

# MATHE 12/13

Frederik Höft

February 4, 2019

# Contents

<b>I</b>	<b>ANALYSIS</b>	<b>7</b>
<b>1</b>	<b>Infinitesimalrechnung</b>	<b>7</b>
1.1	Differentialrechnung . . . . .	7
1.1.1	Ableitungsregeln . . . . .	7
1.2	Integralrechnung . . . . .	9
1.2.1	1. Sonderfall: $x_{min} = 0$ . . . . .	9
1.2.2	2. Sonderfall: Nullstellen . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Kurvendiskussionen</b>	<b>10</b>
2.1	Symmetrie . . . . .	10
2.1.1	Achsensymmetrie . . . . .	10
2.1.2	Punktsymmetrie . . . . .	11
2.2	Verhalten im Unendlichen . . . . .	11
2.3	Schnittpunkt mit der Y - Achse . . . . .	11
2.4	Nullstellen . . . . .	11
2.4.1	PQ - Formel . . . . .	11
2.4.2	CAS . . . . .	11
2.5	Extremstellen . . . . .	11
2.5.1	Extrempunkt . . . . .	11
2.6	Wendestellen . . . . .	12
2.6.1	Wendepunkt . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Wachstumsfunktionen</b>	<b>12</b>
3.1	Wachstum und Zerfall . . . . .	12
3.1.1	Bestand $f(t)$ . . . . .	12
3.1.2	Wachstumsfaktor $c$ . . . . .	12
3.1.3	Wachstumskonstante $k$ . . . . .	12
3.1.4	Verdopplungszeit . . . . .	12
3.1.5	Halbierungszeit . . . . .	13
3.1.6	Wachstumsgeschwindigkeit . . . . .	13
<b>4</b>	<b><math>e</math> - Funktionen</b>	<b>13</b>
<b>II</b>	<b>VEKTOREN</b>	<b>14</b>
<b>5</b>	<b>Ortsvektoren</b>	<b>14</b>

<b>6</b>	<b>Addition und Subtraktion</b>	<b>14</b>
<b>7</b>	<b>Multiplikation</b>	<b>14</b>
7.1	Multiplikation mit einem Skalar . . . . .	14
7.2	Skalarprodukt . . . . .	14
<b>8</b>	<b>Betrag (Länge) eines Vektors</b>	<b>14</b>
<b>9</b>	<b>Vektor durch zwei Punkte</b>	<b>15</b>
<b>10</b>	<b>Orthogonalitätsbedingung</b>	<b>15</b>
<b>11</b>	<b>Winkel zwischen zwei Vektoren</b>	<b>15</b>
11.1	Mathematischer Ansatz . . . . .	15
11.2	CAS . . . . .	15
<b>12</b>	<b>Abstand windschiefer Geraden</b>	<b>16</b>
12.1	Mathematischer Ansatz . . . . .	16
12.2	CAS . . . . .	16
<b>13</b>	<b>Kreuzprodukt und Normalenvektor</b>	<b>17</b>
<b>14</b>	<b>Ebenen</b>	<b>17</b>
14.1	Parameterform . . . . .	17
14.2	Normalenform . . . . .	17
14.3	Koordinatenform . . . . .	17
14.4	Achsenabschnittsform . . . . .	18
14.5	Umformen von Ebenengleichungen . . . . .	18
14.5.1	Koordinatenform in Parameterform . . . . .	18
14.5.2	Parameterform in Normalenform . . . . .	19
<b>15</b>	<b>Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene</b>	<b>19</b>
15.1	1. Fall: Parallel . . . . .	19
15.2	2. Fall: Schnittpunkt . . . . .	19
15.3	3. Fall: Identisch . . . . .	20
15.4	CAS . . . . .	20
<b>16</b>	<b>Lagebeziehung zwischen Punkt und Ebene</b>	<b>21</b>
16.1	CAS . . . . .	21
<b>17</b>	<b>Winkel zwischen Gerade und Ebene</b>	<b>21</b>

<b>18 Flächenberechnung von Ebenen</b>	<b>22</b>
18.1 Fläche eines Parallelogramms . . . . .	22
18.2 Fläche eines Quadrates . . . . .	22
18.3 Fläche eines Dreiecks . . . . .	22
18.4 Fläche eines beliebigen Vierecks . . . . .	22
<b>19 Schnittpunkte von Ebene und Koordinatenachsen</b>	<b>23</b>
<b>20 Schnittgerade zwischen zwei Ebenen</b>	<b>23</b>
20.1 Parameterform . . . . .	23
20.1.1 CAS . . . . .	24
20.2 Koordinatenform . . . . .	24
<b>21 Winkel zwischen zwei Ebenen</b>	<b>25</b>
<b>22 Spatvolumen</b>	<b>25</b>
22.1 Grundfläche entspricht Parallelogramm . . . . .	25
22.2 Volumen einer Pyramide . . . . .	25
22.3 Volumen eines Tetraeders . . . . .	25
<b>23 CAS Commands</b>	<b>26</b>
23.1 dotP . . . . .	26
23.2 norm . . . . .	26
23.3 crossP . . . . .	26
<b>III STOCHASTIK</b>	<b>27</b>
23.4 Definitionen . . . . .	27
23.4.1 statistische Erhebungen . . . . .	27
23.4.2 Merkmalsträger . . . . .	27
23.4.3 Merkmal . . . . .	27
23.4.4 Grundgesamtheit . . . . .	27
23.4.5 Stichprobe . . . . .	27
23.4.6 Stichprobenumfang . . . . .	27
23.4.7 Urliste . . . . .	27
23.4.8 Stichprobenwert . . . . .	27
23.4.9 qualitative Merkmale . . . . .	27
23.4.10 quantitative Merkmale . . . . .	28
23.4.11 absolute Häufigkeit $\left(H(ai)\right)$ . . . . .	28
23.4.12 relative Häufigkeit $\left(h(ai)\right)$ . . . . .	28
23.4.13 Häufigkeitstabelle / Häufigkeitsverteilung . . . . .	28

23.4.14	Klasseneinteilung . . . . .	28
23.4.15	Histogramm . . . . .	28
23.4.16	Häufigkeitspolygon . . . . .	28
23.4.17	Summenpolygon . . . . .	28
23.4.18	Spannweite $R$ . . . . .	28
23.4.19	Standardabweichung $\sigma x$ . . . . .	28
<b>24</b>	<b>REGRESSION</b>	<b>29</b>
24.1	Korrelation $r$ . . . . .	29
24.2	Aufgaben zur Regression . . . . .	29
24.2.1	Aufgabe 3 . . . . .	29
24.2.2	Nicht-lineare Regression . . . . .	30
<b>25</b>	<b>WAHRSCHEINLICHKEITEN</b>	<b>31</b>
25.1	Definitionen . . . . .	31
25.1.1	Ergebnismenge $S$ . . . . .	31
25.1.2	Laplace-Versuche . . . . .	31
25.1.3	Nicht-Laplace-Versuche . . . . .	31
25.1.4	Wahrscheinlichkeit $P$ . . . . .	31
25.1.5	Ereignis . . . . .	31
25.1.6	unmögliches Ereignis . . . . .	31
25.1.7	sicheres Ereignis . . . . .	31
25.1.8	Inverses Baumdiagramm . . . . .	32
25.1.9	Totale Wahrscheinlichkeit . . . . .	32
25.1.10	Bedingte Wahrscheinlichkeit / Häufigkeit . . . . .	32
25.2	Beispiele . . . . .	32
<b>26</b>	<b>Von der Gesamtheit auf die Stichprobe</b>	<b>40</b>
<b>27</b>	<b>Von der Stichprobe auf die Gesamtheit</b>	<b>42</b>
<b>28</b>	<b><math>n</math> unbekannt</b>	<b>44</b>
<b>29</b>	<b>Wahl eines Stichprobenumfangs</b>	<b>45</b>
29.1	1. Möglichkeit . . . . .	45
29.2	2. Möglichkeit . . . . .	45
<b>30</b>	<b>Normalverteilungen</b>	<b>46</b>
<b>31</b>	<b>Normalverteilte Zufallsgrößen</b>	<b>48</b>
<b>32</b>	<b><math>\sigma</math> - Regeln Erweiterung: Berechnung von <math>c</math> - Werten</b>	<b>48</b>

<b>33 CAS Commands</b>	<b>49</b>
33.1 nCr . . . . .	49
33.2 binompdf . . . . .	49
33.3 binomcdf . . . . .	49
33.4 nsolve . . . . .	50
33.5 normpdf . . . . .	50
33.6 normcdf . . . . .	50
33.7 invnorm . . . . .	51

# Part I

# ANALYSIS

## 1 Infinitesimalrechnung

### 1.1 Differentialrechnung

Die Ableitung  $f'(x)$  einer Funktion  $f(x)$  beschreibt den Verlauf der Steigung von  $f(x)$ .

