $q(x)$:

$$\begin{aligned}w''''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} q(x) \\w''''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot q\end{aligned}\tag{5}$$

in Newton pro Meter $\frac{N}{m}$

- Querkraft $Q(x)$:

$$\begin{aligned}w'''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} - Q(x) \\w'''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot (qx + c_1)\end{aligned}\tag{6}$$

in Newton N

- Biegemoment $w''(x)$:

$$\begin{aligned}w''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} - M(x) \\w''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot (\frac{1}{2}qx^2 + c_1 \cdot x + c_2)\end{aligned}\tag{7}$$

in Newtonmeter Nm

- Steigung der Biegelinie $w'(x)$

$$w'(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (\frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3)$$

- Biegelinie $w(x)$

$$w(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{24} q x^4 + \frac{1}{6} c_1 x^3 + \frac{1}{6} c_2 x^2 + c_3 x + c_4 \right)$$

in Meter m

Table 1: Ermittlung der Integrationskonstanten

Art der Randbedingung	Biegung w	Steigung w'	Moment w''	Querkraft w'''
Festlager / Loslager	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$
Einspannung	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$

3.2 Mathematischer Ansatz & Beispiel

Gegeben sei ein Träger für den gilt:

$$\begin{aligned}E &= 200 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \\I &= \frac{1}{12}(B \cdot H^3 - b \cdot h^3) \\B &= 0.3 \\H &= 0.5 \\b &= 0.27 \\h &= 0.47 \\q(x) &= -8000 \frac{N}{m}\end{aligned} \tag{8}$$

Des Weiteren ist ein Festlager bei $x = 0$ und ein Loslager bei $x = 10$ bekannt. Es soll überprüft werden, ob das Biegemoment eines Trägers den Betrag von $150000Nm$ überschreitet. Es lassen sich folgende Bedingungen aufstellen:

$$\begin{aligned}w(0) &= 0 \\w''(0) &= 0 \Rightarrow \frac{1}{e \cdot I} \cdot c_2 \Rightarrow \underline{\underline{c_2 = 0}} \\w(10) &= 0 \\w''(10) &= 0 \Rightarrow \frac{1}{e \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (-8000) \cdot 10^2 + 10 \cdot c_1 = 0\right) \\0 &= -400000 + 10 \cdot c_1 \\c_1 &= 40000\end{aligned} \tag{9}$$

Somit ist das Biegemoment $-M(x) = -\frac{1}{2} \cdot 8000x^2 + 40000x$ bzw $M(x) = \frac{1}{2} \cdot 8000x^2 - 40000x$ bekannt. Um die x -Stelle des maximale Biegemoment zu bestimmen wird $M'(x) = 0$ gesetzt.

$$\begin{aligned}M'(x) &= 0 \\0 &= 8000x - 40000 \\x &= 5\end{aligned} \tag{10}$$

Somit ist uns bekannt, dass das maximale Biegemoment bei $x = 5$ vorliegt. Nun berechnen wir das Biegemoment an $x = 5$.

$$\begin{aligned}M(5) &= 4000 \cdot 5^2 - 40000 \cdot 5 \\M(5) &= -100000\end{aligned} \tag{11}$$

Somit hält der Träger, da

$$|-100000| < 150000$$

4 Wachstumsfunktionen

4.1 Wachstum und Zerfall

Generell gilt $f(t) = a \cdot c^t = a \cdot e^{k \cdot t}$

4.1.1 Bestand $f(t)$

Der Bestand ist definiert als

$$f(t) = a \cdot c^t$$

wobei c definiert ist als:

$$c = e^k$$

4.1.2 Wachstumsfaktor c

4.1.3 Wachstumskonstante k

Es gilt:

$$k = \ln(c)$$

Bei Wachstum gilt $k > 0$ und bei Zerfall $k < 0$

4.1.4 Verdopplungszeit

Für die Verdopplungszeit t_v gilt:

$$t_v = \frac{\ln(2)}{k}$$

4.1.5 Halbierungszeit

Für die Halbierungszeit t_h gilt:

$$t_h = \frac{\ln(0.5)}{k}$$

4.1.6 Wachstumsgeschwindigkeit

Die Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t entspricht der Ableitung der Wachstumsfunktion am Zeitpunkt t . Somit gilt:

$$\begin{aligned} f(t) &= a \cdot e^{k \cdot t} \\ f'(t) &= k \cdot a \cdot e^{k \cdot t} \end{aligned} \tag{12}$$

Also

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

5 e - Funktionen

Die Ableitung von e^x bleibt e^x .

Hat man also $f(x) = e^{2x}$, wird zu erst der Exponent betrachtet, als $2 \cdot x$, was sich zu 2 ableitet.

Diese 2 ist wird jetzt vor das e geschrieben, sodass sich für die Ableitung von $f(x) = e^{2x}$ $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$ ergibt.

Es folgen einige Beispiele:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot e^{\frac{1}{a} \cdot x^2} \\ f'(x) &= 2x \cdot e^{\frac{1}{a} \cdot x^2} \end{aligned} \tag{13}$$

Der Faktor a kürzt sich mit der Ableitung $\frac{2x}{a}$ des Exponenten weg.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x^2-3x} \\ f'(x) &= 4x - 3 \cdot e^{2x^2-3x} \end{aligned} \tag{14}$$

da die Ableitung des Exponenten zum Faktor für die Basis, also e^{\dots} wird.
Bezüglich Logarithmen gilt:

$$\ln(e^{2x}) = 2x$$

Part II

VEKTOREN

6 Ortsvektoren

Der Ortsvektor eines Punktes P geht vom Ursprung O nach P . Somit gilt $\vec{p} = \vec{OP}$.

7 Addition und Subtraktion

Es gilt:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

8 Multiplikation

8.1 Multiplikation mit einem Skalar

Wird ein Vektor \vec{v} mit einem Skalar r multipliziert, so wird jedes Element des Vektors mit dem Skalar multipliziert.

