微积分试题（A 卷）

一. 填空题（每空 2 分, 共 20 分）

1. 已知 $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=A$， 则对于 $\forall\varepsilon>0$，总存在 δ>0，使得当______________________时，恒有│$f(x)$─A│< ε。

2. 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+bn+5}{3n-2}=2$，则 a =______________，b =____________________________。

3. 若当 $x\to x_0$ 时，α与β 是等价无穷小量，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha-\beta}{\beta}=$______________。

4. 若 $f(x)$在点 $x = a$ 处连续，则 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=$_____________。

5. $f(x)=\ln(\arcsin x)$ 的连续区间是_____________________。

6. 设函数 $y=f(x)$在 x_0 点可导，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+3h)-f(x_0)}{h}=$_____________。

7. 曲线 $y = x^2+2x-5$ 上点 M 处的切线斜率为 6，则点 M 的坐标为_______________。

8. $d(\int xf'(x)dx)=$___________________________。

9. 设总收益函数和总成本函数分别为 $R=24Q-2Q^2$， $C=Q^2+5$，则当利润最大时产量 Q 是____________________________。

二. 单项选择题（每小题 2 分, 共 18 分）

1. 若数列$\{x_n\}$在 a 的ε邻域（$a-\varepsilon, a+\varepsilon$）内有无穷多个点，则（　　　　　　　　）。

(A) 数列$\{x_n\}$必有极限，但不一定等于 a　　　　(B) 数列$\{x_n\}$极限存在，且一定等于 a

(C) 数列$\{x_n\}$的极限不一定存在　　　　(D) 数列$\{x_n\}$的极限一定不存在

2. 设 $f(x)=arctg\dfrac{1}{x-1}$ 则 $x=1$ 为函数 $f(x)$ 的（　　　　　　　　）。

(A) 可去间断点　　(B) 跳跃间断点　　(C) 无穷型间断点

(D) 连续点

3. $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{3x-1}=$（　　　　　　　　　）。

(A) 1　　　　(B) ∞　　　　(C) e^2　　　　(D) e^3

4. 对需求函数 $Q=e^{-\frac{p}{5}}$，需求价格弹性 $E_d=-\dfrac{p}{5}$。当价格 $p=$（　　　　　　　）时，需求量减少的幅度小于价格提高的幅度。

(A) 3　　　　(B) 5　　　　(C) 6　　　　(D) 10

5. 假设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,\quad \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0;\quad f'(x),g'(x)$ 在点 x_0 的某邻域内（x_0 可以除外）存在，又 a 是常数，则下列结论正确的是（　　　　）。

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=a$ 或∞，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=a$ 或∞

(B) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=a$ 或∞，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=a$ 或∞

(C) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 不存在

(D) 以上都不对

6. 曲线 $f(x)=x^3+ax^2+bx+a^2$ 的拐点个数是（　　　　　　　　）　。

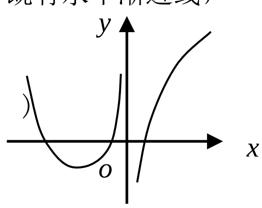
(A) 0　　　　(B)1　　　　(C) 2　　　　(D) 3

7. 曲线 $y=\dfrac{4x-1}{(x-2)^2}$（　　　　　　　　）。

(A) 只有水平渐近线；　　　　(B) 只有垂直渐近线；

(C) 没有渐近线；　　　　(D) 既有水平渐近线，又有垂直渐近线

8. 假设 $f(x)$ 连续，其导函数图形如右图所示，则 $f(x)$ 具有（　　　）



(A) 两个极大值一个极小值　　(B) 两个极小值一个极大值

(C) 两个极大值两个极小值　　(D) 三个极大值一个极小值

9. 若 $f(x)$的导函数是 x^{-2}，则 $f(x)$有一个原函数为（　　　　　　　　）。

(A) $\ln|x|$；　(B) $-\ln|x|$；　(C) $-x^{-1}$；

(D) $-x^{-3}$

三．计算题(共 36 分)