#### 1.1.1 Ableitungsregeln

Für  $\{a, b, n\} \in \mathbb{R}$  und  $\{g, h\}$  als Variable gilt:

- Konstante Funktion

$$(a)' = 0$$

- Faktorregel

$$(a \cdot g)' = a \cdot g'$$

- Summenregel

$$(h \pm g)' = g' \pm h'$$

- Produktregel

$$(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$$

- Quotientenregel

$$\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$$

- Reziprokenregel

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$$

- Potenzregel

$$(g^n)' = n \cdot g^{n-1}$$

- Kettenregel

$(g \circ h)'(x) = (g(h(x)))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$  wobei  $g'(x)$  die äußere und  $h'(x)$  die innere Ableitung ist.

**Beispiel:**

Gegeben sei  $f(x) = (x^3 + 1)^2$ , was sich als Verkettung von

$$g(h) = h^2$$

mit der Funktion

$$h(x) = x^3 + 1$$

darstellen lässt, da gilt  $f(x) = g(h(x))$ , also  $f = g \circ h$ . Somit ergibt sich:

$$g'(h) = 2h$$

sowie

$$h'(x) = 3x^2$$

Da  $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$  ergibt sich

$$f'(x) = 2(x^3 + 1) \cdot 3x^2$$



## 1.2 Integralrechnung

Die Aufleitung  $F(x)$  einer Funktion  $f(x)$  beschreibt die Fläche unter der Funktion  $F(x)$ . Um die Fläche von  $x_{min}$  bis  $x_{max}$  unter der Funktion  $f(x)$  zu bestimmen, berechnet man:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x) \, dx = F(x_{max}) - F(x_{min}) = [F(x)]_{x_{min}}^{x_{max}}$$

**Beispiel:**

Gegeben sei  $f(x) = 2x^3 + 4x + 2$ ,  $x_{min} = 1$  und  $x_{max} = 5$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 4x + 2 \\ \int_1^5 f(x) \, dx &= F(5) - F(1) \\ \int_1^5 f(x) \, dx &= \left[ \frac{2}{4}x^4 + 2x^2 + 2x \right]_1^5 \\ \int_1^5 f(x) \, dx &= \left( \frac{2}{4} \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 \right) - \left( \frac{2}{4} \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 \right) \quad (1) \\ \int_1^5 f(x) \, dx &= 372.5 - 4.5 \\ \int_1^5 f(x) \, dx &= \underline{\underline{368}} \end{aligned}$$

### 1.2.1 1. Sonderfall: $x_{min} = 0$

Wenn  $x_{min} = 0$  ist, dann ist  $F(x_{min}) = 0$ , deshalb kann die Untergrenze vernachlässigt werden. Gegeben sei  $f(x) = 2x^3 + 4x + 2$ ,  $x_{min} = 0$  und  $x_{max} = 5$ .

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^3 + 4x + 2 \\ \int_0^5 f(x) \, dx &= F(5) - F(0) \\ \int_0^5 f(x) \, dx &= \left[ \frac{2}{4}x^4 + 2x^2 + 2x \right]_0^5 \\ \int_0^5 f(x) \, dx &= \left( \frac{2}{4} \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5 \right) - 0 \\ \int_0^5 f(x) \, dx &= \underline{\underline{372.5}} \end{aligned} \quad (2)$$

### 1.2.2 2. Sonderfall: Nullstellen

Befindet sich eine oder mehrere Nullstelle(n) zwischen  $x_{min}$  und  $x_{max}$ , so muss die Fläche an diesen geteilt und deren Beträge anschließend aufsummiert werden, da es sich bei dem Abschnitt, bei dem gilt  $f(x) < 0$ , sonst um eine "negative Fläche" handeln würde. Bei einer Funktion  $f(x) = x^3 + 1$  mit einer Nullstelle  $x_0$  bei  $x = 1$  müssen die Ober und Untergrenzen zur bestimmung der Intervals von  $x_{min} = -1$  bis  $x_{max} = 5$  wie folgt gelegt werden:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 + 1 \\
 \int_{-1}^5 f(x) \, dx &= \left| \int_{-1}^1 f(x) \, dx \right| + \left| \int_1^5 f(x) \, dx \right| \\
 \int_{-1}^5 f(x) \, dx &= |F(1) - F(-1)| + |F(5) - F(1)| \\
 \int_{-1}^5 f(x) \, dx &= \left| \left[ \frac{x^4}{4} + x \right]_{-1}^1 \right| + \left| \left[ \frac{x^4}{4} + x \right]_1^5 \right| \\
 \int_{-1}^5 f(x) \, dx &= \left| \left( \frac{1^4}{4} + 1 \right) - \left( \frac{(-1)^4}{4} + (-1) \right) \right| + \quad (3) \\
 &\quad \left| \left( \frac{5^4}{4} + 5 \right) - \left( \frac{1^4}{4} + 1 \right) \right| \\
 \int_{-1}^5 f(x) \, dx &= \left| 1.25 - (-1.25) \right| + \left| 161.25 - 1.25 \right| \\
 \int_{-1}^5 f(x) \, dx &= \underline{\underline{162.5}}
 \end{aligned}$$

## 2 Kurvendiskussionen

Die Funktion  $f(x)$  soll untersucht werden.

### 2.1 Symmetrie

#### 2.1.1 Achsensymmetrie

Achsensymmetrie ist vorhanden wenn gilt:

$$f(x) = f(-x)$$

#### 2.1.2 Punktsymmetrie

Punktsymmetrie ist vorhanden wenn gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

### 2.2 Verhalten im Unendlichen

Schreibweise:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

und

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

### 2.3 Schnittpunkt mit der Y - Achse

Für den Schnittpunkt mit der Y - Achse gilt:

$$S_y = f(0)$$

### 2.4 Nullstellen

#### 2.4.1 PQ - Formel

Gegeben sei  $f(x) = x^2 - px - q$ .

Es gilt:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

#### 2.4.2 CAS

$$\text{solve}(f(x) = 0, x)$$

## 2.5 Extremstellen

Die Extremstellen von  $f(x)$  entsprechen den Nullstellen von  $f'(x)$ .  
Wobei gilt:

- wenn  $f''(x_0) < 0$ , so handelt es sich um einen Hochpunkt.
- wenn  $f''(x_0) > 0$ , so handelt es sich um einen Tiefpunkt.

### 2.5.1 Extrempunkt

$$P_{Ex} = (f''(x_0) | f(f''(x_0)))$$

## 2.6 Wendestellen

Die Extremstellen von  $f(x)$  entsprechen den Nullstellen von  $f''(x)$ .  
Wobei gilt:

- wenn  $f'''(x_0) < 0$ , so handelt es sich um einen Links - Rechts - Wendepunkt.
- wenn  $f'''(x_0) > 0$ , so handelt es sich um einen Rechts - Links - Wendepunkt.

