MATHE ABI

Frederik Höft Lennard Rizkallah

April 11, 2019

Mit Unterstützung von
Elaine Buchholz

Contents

Part I
ANALYSIS

1 Infinitesimalrechnung

1.1 Differentialrechnung

Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ beschreibt den Verlauf der Steigung von $f(x)$.

1.1.1 Ableitungsregeln

Für $\{a, b, n\} \in \mathbb{R}$ und $\{g, h\}$ als Variable gilt:

- Konstante Funktion

  $(a)' = 0$

- Faktorregel

  $(a \cdot g)' = a \cdot g'$

- Summenregel

  $(h \pm g)' = g' \pm h'$

- Produktregel

  $(g \cdot h)' = g' \cdot h + g \cdot h'$

- Quotientenregel

  $\left(\frac{g}{h}\right)' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}$

- Reziprokenregel

  $\left(\frac{1}{g}\right)' = \frac{-g'}{g^2}$

- Potenzregel

  $(g^n)' = n \cdot g^{n-1}$

- Kettenregel

  $(g \circ h)'(x) = (g(h(x))' = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ wobei $g'(x)$ die äußere und $h'(x)$ die innere Ableitung ist.
  Beispiel:
  Gegeben sei $f(x) = (x^3 + 1)^2$, was sich als Verkettung von

  $$g(h) = h^2$$

  mit der Funktion

  $$h(x) = x^3 + 1$$

  darstellen lässt, da gilt $f(x) = g(h(x))$, also $f = g \circ h$. Somit ergibt sich:

  $$g'(h) = 2h$$

  sowie

  $$h'(x) = 3x^2$$

  Da $f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ ergibt sich

  $$f'(x) = 2(x^3 + 1) \cdot 3x^2$$

1.2 Integralrechnung

Die Aufleitung $F(x)$ einer Funktion $f(x)$ beschreibt die Fläche unter der Funktion $F(x)$. Um die Fläche von x_{min} bis x_{max} unter der Funktion $f(x)$ zu bestimmen, berechnet man:

$$\int_{x_{min}}^{x_{max}} f(x)\ dx = F(x_{max}) - F(x_{min}) = [F(x)]_{x_{min}}^{x_{max}}$$

Beispiel:
Gegeben sei $f(x) = 2x^3 + 4x + 2$, $x_{min} = 1$ und $x_{max} = 5$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^3 + 4x + 2 \\
\int_1^5 f(x)\ dx &= F(5) - F(1) \\
\int_1^5 f(x)\ dx &= \left[\frac{2}{4}x^4 + 2x^2 + 2x\right]_1^5 \\
\int_1^5 f(x)\ dx &= \left(\frac{2}{4} \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5\right) - \left(\frac{2}{4} \cdot 1^4 + 2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1\right) \\
\int_1^5 f(x)\ dx &= 372.5 - 4.5 \\
\int_1^5 f(x)\ dx &= \underline{\underline{368}}
\end{aligned}$$

1.2.1 1. Sonderfall: $x_{min} = 0$

Wenn $x_{min} = 0$ ist, dann ist $F(x_{min}) = 0$, dashalb kann die Untergrenze vernachlässigt werden. Gegeben sei $f(x) = 2x^3 + 4x + 2$, $x_{min} = 0$ und $x_{max} = 5$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= 2x^3 + 4x + 2 \\
\int_0^5 f(x)\ dx &= F(5) - F(0) \\
\int_0^5 f(x)\ dx &= \left[\frac{2}{4}x^4 + 2x^2 + 2x\right]_0^5 \\
\int_0^5 f(x)\ dx &= \left(\frac{2}{4} \cdot 5^4 + 2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5\right) - 0 \\
\int_0^5 f(x)\ dx &= \underline{\underline{372.5}}
\end{aligned}$$

1.2.2 2. Sonderfall: Nullstellen

Befindet sich eine oder mehrere Nullstelle(n) zwischen x_{min} und x_{max}, so muss die Fläche an diesen geteilt und deren Beträge anschließend aufsummiert werden, da es sich bei dem Abschnitt, bei dem gilt $f(x) < 0$, sonst um eine "negative Fläche" handeln würde. Bei einer Funktion $f(x) = x^3 + 1$ mit einer Nullstelle x_0 bei $x = 1$ müssen die Ober und Untergrenzen zur bestimmung der Intervals von $x_{min} = -1$ bis $x_{max} = 5$ wie folgt gelegt werden:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + 1 \\
\int_{-1}^{5} f(x)\ dx &= \left| \int_{-1}^{1} f(x)\ dx \right| + \left| \int_{1}^{5} f(x)\ dx \right| \\
\int_{-1}^{5} f(x)\ dx &= |F(1) - F(-1)| + |F(5) - F(1)| \\
\int_{-1}^{5} f(x)\ dx &= \left| \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_{-1}^{1} \right| + \left| \left[\frac{x^4}{4} + x \right]_{1}^{5} \right| \\
\int_{-1}^{5} f(x)\ dx &= \left| \left(\frac{1^4}{4} + 1 \right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} + (-1) \right) \right| + \\
&\quad \left| \left(\frac{5^4}{4} + 5 \right) - \left(\frac{1^4}{4} + 1 \right) \right| \\
\int_{-1}^{5} f(x)\ dx &= \left| 1.25 - (-1.25) \right| + \left| 161.25 - 1.25 \right| \\
\int_{-1}^{5} f(x)\ dx &= \underline{\underline{162.5}}
\end{aligned}
$$

2 Rotationsvolumen

Beim Rotationsvolumen werden die Grundregel der Integralrechnungen benötigt. Das am Ende berechnete Volumen ist das der Funktion, welche entweder um die x-Achse oder die y-Achse rotiert wurde. Die folgende Formel ist Grundlage für die Berechnung:

$$V = \pi \cdot \int_a^z (f(x))^2 \, dx$$

Mit dieser Formel zur Hand können wir eine Funktion $f(x)$ untersuchen. Zum Zweck der Berechnung benutzen wir einen Halbkreis, dessen Funktion $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ist. Zum Zwecke der Berechnung gehen wir des weiteren davon aus (da diese breits berechnet wurden), dass die Nullstellen der Funktion 3 und -3 sind. Beweis:

$$\begin{aligned} f(-3) &= \sqrt{9-(-3)^2} = \sqrt{9-9} = 0 \\ f(3) &= \sqrt{9-3^2} \quad\;\; = \sqrt{9-9} = 0 \end{aligned}$$

Dann lässt sich auf folgende Weise das Volumen der rotierenden Halbkreisfunktion bestimmen:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{9-x^2} \\ V &= \pi \cdot \int_{-3}^{3} (f(x)^2) \, dx \\ V &= \pi \cdot \int_{-3}^{3} (\sqrt{9-x^2})^2) \, dx \\ V &= \pi \cdot \int_{-3}^{3} (9-x^2) \, dx \\ V &= \pi \cdot \left[9x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^{3} \, dx \\ V &= \pi \cdot \left[\left(9 \cdot 3 - \frac{3^3}{3} \right) - \left(9 \cdot -3 - \frac{(-3)^3}{3} \right) \right] \\ V &= \pi \cdot \left[\left(27 - \frac{27}{3} \right) - \left(-27 - \frac{-27}{3} \right) \right] \\ V &= \pi \cdot [(27-9) - (-27+9)] \\ V &= \pi \cdot [18+18] = \underline{\underline{36\pi}} \end{aligned}$$

2.1 Y-Achsenrotation

Ein besonderer Fall ist die bereits erwähnte Rotation um die y-Achse. Hierbei muss man wissen, dass die Funktion umgestellt werden muss. Geben wir nun vor, dass wir eine Funktion haben die $f(x) = x^3 + 4$ ist, dann kann man diese ganz einfach umstellen:

$$\begin{aligned} f(x) = y &= x^3 + 4 \\ y - 4 &= x^3 \\ \sqrt[3]{y-4} &= x \end{aligned}$$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist ablesbar aus der Orginalfunktion und ist $y = 4$. Wir wollen die Volumen von dem y-Achsenabschnitt bis zur -1 berechnen. Demnach gilt für unser Integral $\pi \cdot \int_{-1}^{4} (\sqrt[3]{y-4})^2 dy$. Die Brechnung für das Volumen sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
V &= \pi \cdot \int_{-1}^{4} \left(\sqrt[3]{y-4} \right)^2 dy \\
V &= \pi \cdot \int_{-1}^{4} (y-4)^{\frac{2}{3}} dy \\
V &= \pi \cdot \left[\frac{3 \cdot (y-4)^{\frac{5}{3}}}{5} \right]_{-1}^{4} dy \\
V &= \pi \cdot \left[\left(\frac{3 \cdot (4-4)^{\frac{5}{3}}}{5} \right) - \left(\frac{3 \cdot ((-1)-4)^{\frac{5}{3}}}{5} \right) \right] \\
V &= \pi \cdot \left[\left(\frac{3 \cdot 0^{\frac{5}{3}}}{5} \right) - \left(\frac{3 \cdot (-5)^{\frac{5}{3}}}{5} \right) \right] \\
V &= \pi \cdot \left[- \left(-3 \cdot 5^{\frac{2}{3}} \right) \right] \\
V &= \underline{\underline{\pi \cdot 3 \cdot 5^{\frac{2}{3}}}}
\end{aligned}$$

3 Abstandsberechnung Punkt-Funktion

Bei der Abstandsberechnung zwischen einem Punkt und einer Funktion greift man auf den Satz des Pythagoras zurück. Denn der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten ist eine direkte Linie zwischen diesen, die mit $s_{AB} = \sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2}$ berechnen lässt. Mit der Annahme, dass eine Funktion aus unendlich vielen Punkten besteht müssen wir einfach den Punkt A oder B durch die Funktion ersetzen. Die Formel würde dann für eine Punkt A und eine Funktion $f(x)$ wie folgt lauten:

$$s(x) = \sqrt{(A_x - x)^2 + (A_y - f(x))^2}$$

Mit der Annahme, dass wir einen Punkt A(5|9) haben und eine Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 5$ können wir mit der Formel nun den Abstand zwischen den Punkten für alle Punkte berechnen:

$$s(x) = \sqrt{(5 - x)^2 + (9 - (x^2 - 5x + 5))^2}$$

Da das Ableiten der Funktion von Hand zu viel Zeit und Arbeit in Anspruch nehmen würde lösen wir den Rest mit dem CAS. Dabei müssen wir erst einmal die Ableitung der Funktion bestimmen.