Es gilt:

$$r \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} r \cdot v_x \\ r \cdot v_y \\ r \cdot v_z \end{pmatrix}$$

8.2 Skalarprodukt

Werden zwei Vektoren multipliziert, so erhält man einen Skalar.

Es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

9 Betrag (Länge) eines Vektors

Es gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

10 Vektor durch zwei Punkte

Der Vektor \vec{AB} zwischen Punkt A und B lässt sich mit den Ortsvektoren \vec{a} und \vec{b} berechnen.

Es gilt:

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

11 Orthogonalitätsbedingung

Wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$, dann gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

also

$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0$$

12 Winkel zwischen zwei Vektoren

Der Winkel α zwischen den Vektoren \vec{a} und \vec{b} lässt sich wie folgt berechnen:

12.1 Mathematischer Ansatz

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

12.2 CAS

$$\arccos\left(\frac{\text{dotP}(a, b)}{\text{norm}(a) \cdot \text{norm}(b)}\right)$$

13 Abstand windschiefer Geraden

13.1 Mathematischer Ansatz

Der Abstand zweier Geraden $g : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ und $h : \vec{x} = \vec{v} + s \cdot \vec{w}$, wobei die Faktoren r und s unbekannt sind, lässt sich mit Hilfe des Vektorzuges ermitteln.

Für den Vektorzug \vec{d} , welcher einen Vektor zwischen den Geraden g und h bildet gilt:

$$\vec{d} = g - h$$

also:

$$\vec{d} = (\vec{a} + r \cdot \vec{b}) - (\vec{v} + s \cdot \vec{w})$$

Des Weiteren müssen die Richtungsvektoren \vec{b} und \vec{w} orthogonal zu \vec{d} sein.

Es gilt also:

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$

$$\vec{w} \cdot \vec{d} = 0$$

Somit lassen sich die 2 Gleichungen nach den beiden Unbekannten r und s auflösen. r und s werden nun in \vec{d} eingesetzt und $|\vec{d}|$ kann berechnet werden:

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

13.2 CAS

`solve(dotP(d, b) = 0, r)`, das Ergebnis für r einsetzen und

`solve(dotP(d, w) = 0, s)`.

Beides in d einsetzen.

`norm(d) → done`.

14 Kreuzprodukt und Normalenvektor

Der Normalenvektor \vec{n} steht senkrecht auf der Ebene E .

Wobei der Betrag $|\vec{n}|$ des Normalenvektors der Fläche der Ebene entspricht. Er lässt sich aus dem Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren von E berechnen. Somit gilt:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Des Weiteren lässt sich das Kreuzprodukt mit der *Zuhalteregel* (\rightarrow Internet) von Hand berechnen oder mit dem CAS:

$$\text{crossP}(a, b)$$

15 Ebenen

15.1 Parameterform

Die Parameterform definiert eine Ebene E mit drei Punkten A , B und C als:

$$E : \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC}$$

wobei \vec{x} als Abtastvektor, \vec{OA} als Hinführungsvektor und \vec{AB} , sowie \vec{AC} als Spannvektoren bezeichnet werden.

15.2 Normalenform

Die Normalenform definiert eine Ebene E mit einem Hinführungsvektor \vec{p} und dem Normalenvektor \vec{n} als:

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

15.3 Koordinatenform

Die Koordinatenform entspricht der ausmultiplizierten Normalenform. Es gilt:

$$x \cdot x_n + y \cdot y_n + z \cdot z_n = d$$

wobei d dem Skalarprodukt $\vec{p} \cdot \vec{n}$ aus der Normalenform entspricht.

15.4 Achsenabschnittsform

Die Achsenabschnittsform entspricht der durch d dividierten Koordinatenform.

$$\frac{1}{\frac{d}{x_n}} \cdot x + \frac{1}{\frac{d}{y_n}} \cdot y + \frac{1}{\frac{d}{z_n}} \cdot z = 1$$

was als

$$\frac{1}{x_s} \cdot x + \frac{1}{y_s} \cdot y + \frac{1}{z_s} \cdot z = 1$$

zusammengefasst werden kann.

15.5 Umformen von Ebenengleichungen

15.5.1 Koordinatenform in Parameterform

Gegeben ist die Ebenengleichung $E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$, die in die Parameterform umgewandelt werden soll.

Dazu wird zu erst durch Umformen der Gleichung eine Unbekannte eliminiert (z.B. $x = -\frac{b \cdot y}{a} - \frac{c \cdot z}{a} + \frac{d}{a}$).

Da die Parameterform aus Vektoren besteht, schreiben wir die drei Gleichungen für die x , y und z Koordinaten untereinander:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{a} \cdot y - \frac{c}{a} \cdot z + \frac{1}{a} \cdot d \\ y &= 1 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot d \\ z &= 0 \cdot y + 1 \cdot z + 0 \cdot d \end{aligned} \tag{15}$$

Als Vektor ergibt sich somit:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \cdot y \\ 1 \cdot y \\ 0 \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \cdot z \\ 0 \cdot z \\ 1 \cdot z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cdot d \\ 0 \cdot d \\ 0 \cdot d \end{pmatrix}$$

Ausmultipliziert:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cdot d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

15.5.2 Parameterform in Normalenform

Gegeben ist die Ebenengleichung $E : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$, die in die Normalenform umgewandelt werden soll.

Dies wird durch die Berechnung des Kreuzproduktes ermöglicht:

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

16 Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

→ Seite 260

Gegeben ist eine Gerade $g : \vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v}$ und eine Ebene $E : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$. Im Folgenden soll die Lagebeziehung von g und E überprüft werden.

16.1 1. Fall: Parallel

Um unnötige Rechnungen zu ersparen wird zu erst getestet, ob $g \parallel E$.

Wenn $g \parallel E$ ist, dann ist $g \perp \vec{n}$, dem Normalenvektor der Ebene.