### 2.6.1 Wendepunkt

$$P_W = (f'''(x_0) | f(f'''(x_0)))$$

## 3 Wachstumsfunktionen

### 3.1 Wachstum und Zerfall

Generell gilt  $f(t) = a \cdot c^t = a \cdot e^{k \cdot t}$

#### 3.1.1 Bestand $f(t)$

Der Bestand ist definiert als

$$f(t) = a \cdot c^t$$

wobei  $c$  definiert ist als:

$$c = e^k$$

### 3.1.2 Wachstumsfaktor $c$

### 3.1.3 Wachstumskonstante $k$

Es gilt:

$$k = \ln(c)$$

Bei Wachstum gilt  $k > 0$  und bei Zerfall  $k < 0$

### 3.1.4 Verdopplungszeit

Für die Verdopplungszeit  $t_v$  gilt:

$$t_v = \frac{\ln(2)}{k}$$

### 3.1.5 Halbierungszeit

Für die Halbierungszeit  $t_h$  gilt:

$$t_h = \frac{\ln(0.5)}{k}$$

### 3.1.6 Wachstumsgeschwindigkeit

Die Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  entspricht der Ableitung der Wachstumsfunktion am Zeitpunkt  $t$ . Somit gilt:

$$\begin{aligned} f(t) &= a \cdot e^{k \cdot t} \\ f'(t) &= k \cdot a \cdot e^{k \cdot t} \end{aligned} \tag{4}$$

Also

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

## 4 $e$ - Funktionen

Die Ableitung von  $e^x$  bleibt  $e^x$ .

Hat man also  $f(x) = e^{2x}$ , wird zu erst der Exponent betrachtet, als  $2 \cdot x$ , was sich zu 2 ableitet.

Diese 2 ist wird jetzt vor das  $e$  geschrieben, sodass sich für die Ableitung von  $f(x) = e^{2x}$   $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$  ergibt.

Es folgen einige Beispiele:

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot e^{\frac{1}{a} \cdot x^2} \\ f'(x) &= 2x \cdot e^{\frac{1}{a} \cdot x^2} \end{aligned} \tag{5}$$

Der Faktor  $a$  kürzt sich mit der Ableitung  $\frac{2x}{a}$  des Exponenten weg.

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{2x^2-3x} \\ f'(x) &= 4x - 3 \cdot e^{2x^2-3x} \end{aligned} \tag{6}$$

da die Ableitung des Exponenten zum Faktor für die Basis, also  $e^{\dots}$  wird.  
Bezüglich Logarithmen gilt:

$$\ln(e^{2x}) = 2x$$

## Part II

# VEKTOREN

## 5 Ortsvektoren

Der Ortsvektor eines Punktes  $P$  geht vom Ursprung  $O$  nach  $P$ . Somit gilt  $\vec{p} = \vec{OP}$ .

## 6 Addition und Subtraktion

Es gilt:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

## 7 Multiplikation

### 7.1 Multiplikation mit einem Skalar

Wird ein Vektor  $\vec{v}$  mit einem Skalar  $r$  multipliziert, so wird jedes Element des Vektors mit dem Skalar multipliziert.

Es gilt:

$$r \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} r \cdot v_x \\ r \cdot v_y \\ r \cdot v_z \end{pmatrix}$$

### 7.2 Skalarprodukt

Werden zwei Vektoren multipliziert, so erhält man einen Skalar.

Es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

## 8 Betrag (Länge) eines Vektors

Es gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

## 9 Vektor durch zwei Punkte

Der Vektor  $\vec{AB}$  zwischen Punkt  $A$  und  $B$  lässt sich mit den Ortsvektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  berechnen.

Es gilt:

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

## 10 Orthogonalitätsbedingung

Wenn  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , dann gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

also

$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0$$

## 11 Winkel zwischen zwei Vektoren

Der Winkel  $\alpha$  zwischen den Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  lässt sich wie folgt berechnen:

### 11.1 Mathematischer Ansatz

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

### 11.2 CAS

$$\arccos\left(\frac{\text{dotP}(a, b)}{\text{norm}(a) \cdot \text{norm}(b)}\right)$$



## 12 Abstand windschiefer Geraden

### 12.1 Mathematischer Ansatz

Der Abstand zweier Geraden  $g : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$  und  $h : \vec{x} = \vec{v} + s \cdot \vec{w}$ , wobei die Faktoren  $r$  und  $s$  unbekannt sind, lässt sich mit Hilfe des Vektorzuges ermitteln.

Für den Vektorzug  $\vec{d}$ , welcher einen Vektor zwischen den Geraden  $g$  und  $h$  bildet gilt:

$$\vec{d} = g - h$$

also:

$$\vec{d} = (\vec{a} + r \cdot \vec{b}) - (\vec{v} + s \cdot \vec{w})$$

Des Weiteren müssen die Richtungsvektoren  $\vec{b}$  und  $\vec{w}$  orthogonal zu  $\vec{d}$  sein.

Es gilt also:

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$

$$\vec{w} \cdot \vec{d} = 0$$

Somit lassen sich die 2 Gleichungen nach den beiden Unbekannten  $r$  und  $s$  auflösen.  $r$  und  $s$  werden nun in  $\vec{d}$  eingesetzt und  $|\vec{d}|$  kann berechnet werden:

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

### 12.2 CAS

`solve(dotP(d, b) = 0, r)`, das Ergebnis für  $r$  einsetzen und

`solve(dotP(d, w) = 0, s)`.

Beides in  $d$  einsetzen.

`norm(d) → done`.

## 13 Kreuzprodukt und Normalenvektor

Der Normalenvektor  $\vec{n}$  steht senkrecht auf der Ebene  $E$ .

Wobei der Betrag  $|\vec{n}|$  des Normalenvektors der Fläche der Ebene entspricht. Er lässt sich aus dem Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren von  $E$  berechnen. Somit gilt:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Des Weiteren lässt sich das Kreuzprodukt mit der *Zuhalteregel* ( $\rightarrow$  Internet) von Hand berechnen oder mit dem CAS:

$$\text{crossP}(a, b)$$

## 14 Ebenen

### 14.1 Parameterform

Die Parameterform definiert eine Ebene  $E$  mit drei Punkten  $A$ ,  $B$  und  $C$  als:

$$E : \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC}$$

wobei  $\vec{x}$  als Abtastvektor,  $\vec{OA}$  als Hinführungsvektor und  $\vec{AB}$ , sowie  $\vec{AC}$  als Spannvektoren bezeichnet werden.

### 14.2 Normalenform

Die Normalenform definiert eine Ebene  $E$  mit einem Hinführungsvektor  $\vec{p}$  und dem Normalenvektor  $\vec{n}$  als:

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

### 14.3 Koordinatenform

Die Koordinatenform entspricht der ausmultiplizierten Normalenform. Es gilt:

$$x \cdot x_n + y \cdot y_n + z \cdot z_n = d$$

wobei  $d$  dem Skalarprodukt  $\vec{p} \cdot \vec{n}$  aus der Normalenform entspricht.

## 14.4 Achsenabschnittsform

Die Achsenabschnittsform entspricht der durch  $d$  dividierten Koordinatenform.

$$\frac{1}{\frac{d}{x_n}} \cdot x + \frac{1}{\frac{d}{y_n}} \cdot y + \frac{1}{\frac{d}{z_n}} \cdot z = 1$$

was als

$$\frac{1}{x_s} \cdot x + \frac{1}{y_s} \cdot y + \frac{1}{z_s} \cdot z = 1$$

zusammengefasst werden kann.

## 14.5 Umformen von Ebenengleichungen

### 14.5.1 Koordinatenform in Parameterform

Gegeben ist die Ebenengleichung  $E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ , die in die Parameterform umgewandelt werden soll.

Dazu wird zu erst durch Umformen der Gleichung eine Unbekannte eliminiert (z.B.  $x = -\frac{b \cdot y}{a} - \frac{c \cdot z}{a} + \frac{d}{a}$ ).

