Table des matières

I Révisions de classe de première

Exercice 1 :

Un adolescent a installé un jeu de hasard sur sa console de jeux. Ce jeu fonctionne de la manière suivante :
- si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est de 25%.
- si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est de 50%.
- la probabilité que le joueur gagne la première partie est de 25%.
Soit n un entier naturel, on note alors : G_n « La n-ième partie est gagnée. » et p_n la probabilité de cet événement G_n. On a donc $p_1 = P(G_1) = 0,25$.

1. Calculer la probabilité p_2.
2. Construire l'arbre de probabilités qui représente la n-ième et la $n+1$-ième partie.
3. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -0,25p_n + 0,5$.
4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_n = p_n - 0,4$. Montrer que la suite (u_n) est géométrique et déterminer sa raison.
5. En déduire la valeur de p_n en fonction de n.
6. La suite (p_n) converge-t-elle a priori ? Conjecturer sa limite et interpréter le résultat.

Exercice 2 :

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhèrent à la section tennis. On sait également que des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

Partie A

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :
F l'évènement “le membre choisi est une femme”, T l'évènement “le membre choisi adhère à la section tennis”.

1. Déterminer la probabilité de l'événement F.
2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis. Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

Partie B

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.

1. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose p_n la probabilité pour qu'en n semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis. Montrer que pour tout entier n non nul, $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$
3. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geq 0,99$.
4. Écrire un algorithme Python qui permet effectivement de calculer ce nombre.

Exercice 3 :

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.
- Un salarié malade est absent.
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,04.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à 0,24.
On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement "le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine". On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.

1. Que vaut p_1 ?
2. Pourquoi a-t-on $0 \leq p_n \leq 1$?
3. Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.
4. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.
5. Faire un arbre de probabilité représentant le passage de la n-ième semaine à la $n+1$-ième.
6. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.
7. On pose la suite $u_n = p_n - 0,05$ pour $n \geq 1$. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.
8. En déduire l'expression de p_n en fonction de n. Conjecturer la limite de (p_n).
9. Écrire un code Python qui à un $K \in \mathbb{N}$ connu donne la plus petite valeur de n tel que $0,05 - 10^{-K} \leq p_n \leq 0,05$.

Exercice 4 :

Cet exercice a pour but de trouver une expression complète des suites arithmético-géométriques. Soit $u_0 \in \mathbb{R}$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = au_n + b$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ sont des réels connus.

1. On suppose que la suite (u_n) converge vers l et on admet que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$. Déterminer l en fonction de a et b.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_n - l$. Montrer que la suite (v_n) est géométrique et déterminer sa raison et son premier terme en fonction de a, b et u_0.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
5. Faire des disjonction de cas selon les valeurs de a et b pour déterminer la monotonie de (u_n).
6. Que conjecturer sur la limite de u_n ?
7. On considère la suite $u_0 = 3$, $u_{n+1} = 0,2u_n + 3$, quelle est la monotonie de la suite u_n ?
8. Un laboratoire injecte à des patients un nouveau médicament révolutionnaire, chaque semaine ils injectent 10% de plus de produit en veillant à rajouter 3 mg à chaque injection. On suppose qu'ils injectent au départ 1 mg de produit. On note i_n la suite donnant la concentration de produit injecté la n-ième semaine. Trouver une expression de i_n en fonction de n. Conjecturer la limite de i_n.

Exercice 5 :

1. Rappeler la valeur de $\sum\limits_{k=1}^{n} k$.
2. Rappeler la valeur de $\sum\limits_{k=p}^{n} k$.

3. En déduire les valeurs des sommes suivantes :

$$S_1 = 1 + 2 + \cdots + 2000$$

$$S_2 = 2001 + 2002 + \cdots + 9999$$

Exercice 6 :

En 2019, le maire d'une ville a fait comptabiliser le nombre de mégots ramassés dans la rue principale. Sur l'ensemble de l'année, le nombre de mégots ramassés est de 20 000. Pour réduire ce nombre, il fait voter une loi instaurant une amende pour chaque mégot jeté par terre. Grâce à cette loi, une diminution du nombre de mégots jetés par terre de 15% par an est prévue. Pour n entier naturel, on note u_n le nombre de mégots jetés par terre pendant l'année 2019 + n. On a donc $u_0 = 20000$.

1. Déterminer et interpréter la valeur de u_1.
2. Calculer le nombre de mégots jetés par terre en 2021.
3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.
4. Donner l'expression de u_n en fonction de n.
5. Calculer le nombre de mégots qui seraient jetés par terre en 2028.
6. Combien de mégots seraient ramassés par les agents municipaux de 2019 à 2028 ?
7. Combien de mégots seraient ramassés par les agents municipaux de 2019 à 2019 + n ?
8. Donner un code Python donnant la formule calculée dans la question précédente.

Exercice 7 :

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$u_n = \frac{3\times 2^n - 4n + 3}{2} \qquad w_n = \frac{3\times 2^n + 4n - 3}{2}$$

1. Soit (w_n) la suite définie par $w_n = u_n + v_n$. Démontrer que (w_n) est une suite géométrique.
2. Soit (t_n) la suite définie par $t_n = u_n - v_n$. Démontrer que (t_n) est une suite arithmétique.
3. Démontrer que $u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n)$.
4. Exprimer la somme suivante en fonction de n : $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n$

Exercice 8 :

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$.

1. On pose f la fonction $f : x \mapsto \frac{2}{1+x}$. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier la monotonie de f sur $]-1, +\infty[$.
3. A-t-on $u_1 \leq u_0$?
4. Montrer que si $n \in \mathbb{N}$ et qu'on suppose vrai que $u_n \leq u_{n-1}$ alors $u_{n+1} \leq u_n$. En déduire la monotonie de la suite (u_n).
5. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
6. A-t-on $0 \leq u_0 \leq 3$?
7. Soit $n \in \mathbb{N}$, on suppose que $0 \leq u_n \leq 3$, montrer que $0 \leq u_{n+1} \leq 3$. On admettera alors avoir montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 3$.
8. Est-il possible qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = -1$?
9. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.
   (a) Existe-t-il $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = -2$?
   (b) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
   (d) Exprimer u_n en fonction de v_n. Que vaut u_{10} ?

Exercice 9 :

Dériver l'ensemble de ces fonctions :

1. $f(x) = \frac{2x-1}{2x^2+3x+5}$ 2. $g(x) = \frac{\cos(x)\sin(x)}{3x^2+2x+1}$

3. $h(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{3x+5}}$ 4. $i(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{x}(-2x+1)}}{3x+5}$

Exercice 10 :

Un certain type de poissons se reproduit rapidement dans un étang. Chaque mois, la population de poissons augmente de 30% et 15 poissons sont enlevés de l'étang par les scientifiques. Au départ, il y a 80 poissons.
Problématique : Les scientifique cherchent à déterminer à partir de quel mois le nombre de poissons dépassera 500, seuil au delà duquel l'écosystème est menacé.

Partie 1

Un premier groupe de scientifiques modélise l'évolution de la population de poissons par la suite (u_n) où u_n est le nombre de poissons après n mois. On a donc $u_0 = 80$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. On admet que pour tout entier naturel n on a $u_n \geq 75$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
4. On veut utiliser l'algorithme suivant pour répondre au problème de l'entreprise. Recopier et compléter cet algorithme.

```
def seuil():
    u = ...
    n = 0
    while ... :
        u = ...
        n = ...
    return n
```

5. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse au problème des scientifiques en expliquant votre raisonnement avec rigueur (il faut donner 2 valeurs de la suite, l'une avant le seuil, l'autre après).
6. Que va renvoyer la fonction seuil ?

Partie 2

Un autre groupe des scientifiques décide de modéliser l'évolution de la population de poissons par la suite définie pour tout entier n par : $b_n = 30 \times 1{,}3n + 50$ où b_n est le nombre de poissons après n mois.

7. Calculer b_0, b_1 et b_2. Retrouve-t-on des valeurs similaires à celles obtenues avec la suite (u_n) ?
8. Étudier la monotonie de la suite (b_n).
9. Quelle inéquation doit-on résoudre pour répondre au problème des scientifiques ?
10. Résoudre cette inéquation à la calculatrice et retrouver le résultat de la partie 1. (On donnera encore 2 valeurs mais cette fois en détaillant les calculs).
11. Écrire une fonction de seuil sous python permettant de résoudre cette inéquation. Votre fonction devra renvoyer n, le premier indice du mois pour lequel la population dépasse le seuil de 500.

Partie 3

12. Justifier que pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, $u_n = b_n$.

Exercice 11 :

On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{x+3}{x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de g.
2. Rappeler le taux d'accroissement de g en a et rappeler son interprétation géométrique.
3. Montrer que pour tout réel h le taux d'accroissement de g entre h et $3+h$ est $\frac{-5}{h+1}$
4. En déduire la valeur de $g'(3)$.
5. Déterminer l'ensemble de dérivabilité de g.
6. Retrouver la valeur de $g'(3)$ en dérivant la fonction.
7. Déterminer l'équation réduite de la tangente à la courbe de g au point 3.

Exercice 12 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 1$.

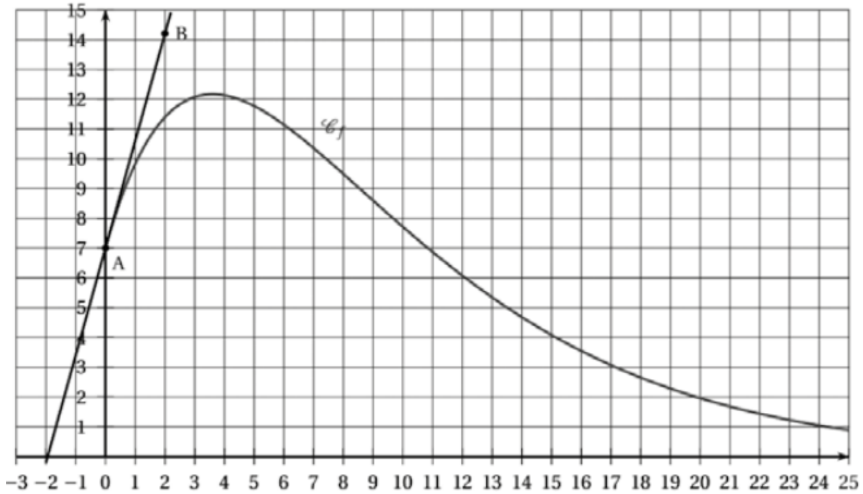
1. Déterminer la dérivée de f.
2. Montrer que l'équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse -1 est : $y = -2x + \frac{7}{6}$.
3. Combien de points admettent une tangente parallèle à T ?
4. Déterminer les coordonnées du ou des point(s) C de C_f qui admet(tent) une tangente parallèle à T.
5. Soit $a \in \mathbb{R}$. Déterminer l'équation de la tangente T_a à C_f au point d'abcisse a.
6. Combien de points admettent une tangente parallèle à T_a ?
7. Déterminer les coordonnées du ou des points C_a de C_f qui admet(tent) une tangente parallèle à T_a.

Exercice 13 :

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de $e^{2x} + 3e^x - 10 = 0$.

Exercice 14 :

On a tracé sur le graphique ci-dessous la courbe représentative C_f d'une fonction f définie sur $[0;25]$ par $f(x) = (ax+b)e^{-0,2x}$ où a et b sont deux nombres réels. On a représenté également sa tangente T au point $A(0;7)$. T passe par le point $B(2;14,2)$.



1. Écrire $f(0)$ en fonction de a et b.
2. Déterminer le coefficient directeur de T.
3. Exprimer pour tout $x \in \mathbb{R}$ l'expression de $f'(x)$ en fonction de a et b.
4. En déduire les valeurs de a et b.
5. Tracer le tableau de variation de f et en déduire les coordonnées du maximum de C_f.

Exercice 15 :

On procède, chez un sportif, à l'injection intramusculaire d'un produit. Celui-ci se diffuse progressivement dans le sang. On admet que la concentration de ce produit dans le sang (exprimée en mg/L) peut être modélisée par la fonction f, définie sur l'intervalle $[0;10]$ par : $f(t) = \frac{6t}{e^t}$ où t est le temps exprimé en heure.

1. Déterminer f' sur $[0;10]$.
2. Résoudre $f'(x) = 0$ sur $[0;10]$ et dresser le tableau de variations de f.
3. Quelle est la concentration maximale du médicament dans le sang ? (on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à 10^{-1} près). Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?
4. Ce produit fait l'objet d'une réglementation : un sportif est en infraction si, au moment du contrôle, la concentration dans son sang du produit est supérieure à 2 mg/L. Le sportif peut-il être contrôlé à tout moment après son injection ? Expliquer votre raisonnement en vous basant sur l'étude de la fonction f.
5. Le produit est indétectable si sa concentration est inférieure à 0,01. Donner un algorithme Python qui permet de déterminer le temps (à 10^{-1} près) à partir duquel le produit est indétectable.

Exercice 16 :

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2e^x$ et $g(x) = (x^2 - x - 1)e^x$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives des fonctions f et g.
2. Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Dresser ensuite les tableaux de variations de f et g.

Exercice 17 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

1. Calculer la dérivée f' de f puis la dérivée seconde $f'' = (f')'$.
2. Donner les variations de f'.
3. En déduire les variations de f.
4. Montrer que, pour tout réel $x > 0$, on a $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Exercice 18 :

Soient g_1 et g_2 sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $g_1(x) = xe^{-x}$ et $g_2(x) = x^2e^{-x}$.

1. Étudier le sens de variation de g_1 et g_2.

2. Dans un repère orthonormal du plan, on note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les courbes représentatives de g_1 et g_2. Préciser la position relative des deux courbes et tracer les deux courbes.
3. (a) Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_1$ au point d'abscisse a (a réel).
   (b) Cette tangente coupe l'axe des ordonnées en un point N. Déterminer en fonction de a, l'ordonnée de N.

Exercice 19 :

On considère les points $X(7;-2)$, $Y(-1;4)$ et $Z(-3;-2)$. On note I le milieu du segment $[YZ]$ et H le projeté orthogonal de I sur $[XZ]$.

1. Faire un dessin de la situation.
2. Montrer que le triangle XYZ est isocèle en X.
3. Donner les coordonnées du point I.
4. Calculer $\overrightarrow{XI} \cdot \overrightarrow{XZ}$.
5. En déduire la longueur du segment $[XH]$.
6. Donner la condition que vérifie H.
7. À l'aide des deux informations précédentes donner les coordonnées de H.
8. On note J le milieu du segment $[IH]$. Démontrer que les droites (XJ) et (YH) sont perpendiculaires.

Exercice 20 :

Dans un repère orthonormé on considère le point $A(-6;14)$ et la droite (d) d'équation $x - 5y = 11$.

1. On considère H le projeté orthogonal de A sur (d), faire un dessin en plaçant toutes les informations.
2. Déterminer un vecteur directeur de la droite (d) que l'on note $\vec{u}$.
3. Quelle condition a-t-on sur $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AH}$?
4. En déduire les coordonnées du point H.

Exercice 21 :

On considère 3 points $A(-1;-1)$, $B(100,t)$ et $C(100,5)$ avec t un réel. À quelle condition sur t le triangle ABC est-il rectangle en B ?

Exercice 22 :

Dans chacun des cas suivants, déterminer une équation cartésienne de la droite de vecteur normal $\vec{n}$ et passant par le point donné.

1. $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$ et le point $A(\frac{-2}{3}, \frac{1}{3})$
2. $\vec{n}\begin{pmatrix}-5\\1\end{pmatrix}$ et le point $A(-\sqrt{3}, -1)$.
   On considère le vecteur $\vec{u}(5, -2)$ et le point $D(-3;-7)$.
3. Déterminer un vecteur $\vec{n}$ orthogonal au vecteur $\vec{u}$.
4. Déterminer ensuite une équation cartésienne de la droite passant par le point D et de vecteur normal $\vec{n}$.

Exercice 23 :

1. Donner une équation cartésienne du cercle de centre $O(2;1)$ de rayon 3.
2. Déterminer une équation cartésienne du cercle de centre $I(-2;-3)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.
   On considère les points $A(-3;1)$ et $B(2;5)$.
3. Déterminer les coordonnées du milieu H du segment $[AB]$.
4. Calculer la longueur du segment $[AH]$.
5. Enfin donner une équation cartésienne du cercle de diamètre $[AB]$.

Exercice 24 :

1. On considère l'équation d'un cercle $x^2 + x + y^2 + 6y + 1 = 0$, déterminer le centre et le rayon de ce cercle.
2. Déterminer si l'ensemble des points vérifiant $x^2 + 3x + y^2 + 1 = 0$ est un cercle ou non. Justifier.
3. L'ensemble des points vérifiant $x^2 - 3x + y^2 + y - 2 = 0$. Déterminer le centre et le rayon.

Exercice 25 :

1. Soit C un cercle et (d) une droite, combien y-a-t-il de point(s) d'intersection(s) entre C et (d) ?
2. Soit $A(1;1)$ et $B(-1;-1)$ et C le cercle unité, faire un dessin dans le plan et déterminer le/les point(s) d'intersection(s) entre (AB) et C.

3. Même question pour $A(2;20)$ et $B(20;10)$ et C le cercle de centre $(1;0)$ de rayon 2.

Exercice 26 :

On définit deux droites (d_1) d'équation cartésienne $2x+3y=2$ et (d_2) d'équation cartésienne $3x+2y=4$, que peut-on dire des droites (d_1) et (d_2) ?

Exercice 27 :

À quelle condition sur a l'équation cartésienne $x^2+y^2+ax+ay+3=0$ est l'équation cartésienne d'un cercle ?

Exercice 28 :

Soit f un polynôme du troisième degré défini par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -8x^3+22x^2-17x+3$$

1. Montrer que 1 est racine de f.
2. Déterminer trois réels (a,b,c) tels que $f(x) = (x-1)(ax^2+bx+c)$.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 29 : Méthode de Cardan-Tartaglia

On cherche à résoudre l'équation $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma = 0$.

1. On pose $X = x+\frac{\alpha}{3}$, montrer que X est solution de l'équation $X^3+pX+q=0$ où p et q sont à déterminer.
2. On pose à présent u et $v \in \mathbb{R}$ tels que $X = u+v$. Exprimer X^3 en fonction de u, v et X.
3. En se rappelant que X^3+pX+q montrer que :
$$\begin{cases} -p &= 3uv \\ -q &= u^3+v^3 \end{cases}$$
4. On a donc $\frac{-p^3}{27} = u^3v^3$ et $-q = u^3+v^3$, montrer que u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $z^2-qz-\frac{p^3}{27}=0$.
5. En déduire les valeurs de u^3 et v^3 possibles.
6. En déduire les valeurs de u et v possibles.
7. En déduire les solutions de l'équation de départ.

II Algèbre et géométrie

II.1 Combinatoire et dénombrement

Exercice 1 :

Soit $E = \{0;1\}$. Donner tous les 3-uplets (ou triplets) de E. Combien y en a-t-il ?

Exercice 2 :

On considère la fonction Python où n et k désignent des entiers naturels :

```
def uplet(n,k):
        return n**k
```

1. Que renvoie la console lorsqu'on exécute `uplet(5,4)` ?
2. Quel est le rôle de cet algorithme sur un ensemble de cardinal n ?

Exercice 3 :

Combien de mots peut-on former avec les lettres M, A, T, H, S ?
Combien d'anagrammes de ce mot existe-t-il ?

Exercice 4 :

1. Soit A et B deux ensembles disjoints composés respectivement de 6 et 7 éléments. Calculer le nombre d'éléments de $A\cup B$, A^3, B^4 et $A\times B$.
2. On considère l'ensemble E des diviseurs de 198 et l'ensemble F des diviseurs de 420. Préciser les cardinaux de E, F, $E\cup F$ et $E\cap F$.

Exercice 5 :

Le digicode d'un immeuble est composé de dix chiffres de 0 à 9 et de quatre lettres X, Y et Z.

1. Combien de codes à 5 caractères peut-on composer ?
2. Combien de codes à 5 caractères commençant par une lettre et suivie de quatre chiffres peut-on composer ?
3. Combien de codes à 5 caractères commençant par une lettre et suivie de quatre chiffres différents deux à deux peut-on composer ?
4. Si nous voulions tester tous les codes possibles, vaut-il mieux que le code soit constitué de 5 caractères aléatoires ou dans la même configuration que la question précédente ? Le justifier.

Exercice 6 :

Le sélectionneur du XV de France doit choisir les 15 joueurs qui débuteront un match. Il dispose de 22 joueurs.