CAS:

$$\begin{aligned} s(x) &:= \sqrt{(5 - x)^2 + (9 - (x^2 - 5x + 5))^2} \\ s'(x) &:= \frac{d}{dx}(s(x)) \end{aligned}$$

Nachdem wir die Ableitung gebildet haben, müssen wir zu Hoch- und Tiefpunktbestimmung (und der damit verbundenen Distanz) die Nustellen der Ableitung bestimmen.

CAS:

$$\begin{aligned} zeros(s'(x), x) &\approx [-0.556307, 2.37158, 5.68473] \\ s(zeros(s'(x), x)) &\approx [5.63017, 10.5657, \underline{\underline{0.694116}}] \end{aligned}$$

Der minimale Abstand der zwischen dem Punkt A(5|9) und der Funktion $f(x) = x^2 - 5x + 5$ ist ≈ 0.694116.

4 Kurvendiskussionen

Die Funktion $f(x)$ soll untersucht werden.

4.1 Symmetrie

4.1.1 Achsensymmetrie

Achsensymmetrie ist vorhanden wenn gilt:

$$f(x) = f(-x)$$

4.1.2 Punktsymmetrie

Punktsymmetrie ist vorhanden wenn gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$

4.2 Verhalten im Unendlichen

Schreibweise:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

und

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

4.3 Schnittpunkt mit der Y - Achse

Für den Schnittpunkt mit der Y - Achse gilt:

$$S_y = f(0)$$

4.4 Nullstellen

4.4.1 PQ - Formel

Gegeben sei $f(x) = x^2 - px - q$.
Es gilt:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

4.4.2 CAS

$$solve(f(x) = 0, x)$$

4.5 Extremstellen

Die Extremstellen von $f(x)$ entsprechen den Nullstellen von $f'(x)$.
Wobei gilt:

- wenn $f''(x_0) < 0$, so handelt es sich um einen Hochpunkt.
- wenn $f''(x_0) > 0$, so handelt es sich um einen Tiefpunkt.

4.5.1 Extrempunkt

$$P_{Ex} = (f''(x_0)|f(f''(x_0)))$$

4.6 Wendestellen

Die Extremstellen von $f(x)$ entsprechen den Nullstellen von $f''(x)$.
Wobei gilt:

- wenn $f'''(x_0) < 0$, so handelt es sich um einen Links - Rechts - Wendepunkt.
- wenn $f'''(x_0) > 0$, so handelt es sich um einen Rechts - Links - Wendepunkt.

4.6.1 Wendepunkt

$$P_W = (f'''(x_0)|f(f'''(x_0)))$$

5 Trassierung

5.1 Mathematischer Ansatz

Das Ziel von Trassierungen ist es, zwei abschnittsweise definierte Funktionen $g(x)$ und $h(x)$ mit einer Funktion $f(x)$ zu verbinden. Dabei wird unterteilt in:

- Nahtloser Übergang

  Ein Übergang wird als nahtlos bezeichnet, wenn für einen Punkt P am Rand des Definitionsbereiches von $g(x)$ gilt:

  $$g(P_x) = f(P_x)$$

  und $g(x)$ und $f(x)$ somit den selben Punkt P teilen.

- Knickfreier Übergang

  Ein Übergang wird als knickfrei bezeichnet, wenn für einen Punkt P am Rand des Definitionsbereiches von $g(x)$ gilt:

  $$\begin{aligned} g(P_x) &= f(P_x) \\ g'(P_x) &= f'(P_x) \end{aligned}$$

  und $g(x)$ und $f(x)$ im Punkt P die selbe Steigung haben. Somit handelt ees sich bei der gesuchten Funktion $f(x)$ um eine Funktion 3. Grades.

- Krümmungsruckfreier Übergang

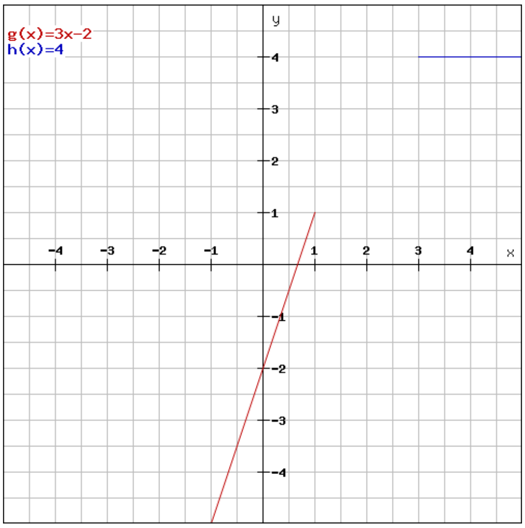
  Ein Übergang wird als krümmungsruckfrei bezeichnet, wenn für einen Punkt P am Rand des Definitionsbereiches von $g(x)$ gilt:

  $$\begin{aligned} g(P_x) &= f(P_x) \\ g'(P_x) &= f'(P_x) \\ g''(P_x) &= f''(P_x) \end{aligned}$$

  und $g(x)$ und $f(x)$ im Punkt P die selbe Steigung und den selben Krümmungskreis haben. Somit handelt ees sich bei der gesuchten Funktion $f(x)$ um eine Funktion 5. Grades.

5.2 Beispiel

Die beiden Funktionen $g(x) = 3x - 2, x \leq 1$ und $h(x) = 4, x \geq 3$ sollen knickfrei mit einander verbunden werden.



Somit handelt es sich bei der gesuchten Funktion um

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

mit den folgenden Bedingungen:

$$g(1) = f(1)$$
$$h(3) = f(3)$$
$$g'(1) = f'(1)$$
$$h'(3) = f'(3)$$

Daraus lässt sich folgendes Gleichungssystem aufstellen:

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 - 2 &= a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + c \cdot 1 + d \\ 4 &= a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d \\ 3 &= 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 + c \\ 0 &= 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c \end{aligned}$$

Welches sich mit dem CAS lösen lässt:

$$solve\left(\begin{cases} 1 = a + b + c + d \\ 4 = a \cdot 3^3 + b \cdot 3^2 + c \cdot 3 + d \\ 3 = 3a + 2b + c \\ 0 = 3a \cdot 3^2 + 2b \cdot 3 + c \end{cases}, \{a, b, c, d\}\right)$$

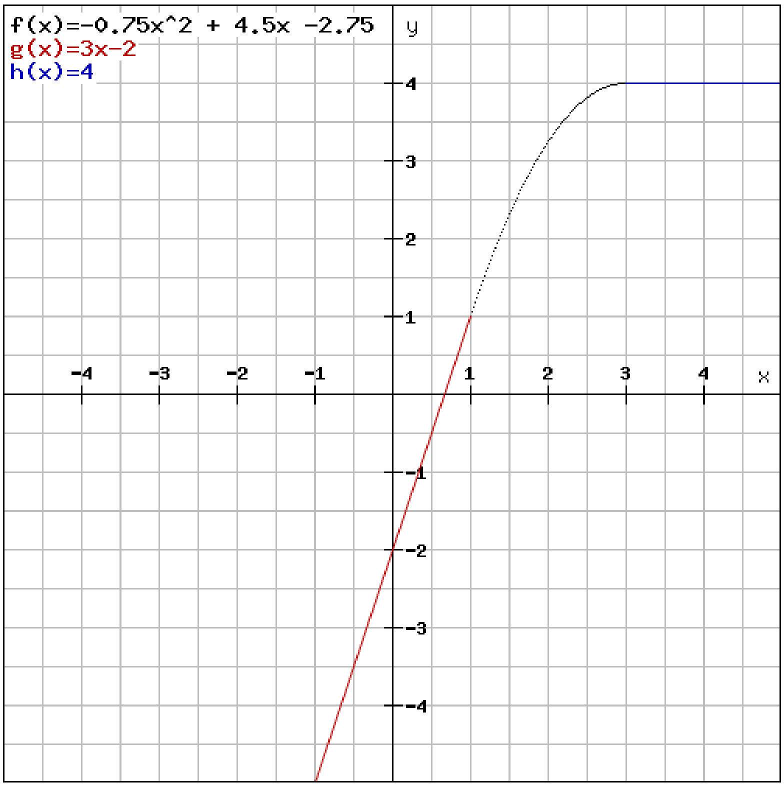
Als Ergebnis erhalten wir:

$$a = 0$$
$$b = -0.75$$
$$c = 4.5$$
$$d = -2.75$$

Somit ergibt sich für $f(x)$:

$$f(x) = -0.75x^2 + 4.5x - 2.75, \ 1 \leq x \leq 3$$

Eingezeichnet in das Koordinatensystem:



6 Biegelinien

6.1 Wichtige Variablen

- Elastizitätsmodul E:

  Werkstoffspezifischer Wert in $\frac{N}{m^2}$

- Flächenträgheitsmoment I:

