Universidade de Brasília
Departamento de Ciência da Computação

Teoria dos Grafos

Professora: Eliza Gomes

E-mail: eliza.gomes@unb.br

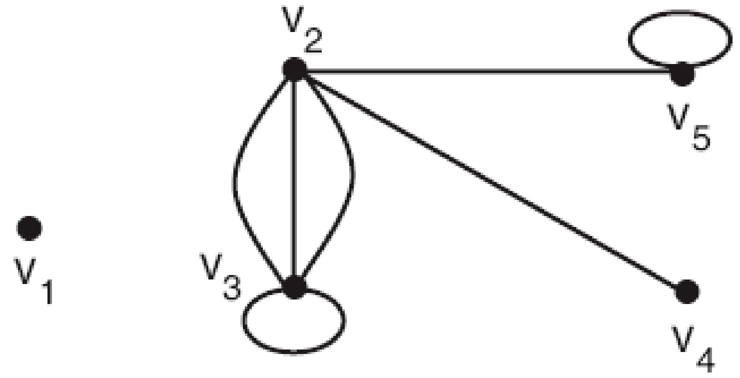
Conceitos básicos

- É uma área de conhecimento voltada ao estudo/análise das estruturas matemáticas chamadas grafos;

- Pode ser definido como um conjunto de objetos chamados **vértices** e um conjunto de **arestas** que unem pares desses objetos;

- A maneira mais comum de representar um grafo é por meio de um diagrama:
  - **Vértices** são representados por **pontos;**
  - **Arestas** são representados por **segmentos de retas ou de curvas**.

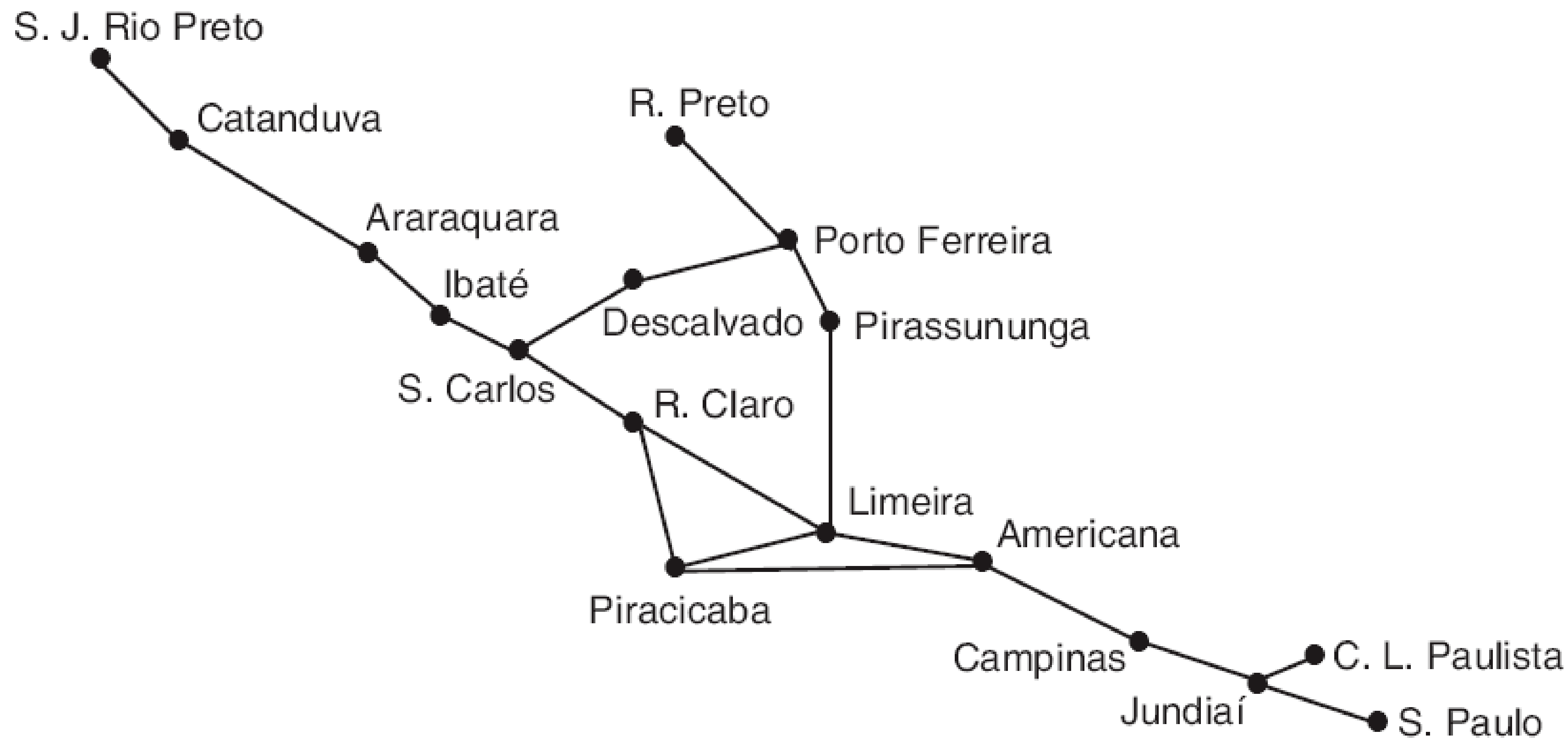
Conceitos básicos



- Grafo com 5 vértices {v_1, v_2, v_3, v_4, v_5};
- Grafo com 7 arestas:
  - <u>Três paralelas</u>: mais de uma aresta conecta o mesmo par de vértices;
  - <u>Duas *loops*</u>: uma aresta conecta um vértice a si próprio.