Somit muss überprüft werden, ob $\vec{v} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

16.2 2. Fall: Schnittpunkt

1. Variante

Wenn es einen Schnittpunkt gibt, gilt $g = E$, also:

$$\vec{u} + t \cdot \vec{v} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$$

Nun werden die einzelnen x , y und z Werte betrachtet:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

woraus sich drei Gleichungen und drei Unbekannte ergeben:

$$\begin{aligned} u_x + t \cdot v_x &= a_x + r \cdot b_x + s \cdot c_x \\ u_y + t \cdot v_y &= a_y + r \cdot b_y + s \cdot c_y \\ u_z + t \cdot v_z &= a_z + r \cdot b_z + s \cdot c_z \end{aligned} \tag{16}$$

Nachdem nach t , r und s aufgelöst wurde, lässt sich t in g oder r und s in E einsetzen und es ergibt sich \vec{s} , beziehungsweise daraus folgend der Schnittpunkt S .

2. Variante

E wird in Koordinatenform umgewandelt. Dazu wird zuerst der Normalenvektor von E berechnet:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$$

Außerdem muss d berechnet werden:

$$d = \vec{n} \cdot \vec{a}$$

Daraus ergibt sich die Koordinatenform der Ebene:

$$x \cdot n_x + y \cdot n_y + z \cdot n_z = d$$

Nun wird g in die x , y und z Komponenten unterteilt. Es ergeben sich die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= u_x + t \cdot v_x \\ y &= u_y + t \cdot v_y \\ z &= u_z + t \cdot v_z \end{aligned} \tag{17}$$

welche nun in E eingesetzt werden:

$$(u_x + t \cdot v_x) \cdot n_x + (u_y + t \cdot v_y) \cdot n_y + (u_z + t \cdot v_z) \cdot n_z = d$$

Nun wird nach t aufgelöst und in g eingesetzt. g lässt sich anschließend als \vec{s} ausmultiplizieren, was dem Schnittpunkt S entspricht.

16.3 3. Fall: Identisch

Falls $g \in E$, so ergibt sich beim Berechnen des Schnittpunktes eine wahre Aussage.

Des Weiteren gilt $g \parallel E$, also $\vec{v} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

16.4 CAS

Das Gleichungssystem oben (2) lässt sich mit dem CAS wie folgt lösen:

menu \rightarrow 3 : Algebra \rightarrow 7 : Solve System of Equations \rightarrow 1 : Solve System of Equations...

Falls der CAS:

- eine Lösung findet, existiert ein Schnittpunkt.
- *false* zurückgibt, sind sie Parallel.
- *true* zurückgibt, ist $g \in E$.

17 Lagebeziehung zwischen Punkt und Ebene

Ähnlich wie bei der Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene, wird der Punkt P in einen Vektor \vec{p} umgewandelt und der Ebene E gleichgesetzt. Somit ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

woraus sich 3 Gleichungen und 2 Unbekannte ergeben:

$$\begin{aligned} p_x &= a_x + r \cdot b_x + s \cdot c_x \\ p_y &= a_y + r \cdot b_y + s \cdot c_y \\ p_z &= a_z + r \cdot b_z + s \cdot c_z \end{aligned} \tag{18}$$

Falls $P \in E$, dann lassen sich r und s berechnen.

Falls $P \notin E$, so ergibt sich eine widersprüchliche Aussage.

17.1 CAS

Falls der CAS:

- eine Lösung findet, gilt $P \in E$.
- keine Lösung findet, gilt $P \notin E$.

18 Winkel zwischen Gerade und Ebene

Der Winkel zwischen dem Richtungsvektor \vec{v} einer Gerade g und einer Ebene E wird mit Hilfe des Normalenvektors \vec{n} der Ebene berechnet. Für den Winkel α zwischen g und E gilt:

$$\alpha = 90 - \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

19 Flächenberechnung von Ebenen

19.1 Fläche eines Parallelogramms

Fläche eines Parallelogramms entspricht dem Betrag des Normalenvektors der Ebene.

Somit gilt:

$$A_{\square} = |\vec{n}|$$

beziehungsweise

$$A_{\square} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

19.2 Fläche eines Quadrates

Bei einem Quadrat kann diese Formel zu

$$A_{\square} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

vereinfacht werden, da $\vec{a} \perp \vec{b}$, weshalb $\alpha = 90^\circ$, sodass $\sin \alpha = 1$.

19.3 Fläche eines Dreiecks

Da ein Dreieck der halben Fläche eines Parallelogramms entspricht gilt:

$$A_{\triangle} = \frac{|\vec{n}|}{2}$$

beziehungsweise

$$A_{\triangle} = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha}{2}$$

19.4 Fläche eines beliebigen Vierecks

Um die Fläche eines beliebigen Vierecks zu berechnen, wird das Viereck in Dreiecke unterteilt, welche wie gewöhnlich berechnet und letztendlich aufsummiert werden.

Für ein Viereck mit den Punkten A , B , C und D gilt:

$$A = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} + \frac{|\vec{AC} \times \vec{AD}|}{2}$$

20 Schnittpunkte von Ebene und Koordinatenachsen

Gegeben sei eine Ebene mit der Ebenengleichung in Koordinatenform:

$$E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

Um den Schnittpunkt S_x mit der X-Achse zu errechnen, wird $y = 0$ und $z = 0$ gesetzt, sodass

$$a \cdot x = d$$

überbleibt und nach x umgeformt werden kann. Selbiges gilt zum Berechnen von S_y und S_z .

21 Schnittgerade zwischen zwei Ebenen

Gegeben sind zwei Ebenengleichungen in...

21.1 Parameterform

$$E_1 : \vec{x} = \vec{a} + q \cdot \vec{b} + r \cdot \vec{c}$$

$$E_2 : \vec{x} = \vec{u} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$$

Für die Schnittgerade g gilt $E_1 = E_2$, also:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

woraus sich drei Gleichungen und vier Unbekannte ergeben:

$$\begin{aligned} a_x + q \cdot b_x + r \cdot c_x &= u_x + s \cdot v_x + t \cdot w_x \\ a_y + q \cdot b_y + r \cdot c_y &= u_y + s \cdot v_y + t \cdot w_y \\ a_z + q \cdot b_z + r \cdot c_z &= u_z + s \cdot v_z + t \cdot w_z \end{aligned} \tag{19}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich zu einer Geradengleichung g auflösen, sodass sich für

$$g : \vec{x} = \vec{n} + s \cdot \vec{m}$$

ergibt.