  Formspezifischer Wert in m^4

- Streckenlast $q(x)$:

$$
\begin{aligned}
w''''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} q(x) \\
w''''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot q
\end{aligned}
$$

  in Newton pro Meter $\frac{N}{m}$

- Querkraft $Q(x)$:

$$
\begin{aligned}
w'''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} - Q(x) \\
w'''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot (qx + c_1)
\end{aligned}
$$

  in Newton N

- Biegemoment $w''(x)$:

$$
\begin{aligned}
w''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} - M(x) \\
w''(x) &= \frac{1}{E \cdot I} \cdot (\frac{1}{2}qx^2 + c_1 \cdot x + c_2)
\end{aligned}
$$

  in Newtonmeter Nm

- Steigung der Biegelinie $w'(x)$

$$
w'(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (\frac{1}{6}qx^3 + \frac{1}{2}c_1x^2 + c_2x + c_3)
$$

- Biegelinie $w(x)$

$$w(x) = \frac{1}{E \cdot I} \cdot (\frac{1}{24}qx^4 + \frac{1}{6}c_1x^3 + \frac{1}{6}c_2x^2 + c_3x + c_4)$$

in Meter m

Table 1: Ermittlung der Integrationskonstanten

Art der Randbedingung	**Biegung** w	**Steigung** w'	**Moment** w''	**Querkraft** w'''
Festlager / Loslager	0	$\neq 0$	0	$\neq 0$
Einspannung	0	0	$\neq 0$	$\neq 0$
Loses Ende	$\neq 0$	$\neq 0$	0	0

6.2 Mathematischer Ansatz & Beispiel

Gegeben sei ein Träger für den gilt:

$$\begin{aligned} E &= 200 \cdot 10^9 \frac{N}{m^2} \\ I &= \frac{1}{12}(B \cdot H^3 - b \cdot h^3) \\ B &= 0.3 \\ H &= 0.5 \\ b &= 0.27 \\ h &= 0.47 \\ q(x) &= -8000 \frac{N}{m} \end{aligned}$$

Des Weiteren ist ein Festlager bei $x = 0$ und ein Loslager bei $x = 10$ bekannt. Es soll überprüft werden, ob das Biegemoment eines Trägers den Betrag von $150000Nm$ überschreitet. Es lassen sich folgende Bedingungen aufstellen:

$$\begin{aligned} w(0) &= 0 \\ w''(0) &= 0 \Rightarrow \frac{1}{e \cdot I} \cdot c_2 \Rightarrow \underline{\underline{c_2 = 0}} \\ w(10) &= 0 \\ w''(10) &= 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{e \cdot I} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (-8000) \cdot 10^2 + 10 \cdot c_1 \right) \\ 0 &= -400000 + 10 \cdot c_1 \\ c_1 &= 40000 \end{aligned}$$

Somit ist das Biegemoment $-M(x) = -\frac{1}{2} \cdot 8000x^2 + 40000x$ bzw $M(x) = \frac{1}{2} \cdot 8000x^2 - 40000x$ bekannt. Um die x-Stelle des maximale Biegemoment zu bestimmen wird $M'(x) = 0$ gesetzt.

$$\begin{aligned} M'(x) &= 0 \\ 8000x - 40000 &= 0 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Somit ist uns bekannt, dass das maximale Biegemoment bei $x = 5$ vorliegt. Nun berechnen wir das Biegemoment an $x = 5$.

$$\begin{aligned} M(5) &= 4000 \cdot 5^2 - 40000 \cdot 5 \\ M(5) &= -100000 \end{aligned}$$

Somit hält der Träger, da

$$|-100000| < 150000$$

7 Wachstumsfunktionen

7.1 Wachstum und Zerfall

Generell gilt $f(t) = a \cdot c^t = a \cdot e^{k \cdot t}$

7.1.1 Bestand $f(t)$

Der Bestand ist definiert als

$$f(t) = a \cdot c^t$$

wobei c definiert ist als:

$$c = e^k$$

7.1.2 Wachstumsfaktor c

7.1.3 Wachstumskonstante k

Es gilt:

$$k = \ln(c)$$

Bei Wachstum gilt $k > 0$ und bei Zerfall $k < 0$

7.1.4 Verdopplungszeit

Für die Verdopplungszeit t_v gilt:

$$t_v = \frac{\ln(2)}{k}$$

7.1.5 Halbierungszeit

Für die Halbierungszeit t_h gilt:

$$t_h = \frac{\ln(0.5)}{k}$$

7.1.6 Wachstumsgeschwindigkeit

Die Wachstumsgeschwindigkeit zum Zeitpunkt t entspricht der Ableitung der Wachstumsfunktion am Zeitpunkt t. Somit gilt:

$$f(t) = a \cdot e^{k \cdot t}$$
$$f'(t) = k \cdot a \cdot e^{k \cdot t}$$

Also

$$f'(t) = k \cdot f(t)$$

8 e - Funktionen

Die Ableitung von e^x bleibt e^x.
Hat man also $f(x) = e^{2x}$, wird zu erst der Exponen betrachtet, als $2 \cdot x$, was sich zu 2 ableitet.
Diese 2 ist wird jetzt vor das e geschrieben, sodass sich für die Ableitung von $f(x) = e^{2x}$ $f'(x) = 2 \cdot e^{2x}$ ergibt.
Es folgen einige Beispiele:

$$f(x) = a \cdot e^{\frac{1}{a} \cdot x^2}$$
$$f'(x) = 2x \cdot e^{\frac{1}{a} \cdot x^2}$$

Der Faktor a kürzt sich mit der Ableitung $\frac{2x}{a}$ des Exponenten weg.

$$f(x) = e^{2x^2 - 3x}$$
$$f'(x) = 4x - 3 \cdot e^{2x^2 - 3x}$$

da die Ableitung des Exponenten zum Faktor für die Basis, also $e^{\cdots}$ wird.
Bezüglich Logarithmen gilt:

$$\ln\left(e^{2x}\right) = 2x$$

9 Begrenztes Wachstum

9.1 Generell

Generell gilt für begrenzte Wachstumsfunktionen:

$$f(t) = s + [f(0) - s] \cdot e^{-k \cdot t}$$

Wobei für den Verlauf der Wachstumsgeschwindigkeit gilt:

$$f'(t) = -k \cdot [f(0) - s] \cdot e^{-k \cdot t}$$

Die Differentialgleichung leitet sich wie folgt aus der Wachstumsgeschwindigkeit her:

$$\begin{aligned}
f'(t) &= -k \cdot \Big(f(0) - s\Big) \cdot e^{-k \cdot t} \\
f'(t) &= -k \cdot \Big(f(0) - s\Big) \cdot e^{-k \cdot t} + s - s \\
f'(t) &= -k \cdot \Big(f(t) - s\Big) \\
f'(t) &= k \cdot s - k \cdot f(t) - s
\end{aligned}$$

Wobei für die Wachstumskonstante gilt $k < 0$

9.2 Wachstum

Für begrenztes Wachstum gilt $a < 0$

9.3 Zerfall

Für begrenzten Zerfall gilt $a > 0$

9.4 Begrenztes Wachstum (CAS + Regression)

Table 2: Begrenztes Wachstum mit Regression

Mathematischer Ansatz	**Ansatzt CAS**
$f(t) = s + \Big(f(0) - s\Big) \cdot e^{-k \cdot t}$	$f(x) = a \cdot b^x$
$f(t) = s + a \cdot e^{-k \cdot t}$	

e^{-k} aus dem mathemetischen Ansatz etspricht hierbei b aus dem CAS Ansatz. Da der CAS mit dem s aus dem mathematischen Ansatz nicht klar kommt müssen die Werte vor der Regression angepasst werden. Während normalerweise also gilt:

t	$f(t)$
t_1	$f(t_1)$
t_2	$f(t_2)$
...	...

Gilt für die Regression mit dem CAS:

t	$f(t) - s$
t_1	$f(t_1) - s$
t_2	$f(t_2) - s$
...	...

Nun kann mit dem CAS die exponentielle Regression durchgeführt werden. Für die Umwandlung von der CAS in die normale Schreibweise gilt:

$$f(t) = s + a \cdot e^{-\ln(b) \cdot t}$$

Wobei a und c den vom CAS errechneten Werten entsprechen.
Anmerung
Der CAS ist scheinbar nicht in der Lage mit negativen Werten zu rechnen. Wenn also gilt $f(t) - s < 0$ müssen die Werte mit dem Faktor -1 multipliziert werden.

10 Logistisches Wachstum

Bei logistischen Wachstumsfunktionen handelt es sich um eine Art begrenztes Wachstum, wobei die Besonderheit hier die Wendestelle X_w bei $\frac{s}{2}$, also bei der Hälfte der Sättigungsgrenze darstellt.

10.1 Funktionsansatz

Für logistisches Wachstum gilt:

$$f(t) = \frac{1}{1 - \left(\frac{s}{f(0)} - 1\right) \cdot e^{-s \cdot k \cdot t}}$$

bezeihungsweise

$$f(t) = \frac{a \cdot s}{a + (s - a) \cdot e^{-s \cdot k \cdot t}}$$

10.2 Differentialgleichung (DGL)

Die Differentialgleichung ist bei Logistischem Wachstum wie folgt definiert:

$$f'(t) = k \cdot f(t) \cdot (s - f(t))$$

10.3 Berechnung der Wendestelle X_w

Da generell für Wendestellen $f''(t) = 0$ gilt, lässt sich folgende Formel herleiten:

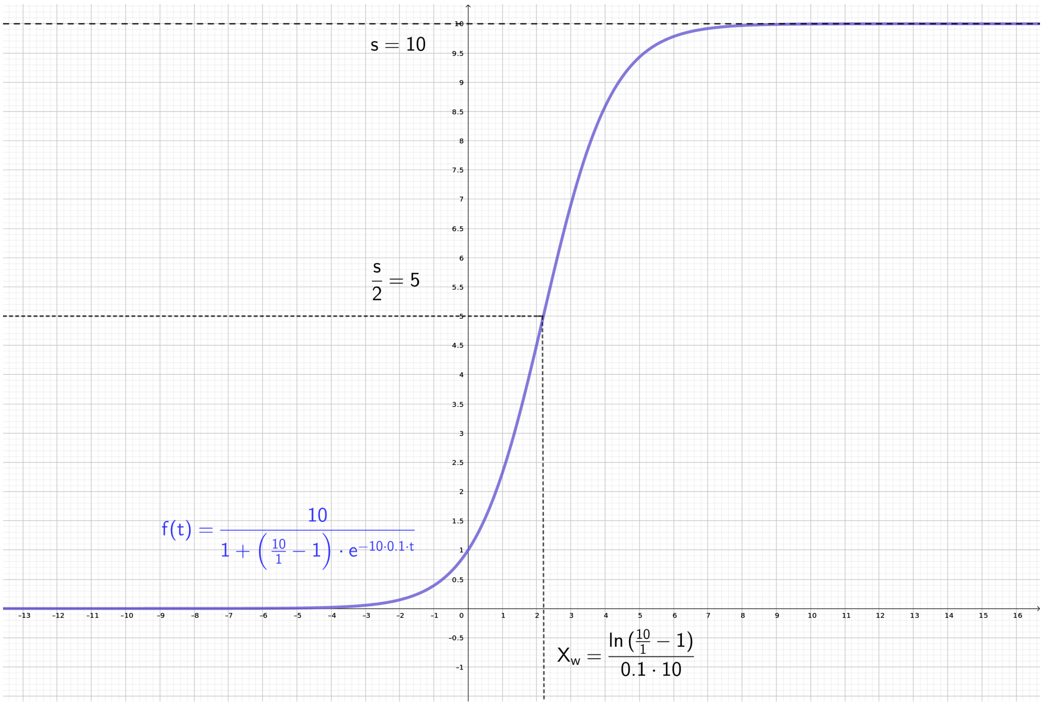
$$X_w = \frac{\ln\left(\frac{s}{f(0)} - 1\right)}{k \cdot s}$$

Wobei für $f(X_w)$ gilt:

$$f(X_w) = \frac{s}{2}$$

10.4 Beispiel

Eingezeichnet in ein Koordinatensystem sehen logistische Wachstumsfunktionen wie folgt aus:



10.5 Regression + CAS

Während allgemein der Funktionsansatz

$$f(t) = \frac{s}{1 + \left(\frac{s}{f(0)} - 1\right) \cdot e^{-k \cdot s \cdot t}}$$

gilt für die Logistische Regression mit dem CAS der Ansatz:

$$f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-b \cdot x}}$$

Simit gilt für a, b und c:

$$a = s$$
$$b = \left(\frac{s}{f(0)} - 1\right)$$
$$c = k \cdot s$$

Part II

VEKTOREN

11 Ortsvektoren

Der Ortsvektor eines Punktes P geht vom Ursprung O nach P. Somit gilt $\vec{p} = \vec{OP}$.

12 Addition und Subtraktion

Es gilt:

$$\vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{pmatrix}$$

13 Multiplikation

13.1 Multiplikation mit einem Skalar

Wird ein Vektor $\vec{v}$ mit einem Skalar r multipliziert, so wird jedes Element des Vektors mit dem Skalar multipliziert.
Es gilt:

$$r \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} r \cdot v_x \\ r \cdot v_y \\ r \cdot v_z \end{pmatrix}$$

13.2 Skalarprodukt

Werden zwei Vektoren multipliziert, so erhält man einen Skalar.
Es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z$$

14 Betrag (Länge) eines Vektors

Es gilt:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

15 Vektor durch zwei Punkte

Der Vektor $\vec{AB}$ zwischen Punkt A und B lässt sich mit den Ortsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ berechnen.
Es gilt:

$$\vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$$

16 Orthogonalitätsbedingung

Wenn $\vec{a} \perp \vec{b}$, dann gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

also

$$a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = 0$$

17 Winkel zwischen zwei Vektoren

Der Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ lässt sich wie folgt berechnen:

17.1 Mathematischer Ansatz

$$\alpha = \arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

17.2 CAS

$$arccos(\frac{dotP(a,b)}{norm(a) \cdot norm(b)})$$

18 Abstand windschiefer Geraden

18.1 Mathematischer Ansatz

Der Abstand zweier Geraden $g : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ und $h : \vec{x} = \vec{v} + s \cdot \vec{w}$, wobei die Faktoren r und s unbekannt sind, lässt sich mit Hilfe des Vektorzuges ermitteln.
Für den Vektorzug $\vec{d}$, welcher einen Vektor zwischen den Geraden g und h bildet gilt:

$$\vec{d} = g - h$$

also:

$$\vec{d} = (\vec{a} + r \cdot \vec{b}) - (\vec{v} + s \cdot \vec{w})$$

Des Weiteren müssen die Richtungsvektoren $\vec{b}$ und $\vec{w}$ orthogonal zu $\vec{d}$ sein.
Es gilt also:

$$\vec{b} \cdot \vec{d} = 0$$

$$\vec{w} \cdot \vec{d} = 0$$

Somit lassen sich die 2 Gleichungen nach den beiden Unbekannten r und s auflösen. r und s werden nun in $\vec{d}$ eingesetzt und $|\vec{d}|$ kann berechnet werden:

$$|\vec{d}| = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

18.2 CAS

$$solve\left(\begin{cases} dotP(d, w) = 0 \\ dotP(d, b) = 0 \end{cases}, \{r, s\} \right)$$

r und s in d einsetzen.

$$|\vec{d}| = norm(d)$$

19 Kreuzprodukt und Normalenvektor

Der Normalenvektor $\vec{n}$ steht senkrecht auf der Ebene E.
Wobei der Betrag $|\vec{n}|$ des Normalenvektors der Fläche der Ebene entspricht. Er lässt sich aus dem Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren von E berechnen. Somit gilt:

$$\vec{n} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y \\ a_z \cdot b_x - a_x \cdot b_z \\ a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x \end{pmatrix}$$

Des Weiteren lässt sich des Kreuzprodukt mit der *Zuhalteregel* ($\rightarrow$ Internet) von Hand berechnen oder mit dem CAS:

$$crossP(a, b)$$

20 Ebenen

20.1 Parameterform

Die Parameterform definiert eine Ebene E mit drei Punkten A, B und C als:

$$E : \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC}$$

wobei $\vec{x}$ als Abtastvektor, $\vec{OA}$ als Hinführungsvektor und $\vec{AB}$, sowie $\vec{AC}$ als Spannvektoren bezeichnet werden.

20.2 Normalenform

Die Normalenform definiert eine Ebene E mit einem Hinführungsvektor $\vec{p}$ und dem Normalenvektor $\vec{n}$ als:

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

20.3 Koordinatenform

Die Koordinatenform entspricht der ausmultiplizierten Normalenform.
Es gilt:

$$x \cdot x_n + y \cdot y_n + z \cdot z_n = d$$

wobei d dem Skalarprodukt $\vec{p} \cdot \vec{n}$ aus der Normalenform entspricht.

20.4 Achsenabschnittsform

Die Achsenabschnittsform entspricht der durch d dividierten Koordinatenform.

$$\frac{1}{\frac{d}{x_n}} \cdot x + \frac{1}{\frac{d}{y_n}} \cdot y + \frac{1}{\frac{d}{z_n}} \cdot z = 1$$

was als

$$\frac{1}{x_s} \cdot x + \frac{1}{y_s} \cdot y + \frac{1}{z_s} \cdot z = 1$$

zusammengefasst werden kann.

20.5 Umformen von Ebenengleichungen

20.5.1 Koordinatenform in Parameterform

Gegeben ist die Ebenengleichung $E: a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$, die in die Parameterform umgewandelt werden soll.
Dazu wird zu erst durch Umformen der Gleichung eine Unbekannte eliminiert (z.B. $x = -\frac{b \cdot y}{a} - \frac{c \cdot z}{a} + \frac{d}{a}$).
Da die Parameterform aus Vektoren besateht, schreiben wir die drei Gleichungen für die x, y und z Koordinaten untereinander:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{b}{a} \cdot y - \frac{c}{a} \cdot z + \frac{1}{a} \cdot d \\ y &= \quad 1 \cdot y + 0 \ \cdot z + 0 \cdot d \\ z &= \quad 0 \cdot y + 1 \ \cdot z + 0 \cdot d \end{aligned}$$

Als Vektor ergibt sich somit:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \cdot y \\ 1 \cdot y \\ 0 \cdot y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \cdot z \\ 0 \cdot z \\ 1 \cdot z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cdot d \\ 0 \cdot d \\ 0 \cdot d \end{pmatrix}$$

Ausmultipliziert:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} \cdot d \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -\frac{b}{a} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -\frac{c}{a} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

20.5.2 Parameterform in Normalenform

Gegeben ist die Ebenengleichung $E : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$, die in die Normalenform umgewandelt werden soll.
Dies wird durch die Berechnung des Kreuzproduktes ermöglicht:

$$E : (\vec{x} - \vec{p}) \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0$$

21 Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene

→ *Seite 260*
Gegeben ist eine Gerade $g : \vec{x} = \vec{u} + t \cdot \vec{v}$ und eine
Ebene $E : \vec{x} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$. Im Folgenden soll die Lagebeziehung von g und E überprüft werden.

21.1 1. Fall: Parallel

Um unnötige Rechnungen zu ersparen wird zu erst getestet, ob $g \parallel E$.
Wenn $g \parallel E$ ist, dann ist $g \perp \vec{n}$, dem Normalenvektor der Ebene.
Somit muss überprüft werden, ob $\vec{v} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

21.2 2. Fall: Schnittpunkt

1. Variante

Wenn es einen Schnittpunkt gibt, gilt $g = E$, also:

$$\vec{u} + t \cdot \vec{v} = \vec{a} + r \cdot \vec{b} + s \cdot \vec{c}$$

Nun werden die einzelnen x, y und z Werte betrachtet:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

woraus sich drei Gleichungen und drei Unbekannte ergeben:

$$\begin{aligned} u_x + t \cdot v_x &= a_x + r \cdot b_x + s \cdot c_x \\ u_y + t \cdot v_y &= a_y + r \cdot b_y + s \cdot c_y \\ u_z + t \cdot v_z &= a_z + r \cdot b_z + s \cdot c_z \end{aligned} \tag{1}$$

Nachdem nach t, r und s aufgelöst wurde, lässt sich t in g oder r und s in E einsetzen und es ergibt sich $\vec{s}$, beziehungsweise daraus folgend der Schnittpunkt S.