Da die Parameterform aus Vektoren besteht, schreiben wir die drei Gleichungen für die  $x$ ,  $y$  und  $z$  Koordinaten untereinander:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{a} \cdot y - \frac{c}{a} \cdot z + \frac{1}{a} \cdot d \\ y &= 1 \cdot y + 0 \cdot z + 0 \cdot d \\ z &= 0 \cdot y + 1 \cdot z + 0 \cdot d \end{aligned} \tag{7}$$

Als Vektor ergibt sich somit:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \cdot y \\ 1 \cdot y \\ 0 \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \cdot z \\ 0 \cdot z \\ 1 \cdot z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cdot d \\ 0 \cdot d \\ 0 \cdot d \end{pmatrix}$$

Ausmultipliziert:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cdot d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

### 14.5.2 Parameterform in Normalenform

Gegeben ist die Ebenengleichung  $E : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$ , die in die Normalenform umgewandelt werden soll.

Dies wird durch die Berechnung des Kreuzproduktes ermöglicht:

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

## 15 Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

→ Seite 260

Gegeben ist eine Gerade  $g : \vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v}$  und eine Ebene  $E : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$ . Im Folgenden soll die Lagebeziehung von  $g$  und  $E$  überprüft werden.

### 15.1 1. Fall: Parallel

Um unnötige Rechnungen zu ersparen wird zu erst getestet, ob  $g \parallel E$ .

Wenn  $g \parallel E$  ist, dann ist  $g \perp \vec{n}$ , dem Normalenvektor der Ebene.

Somit muss überprüft werden, ob  $\vec{v} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ .

### 15.2 2. Fall: Schnittpunkt

#### 1. Variante

Wenn es einen Schnittpunkt gibt, gilt  $g = E$ , also:

$$\vec{u} + t \cdot \vec{v} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$$

Nun werden die einzelnen  $x$ ,  $y$  und  $z$  Werte betrachtet:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

woraus sich drei Gleichungen und drei Unbekannte ergeben:

$$\begin{aligned} u_x + t \cdot v_x &= a_x + r \cdot b_x + s \cdot c_x \\ u_y + t \cdot v_y &= a_y + r \cdot b_y + s \cdot c_y \\ u_z + t \cdot v_z &= a_z + r \cdot b_z + s \cdot c_z \end{aligned} \tag{8}$$

Nachdem nach  $t$ ,  $r$  und  $s$  aufgelöst wurde, lässt sich  $t$  in  $g$  oder  $r$  und  $s$  in  $E$  einsetzen und es ergibt sich  $\vec{s}$ , beziehungsweise daraus folgend der Schnittpunkt  $S$ .

## 2. Variante

$E$  wird in Koordinatenform umgewandelt. Dazu wird zuerst der Normalenvektor von  $E$  berechnet:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$$

Außerdem muss  $d$  berechnet werden:

$$d = \vec{n} \cdot \vec{a}$$

Daraus ergibt sich die Koordinatenform der Ebene:

$$x \cdot n_x + y \cdot n_y + z \cdot n_z = d$$

Nun wird  $g$  in die  $x$ ,  $y$  und  $z$  Komponenten unterteilt. Es ergeben sich die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= u_x + t \cdot v_x \\ y &= u_y + t \cdot v_y \\ z &= u_z + t \cdot v_z \end{aligned} \tag{9}$$

welche nun in  $E$  eingesetzt werden:

$$(u_x + t \cdot v_x) \cdot n_x + (u_y + t \cdot v_y) \cdot n_y + (u_z + t \cdot v_z) \cdot n_z = d$$

Nun wird nach  $t$  aufgelöst und in  $g$  eingesetzt.  $g$  lässt sich anschließend als  $\vec{s}$  ausmultiplizieren, was dem Schnittpunkt  $S$  entspricht.

## 15.3 3. Fall: Identisch

Falls  $g \in E$ , so ergibt sich beim Berechnen des Schnittpunktes eine wahre Aussage.

Des Weiteren gilt  $g \parallel E$ , also  $\vec{v} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$ .

## 15.4 CAS

Das Gleichungssystem oben (2) lässt sich mit dem CAS wie folgt lösen:

*menu*  $\rightarrow$  3 : Algebra  $\rightarrow$  7 : Solve System of Equations  $\rightarrow$  1 : Solve System of Equations...

Falls der CAS:

- eine Lösung findet, existiert ein Schnittpunkt.
- *false* zurückgibt, sind sie Parallel.
- *true* zurückgibt, ist  $g \in E$ .

## 16 Lagebeziehung zwischen Punkt und Ebene

Ähnlich wie bei der Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene, wird der Punkt  $P$  in einen Vektor  $\vec{p}$  umgewandelt und der Ebene  $E$  gleichgesetzt. Somit ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

woraus sich 3 Gleichungen und 2 Unbekannte ergeben:

$$\begin{aligned} p_x &= a_x + r \cdot b_x + s \cdot c_x \\ p_y &= a_y + r \cdot b_y + s \cdot c_y \\ p_z &= a_z + r \cdot b_z + s \cdot c_z \end{aligned} \tag{10}$$

Falls  $P \in E$ , dann lassen sich  $r$  und  $s$  berechnen.

Falls  $P \notin E$ , so ergibt sich eine widersprüchliche Aussage.

### 16.1 CAS

Falls der CAS:

- eine Lösung findet, gilt  $P \in E$ .
- keine Lösung findet, gilt  $P \notin E$ .

## 17 Winkel zwischen Gerade und Ebene

Der Winkel zwischen dem Richtungsvektor  $\vec{v}$  einer Gerade  $g$  und einer Ebene  $E$  wird mit Hilfe des Normalenvektors  $\vec{n}$  der Ebene berechnet. Für den Winkel  $\alpha$  zwischen  $g$  und  $E$  gilt:

$$\alpha = 90 - \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

## 18 Flächenberechnung von Ebenen

### 18.1 Fläche eines Parallelogramms

Fläche eines Parallelogramms entspricht dem Betrag des Normalenvektors der Ebene.

Somit gilt:

$$A_{\square} = |\vec{n}|$$

beziehungsweise

$$A_{\square} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha$$

### 18.2 Fläche eines Quadrates

Bei einem Quadrat kann diese Formel zu

$$A_{\square} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

vereinfacht werden, da  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , weshalb  $\alpha = 90^\circ$ , sodass  $\sin \alpha = 1$ .

### 18.3 Fläche eines Dreiecks

Da ein Dreieck der halben Fläche eines Parallelogramms entspricht gilt:

$$A_{\triangle} = \frac{|\vec{n}|}{2}$$

beziehungsweise

$$A_{\triangle} = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \alpha}{2}$$

### 18.4 Fläche eines beliebigen Vierecks

Um die Fläche eines beliebigen Vierecks zu berechnen, wird das Viereck in Dreiecke unterteilt, welche wie gewöhnlich berechnet und letztendlich aufsummiert werden.

Für ein Viereck mit den Punkten  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  gilt:

$$A = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} + \frac{|\vec{AC} \times \vec{AD}|}{2}$$

## 19 Schnittpunkte von Ebene und Koordinatenachsen

Gegeben sei eine Ebene mit der Ebenengleichung in Koordinatenform:

$$E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

Um den Schnittpunkt  $S_x$  mit der X-Achse zu errechnen, wird  $y = 0$  und  $z = 0$  gesetzt, sodass

$$a \cdot x = d$$

überbleibt und nach  $x$  umgeformt werden kann. Selbiges gilt zum Berechnen von  $S_y$  und  $S_z$ .

## 20 Schnittgerade zwischen zwei Ebenen

Gegeben sind zwei Ebenengleichungen in...

### 20.1 Parameterform

$$E_1 : \vec{x} = \vec{a} + q \cdot \vec{b} + r \cdot \vec{c}$$

$$E_2 : \vec{x} = \vec{u} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$$

Für die Schnittgerade  $g$  gilt  $E_1 = E_2$ , also:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

woraus sich drei Gleichungen und vier Unbekannte ergeben:

$$\begin{aligned} a_x + q \cdot b_x + r \cdot c_x &= u_x + s \cdot v_x + t \cdot w_x \\ a_y + q \cdot b_y + r \cdot c_y &= u_y + s \cdot v_y + t \cdot w_y \\ a_z + q \cdot b_z + r \cdot c_z &= u_z + s \cdot v_z + t \cdot w_z \end{aligned} \tag{11}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich zu einer Geradengleichung  $g$  auflösen, sodass sich für

$$g : \vec{x} = \vec{n} + s \cdot \vec{m}$$

ergibt.



