清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 线性代数（10421324） A 卷 2022 年 1 月 2 日

本试题共 8 道大题，满分 100 分.

1.（15 分）设 $A=\begin{bmatrix}4&0&-1\\0&0&4\\3&5&3\\0&0&3\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}0\\-3\\5\\4\end{bmatrix}$.

（1）（6 分）求 4×3 列正交矩阵 Q（即 Q 为实矩阵且 $Q^{\mathrm{T}}Q=I_3$，其中 I_3 为 3 阶单位阵）和对角元非负的 3 阶上三角矩阵 R，使得 $A=QR$.

（2）（3 分）求 A 的列空间上的正交投影矩阵.

（3）（6 分）求 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbb{R}^3$，使得 $\|\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}_0\|=\min_{\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3}\|\boldsymbol{b}-A\boldsymbol{x}\|$.

2.（10 分）求分块矩阵 $\begin{bmatrix}O&A\\-A&O\end{bmatrix}$ 的行列式的值，其中 $A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\2&-1&4&-3\\3&-4&-1&2\\4&3&-2&-1\end{bmatrix}$.

3.（15 分）设 $A=\begin{bmatrix}a&-1&c\\5&b&3\\1-c&0&-a\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}$，已知 $\det(A)=-1$，而 A^{-1} 有特征值 λ，且 $\boldsymbol{x}$ 是 A^{-1} 属于 λ 的特征向量.

（1）（5 分）证明：$\lambda\neq0$，$\dfrac{1}{\lambda}$ 为 A 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 是 A 的属于 $\dfrac{1}{\lambda}$ 的特征向量.

（2）（5 分）求 a,b,c 和 λ 的值.

（3）（5 分）判断 A 是否可对角化并给出理由.

4.（10 分）已知 $A=X\Lambda X^{-1}$，其中 $X=\begin{bmatrix}1&1&-1&0\\&1&2&1\\&&1&0\\&&&1\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}1&&&\\&2&&\\&&-2&\\&&&-1\end{bmatrix}$，$M=A^4-2A^2-8I$，给出 M 的零空间的一组基并说明理由.

5.（10 分）设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&2&0\\1&0&1\end{bmatrix}$，$B=(A+kI_3)^2$，$k\in\mathbb{R}$，$I_3$ 为 3 阶单位阵.

（1）（5 分）求与 A 相似的对角矩阵 Λ.

（2）（5 分）求使 B 正定的 k 的取值范围.

6.（15 分）给定 $\mathbb{R}$ 上的线性空间（vector space）$V=\left\{a_0+a_1x+a_2x^2 \,\middle|\, a_0,a_1,a_2\in\mathbb{R}\right\}$，定义 V 上的变换 $\sigma: f(x)\mapsto (x+1)f'(x)$.

（1）（4 分）证明 σ 是线性变换.

（2）（4 分）求 σ 在基 $1,x,x^2$ 下的矩阵.

（3）（4 分）求从基 $1,x,x^2$ 到基 $1,2x,4x^2-1$ 的过渡矩阵，即求 3 阶可逆矩阵 P 满足

$(1,2x,4x^2-1)=(1,x,x^2)P$.

（4）（3 分）求 σ 在基 $1,2x,4x^2-1$ 下的矩阵.

7.（15 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

（1）（10 分）求 A 的奇异值分解 $A=U\Sigma V^{\mathrm{T}}$，其中 U 和 V 都是正交矩阵.

（2）（5 分）记 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解集为 $S\subseteq\mathbb{R}^3$，求 $\boldsymbol{x}_0$，使得 $\boldsymbol{x}_0\in S$ 且 $\|\boldsymbol{x}_0\|=\min_{\boldsymbol{x}\in S}\|\boldsymbol{x}\|$.

8.（10 分）证明：实反对称矩阵的特征值只能是纯虚数或零.