

清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程

一元微积分期末考题 (A)

系名_____ 班级_____ 姓名_____ 学号_____

一. 填空题 (每空 3 分, 共 15 空) (请将答案直接填写在横线上!)

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x^2}}{x} \int_0^x t^2 e^{t^2} dt =$ _____。

2. 设 $f(x)$ 为连续函数, $F(x) = \int_0^{\cos x} f(x-t) dt$, 则 $F'(x) =$ _____。

3. $\int_{-1}^1 (\sin x^3 + \sqrt{1-x^2}) dx =$ _____。

4. $\int x \ln x dx =$ _____。

5. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+e^x} =$ _____。

6. $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx =$ _____。

7. 当 p 的取值范围为_____时, 广义积分 $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x-2)^{p-1}}$ 收敛。

8. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在点 $x=2$ 收敛, 则 a 的取值范围为_____。

9. 若广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$ 收敛, 则参数 p 的范围为_____。

10. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{2^{n+1}} x^{2n+1}$ 的收敛半径是_____。

11. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(1+n)}{1+n}$ 的收敛性如何? _____ (填绝对收敛, 条件收敛或发散)。

12. 函数 e^{x^2+2x} 在 $x_0 = -1$ 点的 Taylor 级数展开式为

13. 级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n!}}{n^{\frac{n}{2}}}$ 是收敛还是发散? _____ (填上收敛或发散)。

14. 微分方程初值问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} - 2y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的解为_____。

15. 微分方程 $\frac{dy}{dx} - y = y^2$ 的通解为_____。

二. 计算题 (每题 10 分, 共 40 分)

1. 求 $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx$ 。

2. 求上半心形线 $\begin{cases} x = a(1 + \cos \theta) \cos \theta \\ y = a(1 + \cos \theta) \sin \theta \end{cases}, 0 \leq \theta \leq \pi$, 绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积 V 。

3. 将函数 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 展开成 $x+1$ 的幂级数, 求该幂级数的收敛域, 并求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (x+1)^n$ 的和函数。

4. 求下面定解问题的解 $y = y(x)$:

$$\begin{cases} \frac{d^2 y}{dx^2} = 2y(y-a)(2y-a), & 0 < x < +\infty, \\ y(0) = 1, \quad y'(0) = \sqrt{2}(1-a), \end{cases}$$

其中 $a > 1$ 。

三. 证明题

1. (8 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且单调增, 求证

$$\int_a^b x f(x) dx \geq \left(\frac{a+b}{2} \right) \int_a^b f(x) dx$$

2. (7 分) 设 $f \in C^1[0, +\infty)$, 且 $\int_0^{+\infty} (|f(x)| + |f'(x)|) dx$ 收敛, 求证 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ 。