

参考答案

1. (20 分) 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 。回答以下问题, 并说明理由。

(I) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否连续?

(II) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的两个一阶偏导数是否存在, 若存在, 求这两个偏导数。

(III) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否可微? 可微时, 求出它的微分。

解: (I) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续。

(II) 两个偏导数存在, 且 $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 1$

(III) 函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处不可微。理由如下: 若可微, 则

$$\frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = x + y + o(\rho), \text{ 其中 } \rho^2 = x^2 + y^2, \text{ 即 } \frac{-xy(x+y)}{x^2 + y^2} = o(\rho),$$

亦即 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-xy(x+y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = 0$ 。显然该极限不存在。矛盾。

2. (20 分) 设函数 $z = z(x, y)$ 为由方程 $x^3 + y^3 + z^3 = x + y + z$ 确定的二阶可微函数,

求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

解:
$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1 - 3x^2}{3z^2 - 1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 - 3y^2}{3z^2 - 1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6z \frac{(1 - 3x^2)(1 - 3y^2)}{(3z^2 - 1)^3}$$

3. (20 分) 在椭球曲面 $x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$ 上寻找一点, 位于第一卦限 (即

$x > 0, y > 0, z > 0$), 使得该点处的切平面与三个坐标轴的交点到原点距离的平方和最小。

解: 椭球面在点 (x, y, z) 处的切平面为

$$2x(X-x) + 2y(Y-y) + \frac{z}{2}(Z-z) = 0, \quad \text{其中 } (X, Y, Z) \text{ 为平面上的流动点。}$$

该平面在三个坐标轴上的截距分别为 $1/x$, $1/y$, $4/z$ 。考虑如下极值问题:

$$\begin{cases} \min S(x, y, z) \\ \text{s.t. } x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \end{cases}$$

其中 $S(x, y, z) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{16}{z^2}$ 。作 Lagrange 函数

$$L(x, y, z, \lambda) = S(x, y, z) + \lambda(x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} - 1)。$$

解方程组 $L_x = 0$, $L_y = 0$, $L_z = 0$, $L_\lambda = 0$, 不难得到在第一卦限内有唯一解

$$(x, y, z) = (1/2, 1/2, \sqrt{2})。$$

这就是所要求的点。另外 $\lambda = 16$ 。解答完毕。

4. (20 分) 设函数 $f(x, y)$ 在全平面上连续可微的, 且满足两个条件 (1) 两个一阶偏导

数处处相等, 即 $f_x(x, y) = f_y(x, y)$, $\forall (x, y) \in R^2$; (2) $f(x, 0) > 0$, $\forall x \in R$ 。

证明: 对于 $\forall (x, y) \in R^2$, $f(x, y) > 0$ 。

证明: 对于 $\forall (x, y) \in R^2$, 考虑函数 $g(t) = f(x+t, y-t)$ 。由于函数 f 连续可微, 因此函数 g 也连续可微, 且 $g'(t) = f_x(x+t, y-t) - f_y(x+t, y-t) = 0$, 即函数 $g(t)$ 是常数, 与 t 无关。因此 $g(0) = g(y)$ 。此即 $f(x, y) = f(x+y, 0) > 0$ 。证毕

5. (20 分) 计算积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx$, 其中 $b > a > 0$ 。

解: 记 $F(b) = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx$, 因为对于任意的 $\delta \geq a > 0$, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+b^2 x^2} dx$ 关

于 $b \in [\delta, +\infty)$ 一致收敛, 所以

$$F'(b) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+b^2 x^2} dx = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{b}。$$

而 $F(a) = 0$ ，所以 $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan bx - \arctan ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a}$ 。