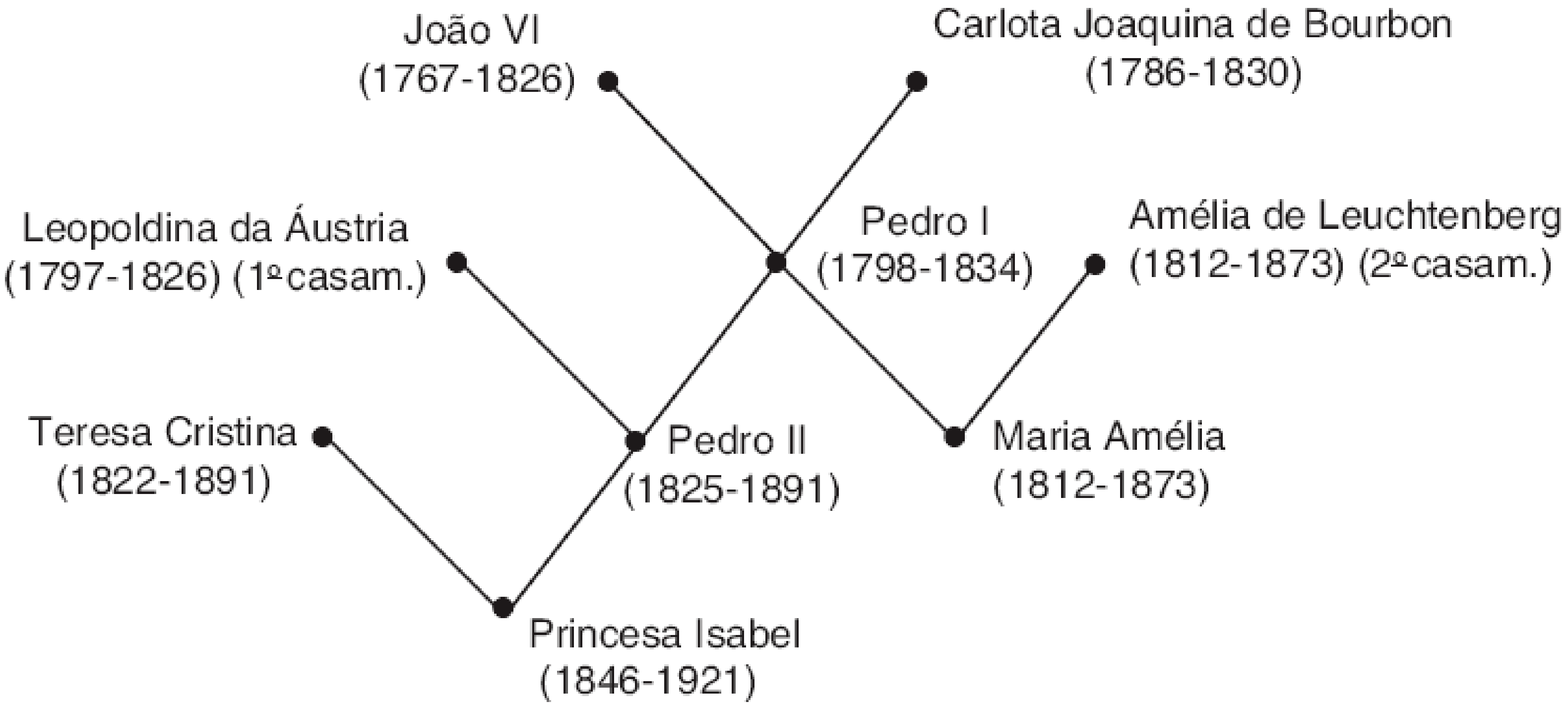
Exemplos de Grafos

- Usados para representar mapas



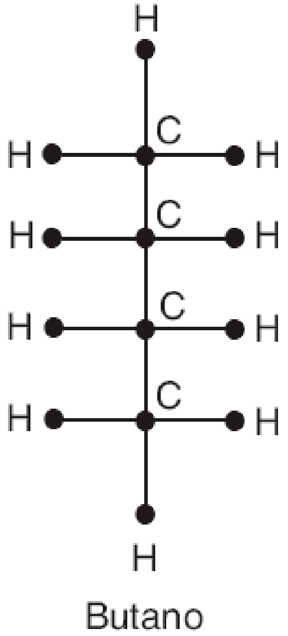
Exemplos de Grafos

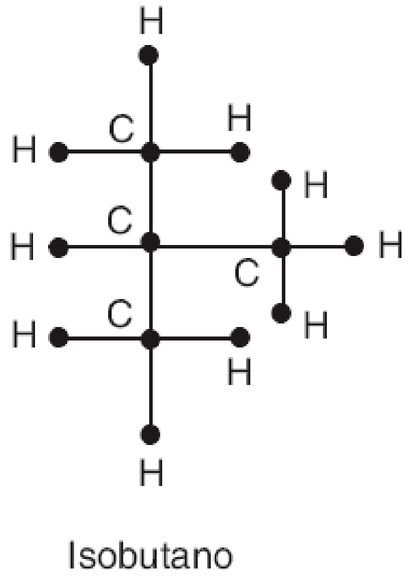
- Usados para representar árvore genealógica

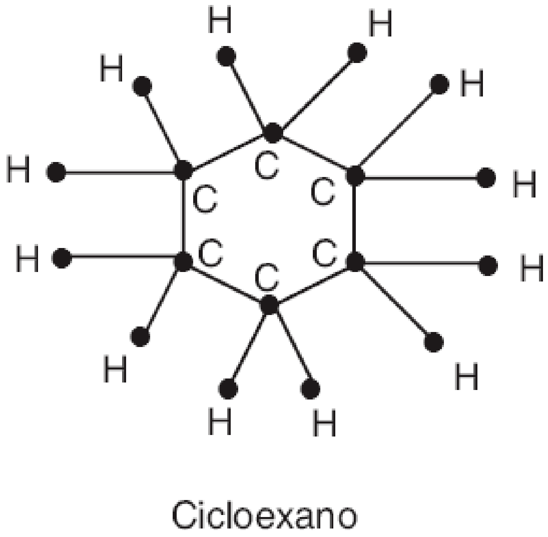


Exemplos de Grafos

- Usados para representar diagramas de moléculas (química)