### 20.1.1 CAS

Das Gleichungssystem oben (5) lässt sich mit dem CAS wie folgt lösen:  
*menu* → *3 : Algebra* → *7 : Solve System of Equations* → *1 : Solve System of Equations...*

## 20.2 Koordinatenform

$$E_1 : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

$$E_2 : t \cdot x + u \cdot y + v \cdot z = w$$

Dadurch ergeben sich zwei Gleichungen und drei Unbekannte, die sich nur teilweise auflösen lassen.

Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}x &= y + i \\y &= y \\z &= j\end{aligned}\tag{12}$$

wobei  $i$  und  $j$  sich durch Auflösen des Gleichungssystems ergeben.

Dadurch ergibt sich für  $g$ :

$$\begin{aligned}g : \vec{x} &= \begin{pmatrix} y + i \\ y \\ j \end{pmatrix} \\g : \vec{x} &= \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ j \end{pmatrix} \\g : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ j \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{13}$$

wobei durch das Ausklammern von  $y$  der Richtungsvektor entsteht.

## 21 Winkel zwischen zwei Ebenen

Um den Schnittwinkel zweier Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  zu berechnen wird der Winkel der Normalenvektoren  $\vec{n}_1$  und  $\vec{n}_2$  berechnet.

→ Siehe *Winkel zwischen zwei Vektoren*

## 22 Spatvolumen

Gegeben seien die Vektoren  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  und  $\vec{c}$ . Es soll das Volumen mit der Grundfläche eines Parallelogramms berechnet werden, welches sich zwischen diesen Vektoren bildet.

Für das Volumen gilt:  $V = h \cdot A$ , wobei  $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$ .  $h$  ergibt sich aus dem Skalarprodukt von  $\cos \varphi$  und  $\vec{c}$ . Also  $h = \cos \varphi \cdot |\vec{c}|$ , wobei für  $\cos \varphi$  gilt:  $\cos \varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{c}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{c}|}$ .

Somit ergibt sich:

$$V = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{(|\vec{a} \times \vec{b}|) \cdot |\vec{c}|} \cdot |\vec{c}| \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Vereinfacht:

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

### 22.1 Grundfläche entspricht Parallelogramm

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

### 22.2 Volumen einer Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

### 22.3 Volumen eines Tetraeders

(Pyramide mit  $\triangle$  als Grundfläche)

$$V = \frac{1}{6} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

## 23 CAS Commands

### 23.1 dotP

Zur Berechnung des Skalarproduktes zweier Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$ .

CAS:

$$\textit{dotP}(a, b)$$

### 23.2 norm

Zur Berechnung des Betrags eines Vektors  $|\vec{v}|$ .

CAS:

$$\textit{norm}(v)$$

### 23.3 crossP

Zur Berechnung des Kreuzproduktes  $\vec{a} \times \vec{b}$  zweier Vektoren.

CAS:

$$\textit{crossP}(a, b)$$

## Part III

# STOCHASTIK

### 23.4 Definitionen

#### 23.4.1 statistische Erhebungen

- Die Durchführung einer Statistik - (z.B. das Befrage von Personen / Zählen von Gegenständen)

#### 23.4.2 Merkmalsträger

- Das untersuchte Objekt der Statistik - (z.B. Personen oder Autos)

#### 23.4.3 Merkmal

- Der im Zusammenhang mit dem Merkmalsträger untersuchte Wert - (z.B. Größe/ Geschwindigkeit)

#### 23.4.4 Grundgesamtheit

- Die Summe aller Merkmalsträger

#### 23.4.5 Stichprobe

- ausgewählte Merkmalsträger der Grundgesamtheit

#### 23.4.6 Stichprobenumfang

- Die Anzahl  $n$  der Merkmalsträger einer Stichprobe

#### 23.4.7 Urliste

- Die Beobachtungsliste (Datentabelle)

#### 23.4.8 Stichprobenwert

- Ein Tabelleneintrag (eine Zeile)

#### 23.4.9 qualitative Merkmale

- nominal- oder Ordinalskala

#### **23.4.10 quantitative Merkmale**

- Messbar mit Zahlenwerten (metrisch) diskret: - nur ganze Zahlen / stetig:
- Reelle Zahlen

#### **23.4.11 absolute Häufigkeit $(H(ai))$**

- bei n Stichprobenwerten tritt ein Merkmal H- mal auf

#### **23.4.12 relative Häufigkeit $(h(ai))$**

- das Merkmal tritt in H/n aller Fälle auf (Bruch bzw %)

#### **23.4.13 Häufigkeitstabelle / Häufigkeitsverteilung**

- Tabelle mit H und Merkmalen

#### **23.4.14 Klasseneinteilung**

- Einteilen von Intervallen in Teilintervalle (zur Reduzierung der Datenmenge) - z.B Werte 10 - 20, Werte 20 - 30, etc

#### **23.4.15 Histogramm**

- Diagramm, welches die Unterschiede verschiedener Klassen darstellt

#### **23.4.16 Häufigkeitspolygon**

- Der graph der durch Verbinden der Histogramm Werte entsteht

#### **23.4.17 Summenpolygon**

- die summe der Histogramm werte dargestellt als funktion

#### **23.4.18 Spannweite $R$**

- die Differenz zwischen dem größten Stichprobenwert  $X_{max}$  und dem kleinsten  $X_{min}$

#### **23.4.19 Standardabweichung $\sigma_x$**

## 24 REGRESSION

### 24.1 Korrelation r

Die Korrelation  $r$  ist ein Maß für die Güte der Regression, also ein Maß für die Stärke des funktionalen Zusammenhangs.

$$\begin{aligned} ges. : g(x) &= mx \\ s &= (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 \dots \\ s(m) &= (y_1 - mx_1)^2 + (y_2 - mx_2)^2 + (y_3 - mx_3)^2 + \dots \quad (14) \\ s'(m) &= 0 \\ r^2 &= mx \cdot my \end{aligned}$$

(1) Berechnung der Abstände ohne Hilfsmittel

### 24.2 Aufgaben zur Regression

#### 24.2.1 Aufgabe 3

Eine der drei Geraden  $g$  mit  $g(x) = 0.2x + 1.5$ ,  $h$  mit  $h(x) = 0.4x + 0.8$  und  $i$  mit  $i(x) = 0.5x + 0.5$  ist eine Regressionsgerade zu den Datenpaaren (0—1), (2—2), (4—1) und (6—4).

Entscheiden Sie ohne Verwendung des Regressionsbefehls des Rechners, welche. Dokumentieren Sie einen Lösungsweg, der auch ohne GTR oder CAS nachvollziehbar ist.

RECHNUNG:

$$geg. : i(x) = 0.5x + 0.5$$

$$ges. : s$$

$$\begin{aligned} s &= (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 \dots \\ s(m) &= (y_1 - mx_1)^2 + (y_2 - mx_2)^2 + (y_3 - mx_3)^2 + (y_4 - mx_4)^2 \\ s(0.5) &= (1 - (0.5 \cdot 0 + 0.5))^2 + (2 - (0.5 \cdot 2 + 0.5))^2 + (1 - (0.5 \cdot 4 + 0.5))^2 + \\ &\quad (4 - (0.5 \cdot 6 + 0.5))^2 \\ s(0.5) &= 3 \end{aligned} \quad (15)$$

### 24.2.2 Nicht-lineare Regression

In einen Behälter wird fortlaufend 20 Liter Flüssigkeit eingefüllt und dann jeweils die Füllhöhe  $h$  gemessen.

a.)

Durch welche ganzrationale Funktion lässt sich der funktionale Zusammenhang zwischen der Füllhöhe  $h$  und dem Volumen  $V$  am besten beschreiben? Vergleichen Sie Modellierungen mit ganzrationalen Funktionen 2., 3. und 4. Grades miteinander.

$$\begin{aligned}f1(x) &= 0.000868x^2 + 1.5x - 12.63 \\f2(x) &= -0.000132x^3 + 0.028x^2 + 0.0095x - 1.06 \\f3(x) &= 8.7 \cdot 10^{-7}x^4 - 0.000373x^3 + 0.0489x^2 - 0.4753x + 0.105 \\r1^2 &= 0.981144 \\r2^2 &= 0.999137 \\r3^2 &= 0.9999\end{aligned}\tag{16}$$

(3) Somit ist die Regression 4. Grades am besten geeignet auf Grund der genauesten Korrelation

## **25 WAHRSCHEINLICHKEITEN**

### **25.1 Definitionen**

#### **25.1.1 Ergebnismenge $S$**

Die Menge aller möglichen Ergebnisse.

#### **25.1.2 Laplace-Versuche**

Alle Ergebnisse haben die selbe Chance aufzutreten.

#### **25.1.3 Nicht-Laplace-Versuche**

Alle Ergebnisse haben nicht die selbe Chance aufzutreten.

#### **25.1.4 Wahrscheinlichkeit $P$**

Gibt an, welche relative Häufigkeit bei häufiger Versuchsdurchführung zu erwarten ist.

#### **25.1.5 Ereignis**

Eine Teilmenge der Ergebnismenge  $S$  mit spezifischen Eigenschaften.

#### **25.1.6 unmögliches Ereignis**

$$P = 0\%$$

#### **25.1.7 sicheres Ereignis**

$$P = 100\%$$



### 25.1.8 Inverses Baumdiagramm

Die Pfade in umgekehrter Reihenfolge (bei unterschiedlichen Verzweigungen (z.B. (j,n) und (m,w)))

Bedingte Wahrscheinlichkeit:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Totale Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)$$

**Satz von Bayes**

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A) \cdot P_A(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B)} \end{aligned} \quad (17)$$

### 25.1.9 Totale Wahrscheinlichkeit

$P(\text{*ein Buchstabe*})$  die Gesamtwahrscheinlichkeit für ein Ereignis

### 25.1.10 Bedingte Wahrscheinlichkeit / Häufigkeit

Die zweite Bedingung in einem Baumdiagramm (Zweite Verzweigung)

$P_{\text{erste Bedingung}}(\text{zweite Bedingung})$

z.B.  $P_A(B)$

## 25.2 Beispiele

Table 1: Eine 6 würfeln

Anzahl Würfe	10	100	1000
Anzahl Werte (Absolute Häufigkeit)	4	16	163
%-Angabe (Relative Häufigkeit)	40%	16%	16.3%
Richtwert (Wahrscheinlichkeit)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

## Würfelspiel

2 Würfel, gewonnen "Pasch"

$$S = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), \dots, (3, 6)\}$$

$$E = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}$$

Table 2: Beispiele für Zufallsversuche

Zufallversuch	Ergebnismenge
Wurf einer Münze	$S = \{K, Z\}$
Random Int von 1 bis 49	$S = \{1, 2, 3, \dots, 49\}$
Körpergröße eines Säuglings	$S = \{\dots, 46, \dots, 55, \dots\}$
Ausgang eines Fußballspiels	$S = \{1, 0, 2\}$

## Seite 337 Nummer 7

Aus einer Klasse mit 18 Mädchen und 9 Jungen sollen einige Jugendliche ausgelost werden. Dies geschieht mit Hilfe eines Glücksrads mit 27 gleich großen Sektoren.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein "repräsentatives" Ereignis? Welche Ereignisse wären nicht "repräsentativ"?

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Ergebnis

- (1) zwei Mädchen und ein Junge
- (2) vier Mädchen und zwei Jungen
- (3) sechs Mädchen und drei Jungen

Repräsentativ:  $\frac{2}{3}$  Mädchen,  $\frac{1}{3}$  Jungen

Nicht-Repräsentativ:  $\frac{2}{3}$  Jungen,  $\frac{1}{3}$  Mädchen

$$1: P = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 14.8\%$$

$$2: P = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2.19\%$$

$$3: P = \left(\frac{2}{3}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 0.325\%$$

## Additionssatz

Eine Kugellagerfabrik prüft Kugeln auf Abweichungen in Härte und Durchmesser. Bestimme die Häufigkeit der nicht einwandfreien Kugeln.

$$\begin{aligned}
 P(d \cup h) &= P(d) + P(h) - P(d \cap h) \\
 P(d \cup h) &= \frac{65}{1000} + \frac{78}{1000} - \frac{43}{1000} \\
 P(d \cup h) &= \frac{1}{10} \\
 P(d \cup h) &= 10\%
 \end{aligned} \tag{18}$$

## Strickwaren 2. Wahl

$$\begin{aligned}
 P(F_a \cup M_u \cup M_a) &= P(F_a) + P(M_u) + P(M_a) - P(F_a \cap M_u) - P(F_a \cap M_a) - P(M_u \cap M_a) + \\
 &\quad P(F_a \cap M_u \cap M_a) \\
 P(F_a \cup M_u \cup M_a) &= 5.1\% + 5.3\% + 4.7\% - 0.4\% - 0.9\% - 1.5\% + 0.3\% \\
 P(F_a \cup M_u \cup M_a) &= 12.6\%
 \end{aligned} \tag{19}$$

## Schulhefte

Kariert mit und ohne Rand und nicht Kariert

Table 3: Werte

	$K$	$\bar{K}$	$\sum$
$R$	33	19	52
$\bar{R}$	22	12	34
$\sum$	55	31	86

Table 4: Zeichen

	$K$	$\bar{K}$	$\sum$
$R$	$H(R \cap K)$	$H(R \cap \bar{K})$	$H(R)$
$\bar{R}$	$H(\bar{R} \cap K)$	$H(\bar{R} \cap \bar{K})$	$H(\bar{R})$
$\sum$	$H(K)$	$H(\bar{K})$	<i>Gesamtheit</i>

### AB "Der Additionssatz" Nr 7

Wahrscheinlichkeit aus einem Skatspiel Herz oder König zu ziehen

$$\begin{aligned}P(k \cup h) &= P(k) + P(h) - P(k \cap h) \\P(d \cup h) &= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32} \\P(d \cup h) &= \frac{11}{32} \\P(d \cup h) &= \underline{\underline{34.375\%}}\end{aligned}\tag{20}$$

### AB "Der Additionssatz" Nr 8

Wahrscheinlichkeit dass eine Zahl  $i$  **nicht** durch 3 oder 5 teilbar ist, wenn gilt:

$i$  in range(10, 100)

$$\begin{aligned}P(\overline{Mod_3} \cup \overline{Mod_5}) &= 100 - P(Mod_3) + P(Mod_5) - P(Mod_3 \cap Mod_5) \\P(Mod_3 \cup Mod_5) &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} \\P(Mod_3 \cup Mod_5) &= \frac{7}{15} \\P(Mod_3 \cup Mod_5) &= 46.\overline{6}\% \\P(\overline{Mod_3} \cup \overline{Mod_5}) &= 100\% - 46.\overline{6}\% \\P(\overline{Mod_3} \cup \overline{Mod_5}) &= 53.\overline{3}\%\end{aligned}\tag{21}$$

### AB "Der Additionssatz" Nr 9

Wahrscheinlichkeit bei einem Multiple-Choice-Test bei 6 Fragen und 4 Antwortmöglichkeiten pro Frage 5 oder 6 antworten richtig zu beantworten.

$$\begin{aligned}P(R_5 \cup R_6) &= P(R_5) + P(R_6) \\P(R_5 \cup R_6) &= \left(\frac{1}{4}\right)^6 + 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \frac{3}{4} \\P(R_5 \cup R_6) &= \frac{19}{4096} \\P(R_5 \cup R_6) &= \underline{\underline{0.464\%}}\end{aligned}\tag{22}$$