1. Sans considérer le poste de chaque joueur, combien d'équipes peut-il former ?
2. Parmi les 22 joueurs, on trouve 13 avants et 9 arrières. Sachant qu'une équipe de rugby est formée de 8 avants et 7 arrières, combien d'équipes le sélectionneur peut-il former avec ces nouvelles contraintes ?

Exercice 7 :

On considère l'ensemble $A = \left\{a;b;c;d;e\right\}$.

Donner tous les sous-ensembles de A de cardinal 3, et en déduire $\binom{5}{3}$.

Exercice 8 :

Soient n et k deux entiers naturels vérifiant $1 \leq k \leq n-1$.

1. Soit n un entier naturel. Simplifier les nombres suivants :

$$a.\ (n+1)\times n! \quad b.\ \frac{(n+1)!}{n!} - \frac{n!}{(n-1)!} \quad c.\ \frac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} \quad d.\ \frac{(2(n+1))!}{(2n+1)!}$$

2. Démontrer que $n\binom{n-1}{p-1} = p\binom{n}{p}$.
3. Démontrer que $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$

Exercice 9 :

Montrer que, pour tout entier n, $\binom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2}$

1. par une méthode calculatoire, en utilisant la formule du coefficient binomial.
2. par une méthode combinatoire, à l'aide d'un argument de dénombrement.

Exercice 10 :

La fonction écrite ci-contre en langage Python, compte le nombre d'entiers impairs dans une liste L de 30 entiers naturels :

```python
def impairs(L):
        m = 0
        for i in range(25):
                if L[i] % 2 != 0:
                        m = m+1
        return m
```

1. Expliquer le rôle des lignes 4 et 5 de cet algorithme.
2. Si m vaut 5 en sortie, cela signifie qu'il y a cinq nombres impairs parmi les 25 entiers naturels de cette liste. Combien y a-t-il de possibilités pour les positions de ces nombres impairs sur toute la liste ?
3. Même question dans le cas où $m = 11$.

Exercice 11 :

L'alphabet français comporte 26 lettres dont 20 consonnes et 6 voyelles. Dans cet exercice, on désigne par un mot une succession quelconque de plusieurs lettres. Combien peut-on former de mots de six lettres :

1. Comportant des lettres différentes ?
2. Dont la première et la troisième lettre sont des voyelles ?
3. Commençant par une consonne ?

Exercice 12 :

Nathan désire ranger quatre livres de français, cinq livres de mathématiques et trois livres d'anglais. De combien de façons différentes peut-il ranger ses livres :

1. S'il veut que ces livres restent groupés par matière ?
2. S'il souhaite que seuls les livres d'anglais restent groupés entre eux ?
3. S'il ne souhaite pas que deux livres de mathématiques soient côte à côte ?

Exercice 13 :

Un sac contient 20 boules dont 5 noires, 5 blanches et 10 vertes. Ces boules sont indiscernables au toucher. On tire 3 boules dans ce sac, et on souhaite calculer la probabilité d'avoir 3 boules noires.

1. Calculer cette probabilité si l'on effectue :
   (a) Un tirage successif sans remise.
   (b) Un tirage successif avec remise.
   (c) Un tirage simultané de trois boules.
2. Comparer les résultats obtenus. Quel est le tirage dont la probabilité est la plus forte ?

Exercice 14 :

Une grille de loto est constituée de 5 numéros qu'il faut choisir parmi 49 numéros, puis d'un numéro chance compris entre 1 et 10. On gagne le gros lot (au minimum deux millions d'euros) si l'on a choisi les 5 bons numéros et le numéro chance. On gagne néanmoins une certaine somme d'argent en fonction du nombre de bons numéros choisis.

1. Calculer la probabilité de gagner le gros lot.
2. Ci-contre, on donne les gains obtenus à l'issue du tirage du 26 Juin 2021.
   (a) Montrer que la probabilité de gagner 59,20 € est égale à $5,43 \times 10^{-6}$.
   (b) Calculer la probabilité de gagner 1 283,30 € ainsi que celle de gagner 113 048,4 €. On exprimera les résultats en écriture scientifique.
   (c) En déduire la probabilité de gagner au moins 1 283,30€

GAINS POUR LE TIRAGE LOTO DU 26/06/2021

	NB GAGNANTS	GAINS
5 bons N° + Chance	0	Pas de gagnant
5 bons N°	2	113 048,40 €
4 bons N° + Chance	43	1 283,30 €
4 bons N°	467	426,20 €
3 bons N° + Chance	2 007	59,20 €
3 bons N°	19 027	22,40 €
2 bons N° + Chance	27 895	11,90 €
2 bons N°	273 369	4,80 €
0 ou 1 bon N° + Chance	410 305	2,20 €

Exercice 15 :

Parmi les affirmations suivantes, indiquer si elles sont vraies ou fausses en justifiant.

1. On considère un cadenas dont le code d'ouverture est composé de 6 chiffres.
   Affirmation 1 : Il y a 60 codes différents.
   Affirmation 2 : 151 200 codes ont leurs chiffres différents.
   Affirmation 3 : Il y a 1 680 codes commençant par 5 et terminant par 7.
2. 75 personnes mangent dans un restaurant. 41 ont pris un plat, 39 une entrée et 41 un dessert. 11 ont pris entrée-plat-dessert, 12 ont pris entrée-plat, et seulement 7 ont seulement pris un dessert. Enfin, 6 personnes n'ont pris qu'une entrée.
   Affirmation 4 : 28 personnes ont pris seulement un plat.

Exercice 16 :

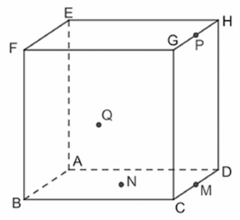
Un dresseur d'animaux possède cinq chevaux et cinq chameaux. Parmi les cinq chevaux, deux sont vêtus en vert, deux en jaune, et un seul en blanc. Par ailleurs, parmi les cinq chameaux, trois sont vêtus en jaune, un seul en blanc, et un seul en vert.
Lors d'un spectacle, le dresseur appelle ses animaux un par un, et ceux-ci s'installent dans l'arène en s'alignant. Une entrée de tous ces animaux constitue un 10-uplet.

1. Combien y a-t-il d'entrées possibles ?
2. Déterminer le nombre d'entrées possibles :
   (a) Dans laquelle les animaux sont regroupés par couleur.
   (b) Alternant cheval et chameau.
3. Deux chevaux, Max et Loulou, sont inséparables. Ils veulent toujours être voisins l'un de l'autre. Déterminer le nombre d'entrées possibles respectant cette contrainte.
4. On note X la variable aléatoire égale à la position d'entrée du premier animal vêtu de vert.
   (a) Quelles sont les valeurs prises par X.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (c) Déterminer l'espérance de X et interpréter le résultat.

II.2 Manipulation des vecteurs, des droites et des plans de l'espace

Exercice 1 :

$ABCDEFGH$ est un cube, M est le milieu de $[DC]$, N est le centre de la face $ABCD$, P est le milieu de $[HG]$, et Q est le centre de la face $BCGF$. Justifier les réponses données.



1. Étudier la position des droites (EH) et (CG).
2. Étudier la position de la droite (AB) et le plan (CFH)
3. Étudier la position des deux plans (CFH) et (ABD).
4. Étudier la position des deux plans (ABD) et (ABD).
5. Dans l'espace, trois points sont-ils toujours contenu dans un plan ? Et pour quatre points ?
6. Les points A, B, C et P sont-ils dans le même plan ?
7. Même question pour les points B, C, M et N.

Exercice 2 :

On considère un cube $ABCDEFGH$.

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont-ils coplanaires ? Justifier votre réponse.
2. (a) Donner un représentant du vecteur $\overrightarrow{AD}$ dans le plan (BCG).
   (b) Les vecteurs $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{CF}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont-ils coplanaires ?
   (c) De même pour les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 3 :

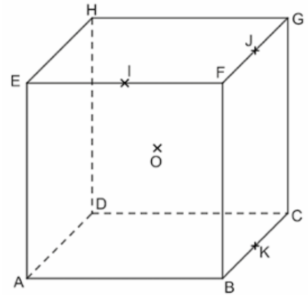
Soient $A(-3;0;1)$, $B(4;2;3)$, $C(-5;2;-3)$ et $D(3;0;5)$.

1. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires.
2. En déduire que les points A, B, C et D sont coplanaires.

   Étudions à présent les points $A(1;2;3)$, $B(2;0;1)$ et $C(2;-1;3)$.
3. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ?
4. Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$ le point $E(1;-3;a)$ appartient-il au plan (ABC) ?

Exercice 4 :

Dans le cube $ABCDEFGH$ ci-contre, I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[EF]$, $[FG]$ et $[BC]$. On nomme O le centre du cube.



1. Placer les points M, L et N milieux respectifs des segments $[EG]$, $[HG]$ et $[AD]$.
2. Soit P le point défini par $\overrightarrow{EP} = 2\overrightarrow{EF}$. Exprimer en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ les vecteurs $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{HC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{NP}$.
3. En déduire les coordonnées de ces vecteurs dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.
4. Les vecteurs $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{PM}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 5 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube. On définit les points P, Q et R par les relations suivantes : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AR} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} + 3\overrightarrow{AE}$.

1. Réaliser une figure et y placer les points P, Q et R.
2. Démontrer que les points A, P, Q et R sont coplanaires.

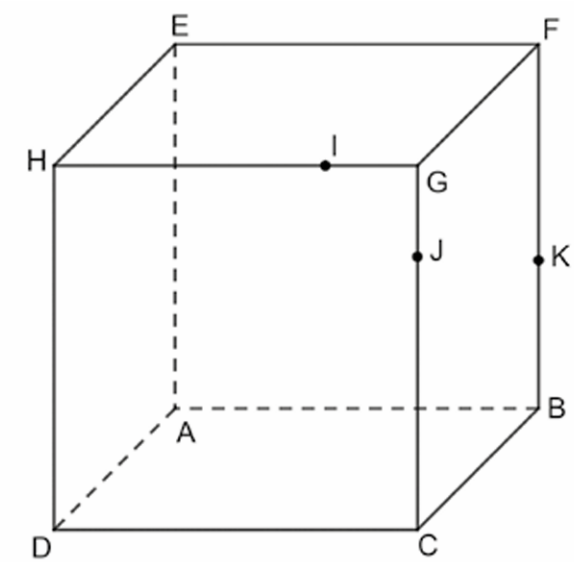
Exercice 6 :

$ABCDEFGH$ est un cube. I et J sont tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$.

1. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{EJ}$ et $\overrightarrow{IF}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. En déduire que $\overrightarrow{IF} = \frac{1}{4}\overrightarrow{EG} - \overrightarrow{EJ}$.
3. Que peut-on dire de la position relative du plan (EGJ) et de la droite (IF) ?

Exercice 7 :

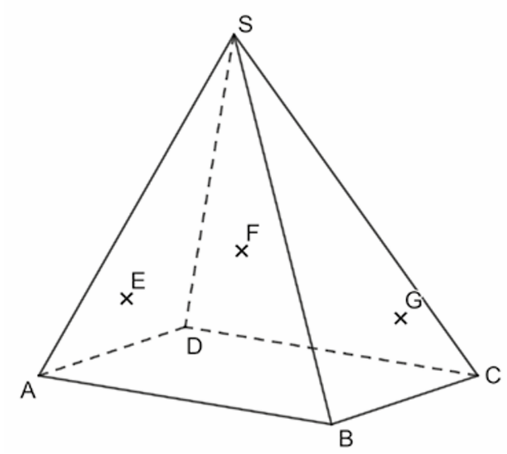
On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous. On définit les points I et J respectivement par $\overrightarrow{HI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{HG}$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GC}$. Tracer la section de ce cube par le plan (IJK) où K désigne un point choisi dans le segment $[BF]$. Justifier chaque étape de la section.



Exercice 8 :

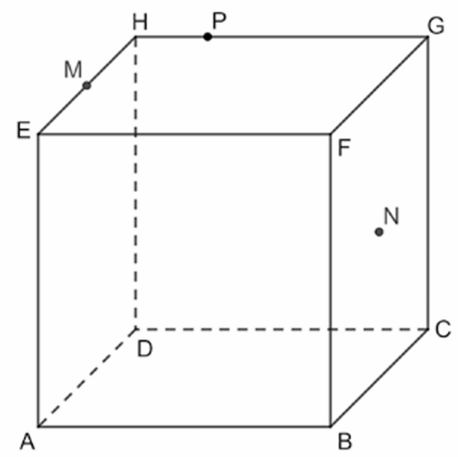
On considère la pyramide $SABCD$ à base carrée et de sommet S ci-dessous. E et F sont deux points de la face SAB, et G est un point de la face SBC tels que (EFG) n'est pas parallèle au plan (ABC). On souhaite obtenir la trace de la section de la pyramide par le plan (EFG), c'est-à-dire les intersections du plan (EFG) avec les faces de la pyramide. (Il faut justifier les constructions).

1. Tracer l'intersection de la face SAB et du plan (EFG).
2. Tracer l'intersection de la face SBC et du plan (EFG).
3. On note L le point d'intersection des droites (EF) et (AB).
   (a) Déterminer un autre point appartenant aux plans (EFG) et (ABC).
   (b) En déduire le tracé de l'intersection de la face ABC et du plan (EFG).
4. En déduire le tracé de section de la pyramide par la plan (EFG).



Exercice 9 :

Faire la section du cube ci-dessous par le plan (MNP) en justifiant chaque étape.



II.3 Géométrie analytique dans le plan et l'espace

Exercice 1 :

Soit $ABCD$ un carré, et I et J les points tels que $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{CD}$.

1. Démontrer que les droites (AI) et (BJ) sont perpendiculaires.
2. Donner dans le repère orthonormal $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ les coordonnées de tous les points de la figure.
3. Démontrer alors que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{BJ}$ sont orthogonaux.

Exercice 2 :

A et B sont deux points du plan tels que $AB = 3$.

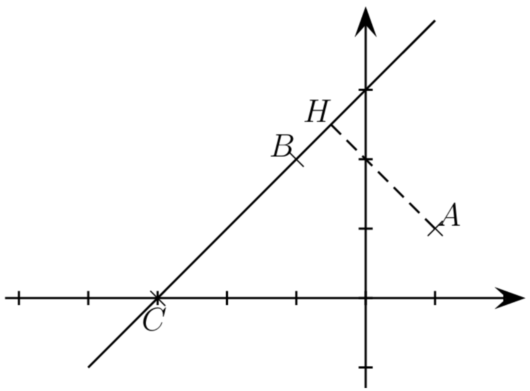
1. Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.
2. Donner un point H de (AB) tel que $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$.
3. Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -6$.

Exercice 3 :

Soit un triangle de côtés 3, 5 et 7. Déterminer les trois angles de ce triangle.

Exercice 4 :

Dans le repère ci-dessous, on considère les points $A(1;1)$, $B(-1;2)$ et $C(-3;0)$. Soit de plus H le projeté orthogonal de A sur la droite (BC).



1. Calculer l'angle $\widehat{ABC}$.
2. Calculer les coordonnées de H.
3. En déduire la longueur BH.

Exercice 5 :

ABC est un triangle tel que $A(3;-2)$, $B(0;-1)$ et $C(1;3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la médiatrice du segment $[AB]$.
2. Déterminer une équation cartésienne de la hauteur issue de C dans le triangle ABC.

Exercice 6 :

Dans un repère orthonormal, on considère les points $A(-3;0)$, $B(3;-1)$ et $C(1;5)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_1 perpendiculaire à (AB) et passant par C.
2. Déterminer une équation cartésienne de la droite d_2 parallèle à (AB) et passant par C (on pourra tout d'abord déterminer un vecteur $\vec{n}$ normal à $\overrightarrow{AB}$).

Exercice 7 :

On considère la droite d passant par $A(-2;3)$ et $B(5;2)$.

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.
2. Donner alors une représentation paramétrique de la droite d.
3. Les points $M(-9;4)$, $N(12;1)$, $P(-23;5)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 8 :

On considère les droites $d_1 : x+2y+3 = 0$ et $d_2 : 3x-y+2 = 0$ et $d_3 : -6x+2y+6 = 0$.

1. Les droites d_1, d_2 et d_3 sont-elles parallèles ? sécantes ?
2. Déterminer les intersections éventuelles des droites d_1 et d_2, puis d_2 et d_3.

Exercice 9 :

Les droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques

$$d_1 : \left\{ \begin{array}{ll} x & = 1+2t \\ y & = 3+4t \end{array} \right., \ t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \left\{ \begin{array}{ll} x & = -2+t \\ y & = 1-2t \end{array} \right., \ t \in \mathbb{R}$$

sont-elles sécantes ? Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection si c'est le cas.

Exercice 10 :

Dans un repère orthonormal, on considère la droite d d'équation cartésienne $x+2y-2=0$ et le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, avec $A(-3;5)$ et $B(1;-1)$.

1. Représenter graphiquement $\mathcal{C}$ et d.
2. Donner une équation cartésienne de $\mathcal{C}$.
3. Calculer les coordonnées des deux points d'intersection de $\mathcal{C}$ et d.

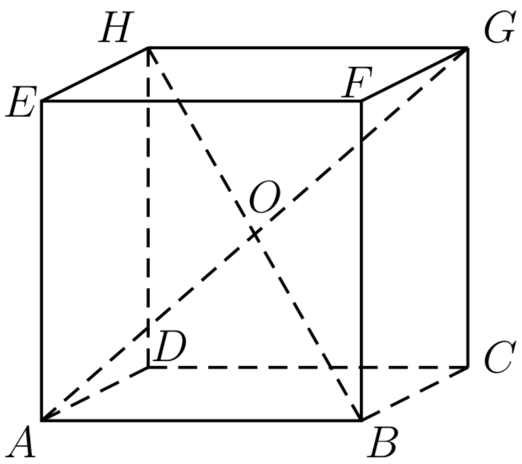
Exercice 11 :

Soit dans un repère orthonormal, le point $I(3;-1)$ et la droite d d'équation cartésienne $-x+y+1=0$.

1. Calculer la distance du point I à la droite d.
2. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$ de centre I est tangent à d.

Exercice 12 :

Soit $ABCDEFGH$ un cube représenté ci-dessous.



1. Déterminer dans le repère $(A;\mathbb{V}AB,\mathbb{V}AD,\mathbb{V}AE)$ les coordonnées de tous les points.
2. Déterminer les longueurs AC, OG et BG.
3. Le triangle HAF est-il rectangle en A ?

Exercice 13 :

On considère la droite d passant par $A(-2;3;1)$ et $B(5;2;-2)$.

1. Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d.
2. Donner alors une représentation paramétrique de la droite d.
3. Les points $M(-9;4;4)$ et $N(12;1;1)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 14 :

Dans un repère orthonormal, on donne les points $A(1;-2;3)$ et $B(0;0;1)$.

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Les points $C(-3;6;-5)$ et $D(2;-5;5)$ appartiennent-ils à cette droite ?

Exercice 15 :

Les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques suivantes sont-elles orthogonales ?

$$d_1 : \begin{cases} x = 2t-1 \\ y = -3t+2 \\ z = t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 3t \\ y = t+2 \\ z = -3t-2 \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$$

Exercice 16 :

Les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques suivantes sont-elles sécantes ?

$$d_1 : \begin{cases} x = 5+3t \\ y = 2+t \\ z = 1-4t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -11+2t \\ y = 10-2t \\ z = 4+t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$$

Exercice 17 :

Les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques suivantes sont-elles orthogonales ? perpendiculaires ?

$$d_1 : \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 2+4t \\ z = 3-t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = -2+2t \\ y = 1-t \\ z = 1 \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}$$

Exercice 18 :

Soit, dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $A(-1;1;2)$, $\vec{u}(1;0;1)$ et $\vec{v}\left(\frac{1}{2};-1;1\right)$.

1. Ecrire une représentation paramètrique du plan $(A, \vec{u}, \vec{v})$
2. Les points $B(1;2;3)$ et $C(0;-1;4)$ appartiennent-il à ce plan ?
3. Déterminer l'intersection d de ce plan et du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
4. Préciser un point et un vecteur directeur de d.

Exercice 19 :

On considère dans un repère orthonormal, les points $A(-1,-1,-1)$, $B(0,-2,0)$ et $C(-2,1,0)$.
Montrer que le vecteur $\vec{n}(3,2,-1)$ est un vecteur normal au plan (ABC), et déterminer une équation cartésienne de ce plan.