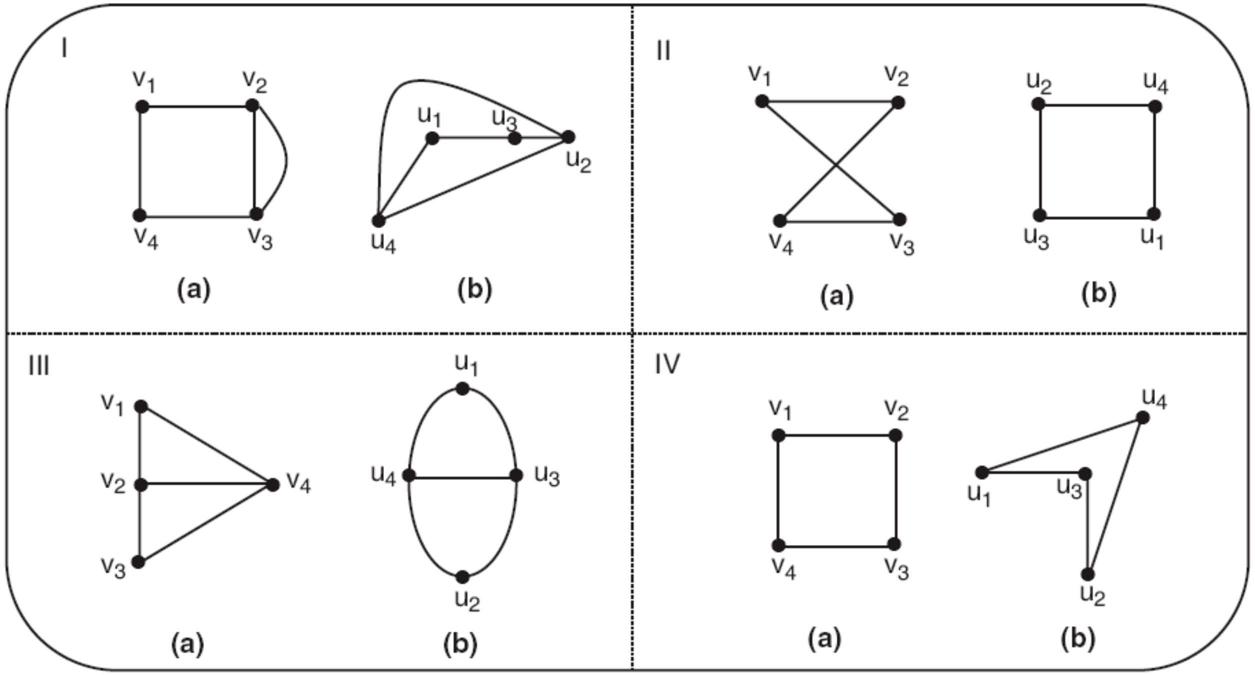






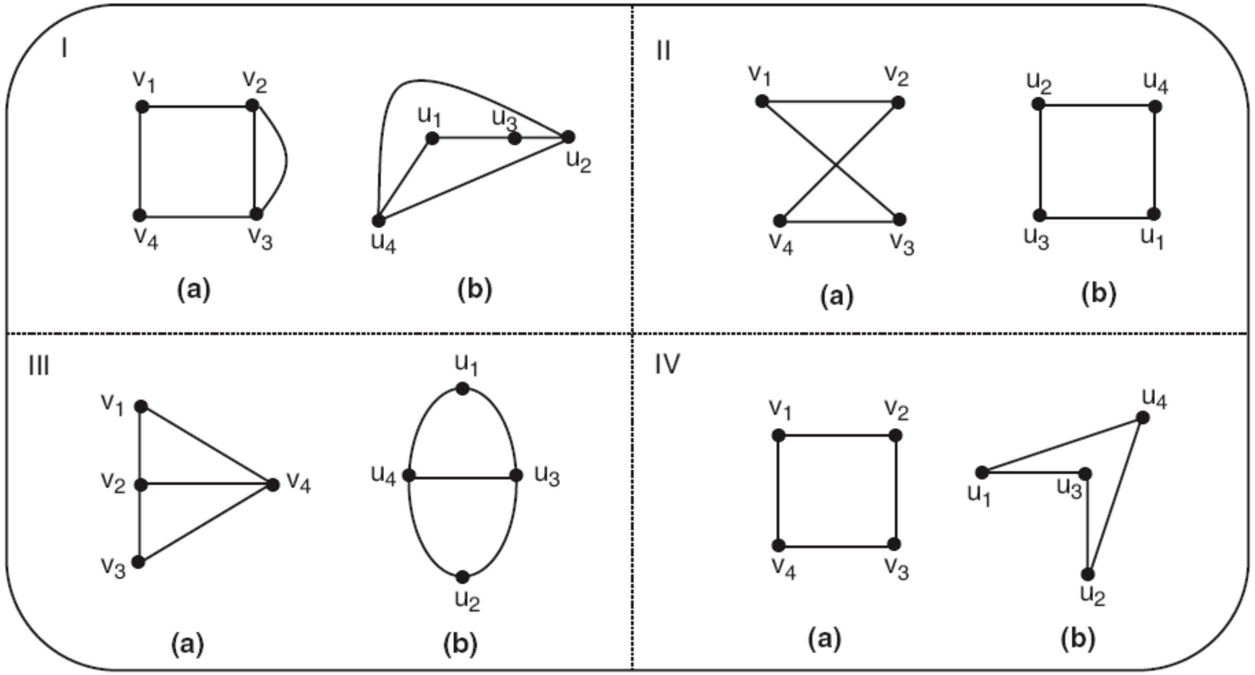
Conceitos básicos

- A maneira como as arestas dos grafos são desenhadas não é importante;
- É irrelevantes se as linhas são desenhadas como retas ou curvas, compridas ou curtas, grossas ou finas;
- O importante são os vértices dos grafo e o número de arestas entre cada par de vértices.



Conceitos básicos

- A maneira como as arestas dos grafos são desenhadas não é importante;
- É irrelevantes se as linhas são desenhadas como retas ou curvas, compridas ou curtas, grossas ou finas;
- O importante são os vértices dos grafo e o número de arestas entre cada par de vértices.



