

样题（二）简要解答

说明：

1. 样题仅供学生熟悉考试形式。因教学进度等方面的差异，样题对实际考试内容、考试难度等无任何指导。
2. 《样题（二）简要解答》仅给出题目答案与提示。请同学们在考试作答过程中给出详细解题步骤。

题1 (8分). 判断以下矩阵是否可以相似对角化，并简单说明理由。

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 23 & 69 & 188 \\ 69 & 45 & 202 \\ 188 & 202 & 68 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

解1. (a) 可对角化，因为有两个互异特征值。

(b) 不可对角化，因为特征值唯一，但是100的几何重数是1，小于它的代数重数2。

(c) 可对角化，因为实对称阵都可对角化。

(d) 可对角化。这是一个秩为1的矩阵，故0的几何重数是2，迹是17，故第三个特征值是17，17的几何和代数重数都为1，0的几何和代数重数都为2。

题2 (8分). 判断以下实对称阵是否正定，并简单说明理由。

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解2. (a) 正定。理由略。

(b) 不正定。理由略。

(c) 正定。理由略。

(d) 不正定。理由略。

题3 (10分). 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, 分别找出 $N(A)$, $N(A^T)$, $C(A)$, $C(A^T)$ 的一组基。

解3. (1) $(1, 0, 1, 1, 1)$, $(0, 1, 1, 1, 1)$, $(0, 0, 0, 1, 1)$ 是 $C(A^T)$ 的一组基。

(2) $N(A)$ 的基是 $(-1, -1, 1, 0, 0)$, $(0, 0, 0, -1, 1)$.

(3) \mathbb{R}^3 的任意一组基均为 $C(A)$ 的基。

(4) 基是空集。

题4 (5分). 设 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. 求 P 的特征多项式, 并说明理由。

解4. 特征多项式是 $\lambda(\lambda - 1)^2$ 。

题5 (16分). 设

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

第一个矩阵记为 Q , 第二个矩阵记为 R .

(1) (2分) 验证 $Q^T Q = I$.

(2) (6分) 求到 $C(A)$ 的投影矩阵。

(3) (8分) 设 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 求 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解。

解5. (1) 略。

(2) 到 $C(A)$ 的投影矩阵是

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

(3) 最小二乘解是 $\hat{x} = (2\sqrt{2} + 4, -2, 2)$.

题6 (6分). 已知: 整数1653, 2581, 3451, 4582可以被29整除. 证明下面的四阶行列式值被29整除.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

解6. 略。

题7 (6分). 解关于 x 的方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$$

解7. $x = 1, 2$, 或 -2 .

题8 (6分). 定义 $M_2(\mathbb{R})$ 上线性变换 $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ 满足

$$T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求 T 在基 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 下的矩阵。

解8. T 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵是
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

题9 (20分). 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) (10分) 求 A 的奇异值分解 $A = U\Sigma V^T$, 其中 U 是3阶正交阵, V 是2阶正交阵。

(b) (2分) 应用(a)写出 A 的四个基本子空间的一组标准正交基。

(c) (8分) 设 $M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$. 若 $Av = \sigma u$, 其中 u, v 是奇异向量(singular vector), σ 是奇异值(singular value), 证明 $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ 是 M 的特征向量, 并由此应用奇异向量给出5阶正交阵 Q , 使得 $Q^T M Q$ 是对角阵.

解9. (a) $U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$
 (b) 略。
 (c)

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

题10 (10分). 在以下两题中选且仅选一道题完成。

(1) $C: 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 1$ 是实平面上哪种二次曲线, 椭圆、双曲还是抛物线? 若 C 是椭圆, 请算出它的长、短轴长, 以及长、短轴所在的直线方程; 若 C 是双曲线, 请算出它的虚、实轴长以及虚、实轴所在的直线方程, 以及两条渐近线方程; 若 C 是抛物线, 请算出它的顶点以及对称轴方程。

(2) 令 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. 求4阶正交阵 Q 和对角阵 Λ 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

解10. (1) 椭圆。长轴长 $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, 短轴长 $\frac{2}{\sqrt{7}}$, 长轴所在直线方程是 $x + 2y = 0$, 短轴所在直线方程是 $2x - y = 0$.

(2)

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \Lambda = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

题11 (5分). 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, A 的算子范数(operator norm) 是

$$\|A\| = \max_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{v}\|=1}} \|A\mathbf{v}\| = \max_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

试证:

$$\|A\| = \max_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{u}^T A \mathbf{v}.$$

解11. 先证对任意的 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$, 有

$$\max_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \\ \|\mathbf{u}\|=1}} \mathbf{u}^T \mathbf{w} = \|\mathbf{w}\|.$$

当 $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ 时, 等式显然成立。当 $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ 时, 一方面由 *Cauchy-Schwarz* 不等式知

$$\mathbf{u}^T \mathbf{w} \leq |\mathbf{u}^T \mathbf{w}| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{w}\| = \|\mathbf{w}\|.$$

另一方面, 若令 $\mathbf{u} = \frac{\mathbf{w}}{\|\mathbf{w}\|}$, 则 $\mathbf{u}^T \mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}^T}{\|\mathbf{w}\|} \mathbf{w} = \|\mathbf{w}\|$. 故等式得证。

回到原命题有

$$\max_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{u}^T A \mathbf{v} = \max_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{v}\|=1}} \|A\mathbf{v}\| = \|A\|.$$

第二个等号用的是 $\|A\|$ 的定义。