### Seite 343 Nr 4

Geschlecht (**M**ännlich, **W**eiblich), Führerschein verloren (**J**a, **N**ein)

Table 5: Werte

	$J$	$N$	$\Sigma$
$M$	$h(J \cap M)$ 20.5%	$h(N \cap M)$ 61.5%	$h(M)$ 82%
$W$	$h(J \cap W)$ 2.52%	$h(N \cap W)$ 15.48%	$h(W)$ 18%
$\Sigma$	$h(J)$ 23.02%	$h(N)$ 76.98%	100%

### AB Nummer 2: Tbc- Erkrankungen

Gesund, **K**rank, Testergebnis **P**ositiv, **N**egativ

Table 6: Werte

	$G$	$K$	$\Sigma$
$P$	$P(G \cap P)$ 3.996%	$P(K \cap P)$ 0.095%	$P(P)$ 4.091%
$N$	$P(G \cap N)$ 95.904%	$P(K \cap N)$ 0.005%	$P(N)$ 95.9089%
$\Sigma$	$P(G)$ 99.9%	$P(K)$ 0.1%	100%

### Seite 351 Nummer 5

F = Funktionstüchtig

M = Messfahler

E = Erkannt

$$P(\overline{F} \cap \overline{M} \cap E) = P(\overline{F}) \cdot P(\overline{M}) \cdot P(E)$$

## ”n über k”

Definition:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Beispiel Pascal’sches Dreieck

$$\begin{aligned}(a+b)^0 &= 1 \\(a+b)^1 &= 1a + 1b \\(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + b^2 \\(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\(a+b)^4 &= 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 \\(a+b)^n &= \binom{n}{0} \cdot a^n b^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} b^1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot a^0 b^n\end{aligned} \tag{23}$$

## Formel von Bernoulli

Bedingungen:

- mit zurückliegenden (gleichbleibenden) Pfadwahrscheinlichkeiten
- 2 Möglichkeiten (J/N)
- Ungeordnete Reihenfolge

n = Anzahl

W = Beliebige Wahrscheinlichkeit

K = Zielanzahl

$$P(x = K) = B(x = K) = \binom{n}{K} \cdot (p)^K \cdot (1-p)^{n-K}$$

Sonderfall  $B(0)$ :

$$B_{n,p}(x \geq 1) = 1 - (1-p)^n$$

## Zwei relevante Kenngrößen ( $\sigma$ & $\mu$ )

Erwartungswert  $\mu = n \cdot p$

Wenn  $\mu$  Nachkommastellen hat:

$\mu = (n + 1) \cdot p$  ohne Nachkommastellen. Standardabweichung

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$  (Maß für Streuung)

$\sigma$ -Regeln gelten nur, wenn  $\sigma > 3$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} > 3$$

$$= n \cdot p \cdot (1 - p) > 9$$

$$= n \cdot 0.25 > 9$$

$n$  muss groß sein, damit die  $\sigma$ -Regeln anwendbar sind.

$$B(\mu - c \cdot \sigma \leq x \leq \mu + c \cdot \sigma) = \gamma$$

$\gamma$  entspricht der gewünschten %-Zahl

Table 7: Seite 381 Nummer 2

$p$	$\mu$	$\sigma$	<b>Bemerkungen</b>
0.1	5	2.12	
0.5	25	3.54	größte Standardabweichung und breiteste Verteilung
0.8	40	2.89	

$$V(p) = n \cdot p \cdot (1 - p)$$

### Variante 1

$$\begin{aligned}V'(p) &= 0 \\ \text{solve}(0 = \frac{d}{dp}(n \cdot p \cdot (1 - p)), p) \\ p &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

### Variante 2

$$\begin{aligned}V(p) &= n \cdot p \cdot (1 - p) \\ V(p) &= n \cdot (p - p^2) \\ V'(p) &= (1 - 2 \cdot p) \cdot n \\ V'(p) &= -2 \cdot p \cdot n + n \\ -n &= -2 \cdot p \cdot n \\ 1 &= 2 \cdot p \\ p &= \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{24}$$

### Variante 3

$$\begin{aligned}\sigma &= \sqrt{n \cdot (p - p^2)} \\ \sigma'(p) &= \frac{1 \cdot n \cdot (1 - 2 \cdot p)}{2 \cdot \sqrt{n \cdot (p - p^2)}} \\ \sigma'(p) &= 0 \\ 0 &= 1 - 2 \cdot p \\ p &= \frac{1}{2}\end{aligned} \tag{25}$$



## 26 Von der Gesamtheit auf die Stichprobe

Seite 405 Nummer 14

geg.:

$$n = 3700$$

$x \triangleq$  Anzahl der Gewinne

$$p = \frac{1}{37}$$

$$\gamma = 95\% \rightarrow c = 1.96$$

ges.:

$$x_1$$

$$x_2$$

**Rechnung:**

$$\mu = n \cdot p = 3700 \cdot \frac{1}{37}$$

$$\mu = 100$$

$$\sigma = \sqrt{3700 \cdot \frac{1}{37} \cdot \left(1 - \frac{1}{37}\right)}$$

$$\sigma = 9.86$$

$$B_{3700, \frac{1}{37}}(\mu - 1.96 \cdot \sigma \leq x \leq \mu + 1.96 \cdot \sigma) > 95\%$$

$$x_1 = \mu - 1.96 \cdot \sigma$$

$$x_1 = 80.67 \approx 81$$

$$x_2 = \mu + 1.96 \cdot \sigma$$

$$x_2 = 119.32 \approx 119$$

CAS:

$$\text{binomcdf}(3700, \frac{1}{37}, 81, 119)$$

$$B_{3700, \frac{1}{37}}(\mu - 1.96 \cdot \sigma \leq x \leq \mu + 1.96 \cdot \sigma) = 95.22\%$$

## Seite 404 Nummer 11

**geg.:**

$x \triangleq$  Anzahl der benötigten Betten

$$n = 400$$

$$p = 88\%$$

$$\gamma = 90\% \Rightarrow c = 1.64$$

**ges.:**

$$x_1$$

$$x_2$$

**Rechnung:**

$$\mu = p \cdot n = 0.88 \cdot 400 = 352$$

$$\sigma = \sqrt{400 \cdot 0.88 \cdot (1 - 0.88)}$$

$$\sigma = 6.499$$

$$x_1 = 352 - 1.64 \cdot 6.499$$

$$x_1 = 341, 341 \approx 341$$

$$x_2 = 352 + 1.64 \cdot 6.499$$

$$x_2 = 362, 76 \approx 362$$

$$B_{400,0.88}(341 \leq x \leq 362) = 90.9\%$$

## 27 Von der Stichprobe auf die Gesamtheit

geg.:

$$n = 500$$

$$H = x = 273$$

$$h = \frac{273}{500}$$

$$\gamma = 95\% \Rightarrow c = 1.96$$

$x \triangleq$  Anzahl der Stimmen für Oberbürgermeister

ges.:

$p$

Es gilt:

$$B(\mu - c \cdot \sigma \leq x \leq \mu + c \cdot \sigma) = \gamma$$

Also

$$B(\mu - 1.96 \cdot \sigma \leq 273 \leq \mu + 1.96 \cdot \sigma) = 95\%$$

Bzw

$$n \cdot p - c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)} \leq x \leq n \cdot p + c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Vereinfacht

$$p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} \leq \frac{x}{n} \leq p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}}$$

Also

$$p - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{500}} \leq \frac{x}{500} \leq p + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{500}}$$

Daraus ergibt sich

$$f_1(p) = p - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{500}}$$

$$f_2(p) = p + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{500}}$$

## CAS

$$p_1 = \text{solve}(f_1(p) = \frac{x}{n}, p)$$
$$p_2 = \text{solve}(f_1(p) = \frac{x}{n}, p)$$

### 1. Fall: $x = \mu$

Die Häufigkeit stimmt mit dem tatsächlichen Wahlanteil überein.

### 2. Fall: $x > \mu$

Es wurden zufällig viele "Anhänger" des Oberbürgermeisters befragt.

