考试课程　**微积分 A(1)**　(A)　2017 年 11 月 19 日　答案

一．填空题（每空 3 分，共 15 题）（**请将答案直接填写在横线上！**）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{2}}{2}\right)^n=$ ________。　答案：$\sqrt{2}$

2. 已知 $\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)=3$，则 $\lim\limits_{x\to0^+}\left(1+x^{\varphi(x)}\right)^{\frac{1}{x}}=$ ________。　答案：1

3. 设 $x_n=\begin{cases}(-1)^n, & n>10;\\ n, & n\le 10\end{cases}$，$y_n=\begin{cases}(-1)^{n+1}, & n>100;\\ n!, & n\le 10\end{cases}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=$ ________。答案：-1

4. $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^x-1}{\ln x}=$ ________。答案：1

5. $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\tan\sqrt{x}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=$ ________。答案：$e^{\frac{1}{2}}$

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\tan x}-\cos x}{x\sin x}=$ ________。　答案：1

7. 函数 $f(x)=\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}}$ 的间断点 $x=0$ 的类型为________。（填“第一类间断点”或“第二类间断点”）　答案：第一类间断点

8. $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{1+\sin^2 x}}$，则 $f'(x)=$ ________。　答案：$f'(x)=e^{\sqrt{1+\sin^2 x}}\cdot\dfrac{\sin x\cdot\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$

9. 设 $y=y(x)$ 由方程 $x-y=\mathrm{e}^y$ 确定，则 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$ ________。答案：$\dfrac{1}{e^y+1}$

10. 设 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，则 $f''(x)=$ ________。答案：$-\dfrac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

11. 设 $y=f(g(x))$，其中 f,g 均为二阶可导函数，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$ ________。

答案：$f''(g(x))(g'(x))^2+f'(g(x))g''(x)$

12. 设 $y=\sin x+2x$，在 $x=0$ 点的微分 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$ ________。答案：$3dx$

13. 设 $f(x)=x\mathrm{e}^{2x}$，则 $f^{(10)}(x)=$ ________。　答案：$2^9(2x+10)e^{2x}$

14. 设曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}$，$t\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$。则 L 上对应参数 $t_0\in(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$ 点的切线被两个坐标轴所截的长度为________。答案：1

15. 设 $y=x\mathrm{e}^{\lambda x}$ 满足方程 $y''+2y'+y=0$，则常数 $\lambda=$ ________。答案：-1

二．计算题（每题 10 分，共 4 题）**（请写出详细的计算过程和必要的根据！）**

1. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 点可导，且 $f(0)=0, f'(0)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}$。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2 f(x)-2f(x^3)}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[x^2 f(x)-x^2 f(0)]-2[f(x^3)-f(0)]}{x^3}=f'(0)-2f'(0)=-f'(0)=-1$。

……………..10 分

注：用洛必达法则做，得 5 分。

2. 设 $f(x)=1-\cos\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)$，求实数 a,n，使得当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\sim\dfrac{a}{x^n}$。

解：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)=0$，所以当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\sim\dfrac{1}{2}\left(1-\cos\dfrac{1}{x}\right)^2$。……………..4 分

又因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$，所以当 $x\to+\infty$ 时，$1-\cos\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{2x^2}$。 ……………..8 分

故当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\sim\dfrac{1}{8x^4}$，$a=\dfrac{1}{8}, n=4$。 ……………..10 分

3. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x-1}, & x\neq 0;\\ a, & x=0\end{cases}$

（I）求实数 a，使得 $f(x)$ 为连续函数；

（II）此时，$f(x)$ 是否为可导函数？若可导，求导函数；若不可导，说明理由。

解：（I）$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$，

所以当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 为连续函数； ……………..4 分

（II）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}-\dfrac{1}{2}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x(e^x-1)}{x^2(e^x-1)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{1}{2}x(e^x-1)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\frac{1}{2}(e^x+xe^x-1)}{3x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-\frac{1}{2}(2e^x+xe^x)}{6x}=-\frac{1}{12}.$$

……………..8 分

所以当 $a=\dfrac{1}{2}$ 时 $f(x)$ 为可导函数，其导函数为

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{\mathrm{e}^x}{(\mathrm{e}^x-1)^2}, & x\neq 0;\\ -\dfrac{1}{12}, & x=0.\end{cases}$$

……………..10 分

4. 求函数 $y=x+x^5$ 的反函数的二阶导数 $\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}$。

解：$\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{\frac{dy}{dx}}=\dfrac{1}{1+5x^4}$， ………………..4 分

$$\frac{d^2x}{dy^2}=-\frac{y''}{(y')^3}=-\frac{20x^3}{(1+5x^4)^2}，$$ ………………..10 分

三．证明题（请写出详细的证明过程！）

1.（8 分）设 $f(x),g(x)$ 都在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $g'(x)\neq 0, x\in(a,b)$，求证：

$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$。

证明：构造 $F(x)=[f(x)-f(a)][g(b)-g(x)]$， ………………..3 分

则 $F(a)=F(b)=0$，由 Rolle 定理得，$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$F'(\xi)=f'(\xi)[g(b)-g(\xi)]-[f(\xi)-f(a)]g'(\xi)=0。$$

因为 $g'(x)\neq 0, x\in(a,b)$，所以 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}$。 ………………..8 分

2.（7 分）设 $f(x)$，$g(x)$ 为 $[a,b]$ 上的连续函数，数列 $\{x_n\}\subset[a,b]$，使得 $f(x_1)\le g(x_1)$，且 $g(x_n)=f(x_{n+1})$，$n=1,2,\cdots$。证明：存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=g(\xi)$。

证明：(1) 若存在 $n_0\in\mathbb{N}^+$，使得 $f(x_{n_0})>g(x_{n_0})$，则由连续函数的介值定理知，存在介于 x_1,x_{n_0} 的实数 ξ（ξ 可取 x_1），使得 $f(\xi)=g(\xi)$。本题得证。 ………………..3 分

(2) 若 $\forall n\in\mathbb{N}^+$，$f(x_n)\le g(x_n)$，由已知条件得，$\forall n\in\mathbb{N}^+$，$f(x_{n+1})=g(x_n)\ge f(x_n)$，故数列 $\{f(x_n)\}$ 单调增，同理可得，数列 $\{g(x_n)\}$ 也单调增。

由有界闭区间上连续函数的最值定理，数列 $\{f(x_n)\},\{g(x_n)\}$ 均为有界数列，所以都收敛。

记 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$，因为 $g(x_n)=f(x_{n+1})$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=A$。

有界数列 $\{x_n\}$ 有收敛子列，设其收敛子列 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\xi\in[a,b]$，则由函数 $f(x)$，$g(x)$ 的连续性可得：

$$f(\xi)=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{n\to\infty}g(x_n)=\lim_{k\to\infty}g(x_{n_k})=g(\xi)$$

即存在 $\xi\in[a,b]$，使得 $f(\xi)=g(\xi)$。 ………………..7 分