1． 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ （6 分）

2． 求极限 $\lim\limits_{x\to +\infty}(\ln x)^{\frac{1}{x}}$ （6 分）

3． 设 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin 2x}{x} & x<0 \\ a & x=0 \\ x\sin\dfrac{1}{x}+b & x>0 \end{cases}$，求 a ,b 的值，使 $f(x)$ 在(−∞，+∞)上连续。(6 分)

4． 设 $e^{x+y}=xy+1$，求 y' 及 $y'|_{x=0}$ （6 分）

5． 求不定积分 $\int xe^{-2x}dx$ （6 分）

6． 求不定积分 $\int\sqrt{4-x^2}\,dx$.（6 分）

四．利用导数知识列表分析函数 $y=\dfrac{1}{1-x^2}$ 的几何性质，求渐近线，并作图。(14 分)

五．设 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且 $f(0)=f(1)=0,\ f(\frac{1}{2})=1$，试证：

(1) 至少存在一点 $\xi\in(\frac{1}{2},1)$，使 $f(\xi)=\xi$；

(2) 至少存在一点 $\eta\in(0,\xi)$，使 $f'(\eta)=1$；

(3) 对任意实数λ ，必存在 $x_0\in(0,\xi)$，使得 $f'(x_0)-\lambda[f(x_0)-x_0]=1$ 。(12 分)

微积分试题(B 卷)

一. 填空题(每空 3 分, 共 18 分)

10. $\int_a^b f'(x+b)\,dx =$ ______________________________

_.

11. $\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx =$ ______________________________.

12. 关于级数有如下结论:

① 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \neq 0)$收敛,则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$发散.

② 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (u_n \neq 0)$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n}$收敛.

③ 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$和$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$必发散.

④ 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛,$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$发散,则$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n \pm v_n)$必发散.

⑤ 级数$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n$(k为任意常数)与级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性相同.

写出正确结论的序号______________________________.

13. 设二元函数$z = xe^{x+y} + (x+1)\ln(1+y)$,则

$dz\big|_{(1,\,0)} =$ ______________________________.

14. 若 D 是由x轴、y轴及$2x+y-2=0$围成的区域,则$\iint\limits_D dxdy =$ ______________.

15. 微分方程$xy' + y = 0$满足初始条件$y(1) = 3$的特解是______________________.

二. 单项选择题(每小题 3 分, 共 24 分)

10. 设函数$f(x) = \int_0^x (t-1)(t+2)dt$,则$f(x)$在区间[-3,2]上的最大值为(　　　).

(A) $-\dfrac{2}{3}$　　(B) $\dfrac{10}{3}$　　(C) 1　　(D) 4

11. 设 $I_1=\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}d\sigma, I_2=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)d\sigma$，$I_3=\iint\limits_D \cos(x^2+y^2)^2 d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\le 1\}$，则有（　　）.

(A) $I_1>I_2>I_3$　　(B) $I_3>I_2>I_1$　　(C) $I_2>I_1>I_3$　　(D) $I_3>I_1>I_2$

12. 设 $u_n>0, n=1,2,3\cdots$，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 收敛，则下列结论正确的是(　　).

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}$ 发散　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$ 发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$ 收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛

13. 函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x,y)$ 的某一邻域内有连续的偏导数，是 $f(x,y)$ 在该点可微的(　　)条件.

(A) 充分非必要　(B) 必要非充分　(C) 充分必要　(D) 既非充分又非必要

14. 下列微分方程中，不属于一阶线性微分方程的为（　　）.

(A) $xy'-y=\dfrac{x\cos\ln x}{\ln x}$　　(B) $xy'\ln x+y=3x(\ln x+1)$，

(C) $(2y-x)y'-y=2x$　　(D) $(x^2-1)y'-xy+2=0$

15. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+\dfrac{1}{n})^n a_n$（　　）.