21.1.1 CAS

Das Gleichungssystem oben (5) lässt sich mit dem CAS wie folgt lösen:
menu → 3 : *Algebra* → 7 : *Solve System of Equations* → 1 : *Solve System of Equations...*

21.2 Koordinatenform

$$E_1 : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

$$E_2 : t \cdot x + u \cdot y + v \cdot z = w$$

Dadurch ergeben sich zwei Gleichungen und drei Unbekannte, die sich nur teilweise auflösen lassen.

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}x &= y + i \\y &= y \\z &= j\end{aligned}\tag{20}$$

wobei i und j sich durch Auflösen des Gleichungssystems ergeben.

Dadurch ergibt sich für g :

$$\begin{aligned}g : \vec{x} &= \begin{pmatrix} y + i \\ y \\ j \end{pmatrix} \\g : \vec{x} &= \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ j \end{pmatrix} \\g : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ j \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{21}$$

wobei durch das Ausklammern von y der Richtungsvektor entsteht.

22 Winkel zwischen zwei Ebenen

Um den Schnittwinkel zweier Ebenen E_1 und E_2 zu berechnen wird der Winkel der Normalenvektoren \vec{n}_1 und \vec{n}_2 berechnet.

→ Siehe *Winkel zwischen zwei Vektoren*

23 Spatvolumen

Gegeben seien die Vektoren \vec{a} , \vec{b} und \vec{c} . Es soll das Volumen mit der Grundfläche eines Parallelogramms berechnet werden, welches sich zwischen diesen Vektoren bildet.

Für das Volumen gilt: $V = h \cdot A$, wobei $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$. h ergibt sich aus dem Skalarprodukt von $\cos \varphi$ und \vec{c} . Also $h = \cos \varphi \cdot |\vec{c}|$, wobei für $\cos \varphi$ gilt:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{c}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{c}|}.$$

Somit ergibt sich:

$$V = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{(|\vec{a} \times \vec{b}|) \cdot |\vec{c}|} \cdot |\vec{c}| \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Vereinfacht:

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

23.1 Grundfläche entspricht Parallelogramm

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

23.2 Volumen einer Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

23.3 Volumen eines Tetraeders

(Pyramide mit \triangle als Grundfläche)

$$V = \frac{1}{6} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

24 CAS Commands

24.1 dotP

Zur Berechnung des Skalarproduktes zweier Vektoren \vec{a} und \vec{b} .

CAS:

$$\textit{dotP}(a, b)$$

24.2 norm

Zur Berechnung des Betrags eines Vektors $|\vec{v}|$.

CAS:

$$\textit{norm}(v)$$

24.3 crossP

Zur Berechnung des Kreuzproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren.

CAS:

$$\textit{crossP}(a, b)$$

Part III

STOCHASTIK

24.4 Definitionen

24.4.1 statistische Erhebungen

- Die Durchführung einer Statistik - (z.B. das Befragung von Personen / Zählen von Gegenständen)

24.4.2 Merkmalsträger

- Das untersuchte Objekt der Statistik - (z.B. Personen oder Autos)

24.4.3 Merkmal

- Der im Zusammenhang mit dem Merkmalsträger untersuchte Wert - (z.B. Größe/ Geschwindigkeit)

24.4.4 Grundgesamtheit

- Die Summe aller Merkmalsträger

24.4.5 Stichprobe

- ausgewählte Merkmalsträger der Grundgesamtheit

24.4.6 Stichprobenumfang

- Die Anzahl n der Merkmalsträger einer Stichprobe

24.4.7 Urliste

- Die Beobachtungsliste (Datentabelle)

24.4.8 Stichprobenwert

- Ein Tabelleneintrag (eine Zeile)

24.4.9 qualitative Merkmale

- nominal- oder Ordinalskala

24.4.10 quantitative Merkmale

- Messbar mit Zahlenwerten (metrisch) diskret: - nur ganze Zahlen / stetig:
- Reelle Zahlen

24.4.11 absolute Häufigkeit $(H(ai))$

- bei n Stichprobenwerten tritt ein Merkmal H- mal auf

24.4.12 relative Häufigkeit $(h(ai))$

- das Merkmal tritt in H/n aller Fälle auf (Bruch bzw %)

24.4.13 Häufigkeitstabelle / Häufigkeitsverteilung

- Tabelle mit H und Merkmalen

24.4.14 Klasseneinteilung

- Einteilen von Intervallen in Teilintervalle (zur Reduzierung der Datenmenge) - z.B Werte 10 - 20, Werte 20 - 30, etc

24.4.15 Histogramm

- Diagramm, welches die Unterschiede verschiedener Klassen darstellt

24.4.16 Häufigkeitspolygon

- Der graph der durch Verbinden der Histogramm Werte entsteht

24.4.17 Summenpolygon

- die summe der Histogramm werte dargestellt als funktion

24.4.18 Spannweite R

- die Differenz zwischen dem größten Stichprobenwert X_{max} und dem kleinsten X_{min}

24.4.19 Standardabweichung σ_x

25 REGRESSION

25.1 Korrelation r

Die Korrelation r ist ein Maß für die Güte der Regression, also ein Maß für die Stärke des funktionalen Zusammenhangs.

$$\begin{aligned} ges. : g(x) &= mx \\ s &= (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 \dots \\ s(m) &= (y_1 - mx_1)^2 + (y_2 - mx_2)^2 + (y_3 - mx_3)^2 + \dots \quad (22) \\ s'(m) &= 0 \\ r^2 &= mx \cdot my \end{aligned}$$

(1) Berechnung der Abstände ohne Hilfsmittel

25.2 Aufgaben zur Regression

25.2.1 Aufgabe 3

Eine der drei Geraden g mit $g(x) = 0.2x + 1.5$, h mit $h(x) = 0.4x + 0.8$ und i mit $i(x) = 0.5x + 0.5$ ist eine Regressionsgerade zu den Datenpaaren (0—1), (2—2), (4—1) und (6—4).

