2018学年秋季学期线性代数期末笔试试题

2019.1.9

(ERIC回忆完整版)

一、填空题（共9题，每空4分，共40分）

1.已知$u = (1, 2, 3)$，$v = (-2, 2, -1)$，$w = (1, 1, 4)$，则$u\times v =$ ________________，由u，v，w构成的平行六面体的体积为____________________。

2.已知A是$r\times s$阶矩阵，B是$s\times r$阶矩阵，若$AB = I_r$，则有__________（选择一项填空：(A) $r < s$；(B) $r > s$；(C) $r\geqslant s$；(D) $r\leqslant s$）。

3.已知A为四阶方阵，$\det A=\dfrac{1}{2}$，A^*为A的伴随矩阵，则$\left|(3A)^{-1}-2A^*\right|=$________________。

4.已知四阶方阵B相似于四阶方阵A，A的特征值为2，3，4，5，则$\left|B-I\right|=$________________。

5. 求行列式$\begin{vmatrix} 1 & 1^2 & 1^3 & 1^4 \\ 2 & 2^2 & 2^3 & 2^4 \\ (-1) & (-1)^2 & (-1)^3 & (-1)^4 \\ (-2) & (-2)^2 & (-2)^3 & (-2)^4 \end{vmatrix}=$________________。

6.对于矩阵A，$C(A)^{\perp}=$____________（填A的四个子空间）。

7.A为m阶方阵，B为n阶方阵，$\det A = a$，$\det B = b$，则$\det\begin{pmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{pmatrix}=$____________________。

8.矩阵$A=\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$的非零特征值为______________________。

9.已知矩阵$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$有三个线性无关的特征向量，则$x$，$y$应满足____________________。

二、解答题（共7题，共60分）

1.（期中考也考了！）已知方程组$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$。

(1) a满足什么条件时，方程组有无穷解、唯一解、无解？

(2) 当方程组有无穷解时，求其通解。

2.已知三阶方阵 $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -2\\ -4 & 0 & -4\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$。

(1) 方阵A能否相似对角化？

(2) 若A可相似对角化，求可逆矩阵P和对角阵D，使 $D=P^{-1}AP$。

3.使用*Gram-Schmidz*正交化方法将 $v_1=\begin{bmatrix}1\\ -2\\ -2\end{bmatrix}$，$v_2=\begin{bmatrix}-3\\ 0\\ -6\end{bmatrix}$，$v_3=\begin{bmatrix}7\\ -2\\ -1\end{bmatrix}$化为一组标准正交基。

4.已知 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，$b=\begin{bmatrix}5\\ 1\\ 0\end{bmatrix}$。

(1) 求方程 $Ax=b$ 的最小二乘解。

(2) 求b在$C(A)$的投影。

5.已知微分方程租 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}=A\vec{u}$，其中 $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{bmatrix}$，$\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}$。

(1) 求微分方程组的通解。

(2) 若 $u(0)=\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}$，求微分方程组的解。

6.已知n阶方阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1\end{bmatrix}$。将所有$n$阶方阵组成的向量空间记为 $M_n(\mathbb{R})$，将 $M_n(\mathbb{R})$ 中满足与A乘法可交换的全体矩阵记为 $T(A)$。

(1) 求证：$T(A)$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的子空间。

(2) 求 $T(A)$ 的维数和一组基。

7.求行列式 $D=\begin{vmatrix}a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ \mu a_1 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ \mu a_2 & \mu a_1 & a_0 & \cdots & a_{n-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \mu a_{n-1} & \mu a_{n-2} & \mu a_{n-3} & \cdots & a_0\end{vmatrix}$。