清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程 **微积分 A（1）**

系名________________ **班级**______________ **姓名**______________ **学号**_______________

一．填空题（每个空 3 分，共 10 题）（**请将答案写在横线上，严禁写在答卷纸上！**）

1. 常微分方程 $y'=1+2x+y^2+2xy^2$ 的通解为____________________________。

解答：$\arctan y = x + x^2 + C$

2. 常微分方程 $y''-2y'+y=2$ 的通解为____________________________。

解答：通解为 $c_1e^x + c_2xe^x + 2.$

3. $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+3k}=$______________。

解答：$\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+3k}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{3k}{n}}=\int_0^1\frac{dx}{1+3x}=\frac{2}{3}ln2.$

4. $\int_0^2|1-x|\,\mathrm{d}x=$______________。

解答：1

5. 设 $f(x)=\sin(x^3)$，则 $f^{(15)}(0)=$______________。

解答：$\frac{15!}{5!}$

6. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{x^2}^{x^3}\dfrac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=$____________________________。

解答：$\dfrac{3\sin(x^3)-2\sin(x^2)}{x}$

7. $\int_0^{\pi}x(\sin x)^2\mathrm{d}x=$______________。

解答：$\frac{\pi^2}{4}$

8. 常微分方程 $y'+y=\mathrm{e}^{-x}$ 满足 $y(0)=0$ 的解 $y=y(x)$ 的拐点的横坐标为______________。

解答：拐点的横坐标为2.

9. 曲线段 $y=2x^{\frac{3}{2}}\quad(0\le x\le 1)$ 的弧长为______________。

解答：$\dfrac{2}{27}(10^{\frac{3}{2}}-1)$

10. 设当 $x\to 0$ 时，函数 $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{3}}-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{3}}$ 为 p 阶无穷小，则 $p=$______________。

答案：2

二． 解答题（共 8 题）（请写出详细的计算过程和必要的根据！）

11.（10 分）讨论 p 取何值时，广义积分 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^p\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$ 收敛。

解：记 $J=\int_0^{+\infty}\dfrac{x^p\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$，$J_1=\int_0^{1}\dfrac{x^p\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$，$J_2=\int_1^{+\infty}\dfrac{x^p\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$，则广义积分 J 收敛当且仅当 J_1,J_2 都收敛。

当 $x\to 0^+$ 时，$\dfrac{x^p\ln x}{(1+x^2)^2}\sim x^p\ln x$，所以 J_1 收敛当且仅当 $p>-1$。

当 $x\to +\infty$ 时，$\dfrac{x^p\ln x}{(1+x^2)^2}\sim\dfrac{\ln x}{x^{4-p}}$，所以 J_2 收敛当且仅当 $p<3$。

综上可知，J 收敛当且仅当 $-1<p<3$。

12. （10 分）求数列 $\{n^{1/n}\}$（$n=1,2,3,\cdots$）的最大项的值。

解：$\forall x>0$，记 $f(x)=x^{\frac{1}{x}}$，

则 $f'(x)=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)$。

所以 $f(x)$ 在 $(0,\mathrm{e})$ 内严格单调增，在 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内严格单调减。

故$1 < 2^{1/2}$，$3^{1/3} > n^{1/n}, n \ge 4$。

因为$2^{1/2} < 3^{1/3}$，

所以数列$\{n^{1/n}\}$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）的最大项的值为$3^{1/3}$。

13. （13 分）设 $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}, & x \ne 0; \\ 0, & x = 0 \end{cases}$，讨论函数 $f(x)$ 的连续性，并求 $f(x)$ 的单调区间、极值点与极值、凸性区间、拐点和渐近线。

解：函数 $f(x)$ 有唯一间断点 $x = 0$。

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}},\ f''(x) = \frac{1}{x^4}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}(1 + 2x),$$

所以：

（1）函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内单调减；

函数 $f(x)$ 仅在点 $x = 0$ 处取极值，为极小值，相应值为 0。

（2）函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -\frac{1}{2})$ 内上凸，在 $(-\frac{1}{2}, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 内下凸。

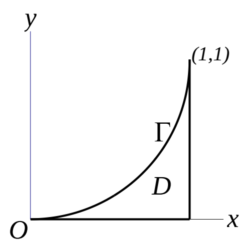
函数 $f(x)$ 有唯一的拐点 $(-\frac{1}{2}, \mathrm{e}^{-2})$。

（3）函数 $f(x)$ 有两条渐近线：$x = 0$，$y = 1$。

14.（12 分）设曲线段Γ为圆心在点$(0,1)$的单位圆周位于正方形$0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$的部分，平面区域$D$为由$\Gamma$，$x$轴以及直线$x = 1$围成的有界区域。

（I）求区域D绕x轴旋转一周所产生的旋转体体积；

（II）求曲线段Γ绕x轴旋转一周所产生的旋转面面积。



解：（I）曲线段Γ：$y = 1 - \sqrt{1 - x^2}, 0 \le x \le 1$。

区域D绕x轴旋转一周所产生的旋转体体积

$$V = \int_0^1 \pi(y(x))^2 \mathrm{d}x = \pi\int_0^1 (2 - x^2 - 2\sqrt{1 - x^2})\mathrm{d}x$$

$$= \frac{5}{3}\pi - 2\pi\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{5}{3}\pi - 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{5}{3}\pi - \frac{\pi^2}{2}。$$

