530 微积分 A2-模拟期末考试

姓名_________ 证件类型_________ 证件号_________ 考试日期_________ 成绩_________

本次模拟考试是为 6 月 8 日的期末正式考试做准备，同学们根据操作文档说明熟悉流程，本次模拟题不批改，熟悉操作后，可在半小时后交卷离开考场。

试题

满分: 100 分 答题限时: 不限时

全卷 10 道题，每题 10 分，需要完整过程 （共 10 题 共 100 分）

1.（10 分）

设 $z = xf\left(x, \frac{x}{y}\right)$，其中 f 有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。

考生作答:

____

____

____

参考答案:

解：$z'_x = f\left(x, \frac{x}{y}\right) + xf'_1\left(x, \frac{x}{y}\right) + \frac{x}{y} f'_2\left(x, \frac{x}{y}\right)$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\frac{2x}{y^2} f'_2 - \frac{x^2}{y^2} f''_{12} - \frac{x^2}{y^3} f''_{22}$$

试题解析:

2.（10 分）

设方程 $xyz + \sqrt{x^2 + y^2 + z} = \sqrt{2}$ 确定的函数 $z = z(x, y)$，求该函数在点 $x = 1, y = 0$ 处的全微分 $\mathrm{d}z$．

考生作答:

____

参考答案:

解：$x=1, y=0$，可求得 $z=1$。

$$yz + xy\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{2x + \frac{\partial z}{\partial x}}{2\sqrt{x^2+y^2+z}} = 0$$

$\frac{\partial z}{\partial x}(1,0) = -2$。

同理，$\frac{\partial z}{\partial y}(1,0) = -2\sqrt{2}$。所以

$$\mathrm{d}z = -2\mathrm{d}x - 2\sqrt{2}\mathrm{d}y$$

试题解析:

3.（10 分）

求曲线 $x^2+2xy+3y^2-8y=0$ 上的点与直线 $x+y=8$ 上的点之间的最短距离。

考生作答:

参考答案:

解：记曲线 $x^2+2xy+3y^2-8y=0$ 上的点 (x,y) 与直线上的点之间的距离 d，则

$$d^2=\frac{(x+y-8)^2}{2}。$$

求最短距离问题为 $\begin{cases}\min\dfrac{(x+y-8)^2}{2}\\ x^2+2xy+3y^2-8y=0\end{cases}$，

构造 Lagrange 函数 $L=\dfrac{(x+y-8)^2}{2}+\lambda(x^2+2xy+3y^2-8y)$，

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=x+y-8+\lambda(2x+2y)=0\\ \dfrac{\partial L}{\partial x}=x+y-8+\lambda(2x+6y-8)=0\\ x^2+2xy+3y^2-8y=0\end{cases}$$

解得两个驻点 $(-2+2\sqrt{2},2),(-2-2\sqrt{2},2)$。由几何意义，最短距离存在，而 $d(-2+2\sqrt{2},2)=4\sqrt{2}-2$, $d(-2-2\sqrt{2},2)=4\sqrt{2}+2$，所以最短距离为 $4\sqrt{2}-2$。

试题解析:

4.（10 分）

求二重积分 $\iint\limits_D\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le R\right\}$。

考生作答:

____

____

____

参考答案:

【解】 用极坐标系，$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$$\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R\left(\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)r^2 r\mathrm{d}r$$

$$=\frac{R^4}{4}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2a^2}+\frac{1-\cos 2\theta}{2b^2}\right)\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right).$$

试题解析:

5.（10 分）

Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 和 $z = 2 - x^2 - y^2$ 包围的空间区域，求 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

考生作答:

____

____

____

参考答案:

解：$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{2-x^2-y^2}(x^2+y^2)\mathrm{d}z = \frac{\pi}{3}$。

试题解析:

6.（10 分）

设 L 是由点 $A(1,1)$ 出发，经过点 $B(0,1)$ 到点 $C(0,-1)$ 的有向折线，求 $\int_L (x+y)\mathrm{d}l$ 和 $\int_{L^+}(x+y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y$。

考生作答:

____

____

____

参考答案:

【答案】$\frac{3}{2}$, $-\frac{3}{2}$

试题解析:

7.（10 分）

计算曲面积分 $\iint\limits_S (2y+z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，其中 S 为有向曲面 $z=x^2+y^2\ (0\le z\le 1)$，法向量与 z 轴正向夹角为锐角。

考生作答:

____

____

____

参考答案:

【解】记 $S_1: z=1, x^2+y^2\le 1$ 向下为正侧。

$$\iint\limits_S (2y+z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y = \iint\limits_{S+S_1} (2y+z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y - \iint\limits_{S_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iiint\limits_{\Omega} 3\mathrm{d}v + \pi = -3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1 \mathrm{d}z + \pi = -6\pi\int_0^1 (1-\rho^2)\rho\mathrm{d}\rho + \pi = -\frac{\pi}{2}.$$

试题解析:

8.（10 分）

设 $f(x)=\begin{cases} x & 0<x\le 1 \\ 0 & 1<x<2 \end{cases}$，将 $f(x)$ 展为周期为 2 的 Fourier 级数，求 Fourier 级数的和函数。

考生作答:

____

____

____

参考答案:

解：
$$a_0=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\qquad a_n=\int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}$$
$$b_n=\int_0^1 x\sin n\pi x\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{n+1}}{n\pi}$$
$$f(x)\sim\frac{1}{4}-\frac{2}{\pi^2}(\cos\pi x+\frac{1}{3^2}\cos 3\pi x+\frac{1}{5^2}\cos 5\pi x+\cdots)$$
$$+\frac{1}{\pi}(\sin\pi x-\frac{1}{2}\sin 2\pi x+\frac{1}{3}\sin 3\pi x-\cdots)$$
$$=\begin{cases} x & 0\le x<1\\ 0 & 1<x<2\\ \frac{1}{2} & x=1\end{cases}$$

试题解析:

9.（10 分）

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛，其和函数 $S(x)$ 满足
$$S''(x)-2xS'(x)-4S(x)=0,\quad S(0)=0,S'(0)=1。$$
（I）证明：$a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n,n=1,2,\cdots$；

（II）求和函数 $S(x)$ 的表达式。

考生作答:

____

____

____

参考答案:

解：(I) $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ ， $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}$ ， $S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$ ，

代入方程， $\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0$ ，即

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n-2\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n-4\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=0,$$

所以 $(n+2)(n+1)a_{n+2}-2na_n-4a_n=0$ ，即 $a_{n+2}=\dfrac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots$ 。

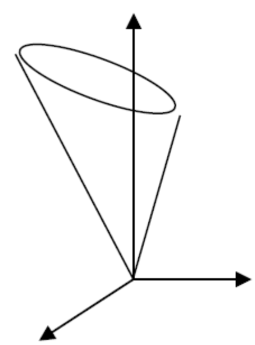
(II) 由 $S(0)=0, S'(0)=1$ 得 $a_0=0, a_1=1$ ，所以 $a_{2n}=0, a_{2n+1}=\dfrac{1}{n!}$ ，

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}x^{2n+1}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{2n}=xe^{x^2}$$ 。

试题解析:

10.（10 分）

设 Ω 为由光滑圆锥面 $S:F(x,y,z)=0$ 及平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 所围成的圆锥体，不妨假设此圆锥体的顶点在原点.



（1）证明设此圆锥体的体积 V 可以表示为

$$V=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)\mathrm{d}S$$

其中 $\partial\Omega$ 为 Ω 区域的边界面， $\mathbf{n}^0$ 为其单位外法向量， $\mathbf{r}=(x,y,z)$.

（2）此圆锥体的体积 V 也可以表示为

$$V=\frac{Ah}{3}$$

其中 A 为圆锥的底面积， h 为圆锥的高.

考生作答:

参考答案:

【证明】（1）有 Guass 公式，

$$\iint_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)\mathrm{d}S=\iint_{\partial\Omega^+}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_{\Omega}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=3V$$

故 $$V=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)\mathrm{d}S$$

（2）$\partial\Omega$ 由两部分组成：S_1（锥面部分）与 S_2（底面部分）。因为锥面的顶教在原点，其上每一点的法向量与径向垂直，故

$$\iint_{S_1}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)\mathrm{d}S=0$$

$$\begin{aligned}\iint_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)\mathrm{d}S&=\iint_{S_2}\left|(x,y,z)\cdot\frac{(A,B,C)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\mathrm{d}S\\&=\iint_{S_2}\left|\frac{Ax+By+Cz}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\mathrm{d}S=\iint_{S_2}\left|\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\mathrm{d}S\\&=\left|\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|\iint_{S_2}\mathrm{d}S=Ah\end{aligned}$$

其中 $A=\iint_{S_2}\mathrm{d}S$ 为圆锥的底面积，$h=\left|\frac{-D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$ 为原点到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离，也就是圆锥的高．故

$$V=\frac{1}{3}\iint_{\partial\Omega}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\left(\iint_{S_1}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)\mathrm{d}S+\iint_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)\mathrm{d}S\right)=\frac{1}{3}\iint_{S_2}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}^0)\mathrm{d}S=\frac{Ah}{3}$$

试题解析: