

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 线性代数 10421324 A 卷 2020 年 12 月 30 日
 本试题共 9 道大题, 满分 100 分.

1. (10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 分别计算以下 4 项并提供计算过程.

(1) $|A|$. (2) $|-2A^T|$. (3) $|A^{-1}|$.

(4) A^{-1} 的 (1,4) 元 (即 A^{-1} 第 1 行第 4 列的元素).

2. (10 分) 设 V 是 \mathbb{R}^n 的子空间, 我们称 n 阶实矩阵 P 是 V 上的正交投影矩阵, 如果 $P^2 = P, P^T = P$ 且 P 的列空间等于 V . 这个定义等价于说 P 满足: 若 $v \in V$, 则 $Pv = v$, 若 $w \in V^\perp$, 则 $Pw = 0$.

(1) 假设 $V = \left\{ c_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$. 它是 \mathbb{R}^3 的子空间. 问: V 上的正交投影矩阵是否等于

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} ?$$

(2) 求 $w \in V$, 使得 $\|w - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\| = \min_{v \in V} \|v - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}\|$.

3. (20 分) 设 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(1) 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 但 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关.

(2) 按 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 顺序写出 Gram-Schmidt 标准正交化的向量 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$.

(3) 记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$ 和 $Q = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, 求矩阵 C 满足 $A = QC$.

(4) 求 \mathbb{R}^4 到 A 的列空间的正交投影矩阵.

(5) 记 $B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求 $Bx = b$ 的最小二乘解, 即求 $x^* \in \mathbb{R}^3$ 使得

$$\|Bx^* - b\| = \min_{x \in \mathbb{R}^3} \|Bx - b\|.$$

4. (10 分) 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(1) 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

(2) 求 A^n .

5. (10 分) 设 T 为 \mathbb{R}^2 上的线性变换, 且满足

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -10 \\ 8 \end{bmatrix}.$$

(1) 求 T 在基 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 下的矩阵 A .

(2) 计算 $T\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}\right)$.

(3) 阐明理由: 能够找到 A 的特征向量构成 \mathbb{R}^2 一组基. 并求 T 在这组基下的矩阵.

6. (20 分) 令 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

(1) 求 A 的奇异值分解.

(2) 分别给出 A 的行空间和列空间的一组标准正交基.

7. (7 分) 设 A 和 B 均为 n 阶方阵, 且满足 $A + B + AB = O$. 证明:

(1) -1 不是 B 的特征值.

(2) B 的任一特征向量都是 A 的特征向量.

(3) A 的任一特征向量都是 B 的特征向量.

8. (5 分) 设 e_1, e_2, e_3 是 \mathbb{R}^{10} 中一组标准正交的向量. 记 $V \subseteq \mathbb{R}^{10}$ 为 e_1, e_2, e_3 生成的子空间. 设 $v \in \mathbb{R}^{10}$. 证明: $v \in V$ 当且仅当 $\|v\|^2 = (e_1^T v)^2 + (e_2^T v)^2 + (e_3^T v)^2$.

9. (8 分) 给定实对称正定矩阵 A 和实对称矩阵 B , 求证:

(1) 关于矩阵 X 的方程 $AX + XA = O$ 只有平凡解 $X = O$.

(2) 关于矩阵 X 的方程 $AX + XA = B$ 存在唯一的解 X_0 .

(3) X_0 是对称矩阵.