2. Variante

E wird in Koordinatenform umgewandelt. Dazu wird zuerst der Normalenvektor von E berechnet:

$$\vec{n} = \vec{b} \times \vec{c}$$

Außerdem muss d berechnet werden:

$$d = \vec{n} \cdot \vec{a}$$

Daraus ergibt sich die Koordinatenform der Ebene:

$$x \cdot n_x + y \cdot n_y + z \cdot n_z = d$$

Nun wird g in die x, y und z Komponenten unterteilt.
Es ergeben sich die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= u_x + t \cdot v_x \\ y &= u_y + t \cdot v_y \\ z &= u_z + t \cdot v_z \end{aligned}$$

welche nun in E eingesetzt werden:

$$(u_x + t \cdot v_x) \cdot n_x + (u_y + t \cdot v_y) \cdot n_y + (u_z + t \cdot v_z) \cdot n_z = d$$

Nun wird nach t aufgelöst und in g eingesetzt. g lässt sich anschließend als $\vec{s}$ ausmultiplizierten, was dem Schnittpunkt S entspricht.

21.3 3. Fall: Identisch

Falls $g \in E$, so ergibt sich beim Berechnen des Schnittpunktes eine wahre Aussage.
Des Weiteren gilt $g \parallel E$, also $\vec{v} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = 0$.

21.4 CAS

Das Gleichungssystem oben (1) lässt sich mit dem CAS wie folgt lösen:
menu → 3 : Algebra → 7 : Solve System of Equations → 1 : Solve System of Equations...
Falls der CAS:

- eine Lösung findet, existiert ein Schnittpunkt.
- *false* zurückgibt, sind sie Parallel.
- *true* zurückgibt, ist $g \in E$.

22 Lagebeziehung zwischen Punkt und Ebene

Ähnlich wie bei der Lagebeziehung zwischen Gerade und Ebene, wird der Punkt P in einen Vektor $\vec{p}$ umgewandelt und der Ebene E gleichgesetzt. Somit ergibt sich:

$$\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix}$$

woraus sich 3 Gleichungen und 2 Unbekannte ergeben:

$$\begin{aligned} p_x &= a_x + r \cdot b_x + s \cdot c_x \\ p_y &= a_y + r \cdot b_y + s \cdot c_y \\ p_z &= a_z + r \cdot b_z + s \cdot c_z \end{aligned}$$

Falls $P \in E$, dann lassen sich r und s berechnen.
Falls $P \notin E$, so ergibt sich eine widersprüchliche Aussage.

22.1 CAS

Falls der CAS:

- eine Lösung findet, gilt $P \in E$.
- keine Lösung findet, gilt $P \notin E$.

23 Winkel zwischen Gerade und Ebene

Der Winkel zwischen dem Richtungsvektor $\vec{v}$ einer Gerade g und einer Ebene E wird mit Hilfe des Normalenvektors $\vec{n}$ der Ebene berechnet. Für den Winkel α zwischen g und E gilt:

$$\alpha = 90 - \arccos \frac{\vec{v} \cdot \vec{n}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}$$

24 Flächenberechnung von Ebenen

24.1 Fläche eines Parallelogramms

Fläche eines Parallelogramms entspricht dem Betrag des Normalenvektors der Ebene.
Somit gilt:

$$A_{\square} = |\vec{n}|$$

beziehungsweise

$$A_{\square} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha$$

24.2 Fläche eines Quadrates

Bei einem Quadrat kann diese Formel zu

$$A_{\square} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$$

vereinfacht werden, da $\vec{a} \perp \vec{b}$, weshalb $\alpha = 90°$, sodass $\sin\alpha = 1$.

24.3 Fläche eines Dreiecks

Da ein Dreieck der halben Fläche eines Parallelogramms entspricht gilt:

$$A_{\triangle} = \frac{|\vec{n}|}{2}$$

beziehungsweise

$$A_{\triangle} = \frac{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\alpha}{2}$$

24.4 Fläche eines beliebigen Vierecks

Um die Fläche iens beliebigen Vierecks zu berechnen, wir das Viereck in Dreiecke unterteilt, welche wie gewöhlich berechnet und letztendlich aufsummiert werden.
Für ein Viereck mit den Punkten A, B, C und D gilt:

$$A = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} + \frac{|\vec{AC} \times \vec{AD}|}{2}$$

25 Schnittpunkte von Ebene und Koordinatenachsen

Gegeben sei eine Ebene mit der Ebenengleichung in Koordinatenform:

$$E : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

Um den Schnittpunkt S_x mit der X-Achse zu errechnen, wird $y = 0$ und $z = 0$ gesetzt, sodass

$$a \cdot x = d$$

überbleibt und nach x umgeformt werden kann. Selbiges gilt zum Berechnen von S_y und S_z.

26 Schnittgerade zwischen zwei Ebenen

Gegeben sind zwei Ebenengelichungen in...

26.1 Parameterform

$$E_1 : \vec{x} = \vec{a} + q \cdot \vec{b} + r \cdot \vec{c}$$

$$E_2 : \vec{x} = \vec{u} + s \cdot \vec{v} + t \cdot \vec{w}$$

Für die Schnittgerade g gilt $E_1 = E_2$, also:

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \\ c_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$$

woraus sich drei Gleichungen und vier Unbekannte ergeben:

$$\begin{aligned} a_x + q \cdot b_x + r \cdot c_x &= u_x + s \cdot v_x + t \cdot w_x \\ a_y + q \cdot b_y + r \cdot c_y &= u_y + s \cdot v_y + t \cdot w_y \\ a_z + q \cdot b_z + r \cdot c_z &= u_z + s \cdot v_z + t \cdot w_z \end{aligned} \tag{2}$$

Dieses Gleichungssystem lässt sich zu einer Geradengleichung g auflösen, sodass sich für

$$g : \vec{x} = \vec{n} + s \cdot \vec{m}$$

ergibt.

26.1.1 CAS

Das Gleichungssystem oben (2) lässt sich mit dem CAS wie folgt lösen:
menu → 3 : Algebra → 7 : Solve System of Equations → 1 : Solve System of Equations...

26.2 Koordinatenform

$$E_1 : a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$
$$E_2 : t \cdot x + u \cdot y + v \cdot z = w$$

Dadurch ergeben sich zwei Gleichungen und drei Unbekannte, die sich nur teilweise auflösen lassen.
Zum Beispiel:

$$x = y + i$$
$$y = y$$
$$z = j$$

wobei i und j sich durch Auflösen des Gleichungssystems ergeben.
Dadurch ergibt sich für g:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} y + i \\ y \\ j \end{pmatrix}$$
$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} y \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ j \end{pmatrix}$$
$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot y + \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ j \end{pmatrix}$$

wobei durch das Ausklammern von y der Richtungsvektor entsteht.

27 Winkel zwischen zwei Ebenen

Um den Schnittwinkel zweier Ebenen E_1 und E_2 zu berechnen wird der Winkel der Normalenvektoren $\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ berechnet.
→ Siehe *Winkel zwischen zwei Vektoren*

28 Spatvolumen

Gegeben seien die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Es soll das Volumen mit der Grundfläche eines Parallelogramms berechnet werden, welches sich zwischen diesen Vektoren bildet.
Für das Volumen gilt: $V = h \cdot A$, wobei $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$. h ergibt sich aus dem Skalarprodukt von $\cos\varphi$ und $\vec{c}$. Also $h = \cos\varphi \cdot \vec{c}$, wobei für $\cos\varphi$ gilt: $\cos\varphi = \frac{\vec{n} \cdot \vec{c}}{|\vec{n}| \cdot |\vec{c}|}$.
Somit ergibt sich:

$$V = \frac{(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}}{(|\vec{a} \times \vec{b}|) \cdot |\vec{c}|} \cdot |\vec{c}| \cdot |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Vereinfacht:

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

28.1 Grundfläche entspricht Parallelogramm

$$V = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

28.2 Volumen einer Pyramide

$$V = \frac{1}{3} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

28.3 Volumen eines Tetraeders

(Pyramide mit $\triangle$ als Grundfläche)

$$V = \frac{1}{6} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

29 CAS Commands

29.1 dotP

Zur Berechnung des Skalarproduktes zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
CAS:

$$dotP(a, b)$$

29.2 norm

Zur Berechnung des Betrags eines Vektors $|\vec{v}|$.
CAS:

$$norm(v)$$

29.3 crossP

Zur Berechnung des Kreuzproduktes $\vec{a} \times \vec{b}$ zweier Vektoren.
CAS:

$$crossP(a, b)$$

Part III
STOCHASTIK

29.4 Definitionen

- Statistische Erhebungen

  Die Durchführung einer Statistik
  (z.B. das Befrage von Personen / Zählen von Gegenständen)

- Merkmalsträger

  Das untersuchte Objekt der Statistik
  (z.B. Personen oder Autos)

- Merkmal

  Der im Zusammenhang mit dem Merkmalsträger untersuchte Wert
  (z.B. Größe oder Geschwindigkeit)

- Grundgesamtheit

  Die Summe aller Merkmalsträger

- Stichprobe

  ausgewählte Merkmalsträger der Grundgesamtheit

- Stichprobenumfang

  Die Anzahl n der Merkmalsträger einer Stichprobe

- Urliste

  Die Beobachtugsliste (Datentabelle)

- Stichprobenwert

  Ein Tabelleneintrag (eine Zeile)

- Qualitative Merkmale

  nominal- oder Ordinalskala

- Quantitative Merkmale

  Messbar mit Zahlenwerten (metrisch)
  - diskret: $n \in \mathbb{Z}$
  - stetig: $n \in \mathbb{R}$

- Absolute Häufigkeit $H(ai)$

  bei n Stichprobenwerten tritt ein Merkmal H-mal auf

- Relative Häufigkeit $h(ai)$

  das Merkmal tritt in H/n aller Fälle auf (Bruch bzw %)

- Häufigkeitstabelle / Häufigkeitsverteilung

  Tabelle mit H und Merkmalen

- Klasseneinteilung

  Einteilen von Intervallen in Teilintervalle (zur Reduzierung der Datenmenge)
  z.B Werte 10 - 20, Werte 20 - 30, etc

- Histogramm

  Diagramm, welches die Unterschiede verschiedener Klassen darstellt

- Häufigkeitspolygon

  Der Graph der durch Verbinden der Histogramm-Werte entsteht

- Summenpolygon

  Die Summe der Histogramm werte dargestellt als Funktion

- Spannweite R

  Die Differenz zwischen dem größten Stichprobenwert X_{max} und dem kleinsten X_{min}

- Standardabweichung σx

  Durchschnittliche Abweichungen vom Mittelwert

30 REGRESSION

30.1 Korrelation r

Die Korrelation r ist ein Maß für die Güte der Regression, also ein Maß für die Stärke des funktionalen Zusammenhangs.

$$\begin{aligned} ges.: g(x) &= mx \\ s &= (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 ... \\ s(m) &= (y_1 - mx_1)^2 + (y_2 - mx_2)^2 + (y_3 - mx_3)^2 + ... \\ s'(m) &= 0 \\ r^2 &= mx \cdot my \end{aligned} \tag{3}$$

(3) Berechnung der Abstände ohne Hilfsmittel

30.2 Aufgaben zur Regression

30.2.1 Aufgabe 3

Eine der drei Geraden g mit $g(x) = 0.2x + 1.5$, h mit $h(x) = 0.4x + 0.8$ und i mit $i(x) = 0.5x + 0.5$ ist eine Regressionsgerade zu den Datenpaaren (0—1), (2—2), (4—1) und (6—4).
Entscheiden Sie ohne Verwendung des Regressionsbefehls des Rechners, welche. Dokumentieren Sie einen Lösungsweg, der auch ohne GTR oder CAS nachvollziehbar ist.

Rechnung:

$$\begin{aligned} &geg.: i(x) = 0.5x + 0.5 \\ &ges.: s \\ &\qquad s = (\Delta y_1)^2 + (\Delta y_2)^2 + (\Delta y_3)^2 ... \\ &\quad s(m) = (y_1 - mx_1)^2 + (y_2 - mx_2)^2 + (y_3 - mx_3)^2 + (y_4 - mx4)^2 \\ &\quad s(0.5) = (1 - (0.5 \cdot 0 + 0.5))^2 + (2 - (0.5 \cdot 2 + 0.5))^2 + (1 - (0.5 \cdot 4 + 0.5))^2 + \\ &\qquad\qquad (4 - (0.5 \cdot 6 + 0.5))^2 \\ &\quad s(0.5) = 3 \end{aligned}$$

30.2.2 Nicht-lineare Regression

In einen Behälter wird fortlaufend 20 Liter Flüssigkeit eingefüllt und dann jeweils die Füllhöhe h gemessen.

a.)
Durch welche ganzrationale Funktion lässt sich der funktionale Zusammenhang uwischen der Füllhöhe h und dem Volumen V am besten beschreiben? Vergleichen Sie Modellierungen mit ganzrationalen Funktionen 2., 3. und 4. Grades miteinander.

$$\begin{aligned}
f1(x) &= 0.000868x^2 + 1.5x - 12.63 \\
f2(x) &= -0.000132x^3 + 0.028x^2 + 0.0095x - 1.06 \\
f3(x) &= 8.7 \cdot 10^{-7}x^4 - 0.000373x^3 + 0.0489x^2 - 0.4753x + 0.105 \\
r1^2 &= 0.981144 \\
r2^2 &= 0.999137 \\
r3^2 &= 0.9999
\end{aligned}$$

(3) Somit ist die Regression 4. Grades am besten geeignet auf Grund der genausten Korrelation

31 WAHRSCHEINLICHKEITEN

31.1 Definitionen

31.1.1 Ergebnismenge S

Die Menge aller möglichen Ergebnisse.

31.1.2 Laplace-Versuche

Alle Ergebnisse haben die selbe Chance aufzutreten.

31.1.3 Nicht-Laplace-Versuche

Alle Ergebnisse haben nicht die selbe Chance aufzutreten.

31.1.4 Wahrscheinlichkeit P

Gibt an, welche relative Häufigkeit bei häufiger Versuchsdurchführung zu erwarten ist.

31.1.5 Ereignis

Eine Teilmenge der Ergebnismenge S mit spezifischen Eigenschaften.

31.1.6 unmögliches Ereignis

$P = 0\%$

31.1.7 sicheres Ereignis

$P = 100\%$

31.1.8 Inverses Baumdiagramm

Die Pfade in umgekehrter reihenfolge (bei unterschiedlichen Verzweigungen (zb (j,n) und (m,w)))
Bedingte Wahrscheinlichkeit:
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
Totale Wahrscheinlichkeit:
$P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A} \cdot P_{\overline{A}}(B))$
Satz von Bayes

$$P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$
$$= \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A) \cdot P_A(B) + P(\overline{A}) \cdot P_{\overline{A}}(B)}$$

31.1.9 Totale Wahrscheinlichkeit

$P(x)$ die Gesamtwahrscheinlichkeit für ein Ereignis x

31.1.10 Bedingte Wahrscheinlichkeit / Häufigkeit

Die zweite Bedingung in einem Baumdiagramm (Zweite Verzweigung)
$P_{ersteBedingung}(zweiteBedingung)$
zb $P_A(B)$

31.2 Beispiele

Table 3: Eine 6 würfeln

Anzahl Würfe	**10**	**100**	**1000**
Anzahl Werte (Absolute Häufigkeit)	4	16	163
%-Angabe (Relative Häufigkeit)	40%	16%	16.3%
Richtwert (Wahrscheinlichkeit)	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Würfelspiel

2 Würfel, gewonnen "Pasch"
$S = \Big\{(1,1),(1,2),(1,3),...,(3,6)\Big\}$
$E = \Big\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\Big\}$

Table 4: Beispiele für Zufallsversuche

Zufallversuch	**Ergebnismenge**
Wurf einer Münze	$S = \{K, Z\}$
Random Int von 1 bis 49	$S = \{1, 2, 3, ..., 49\}$
Körpergröße eines Säuglings	$S = \{..., 46, ..., 55, ...\}$
Ausgang eines Fußballspiels	$S = \{1, 0, 2\}$

Seite 337 Nummer 7

Aus einer Klasse mit 18 Mädchen und 9 Jungen sollen einige Jugendliche ausgelost werden. Dies geschieht mit Hilfe eines Glückrads mit 27 gleich großen Sektoren.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für ein "repräsentatives" Ereignis? Welche Ereignisse wären nicht "repräsentativ"?
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für das Ergebnis
(1) zwei Mädchen und ein Junge
(2) vier Mädchen und zwei Jungen
(3) sechs Mädchen und drei Jungen

Repräsentativ: $\frac{2}{3}$ Mädchen, $\frac{1}{3}$ Jungen
Nicht-Repräsentativ: $\frac{2}{3}$ Jungen, $\frac{1}{3}$ Mädchen
1: $P \;=\; (\frac{2}{3})^2 \cdot (\frac{1}{3}) \;=\; 14.8\%$
2: $P \;=\; (\frac{2}{3})^4 \cdot (\frac{1}{3})^2 \;=\; 2.19\%$
3: $P \;=\; (\frac{2}{3})^6 \cdot (\frac{1}{3})^3 \;=\; 0.325\%$

Additionssatz

Eine Kugellagerfabrik prüft Kugeln auf Abweichungen in Härte und Durchmesser. Bestimme die Häufigkeit der nicht einwandfreien Kugeln.

$$P(d \cup h) = P(d) + P(h) - P(d \cap h)$$
$$P(d \cup h) = \frac{65}{1000} + \frac{78}{1000} - \frac{43}{1000}$$
$$P(d \cup h) = \frac{1}{10}$$
$$P(d \cup h) = 10\%$$

Strickwaren 2. Wahl

$$P(F_a \cup M_u \cup M_a) = P(F_a) + P(M_u) + P(M_a) - P(F_a \cap M_u) - P(F_a \cap M_a) - P(M_u \cap M_a) + P(F_a \cap M_u \cap M_a)$$
$$P(F_a \cup M_u \cup M_a) = 5.1\% + 5.3\% + 4.7\% - 0.4\% - 0.9\% - 1.5\% + 0.3\%$$
$$P(F_a \cup M_u \cup M_a) = 12.6\%$$

Schulhefte

Kariert mit und ohne Rand und nicht Kariert

Table 5: Werte

	K	$\overline{K}$	$\sum$
R	33	19	52
$\overline{R}$	22	12	34
$\sum$	55	31	86

Table 6: Zeichen

	K	$\overline{K}$	$\sum$
R	$H(R \cap K)$	$H(R \cap \overline{K})$	$H(R)$
$\overline{R}$	$H(\overline{R} \cap K)$	$H(\overline{R} \cap \overline{K})$	$H(\overline{R})$
$\sum$	$H(K)$	$H(\overline{K})$	*Gesamtheit*

AB "Der Additionssatz" Nr 7

Wahrscheinlichkeit aus einem Skatspiel Herz oder König zu ziehen

$$P(k \cup h) = P(k) + P(h) - P(k \cap h)$$
$$P(d \cup h) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{32}$$
$$P(d \cup h) = \frac{11}{32}$$
$$P(d \cup h) = \underline{\underline{34.375}}\%$$

AB "Der Additionssatz" Nr 8

Wahrscheinlichkeit dass eine Zahl i **nicht** durch 3 oder 5 teilbar ist, wenn gilt:
i in range(10, 100)

$$P(\overline{Mod_3} \cup \overline{Mod_5}) = 100 - P(Mod_3) + P(Mod_5) - P(Mod_3 \cap Mod_5)$$
$$P(Mod_3 \cup Mod_5) = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15}$$
$$P(Mod_3 \cup Mod_5) = \frac{7}{15}$$
$$P(Mod_3 \cup Mod_5) = 46.\overline{6}\%$$
$$P(\overline{Mod_3} \cup \overline{Mod_5}) = 100\% - 46.\overline{6}\%$$
$$P(\overline{Mod_3} \cup \overline{Mod_5}) = 53.\overline{3}\%$$

AB "Der Additionssatz" Nr 9

Wahrscheinlichkeit bei einem Multiple-Choice-Test bei 6 Fragen und 4 Antwortmöglichkeiten pro Frage 5 oder 6 antworten richtig zu beantworten.

$$P(R_5 \cup R_6) = P(R_5) + P(R_6)$$
$$P(R_5 \cup R_6) = \left(\frac{1}{4}\right)^6 + 6 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^5 \cdot \frac{3}{4}$$
$$P(R_5 \cup R_6) = \frac{19}{4096}$$
$$P(R_5 \cup R_6) = \underline{\underline{0.464}}\%$$

Seite 343 Nr 4

Geschlecht (**M**ännlich, **W**eiblich), Führerschein verloren (**J**a, **N**ein)

Table 7: Werte

	J	N	$\sum$
M	$h(J \cap M)$ 20.5%	$h(N \cap M)$ 61.5%	$h(M)$ 82%
W	$h(J \cap W)$ 2.52%	$h(N \cap W)$ 15.48%	$h(W)$ 18%
$\sum$	$h(J)$ 23.02%	$h(N)$ 76.98%	100%

AB Nummer 2: Tbc- Erkrankungen

Gesund, **K**rank, Testergebnis **P**ositiv, **N**egativ

Table 8: Werte

	G	K	$\sum$
P	$P(G \cap P)$ 3.996%	$P(K \cap P)$ 0.095%	$P(P)$ 4.091%
N	$P(G \cap N)$ 95.904%	$P(K \cap N)$ 0.005%	$P(N)$ $95.908\overline{9}\%$
$\sum$	$P(G)$ 99.9%	$P(K)$ 0.1%	100%

"n über k"

Definition:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Beispiel Pascal'sches Dreieck

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= 1a + 1b \\
(a+b)^2 &= 1a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3 \\
(a+b)^4 &= 1a^4b^0 + 4a^3b^1 + 6a^2b^2 + 4a^1b^3 + 1a^0b^4 \\
(a+b)^n &= \binom{n}{0} \cdot a^nb^0 + \binom{n}{1} \cdot a^{n-1}b^1 + \ \dots \ + \binom{n}{n} \cdot a^0b^n
\end{aligned}$$

Formel von Bernoulli

Bedingungen:
- mit zurückliegenden (gleichbleibenden) Pfadwahrscheinlichkeiten
- 2 Möglichkeiten (J/N)
- Ungeordnete Reihenfolge

n = Anzahl
W = Beliebige Wahrscheinlichkeit
K = Zielanzahl

$$P(x = K) = B(x = K) = \binom{n}{K} \cdot (p)^K \cdot (1-p)^{n-K}$$

Sonderfall $B(0)$:

$$B_{n,p}(x \geq 1) = 1 - (1-p)^n$$

Zwei relevante Kenngrößen (σ & μ)

Erwartungswert $\mu = n \cdot p$
Wenn μ Nachkommastellen hat:
$\mu = (n+1) \cdot p$ ohne Nachkommastellen. Standardabweichung $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$ (Maß für Streuung)
σ-Regeln gelten nur, wenn $\sigma > 3$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} > 3$$
$$\sigma = n \cdot p \cdot (1-p) > 9$$
$$\sigma = n \cdot 0.25 > 9$$

n muss groß sein, damit die σ -Regeln anwendbar sind.

$$B(\mu - c \cdot \sigma \leq x \leq \mu + c \cdot \sigma) = \gamma$$

γ entspricht der gewünschten % - Zahl

Table 9: Seite 381 Nummer 2

p	μ	σ	**Bemerkungen**
0.1	5	2.12	
0.5	25	3.54	größte Standardabweichung und breiteste Verteilung
0.8	40	2.89	

$$V(p) = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Variante 1

$V'(p) = 0$
$solve(0 = \frac{d}{d\ p}(n \cdot p \cdot (1-p)), p)$
$p = \frac{1}{2}$

Variante 2

$$
\begin{aligned}
V(p) &= n \cdot p \cdot (1-p) \\
V(p) &= n \cdot (p - p^2) \\
V'(p) &= (1 - 2 \cdot p) \cdot n \\
V'(p) &= -2 \cdot p \cdot n + n \\
-n &= -2 \cdot p \cdot n \\
1 &= 2 \cdot p \\
p &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

Variante 3

$$
\begin{aligned}
\sigma &= \sqrt{n \cdot (p - p^2)} \\
\sigma'(p) &= \frac{1 \cdot n \cdot (1 - 2 \cdot p)}{2 \cdot \sqrt{n \cdot (p - p^2)}} \\
\sigma'(p) &= 0 \\
0 &= 1 - 2 \cdot p \\
p &= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

32 Von der Gesamtheit auf die Stichprobe

Seite 405 Nummer 14

geg.:

$$n = 3700$$
$$x \mathrel{\widehat{=}} \text{Anzahl der Gewinne}$$
$$p = \frac{1}{37}$$
$$\gamma = 95\% \rightarrow c = 1.96$$

ges.:
x_1
x_2
Rechnung:

$$\mu = n \cdot p = 3700 \cdot \frac{1}{37}$$
$$\mu = 100$$
$$\sigma = \sqrt{3700 \cdot \frac{1}{37} \cdot (1 - \frac{1}{37})}$$
$$\sigma = 9.86$$

Somit ergibt sich:

$$B_{3700,\frac{1}{37}}(\mu - 1.96 \cdot \sigma \leq x \leq \mu + 1.96 \cdot \sigma) > 95\%$$

Und für x_1 und x_2:

$$x_1 = \mu - 1.96 \cdot \sigma$$
$$x_1 = 80.67 \approx 81$$
$$x_2 = \mu + 1.96 \cdot \sigma$$
$$x_2 = 119.32 \approx 119$$

CAS:
$binomcdf(3700, \frac{1}{37}, 81, 119)$
$B_{3700,\frac{1}{37}}(\mu - 1.96 \cdot \sigma \leq x \leq \mu + 1.96 \cdot \sigma) = \underline{\underline{95.22\%}}$

Seite 404 Nummer 11

geg.:

$$x \mathrel{\widehat{=}} \text{Anzahl der benötigten Betten}$$
$$n = 400$$
$$p = 88\%$$
$$\gamma = 90\% \Rightarrow c = 1.64$$

ges.:

$$x_1$$
$$x_2$$

Rechnung:

$$\begin{aligned}
\mu &= p \cdot n = 0.88 \cdot 400 = 352 \\
\sigma &= \sqrt{400 \cdot 0.88 \cdot (1 - 0.88)} \\
\sigma &= 6.499 \\
x_1 &= 352 - 1.64 \cdot 6.499 \\
x_1 &= 341,341 \approx 341 \\
x_2 &= 352 + 1.64 \cdot 6.499 \\
x_2 &= 362,76 \approx 362 \\
B_{400,0.88}(341 \leq x \leq 362) &= \underline{\underline{90.9\%}}
\end{aligned}$$

33 Von der Stichprobe auf die Gesamtheit

geg.:

$$\begin{aligned} n &= 500 \\ H &= x = 273 \\ h &= \frac{273}{500} \\ \gamma &= 95\% \Rightarrow c = 1.96 \\ x &\mathrel{\widehat{=}} \text{Anzahl der Stimmen für Oberbürgermeister} \end{aligned}$$

ges.:

$$p$$

Es gilt:

$$B(\mu - c \cdot \sigma \leq x \leq \mu + c \cdot \sigma) = \gamma$$

Also

$$B(\mu - 1.96 \cdot \sigma \leq 273 \leq \mu + 1.96 \cdot \sigma) = 95\%$$

Bzw

$$n \cdot p - c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} \leq x \leq n \cdot p + c \cdot \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Vereinfacht

$$p - c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \leq \frac{x}{n} \leq p + c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}}$$

Also

$$p - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{500}} \leq \frac{x}{500} \leq p + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{500}}$$

Daraus ergibt sich

$$f_1(p) = p - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{500}}$$
$$f_2(p) = p + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{500}}$$

CAS

$$p_1 = solve(f_1(p) = \frac{x}{n}, p)$$
$$p_2 = solve(f_1(p) = \frac{x}{n}, p)$$

1. Fall: $x = \mu$

Die Häufigkeit stimmt mit dem tatsächlichen Wahlanteil überein.