(A) 发散　(B) 条件收敛　(C) 绝对收敛　(D) 不能判定敛散性散

16. 设 $F(x)=\int_x^{x+2\pi}e^{\sin t}\sin t dt$，则 $F(x)$（　　）.

(A) 为正常数　(B) 为负常数　(C) 恒为零　(D) 不为常数

17. 设 $u=f(x-y,y-z,t-z)$，则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial u}{\partial t}=$（　　）.

(A) $2f_1'$　(B) $2f_2'$　(C) $2f_3'$　(D) 0

四. 计算下列各题(共 52 分)

1. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x-\cos^3 x}\, dx$（5 分）

2. 求曲线 $y=x^2-2x,\ y=0,\ x=1,\ x=3$ 所围成的平面图形的面积. （6 分）

3. 已知二重积分 $\iint\limits_D x^2 d\sigma$，其中 D 由 $y=1-\sqrt{1-x^2},\ x=1$ 以及 $y=0$ 围成.

（Ⅰ）请画出 D 的图形，并在极坐标系下将二重积分化为累次积分;（3 分）

（Ⅱ）请在直角坐标系下分别用两种积分次序将二重积分化为二次积分;（4 分）

(III) 选择一种积分次序计算出二重积分的值.（4 分）

4. 设函数 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，且 $z=\varphi(x,y)$ 是由方程 $xe^z-ye^y=ze^z$ 所确定的二元函数，求 $\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}$ 及 du .（8 分）

5. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n}$ 的收敛域及和函数 S(x).（8 分）

6. 求二元函数 $f(x,y)=(x^2+y)e^{2y}$ 的极值.（8 分）

7. 求微分方程 $y''+2y'=e^{-2x}$ 的通解，及满足初始条件 $f(0)=1,\ f'(0)=0$ 的特解. (6 分)

五. 假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\le 0$，记

$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt$，证明在 (a,b) 内 $F'(x)\le 0$.（6 分）

微积分试卷（C）

一．填空题（每空 2 分, 共 20 分）

1. 数列$\{x_n\}$有界是数列$\{x_n\}$收敛的________条件。

2. 若 $y=\sin x^2$，则 $dy=$________。

3. 函数 $y=\dfrac{x}{\tan x}, x=0$ 是第________类间断点，且为间断点。

4. 若$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax+b}{x-1}=3$，则 $a=$ ________，$b=$ ________。

5. 在积分曲线族 $\int 2xdx$ 中，过点（0，1）的曲线方程是________。

6. 函数 $f(x)=|x|$ 在区间 $[-1,1]$ 上罗尔定理不成立的原因是________。

7. 已知$F(x)=\int_0^x e^{-t}dt$，则$F'(x)=$________。

8. 某商品的需求函数为 $Q=12-\dfrac{P}{2}$，则当 $p=6$ 时的需求价格弹性为 $\dfrac{EQ}{EP}=$________。

二．单项选择题（每小题 2 分, 共 12 分）

1. 若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=3$，则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha}=$（　　）。

(A) –2　(B) 0　(C) $\dfrac{1}{3}$　(D) $\dfrac{2}{3}$

2. 在$x=1$处连续但不可导的函数是（　　）。

(A) $y=\dfrac{1}{x-1}$　(B) $y=|x-1|$　(C) $y=\ln(x^2-1)$　(D) $y=(x-1)^2$

3. 在区间（−1，1）内，关于函数 $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ 不正确的叙述为（　　）。

(A) 连续

(B) 有界

(C) 有最大值，且有最小值　　(D) 有最大值，但无最小值

4. 当 $x \to 0$ 时，$\sin 2x$ 是关于 x 的（　　　　　　）。

(A) 同阶无穷小　　(B) 低阶无穷小　　(C) 高阶无穷小　　(D) 等价无穷小

5. 曲线 $y = x + x^{\frac{5}{3}}$ 在区间（　　　　　　）内是凹弧 。

(A) $(-\infty, 0)$　　(B) $(0, +\infty)$　　(C) $(-\infty, +\infty)$　　(D) 以上都不对

6. 函数 e^x 与 ex 满足关系式（　　　　　　）。

(A) $e^x \le ex$　　(B) $e^x \ge ex$　　(C) $e^x > ex$　　(D) $e^x < ex$

三．计算题(每小题 7 分，共 42 分)

1． 求极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$ 。

2． 求极限 $\lim\limits_{n \to \infty} 2^n \cdot \sin \dfrac{x}{2^n}$（$x$ 为不等于 0 的常数)。

3． 求极限 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{1 + x}{x} \right)^{2x}$ 。

4． 已知 $y = 1 + xe^y$，求 $y'\big|_{x=0}$ 及 $y''\big|_{x=0}$ 。

5． 求不定积分 $\int \dfrac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$ 。

6． 求不定积分 $\int x \ln(x+1) dx$ 。

四．已知函数 $y=\dfrac{x+1}{x^2}$，填表并描绘函数图形。（14 分）

定义域			
$y'=$		$y''=$	
单调增区间		单调减区间	
极值点		极　值	
凹区间		凸区间	
拐　点		渐近线	

图形：

五．**证明题(每小题 6 分, 共 12 分)**

1．设偶函数 $f(x)$ 具有连续的二阶导函数，且 $f''(x)\neq 0$。证明：$x=0$ 为 $f(x)$ 的极值点。

2．就 k 的不同取值情况，确定方程 $x-\dfrac{\pi}{2}\sin x=k$ 在开区间（$0,\dfrac{\pi}{2}$）内根的个数，并证明你的结论。

《微积分》试卷（D 卷）

一、单项选择题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）：

1. 函数 $f(x,y)$ 在 $(x,y)=(x_0,y_0)$ 处的偏导数存在是在该处可微的（　　）条件。

A. 充分；　　B. 必要；　　C. 充分必要；　　D. 无关的.

2. 函数 $z=\ln\left(x^3+y^3\right)$ 在（1，1）处的全微分 $dz=$（　　）。

A. $dx+dy$；　B. $2(dx+dy)$；　C. $3(dx+dy)$；　D. $\frac{3}{2}(dx+dy)$.

3. 设 D 为：$x^2+y^2\le R^2$，二重积分的值 $\iint\limits_D\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy=$（　　）。

A. πR^2；　B. $2\pi R^2$；　C. $\frac{2}{3}\pi R^3$；　D. $\frac{1}{2}\pi R^4$.

4. 微分方程 $y''-4y'-5y=e^{-x}+\sin x$ 的特解形式为(　　)。

A　$ae^{-x}+b\sin x$；　B　$ae^{-x}+b\cos x+c\sin x$；

C　$axe^{-x}+b\sin x$；　D　$axe^{-x}+b\cos x+c\sin x$.

5. 下列级数中收敛的是（　　）。

A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$；　B. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}$；　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2}$；　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}$.

二、填空题（本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分）：

1. $\int_{-1}^{1}\frac{x^2\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=$__________ 。

2. $f(x)=\int_0^x(t+1)(t-2)dt$，则在区间[-2，3]上 $f(x)$ 在 $x=$（ -1 ）处取得最大值。

3. 已知函数 $z=x^y\ (x>0)$，则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$__________，$\frac{\partial z}{\partial y}=$______________。

4. 微分方程 $y'=4x^3y$ 在初始条件 $y\big|_{x=0}=4$ 下的特解是：$y=$______________。

5. 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{10}}{10^n}x^{n-1}$ 的收敛半径是：$R=$____________。

三、计算下列各题（本题共 5 小题，每小题 8 分，共 40 分）：

1. 已知 $z=f(x-y,xy)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 已知 $\frac{x}{z}=\ln\frac{z}{y}$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$， $\frac{\partial z}{\partial y}$。

