微 II 模拟试题解答

一、**填空与判断题**（每题 3 分，共 30 分）：填空题：将答案写在相应的横线上；判断题：在你认为正确的论述后面括号内画“√”、错误的画“×”.

1．幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}3^n x^{2n+1}$的收敛区间是$(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

2．已知$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n^p})$收敛，则 p 的取值范围是 $p>\frac{1}{2}$

3．设函数 $f(x)$ 的周期是 2 π，且 $f(x)=x(0\le x\le 2\pi)$，函数$S(x)$ 是 $f(x)$ 的傅立叶级数的和函数，则$S(0)=\pi$， $S(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$

4．已知幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}x^n$在 $x=-1$处条件收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-2)^n$的收敛区间

$(1,3)$

5．设有级数$\sum_{n=1}^{\infty}n^a\sin\frac{1}{n}$，则使该级数收敛的$a$的范围是$a<0$

6．判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(2+\frac{1}{n})^n}$的敛散性 (收敛)

7．发散的交错级数，其同项必不趋于 0. [×]

8．对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$,有$\frac{e^x+e^{-x}}{2}\le e^{\frac{x^2}{2}}$. [√]

9．设a是函数 $f(x)$ 的瑕点，则必有$\lim_{x\to a}f(x)=\infty$. [×]

10． 数列$\{a_n\}$有界的充要条件是其任一子列都有收敛的子列。[√]

二、解答证明题（共 70 分）：应写出文字说明、演算步骤或证明过程。

1．（12 分）求下列幂级数的收敛半径及收敛域.

（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{n})^{-n^2}x^n$；（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}x^{n-1}$.

(1) 解：因为$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{(1+\frac{1}{n})^{-n^2}}=\frac{1}{e}$，所以收敛半径是 e . 当 $x=e$ 时，级数为

$\sum_{n=1}^{\infty}[e(1+\frac{1}{n})^{-n}]^n$. 因为$e(1+\frac{1}{n})^{-n}>1(n=1,2,\cdots)$所以级数的同项不趋于零，从而级数在$x=e$点发散；同理在$x=-e$处，级数发散. 所以收敛域是$(-e,e)$.

(2) 解：由比值法可求得收敛半径为 1。当$x=1$时，相应级数的敛散性可以用积分判别法判别。

由于$f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x},x\geq 1$是非负递减的，且$\int_1^{\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$发散，因此$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(1+n)}{n}$发散。

（法二）比较法：由于$\frac{1}{n}<\frac{\ln(1+n)}{n}(n>3)$，故发散。当$x=-1$时，由莱布尼茨判别法知，级数收敛。故收敛域为$[-1,1)$.

2.（7 分）将函数$f(x)=arctg\frac{2x}{1-x^2}$在$x=0$点展开为幂级数。

解法一： $f^{'}(x)=\frac{2}{1+x^2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(|x|<1), f(0)=0,$

因此 $f(x)=\int_0^x f^{'}(t)dt=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}dt=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(|x|<1).$

解法二：令$t=arctgx,$则当$|x|<1$时，$|t|<\pi/4,$于是

$f(x)=arctg\frac{2tgt}{1-tgt^2}=arctg(tg2t)=2t=2arctgx(|x|<1).$ 利用$arctgx$在$x=0$展开的幂级数，即得$f(x)=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\ x^{2n+1}(|x|<1)$。

3.（16 分）（1）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的收敛域及其和函数.

解：用根式法可求得其收敛半径是$\sqrt{2}$. 当$x=\pm\sqrt{2}$时，原级数发散，故收敛域是$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}=(\int_0^x(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2})dt)^{'}=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\int_0^x t^{2n-2}dt)^{'}$$

$$=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n})^{'}=(\frac{1}{x}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x^2}{2})^n)^{'}=(\frac{x}{2-x^2})^{'}=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2}\qquad（x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})）.$$

（2）求$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1}$的和。

解： 考查幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1}$

记$u_n=\frac{(-1)^n}{4n+1}x^{4n+1}$，则$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n+5}{4n+1}x^4=x^4$,从而收敛半径为 R=1.

当 x=1 时，原级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}$是莱布尼茨级数，从而收敛；

当 x=-1 时，原级数为$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n+1}$是莱布尼茨级数，从而收敛。

综上，此幂级数的收敛域为[-1,1].