（II）曲线段Γ绕x轴旋转一周所产生的旋转面面积

$$S=\int_0^1 2\pi y(x)\mathrm{d}l=2\pi\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}\mathrm{d}x$$

$$=2\pi\int_0^1(1-\sqrt{1-x^2})\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$=2\pi\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}-2\pi$$

$$=\pi^2-2\pi$$

15. （10 分）求常微分方程的初值问题 $\begin{cases}\sqrt{1+(y')^2}=(1-x)y'',\\ y(0)=0,\\ y'(0)=0\end{cases}$ 的解 $(x<1)$。

解:令 $p=y'$，则

$$\begin{cases}\sqrt{1+p^2}=(1-x)\dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\\ p(0)=0\end{cases}$$

分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}p}{\sqrt{1+p^2}}=\dfrac{\mathrm{d}x}{1-x}$，

$$\sqrt{1+p^2}+p=\frac{C_1}{1-x}。$$

由 $p(0)=0$ 得 $C_1=1$，所以

$$\sqrt{1+p^2}+p=\frac{1}{1-x},$$

$$\sqrt{1+p^2}-p=1-x,$$

相减得：$y'=p=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1-x}-1+x)$。

由 $y(0)=0$ 得 $y=-\ln\sqrt{1-x}+\dfrac{1}{4}x^2-\dfrac{1}{2}x$

16.（5 分）设 $f\in C(0,+\infty)$，并且 $\forall a>0,\ b>1$，都有积分值 $\int_a^{ab}f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关，求证：存在常数 C，使得 $f(x)=\dfrac{C}{x}$，$x\in(0,+\infty)$。

证明：因为积分值 $\int_a^{ab}f(x)\mathrm{d}x$ 与 a 无关，所以 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_a^{ab}f(x)\mathrm{d}x=0$，即

$bf(ab)-f(a)=0, a>0, b>1$。

记 $C=f(1)$，当 $x=1$ 时，$f(x)=\dfrac{C}{x}$。

当 $x>1$ 时，取 $a=1$，$b=x$，则 $f(x)=\dfrac{C}{x}$。

当 $0<x<1$ 时，取 $a=x$，$b=\dfrac{1}{x}$，则 $f(x)=\dfrac{C}{x}$。

本题得证。

17.（5 分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上非负连续，且满足 $\left(f(x)\right)^2\le 1+2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t, x\in[0,1]$，证明：$f(x)\le 1+x, x\in[0,1]$。

证明：当 $x\in[0,1]$ 时，记 $g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $g'(x)=f(x)\le\sqrt{1+2g(x)}$。

所以 $\int_0^x \dfrac{g'(t)}{\sqrt{1+2g(t)}}\mathrm{d}t\le\int_0^x \mathrm{d}t=x$，

即 $\sqrt{1+2g(x)}-1\le x$，

故 $f(x)\le\sqrt{1+2g(x)}\le 1+x, x\in[0,1]$。

18.（5 分）设 $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 为实系数 n 次多项式。若 $p(x)\ge 0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，证明：$p(x)+p'(x)+\cdots+p^{(n)}(x)\ge 0, x\in(-\infty,+\infty)$。

这里 $p'(x), p''(x),\cdots,p^{(n)}(x)$ 表示 $p(x)$ 的一阶，二阶，以及 n 阶导数。

证明：记 $H(x)=p(x)+p'(x)+\cdots+p^{(n)}(x)$，

则 $H'(x)=p'(x)+\cdots+p^{(n)}(x)$，

$H(x)-H'(x)=p(x)\ge 0$。

所以 $\left(\mathrm{e}^{-x}H(x)\right)'=\mathrm{e}^{-x}(H'(x)-H(x))\le 0$。

即 $\mathrm{e}^{-x}H(x)$ 在 $x\in(-\infty,+\infty)$ 单调减。

$H(x)$ 为多项式，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{H(x)}{\mathrm{e}^x}=0$，故 $\dfrac{H(x)}{\mathrm{e}^x}\ge 0, x\in(-\infty,+\infty)$，得证。

三. 附加题（本题全对才给分，其分数不计入总评，仅用于评判 A+）

设 $h>0$， $f(x)$ 为闭区间 $[-h,h]$ 上的无穷可导函数，且 $\forall x\in[0,h]$，以及任意的非负整数 n，都有 $f^{(n)}(x)\geq 0$。记 $r_n(x)=\dfrac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$，求证：$\forall x\in(0,h)$，均有 $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n(x)=0$。

证明：注意 $r_n(x)$ 是函数f(x)在点 $x=0$ 处 n 阶 Taylor 展式的积分余项，即

$$\mathrm{f(x)}=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+r_n(x)\quad (*)$$

对积分 $\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ 作变量代换 $\mathrm{x-t=xu}$，则

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^1 (xu)^n f^{(n+1)}(x(1-u))x du=\frac{x^{n+1}}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u))du$$

上式可写作

$$\frac{r_n(x)}{x^{n+1}}=\frac{1}{n!}\int_0^1 u^n f^{(n+1)}(x(1-u))du$$

根据假设函数 f(x) 的各阶导数非负，可知 $f^{(n+1)}(x(1-u))\leq f^{(n+1)}(\mathrm{h}(1-u))$. 因此

$$\frac{r_n(x)}{x^{n+1}}\leq\frac{r_n(h)}{h^{n+1}},\qquad \mathrm{x}\in(0,\mathrm{h})$$

再由展式(∗)可知 $r_n(h)\leq f(h)$. 于是对于任意 $\mathrm{x}\in(0,\mathrm{h})$

$$0\leq r_n(x)\leq\frac{x^{n+1}}{h^{n+1}}r_n(h)=\left(\frac{x}{h}\right)^{n+1}f(h)\to 0$$

命题得证.