Exercice 20 :

L'espace est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A et M sont les points de coordonnées respectives $(1;-5;7)$ et $(1;1;1)$. $\mathcal{L}$ est le plan d'équation cartésienne $-2x+y+z-4=0$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tel que le projeté orthogonal de l'origine O sur $\mathcal{P}$ soit le point A.
2. Montrer que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$ sont perpendiculaires.
3. Calculer les distances du point M au plan $\mathcal{L}$ et du point M au plan $\mathcal{P}$.
4. Déduire des questions précédentes la distance du point M à la droite Δ intersection des plans $\mathcal{L}$ et $\mathcal{P}$.

Exercice 21 :

Dans un repère orthonormal, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $2x-y+3z-1=0$, et le point A a pour coordonnées $A(0,-1,-4)$. On note de plus H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

1. Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ normal à $\mathcal{P}$.
2. Justifier l'existence d'un réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$.
3. Traduire cette relation en termes de coordonnées.
4. Déterminer k en exprimant que H appartient à $\mathcal{P}$.
5. En déduire les coordonnées de H et la distance AH de A au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 22 :

1. Le système $\begin{cases} 2x-y+3z & = & 1 \\ x+y-4z & = & 6 \end{cases}$ est-il un système d'équations cartésiennes d'une droite d ?
2. Déterminer x et y en fonction de z, puis en déduire une équation paramétrique de d, en introduisant le paramètre $t = z$.

Exercice 23 :

Dans un repère orthonormé, les plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$ ont pour équations cartésiennes :

$$\mathcal{P}: \ x+y+z+3=0, \quad \mathcal{L}: \ 2x+2y+2z+7=0, \quad \text{et} \quad \mathcal{R}: \ 3x-y+2=0$$

Étudier l'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{L}$, puis des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$.

Exercice 24 :

Dans un repère orthonormé, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $5x+y-z+3=0$ et la droite d pour représentation paramétrique $\begin{cases} x & = & t \\ y & = & 1-6t \\ z & = & 3-t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
Déterminer l'intersection de d et $\mathcal{P}$.

Exercice 25 :

Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(2;-1;5)$ et $(-1;2;3)$.
Étudier l'intersection de la droite (AB) avec le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $5x-3y-z=1$.

Exercice 26 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B, C et D ont pour coordonnées respectives $A(3;-2;2)$, $B(6;1;5)$, $C(6;-2;-1)$ et $D(0;4;-1)$.

1. Montrer que le triangle ABC est un triangle rectangle.
2. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).
3. Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$.
4. Montrer que l'angle géométrique $\widehat{BDC}$ a pour mesure $\frac{\pi}{4}$ en radians.

Exercice 27 :

Soit $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ est un repère orthonormal. Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre $J(0;1;0)$ et de rayon 1. Soient u et v sont deux réels, M et N sont les points définis par $\overrightarrow{OM} = u\overrightarrow{k}$ et $\overrightarrow{AN} = v\overrightarrow{i}$ où $A(0;2;0)$.

1. Donner une équation de la sphère $\mathcal{S}$.
2. (a) Quelles sont les coordonnées des points M et N ?
   (b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN).
3. Montrer que la droite (MN) est tangente à la sphère $\mathcal{S}$ si, et seulement si, $u^2v^2 = 4$.

Exercice 28 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(-1;-3;2),\ B(3;-2;6) \text{ et } C(1;2;-4).$$

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan que l'on notera $\mathcal{P}$.
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}13\\-16\\-9\end{pmatrix}$ est normal au plan $\mathcal{P}$.
   (b) Démontrer qu'une équation cartésienne du plan P est $13x-16y-9z-17 = 0$.

On note $\mathcal{D}$ la droite passant par le point $F(15;-16;-8)$ et orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

3. Donner une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$.
4. On appelle E le point d'intersection de la droite $\mathcal{D}$ et du plan $\mathcal{P}$.
   Démontrer que le point E a pour coordonnées $(2;0;1)$.
5. Déterminer la valeur exacte de la distance du point F au plan $\mathcal{P}$.
6. Déterminer les coordonnées du ou des point(s) de la droite $\mathcal{D}$ dont la distance au plan $\mathcal{P}$ est égale à la moitié de la distance du point F au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 29 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$
On considère les points $A(3;0;1)$, $B(2;1;2)$ et $C(-2;-5;1)$.

1. Démontrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Démontrer que le triangle ABC est rectangle en A.
3. Vérifier que le plan (ABC) a pour équation cartésienne :
$$-x+y-2z+5=0.$$
4. On considère le point $S(1;-2;4)$.
   Déterminer la représentation paramétrique de la droite (Δ), passant par S et orthogonale au plan (ABC).
5. On appelle H le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (ABC).
   Montrer que les coordonnées de H sont $(0;-1;2)$.
6. Calculer la valeur exacte de la distance SH.
7. On considère le cercle $\mathcal{C}$, inclus dans le plan (ABC), de centre H, passant par le point B. On appelle $\mathcal{D}$ le disque délimité par le cercle $\mathcal{C}$.
   Déterminer la valeur exacte de l'aire du disque $\mathcal{D}$.
8. En déduire la valeur exacte du volume du cône de sommet S et de base le disque $\mathcal{D}$.

Exercice 30 :

On considère le cube $ABCDEFGH$ qui est représenté en ANNEXE.
Dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ on considère les points M, N et P de coordonnées :

$$M\left(1;1;\frac{3}{4}\right),\ N\left(0;\frac{1}{2};1\right),\ P\left(1;0;-\frac{5}{4}\right).$$

Dans cet exercice, on se propose de calculer le volume du tétraèdre $FMNP$.

1. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MP}$.
2. Placer les points M, N et P sur la figure donnée en ANNEXE qui sera à rendre avec la copie.
3. Justifier que les points M, N et P ne sont pas alignés.
   Des lors les trois points définissent le plan (MNP).
4. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP}$, puis en déduire la nature du triangle MNP.
   (b) Calculer l'aire du triangle MNP.
5. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}(5;-8;4)$ est un vecteur normal au plan (MNP).
   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (MNP) est $5x-8y+4z = 0$.

6. On rappelle que le point F a pour coordonnées $F(1;0;1)$. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d orthogonale au plan (MNP) et passant par le point F.
7. On note L le projeté orthogonal du point F sur le plan (MNP).

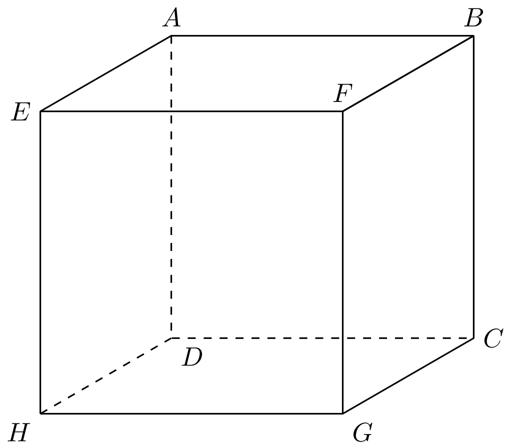
   Montrer que les coordonnées du point L sont $L\left(\frac{4}{7};\frac{24}{35};\frac{23}{35}\right)$.
8. Montrer que $FL = \frac{3\sqrt{105}}{35}$ puis puis calculer le volume du tétraèdre $FMNP$.

   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule :

   $V = \frac{1}{3} \times$ aire d'une base $\times$ hauteur associée à cette base.

Exercice 31 :

On considère le cube $ABCDEFGH$ ci-dessous tel que $AB = 1$.
On note M le centre de la face $BCGF$ et N le centre de la face $EFGH$.



On se place dans le repère orthonormé $\left(D;\overrightarrow{DH},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DA}\right)$.

1. Donner sans justifier les coordonnées des points F et C.
2. Calculer les coordonnées des points M et N.
3. (a) Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (HFC).

   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (HFC).
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AG).
5. Démontrer que le point R de coordonnées $\left(\frac{2}{3};\frac{2}{3};\ \frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point G sur le plan (HFC).
6. On admet qu'une représentation paramétrique de la droite (FG) est :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & 1 \\ z & = & t \end{array}\right. \quad (t \in \mathbb{R}).$$

   Démontrer qu'il existe un unique point K sur la droite (FG) tel que le triangle KMN soit rectangle en K.
7. Quelle fraction du volume du cube $ABCDEFGH$ le volume du tétraèdre $FNKM$ représente-t-il ?

III Analyse

III.1 Suites et limites de suites

Exercice 1 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = (n+1)^2$.

Exercice 2 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n}$. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n}{n+1}$.

Exercice 3 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par $\frac{3}{2}$ et majorée par 2.

Exercice 4 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 4}$. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Exercice 5 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout n entier naturel par $u_n = \frac{2n+5}{n+3}$.

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 2.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Justifier la réponse et donner sa limite si c'est le cas.

Exercice 6 :

On se donne la fonction écrite en Python ci-contre.

```python
def nombre(n):
        u = 1
        for k in range(n):
                u = (k+2)*u
        return u
```

1. Donner la relation de récurrence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à cette fonction.
2. Que renvoie la fonction si on lui donne en argument 0, 1 puis 2 ?
3. Conjecturer une expression de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n.

Exercice 7 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique ne s'annulant pas et soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par pour tout n entier naturel, $v_n = \frac{1}{u_n}$. Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elles sont vraies ou fausses en justifiant la réponse.

1. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
3. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que tous ses termes sont de même signe alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 10 alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par 10.

Exercice 8 :

Soit a un réel différent de 1.

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{k=0}^{n} a^k = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est un multiple de 3.

Exercice 9 :

Étudier la limite des suites suivantes lorsque $n \to +\infty$:

1. $u_n = \dfrac{2n+3}{4n+5}$	2. $v_n = \dfrac{2^n+1}{3}$	3. $w_n = -n^3 + 2n^2 + \dfrac{1}{n^2}$
4. $x_n = \dfrac{7+\sin(n)}{n}$	5. $z_n = \dfrac{n^2+10(-1)^n}{2n^2+9}$	6. $a_n = \dfrac{5^n-6^n}{5^n+6^n}$
7. $b_n = 5 + \left(\dfrac{-5}{6}\right)^n$	8. $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	9. $d_n = \sqrt{2n+1} - \sqrt{n}$

Exercice 10 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout n entier naturel par $u_n = \frac{1}{3n+5}$.

1. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. On veut connaître la valeur du plus petit entier n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$, $u_n < 0{,}0002$. Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous.
3. Déterminer par le calcul la valeur de l'entier n_0.

```
n = ...
u = ...
while ...:
        .............
        n = ...
        u = ...
print(...)
```

Exercice 11 :

En 2021, Laurence, souhaitant se lancer dans l'agriculture biologique, a acheté une ferme de 14 hectares de pommiers. Elle estime qu'il y a 300 pommiers par hectare. Chaque année, Laurence élimine 4% des pommiers existants et replante 22 nouveaux pommiers par hectare. Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de pommiers par hectare pendant l'année $2021+n$.

1. Que vaut u_0 ?
2. Justifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,96u_n + 22$.
3. Estimer le nombre de pommiers par hectare, arrondi à l'unité, en 2023.
4. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant pour tout entier naturel n, $v_n = u_n - 550$.
   (a) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n puis faire de même pour u_n.
   (c) Estimer le nombre de pommiers de l'exploitation de Laurence en 2028.
   (d) Résoudre l'inéquation $u_n > 400$ puis interpréter le résultat obtenu.
   (e) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, vers quelle nombre ? Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 12 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0,7$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

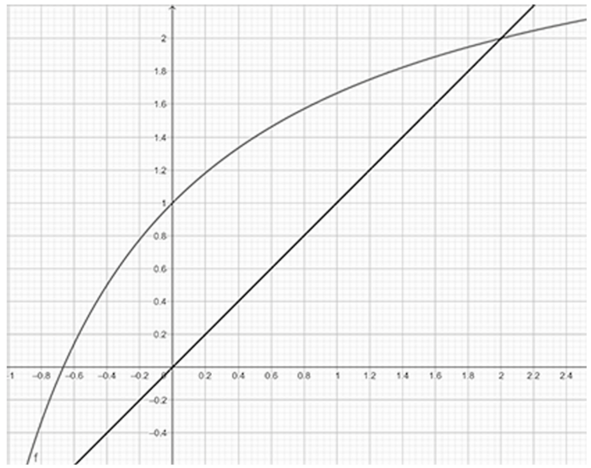
1. Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f : x \mapsto \frac{3x}{1+2x}$.
   (a) Étudier les variations de f sur $[0,+\infty[$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.
   (c) Démontrer que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.
   (d) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Déterminer sa limite.

Exercice 13 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \frac{1}{4}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n+2}{u_n+2}$.

1. Déterminer la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ telle que pour pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Donner le tableau de variation de f sur $[0,+\infty[$.

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté la fonction f et la droite d'équation $y = x$:



3. En utilisant ce graphique :
   (a) Placer les termes u_0, u_1 et u_2.
   (b) Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Conjecturer un majorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Démontrer les deux conjectures précédentes.
5. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.

Exercice 14 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. (a) u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   (b) Conjecturer le sens de variation de cette suite.

2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leq n+3$.
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$.
   (c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et donner sa raison et premier terme.
4. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
5. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Pour tout entier naturel n, on pose $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ et $T_n = \frac{S_n}{n^2}$.
   (a) Exprimer S_n en fonction de n.
   (b) En déduire la limite de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 15 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n+4}$.

Partie A :

1. Démontrer que pour tout n entier naturel, $u_n \geq 1$.
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$.
3. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Partie B :

5. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique et préciser sa raison et son premier terme.
6. Déterminer la forme explicite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis sa limite.

Exercice 16 :

Déterminer dans chacun des cas la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

1. $u_n = u_n = \dfrac{2n+1}{n+325}$ 2. $u_n = \dfrac{2n^2-3n+2}{1-n}$ 3. $u_n = \dfrac{4n^2+1}{n(2n+1)}$
4. $u_n = \dfrac{3}{2\sqrt{n}+17}$ 5. $u_n = \dfrac{\sqrt{3n+1}}{3+\sqrt{n}}$ 6. $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+n+2}}{\sqrt{n^2-n-1}}$
7. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ 8. $u_n = \sqrt{n^2+n} - n$

Exercice 17 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n+1}{u_n+2}$. Montrer que, pour tout entier n, $0 < u_n < 1$.

Exercice 18 :

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$.

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
3. Démontrer la conjecture.

Exercice 19 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + 3$.

1. Tracer dans un repère la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{4}x + 3$, puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3 d'ordonnée nulle et d'abscisse respective u_0, u_1, u_2 et u_3.
2. Montrer que, pour tout entier n, $u_n \leqslant 4$.
3. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 20 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n+3}$.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite, et conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer cette conjecture.
3. Montrer que, pour tout entier n, $0 < u_n < 3$.
4. En déduire que la suite (u_n) est convergente vers une limite l.
5. Déterminer l.

Exercice 21 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & \geq & -3 \\ u_{n+1} & = & \sqrt{3+u_n} \end{array}\right.$.
Quelle valeur de u_0 faut-il prendre pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante ?

Exercice 22 :

Soit la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = 1 - \dfrac{1}{(n+1)^2}$.
   (b) Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n < 1$.
   (c) Etudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. On pose $x_n = u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n$
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 23 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + e^{-u_n}$. Le but de cet exercice est d'étudier cette suite.

1. Étudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Montrer par l'absurde que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
3. On pose la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = e^{u_n}$. Montrer de même que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 24 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \frac{u_n^2+2}{3}$

1. Conjecturer un minorant de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Démontrer la conjecture.
3. On suppose que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, quelles sont les limites possibles de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

Exercice 25 :

Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$.

Exercice 26 :

Pour chacune des affirmations suivantes, préciser si elle est vraie ou fausse puis **justifier** la réponse donnée.
Toute réponse non argumentée ne sera pas prise en compte.

1. **Affirmation 1** : Toute suite décroissante et minorée par 0 converge vers 0.
2. On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ telle que, pour tout entier n, on a $u_n \leq \dfrac{-9^n+3^n}{7^n}$.
   Affirmation 2 : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
3. On considère la fonction suivante écrite en langage Python :

```python
def terme(N) :
        U = 1
        for i in range(N) :
                U = U+i
        return U
```

   Affirmation 3 : `terme(4)` renvoie la valeur 7.
4. Lors d'un concours, le gagnant a le choix entre deux prix :
   — Prix A : il reçoit 1000 euros par jour pendant 15 jours ;
   — Prix B : il reçoit 1 euro le 1er jour, 2 euros le 2ème jour, 4 euros le 3ème jour et pendant 15 jours la somme reçue double chaque jour.
   Affirmation 4 : La valeur du prix A est plus élevée que la valeur du prix B.
5. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier $n \geq 1$ par

$$v_n = \int_1^n \ln(x)\,\mathrm{d}x$$

   Affirmation 5 : La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

III.2 Limites et étude de la continuité de fonctions

Exercice 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left\{\begin{array}{ll}1 & \text{si } x\leq 3\\ 2 & \text{si } x>3\end{array}\right.$

1. Déterminer les limites à gauche et à droite en 3 : $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, et $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$.
2. La fonction f est-elle continue en 3 ?
3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 2 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left\{\begin{array}{ll}x+2 & \text{si } x\leq -1\\ -2x-1 & \text{si } x>-1\end{array}\right.$

1. Déterminer les limites à gauche et à droite en -1 : $\lim\limits_{x\to(-1)^-} f(x)$, et $\lim\limits_{x\to(-1)^+} f(x)$.
2. La fonction f est-elle continue en -1 ?
3. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$.

Exercice 3 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^3+3x^2-6)$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x+2}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1-2x}{(x-3)^2}\right)$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-3+\dfrac{1}{x^2+x+1}\right)$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x+\dfrac{3}{e^x}+2x^2\right)$
6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x+\dfrac{x}{e^x}\right)$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{-2}{e^x-1}\right)$

Exercice 4 : Vrai ou Faux

Justifier les réponses, si une proposition est jugée fausse il faut donner un contre-exemple.

1. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$.
2. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)g(x))=+\infty$
3. Si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-g(x))=0$.

Exercice 5 :

Déduire de chacune des limites suivantes, si possible, l'équation d'une asymptote verticale ou horizontale à la courbe représentative de la fonction f.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=3$
2. $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=-\infty$
3. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-6$
4. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=+\infty$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$
6. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Exercice 6 :

Déterminer les limites de la fonction f aux valeurs demandées, et préciser l'équation de l'éventuelle asymptote :

1. $f(x)=2x+1+\dfrac{1}{x^2}$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$
2. $f(x)=(4-x^2)(3x-2)$ en 0, $+\infty$ et $-\infty$
3. $f(x)=4x-1+\dfrac{1}{x-3}$ en 3, $+\infty$ et $-\infty$
4. $f(x)=\dfrac{4x}{4-x}$ en 0 et en 4

Exercice 7 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{5-\dfrac{4}{x^2}}$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2-\dfrac{1}{x}\right)^4$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-3x^2+1}$

Exercice 8 :

Un capteur solaire récupère de la chaleur par le biais d'un fluide. On s'intéresse à l'évolution de la température du fluide dans un capteur de 1m de longueur. Cette température est modélisée par : $T(x)=170-150e^{-0,6x}$, où $x\in[0;1]$ est la distance, en mètres, parcourue par le fluide depuis son entré dans le capteur, et $T(x)$ est la température en °C.

1. Déterminer la température à l'entrée du capteur.
2. (a) Étudier les variations de la température T sur $[0,1]$.
   (b) En déduire la température maximale, au degré près, atteinte par le fluide.
   (c) Tracer dans un repère la courbe représentant la température T.

Exercice 9 :

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x^5-6x^4+3x^2-12)$ 2. $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+x+3)$ 3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x+2}{3x-7}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{9x^2+2x}{3x^3-7}$ 5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$ 6. $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\dfrac{9x+2}{x-3}}$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2-x+\dfrac{1}{x^2}\right)$ 8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2-x+\dfrac{1}{x^2}\right)$

Exercice 10 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2x-\sqrt{x^2+1}$.

1. À quelle forme indéterminée la limite de f en $+\infty$?
2. Démontrer que, pour tout réel x positif, $f(x)=x\left(2-\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\right)$.
3. En déduire la limite de f en $+\infty$.

Exercice 11 :

Soit f la fonction $x\mapsto\dfrac{ax+b}{2x-1}$ où a et b sont deux réels. On note C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormée. On suppose que f vérifie $f(0)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=2$.

1. Déterminer a et b.
2. Déterminer les asymptotes à C_f.
3. Dresser le tableau de variation de f, et tracer l'allure de C_f.