Conceitos básicos

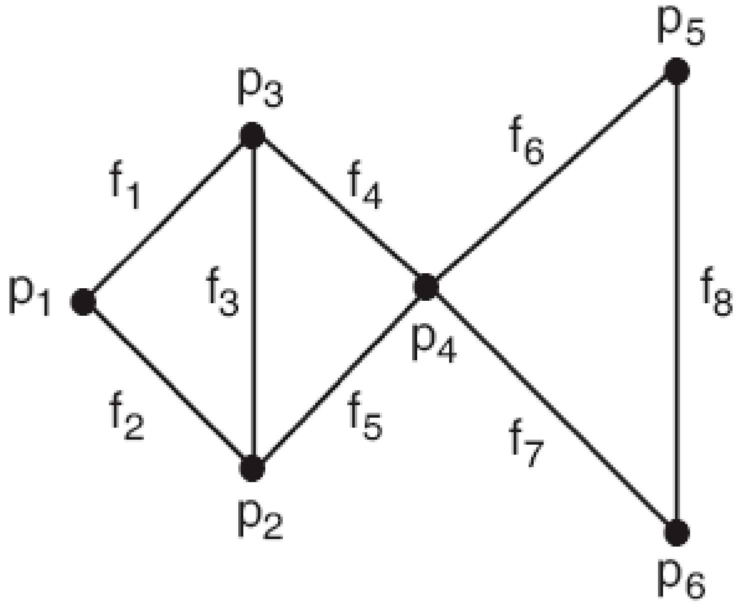
- Grafos planos ou planares: sem interseções entre arestas;
- Grafos direcionados: cada aresta, geralmente referenciada como arco, tem uma direção associada a ela;
- Grafos não direcionados: cada aresta pode ser abordada como bidirecional;
- Grafos finitos: lida com números finitos de arestas e vértices;
- Grafos infinitos: pode ter infinitos vértices e arestas;
- Grafos rotulados: rótulos para vértices e arestas (exceto para identificação);
- Grafos não rotulados: sem rótulos, apenas para identificação dos vértices.

Conceitos básicos

- Grafos planos ou planares: sem interseções entre arestas;
- Grafos direcionados: cada aresta, geralmente referenciada como arco, tem uma direção associada a ela;
- Grafos não direcionados: cada aresta pode ser abordada como bidirecional;
- Grafos finitos: lida com números finitos de arestas e vértices;
- Grafos infinitos: pode ter infinitos vértices e arestas;
- Grafos rotulados: rótulos para vértices e arestas (exceto para identificação);
- Grafos não rotulados: sem rótulos, apenas para identificação.

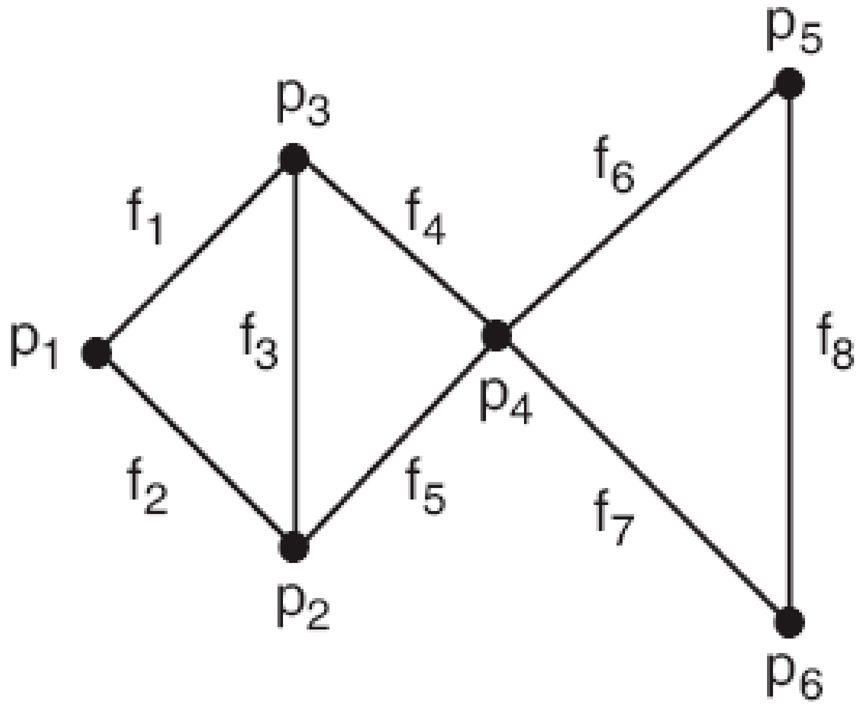
Exemplo: Problema da rede de fio e postes

- Considere uma rede de fios e postes telefônicos em que os vértices $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ representam 6 postes telefônicos que estão unidos por fios, representados pelas arestas $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$;



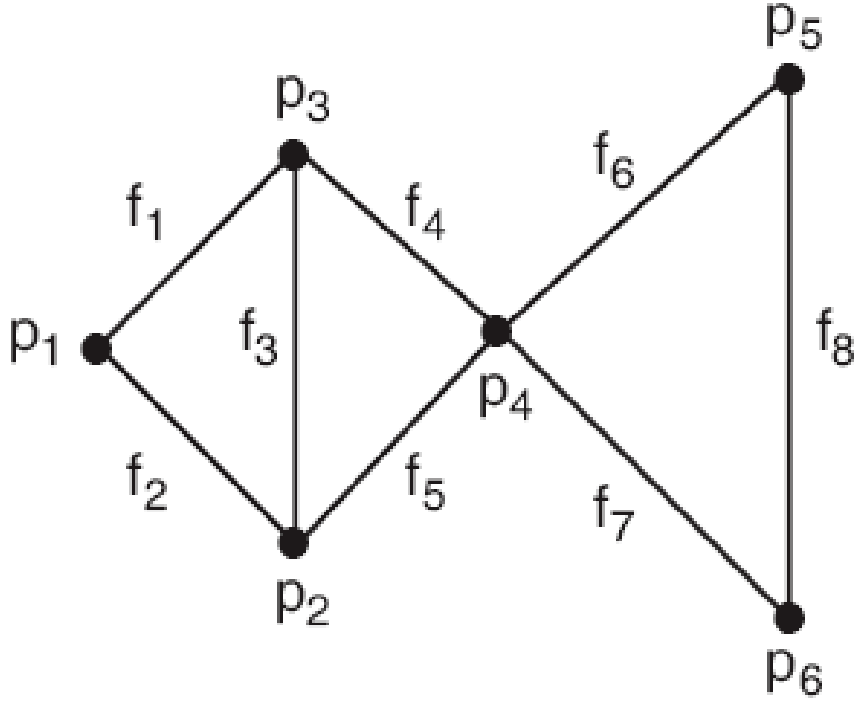
Exemplo: Problema da rede de fio e postes

- Problema 1: estudar a vulnerabilidade dessa rede a um acidente, e o objetivo do estudo é identificar as linhas e postes que devam permanecer ativos para evitar uma queda total da rede.