Entscheiden Sie ohne Verwendung des Regressionsbefehls des Rechners, welche. Dokumentieren Sie einen Lösungsweg, der auch ohne GTR oder CAS nachvollziehbar ist.

RECHNUNG:

$$geg. : i(x) = 0.5x + 0.5$$

$$ges. : s$$

$$\begin{aligned} s &= (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 \dots \\ s(m) &= (y_1 - mx_1)^2 + (y_2 - mx_2)^2 + (y_3 - mx_3)^2 + (y_4 - mx_4)^2 \\ s(0.5) &= (1 - (0.5 \cdot 0 + 0.5))^2 + (2 - (0.5 \cdot 2 + 0.5))^2 + (1 - (0.5 \cdot 4 + 0.5))^2 + \\ &\quad (4 - (0.5 \cdot 6 + 0.5))^2 \\ s(0.5) &= 3 \end{aligned} \quad (23)$$

25.2.2 Nicht-lineare Regression

In einen Behälter wird fortlaufend 20 Liter Flüssigkeit eingefüllt und dann jeweils die Füllhöhe h gemessen.

a.)

Durch welche ganzrationale Funktion lässt sich der funktionale Zusammenhang zwischen der Füllhöhe h und dem Volumen V am besten beschreiben? Vergleichen Sie Modellierungen mit ganzrationalen Funktionen 2., 3. und 4. Grades miteinander.

$$\begin{aligned}f1(x) &= 0.000868x^2 + 1.5x - 12.63 \\f2(x) &= -0.000132x^3 + 0.028x^2 + 0.0095x - 1.06 \\f3(x) &= 8.7 \cdot 10^{-7}x^4 - 0.000373x^3 + 0.0489x^2 - 0.4753x + 0.105 \\r1^2 &= 0.981144 \\r2^2 &= 0.999137 \\r3^2 &= 0.9999\end{aligned}\tag{24}$$

(3) Somit ist die Regression 4. Grades am besten geeignet auf Grund der genauesten Korrelation

26 WAHRSCHEINLICHKEITEN

26.1 Definitionen

26.1.1 Ergebnismenge S

Die Menge aller möglichen Ergebnisse.

26.1.2 Laplace-Versuche

Alle Ergebnisse haben die selbe Chance aufzutreten.

26.1.3 Nicht-Laplace-Versuche

Alle Ergebnisse haben nicht die selbe Chance aufzutreten.

26.1.4 Wahrscheinlichkeit P

Gibt an, welche relative Häufigkeit bei häufiger Versuchsdurchführung zu erwarten ist.

26.1.5 Ereignis

Eine Teilmenge der Ergebnismenge S mit spezifischen Eigenschaften.

26.1.6 unmögliches Ereignis

$$P = 0\%$$

26.1.7 sicheres Ereignis

$$P = 100\%$$

26.1.8 Inverses Baumdiagramm

Die Pfade in umgekehrter Reihenfolge (bei unterschiedlichen Verzweigungen (z.B. (j,n) und (m,w)))

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$$

Satz von Bayes

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)} \end{aligned} \quad (25)$$

26.1.9 Totale Wahrscheinlichkeit

$P(\text{*ein Buchstabe*})$ die Gesamtwahrscheinlichkeit für ein Ereignis

26.1.10 Bedingte Wahrscheinlichkeit / Häufigkeit

Die zweite Bedingung in einem Baumdiagramm (Zweite Verzweigung)

$P_{\text{erste Bedingung}}(\text{zweite Bedingung})$

z.B. $P_A(B)$

26.2 Beispiele

Table 2: Eine 6 würfeln

Anzahl Würfe	10	100	1000
Anzahl Werte (Absolute Häufigkeit)	4	16	163
%-Angabe (Relative Häufigkeit)	40%	16%	16.3%
Richtwert (Wahrscheinlichkeit)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Würfelspiel

2 Würfel, gewonnen "Pasch"

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (3, 6)\}$$

$$E = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

Table 3: Beispiele für Zufallsversuche

Zufallversuch	Ergebnismenge
Wurf einer Münze	$S = \{K, Z\}$
Random Int von 1 bis 49	$S = \{1, 2, 3, \dots, 49\}$
Körpergröße eines Säuglings	$S = \{\dots, 46, \dots, 55, \dots\}$
Ausgang eines Fußballspiels	$S = \{1, 0, 2\}$

Seite 337 Nummer 7

Aus einer Klasse mit 18 Mädchen und 9 Jungen sollen einige Jugendliche ausgelost werden. Dies geschieht mit Hilfe eines Glücksrads mit 27 gleich großen Sektoren.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein "repräsentatives" Ereignis? Welche Ereignisse wären nicht "repräsentativ"?

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Ergebnis

- (1) zwei Mädchen und ein Junge
- (2) vier Mädchen und zwei Jungen
- (3) sechs Mädchen und drei Jungen

Repräsentativ: $\frac{2}{3}$ Mädchen, $\frac{1}{3}$ Jungen

Nicht-Repräsentativ: $\frac{2}{3}$ Jungen, $\frac{1}{3}$ Mädchen

$$1: P = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 14.8\%$$

$$2: P = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2.19\%$$

$$3: P = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0.325\%$$

Additionssatz

Eine Kugellagerfabrik prüft Kugeln auf Abweichungen in Härte und Durchmesser. Bestimme die Häufigkeit der nicht einwandfreien Kugeln.

$$\begin{aligned}
 P(d \cup h) &= P(d) + P(h) - P(d \cap h) \\
 P(d \cup h) &= \frac{65}{1000} + \frac{78}{1000} - \frac{43}{1000} \\
 P(d \cup h) &= \frac{1}{10} \\
 P(d \cup h) &= 10\%
 \end{aligned} \tag{26}$$