Exercice 12 :

Soit φ la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\varphi : x\mapsto \mathrm{e}^x-\frac{x^2}{2}$.

1. Dresser le tableau de variation de φ'.
2. En déduire le signe de φ' puis les variations de φ.
3. Montrer que, pour tout $x\geq 0$, on a $e^x\geq\dfrac{x^2}{2}$.
4. Déterminer la limite lorsque $x\to+\infty$ de $\dfrac{e^x}{x}$

Exercice 13 :

Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

1. $f(x)=x^2+2-e^x$ 2. $g(x)=\dfrac{2e^x-x}{x^2}$ 3. $h(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$
4. $l(x)=e^{2x}-(x+1)e^x$ 5. $k(x)=\dfrac{\sqrt{e^x+2}}{x}$ 6. $t(x)=\dfrac{e^{2x}+x^2}{x^2+x-3}$

Exercice 14 :

1. Déterminer la limite en $+\infty$ de $f(x)=\dfrac{\sin(x)}{x}$.
2. Écrire le taux de variation de f en 0.
3. En déduire la limite en 0 de f.

Exercice 15 :

Soit f définie sur D_f par $f:x\mapsto\dfrac{x^2+1}{x-1}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Déterminer D_f.
2. Montrer que pour tout $x\in D$, $f(x)=x+1+\dfrac{2}{x-1}$
3. Déterminer la limite en $-\infty$ et $+\infty$ de $x\mapsto f(x)-(x+1)$.
4. Quelle propriété peut-on en déduire quant à C_f et la droite $\Delta : y=x+1$? Représenter ce résultat sur un graphique.

Exercice 16 :

Soit la fonction f définie sur D_f par l'expression $f:x\mapsto\dfrac{-x^2+x+3}{x+2}$.

1. Déterminer D_f.
2. Montrer que la droite d'équation $y=-x+3$ est asymptote oblique à la courbe représentative de f.

Exercice 17 :

Étudier (sens de variations et limites) sur $\mathbb{R}$ les fonctions suivantes :

1. $f(x)=e^{3x}-3e^x$ 2. $g(x)=(0,4x-2)e^{-0.1x}$

Exercice 18 :

Soit g la fonction définie sur D_g par l'expression $g : x \mapsto \dfrac{x^2+x-1}{x-1}$. On note C_g sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.

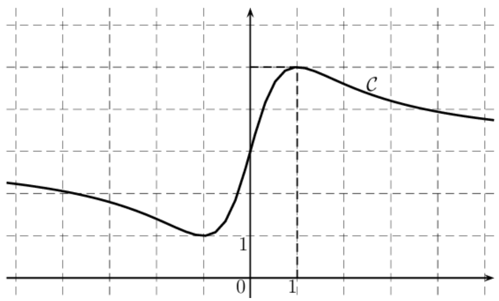
1. Déterminer D_g.
2. Dresser le tableau de variation de g.
3. Déterminer les limites de g à gauche et à droite en 1.
4. Déterminer trois réels a, b et c tels que, pour tout $x \in D_g$, $g(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$.
5. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
6. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x+2$ est asymptote à C_g en $-\infty$ et $+\infty$.
7. Tracer l'allure de C_g.

Exercice 19 :

Partie A :

Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi : x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{x^2+1}$ dont la courbe représentative C_φ est donnée ci-contre. La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à C_φ en $+\infty$ et $-\infty$.

Grâce aux renseignements donnés par le graphique, déterminer les réels a, b et c.



Partie B :

Soit f la fonction définie sur D_f par $f : x \mapsto \dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer D_f.
2. Déterminer les réels α et β tels que, pour tout réel x, $f(x) = \alpha + \dfrac{\beta x}{x^2+1}$.
3. Dresser le tableau de variation complet de f.
4. Déterminer les positions relatives de la courbe représentative de f et de son asymptote.
5. (a) Montrer que pour tout réel x, $\dfrac{f(x)+f(-x)}{2} = 3$.
   (b) Que peut-on en déduire pour la courbe représentative de f ?
   Indication : Considérer les points $M(x; f(x))$, $M(-x, f(-x))$ et $I(0;3)$

Partie C :

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|) = \dfrac{3x^2+4|x|+3}{x^2+1}$.

1. Déterminer la limite de g en moins l'infini.
2. expliquer comment obtenir la courbe représentative de g à partir de celle de f.

Exercice 20 :

Déterminer les limites :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}\right)$ 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+3} + x\right)$

III.3 Compléments sur la dérivation

Exercice 1 :

Dériver les fonctions f suivantes définies sur $\mathbb{R}$:

1. $f(x)=\sqrt{4x^2-6}$ 2. $f(x)=(x^3+6x)^4$ 3. $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{2x}{3-x^2}}$
4. $f(x)=\cos(2x)$ 5. $f(x)=\sqrt{\frac{x+3}{x}}$ 6. $f(x)=\mathrm{e}^{\sqrt{x+3}}$

Exercice 2 :

Dresser le tableau de variation de la fonction $f: x \mapsto \dfrac{-3x}{x^2+4}$.

Exercice 3 :

Déterminer le domaine de définition D_g de la fonction $g: x \mapsto \dfrac{x^2+4}{\sqrt{2x}}$ puis montrer qu'elle admet un unique minimum sur D_g puis préciser les coordonnées de ce point.

Exercice 4 :

1. On étudie la fonction $h: x \mapsto xe^x+e^x+1$, montrer qu'elle admet un unique minimum sur son ensemble de définition.
2. En déduire le signe de h sur son ensemble de définition.

Exercice 5 :

Partie A :
Soit a et b des nombres réels. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f: x \mapsto \dfrac{a}{1+e^{-bx}}$.
La courbe C_f passe par le point $A(0{,}0.5)$. La tangente à la courbe C_f au point A passe par le point $B(10,1)$.

1. Justifier que $a=1$.
2. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
3. Calculer f'.
4. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer b.

Partie B :
La proportion d'individus qui possèdent un certain type d'équipement dans une population est modélisée par la fonction p définie sur $\mathbb{R}^+$ par $p: x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-0,2x}}$.
Le réel x représente le temps écoulé, en année, depuis le 1er janvier 2000.
Le nombre $p(x)$ modélise la proportion d'individus équipés après x années. Ainsi, pour ce modèle, $p(0)$ est la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2000 et $p(3,5)$ est la proportion d'individus équipés au milieu de l'année 2003.

5. Quelle est, pour ce modèle, la proportion d'individus équipés au 1er janvier 2010 ? *On en donnera une valeur arrondie au centième.*
6. (a) Déterminer le tableau de variation de p sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Calculer la limite de p en $+\infty$.
   (c) Interpréter cette limite dans le contexte de l'exercice.
7. On considère que, lorsque la proportion d'individus équipés dépasse 95%, le marché est saturé. Déterminer, en expliquant la démarche, l'année au cours de laquelle cela se produira. Ensuite, écrire un code Python qui permet de le faire.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur D_f par l'expression : $f: x \mapsto \dfrac{x}{x^2-2x+1}$.

1. Déterminer D_f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Interpréter graphiquement.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Déterminer l'équation de la tangente T_0 au point d'abscisse 0.
5. Tracer T_0 et C_f (avec tous les élements graphiques trouvés précédemment).

Exercice 7 :

Démontrer que l'équation $x^3+3x=5$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

Exercice 8 :

Démontrer que l'équation $\mathrm{e}^x=2$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de cette solution.

Exercice 9 :

On considère la fonction h définie sur $]-1;+\infty[$ par $h(x)=2x-3+\sqrt{x+1}$.

1. Donner le tableau de variations de h.

2. En déduire que l'équation $\sqrt{x+1} = 3-2x$ admet une unique solution α dans $[-1;+\infty[$.
3. Donner une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 10 :

On pose f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{-x^2}{2} + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - 2x + 2 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Donner une expression de la fonction dérivée f' de f. Montrer que f' est aussi continue sur $\mathbb{R}$.
3. Interpréter graphiquement cette propriété.
4. Donner le coefficient directeur de la tangente en 0 et en 2.
5. Donner le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x. Comment varie ce coefficient ? Dresser son tableau de variation.
6. Une norme impose que la pente d'un tel toboggan ne dépasse pas 1,5 en valeur absolue. Est-ce le cas ici ?

Exercice 11 :

Déterminer les extrema de $f : x \mapsto x + \dfrac{2}{x}$.

Exercice 12 :

Soit m un réel et soit f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$ par : $f_m(x) = \dfrac{x^2+mx}{x^2-1}$.
Pour quelles valeurs de m, f_m n'admet-elle ni maximum ni minimum ?

Exercice 13 :

On note (E) l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$ et (I) l'inéquation $x^3 - 15x - 4 > 0$.

Partie 1 : Résolution graphique

1. Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation $x^2 - 15 = \dfrac{4}{x}$
2. Tracer dans un même repère les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto x^2 - 15$ et $x \mapsto \dfrac{4}{x}$.
3. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation (E). Une des solutions est un nombre entier, quelle est sa valeur ?
4. Démontrer que l'inéquation (I) s'écrit sur $]0;+\infty[$, $x^2 - 15 > \frac{4}{x}$, et sur $]-\infty;0[$, $x^2 - 15 < \frac{4}{x}$.

Partie 2 : Étude d'une fonction

f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 15x - 4$ et on C_f est sa courbe représentative.

5. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
6. Étudier les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
7. Déterminer les variations de f et dresser son tableau de variations. Tracer l'allure de C_f.
8. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions dans $\mathbb{R}$.
9. Donner un encadrement à 10^{-2} près de chacune des solutions.
10. Étudier le signe de la fonction f. En déduire l'ensemble des solutions de l'inéquation (I).

Partie 3 : Méthode algébrique

11. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x, $x^3 - 15x - 4 = (x-4)(ax^2 + bx + c)$.
12. Résoudre alors (E) et (I).

Exercice 14 :

Soit f est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2}x^2 + 4x$.

1. Calculer la dérivée f' de la fonction f, puis sa dérivée seconde f''.
2. (a) Déterminer les variations de la fonction f', et dresser le tableau de variation de f'.
   (b) Prouver que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique c et que cette solution appartient à l'intervalle $]-\infty;-1]$. Donner un encadrement de c d'amplitude 10^{-2}.

3. (a) Déterminer le signe de la fonction f', puis dresser le tableau de variation de la fonction f.
   (b) Montrer que $f(c) = \frac{3c(4-c)}{4}$.
   (c) Déterminer le nombre de racines du polynôme f.

Exercice 15 :

1. Représenter graphiquement la courbe de la fonction $f : x \mapsto x^2$ et la droite $d : y = x+1$. Étudier la position relative de la courbe et de la droite.
2. Étudier la position relative des courbes des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x}{x+1}$ et $g : x \mapsto \dfrac{x}{x-1}$.
3. Étudier les variations (en précisant les limites et éventuelles asymptotes) de ces fonctions et tracer les deux courbes.
4. Étudier la position relative de la courbe de la fonction $f : x \mapsto e^x$ et de la droite $y = x$. Représenter graphiquement la situation.

Exercice 16 :

On considère la fonction carré $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe et T_a la tangente à sa courbe au point d'abscisse a.

1. Donner l'équation de la tangente T_1 puis étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ avec cette tangente.
2. Étudier de même la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ avec ses tangentes T_2, T_0, et T_{-1}.
3. Tracer dans un repère la courbe $\mathcal{C}$ et ses tangentes.
4. Généraliser les résultats précédents : montrer que $\mathcal{C}$ est toujours au-dessus de toutes ses tangentes T_a.

Exercice 17 :

Soit f la fonction exponentielle.

1. Donner la convexité de f.
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
3. En déduire que, pour tout réel x, $e^x > x$.

Exercice 18 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 4x^3 - 15x^2 - 18x + 12$.

1. Dresser le tableau de variations de f. Préciser les limites.
2. Étudier la convexité de f.
3. Déterminer les coordonnées des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice 19 :

Soit h la fonction définie par l'expression $h(x) = e^{\sqrt{x^2-5x+6}}$.

1. Préciser l'ensemble $\mathcal{D}_h$ de définition de f.
2. Déterminer la fonction dérivée h' de h.
3. Étudier les variations de h.
4. Déterminer les équations des tangentes T_1 et T_4 à la courbe représentative de h aux points d'abscisses 1 et 4.
5. Déterminer les points d'intersection de T_1 et T_4.

Exercice 20 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $g(x) = \dfrac{e^x}{1-x}$.

1. Déterminer $g'(x)$, puis montrer que g'' a pour expression $g''(x) = \dfrac{e^x(x^2-4x+5)}{(1-x)^3}$.
2. En déduire la convexité de g et les abscisses des éventuels points d'inflexion.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 0.
4. Montrer que, pour tout $x > 1$, on a $e^x \geq -2x^2 + 3x - 1$.

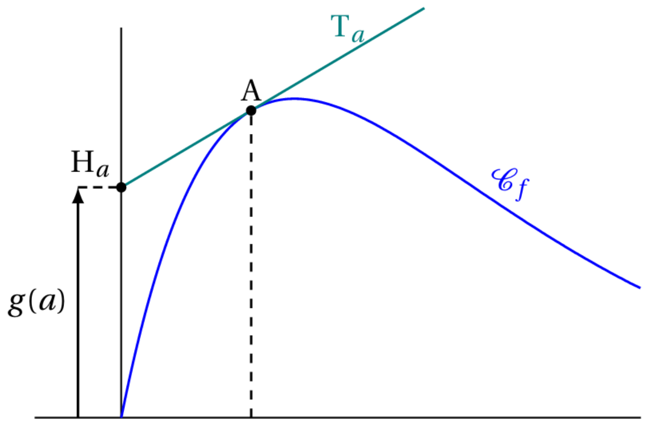
Exercice 21 :

On considère la fonction f, définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\,\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sur $[0;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. En remarquant que pour tout x dans $[0;+\infty[$, on a $f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x}$, démontrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ possède une asymptote en $+\infty$ dont on donnera une équation.



2. Démontrer que pour tout réel x appartenant à $[0;+\infty[$:

$$f'(x) = (1-x)\,\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$, sur lequel on fera figurer les valeurs aux bornes ainsi que la valeur exacte de l'extremum.
4. Déterminer, sur l'intervalle $[0;+\infty[$, le nombre de solutions de l'équation :

$$f(x) = \frac{367}{1000}.$$

5. On admet que pour tout x appartenant à $[0;+\infty[$:

$$f''(x) = \mathrm{e}^{-x}(x-2).$$

Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0;+\infty[$.
6. Soit a un réel appartenant à $[0;+\infty[$ et A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a.
On note T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A.
On note H_a le point d'intersection de la droite T_a et de l'axe des ordonnées.
On note $g(a)$ l'ordonnée de H_a.
La situation est représentée sur la figure ci-contre.
(a) Démontrer qu'une équation réduite de la tangente T_a est :

$$y = \left((1-a)\,\mathrm{e}^{-a}\right) \times x + a^2\,\mathrm{e}^{-a}.$$

(b) En déduire l'expression de $g(a)$.
(c) Démontrer que $g(a)$ est maximum lorsque A est un point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Exercice 22 :

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x} + x.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
(a) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

(b) En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
(c) Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
(d) En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
(e) Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

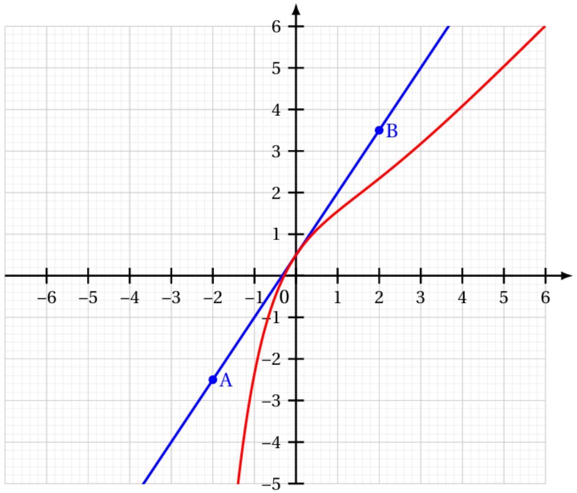
Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

$$h(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x} + x,$$

où a et b sont deux réels.
Dans un repère orthonormé ci-après figurent :
— la courbe représentative de la fonction h ;
— les points A et B de coordonnées respectives $(-2;-2,5)$ et $(2;3,5)$.

1. Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.



2. Sachant que la fonction h admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde d'expression
$$h''(x) = -\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x} + x\,\mathrm{e}^{-x},$$
valider ou non la conjecture précédente.
3. Déterminer une équation de la droite (AB).
4. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b.

Exercice 23 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \frac{3}{4}x^2 - 2x + 3.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3};2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3};2\right]$.
3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leqslant f(x)$.
Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x :
$$f(x) - x = \frac{3}{4}(x-2)^2.$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

4. Étude du cas : $\frac{3}{4} \leqslant u_0 \leqslant 2$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2.$$
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (c) Prouver que la limite de la suite est égale à 2.
5. Étude duc as particulier $u_0 = 3$.
On admet que dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
Recopier et compléter la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

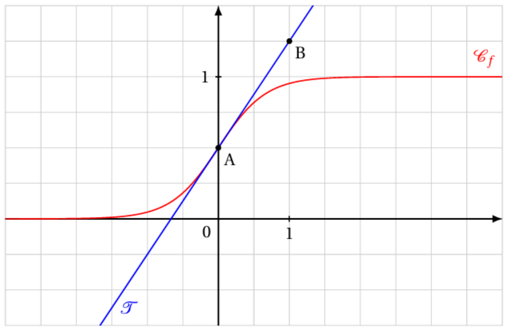
```
def seuil() :
        u = 3
        n = 0
        while ......... :
                u = .........
                n = .........
        return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$. À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

Exercice 24 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^{-3x}}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On nomme A le point de coordonnées $\left(0;\frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1;\frac{5}{4}\right)$.



On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$, au point d'abscisse 0.

Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : Étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   (b) Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.
4. D terminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0,99$.

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.

On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f''(x) = \frac{9\mathrm{e}^{-3x}\left(\mathrm{e}^{-3x}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-3x}\right)^3}.$$

2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   (b) Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
4. En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$. Justifier la réponse.

Exercice 25 :

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse.
Chaque réponse doit être justifiée.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. **Affirmation :** La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^x - x$ est convexe.
2. **Affirmation :** L'équation $\left(2\mathrm{e}^x - 6\right)\left(\mathrm{e}^x + 2\right) = 0$ admet $\ln(3)$ comme unique solution dans $\mathbb{R}$.
3. **Affirmation :**
   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^x - x} = 0.$$
4. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (6x+5)\mathrm{e}^{3x}$ et soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $F(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{3x} + 4$.
   Affirmation : F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui prend la valeur 5 quand $x = 0$.
5. On considère la fonction `mystere` définie ci-dessous qui prend une liste `L` de nombres en paramètre.
   On rappelle que `len(L)` représente la longueur de la liste `L`.