Exemplo: Problema da rede de fio e postes

- Problema 2: encontrar o menor conjunto de arestas (fios) necessárias para conectar os seis vértices (postes).



Exemplo: Problema do caixeiro-viajante

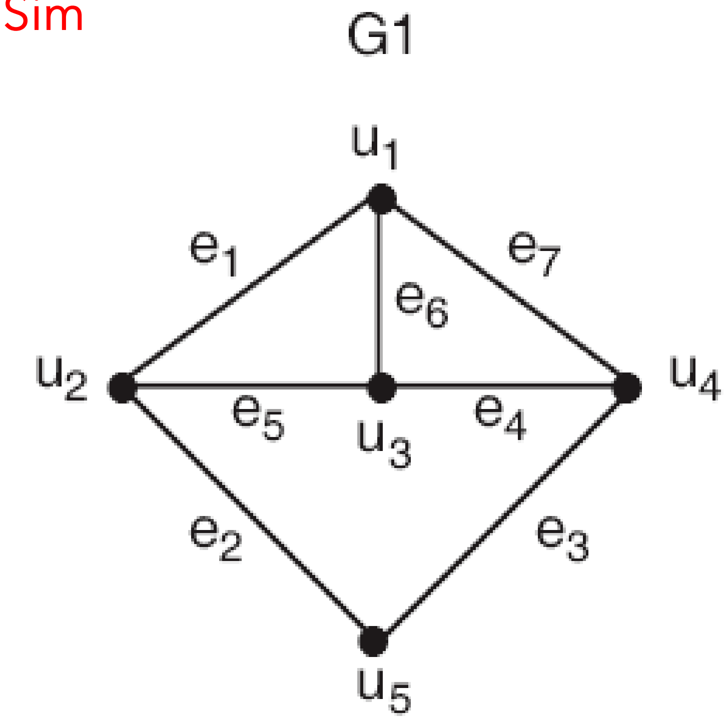
- Suponha que a área de atuação de um vendedor de produtos industriais (identificado como caixeiro-viajante) inclua várias cidades, com rodovias conectando certos pares dessas cidades;

- O serviço exige que ele visite cada cidade pessoalmente;

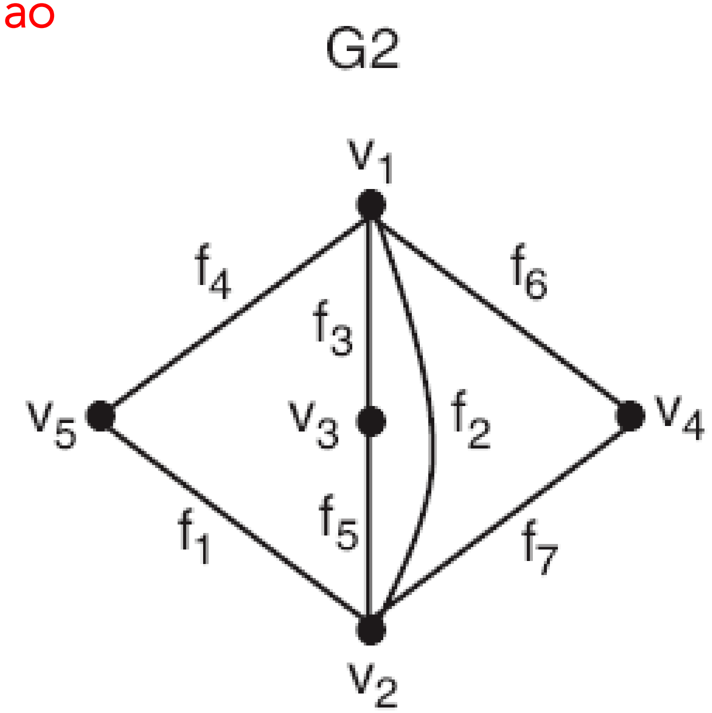
- É possível ele planejar uma viagem de carro que lhe permita, ao sair de uma cidade, visitar cada uma das cidades exatamente uma vez, voltando à cidade de partida?

Exemplo: Problema do caixeiro-viajante

Sim

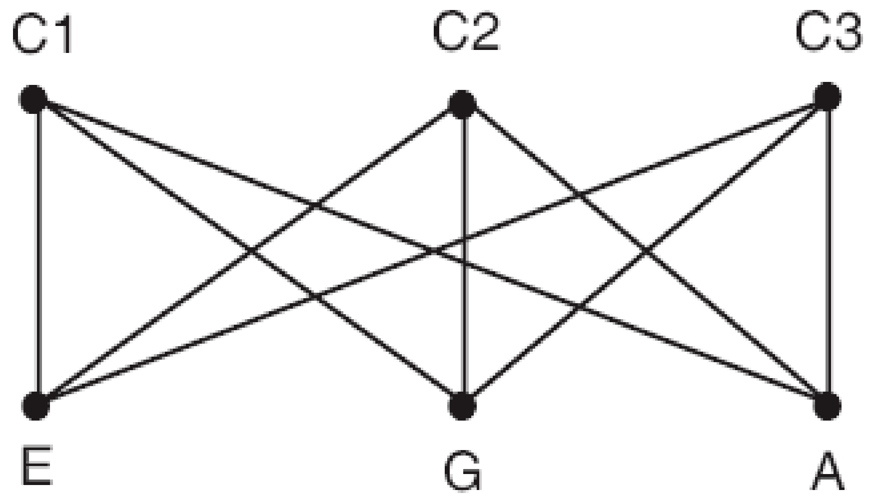


Não



Exemplo: Problema de interceptação de arestas

- Considere 3 casas $\{C_1, C_2, C_3\}$ e considere o problema de instalação do fornecimento de eletricidade {E}, gás {G} e água {A} para cada uma delas;
- Uma aresta une dois vértices apenas se um dos vértices representa uma casa e o outro, uma das três fontes (água, eletricidade ou gás);
- É possível fazer essa instalação sem que as linhas de fornecimento se interceptem?