Strickwaren 2. Wahl

$$\begin{aligned}
 P(F_a \cup M_u \cup M_a) &= P(F_a) + P(M_u) + P(M_a) - P(F_a \cap M_u) - P(F_a \cap M_a) - P(M_u \cap M_a) + \\
 &\quad P(F_a \cap M_u \cap M_a) \\
 P(F_a \cup M_u \cup M_a) &= 5.1\% + 5.3\% + 4.7\% - 0.4\% - 0.9\% - 1.5\% + 0.3\% \\
 P(F_a \cup M_u \cup M_a) &= 12.6\%
 \end{aligned} \tag{27}$$

Schulhefte

Kariert mit und ohne Rand und nicht Kariert

Table 4: Werte

	K	\bar{K}	\sum
R	33	19	52
\bar{R}	22	12	34
\sum	55	31	86

Table 5: Zeichen

	K	\bar{K}	\sum
R	$H(R \cap K)$	$H(R \cap \bar{K})$	$H(R)$
\bar{R}	$H(\bar{R} \cap K)$	$H(\bar{R} \cap \bar{K})$	$H(\bar{R})$
\sum	$H(K)$	$H(\bar{K})$	<i>Gesamtheit</i>

AB "Der Additionssatz" Nr 7

Wahrscheinlichkeit aus einem Skatspiel Herz oder König zu ziehen

$$\begin{aligned}P(k \cup h) &= P(k) + P(h) - P(k \cap h) \\P(d \cup h) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} \\P(d \cup h) &= \frac{11}{32} \\P(d \cup h) &= \underline{\underline{34.375\%}}\end{aligned}\tag{28}$$

AB "Der Additionssatz" Nr 8

Wahrscheinlichkeit dass eine Zahl i **nicht** durch 3 oder 5 teilbar ist, wenn gilt:

i in range(10, 100)

$$\begin{aligned}P(\overline{Mod_3} \cup \overline{Mod_5}) &= 100 - P(Mod_3) + P(Mod_5) - P(Mod_3 \cap Mod_5) \\P(Mod_3 \cup Mod_5) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} \\P(Mod_3 \cup Mod_5) &= \frac{7}{15} \\P(Mod_3 \cup Mod_5) &= 46.\overline{6}\% \\P(\overline{Mod_3} \cup \overline{Mod_5}) &= 100\% - 46.\overline{6}\% \\P(\overline{Mod_3} \cup \overline{Mod_5}) &= 53.\overline{3}\%\end{aligned}\tag{29}$$

AB "Der Additionssatz" Nr 9

Wahrscheinlichkeit bei einem Multiple-Choice-Test bei 6 Fragen und 4 Antwortmöglichkeiten pro Frage 5 oder 6 antworten richtig zu beantworten.

$$\begin{aligned}P(R_5 \cup R_6) &= P(R_5) + P(R_6) \\P(R_5 \cup R_6) &= \left(\frac{1}{4}\right)^6 + 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \frac{3}{4} \\P(R_5 \cup R_6) &= \frac{19}{4096} \\P(R_5 \cup R_6) &= \underline{\underline{0.464\%}}\end{aligned}\tag{30}$$

Seite 343 Nr 4

Geschlecht (**M**ännlich, **W**eiblich), Führerschein verloren (**J**a, **N**ein)

Table 6: Werte

	J	N	Σ
M	$h(J \cap M)$ 20.5%	$h(N \cap M)$ 61.5%	$h(M)$ 82%
W	$h(J \cap W)$ 2.52%	$h(N \cap W)$ 15.48%	$h(W)$ 18%
Σ	$h(J)$ 23.02%	$h(N)$ 76.98%	100%

AB Nummer 2: Tbc- Erkrankungen

Gesund, **K**rank, Testergebnis **P**ositiv, **N**egativ

Table 7: Werte

	G	K	Σ
P	$P(G \cap P)$ 3.996%	$P(K \cap P)$ 0.095%	$P(P)$ 4.091%
N	$P(G \cap N)$ 95.904%	$P(K \cap N)$ 0.005%	$P(N)$ 95.9089%
Σ	$P(G)$ 99.9%	$P(K)$ 0.1%	100%

Seite 351 Nummer 5

F = Funktionstüchtig

M = Messfahler

E = Erkannt

$$P(\overline{F} \cap \overline{M} \cap E) = P(\overline{F}) \cdot P(\overline{M}) \cdot P(E)$$

”n über k”

Definition:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Beispiel Pascal’sches Dreieck

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1 \\(a+b)^1 &= 1a + 1b \\(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + b^2 \\(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\(a+b)^4 &= 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 \\(a+b)^n &= \binom{n}{0} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^0 b^n\end{aligned} \tag{31}$$

Formel von Bernoulli

Bedingungen:

- mit zurückliegenden (gleichbleibenden) Pfadwahrscheinlichkeiten
- 2 Möglichkeiten (J/N)
- Ungeordnete Reihenfolge

n = Anzahl

W = Beliebige Wahrscheinlichkeit

K = Zielanzahl

$$P(x = K) = B(x = K) = \binom{n}{K} \cdot (p)^K \cdot (1-p)^{n-K}$$

Sonderfall $B(0)$:

$$B_{n,p}(x \geq 1) = 1 - (1-p)^n$$

Zwei relevante Kenngrößen (σ & μ)

Erwartungswert $\mu = n \cdot p$

Wenn μ Nachkommastellen hat:

$\mu = (n + 1) \cdot p$ ohne Nachkommastellen. Standardabweichung

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$ (Maß für Streuung)

σ -Regeln gelten nur, wenn $\sigma > 3$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} > 3$$

$$= n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$$

$$= n \cdot 0.25 > 9$$

n muss groß sein, damit die σ -Regeln anwendbar sind.

