1、判断以下矩阵是否可相似对角化，并说明理由。

(a) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$ (c) $\begin{bmatrix} 23 & 69 & 188 \\ 69 & 45 & 202 \\ 188 & 202 & 68 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

2. 判断以下实矩阵是否正定，说明理由.

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ (b) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3. 设 $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$，分别找出 $N(A)$, $N(A^T)$, $C(A)$, $C(A^T)$ 的一组基.

4. 设 $P=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$，求P的特征多项式.

5. 设 $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=QR$，Q为第一个矩阵，R为第二个.

(1) 验证 $Q^TQ=I$ (2) 求到 $C(A)$ 的投影矩阵 (3) 设 $b=\begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，求 $Ax=b$ 最小二乘解

6. 已知整数 1653, 2581, 3451, 4582 可以被29整除，证明下式也可被29整除

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

7. 解关于x的方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix}=0$$

8. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 R^n 的非零正交向量组，证明

(1) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关

(2) 若 $r<n$，总可补充 $n-r$ 个向量 $\alpha_{r+1},\alpha_{r+2},\cdots,\alpha_n$，使得 $\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ 构成 R^n 的正交基

9. 若 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 为一组标准正交基，且 $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)Q$，则 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 也是一组标准正交基的充要条件为 Q 是正交矩阵.

10. 设三阶矩阵 A 的第1行为 (a,b,c) 不全为0，矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$（$k$ 为常数，且 $AB=0$），求 $Ax=0$ 的通解.

11. 设 A 为 n 阶方阵 $(n\geq 3)$，证明 $(A^*)^*=|A|^{n-2}A$.

12. 设 n 元线性方程组 $Ax=b$，其中

$$A=\begin{bmatrix}2a&1&&&&\\a^2&2a&1&&&\\&a^2&2a&1&&\\&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&a^2&2a&1\\&&&&a^2&2a\end{bmatrix}_{n\times n}\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}\quad b=\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

(1) 求 $|A|$　　(2) 当 a 为何值时，方程组有唯一解，求 x_1

(3) 当 a 为何值时，该方程组有无穷多解，并求通解.

13. 设 A 为 n 阶非零方阵，A^* 为伴随矩阵，A^T 为转置，证当 $A^*=A^T$ 时，$|A|\neq 0$.

14. 求 $D_n=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n&1\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\n-1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\n&1&2&\cdots&n-2&n-1\end{vmatrix}$