Exemplo: Problema do caminho mais curto

- Uma companhia tem filiais em cada uma das cidades $\{C_1, C_2, ..., C_6\}$.
- O valor da passagem aérea de um voo direto entre as cidades C_i e C_j é dado pela posição (i,j) na matriz a seguir.
- A presença do símbolo ∞ em uma posição da matriz indica a inexistência de voo direto entre as cidades representadas pela linha e pela coluna em que tal símbolo se encontra.

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo: Problema do caminho mais curto

- Entre as cidades C_2 e C_5 não existe voo direto;
- A posição (4,2) da matriz preenchida com o valor 20 representa que a tarifa de voo da cidade C_4 à cidade C_2 é de \$20, e de C_5 a C_6, de \$55;
- Note que a diagonal principal da matriz é formada por elementos iguais a zero.

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

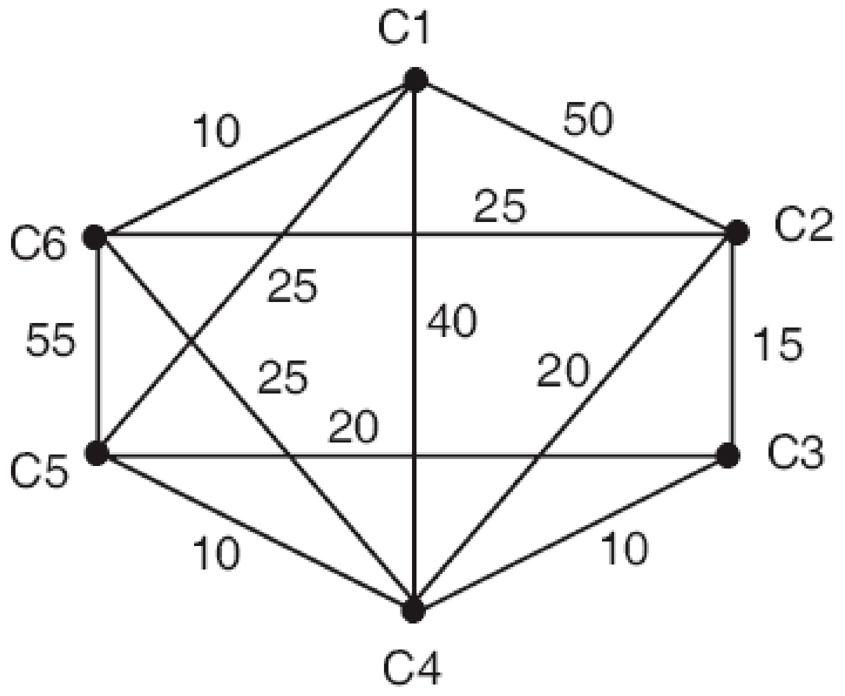
Exemplo: Problema do caminho mais curto

- A companhia está interessada no cálculo de uma tabela das tarifas mais baratas entre pares de cidades (mesmo que exista um voo direto entre duas cidades, este pode não ser a rota mais barata).

$$\begin{pmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{pmatrix}$$

Exemplo: Problema do caminho mais curto

- Essa situação pode ser representada por um grafo ponderado, ou seja, um grafo com pesos associados às arestas que, no caso, representam as tarifas associadas aos voos diretos, como informados na matriz;
- O problema pode, então, ser resolvido usando o algoritmo de Dijkstra.



Conceitos Iniciais

Definições

- Arestas de um grafo podem ser:
  - Dirigidas: uma aresta (*u*,*v*) é dita dirigida de *u* para *v* se o par (*u*,*v*) for ordenado, com *u* precedendo *v*. Por existir apenas uma direção elas são consideradas assimétricas;
  - Não dirigidas: uma aresta {*u*,*v*} é dita não dirigida se o par {*u*,*v*} não for ordenado. Por não existir direção elas são consideradas simétricas;
- Grafos podem ser:
  - Dirigidos ou Dígrafos: todas as arestas são dirigidas;
  - Não dirigidos: todas as arestas são não-dirigidas;
  - Misto: tem arestas dirigidas e não-dirigidas.
- Vértices finais da aresta: dois vértices conectados por uma aresta;
- Vértices adjacentes: dois vértices são ditos adjacentes se forem pontos finais da mesma aresta;
- Arestas incidentes: uma aresta é dita incidente a um vértice se o vértice é um dos pontos finais da aresta;

Definições

- Grau de um vértice: é a quantidade de arestas que se conectam a ele. Denotado por: *deg(v)*;
  - Grau de entrada de um vértice: são os números de arestas incidentes **em** *v*, em um grafo dirigido. Denotado por: *indeg(v)*;
  - Grau de saída de um vértice: são os números de arestas incidentes **de** *v*, em um grafo dirigido. Denotado por: *outdeg(v)*;
- Arestas paralelas ou múltiplas: duas arestas não dirigidas tenham os mesmos pontos finais e duas arestas dirigidas tenham a mesma origem e o mesmo destino;
- Laço (loop): aresta que conecta um vértice consigo mesmo;
- Grafos simples: grafos que não têm arestas paralelas ou laços;
- Grafos planares: quando nenhum par de arestas se cruza;

