8. 证明：(1) 假设存在 $k_1, k_2, \cdots, k_r \in R$，使得 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r=0$

上式两边与 α_i 作内积，可得 $(\alpha_i, k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r)=(\alpha_i, 0)=0 \quad (i=1,2,\cdots,r)$

由内积的线性性质，可得 $k_1(\alpha_i,\alpha_1)+k_2(\alpha_i,\alpha_2)+\cdots+k_i(\alpha_i,\alpha_i)+\cdots+k_r(\alpha_i,\alpha_r)=0$

由于向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是非零正交向量组，故有 $(\alpha_i,\alpha_j)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ |\alpha|^2\neq 0, & i=j\ (\alpha\text{非零})\end{cases}$

从而可得 $k_i(\alpha_i,\alpha_i)=0$，即 $k_i=0 \ (i=1,2,\cdots,r)$

故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关.

(2) 因 $r<n$，将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 向量组扩充一个向量 α_{r+1}，要求 α_{r+1} 与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 都正交，我们将 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\alpha_{r+1}$ 都看成行向量时，即要求

$(\alpha_1,\alpha_{r+1})=\alpha_1\alpha_{r+1}^T=0 \quad (\alpha_2,\alpha_{r+1})=\alpha_2\alpha_{r+1}^T=0 \quad \cdots \quad (\alpha_r,\alpha_{r+1})=\alpha_r\alpha_{r+1}^T=0$

合并以上各式，写成矩阵形式，即有 $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \vdots\\ \alpha_r\end{pmatrix}\alpha_{r+1}^T=A\alpha_{r+1}^T=0$

其中 A 是以行向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 合并的 $r\times n$ 矩阵，$r(A)=r<n$，即 $AX=0$ 有非零解

说明 $A\alpha_{r+1}^T=0$ 的 α_{r+1} 存在，只要取 $AX=0$ 的一个非零解 x_1 作为 α_{r+1} 即可

取 $\alpha_{r+1}=x_1$. 此时已将正交量扩充到 $r+1$ 个. 若 $r+1<n$，按上述方法继续扩充，

直到 n 个正交向量为止.

9. 证明：必要性. 即证 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 和 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是两组标准正交基，则 Q 为正交阵.

由标准正交基的关系 $\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \varepsilon_2^T\\ \vdots\\ \varepsilon_n^T\end{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=I \qquad \begin{pmatrix}\eta_1^T\\ \eta_2^T\\ \vdots\\ \eta_n^T\end{pmatrix}(\eta_1,\cdots,\eta_n)=I$

而 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Q$

故 $I=\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \vdots\\ \varepsilon_n^T\end{pmatrix}(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=[(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Q]^T(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Q$

$=Q^T\begin{pmatrix}\eta_1^T\\ \vdots\\ \eta_n^T\end{pmatrix}(\eta_1,\cdots,\eta_n)Q=Q^TIQ=Q^TQ$ 得证.

充分性，即证 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为一组标准正交基，Q 为正交矩阵，则 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 也是标准正交基

Q 为正交矩阵，则有 $Q^TQ=I$. 而 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 是一组标准正交基，故有 $\begin{pmatrix}\eta_1^T\\ \vdots\\ \eta_n^T\end{pmatrix}(\eta_1,\cdots,\eta_n)=I$

则 $\begin{pmatrix}\varepsilon_1^T\\ \vdots\\ \varepsilon_n^T\end{pmatrix}(\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n)=[(\eta_1,\cdots,\eta_n)Q]^T(\eta_1,\cdots,\eta_n)Q=Q^T\begin{pmatrix}\eta_1^T\\ \vdots\\ \eta_n^T\end{pmatrix}(\eta_1,\cdots,\eta_n)Q=Q^TQ=I$

即证 $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 也是一组标准正交基.

10. 解：由 $AB=O$，知 $r(A)+r(B)\leq 3$，又 $A\neq 0$，$B\neq 0$，故 $1\leq r(A)\leq 2$，$1\leq r(B)\leq 2$

① 若 $k\neq 9$，必有 $r(B)=2$，此时 $r(A)=1$. 由于 $n-r(A)=3-1=2$

而 $AB=O$ 说明 B 的列向量是 $Ax=0$ 的解，通解为 $k_1(1,2,3)^T+k_2(3,6,k)^T$

② 若 $k=9$，则 $r(B)=1$，此时 $r(A)=1$ 或 2

1、若 $r(A)=2$，则 $n-r(A)=1$，通解为 $t(1,2,3)^T$，t 为任意常数

2. 若 $r(A)=1$，则 $Ax=0$ 与 $ax+by+cz=0$ 同解，由 $n-r(A)=2$，不妨设 $a\neq 0$.

于是 $Ax=0$ 的通解为 $k_1(-b,a,0)^T+k_2(-c,0,a)^T$，$k_1,k_2$ 为任意常数.

11. 证：由 $AA^*=A^*A=|A|I$，有 $(A^*)^*\cdot A^*=|A^*|I=|A|^{n-1}I$

① 若 $|A^*|\neq 0$，则 $|A|\neq 0$，$(A^*)^*=|A|^{n-1}I(A^*)^{-1}=|A|^{n-1}(|A|A^{-1})^{-1}=|A|^{n-2}A$

② 若 $|A^*|=0$，则 $|A|=0$（否则矛盾）.

当 $n>2$ 时，$r(A^*)\leq 1$，$r[(A^*)^*]=0$ 故 $A^*=0$ 于是 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$

思考：
$$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)\leq n-2. \end{cases} \qquad r[(A^*)^*]=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & n=2 \\ 0, & n>2 \end{cases}\Big\} r(A^*)=1$$

12. 解：(1) 记 $|A|=D_n$ 按第一列展开，则有

$$D_n=2a\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1}+a^2(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 & & & \\ a^2 & 2a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=2aD_{n-1}-a^2D_{n-2}=2a(2aD_{n-2}-a^2D_{n-3})-a^2(2aD_{n-3}-a^2D_{n-4})=\cdots$$

由 $D_1=2a$，$D_2=\begin{vmatrix} 2a & 1 \\ a^2 & 2a \end{vmatrix}=3a^2$ 代入上述递推关系式，可得 $D_n=(n+1)a^n$

另解：对于三对角矩阵，可用消元技巧化为上三角，将第一行的 $-\frac{a}{2}$ 倍加至第二行，…

$$|A|=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & a^2 & 2a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 2a & 1 \\ & & & a^2 & 2a \end{vmatrix}=\cdots=\begin{vmatrix} 2a & 1 & & & \\ 0 & \frac{3}{2}a & 1 & & \\ & 0 & \frac{4}{3}a & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \frac{n}{n-1}a & 1 \\ & & & & \frac{n+1}{n}a \end{vmatrix}=D_n$$

(2) 由克莱姆法则，当$|A|\neq 0$时方程组有唯一解，故$a\neq 0$时有唯一解

$$x_1=\frac{1}{D_n}\begin{vmatrix} 1 & 1 & & & \\ 0 & 2a & 1 & & \\ 0 & a^2 & 2a & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & a^2 & 2a & 1 \end{vmatrix}=\frac{na^{n-1}}{(n+1)a^n}=\frac{n}{(n+1)a}$$

(3) 当$a=0$时，方程组有无穷多解，即
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

由$r(A)=r(A\vdots b)=n-1$，通解为$(0,1,0,\cdots,0)^T+k(1,0,\cdots,0)^T$，$k$为任意常数

13. 证：由$A^*=A^T$，此时$A_{ij}=a_{ij}\quad(i,j=1,2,\cdots,n)$

由$A\neq 0$，不妨设$a_{ij}\neq 0$，由行列式展开定理

$$|A|=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{ii}A_{ii}+\cdots+a_{in}A_{in}$$
$$=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{ij}^2+\cdots+a_{in}^2\geq a_{ij}^2>0\quad 故|A|\neq 0$$

另证：若$|A|=0$，则$AA^*=A^*A=|A|I=0=AA^T$

设A的行向量为$\alpha_i\ (i=1,2,\cdots,n)$，则$\alpha_i\alpha_i^T=a_{i1}^2+a_{i2}^2+\cdots+a_{in}^2=0$

于是$\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$

进而有$A=0$，与A为非零矩阵矛盾，故$|A|\neq 0$

14. $$D_n=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ -1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ -1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ -1 & -n & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}_{n-1}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n^{n-1}\cdot\frac{n+1}{2}$$