```
def mystere(L) :
        S = 0
        for i in range(len(L))
                S = S + L[i]
        return S / len(L)
```

Affirmation : L'exécution de `mystere([1,9,9,5,0,3,6,12,0,5])` renvoie `50`.

Exercice 26 :

Un biologiste a modélisé l'évolution d'une population de bactéries (en milliers d'entités) par la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t)=\mathrm{e}^3-\mathrm{e}^{-0,5t^2+t+2}$ où t désigne le temps en heures depuis le début de l'expérience.

À partir de cette modélisation, il propose les trois affirmations ci-dessous. Pour chacune d'elles, indiquer, en justifiant, si elle est vraie ou fausse.

— Affirmation 1 : « La population augmente en permanence ».

— Affirmation 2 : « À très long terme, la population dépassera 21000 bactéries ».

— Affirmation 3 : « La population de bactéries aura un effectif de 10000 à deux reprises au cours du temps ».

Exercice 27 :

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}+x.$$

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,
   $$f''(x)=\left(x-\frac{3}{2}\right)\mathrm{e}^{-x}.$$
   (b) En déduire les variations et le minimum de la fonction f' sur $\mathbb{R}$.
   (c) Justifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)>0$.
   (d) En déduire que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.
   (e) Donner une valeur arrondie à 10^{-3} de cette solution.

Partie B

On considère une fonction h, définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, ayant une expression de la forme

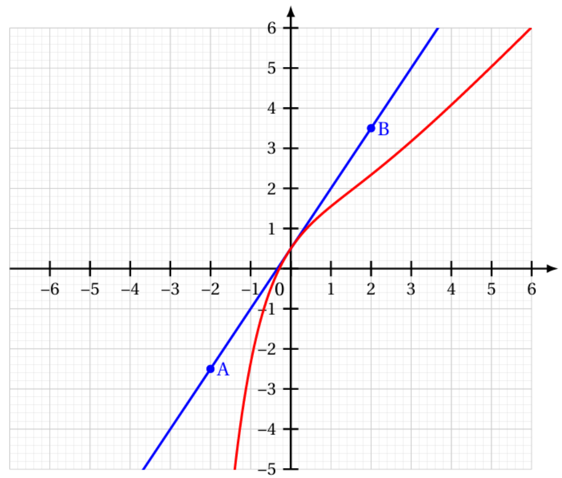
$$h(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{-x}+x,$$

où a et b sont deux réels.

Dans un repère orthonormé ci-après figurent :

— la courbe représentative de la fonction h ;

— les points A et B de coordonnées respectives $(-2;-2,5)$ et $(2;3,5)$.



1. Conjecturer, avec la précision permise par le graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe représentative de la fonction h.
2. Sachant que la fonction h admet sur $\mathbb{R}$ une dérivée seconde d'expression
   $$h''(x)=-\frac{3}{2}\mathrm{e}^{-x}+x\,\mathrm{e}^{-x},$$
   valider ou non la conjecture précédente.
3. Déterminer une équation de la droite (AB).
4. Sachant que la droite (AB) est tangente à la courbe représentative de la fonction h au point d'abscisse 0, en déduire les valeurs de a et b.

Exercice 28 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{3}{4}x^2-2x+3.$$

1. Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire, que pour tout x appartenant à l'intervalle $\left[\frac{4}{3};2\right]$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $\left[\frac{4}{3};2\right]$.
3. Démontrer que pour tout x réel, $x \leq f(x)$.
   Pour cela, on pourra démontrer que pour tout réel x :
$$f(x) - x = \frac{3}{4}(x-2)^2.$$

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par un réel u_0 et pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = f\left(u_n\right).$$

On a donc, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3}{4}u_n^2 - 2u_n + 3$.

4. Étude du cas : $\frac{3}{4} \leqslant u_0 \leqslant 2$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 2.$$
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (c) Prouver que la limite de la suite est égale à 2.
5. Étude du cas particulier $u_0 = 3$.
   On admet que dans ce cas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.
   Recopier et compléter la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python, afin qu'elle renvoie la plus petite valeur de n telle que u_n soit supérieur ou égal à 100.

```
def seuil() :
        u = 3
        n = 0
        while ......... :
                u = .........
                n = .........
        return n
```

6. Étude du cas : $u_0 > 2$.
   À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas convergente.

Exercice 29 :

Partie A

Le but de la partie A est d'étudier le comportement de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0,3$ et par la relation de récurrence, pour tout entier naturel n :
$$u_{n+1} = 2u_n\left(1-u_n\right).$$

Cette relation de récurrence s'écrit $u_{n+1} = f\left(u_n\right)$, où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = 2x(1-x).$$

1. Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.
2. On admet que pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{2}$.
   Calculer u_1 puis effectuer un raisonnement par récurrence pour démontrer que pour tout rentier naturel n, $u_n \leq u_{n+1}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. Justifier que la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est égale à $\dfrac{1}{2}$.

Partie B

Le but de cette partie est d'étudier un modèle d'évolution d'une population.
En 2022, cette population compte 3000 individus.
On note P_n l'effectif en milliers de la population l'année $2022+n$. Ainsi $P_0 = 3$.
Selon un modèle inspiré du modèle de Verhulst, mathématicien belge du XIX$^{\text{e}}$ siècle, on considère que, pour tout entier naturel n :
$$P_{n+1} - P_n = P_n\left(1 - b \times P_n\right), \text{ où } b \text{ est un réel strictement positif.}$$

Le réel b est un facteur de freinage qui permet de tenir compte du caractère limité des ressources du milieu dans lequel évoluent ces individus.

1. Dans cette question $b = 0$.
   (a) Justifier que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   (b) Déterminer la limite de $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Dans cette question $b = 0,2$.

(a) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = 0{,}1 \times P_n$.
Calculer v_0 et montrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 2v_n\big(1-v_n\big)$.

(b) Dans ce modèle, justifier que la population se stabilisera autour d'une valeur que l'on précisera.

III.4 Fonction logarithme népérien

Exercice 1 :

On se place dans un repère orthonormal, et on note d la droite d'équation $y = x$.

1. On considère les points $M(x;y)$ et $M'(y,x)$.
   (a) Donner un vecteur directeur de d et montrer que $\overrightarrow{MM'}$ est orthogonal à d.
   (b) Montrer que les points M et M' sont symétriques par rapport à la droite d.
2. On considère la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction carré $x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
   (a) Tracer l'allure de $\mathcal{C}$.
   (b) Soit M un point quelconque de $\mathcal{C}$. Préciser ses coordonnées et celles de son symétrique M' par rapport à d.
   (c) Lorsque M décrit $\mathcal{C}$, la courbe de quelle fonction est décrite par M' ? Quel lien y-a-t'il entre la fonction carré et cette fonction ?
3. On considère maintenant $\mathcal{D}$ la courbe représentative de la fonction exponentielle.
   (a) Tracer l'allure de $\mathcal{D}$.
   (b) Soit M un point quelconque de $\mathcal{D}$. Préciser ses coordonnées et celles de son symétrique M' par rapport à d.
   (c) Lorsque M décrit $\mathcal{D}$, la courbe de quelle fonction est décrite par M' ? Quel lien y-a-t'il entre la fonction exponentielle et cette fonction ?

Exercice 2 :

Résoudre les équations suivantes sur $\mathbb{R}$:

1. $e^x = 1$
2. $e^x = e$
3. $e^x = \frac{1}{e}$
4. $e^x = 5$
5. $\ln(x) = -5$
6. $\ln(2x-1) = -2$
7. $\ln(1+x) = 100$

Exercice 3 :

Soit $x \in \mathbb{R}$, préciser le signe des expressions suivantes selon les valeurs de x :

1. $\ln(x-1)$.
2. $\ln\left(\dfrac{x^2}{5x-6}\right)$.

Exercice 4 :

1. Déterminer $\ln(2)+\ln(4)+\ln(8)+\ln(16)$ en fonction de $\ln(2)$.
2. Déterminer $\ln(3)+\ln(27)+\ln(81)$ en fonction de $\ln(3)$.
3. Simplifier les expressions : $\ln\left(5^2\times 2^5\right)$ et $\ln\left(12\left(3^6\right)^2\right)$
4. Soit $x\in\mathbb{R}$, exprimer en fonction de $\ln(x)$ les expressions suivantes :

   1. $A(x)=\ln(3x^2)$ 2. $B(x)=\ln\left(\sqrt{x}\right)+\ln(x^2)$
   3. $C(x)=\ln(x+4)-\ln(4x+x^2)$ 4. $D(x)=\ln(x^3-x^2)-\ln(x-1)$
   5. $E(x)=\ln\left(\frac{1}{x}\right)-\ln(2x)$

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\mathbb{N}$, les inéquations suivantes :

1. $3^n>125$ 2. $5^n\leq 10{,}000$ 3. $0{,}5^n<0{,}001$ 4. $\left(\dfrac{9}{10}\right)^n>10^5$
5. $2^{n-5}>3000$ 6. $1-0{,}3^n>0{,}95$ 7. $\dfrac{4^n}{5^{n-1}}>1$

Exercice 6 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q=1{,}5$ et de premier terme $u_0=2$.

1. Quel est le sens de variation de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Quelle est sa limite ?
3. À partir de quel rang a-t-on $u_n>120$?
4. Écrire un code Python permettant de trouver ce rang.

Exercice 7 :

Je possède 1000 euros sur un compte en banque. Chaque année ce compte me rapporte 4% d'intérêts composés (intérêts composés : chaque année le capital de l'année précédente est augmenté de 4%).

1. Au bout de combien d'années le montant sur ce compte aura-t-il doublé ? triplé ?
2. Comparer le résultat obtenu si chaque année le compte rapporte 40€ en plus.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie par l'expression $f:x\mapsto=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
Déterminer l'ensemble de définition de f, et montrer que sa courbe représentative admet l'origine du repère comme centre de symétrie.

Exercice 9 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $\ln(x+1)=1$ 2. $\ln(x^2+6x+10)=0$ 3. $\ln(x)\geq 1$
4. $\ln(x^2+1)\leq 1$ 5. $e^{3x-1}=3$ 6. $\ln(x^2-3)\leq\ln(x)+\ln(2)$
7. $e^{-4x+2}-5=0$ 8. $e^{x^2-4}\leq 1$ 9. $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln(x+7)$
10. $\dfrac{1}{e^{x-2}}=\sqrt{3}$ 11. $e^{2x}-7e^x+12>0$ 12. $2(\ln(x))^2+5\ln(x)-3=0$
13. $e^{2x}-5e^x+6=0$ 14. $e^{2x}-6e^x+4=0$ 15. $2(\ln(x))^2+5\ln(x)-3>0$

Exercice 10 :

Résoudre les systèmes suivants, d'inconnues x et y deux réels :

$$\left\{\begin{array}{lcl}\ln(x)+\ln(y)&=&25\\2\ln(x)+\ln(y)&=&1\end{array}\right.,\quad\left\{\begin{array}{ll}3e^x+e^y&=4\\e^x-2e^y&=-5\end{array}\right.\quad\text{et}\quad\left\{\begin{array}{lcl}\ln(x\sqrt{y})&=&9\\2\ln(x)+\ln(y^3)&=&0\end{array}\right.$$

Exercice 11 :

1. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction ln aux points d'abscisse 1 et e.
2. Tracer dans un repère la courbe $\mathcal{C}$ et ses deux tangentes.
3. Montrer que, pour tout réel $x>0$, $\ln(x)\leq x-1$.

Exercice 12 :

Déterminer le domaine de dérivabilité et les dérivées des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\ln(x^2)$ 2. $g(x)=\ln(5x+2)$ 3. $h(x)=\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$
4. $k(x)=2\ln(\sqrt{x})$ 5. $l(x)=\dfrac{3}{2}\ln\left(e^{2x+1}+3\right)$ 6. $m(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x+2}\right)$
7. $n(x)=-3x\ln\left(e^x+1\right)$

Exercice 13 :

Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition de $f : x \mapsto \dfrac{\ln(x)+2}{\ln(x)-1}$.

Exercice 14 :

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x} - \ln(x)$.

Exercice 15 :

Étudier les variations de la fonction f définie sur $]-1,+\infty]$ par $f : x \mapsto \ln(x+1)+x^2+x+1$.

Exercice 16 :

Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \left(\ln(x)\right)^2$.

Exercice 17 :

Déterminer l'ensemble de définition de $f : x \mapsto \ln(\ln(x))$ et étudier les variations de cette fonction.

Exercice 18 :

On note C_f et C_g les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \ln(x)$ et $g : x \mapsto x^2$.
On note de plus respectivement M_x et N_x les points de C_f et C_g d'abscisse x.

Représenter graphiquement la situation. Pour quelle(s) valeur(s) de x la distance M_xN_x est-elle minimale ?

Exercice 19 :

Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f : x \mapsto x+\ln\left(\dfrac{x}{2x+1}\right)$ et C_f sa courbe représentative.

1. Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
3. (a) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x - \ln(2)$ est asymptote à C_f en $+\infty$.
   (b) Étudier la position de C_f par rapport à Δ.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α et justifier que $\alpha \in \left[1, \dfrac{5}{4}\right[$.
   (d) Tracer Δ et C_f.

Exercice 20 :

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f : x \mapsto \dfrac{x-1}{x}\ln(x)$ et on note C_f sa courbe représentative.

1. (a) Étudier le sens de variation de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g : x \mapsto x-1+\ln(x)$.
   (b) Vérifier que $g(1) = 0$. En déduire, suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$.
2. (a) Montrer que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
   (b) En déduire les variations de f.
   (c) Étudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
   (d) Dresser le tableau de variation de f, puis tracer l'allure de la courbe C_f.

Exercice 21 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_*^+$ par $f : x \mapsto x^x$.

1. Justifier que $f(x) = e^{x\ln(x)}$.
2. Calculer les limites de f en 0 et $+\infty$.
3. Démontrer que, pour tout $x > 0$, $f'(x) = (1+\ln(x))f(x)$. En déduire les variations de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.

Exercice 22 :

Étudier les fonctions f et g définies pour $x > 0$ par $f : x \mapsto 0,5^x$ et $g : x \mapsto 5^x$.
Tracer, sur un même graphique, l'allure de leurs courbes représentatives ainsi que la courbe de la fonction exponentielle.

Exercice 23 :

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = 5x^2 + 2x - 2x^2\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan.
On admet que f est deux fois dérivable sut l'intervalle $]0;+\infty[$.
On note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. (a) Démontrer que la limite de la fonction f en 0 est égale à 0.
   (b) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer $f'(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. (a) Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$:

$$f''(x) = 4(1 - \ln(x)).$$

   (b) En déduire le plus grand intervalle sur lequel la courbe $\mathcal{C}_f$, est au-dessus de ses tangentes.
   (c) Dresser le tableau des variations de la fonction f' sur l'intervalle $]0;+\infty[$. (On admettra que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f'(x) = 2$ et que $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = -\infty$.)
4. (a) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet dans l'intervalle $]0;+\infty[$ une unique solution α dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
   (b) En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ ainsi que le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
5. (a) En utilisant l'égalité $f'(\alpha) = 0$, démontrer que :

$$\ln(\alpha) = \frac{4\alpha + 1}{2\alpha}.$$

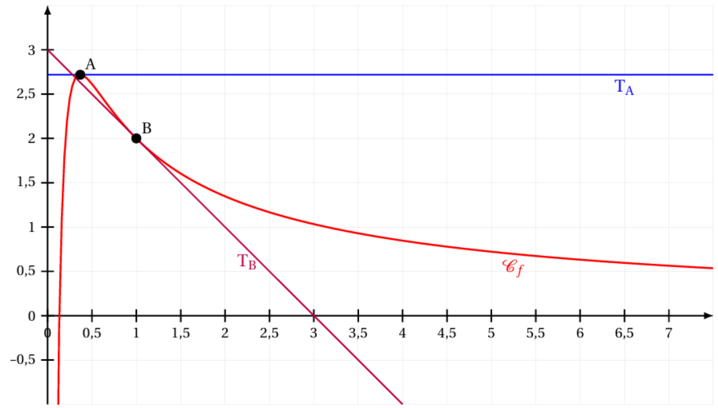
   En déduire que $f(\alpha) = \alpha^2 + \alpha$.
   (b) En déduire un encadrement d'amplitude 10^{-1} du maximum de la fonction f.

Exercice 24 :

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$;
- la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{\mathrm{e}};\mathrm{e}\right)$;
- la tangente T_B à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B de coordonnées $(1,2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0,3)$.



On note f' la fonction dérivée de f.

Partie I

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par :

$$f : x \mapsto \frac{2 + \ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathcal{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0^+, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x \in]0;+\infty[$,
$$f'(x) = \frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f.
Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$,
$$f''(x) = \frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$
6. Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.

Exercice 25 :

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g : x \mapsto \ln\left(x^2\right) + x - 2.$$

1. Déterminer les limites de la fonction g aux bornes de son ensemble de définition.
2. On admet que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
3. (a) Démontrer qu'il existe un unique réel strictement positif α tel que $g(\alpha) = 0$.
(b) Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. En déduire le tableau de signe de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{(x-2)}{x}\ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en 0.
(b) Interpréter graphiquement le résultat.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$,
Montrer que pour tout réel x strictement positif, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.
4. En déduire les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$,

Partie C

Étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la courbe représentative de la fonction ln sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Exercice 26 :

Partie A

On considère la fonction f définie par :

$$f : x \mapsto x - \ln(1+x).$$

1. Justifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$.
Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
3. (a) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.
(b) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]-1;+\infty[$.
4. (a) Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]-1;+\infty[[$, on a :
$$f(x) = \ln\left(\frac{e^x}{1+x}\right).$$
(b) En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n).$$

1. Donner la valeur arrondie au millième de u_1.
2. Montrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.

3. En utilisant la question **3.a.** de la **partie A**, démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \geq 0$.
4. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
5. Déduire des questions précédentes que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
6. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 27 :

Partie A

On considère la fonction f définie pour tout réel x de $]0;1]$ par :

$$f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x} + \ln(x).$$

1. Calculer la limite de f en 0.
2. On admet que f est dérivable sur $]0;1]$. On note f' sa fonction dérivée.
   Démontrer que, pour tout réel x appartenant à $]0;1]$, on a :
   $$f'(x) = \frac{1 - x\,\mathrm{e}^{-x}}{x}.$$
3. Justifier que, pour tout réel x appartenant à $]0;1]$, on a $x\,\mathrm{e}^{-x} < 1$.
   En déduire le tableau de variation de f sur $]0;1]$.
4. Démontrer qu'il existe un unique réel l appartenant à $]0;1]$ tel que $f(l) = l$.

Partie B

1. On définit deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :
   $$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & \frac{1}{10} \\ b_0 & = & 1 \end{array}\right. \text{ et, pour tout entier naturel } n, \left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-b_n} \\ b_{n+1} & = & \mathrm{e}^{-a_n} \end{array}\right. .$$
   (a) Calculer a_1 et b_1. On donnera des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   (b) On considère ci-dessous la fonction `termes`, écrite en langage Python.

```
def termes(n) :
        a = 1/10
        b = 1
        for k in range(0, n) :
                c = ...
                b = ...
                a = c
        return(a,b)
```

2. Recopier et compléter sans justifier le cadre ci-dessus de telle sorte que la fonction `termes` calcule les termes des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. On rappelle que la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
   $$0 < a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n \leq 1.$$
   (b) En déduire que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes.
4. On note A la limite de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et B la limite de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   On admet que A et B appartiennent à l'intervalle $]0;1]$,et que $A = \mathrm{e}^{-B}$ et $B = \mathrm{e}^{-A}$.
   (a) Démontrer que $f(A) = 0$.
   (b) Déterminer $A - B$.

Exercice 28 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f : x \mapsto x\ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$.
On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. (a) Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0;+\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.
   (b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.
   (c) Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   (d) En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T.
2. (a) Calculer la limite de la fonction f en 0.
   (b) Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
4. (a) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0;+\infty[$. On note α cette solution.
   (b) Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4,3;4,4[$.
   (c) En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

5. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :
   On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien ln.

```
def seuil(pas) :
        x = 4.3
        while x*log(x) - x - 2 < 0 :
                x = x + pas
        return x
```

   Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

III.5 Fonctions sinus et cosinus

Exercice 1 :

1. Soit $x \in [0, \pi]$ tel que $\cos x = -\dfrac{1}{4}$. Déterminer $\sin x$.
2. Soit $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ tel que $\sin x = \dfrac{3}{5}$. Déterminer $\cos x$.

Exercice 2 :

On pose $m = \sin\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$. Exprimer en fonction de m : $\sin\left(\dfrac{9\pi}{10}\right)$, $\sin\left(\dfrac{11\pi}{10}\right)$, $\cos\left(\dfrac{4\pi}{10}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{6\pi}{10}\right)$.

Exercice 3 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x = \cos\dfrac{\pi}{6}$.
2. Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'équation $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{6}$ et représenter ses solutions sur un cercle trigonométrique.
3. Donner la mesure principale des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 4 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
Donner la mesure principale des angles solutions.

Exercice 5 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.
Donner la mesure principale des angles solutions.

Exercice 6 :

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$.

Exercice 7 :

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation : $2\cos^2 x - 3\cos x = 2$.

Exercice 8 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :$4\sin^2\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)+4\sin\left(2x+\frac{5\pi}{6}\right)=3$.

Exercice 9 :

Calculer la dérivée de :

1. $f(x)=3\cos(x)$
2. $g(x)=\cos^3(x)$
3. $h(x)=\cos^2(x)+\sin^2(x)$
4. $k(x)=\cos(2x+1)$
5. $l(x)=\sin\left(\frac{x^2-3}{x+1}\right)$

Exercice 10 :

Étudier les fonctions définies par les expressions :

1. $f(x)=\cos x + x\sin x$
2. $g(x)=-\ln\cos x$
3. $h(x)=\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$

Exercice 11 :

On étudie la fonction f définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f: x\mapsto x-\sin(x)$.

1. Étudier les variations de f.
2. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$, $\sin(x)\leq x$.
3. On étudie à présent la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g: x\mapsto 1-\frac{x^2}{2}-\cos(x)$. À l'aide de la fonction f, déterminer les variations de g sur $\mathbb{R}^+$.
4. En déduire que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1-\frac{x^2}{2}\leq\cos(x)$.
5. On étudie à présent les fonctions h et k définies sur $\mathbb{R}$ par $h: x\mapsto x-\frac{x^3}{6}-\sin(x)$ et $k: x\mapsto 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}-\cos(x)$. Étudier les variations de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.
6. En déduire un encadrement des fonctions sin et cos.
7. En déduire alors un encadrement à 10^{-3} près de $\sin(0,01)$ et $\cos(0,01)$.

Exercice 12 :

On définit la fonction tangente définit sur D par $\tan: x\mapsto\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, le but de cet exercice est d'étudier cette fonction.

1. Étudier la parité de la fonction tan.
2. Quelle est la périodicité de la fonction tan.
3. Pourquoi suffit-t-il d'étudier la fonction sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ pour avoir son comportement sur $\mathbb{R}$?
4. Étudier les variations de tan sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et déterminer sa limite à la borne de l'intervalle.
5. Déduire des questions précédentes la courbe représentative de la fonction tan sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2\cos(x)+\sqrt{2})(\sin(x)+1)\leq 0$.

Exercice 14 :

Résoudre sur $[-\pi,\pi]$ les inéquations suivantes :

1. $\sin(x)\geq 0$
2. $\cos(x)<0$
3. $\sin(x)<\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. $\cos(x)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}$

III.6 Primitives, équations différentielles

Exercice 1 :

1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto 5e^{2x}$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $y' - 2y = 0$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g : x \mapsto f(x) - 3x - \dfrac{3}{2}$ est solution de l'équation $y' - 2y = 6x$.

Exercice 2 :

Si on note $x(t)$ la position à l'instant t d'un objet qui se déplace en mouvement rectiligne, alors la vitesse instantanée au même instant t est donnée par $v(t) = x'(t)$ et son accélération par $a(t) = v'(t)$, soit aussi $a(t) = x''(t)$.

Juste après son départ, la vitesse d'un TGV passe de 61,2 km.h^{-1}, à l'instant $t = 0$, à 244,8 km.h^{-1} 150 secondes plus tard, avec une accélaration constante.

1. Montrer que l'accélération du TGV durant ces 150 secondes est égale à 0,34 m.s^{-1}.
2. Déterminer la vitesse $v(t)$ du TGV en fonction du temps t.
3. Déterminer la position $x(t)$ du TGV en fonction du temps t.
4. Quelle distance le TGV a-t-il parcourue en 150 secondes ?

Exercice 3 :

Déterminer les fonctions f telles que :

1. $f'(x) = 6x + 2$
2. $f'(x) = x^2 - 3x + 5$
3. $f'(x) = 2e^{4x}$
4. $f'(x) = \dfrac{1}{x}$
5. $f'(x) = \dfrac{5}{x} + \dfrac{2}{x^2}$

Exercice 4 :

Soit f une solution de l'équation différentielle $(E) : 3y' - 6y = 1$ qui vérifie de plus $f'(1) = 2$.

1. Déterminer $f(1)$.
2. Montrer que $f : x \mapsto e^{2x-2} - \frac{1}{6}$ est solution de (E).

Exercice 5 :

Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 3x^2 + x - 6$
2. $f(x) = x^4 - 4x^3 - 5x^2 + \dfrac{7}{3}x + 2$
3. $f(x) = 2x - 4 + \dfrac{3}{x^2}$
4. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
5. $f(x) = \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$
6. $f(x) = \dfrac{5x^2}{(x^3+1)^2}$
7. $f(x) = \dfrac{1}{2x+1}$
8. $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 + 6x + 4}{(x+1)^2}$.

1. Vérifier que la fonction F définie sur I par $F : x \mapsto \dfrac{3x^2 + 4x}{x+1}$ est une primitive de f sur I.
2. La fonction G définie sur I par $G : x \mapsto \dfrac{3x^2 - x - 5}{x+1}$ est-elle une autre primitive de f sur I ?

Exercice 7 :

Déterminer la primitive F de $f : x \mapsto x^2 - 4x + 2$ telle que $F(1) = 0$.

Exercice 8 :

Déterminer la primitive G de $g : x \mapsto 12x^5 - 9x^2 + 6x - 3$ telle que $G(0) = 4$.

Exercice 9 :

Déterminer la primitive H de $h : x \mapsto \frac{4}{(2x+1)^2}$ telle que $H\left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

Exercice 10 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = 3y$.

Exercice 11 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $2y' + y = 0$.

Exercice 12 :

Déterminer la fonction f solution de l'équation différentielle $2y'+5y=0$, sachant que $f(0)=3$. Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa courbe solution.

Exercice 13 :

(E) est l'équation différentielle $2y'+y=1$.

1. Résoudre (E).
2. Déterminer la fonction f solution de (E) telle que $f(-1)=2$.
3. Tracer la courbe représentant f dans un repère orthonormal.

Exercice 14 :

Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $\begin{cases} y' &= 2y+3 \\ y(0) &= 1 \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4y' &= 2y-3 \\ y(5) &= -1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3y'+4y-6 &= 0 \\ y(-1) &= 0 \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3u' &= u+6 \\ u(0) &= 5 \end{cases}$
5. $\begin{cases} 5p &= 2p'-\frac{1}{4} \\ p(0) &= 1 \end{cases}$

Exercice 15 :

Soit f la solution de l'équation différentielle $(E): 3y'-6y=1$ telle que $f'(1)=2$.

1. Déterminer $f(1)$.
2. Déterminer la solution f.

Exercice 16 :

Soit (E) l'équation différentielle $2y'=3y+6x+1$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $f_p(x)=ax+b$ soit solution de (E).
2. Écrire et résoudre l'équation homogène associée à (E).
3. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 17 :

On considère l'équation différentielle $(E): y'+3y=3e^{-3x}(-6x+1)$.
On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g: x\mapsto e^{-3x}(-9x^2+3x+19)$.

1. Dresser le tableau de variation de g. Préciser les limites.
2. Montrer que la fonction g est solution de (E).
3. Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y'+3y=0$.
4. Résoudre alors (E).
5. Déterminer la fonction solution de (E) qui prend la valeur 1 en $\frac{1}{3}$.

Exercice 18 :

On considère l'équation différentielle $(E): y'-2y=e^{2x}$.

1. Démontrer que la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u: x\mapsto xe^{2x}$ est une solution de (E).
2. Résoudre l'équation différentielle $(E_0): y'-2y=0$.
3. En déduire toutes les solutions de l'équation (E).
4. Déterminer la fonction, solution de (E), qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 19 :

On cherche à résoudre l'équation différentielle $(E): y'=3y-5y^2$.

1. Démontrer qu'une fonction u définie sur $\mathbb{R}$ est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $v=\frac{1}{u}$ est solution de $(E'): y'=-3y+5$.
2. Résoudre (E').
3. En déduire les solutions de (E).
4. Déterminer la solution de (E) qui prend la valeur 1 en 0.

Exercice 20 :

Deux cuves A et B sot séparées par une membrane poreuse.
On injecte 10 cm^3 d'un gaz dans la cuve A à un instant $t=0$ alors que la cuve B est laissée vide. Ce gaz se diffuse en permanence entre les deux cuves et une partie est rejetée vers l'extérieur.
On appelle respectivement $A(t)$ et $B(t)$ le volume en cm^3 de ce gaz dans les cuves A et B à l'instant t (exprimé en heure). On a donc $A(0)=10$ et $B(0)=0$.
On admet que les fonctions A et B sont définies et dérivables sur $[0;+\infty[$ et vérifient les équations différentielles $A'(t)=-5A(t)+2B(t)$ et $B'(t)=2A(t)-2B(t)$.

On définit de plus sur $[0;+\infty[$ deux fonctions f et g par $f: t\mapsto A(t)+2B(t)$ et $g: t\mapsto -2A(t)+B(t)$.

1. Calculer $f(0)$ et $g(0)$.

2. Déterminer, pour tout $t \geq 0$, $f'(t)$ et $g'(t)$ et en déduire que f et g sont solutions de deux équations différentielles de la forme $y' = ay$.
3. Résoudre ces deux équations et déterminer, pour tout $t \geq 0$, $f(t)$ et $g(t)$.
   En déduire $A(t)$ et $B(t)$.

Exercice 21 :

On considère l'équation différentielle $\left(E_0\right)$: $y' = y$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

1. Démontrer que l'unique fonction constante solution de l'équation différentielle $\left(E_0\right)$ est la fonction nulle.
2. Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle $\left(E_0\right)$.

On considère l'équation différentielle $\left(E\right)$: $y' = y - \cos(x) - 3\sin(x)$ où y est une fonction dérivable de la variable réelle x.

3. La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h : x \mapsto 2\cos(x) + \sin(x)$.
   On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que la fonction h est solution de l'équation différentielle $\left(E\right)$.
4. On considère une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que : « f est solution de $\left(E\right)$ » est équivalent à « $f - h$ est solution de $\left(E_0\right)$ ».
5. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle $\left(E\right)$.
6. Déterminer l'unique solution g de l'équation différentielle $\left(E\right)$ telle que $g(0) = 0$.
7. Calculer :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\mathrm{e}^x + \sin(x) + 2\cos(x)\right) \mathrm{d}x$$

Exercice 22 :

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0,4y + 0,4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

1. (a) Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
   (c) Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + 9\mathrm{e}^{-0,4t}}.$$

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.
2. Montrer que $p'(t) = \dfrac{3,6\mathrm{e}^{-0,4t}}{\left(1 + 9\mathrm{e}^{-0,4t}\right)^2}$ pour tout $t \in [0;+\infty[$.
3. (a) Montrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.
   (b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

1. p désigne la fonction de la partie II.
   Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0,4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.
2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.
   Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.
   On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
   La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
   Interpréter dans ce contexte la limite de la question **II.**1. puis la valeur approchée de α de la question **II.**3.(b) ainsi que la valeur $p(0)$.

III.7 Calcul intégral

Exercice 1 :

Calculer les intégrales suivantes : $I = \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x$, $J = \displaystyle\int_1^3 (2t+1)\,\mathrm{d}t$ et $K = \displaystyle\int_{-2}^3 |x|\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2 :

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^4 \lfloor x \rfloor\,\mathrm{d}\,dx$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par l'expression $f : x \mapsto 4x-3$.

Déterminer de façon explicite, pour tout réel $t \geq 1$, la fonction $F(t) = \displaystyle\int_1^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4 :

1. Démontrer que pour tout réel t de $[0;1]$, on a $\frac{t}{1+t^2} \leq t$.
2. En déduire que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}$.

Exercice 5 :

Soit f la fonction définie sur $[1,2]$ par $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{x^2}$.

1. Étudier les variations de f sur $[1,2]$.
2. Démontrer que pour tout x de $[1,2]$, $\dfrac{e^2}{4} \leq \dfrac{e^x}{x^2} \leq e$.
3. En déduire un encadrement de $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 6 :

Soit f la fonction définie sur $[-3,3]$ par $f : x \mapsto \lfloor x^2 \rfloor$.

1. Montrer que f est une fonction paire, et tracer sa représentation graphique sur l'intervalle $[0,3]$.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
3. En déduire $\displaystyle\int_{-3}^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 7 :

Soit F la fonction définie par $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Déterminer le sens de variation de F.

Exercice 8 :

Déterminer les intégrales suivantes :

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$
2. $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^3 (5-2x)\,\mathrm{d}x$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^1 e^{-2x}\,\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+1}\,\mathrm{d}x$
5. $I_5 = \displaystyle\int_0^1 x^2(x^3-1)^5\,\mathrm{d}x$
6. $I_6 = \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{(x^2-4)^2}\,\mathrm{d}x$
7. $I_7 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 9 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$, et, pour un entier $n \geq 1$, l'intégrale $I_n = \int_1^n f(x)\,dx$.

1. Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa courbe représentative.
   Représenter sur ce graphique I_n.
2. Calculer I_n pour tout entier, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

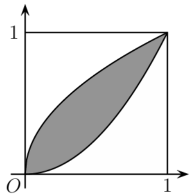
Exercice 10 :

Calculer la valeur moyenne des fonctions suivantes sur l'intervalle I donné :

1. $f : x \mapsto x^2$ sur $I = [-1;1]$
2. $f : x \mapsto x^3$ sur $I = [-1;1]$
3. $f : x \mapsto x(3x^2-1)^2$ sur $I = [-1;2]$
4. $f : x \mapsto \dfrac{3}{2x+1}$ sur $I = [0;4]$
5. $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{(8-x^3)^2}$ sur $I = [0;1]$

Exercice 11 :

Dans un repère orthonormé, on considère le domaine $\mathcal{D}$ compris entre les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^2$.



Déterminer l'aire du domaine $\mathcal{D}$.

Exercice 12 :

On note D le domaine compris entre les courbes des fonctions f et g définies sur $[-2,2]$ par $f : x \mapsto x^2 - 4$ et $g : x \mapsto -\dfrac{1}{2}x^2 + 2$.

1. Tracer dans un repère orthonormé le domaine D.
2. Calculer l'aire de D.

Exercice 13 :

Calculer la valeur moyenne de chaque fonction sur l'intervalle donné :

1. $f(x) = (2-x)(x-1)$ sur $I = [-1;0]$.
2. $g(x) = e^{-3x+1}$ sur $I = [-1;1]$.

Exercice 14 :

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f : x \mapsto e^{-x^2}$ et on définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \text{ et, pour tout entier } n \geqslant 1, \quad u_n = \int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x$$

1. (a) Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0;1]$, $\dfrac{1}{e} \leq f(x) \leq 1$.
   (b) En déduire que $\dfrac{1}{e} \leq u_0 \leq 1$.
2. Calculer u_1.
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $0 \leq u_n$.
   (b) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (b) En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 15 :

On considère la suite numérique $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout entier naturel n non nul, par :

$$J_n = \int_1^n e^{-t} sqrt1 + t\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la suite (J_n) est croissante.
2. On définit la suite (I_n), pour tout entier naturel n non nul, par : $I_n = \int_1^n (t+1)\,e^{-t}\,dt.$
   (a) Justifier que, pour tout $t \geq 1$, on a $\sqrt{t+1} \leqslant t+1$.
   (b) En déduire que $J_n \leqslant I_n$.
   (c) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $t \mapsto (at+b)e^{-t}$ soit une primitive de la fonction $t \mapsto (t+1)e^{-t}$.
   (d) Exprimer alors I_n en fonction de n.
   (e) En déduire que la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par un nombre réel.
   (f) Que peut-on en conclure pour la suite $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Exercice 16 :

Calculer les intégrales suivantes :

1. $I = \displaystyle\int_0^3 xe^x\,\mathrm{d}x$ 2. $J = \displaystyle\int_{-2}^2 4xe^{3x-1}\,\mathrm{d}x$ 3. $K = \displaystyle\int_{-1}^1 2x(8x+2)^2\,\mathrm{d}x$
4. $L = \displaystyle\int_{-1}^1 2x^3 e^{x^2-1}\,\mathrm{d}x$ 5. $L = \displaystyle\int_0^1 x^2 e^x\,\mathrm{d}x$

Exercice 17 :

I et J sont les intégrales définies par $I = \displaystyle\int^{\frac{\pi}{2}} e^x sin(x)\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x cos(x)\,\mathrm{d}x$.

1. En appliquant de deux façons différentes à l'intégrale I la méthode d'intégration par parties, trouver deux relation entre I et J.
2. Calculer alors les intégrales I et J.

Exercice 18 :

Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_0^{\pi} x^2 \cos(nx)\,\mathrm{d}x$.

À l'aide d'une double intégration par parties, calculer I_n en fonction de n.

Exercice 19 :

Soit $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier $n \geq 0$ par $I_n = \int_0^1 t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Calcul des premiers termes de la suite :
   (a) Calculer I_0 et I_1.
   (b) Exprimer I_2 en fonction de I_1, puis en déduire I_2.
   (c) Exprimer I_3 en fonction de I_2, puis calculer I_3.
2. Étude de la suite :
   (a) Démontrer que, pour tout entier n, $I_n \geq 0$.
   (b) Étudier le sens de variation de la suite I.
   (c) Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
3. Calcul de la limite de la suite :
   (a) À l'aide d'une intégration par parties, pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer I_{n+1} en fonction de I_n.
   (b) Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $I_n \leq \frac{1}{ne}$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 20 :

Partie I :

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par :

$$f_n : x \mapsto x^n e^x.$$

On note C_n la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan. On désigne par $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x$$

1. (a) On désigne par F_1 la fonction définie sur $[0;1]$ par :

   $$F_1(x) = (x-1)e^x.$$

   Vérifier que F_1 est une primitive de la fonction f_1.
   (b) Calculer I_1.
2. À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation pour tout n supérieur ou égal à 1,

   $$I_{n+1} = \mathrm{e} - (n+1)I_n.$$

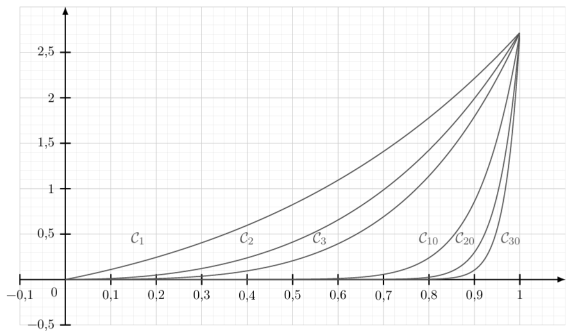
3. Calculer I_2.
4. On considère la fonction `mystere` écrite dans le langage Python :

```
def mystere(n):
        a = 1
        L = [a]
        for i in range(1, n) :
                a = e - (i+1)*a
                L.append(a)
        return L
```

   À l'aide des questions précédentes, expliquer ce que renvoie l'appel `mystere(5)`.

Partie II :

1. Sur le graphique ci-dessous, on a représenté les courbes C_1, C_2, C_3, C_{10}, C_{20} et C_{30}.



(a) Donner une interprétation graphique de I_n.
(b) Quelle conjecture peut-on émettre sur la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

2. Montrer que pour tout n supérieur ou égal à 1,

$$0 \leq I_n \leq \mathrm{e}\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x.$$

3. En déduire $\lim_{n\to+\infty} I_n$.

Exercice 21 :

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} sin(x)\,\mathrm{d}$$

$$J_n = \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx} cos(x)\,\mathrm{d}x$$

1. Calculer I_0.
2. (a) Justifier que, pour tout entier naturel n, on $I_n \geqslant 0$.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$I_n \leq \int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$$

   (b) Montrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n\pi}}{n}.$$

   (c) Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. (a) En intégrant par parties l'intégrale I_n de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$I_n = 1 + \mathrm{e}^{-n\pi} - n\,J_n \qquad \text{et} \qquad I_n = \frac{1}{n}J_n.$$

   (b) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $I_n = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-n\pi}}{n^2+1}$.
5. On souhaite obtenir le rang `n` à partir duquel la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ devient inférieure à $0,1$.
   Recopier et compléter la cinquième ligne du script `Python` ci-dessous avec la commande appropriée.

```python
from math import *
def seuil() :
        n = 0
        I = 2
        .........
                n = n+1
                I = (1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
        return n
```

Exercice 22 :

Partie A :

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par :

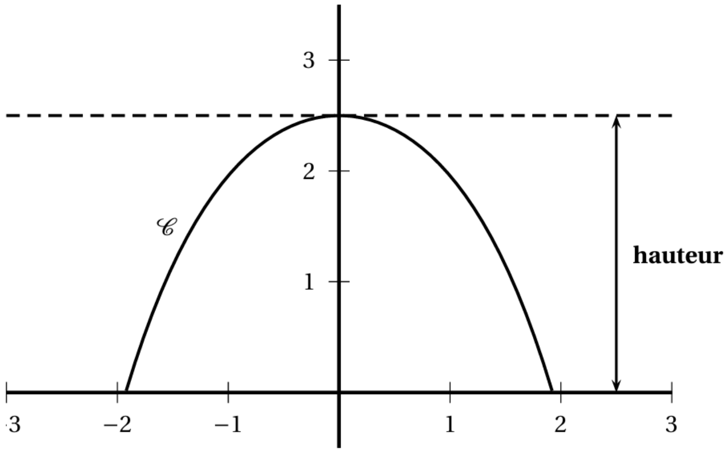
$$f : x \mapsto \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}\right)$$

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Montrer que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
   (c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet, sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, une unique solution, que l'on note α.
2. En remarquant que, pour tout réel x, $f(-x) = f(x)$, justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$ et qu'elles sont opposées.

Partie B :

Les **serres en forme de tunnel** sont fréquemment utilisées pour la culture des plantes fragiles ; elles limitent les effets des intempéries ou des variations de température. Elles sont construites à partir de plusieurs arceaux métalliques identiques qui sont ancrés au sol et supportent une bâche en plastique.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé d'unité 1 mètre. La fonction f et le réel α sont définis dans la **partie A**. Dans la suite de l'exercice, on modélise un arceau de serre par la courbe $\mathcal{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[-\alpha\ ;\ +\alpha]$.
On a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[-\alpha\ ;\ +\alpha]$.



On admettra que la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

1. Calculer la hauteur d'un arceau.
2. (a) Dans cette question, on se propose de calculer la valeur exacte de la longueur de la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0\ ;\ \alpha]$. On admet que cette longueur est donnée, en mètre, par l'intégrale :

$$I = \int_0^{\alpha} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,\mathrm{d}x$$

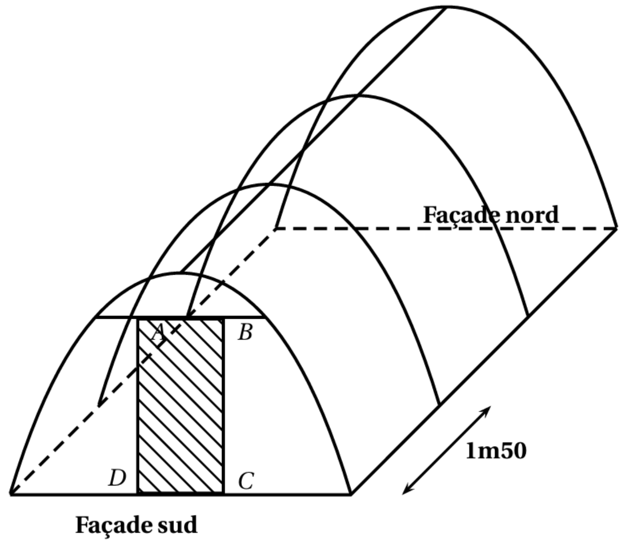
Montrer que, pour tout réel x, on a : $1 + (f'(x))^2 = \dfrac{1}{4}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2$

(b) En déduire la valeur de l'intégrale I en fonction de α.
Justifier que la longueur d'un arceau, en mètre, est égale à : $\mathrm{e}^{\alpha} - \mathrm{e}^{-\alpha}$.

Partie C :

On souhaite construire une serre de jardin en forme de tunnel.

On fixe au sol quatre arceaux métalliques, dont la forme est celle décrite dans la partie précédente, espacés de 1,5 mètre, comme indiqué sur le schéma ci-dessous.
Sur la façade sud, on prévoit une ouverture modélisée sur le schéma par le rectangle $ABCD$ de largeur 1 mètre et de longueur 2 mètres.



On souhaite connaître la quantité, exprimée en m^2, de bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.
Cette bâche est constituée de trois parties, l'une recouvrant la façade nord, l'autre la façade sud (sauf l'ouverture), la troisième partie de forme rectangulaire recouvrant le toit de la serre.

1. Montrer que la quantité de bâche nécéssaire pour recouvrir les façades sud et nord est donnée, en m^2, par :

$$\mathcal{A} = 4\int_0^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x - 2$$

2. On prend 1,92 pour valeur approchée de α. Déterminer, au m^2 près, l'aire totale de la bâche plastique nécessaire pour réaliser cette serre.

IV Probabilités

IV.1 Succession d'épreuves indépendantes, schéma de Bernoulli

Exercice 1 :

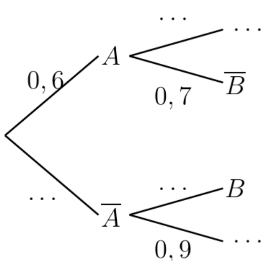
La probabilité qu'un jeune réussisse l'examen du permis de conduire l'année de ses 18 ans est de 0,625 et celle qu'il soit reçu au baccalauréat cette même année est de 0,82.
De plus, la probabilité d'être à la fois reçu au baccalauréat et à l'examen du permis de conduire la même année est de 0,56.

1. Calculer la probabilité qu'un jeune soit reçu à au moins un des deux examens.
2. En déduire la probabilité qu'il ne soit reçu à aucun des deux examens.
3. Déterminer la probabilité qu'un jeune réussisse au baccalauréat sachant qu'il a déjà eu son permis la même année.

Exercice 2 :

On considère une expérience aléatoire modélisée par l'arbre ci-contre.

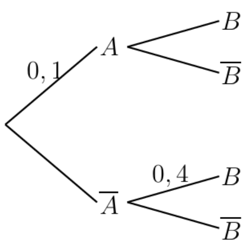
1. Compléter cet arbre.
2. Déterminer $P(A\cap B)$ et $P(B)$.
3. Déterminer $P_A(B)$ et $P_B(A)$.



Exercice 3 :

Une expérience aléatoire est représentée par l'arbre pondéré ci-contre. On sait de plus que $P(B)=0,39$.

1. Calculer la probabilité de l'événement $A\cap B$.
2. En déduire la probabilité de B sachant A.
3. Déterminer la probabilité de A sachant B.



Exercice 4 :

Tous les élèves d'une promotion ont passé un test de certification en anglais.

1. 80 % ont réussi le test.
2. Parmi ceux qui ont réussi le test, 95 % le passaient pour la 1ère fois.
3. Parmi ceux qui ont échoué au test, 2 % le passaient pour la 1ère fois.

Exercice 5 :

On considère les événements R : "l'élève a réussi au test", et F : "l'élève a passé le test plusieurs fois".

1. Traduire l'énoncé en termes de probabilité et dresser un arbre pondéré décrivant la situation.
2. Calculer la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait passé le test pour la 1ère fois et l'ait réussi.
3. Déterminer la probabilité qu'un élève choisi au hasard ait passé plusieurs fois le test.
4. On choisit au hasard un élève ayant passé plusieurs fois le test. Quelle est la probabilité qu'il ait réussi ?

Exercice 6 :

Soit A et B deux événements de probabilité non nulle.
Représenter la situation par un arbre et montrer la formule :

$$P_B(A)=\frac{P_A(B)\times P(A)}{P(B)}$$

Puis montrer que :

$$P_B(A)=\frac{P_A(B)\times P(A)}{P_A(B)\times P(A)+P_{\overline{A}}(B)\times P(\overline{A})}$$

Exercice 7 :

1. On dispose de 100 pièces de monnaie. Une pièce sur quatre est truquée.
   Une pièce truquée indique Pile avec une probabilité de $\frac{4}{5}$.
   On choisit au hasard une pièce parmi les 100, on la lance et on obtient Pile. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une pièce truquée ?

2. Dans une population, une personne sur quatre triche.
   Lorsqu'on fait tirer une carte d'un jeu de 52 cartes à un tricheur, il tire à tous les coups un as.
   (a) On demande à une personne au hasard de tirer une carte, quelle est la probabilité qu'un as soit tiré ?
   (b) Un as a été tiré. Quelle est la probabilité que j'ai eu affaire à un tricheur ?

Exercice 8 :

On définit, pour un test de dépistage d'une maladie :
- sa *sensibilité* : la probabilité qu'il soit positif si la personne est atteinte de la maladie (vrai positif).
- sa *spécificité* : la probabilité qu'il soit négatif si la personne est indemne de la maladie (vrai négatif).
- sa valeur prédictive positive (ou valeur diagnostique) : la probabilité que la personne soit réellement malade si son test est positif.
- sa valeur prédictive négative : la probabilité que la personne n'ait pas la maladie si son test est négatif.

Les deux premières sont des valeurs caractérisant un test, du point de vue du concepteur (laboratoire).
Les valeurs prédictives sont quant à elles des données intéressantes du point de vue de l'usager (patient).

Le fabricant du test fournit les caractéristiques suivantes :
- la probabilité qu'un individu malade ait un test positif est $0,98$ (sensiblité du test) ;
- la probabilité qu'un individu non malade ait un test négatif est $0,99$ (spécificité du test).

On notera par la suite les événements M :"l'individu est malade" et T :"le test est positif".

1. On utilise ce test pour dépister une maladie qui touche 30% de la population.
   (a) Dresser un arbre pondéré décrivant la situation.
   (b) Calculer la probabilité de l'événement T.
   (c) Déterminer les valeurs prédictives positive et négative du test.
2. Calculer de même les valeurs prédictives positives de ce test pour une maladie qui toucherait 1% de la population, puis 0,1% de la population.
3. On suppose maintenant que la proportion de malade est f.
   (a) Déterminer l'expression $G(f)$ de la valeur prédictive positive en fonction de f.
   (b) Etudier la fonction G et tracer l'allure de sa courbe représentative.
   (c) Quel inconvénient majeur présente, dans une population, le dépistage d'une maladie rare ? d'une maladie dont on ne connaît pas (encore) l'étendue ?

Exercice 9 :

Un joueur débute un jeu vidéo et effectue plusieurs parties successives. On admet que :
- la probabilité qu'il gagne la première partie est $0,1$;
- s'il gagne une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,8$;
- s'il perd une partie, la probabilité de gagner la suivante est égale à $0,6$.

On note, pour tout entier naturel n non nul, G_n l'événement « le joueur gagne la n-ième partie et p_n sa probabilité. On a donc en particulier $p_1 = 0,1$.

1. Montrer que $p_2 = 0,62$.
2. Le joueur a gagné la deuxième partie. Calculer la probabilité qu'il ait perdu la première.
3. Calculer la probabilité que le joueur gagne au moins une partie sur les trois premières parties.
4. Montrer que pour tout nombre entier naturel n non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{3}{5}$.
5. Conjecturer à l'aide de la calculatrice la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
6. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $p_n = \frac{3}{4} - \frac{13}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^n$.
7. En déduire la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
8. Déterminer la valeur du plus petit entier n à partir duquel on a $\frac{3}{4} - p_n < 10^{-6}$.
9. Écrire un code Python permettant de trouver cette valeur.

Exercice 10 :

On dispose d'une pièce déséquilibrée : quand on la lance, la probabilité d'obtenir Pile est p.

1. On lance cette pièce 2 fois successivement.
   (a) Représenter la situation par un arbre.

(b) Combien de façons y-a-t'il d'obtenir exactement : 0 fois Pile ? 1 fois Pile ? 2 fois Pile ?

(c) Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X égale au nombre de Pile obtenus sur 2 lancers.

2. Mêmes questions en lançant 3 fois successivement cette pièce : combien de façons y-a-t'il d'obtenir exactement 0 fois Pile, 1 fois Pile, 2 fois Pile et 3 fois Pile ? Donner la loi de probabilité correspondante.
3. Mêmes questions en lançant 4 fois successivement cette pièce.
4. Une pièce donne Pile avec une probabilité de 0,9. On la lance 10 fois de suite. Calculer la probabilité d'obtenir exactement 9 fois Pile.

Exercice 11 :

On tire au hasard successivement et avec remise trois cartes dans un jeu de 32 cartes. À chaque tirage, tirer un as est considéré comme un succès.

1. Montrer qu'il s'agit d'un schéma de Bernoulli.
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'as tirés. Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 12 :

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,15$.

1. Donner les expressions et calculer $P(X = 6)$, $P(X = 15)$, $P(X \leq 15)$, $P(X \geq 16)$ et $P(13 \leq X \leq 17)$.
2. Préciser l'espérance et l'écart type de X.
3. Déterminer le plus petit entier a tel que $P(X \leq a) \geq 0,95$.
4. Calculer les probabilités $P_{X\leq 10}(X = 9)$ et $P_{X\geq 10}(X \leq 15)$.

Exercice 13 :

Un élève répond au hasard aux 6 questions d'un QCM.
À chaque question, 4 réponses sont proposées dont une seule est exacte.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses.

1. Montrer que la loi de probabilité de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Calculer la probabilité que l'élève a d'avoir exactement 3 bonnes réponses.
3. Calculer la probabilité que l'élève a d'avoir au moins 3 bonnes réponses.
4. Calculer l'espérance mathématique de X et interpréter ce résultat.

Exercice 14 :

Dans une ville de 50 000 habitants, on a recensé 1 000 cas de grippe.
On s'intéresse au nombre d'enfants malades dans une crèche de 30 enfants.
On note X le nombre d'enfants atteints par la grippe et on modélise la loi de X par une loi binomiale.

1. Donner les paramètres de la loi binomiale suivie par X.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :

   (a) A :"Deux enfants exactements sont malades".

   (b) B :"Il y a au moins un enfant malade".

Exercice 15 :

Une étude statistique a montré qu'une mère qui possède un caractère génétique C le transmet à son enfant dans un cas sur dix. Une femme, qui possède ce caractère génétique C, souhaite fonder une famille de quatre enfants.
On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre d'enfants parmi les quatre présentant le caractère C.

1. Quelle est la loi suivie par la variable aléatoire X ?
2. Calculer la probabilité de l'événement : "Un enfant au moins présente le caractère C".
3. L'événement : "Deux enfants ou plus présentent le caractère C." est-il très improbable ?

Exercice 16 :

Dans chacun des cas suivants, la variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Donner le cas échéant les valeurs de ses paramètres.

1. On lance 5 fois successivement un dé à jouer truqué, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de 2 obtenus parmi ces lancers.
2. On lance 5 fois successivement un dé à jouer, et on note X la variable aléatoire égale au numéro du premier lancer pour lequel on obtient le chiffre 6.
3. On lance 10 fois successivement 2 dés à jouer, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où une somme de 10 est obtenue en ajoutant les chiffres des 2 dés.

4. Une branche présente 10 fleurs : 2 blanches et 8 roses. On cueille, successivement et au hasard, 3 fleurs et on note X la variable aléatoire égale au nombre de fleurs blanches cueillies.
5. On fait un sondage en interrogeant successivement 10 personnes dans un groupe de 20 personnes. On note X le nombre de personnes qui ont répondu "Oui".
6. Dans une population de 10 millions personnes, on fait un sondage en interrogeant successivement 100 personnes. On note X le nombre de personnes qui ont répondu "Oui".

Exercice 17 :

En France, il y a environ 12 % de gauchers. On considère une classe de 30 élèves, et on note X la variable aléatoire égale au nombre de gauchers dans cette classe.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Préciser ses paramètres.
2. Combien d'élèves gauchers peut-on s'attendre à trouver dans la classe ?
3. Déterminer la probabilité qu'il y ait un seul gaucher dans la classe.
4. Calculer la probabilité qu'il y ait 2 gauchers ou plus dans la classe.
5. Déterminer le plus petit entier k tel que $P(X \geq k) \geq 0,99$. Interpréter ce nombre.

Exercice 18 :

Dans une population de grand effectif, on a observé que 5% des individus sont allergiques au médicament A et 40% sont allergiques au médicament B.
Ces allergies sont détectées par des tests effectués en laboratoire et ce de façon indépendante. On examine un échantillon de n analyses choisies au hasard. On note X la variable aléatoire qui associe à n analyses le nombre d'individus allergiques à A qu'elles révèlent.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ?
2. On suppose que $n = 10$. Calculer à 10^{-2} près les probabilités de chacun des événements suivants :
   (a) aucune analyse ne révèle l'allergie à A.
   (b) au moins deux analyses révèlent l'allergie à A.
3. Un organisme tiers établit que 2% des individus sont allergiques à A et à B simultanément. Peut-on en conclure que les événements "être allergique à A" et "être allergique à B" sont indépendants ?
4. On considère la variable aléatoire Y qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,4$.
   (a) Déterminer le plus petit entier a tel que $P(Y \leq a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $P(Y \leq b) \geq 0,95$.
   (b) En déduire un intervalle I tel que $P(Y \in I) \geq 0,95$.
   (c) Dans un échantillon de 100 analyses, on a observé que 30 individus révèlent l'allergie B. Que peut-on en conclure ?

Exercice 19 :

Dans une station de ski, il existe deux types de forfait selon l'âge du skieur :
— un forfait JUNIOR pour les personnes de moins de vingt-cinq ans ;
— un forfait SÉNIOR pour les autres.
Par ailleurs, un usager peut choisir, en plus du forfait correspondant à son âge, l'option coupe-file qui permet d'écourter le temps d'attente aux remontées mécaniques.
On admet que :
— 20 % des skieurs ont un forfait JUNIOR ;
— 80 % des skieurs ont un forfait SÉNIOR ;
— parmi les skieurs ayant un forfait JUNIOR, 6 % choisissent l'option coupe-file ;
— parmi les skieurs ayant un forfait SÉNIOR, 12,5 % choisissent l'option coupe-file.
On interroge un skieur au hasard et on considère les événements :
— J : « le skieur a un forfait JUNIOR » ;
— C : « le skieur choisit l'option coupe-file ».

Les deux parties peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A :

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité $P(J \cap C)$.
3. Démontrer que la probabilité que le skieur choisisse l'option coupe-file est égale à 0,112.
4. Le skieur a choisi l'option coupe-file. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'un skieur ayant un forfait SÉNIOR ? Arrondir le résultat à 10^{-3}.
5. Est-il vrai que les personnes de moins de vingt-cinq ans représentent moins de 15 % des skieurs ayant choisi l'option coupe-file ? Expliquer.

Partie B :

On rappelle que la probabilité qu'un skieur choisisse l'option coupe-file est égale à $0,112$.

On considère un échantillon de 30 skieurs choisis au hasard.

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre des skieurs de l'échantillon ayant choisi l'option coupe-file.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   Donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité qu'au moins un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file.
   Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Calculer la probabilité qu'au plus un des 30 skieurs ait choisi l'option coupe-file.
   Arrondir le résultat à 10^{-3}.
4. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

Exercice 20 :

Les résultats seront arrondis si besoin à 10^{-4} près.

Une étude statistique réalisée dans une entreprise fournit les informations suivantes :
- 48 % des salariés sont des femmes. Parmi elles, $16,5$ % exercent une profession de cadre ;
- 52 % des salariés sont des hommes. Parmi eux, $21,5$ % exercent une profession de cadre.

On choisit une personne au hasard parmi les salariés.
On considère les événements suivants :
- F : « la personne choisie est une femme » ;
- C : « la personne choisie exerce une profession de cadre ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que la personne choisie soit une femme qui exerce une profession de cadre.