Exemplo grafo não dirigido: Lista de arestas

Seja o grafo G = (V,E) tal que

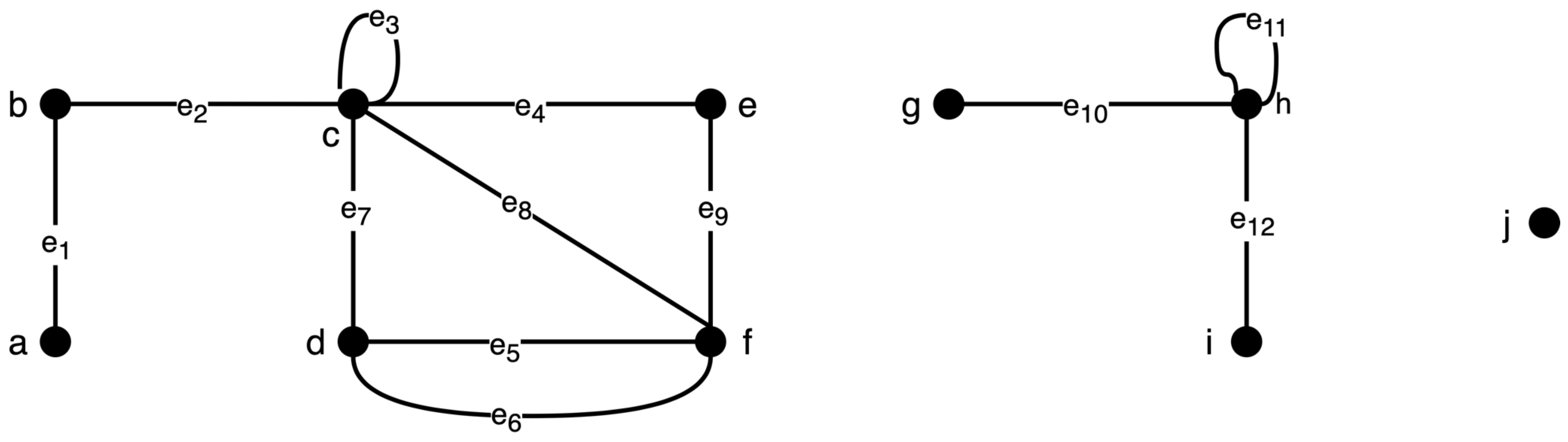
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$

sendo os <u>vértices-extremidade</u> das arestas:

$\boldsymbol{e_1 \leftrightarrow (a,b)}$	$\boldsymbol{e_2 \leftrightarrow (b,c)}$	$\boldsymbol{e_3 \leftrightarrow (c,c)}$	$\boldsymbol{e_4 \leftrightarrow (c,e)}$	$\boldsymbol{e_5 \leftrightarrow (d,f)}$	$\boldsymbol{e_6 \leftrightarrow (d,f)}$
$\boldsymbol{e_7 \leftrightarrow (c,d)}$	$\boldsymbol{e_8 \leftrightarrow (c,f)}$	$\boldsymbol{e_9 \leftrightarrow (e,f)}$	$\boldsymbol{e_{10} \leftrightarrow (g,h)}$	$\boldsymbol{e_{11} \leftrightarrow (h,h)}$	$\boldsymbol{e_{12} \leftrightarrow (h,i)}$

Exemplo grafo não dirigido: Grafos



Exemplo grafo não dirigido: Matriz adjacência

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0
e	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
f	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
h	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Exemplo grafo dirigido: Lista de arestas

Seja o grafo G = (V,E) tal que

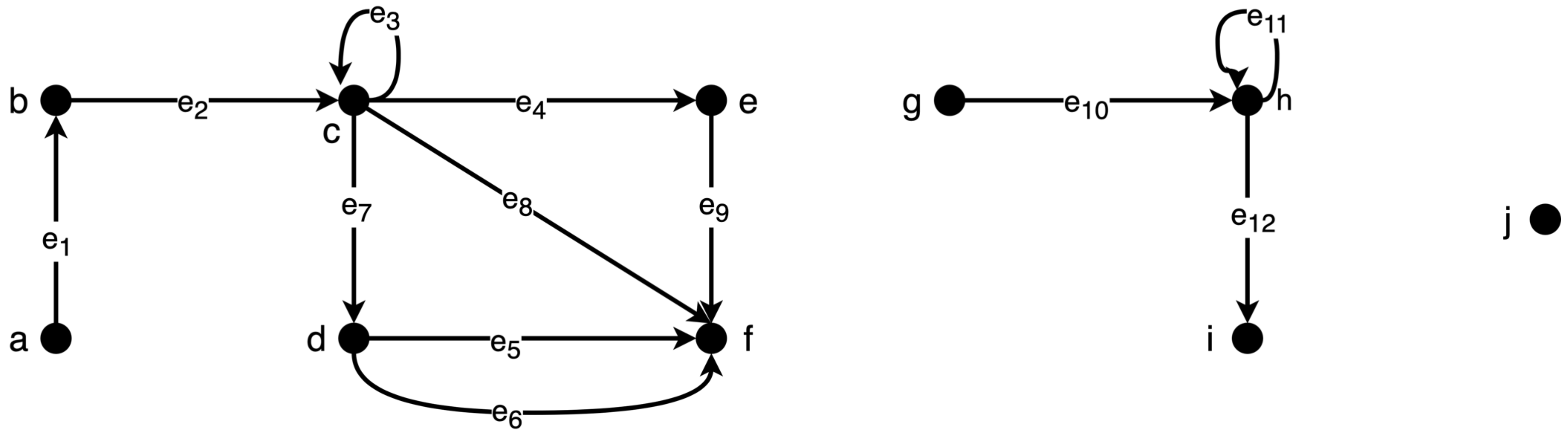
$V = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8, e_9, e_{10}, e_{11}, e_{12}\}$

sendo os vértices-extremidade das arestas:

$\boldsymbol{e_1 \rightarrow (a, b)}$	$\boldsymbol{e_2 \rightarrow (b, c)}$	$\boldsymbol{e_3 \rightarrow (c, c)}$	$\boldsymbol{e_4 \rightarrow (c, e)}$	$\boldsymbol{e_5 \rightarrow (d, f)}$	$\boldsymbol{e_6 \rightarrow (d, f)}$
$\boldsymbol{e_7 \rightarrow (c, d)}$	$\boldsymbol{e_8 \rightarrow (c, f)}$	$\boldsymbol{e_9 \rightarrow (e, f)}$	$\boldsymbol{e_{10} \rightarrow (g, h)}$	$\boldsymbol{e_{11} \rightarrow (h, h)}$	$\boldsymbol{e_{12} \rightarrow (h, i)}$