$$B(\mu - c \cdot \sigma \leq x \leq \mu + c \cdot \sigma) = \gamma$$

γ entspricht der gewünschten %-Zahl

Table 8: Seite 381 Nummer 2

p	μ	σ	Bemerkungen
0.1	5	2.12	
0.5	25	3.54	größte Standardabweichung und breiteste Verteilung
0.8	40	2.89	

$$V(p) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

Variante 1

$$V'(p) = 0$$

$$\text{solve}(0 = \frac{d}{dp}(n \cdot p \cdot (1 - p)), p)$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Variante 2

$$V(p) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

$$V(p) = n \cdot (p - p^2)$$

$$V'(p) = (1 - 2 \cdot p) \cdot n$$

$$V'(p) = -2 \cdot p \cdot n + n \tag{32}$$

$$-n = -2 \cdot p \cdot n$$

$$1 = 2 \cdot p$$

$$p = \frac{1}{2}$$

Variante 3

$$\sigma = \sqrt{n \cdot (p - p^2)}$$

$$\sigma'(p) = \frac{1 \cdot n \cdot (1 - 2 \cdot p)}{2 \cdot \sqrt{n \cdot (p - p^2)}}$$

$$\sigma'(p) = 0 \tag{33}$$

$$0 = 1 - 2 \cdot p$$

$$p = \frac{1}{2}$$

27 Von der Gesamtheit auf die Stichprobe

Seite 405 Nummer 14

geg.:

$$n = 3700$$

$x \triangleq$ Anzahl der Gewinne

$$p = \frac{1}{37}$$

$$\gamma = 95\% \rightarrow c = 1.96$$

ges.:

$$x_1$$

$$x_2$$

Rechnung:

$$\mu = n \cdot p = 3700 \cdot \frac{1}{37}$$

$$\mu = 100$$

$$\sigma = \sqrt{3700 \cdot \frac{1}{37} \cdot \left(1 - \frac{1}{37}\right)}$$

$$\sigma = 9.86$$

$$B_{3700, \frac{1}{37}}(\mu - 1.96 \cdot \sigma \leq x \leq \mu + 1.96 \cdot \sigma) > 95\%$$

$$x_1 = \mu - 1.96 \cdot \sigma$$

$$x_1 = 80.67 \approx 81$$

$$x_2 = \mu + 1.96 \cdot \sigma$$

$$x_2 = 119.32 \approx 119$$

CAS:

$$\text{binomcdf}(3700, \frac{1}{37}, 81, 119)$$

$$B_{3700, \frac{1}{37}}(\mu - 1.96 \cdot \sigma \leq x \leq \mu + 1.96 \cdot \sigma) = 95.22\%$$

Seite 404 Nummer 11

geg.:

$x \hat{=}$ Anzahl der benötigten Betten

$$n = 400$$

$$p = 88\%$$

$$\gamma = 90\% \Rightarrow c = 1.64$$

ges.:

$$x_1$$

$$x_2$$

Rechnung:

$$\mu = p \cdot n = 0.88 \cdot 400 = 352$$

$$\sigma = \sqrt{400 \cdot 0.88 \cdot (1 - 0.88)}$$

$$\sigma = 6.499$$

$$x_1 = 352 - 1.64 \cdot 6.499$$

$$x_1 = 341, 341 \approx 341$$

$$x_2 = 352 + 1.64 \cdot 6.499$$

$$x_2 = 362, 76 \approx 362$$

$$B_{400,0.88}(341 \leq x \leq 362) = 90.9\%$$

28 Von der Stichprobe auf die Gesamtheit

geg.:

$$n = 500$$

$$H = x = 273$$

$$h = \frac{273}{500}$$

$$\gamma = 95\% \Rightarrow c = 1.96$$

$x \triangleq$ Anzahl der Stimmen für Oberbürgermeister

ges.:

p

Es gilt:

$$B(\mu - c \cdot \sigma \leq x \leq \mu + c \cdot \sigma) = \gamma$$

Also

$$B(\mu - 1.96 \cdot \sigma \leq 273 \leq \mu + 1.96 \cdot \sigma) = 95\%$$

Bzw

$$n \cdot p - c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \leq x \leq n \cdot p + c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Vereinfacht

$$p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} \leq \frac{x}{n} \leq p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}}$$

Also

$$p - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{500}} \leq \frac{x}{500} \leq p + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{500}}$$

Daraus ergibt sich

$$f_1(p) = p - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{500}}$$

$$f_2(p) = p + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{500}}$$

CAS

$$p_1 = \text{solve}(f_1(p) = \frac{x}{n}, p)$$
$$p_2 = \text{solve}(f_1(p) = \frac{x}{n}, p)$$

1. Fall: $x = \mu$

Die Häufigkeit stimmt mit dem tatsächlichen Wahlanteil überein.

2. Fall: $x > \mu$

Es wurden zufällig viele "Anhänger" des Oberbürgermeisters befragt.

Mehr Stimmen für den Oberbürgermeister, als es der tatsächliche Anteil der Gesamtbevölkerung sein wird.

3. Fall: $x < \mu$

Es wurden zufällig viele "Gegner" des Oberbürgermeisters befragt.

Weniger Stimmen für den Oberbürgermeister, als es der tatsächliche Anteil der Gesamtbevölkerung sein wird.

29 n unbekannt

geg.:

$$x_1 = 100$$

$$p = \frac{1}{3}$$

$$\gamma = 80\% \Rightarrow c = 1.28$$

$x \hat{=}$ Anzahl von Personen mit Blutgruppe A

ges.:

n

Rechnung:

$$B_{n, \frac{1}{3}}(\mu - 1.28 \cdot \sigma \leq x \leq \mu + 1.28 \cdot \sigma) = 0.8$$

$$\mu - 1.28 \cdot \sigma = 100$$

$$n \cdot \frac{1}{3} - 1.28 \cdot \sqrt{n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 100$$

CAS:

$$\text{solve}(n \cdot \frac{1}{3} - 1.28 \cdot \sqrt{n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 100, n)$$

$$n = 333,035 \approx 334$$

Probe:

$$\text{binomCdf}(334, \frac{1}{3}, 100, 334 \cdot \frac{1}{3} - 1.28 \cdot \sqrt{334 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}) = 0.818$$

$$n = 334$$

30 Wahl eines Stichprobenumfangs

geg.:

$$\gamma = 95\% \Rightarrow c = 1.96$$

$$\text{Genauigkeit } 1\% \Rightarrow d = 0.01$$

ges.:

n

Ansatz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{n} - p \right| &\leq d \\ \left| \frac{n}{n} - p \right| &\leq c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \leq d \\ \Rightarrow c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} &\leq d \\ c^2 \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{n} &\leq d^2 \end{aligned}$$