令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n+1}x^{4n+1}, x\in[-1,1]$，则

当$x\in(-1,1)$时， $f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{4n}=\frac{1}{1+x^4}$，

于是 $f(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^4}+f(0)=\int_0^x\frac{1}{1+t^4}dt, x\in(-1,1)$

由于$\int_0^x\frac{1}{1+t^4}dt$在闭区间[-1,1]上连续，因此

$f(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t^4}dt, x\in[-1,1]$，

从而，当 x=1 时该幂级数的值为：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4n+1}=f(1)=\int_0^1\frac{1}{1+t^4}dt=\frac{\pi}{4\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2}).$$

4.（14 分）求证：

（1）$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1-x)x^n$ 在$[0,1]$上一致收敛；

（2）$\sum_{n=0}^{\infty}(1-x)x^n$ 在$[0,1]$上收敛但不一致收敛。

证明:（1）固定$x\in[0,1]$，序列$(1-x)x^n$单调下降且趋于零，由交错级数的余项估计式得

$$|S(x)-S_n(x)|=|r_n(x)|=|\sum_{k=n}^{\infty}(-1)^k(1-x)x^k|\le(1-x)x^n.$$

再求函数 $u_n(x)=(1-x)x^n$ 的最大值。

令 $u_n'(x)=0$，解出 $x=\dfrac{n}{n+1}$. 所以 $|S(x)-S_n(x)|\le\dfrac{1}{1+n}(\dfrac{n}{n+1})^n\le\dfrac{1}{n+1}$, 故

$\sup\limits_{0\le x\le 1}|S(x)-S_n(x)|\to 0(n\to\infty)$, 故原级数在 $[0,1]$ 上一致收敛。

（2）当 $n\to\infty$ 时，$S_n(x)\to S(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$ 所以级数收敛；由于和函数不连续，故级数在 $[0,1]$ 上不一致收敛。

（法二）因为 $\sup\limits_{0\le x\le 1}|S(x)-S_n(x)|=\sup\limits_{0\le x\le 1}x^n=1\not\to 0(n\to\infty)$, 所以级数不一致收敛。

（法三）

解：$\mathrm{S_n}(x)=\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{n}}(1-x)x^k=(1-x)\sum\limits_{k=0}^{\mathrm{n}}x^n=1-x^{n+1}$

$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{S_n}(x)=\begin{cases}1,若0\le x<1\\ 0,若x=1\end{cases}$

取 $\varepsilon_0=1/4$, 对任意的 n, 取 $x=\dfrac{1}{\sqrt[n+1]{2}}$, 就有

$|\mathrm{S_n}(\dfrac{1}{\sqrt[n+1]{2}})-\mathrm{S}(\dfrac{1}{\sqrt[n+1]{2}})|=|\dfrac{1}{2}-1|>\varepsilon_0$,

因此 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上收敛, 但不一致收敛。

5.（9 分）证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}=\dfrac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)\quad(0\le x\le\pi)$.

证明：将 $f(x)=\dfrac{1}{12}(3x^2-6\pi x)\quad(0\le x\le\pi)$ 作偶开拓，并求傅立叶系数：

$a_0=-\dfrac{\pi^2}{3},\quad a_n=\dfrac{1}{n^2}$. 由于 $f(x)$ 连续且逐段光滑，因此当 $0\le x\le\pi$ 时，

$$-\frac{\pi^2}{6}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}=\frac{1}{12}(3x^2-6\pi x),$$

由此可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos nx}{n^2}=\dfrac{1}{12}(3x^2-6\pi x+2\pi^2)\quad(0\le x\le\pi)$.

6.（12 分）设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$，$x\in(0,+\infty)$.

（1） 证明此级数在 $(0,+\infty)$ 内收敛，但不一致收敛.

（2） 求级数的和函数.

证明：（1）对任意的 $x\in(0,+\infty)$，由根式判别法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 收敛。

对任意的自然数 n，可取 $x_n=\frac{1}{n}$，则 $u_n(\frac{1}{n})=ne^{-1}\to+\infty \quad (n\to\infty)$，故 $u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛于零，从而级数不一致收敛。

（2） 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} -e^{-nx}$ 逐项求导后得 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$. 因为对任意的 $x\in[\delta,+\infty)$（$\delta>0$），有

$ne^{-nx}\le ne^{-n\delta}$，而 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n\delta}$ 收敛，所以在 $[\delta,+\infty)$ 上 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 一致收敛。对任意的 $x_0\in(0,+\infty)$, 取 $\delta=\frac{x_0}{2}$, 由于在 $[\delta,+\infty)$ 上 $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$ 一致收敛，因此在 x_0 处级数 $\sum_{n=1}^{\infty} -e^{-nx}$ 可逐项求导，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} -e^{-nx}=\frac{-e^{-x}}{1-e^{-x}}$，所以

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}=\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-nx})'=(\sum_{n=1}^{\infty} -e^{-nx})'=\frac{e^{-x}}{(1-e^{-x})^2}。$$

解法二：令 $y=e^{-x}$，则 $y\in(0,1)$，求出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} ny^n=\frac{y}{(1-y)^2}$，将 $y=e^{-x}$ 代入即可。