2018学年秋季学期微积分期末笔试试题

2019.1.8

(ERIC回忆版)

一、填空题（共15题，回忆出8题）

1. $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}=$____________________。

2. 将 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\pi}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k\pi}{n}\sin\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)\right)^{-1}\tan\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ 改写为积分的形式：________________________。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_0^1\sin\left(xt^2\right)\mathrm{d}t}{x}=$____________________。

4. 已知 $\int_1^2\dfrac{\mathrm{d}x}{(x+1)\ln^q x}$ 发散，则q应满足____________________。

5. 已知 $\int_0^1\dfrac{\ln(\mathrm{x}^2+1)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，则p应满足____________________。

6. 微分方程 $y'-2y=y^2$ 在初值条件 $y(0)=2$ 下的解为____________________。

7. 已知三阶齐次常系数微分方程的三个特解为 $y_1=2e^{-x}$， $y_2=5(e^{-x}+e^x\sin 2x)$， $y_3=e^x\cos 2x$，请写出这个三阶齐次常系数微分方程：____。

8. 微分方程 $y''+2y'+y=3e^{-x}$ 的通解为_________________________________。

二、计算题（共4题）

1. 已知曲线l的方程为 $y=\sqrt{a^2+x^2}\ (-a\le x\le a)$。

   (1)若曲线的线密度 $\rho\equiv 1$，求该曲线段关于x轴的力矩M_x（个人觉得应该写为质量矩）；

   (2)求l绕x轴旋转一周围成的面积。

2. 定积分 $I_n=\int_0^1\dfrac{\ln^n x}{x^p}\mathrm{d}x\ (n\in\mathbb{N})$，求$I_n$的收敛条件并给出收敛时$I_n$的值。

3. 已知函数 $f(x)$， $g(x)$，满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$， $g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，求$g'(x)$并讨论$g'(x)$在$x$=0处的连续性。

4.已知函数 $f(x)\in C^1(\mathbb{R})$， $g(x)\in C^1(\mathbb{R})$，且满足 $f'(x)=g(x)$， $g'(x)=e^{2x}-f(x)$， $f(0)=0$， $g(0)=2$ 。

求 $\int_0^{\pi}\left[\frac{g(x)}{1+x}-\frac{f(x)}{(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x$ 。

三、证明题（共2题）

1.设 $f\in C^1[0,+\infty)$，且 $\int_0^{+\infty}\left(|f(x)|+|f'(x)|\right)\mathrm{d}x$ 收敛，求证 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ 。

2.已知 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛，求证：

$$\int_0^{+\infty}f\left(ax+\frac{b}{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f\left(\sqrt{t^2+4ab}\right)\mathrm{d}t$$