3. 改换二次积分 $\int_0^2 dx\int_x^2 \sin y^2 dy$ 的积分次序并且计算该积分。

4. 求微分方程 $y''-4y'+3y=0$ 在初始条件 $y|_{x=0}=6$， $y'|_{x=0}=10$ 下的特解。

5. 曲线 C 的方程为 $y=f(x)$，点(3,2)是其一拐点，直线 l_1,l_2 分别是曲线 C 在点(0,0)与(3,2) 处的切线，其交点为(2,4)，设函数 $f(x)$ 具有三阶导数，计算 $\int_0^3 (x^2+x)f'''(x)dx$。

四、求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n}$ 的和函数 $s(x)$ 及其极值（10 分）。

五、解下列应用题（本题共 2 小题，每小题 10 分，共 20 分）：

1. 某企业生产某产品的产量 $Q(x,y)=100x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$，其中 x 为劳动力人数， y 为设备台数，该企业投入 5000 万元生产该产品，设招聘一个劳动力需要 15 万元，购买一台设备需要 25 万元，问该企业应招聘几个劳动力和购买几台设备时，使得产量达到最高？

2. 已知某商品的需求量 Q 对价格 P 的弹性 $\eta=2P^2$，而市场对该商品的最大需求量为 10000 件，即 Q (0)=10000, 求需求函数 Q（ P ）。

《微积分》试卷（E 卷）

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}x^2; & x\le 1\\ ax+b; & x>1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则（　　　）

A. $a=0,b=1$　　B. $a=2,b=-1$　　C. $a=3,b=-2$　　D. $a=-1,b=2$

2. 已知 $f\left(x\right)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $f\left(0\right)=0,\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)}{1-\cos x}=2$，则在 $x=0$ 处 $f\left(x\right)$ 满足（　　　）

A. 不可导　　B. 可导　　C. 取极大值　　D. 取极小值

3. 若广义积分 $\int_2^{+\infty}\dfrac{dx}{x\left(\ln x\right)^k}$ 收敛，则（　　　）

A. $k>1$　　B. $k\ge 1$　　C. $k<1$　　D. $k\le 1$

4. $\lim\limits_{x\to -1}e^{\frac{1}{x+1}}=(\quad)$

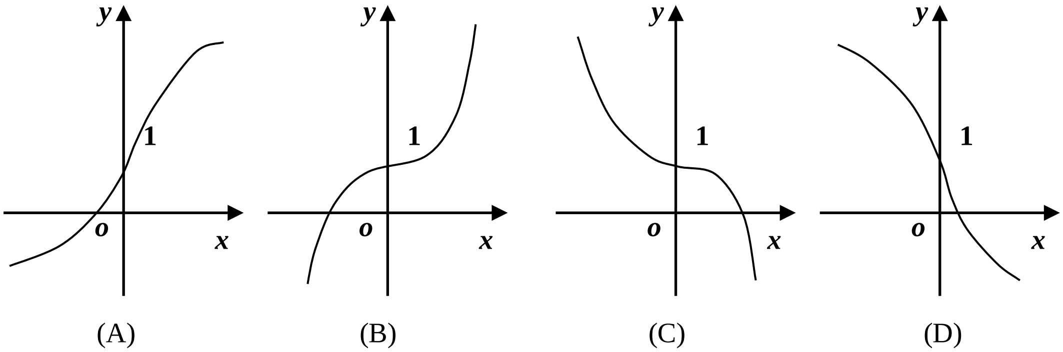
A．　0　　B.∞　　C.不存在　　D.以上都不对

5. 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 是关于 x^2 的（　　）.

A．同阶无穷小.　　**B**．低阶无穷小.　　**C**．高阶无穷小.　　**D**．等价无穷小.

6.函数 $f(x)$ 具有下列特征：$f(0)=1,\ f'(0)=0$，当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)>0,\ f''(x)\begin{cases}<0, & x<0\\ >0, & x>0\end{cases}$

则 $f(x)$ 的图形为（　　　　　　　）。



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

二、填空（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$________。

2. $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=$________。

3. 已知 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$________。

4．设 $y=\ln(x+1)$，那么 $y^{(n)}(x)=$________。

5． $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}e^{t^2}dt=$________。

6．某商品的需求函数 $Q=75-P^2$，则在 P＝4 时，需求价格弹性为 $\eta\big|_{P=4}=$______，收入对价格的弹性是 $\left.\dfrac{ER}{EP}\right|_{P=4}=$_____ 。

三、计算（前四小题每题 5 分，后四小题每题 6 共 44 分）

1． $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x \arctan t\,dt}{\sqrt{x^2+1}}$

2． $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}$

3． $\int_1^e x\ln x\,dx$

4． $\int\dfrac{dx}{x(1+x^6)}$

5．求由 $\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t\,dt=0$ 所决定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$.

6．已知 $\dfrac{\sin x}{x}$ 是 $f(x)$ 的原函数，求 $\int xf'(x)dx$。

7．求由曲线 $y=x^3$ 与 $x=1, y=0$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转形成的旋转体的体积。

8．求曲线 $y=x^2$ 与直线 $y=kx+1$ 所围平面图形的面积，问 k 为何时，该面积最小？

四、(A 类 12 分) 列表分析函数 $y=\dfrac{x^2}{1+x}$ 函数的单调区间、凹凸区间等几何性质，并作出函数图形。

解：(1) 函数的定义域 D: $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，无对称性；

(2) $y'=\dfrac{x^2+2x}{(1+x)^2}=0$，得 $x_1=-2,\ x_2=0$

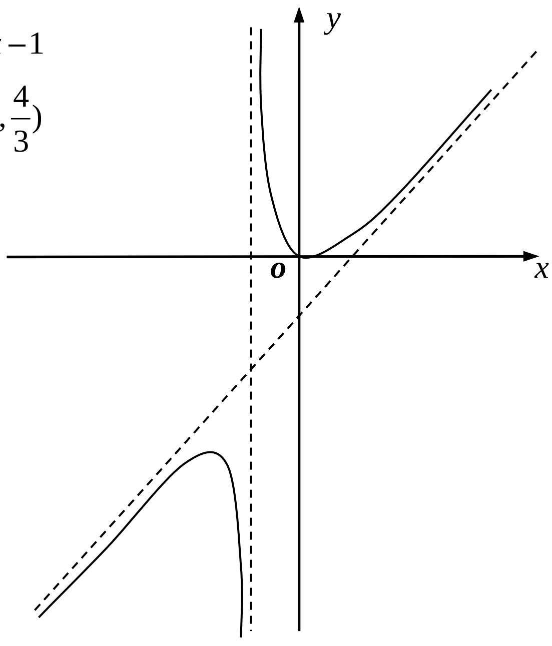
$$y''=\frac{(2x+2)(1+x)^2-2(x^2+2x)(1+x)}{(1+x)^4}=\frac{2}{(1+x)^3}$$

(3) 列表：

x	$(-\infty,\ -2)$	-2	$(-2,\ -1)$	$(-1,\ 0)$	0	$(0,+\infty)$
y'	+	0	−	−	0	+
y''	−	−	−	+	+	+
y	↗, ∩	极大值−4	↘, ∩	↘, ∪	极小值 0	↗, ∪