2. Fall: $x > \mu$

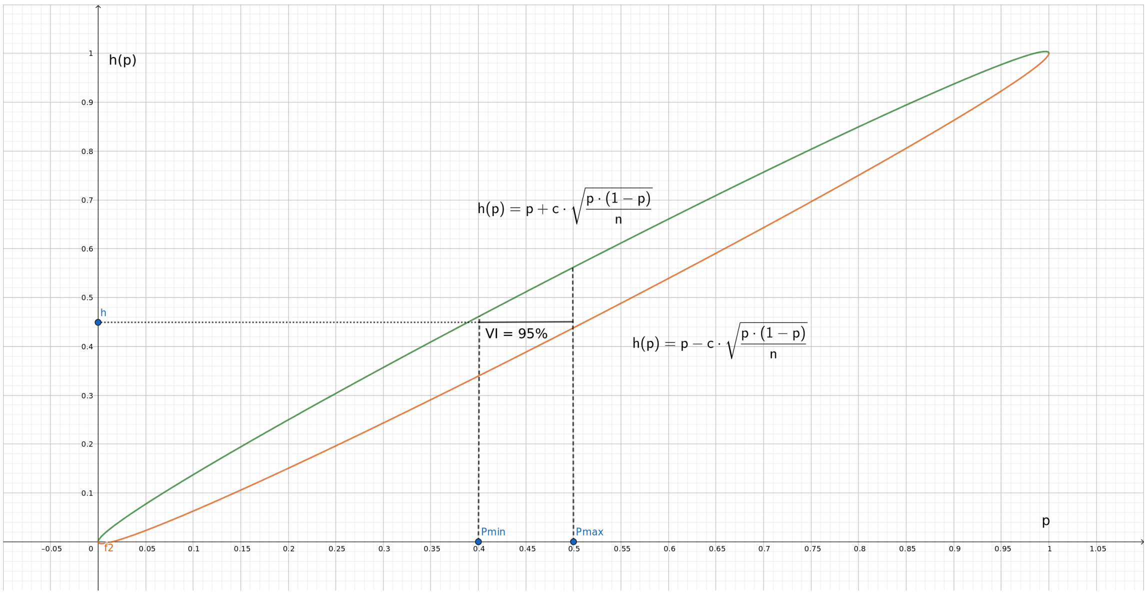
Es wurden zufällig viele "Anhänger" des Oberbürgermeisters befragt.
Mehr Stimmen für den Oberbürgermeister, als es der tatsächliche Anteil der Gesamtbevölkerung sein wird.

3. Fall: $x < \mu$

Es wurden zufällig viele "Gegner" des Oberbürgermeisters befragt.
Weniger Stimmen für den Oberbürgermeister, als es der tatsächliche Anteil der Gesamtbevölkerung sein wird.

Vertrauensintervall

Das Vertrauensintervall gibt an zu welcher Wahrscheinlichkeit p in dem errechneten Bereich zwischen p_{min} und p_{max} liegt.



Bei h handelt es sich um die relative Häufigkeit der gemessenen Werte, es gilt also $h = \frac{X}{n}$

34 n unbekannt

geg.:

$$x_1 = 100$$
$$p = \frac{1}{3}$$
$$\gamma = 80\% \Rightarrow c = 1.28$$
$$x \mathrel{\widehat{=}} \text{Anzahl an Personen mit Blutgruppe A}$$

ges.:

$$n$$

Rechnung:

$$B_{n,\frac{1}{3}}(\mu - 1.28 \cdot \sigma \leq x \leq \mu + 1.28 \cdot \sigma) = 0.8$$
$$\mu - 1.28 \cdot \sigma = 100$$
$$n \cdot \frac{1}{3} - 1.28 \cdot \sqrt{n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 100$$

CAS:

$$solve(n \cdot \frac{1}{3} - 1.28 \cdot \sqrt{n \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}} = 100, n)$$
$$n = 333,035 \approx 334$$

Probe:

$$binomCdf(334, \frac{1}{3}, 100, 334 \cdot \frac{1}{3} - 1.28 \cdot \sqrt{334 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}}) = 0.818$$
$$n = 334$$

35 Wahl eines Stichprobenumfangs

geg.:

$$\gamma = 95\% \Rightarrow c = 1.96$$
$$\text{Genauigkeit } 1\% \Rightarrow d = 0.01$$

ges.:

$$n$$

Ansatz:

$$\begin{aligned} \left|\frac{x}{n} - p\right| &\leq d \\ \left|\frac{x}{n} - p\right| &\leq c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} \leq d \\ \Rightarrow c \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} &\leq d \\ c^2 \cdot \frac{p \cdot (1-p)}{n} &\leq d^2 \end{aligned}$$

35.1 1. Möglichkeit

p ist ungefähr bekannt:
p = *geschätzter wert*

$$\frac{c^2}{d^2} \cdot p \cdot (1-p) \leq n$$

35.2 2. Möglichkeit

p ist unbekannt:
$\Rightarrow$ mit schlechtestem Fall rechnen
$p \cdot (1-p) \to$ das Maximum davon, also $f(p) = p \cdot (1-p)$
$\Rightarrow p_{max} = 0.5$, daraus folgt $p \cdot (1-p) = 0.25$

$$\frac{c^2}{d^2} \cdot 0.25 \leq n$$

36 Normalverteilungen

vgl. Seite 420 ff.
Die Normalverteilung ist die Annäherung einer Funktion $\varphi(x)$ an eine Binomialverteilung.
Dabei ist die Grundform von $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Diese wird um μ nach rechts verschoben und um σ beziehungsweise $\frac{1}{\sigma}$ entlang der X beziehungsweise Y-Achse gestreckt:

$$P_{\mu,\sigma}(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Das Äquivalent zu

$$B_{100,0.2}(x = 43)$$

lautet:

$$P_{\mu,\sigma}(x = 43) = \varphi(43) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{43-20}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right)}$$

mit dem CAS wie folgt:

$$\mathit{normpdf}(x, \mu, \sigma)$$

Um

$$B_{100,0.2}(0 \leq x \leq 20)$$

zu berechnen wird

$$P_{\mu,\sigma}(x \leq 20) = \int_{0}^{20+0.5} \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-20}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right)} dx$$

gerechnet, wobei die 0.5 in der Obergrenze des Integrals sich auf Grund der ganzen Zahlen / Balken der Binomialverteilung ergibt.

$$B_{100,0.2}(10 \leq x \leq 70)$$

wird wie folgt berechnet:

$$P_{\mu,\sigma}(10 \leq x \leq 70) = \int_{10-0.5}^{70+0.5} \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8} \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-20}{\sqrt{100 \cdot 0.2 \cdot 0.8}}\right)} dx$$

also:

$$P_{\mu,\sigma}(10 \leq x \leq 70) = \Phi\left(\frac{70 + 0.5 - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 0.5 - \mu}{\sigma}\right)$$

und mit dem CAS:

$$normcdf(x_1, x_2, \mu, \sigma)$$

37 Normalverteilte Zufallsgrößen

Die Normalverteilung kann die Wahrscheinlichkeit eines Ereignesses mit stufenlosen Übergängen darstellen.

$$P(a \leq x \leq b) = \int_a^b \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot (\frac{x-\mu}{\sigma})^2} \cdot dx$$

wobei gilt: $x \in \mathbb{R}$.
Des Weiteren kann die Obergrenze ∞ sein, da weder n noch p für die Berechnung der Normalverteilung bekannt sein muss.
Berechnet man die Ober und Untergrenzen eines Intervalls, für den z.B. $P = 0.9$ gegeben ist gilt:

$$P(k_1 \leq X \leq k_2) = \Phi \cdot (\frac{X - \mu}{\sigma}) = 0.9$$

k_1 und k_2 lassen sich mit dem CAS wie folgt berechenen:

$$invnorm(0.95, \mu, \sigma)$$

wobei die 0.95 sich aus $p + \frac{1-p}{2}$ ergeben, da die Mitte des gegebenen Intervalls sich bei μ befindet und somit die flächen links und rechts außerhalb des Intervalls liegt, weshalb für die Obergrenze $P(k_2) = p + \frac{1-p}{2}$ und für die Untergrenze $P(k_1) = \frac{1-p}{2}$ gilt.

38 σ - Regeln Erweiterung: Berechnung von c - Werten

Die Formel für die c - Werte basieren auf der Formel $x_k = \mu + c \cdot \sigma$
Darurch leitet sich die folgende Formel für c her:

$$\frac{\gamma + 1}{2} = \Phi(c)$$

Mit dem CAS lässt sich c wie folgt berechnen:

$$invnorm(\frac{\gamma + 1}{2}, 0, 1)$$

39 CAS Commands

39.1 nCr

Zur Eingabe von $\binom{n}{k}$:

CAS:
$nCr(n, k)$

39.2 binompdf

Zur Berechnung von:

$$B_{n,p}(k)$$

CAS:
$binompdf(n, p, k)$

39.3 binomcdf

Zur Berechnung von:

$$B_{n,p}(k_1 \leq x \leq k_2)$$

CAS:
$binomcdf(n, p, k_1, k_2)$

39.4 nsolve

Zum Lösen von Gleichungen wie:

$$B_{30,0.8}(x \leq k) > 0.3$$

CAS:
$nsolve(binomcdf(30, 0.8, 0, k) = 0.3, k, 0, 30)$
Probe:

$$B_{30,0.8}(x \leq 23) = 0.39$$

binomcdf(30,0.8,0,23)

39.5 normpdf

Zum Berechnen eines Spezifischen Wertes einer Normalverteilung, wie

$$P_{\mu,\sigma}(x)$$

CAS:

$$normpdf(x, \mu, \sigma)$$

39.6 normcdf

Zum Berechnen eines Wertebereiches einer Normalverteilung, wie

$$P_{\mu,\sigma}(x_1 \leq x \leq x_2)$$

CAS:

$$normcdf(x_1, x_2, \mu, \sigma)$$

39.7 invnorm

Zum Berechnen der Obergrenze bzw Untergrenze bei Normalverteilungen.
CAS:

$$invnorm(p(k), \mu, \sigma)$$

wobei $p(k)$ der jeweiligen Wahrscheinlichkeit der Grenze entspricht.
Es gilt für die Obergrenze:

$$p(k_2) = p + \frac{1-p}{2}$$

und für die Untergrenze:

$$p(k_1) = \frac{1-p}{2}$$