Exemplo grafo não dirigido: Grafos



Exemplo grafo dirigido: Matriz adjacência

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Matriz adjacência

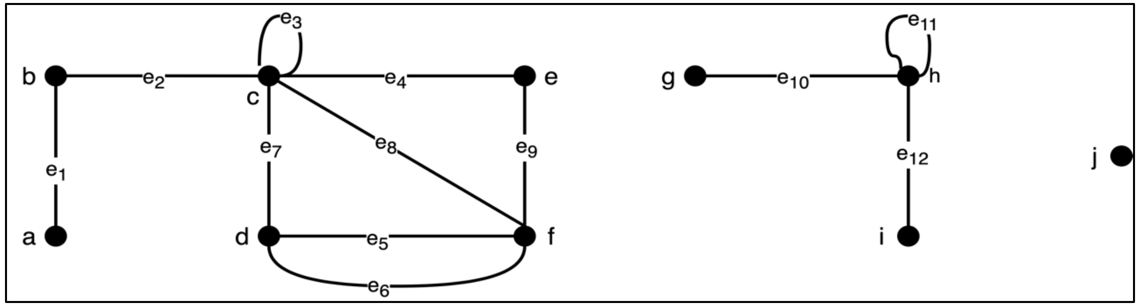
Grafo não dirigido

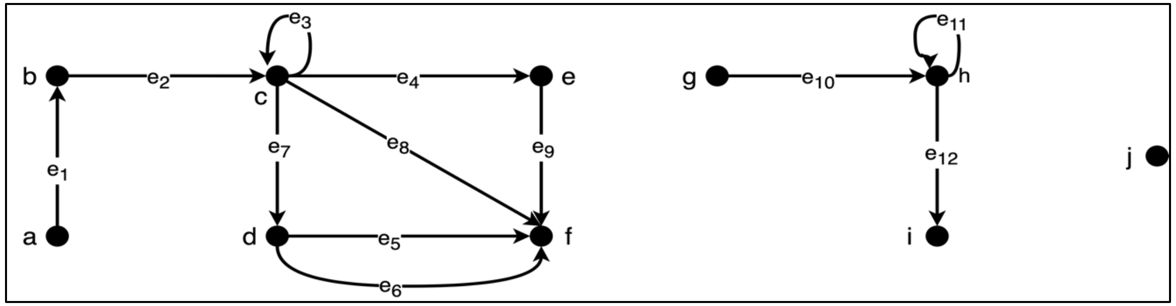
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	2	0	0	0	0
e	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0
f	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
h	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

Grafo dirigido

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
b	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
c	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0
d	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
e	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
f	0	0	1	2	1	0	0	0	0	0
g	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
h	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0
j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
i	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0

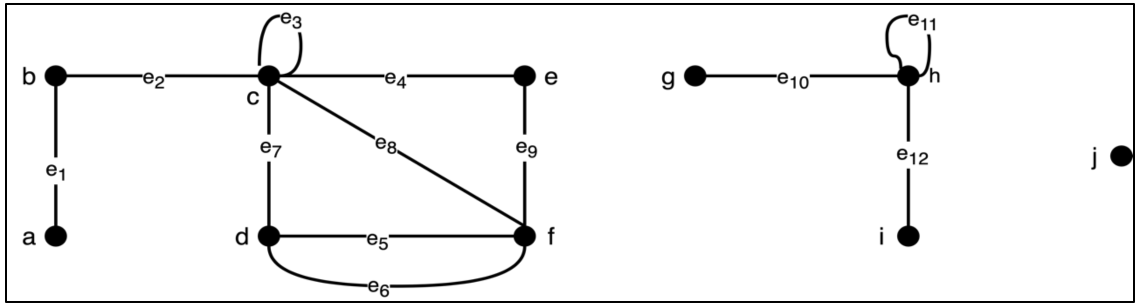
Características dos grafos

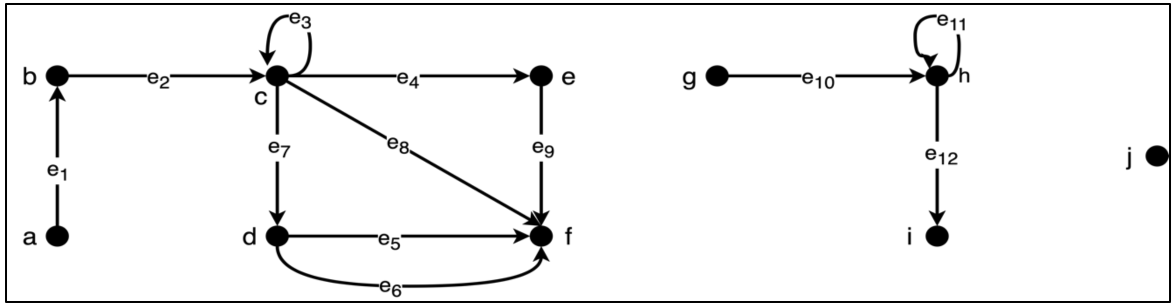




- Não simples;
- Planar;
- <u>Arestas paralelas</u>: e_5; e_6
- <u>Laços</u>: e_3; e_{11}
- <u>Vértice adjacente</u>: {ab}; {b,c}; {c,d}; {c,e}; {c,f}; {d,f}; {e,f}; {g,h}; {h,i}
- <u>Aresta incidente</u>: a = $\{e_1\}$; b = $\{e_1,e_2\}$; c = $\{e_3,e_7,e_4,e_8\}$; d = $\{e_5,e_7,e_6\}$; e = $\{e_4,e_9\}$; f = $\{e_5,e_6,e_8,e_9\}$; g = $\{e_{10}\}$; h = $\{e_{10},e_{11},e_{12}\}$; i = $\{e_{12}\}$

Características dos grafos





- Não dirigido;
- <u>Grau dos vértices</u>:

deg(a) = 1; deg(b) = 2; deg(c) = 5;
deg(d) = 3; deg(e) = 2; deg(f) = 4;
deg(g) = 1; deg(h) = 3; deg(i) = 1;
deg(j) = 0.

- Dirigido;
- <u>Grau dos vértices</u>:

indeg(a) = 0; outdeg(a) = 1; indeg(b) = 1; outdeg(b) = 1;

indeg(c) = 2; outdeg(c) = 4; indeg(d) = 1; outdeg(d) = 2;

indeg(e) = 1; outdeg(e) = 1; indeg(f) = 4; outdeg(f) = 0;

indeg(g) = 0; outdeg(g) = 1; indeg(h) = 2; outdeg(h) = 2;

indeg(i) = 1; outdeg(i) = 0; indeg(j) = 0; outdeg(j) = 0;