(4) 垂直渐近线：$x=-1$；斜渐近线：$y=x-1$

(5) 绘图，描几个点 $(-2,-4)$, $(0,0)$, $(1,\dfrac{1}{2})$, $(2,\dfrac{4}{3})$



(B 类 12 分)列表分析函数 $y=\ln(1+x^2)$ 函数的单调区间、凹凸区间等几何性质，并作出函数图形。

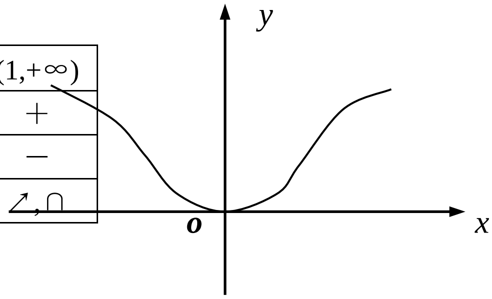
解：⑴ 函数定义域 D:(−∞，+∞)，偶函数关于 Y 轴对称；

⑵ $y'=\dfrac{2x}{1+x^2}=0$，得 $x=0$

$$y''=\frac{2(1+x^2)-2x\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}=\frac{2(1+x)(1-x)}{(1+x^2)^2}=0, \text{得 } x_1=-1, x_2=1$$

⑶ 列表：（只讨论（0,+∞）部分）

x	0	(0,1)	1	(1,+∞)
y'	0	＋	＋	＋
y''	＋	＋	0	－
y	极小值	↗,∪	拐点	↗,∩



极小值 $f(0)=0$；拐点（1,ln2）

⑷ 该函数无渐近线；

⑸ 绘图，描几个点：（0，0），（-1，ln2），（1，ln2）

五、（B 类 8 分） 设 $f\left(x\right)$ 连续，证明：

$$\int_0^x\left[\int_0^u f\left(t\right)dt\right]du=\int_0^x\left(x-u\right)f\left(u\right)du$$

证明：令

$F(x)=\int_0^x\int_0^u f(t)dt$ $\quad G(x)=\int_0^x(x-u)f(u)du$ 只需证明 $F'(x)=G'(x)$（3 分）

$$F'(x)=\int_0^x f(t)dt$$

$$G(x)=x\int_0^x f(u)du-\int_0^x uf(u)du$$

$$G'(x)=\int_0^x f(u)du+xf(x)-xf(x)=\int_0^x f(u)du$$

所以 $F'(x)=G'(x)$ （8 分）

（A 类 8 分）设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续在 (a,b) 内可导且 $f'(x)<0$

$$F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt,\quad x\in(a,b)$$

试证（1）$F(x)$ 在 (a,b) 内单调递减

(2) $0 < F(x) - f(x) < f(a) - f(b)$

证（1）

$$F'(x) = \frac{(x-a)f(x) - \int_a^x f(t)dt}{(x-a)^2}$$

$$\underset{\xi\in(a,x)}{\overset{\text{积分中值定理}}{=\!=\!=\!=}} \frac{(x-a)f(x) - f(\xi)(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{f(x) - f(\xi)}{x-a}$$

由 $f'(x) < 0$ 知 $f(x)$ 单调减,即在$(a\ ,b)$内当$\xi < \mathrm{x}$ 时有 $f(x) < f(\xi)$ 又$(x-a) > 0$可得

$F'(x) < 0$.即 $F(x)$ 在$(a\ ,b)$内单调减.

(2) 因 $F(x) - f(x) = \dfrac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt - f(x)$

$$\overset{\text{积分中值定理}}{=\!=\!=\!=} f(\xi) - f(x) > 0$$

又由 $f(x)$ 单调减 知, $f(a) > f(\xi) > f(x) > f(b)$ 于是有

$0 < F(x) - f(x) < f(a) - f(b)$

《微积分》试卷（F 卷）

一、单项选择题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设函数 $f\left(x\right)=\begin{cases} x^2; & x\le 1 \\ ax+b; & x>1 \end{cases}$ 在 $x=1$ 处可导，则（　　　）

A. $a=0,b=1$　　B. $a=2,b=-1$　　C. $a=3,b=-2$　　D. $a=-1,b=2$

2. 当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x$ 是关于 x^2 的（　　）.

A．同阶无穷小.　　B．低阶无穷小.　　C．高阶无穷小.　　D．等价无穷小.