30.1 1. Möglichkeit

p ist ungefähr bekannt:

$p = \text{*geschätzter wert*}$

$$\frac{c^2}{d^2} \cdot p \cdot (1-p) \leq n$$

30.2 2. Möglichkeit

p ist unbekannt:

\Rightarrow mit schlechtestem Fall rechnen

$p \cdot (1-p) \rightarrow$ das Maximum davon, also $f(p) = p \cdot (1-p)$

$\Rightarrow p_{\max} = 0.5$, daraus folgt $p \cdot (1-p) = 0.25$

$$\frac{c^2}{d^2} \cdot 0.25 \leq n$$

31 Normalverteilungen

vgl. Seite 420 ff.

Die Normalverteilung ist die Annäherung einer Funktion $\varphi(x)$ an eine Binomialverteilung.

Dabei ist die Grundform von $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Diese wird um μ nach rechts verschoben und um σ beziehungsweise $\frac{1}{\sigma}$ entlang der X beziehungsweise Y -Achse gestreckt:

$$P_{\mu,\sigma}(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Das Äquivalent zu

$$B_{100,0.2}(x = 43)$$

lautet:

$$P_{\mu,\sigma}(x = 43) = \varphi(43) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{43-20}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} \right)^2}$$

mit dem CAS wie folgt:

$$\text{normpdf}(x, \mu, \sigma)$$

Um

$$B_{100,0.2}(0 \leq x \leq 20)$$

zu berechnen wird

$$P_{\mu,\sigma}(x \leq 20) = \int_0^{20+0.5} \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-20}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} \right)^2} dx$$

gerechnet, wobei die 0.5 in der Obergrenze des Integrals sich auf Grund der ganzen Zahlen / Balken der Binomialverteilung ergibt.

$$B_{100,0.2}(10 \leq x \leq 70)$$

wird wie folgt berechnet:

$$P_{\mu,\sigma}(10 \leq x \leq 70) = \int_{10-0.5}^{70+0.5} \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-20}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} \right)^2} dx$$

also:

$$P_{\mu,\sigma}(10 \leq x \leq 70) = \Phi \left(\frac{70 + 0.5 - \mu}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{10 - 0.5 - \mu}{\sigma} \right)$$

und mit dem CAS:

$$\text{normcdf}(x_1, x_2, \mu, \sigma)$$

32 Normalverteilte Zufallsgrößen

Die Normalverteilung kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit stufenlosen Übergängen darstellen.

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

wobei gilt: $x \in \mathbb{R}$.

Des Weiteren kann die Obergrenze ∞ sein, da weder n noch p für die Berechnung der Normalverteilung bekannt sein muss.

Berechnet man die Ober und Untergrenzen eines Intervalls, für den z.B. $P = 0.9$ gegeben ist gilt:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi \cdot \left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = 0.9$$

k_1 und k_2 lassen sich mit dem CAS wie folgt berechnen:

$$\text{invnorm}(0.95, \mu, \sigma)$$

wobei die 0.95 sich aus $p + \frac{1-p}{2}$ ergeben, da die Mitte des gegebenen Intervalls sich bei μ befindet und somit die flächen links und rechts außerhalb des Intervalls liegt, weshalb für die Obergrenze $P(k_2) = p + \frac{1-p}{2}$ und für die Untergrenze $P(k_1) = \frac{1-p}{2}$ gilt.

33 σ - Regeln Erweiterung: Berechnung von c - Werten

Die Formel für die c - Werte basieren auf der Formel $x_k = \mu + c \cdot \sigma$
Darurch leitet sich die folgende Formel für c her:

$$\frac{\gamma + 1}{2} = \Phi(c)$$

Mit dem CAS lässt sich c wie folgt berechnen:

$$\text{invnorm}\left(\frac{\gamma + 1}{2}, 0, 1\right)$$

34 CAS Commands

34.1 nCr

Zur Eingabe von $\binom{n}{k}$:

CAS:

nCr(n, k)

34.2 binompdf

Zur Berechnung von:

$$B_{n,p}(k)$$

CAS:

binompdf(n, p, k)

34.3 binomcdf

Zur Berechnung von:

$$B_{n,p}(k_1 \leq x \leq k_2)$$

CAS:

binomcdf(n, p, k_1, k_2)

34.4 nsolve

Zum Lösen von Gleichungen wie:

$$B_{30,0.8}(x \leq k) > 0.3$$

CAS:

nsolve(binomcdf(30, 0.8, 0, k) = 0.3, k, 0, 30)

Probe:

$$B_{30,0.8}(x \leq 23) = 0.39$$

binomcdf(30,0.8,0,23)

34.5 normpdf

Zum Berechnen eines Spezifischen Wertes einer Normalverteilung, wie

$$P_{\mu,\sigma}(x)$$

CAS:

$$\textit{normpdf}(x, \mu, \sigma)$$

34.6 normcdf

Zum Berechnen eines Wertebereiches einer Normalverteilung, wie

$$P_{\mu,\sigma}(x_1 \leq x \leq x_2)$$

CAS:

$$\textit{normcdf}(x_1, x_2, \mu, \sigma)$$

34.7 invnorm

Zum Berechnen der Obergrenze bzw Untergrenze bei Normalverteilungen.

CAS:

$$\text{invnorm}(p(k), \mu, \sigma)$$

wobei $p(k)$ der jeweiligen Wahrscheinlichkeit der Grenze entspricht.

Es gilt für die Obergrenze:

$$p(k_2) = p + \frac{1 - p}{2}$$

und für die Untergrenze:

$$p(k_1) = \frac{1 - p}{2}$$