微积分 A2　期中练习　　2020 年 4 月 18 日

系名________________　班级______________　姓名______________　学号____________

1.　（**20** 分）设 $D=\{(x,y)\,|\,x+y\neq 0\}$，$f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$，问：

$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y),\ \lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)$，和 $\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} f(x,y)$ 是否存在，若存在，求值，若不存在，证明你的结论。

解：$\lim\limits_{x\to 0}\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)=1$，　　**……5** 分

$\lim\limits_{y\to 0}\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)=-1$。　　**……5** 分

$\lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in D}} f(x,y)$ 不存在。　　**……5** 分

因为 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=-x+x^2}} f(x,y)$ 不存在。　　**……5** 分

2.　（**20** 分）设 $f(x,y)$ 二阶连续可微，证明：

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2h,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}})-2f(h,\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}})+f(0,0)}{h^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\text{。}$$

证明：由泰勒公式，

$$\begin{aligned}f(x,y)&=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)x^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)xy+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)y^2+o(x^2+y^2),\quad (x,y)\to(0,0)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}f(2h,e^{-\frac{1}{2h}})&=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)2h+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)e^{-\frac{1}{2h}}\\&\quad+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)(2h)^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)(2h)e^{-\frac{1}{2h}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)e^{-\frac{1}{h}}+o(4h^2+e^{-\frac{1}{h}})\\&=f(0,0)+2\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h+2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)h^2+o(h^2),\quad h\to 0^+\end{aligned}$$

……8 分

$$f(h,e^{-\frac{1}{h}})=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)e^{-\frac{1}{h}}$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)h^2+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\cdot h\cdot e^{-\frac{1}{h}}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0)e^{-\frac{2}{h}}+o(h^2+e^{-\frac{2}{h}})$$

$$=f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)h^2+o(h^2),\quad h\to 0^+$$

......8 分

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(2h,e^{-\frac{1}{2h}})-2f(h,e^{-\frac{1}{h}})+f(0,0)}{h^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)\text{。}$$ **......4** 分

注：用洛必达法则也可以证明，会用到链式法则。

3. （**20** 分）设 $f(x,y)>0$，且在全平面二阶连续可微，请给出 $f(x,y)$ 可以表示成关于 x 的一元函数与成关于 y 的一元函数的乘积的充分必要条件，并证明你的结论。

解：若 $f(x,y)$ 可以表示成关于 x 的一元函数与成关于 y 的一元函数的乘积，则

$\ln f=u(x)+v(y)$，其充分必要条件为

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\ln f)=0\text{，}$$

即 $\boldsymbol{f f''_{yx}=f'_x f'_y}$。 **......20** 分

注：答案形式不唯一。类似的答案都给分。

4. （**20** 分）设函数 $u(t)$ 二阶连续可微，且二元函数 $z=u(\sqrt{x^2+y^2})$ 满足：

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2+y^2\quad(x^2+y^2>0)$$

求证：$u(t)$ 满足常微分方程 $u''(t)+\frac{1}{t}u'(t)=t^2$。

解：记 $t=\sqrt{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}u'(t)\text{，}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{x^2}{x^2+y^2}u''(t)+\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}u'(t)\text{；}$$ **......8** 分

同理，$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}u'(t)$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{y^2}{x^2+y^2}u''(t)+x\frac{y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}u'(t)\text{。}$$ **......8 分**

代入方程 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^2+y^2$，$u''(t)+\frac{1}{t}u'(t)=t^2$。 **......4 分**

5. （**20** 分）设 $t>0$，$I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x$。

（**I**） 求 $I'(t)$ （可以用广义积分表示 $I'(t)$）；

（**II**） 求 $I(t)$ 满足的常微分方程。

解：（**I**）因为 $\int_0^{+\infty}\frac{2t}{x^2}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[\delta,M]$ 一致收敛，其中 $\delta>0$，所以当 $t>0$ 时，

$$I'(t)=-2t\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x\text{。}$$ **......10**

分

注：不写“一致收敛”，扣 **2** 分。

（**II**）令 $x=\frac{t}{u}$，则当 $t>0$ 时，

$$I'(t)=-2t\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-\left(x^2+\frac{t^2}{x^2}\right)}\mathrm{d}x=-2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(u^2+\frac{t^2}{u^2}\right)}\mathrm{d}u=-2I(t)\text{。}$$ **......10 分**