3. 若广义积分 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\left(\ln x\right)^k}$ 收敛，则（　　　）

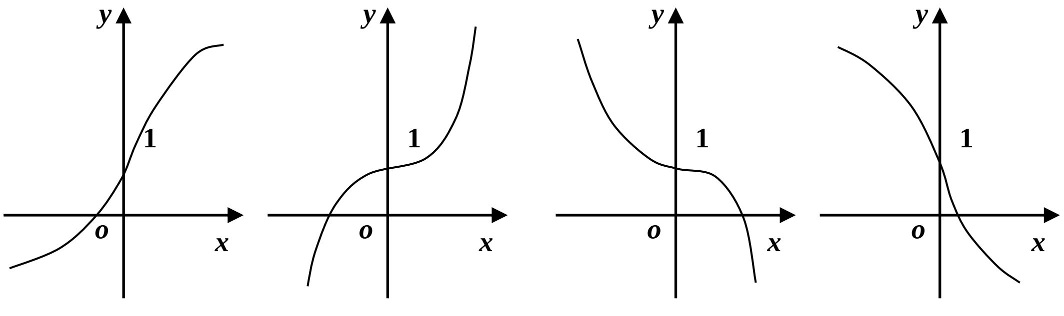
A. $k>1$　　B. $k\ge 1$　　C. $k<1$　　D. $k\le 1$

4. $\lim\limits_{x\to -1} e^{\frac{1}{x+1}}=(\quad)$

A．　0　　B.∞　　C.不存在　　D.以上都不对

5.函数 $f(x)$ 具有下列特征：$f(0)=1,\ f'(0)=0$，当 $x\neq 0$ 时，$f'(x)>0,\ f''(x)\begin{cases} <0, & x<0 \\ >0, & x>0 \end{cases}$

则 $f(x)$ 的图形为（　　　　　　　）。



(A)　　(B)　　(C)　　(D)

6.　6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,\infty)$ 内二阶可导，若 $f(x)=-f(-x)$，且在 $(0,\infty)$ 内有 $f'(x)>0, f''(x)>0,$ 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内有（　）

A. $f'(x)<0, f''(x)<0,$　　B. $f'(x)<0, f''(x)>0,$

C. $f'(x)>0, f''(x)<0,$　　D. $f'(x)>0, f''(x)>0.$

二、填空（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=$________。

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{x}\right)^{2x}=$________。

3. 已知 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=$________。

4. 设 $y=\ln(x+1)$，那么 $y^{(n)}(x)=$________。

5. $\dfrac{d}{dx}\int_{x^2}^{0}e^{t^2}dt=$________。

6. 某商品的需求函数 $Q=75-P^2$，则在 P＝4 时，需求价格弹性为 $\eta\big|_{P=4}=$______，收入对价格的弹性是 $\left.\dfrac{ER}{EP}\right|_{P=4}=$_____ 。

三、计算（前四小题每题 5 分，后四小题每题 6 共 44 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x \arctan t dt}{\sqrt{x^2+1}}$

2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{1}{1+\sin x}dx$

3. $\int_1^e x\ln x dx$

4. $\int\dfrac{dx}{x(1+x^6)}$

答案参见我的新浪博客：http://blog.sina.com.cn/s/blog_3fb788630100muda.html

5．求由$\int_0^y e^t dt+\int_0^x \cos t dt=0$所决定的隐函数$y=y(x)$的导数$\frac{dy}{dx}$.

6．已知$\frac{\sin x}{x}$是$f(x)$的原函数，求$\int xf'(x)dx$。

7．求由曲线$y=x^2-1$与直线$y=x+1$所围成的平面图形的面积。

8．求由曲线$y=x^3$与$x=1, y=0$所围成的平面图形绕 x 轴旋转形成的旋转体的体积。

四、(12 分)列表分析函数$y=\ln(1+x^2)$函数的单调区间、凹凸区间等几何性质，并作出函数图形。

五、（B 类 8 分） 设$f(x)$连续，证明：

$$\int_0^x\left[\int_0^u f(t)dt\right]du=\int_0^x(x-u)f(u)du$$