Mehr Stimmen für den Oberbürgermeister, als es der tatsächliche Anteil der Gesamtbevölkerung sein wird.

### 3. Fall: $x < \mu$

Es wurden zufällig viele "Gegner" des Oberbürgermeisters befragt.

Weniger Stimmen für den Oberbürgermeister, als es der tatsächliche Anteil der Gesamtbevölkerung sein wird.

## 28 n unbekannt

geg.:

$$x_1 = 100$$

$$p = \frac{1}{3}$$

$$\gamma = 80\% \Rightarrow c = 1.28$$

$x \triangleq$  Anzahl von Personen mit Blutgruppe A

ges.:

n

Rechnung:

$$B_{n, \frac{1}{3}}(\mu - 1.28 \cdot \sigma \leq x \leq \mu + 1.28 \cdot \sigma) = 0.8$$

$$\mu - 1.28 \cdot \sigma = 100$$

$$n \cdot \frac{1}{3} - 1.28 \cdot \sqrt{n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 100$$

CAS:

$$\text{solve}(n \cdot \frac{1}{3} - 1.28 \cdot \sqrt{n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 100, n)$$

$$n = 333,035 \approx 334$$

Probe:

$$\text{binomCdf}(334, \frac{1}{3}, 100, 334 \cdot \frac{1}{3} - 1.28 \cdot \sqrt{334 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}) = 0.818$$

$$n = 334$$

## 29 Wahl eines Stichprobenumfangs

geg.:

$$\gamma = 95\% \Rightarrow c = 1.96$$

$$\text{Genauigkeit } 1\% \Rightarrow d = 0.01$$

ges.:

$n$

Ansatz:

$$\begin{aligned} \left| \frac{x}{n} - p \right| &\leq d \\ \left| \frac{n}{n} - p \right| &\leq c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \leq d \\ \Rightarrow c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} &\leq d \\ c^2 \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{n} &\leq d^2 \end{aligned}$$

### 29.1 1. Möglichkeit

$p$  ist ungefähr bekannt:

$p = \text{*geschätzter wert*}$

$$\frac{c^2}{d^2} \cdot p \cdot (1-p) \leq n$$

### 29.2 2. Möglichkeit

$p$  ist unbekannt:

$\Rightarrow$  mit schlechtestem Fall rechnen

$p \cdot (1-p) \rightarrow$  das Maximum davon, also  $f(p) = p \cdot (1-p)$

$\Rightarrow p_{\max} = 0.5$ , daraus folgt  $p \cdot (1-p) = 0.25$

$$\frac{c^2}{d^2} \cdot 0.25 \leq n$$

## 30 Normalverteilungen

*vgl. Seite 420 ff.*

Die Normalverteilung ist die Annäherung einer Funktion  $\varphi(x)$  an eine Binomialverteilung.

Dabei ist die Grundform von  $\varphi(x)$ :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Diese wird um  $\mu$  nach rechts verschoben und um  $\sigma$  beziehungsweise  $\frac{1}{\sigma}$  entlang der  $X$  beziehungsweise  $Y$ -Achse gestreckt:

$$P_{\mu,\sigma}(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Das Äquivalent zu

$$B_{100,0.2}(x = 43)$$

lautet:

$$P_{\mu,\sigma}(x = 43) = \varphi(43) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{43-20}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} \right)^2}$$

mit dem CAS wie folgt:

$$\text{normpdf}(x, \mu, \sigma)$$

Um

$$B_{100,0.2}(0 \leq x \leq 20)$$

zu berechnen wird

$$P_{\mu,\sigma}(x \leq 20) = \int_0^{20+0.5} \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-20}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} \right)^2} dx$$

gerechnet, wobei die 0.5 in der Obergrenze des Integrals sich auf Grund der ganzen Zahlen / Balken der Binomialverteilung ergibt.

$$B_{100,0.2}(10 \leq x \leq 70)$$

wird wie folgt berechnet:

$$P_{\mu,\sigma}(10 \leq x \leq 70) = \int_{10-0.5}^{70+0.5} \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left( \frac{x-20}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}} \right)^2} dx$$

also:

$$P_{\mu,\sigma}(10 \leq x \leq 70) = \Phi \left( \frac{70 + 0.5 - \mu}{\sigma} \right) - \Phi \left( \frac{10 - 0.5 - \mu}{\sigma} \right)$$

und mit dem CAS:

$$\text{normcdf}(x_1, x_2, \mu, \sigma)$$



## 31 Normalverteilte Zufallsgrößen

Die Normalverteilung kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit stufenlosen Übergängen darstellen.

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \cdot dx$$

wobei gilt:  $x \in \mathbb{R}$ .

Des Weiteren kann die Obergrenze  $\infty$  sein, da weder  $n$  noch  $p$  für die Berechnung der Normalverteilung bekannt sein muss.

Berechnet man die Ober und Untergrenzen eines Intervalls, für den z.B.  $P = 0.9$  gegeben ist gilt:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi \cdot \left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = 0.9$$

$k_1$  und  $k_2$  lassen sich mit dem CAS wie folgt berechnen:

$$\text{invnorm}(0.95, \mu, \sigma)$$

wobei die 0.95 sich aus  $p + \frac{1-p}{2}$  ergeben, da die Mitte des gegebenen Intervalls sich bei  $\mu$  befindet und somit die flächen links und rechts außerhalb des Intervalls liegt, weshalb für die Obergrenze  $P(k_2) = p + \frac{1-p}{2}$  und für die Untergrenze  $P(k_1) = \frac{1-p}{2}$  gilt.

## 32 $\sigma$ - Regeln Erweiterung: Berechnung von $c$ - Werten

Die Formel für die  $c$  - Werte basieren auf der Formel  $x_k = \mu + c \cdot \sigma$   
Darurch leitet sich die folgende Formel für  $c$  her:

$$\frac{\gamma + 1}{2} = \Phi(c)$$

Mit dem CAS lässt sich  $c$  wie folgt berechnen:

$$\text{invnorm}\left(\frac{\gamma + 1}{2}, 0, 1\right)$$

## 33 CAS Commands

### 33.1 nCr

Zur Eingabe von  $\binom{n}{k}$ :

CAS:

*nCr*(*n*, *k*)

### 33.2 binompdf

Zur Berechnung von:

$$B_{n,p}(k)$$

CAS:

*binompdf*(*n*, *p*, *k*)

### 33.3 binomcdf

Zur Berechnung von:

$$B_{n,p}(k_1 \leq x \leq k_2)$$

CAS:

*binomcdf*(*n*, *p*, *k*<sub>1</sub>, *k*<sub>2</sub>)

### 33.4 nsolve

Zum Lösen von Gleichungen wie:

$$B_{30,0.8}(x \leq k) > 0.3$$

CAS:

*nsolve(binomcdf(30, 0.8, 0, k) = 0.3, k, 0, 30)*

Probe:

$$B_{30,0.8}(x \leq 23) = 0.39$$

*binomcdf(30,0.8,0,23)*

### 33.5 normpdf

Zum Berechnen eines Spezifischen Wertes einer Normalverteilung, wie

$$P_{\mu,\sigma}(x)$$

CAS:

$$\textit{normpdf}(x, \mu, \sigma)$$

### 33.6 normcdf

Zum Berechnen eines Wertebereiches einer Normalverteilung, wie

$$P_{\mu,\sigma}(x_1 \leq x \leq x_2)$$

CAS:

$$\textit{normcdf}(x_1, x_2, \mu, \sigma)$$

### 33.7 invnorm

Zum Berechnen der Obergrenze bzw Untergrenze bei Normalverteilungen.

CAS:

$$\text{invnorm}(p(k), \mu, \sigma)$$

wobei  $p(k)$  der jeweiligen Wahrscheinlichkeit der Grenze entspricht.

Es gilt für die Obergrenze:

$$p(k_2) = p + \frac{1 - p}{2}$$

und für die Untergrenze:

$$p(k_1) = \frac{1 - p}{2}$$