3. (a) Démontrer que la probabilité que la personne choisie exerce une profession de cadre est égale à $0,191$.
   (b) Les événements F et C sont-ils indépendants ? Justifier.
4. Calculer la probabilité de F sachant C, notée $P_C(F)$. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
5. On choisit au hasard un échantillon de 15 salariés. Le grand nombre de salariés dans l'entreprise permet d'assimiler ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de cadres au sein de l'échantillon de 15 salariés.
   On rappelle que la probabilité qu'un salarié choisi au hasard soit un cadre est égale à $0,191$.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
   (b) Calculer la probabilité que l'échantillon contienne au plus 1 cadre.
   (c) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.
6. Soit n un entier naturel.
   On considère dans cette question un échantillon de n salariés.
   Quelle doit être la valeur minimale de n pour que la probabilité qu'il y ait au moins un cadre au sein de l'échantillon soit supérieure ou égale à $0,99$?

Exercice 21 :

Chaque chaque jour où il travaille, Paul doit se rendre à la gare pour rejoindre son lieu de travail en train. Pour cela, il prend son vélo deux fois sur trois et, si il ne prend pas son vélo, il prend sa voiture.

1. lorsqu'il prend son vélo pour rejoindre la gare, Paul ne rate le train qu'une fois sur 50 alors que, lorsqu'il prend sa voiture pour rejoindre la gare Paul rate son train une fois sur 10.
   On considère une journée au hasard lors de laquelle Paul sera à la gare pour prendre le train qui le conduira au travail.
   On note :
   - V l'évènement « Paul prend son vélo pour rejoindre la gare » ;
   - R l'évènement « Paul rate son train ».

   (a) Faire un arbre pondéré résumant la situation.
   (b) Montrer que la probabilité que Paul rate son train est égale à $\frac{7}{150}$.
   (c) Paul a raté son train. Déterminer la valeur exacte de la probabilité qu'il ait pris son vélo pour rejoindre la gare.
2. On choisit au hasard un mois pendant lequel Paul s'est rendu 20 jours à la gare pour rejoindre son lieu de travail selon les modalités décrites en préambule.

On suppose que, pour chacun de ces 20 jours, le choix entre le vélo et la voiture est indépendant des choix des autres jours.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de jours où Paul prend son vélo sur ces 20 jours.

(a) Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

(b) Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo exactement 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

(c) Quelle est la probabilité que Paul prenne son vélo au moins 10 jours sur ces 20 jours pour se rendre à la gare ? On arrondira la probabilité cherchée à 10^{-3}.

(d) En moyenne, combien de jours sur une période choisie au hasard de 20 jours pour se rendre à la gare, Paul prend-il son vélo ? On arrondira la réponse à l'entier.

3. Dans le cas où Paul se rend à la gare en voiture, on note T la variable aléatoire donnant le temps de trajet nécessaire pour se rendre à la gare. La durée du trajet est donnée en minutes, arrondie à la minute. La loi de probabilité de T est donnée par le tableau ci-dessous :

k (en minutes)	10	11	12	13	14	15	16	17	18
$P(T = k)$	0,14	0,13	0,13	0,12	0,12	0,11	0,10	0,08	0,07

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire T et interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 22 :

PARTIE A :

Le système d'alarme d'une entreprise fonctionne de telle sorte que, si un danger se présente, l'alarme s'active avec une probabilité de $0,97$.
La probabilité qu'un danger se présente est de $0,01$ et la probabilité que l'alarme s'active est de 0,01465.
On note A l'évènement « l'alarme s'active » et D l'événement « un danger se présente ».
On note $\overline{M}$ l'évènement contraire d'un évènement M et $P(M)$ la probabilité de l'évènement M.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré qui sera complété au fur et à mesure de l'exercice.
2. (a) Calculer la probabilité qu'un danger se présente et que l'alarme s'active.

   (b) En déduire la probabilité qu'un danger se présente sachant que l'alarme s'active.
   Arrondir le résultat à 10^{-3}.
3. Montrer que la probabilité que l'alarme s'active sachant qu'aucun danger ne s'est présenté est $0,005$.
4. On considère qu'une alarme ne fonctionne pas normalement lorsqu'un danger se présente et qu'elle ne s'active pas ou bien lorsqu'aucun danger ne se présente et qu'elle s'active.

   Montrer que la probabilité que l'alarme ne fonctionne pas normalement est inférieure à $0,01$.

PARTIE B :

Une usine fabrique en grande quantité des systèmes d'alarme. On prélève successivement et au hasard 5 systèmes d'alarme dans la production de l'usine. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
On note S l'évènement « l'alarme ne fonctionne pas normalement » et on admet que $P(S) = 0,00525$.
On considère X la variable aléatoire qui donne le nombre de systèmes d'alarme ne fonctionnant pas normalement parmi les 5 systèmes d'alarme prélevés.
Les résultats seront arrondis à 10^{-4}.

1. Donner la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et préciser ses paramètres.
2. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, un seul système d'alarme ne fonctionne pas normalement.
3. Calculer la probabilité que, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme ne fonctionne pas normalement.

PARTIE C :

Soit n un entier naturel non nul. On prélève successivement et au hasard n systèmes d'alarme. Ce prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.
Déterminer le plus petit entier n tel que la probabilité d'avoir, dans le lot prélevé, au moins un système d'alarme qui ne fonctionne pas normalement soit supérieure à $0,07$.

Exercice 23 :

Parmi les angines, un quart nécessite la prise d'antibiotiques, les autres non.
Afin d'éviter de prescrire inutilement des antibiotiques, les médecins disposent d'un test de diagnostic ayant les caractéristiques suivantes :

- lorsque l'angine nécessite la prise d'antibiotiques, le test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque l'angine ne nécessite pas la prise d'antibiotiques, le test est négatif dans 95 % des cas.

Les probabilités demandées dans la suite de l'exercice seront arrondies à 10^{-4} près si nécessaire.

Partie 1 :

Un patient atteint d'angine et ayant subi le test est choisi au hasard.
On considère les évènements suivants :

- A : « le patient est atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques » ;
- T : « le test est positif » ;
- $\overline{A}$ et $\overline{T}$ sont respectivement les évènements contraires de A et T.

1. Calculer $P(A \cap T)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,2625$.
3. On choisit un patient ayant un test positif. Calculer la probabilité qu'il soit atteint d'une angine nécessitant la prise d'antibiotiques.
4. (a) Parmi les évènements suivants, déterminer ceux qui correspondent à un résultat erroné du test : $A \cap T$, $\overline{A} \cap T$, $A \cap \overline{T}$, $\overline{A} \cap \overline{T}$.
   (b) On définit l'évènement E : « le test fournit un résultat erroné ».
   Démontrer que $p(E) = 0,0625$.

Partie 2 :

On sélectionne au hasard un échantillon de n patients qui ont été testés.
On admet que l'on peut assimiler ce choix d'échantillon à un tirage avec remise.
On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de patients de cet échantillon ayant un test erroné.

1. On suppose que $n = 50$.
   (a) Justifier que la variable aléatoire X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$ de paramètres $n = 50$ et $p = 0,0625$.
   (b) Calculer $P(X = 7)$.
   (c) Calculer la probabilité qu'il y ait au moins un patient dans l'échantillon dont le test est erroné.
2. Quelle valeur minimale de la taille de l'échantillon faut-il choisir pour que $P(X \geq 10)$ soit supérieure à $0,95$?

IV.2 Sommes de variables aléatoires et concentration, loi des grands nombres

Exercice 1 :

On joue au jeu suivant :
- on lance un dé équilibré à 6 faces numérotées de 1 à 6 et on gagne autant de points que le chiffre obtenu
- on lance ensuite une pièce équilibrée : si on obtient pile on gagne 4 points, si c'est face on perd 8 points

1. Soit X la variable aléatoire égale au nombre total de points obtenus. Calculer $\mathbb{E}(X)$. Ce jeu est-il équitable ?
2. On multiplie par 2 tous les points obtenus, ou perdus, dans les deux étapes. Quelle est l'espérance avec cette nouvelle règle ?
3. Calculer la variance de X.

Exercice 2 :

On lance 2 dés équilibrés à 6 faces numérotées de 1 à 6. Le score obtenu est la somme des chiffres sur les 2 dés. On note X la variable aléatoire égale à ce score.
Donner la loi de probabilité de X puis son espérance et sa variance.

Exercice 3 :

On lance 5 dés équilibrés.
Si $k \in [\![1,5]\!]$, on note X_k la variable aléatoire égale au résultat du k-ième dé et X la variable aléatoire égale à la somme des résultats obtenus.
Calculer $\mathbb{E}(X_k)$ et $\mathbb{V}(X_k)$ pour tout $1 \leq k \leq 5$, et en déduire $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 4 :

On lance n fois une pièce équilibrée et on joue au jeu suivant : si on obtient pile au $k^{\text{ème}}$ lancer, on gagne k euros, sinon on ne gagne, ni ne perd, rien.
On note X_k la variable aléatoire correspondant au gain obtenu lors du $k^{\text{ème}}$ tirage et Y_n le total des gains obtenus à l'issue de n lancers.

1. Donner la loi de probabilité de X_k.
   En déduire $\mathbb{E}(X_k)$ puis montrer que $\mathbb{V}(X_k) = \dfrac{k^2}{4}$.
2. (a) Exprimer Y_n en fonction des variables aléatoires X_k.
   (b) Déterminer l'espérance de Y_n.
   (c) Déterminer le nombre théorique de lancers nécessaires pour que le gain total dépasse en moyenne 280 euros.
   (d) Montrer, par récurrence, que pour $n \geq 1$ on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   En déduire $\mathbb{V}(Y_n)$.

Exercice 5 :

Un appareil de mesure permet de réaliser des mesures avec une certaine précision. Plus précisément, les mesures données par cet appareil peuvent être modélisée par une variable aléatoire X dont l'espérance est la valeur exacte $\mathbb{E}(X) = m$ et l'écart type $\sigma(X) = 1$.
On suppose les mesures réalisées avec cet appareil indépendantes les unes des autres.

1. On réalise n mesures. Que peut-on dire de l'espérance de la moyenne de ces mesures ?
2. On sait que la probabilité de l'événement $M_n \in [m-2\sigma, m+2\sigma]$ est d'environ 95%.
   (a) Quelle est la précision de la mesure avec 10 mesures ?
   (b) Combien faut-il faire de mesures pour que la moyenne de celles-ci donne la valeur exacte avec une précision d'au moins 10^{-2} ?

Exercice 6 :

Majorer la probabilité $P(X \geq 1)$ d'une variable aléatoire X d'espérance $E(X) = 0,5$.

Exercice 7 :

Un phénomène naturel se produit, au hasard semble-t-il, en moyenne tous les 75 ans.
Majorer la probabilité qu'il se produise un tel phénomène dans au moins 300 ans ?

Exercice 8 :

Montrer que, pour une variable aléatoire positive X et un entier $k > 0$ quelconque, on a $P(X \geq k\mathbb{E}(X)) \leq \dfrac{1}{k}$.
En déduire la loi : "moins de 10% des salariés gagnent plus de fois le salaire moyen".

Exercice 9 :

La température moyenne sur une île est de 25 degrés.

1. Majorer la probabilité que la température soit supérieure à 40 degrés un jour donné.
2. Minorer la probabilité que la température soit inférieure à 30 degrés un jour donné.

Exercice 10 :

Sur mon compte j'ai en moyenne 400 euros. Ma banque ne m'autorise aucun découvert.
Minorer la probabilité que je finisse un mois avec moins de 500 euros sur mon compte.

Exercice 11 :

Soit X la variable aléatoire dont la loi de probabilité est donnée ci-dessous.

1. Calculer l'espérance et la variance de X.
2. Calculer $P(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 2)$.
3. Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et comparer avec le résultat précédent.

x_i	1	4	10
$P(X = x_i)$	0,6	0,3	0,1

Exercice 12 :

Une équipe de rugby a marqué 60 essais sur les 20 derniers matchs.
On considère que le nombre d'essais marqués à chaque match par l'équipe est une variable aléatoire X.

1. Que vaut l'espérance de X ?
   Majorer la probabilité que l'équipe marque plus de 5 essais au prochain match.
2. On a estimé, statistiquement, que la variance de X est $0,6$.
   (a) Majorer la probabilité qu'au cours du prochain match, l'écart entre le nombre d'essais marqués et la moyenne soit supérieur ou égal à 1.
   En déduire une information sur la probabilité que l'équipe marque exactement 3 essais au prochain match.
   (b) Minorer la probabilité que l'équipe marque 2, 3 ou 4 essais.

Exercice 13 :

On lance n fois un dé équilibré et on note le nombre de fois où on obtient 1.
Combien de fois, au minimum, faut-il lancer ce dé pour que la probabilité de s'écarter de la moyenne de plus de 0,1 soit inférieure à 5% ?

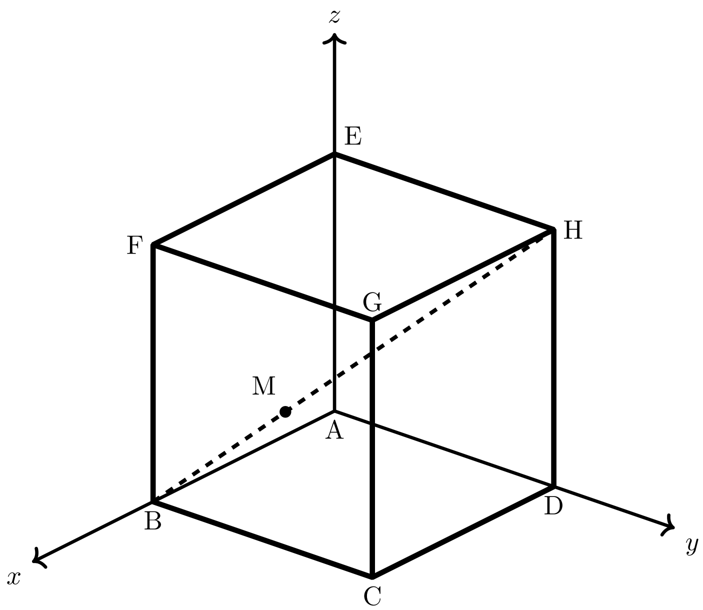
V Exercices type BAC

V.1 Algèbre et géométrie

Exercice 1 :

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur égale à 1.
On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.
2. (a) Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

   (b) On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

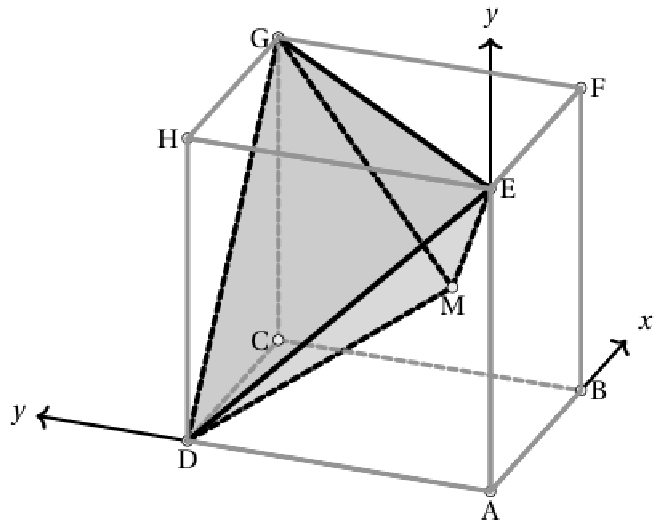
   Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\dfrac{2}{3};\dfrac{1}{3};\dfrac{1}{3}\right)$.
4. (a) Justifier que le vecteur $\vec{n}(-1;1;1)$ est normal au plan (EGD).

   (b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x+y+z-1=0$.

   (c) Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M. Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D}:\left\{\begin{array}{lcl} x &=& \frac{2}{3}-t \\ y &=& \frac{1}{3}+t \\ z &=& \frac{1}{3}+t \end{array}\right., t\in\mathbb{R}.$$

5. Le cube $ABCDEFGH$ est représenté ci-dessus selon une vue qui permet de mieux percevoir la pyramide $GEDM$, en gris sur la figure : Le but de cette



question est de calculer le volume de la pyramide $GEDM$.

   (a) Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide $GEDM$ issue du point M.

   Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\dfrac{1}{3};\dfrac{2}{3};\dfrac{2}{3}\right)$.

(b) En déduire le volume de la pyramide $GEDM$.

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'une pyramide est donné par la formule $\mathcal{V} = \frac{b \times h}{3}$ où b désigne l'aire d'une base et h la hauteur associée.

Exercice 2 :

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère :

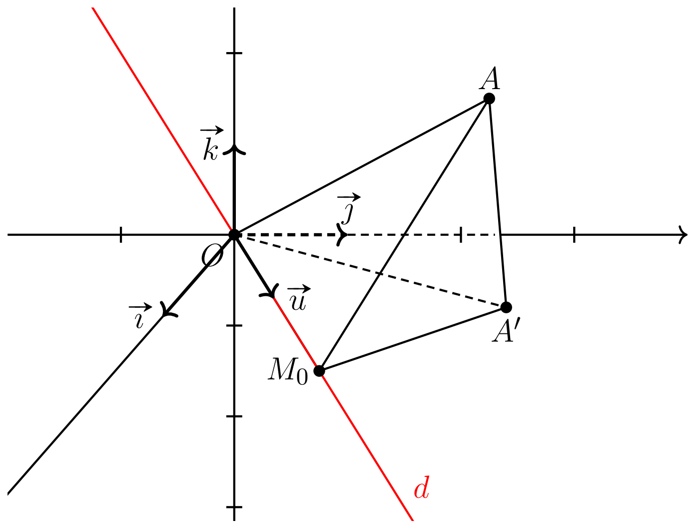
— le point A de coordonnées $(1;3;2)$;

— le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$;

— la droite d passant par l'origine O du repère et admettant pour vecteur directeur $\vec{u}$.

Le but de cet exercice est de déterminer le point de d le plus proche du point A et d'étudier quelques propriétés de ce point.

On pourra s'appuyer sur la figure ci-dessous pour raisonner au fur et à mesure des questions.



1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite d.
2. Soit t un nombre réel quelconque, et M un point de la droite d, le point M ayant pour coordonnées $(t;t;0)$.

   (a) On note AM la distance entre les points A et M. Démontrer que :

   $$AM^2 = 2t^2 - 8t + 14.$$

   (b) Démontrer que le point M_0 de coordonnées $(2;2;0)$ est le point de la droite d pour lequel la distance AM est minimale. On admettra que la distance AM est minimale lorsque son carré AM^2 est minimal.
3. Démontrer que les droites (AM_0) et d sont orthogonales.
4. On appelle A' le projeté orthogonal du point A sur le plan d'équation cartésienne $z = 0$. Le point A' admet donc pour coordonnées $(1;3;0)$.

   Démontrer que le point M_0 est le point du plan $(AA'M_0)$ le plus proche du point O, origine du repère.
5. Calculer le volume de la pyramide $OM_0A'A$.

   On rappelle que le volume d'une pyramide est donné par : $\mathcal{V} = \frac{1}{3}\mathcal{B}h$, où $\mathcal{B}$ est l'aire d'une base et h est la hauteur de la pyramide correspondant à cette base.

Exercice 3 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une questionne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Il faut justifier ces réponses.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On considère :

— la droite $\mathcal{D}$ passant par les points $A(1;1;-2)$ et $B(-1;3;2)$;

— La droite $\mathcal{D}'$ de représentation paramétrique $\begin{cases} x = -4+3t \\ y = 6-3t \\ z = 8-6t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$;

— le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + my - 2z + 7 = 0$ où m est un nombre réel.

Question 1 : Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite $\mathcal{D}'$?

(a) $M_1(-1;3;-2)$ (b) $M_2(11;-9;-22)$ (c) $M_3(-7;9;2)$ (d) $M_4(-2;3;4)$

Question 2 : Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}'$ est :

(a) $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-4\\6\\8\end{pmatrix}$ (b) $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$ (c) $\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}3\\-3\\-6\end{pmatrix}$ (d) $\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-1\\3\\2\end{pmatrix}$

Question 3 : Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont :

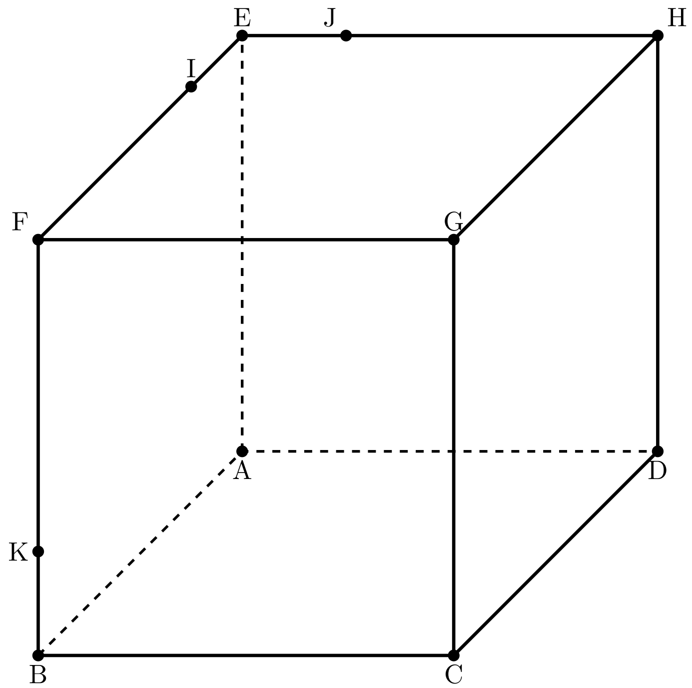
(a) sécantes (b) strictement parallèles (c) non coplanaires (d) confondues

Question 4 : La valeur du réel m pour laquelle la droite $\mathcal{D}$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ est

(a) $m=-1$ (b) $m=1$ (c) $m=5$ (d) $m=-2$

Exercice 4 :

On considère le cube $ABCDEFGH$ donné ci-dessous.



On donne trois points I, J et K vérifiant :

$$\overrightarrow{\mathrm{RI}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{EH}},\qquad \overrightarrow{\mathrm{EJ}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{EF}},\qquad \overrightarrow{\mathrm{BK}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BF}}.$$

Les points I, J et K sont représentés sur la figure donnée en annexe, à compléter et à rendre avec la copie.

On se place dans le repère orthonormé $\left(\mathrm{A};\overrightarrow{\mathrm{AB}},\overrightarrow{\mathrm{AD}},\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$.

1. Donner sans justification les coordonnées des points I, J et K.
2. Démontrer que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ est normal au plan (IJK).
3. Montrer qu'une équation cartésienne du plan (IJK) est $4x+4y+4z-5=0$.
4. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (BC).
5. En déduire les coordonnées du point L, point d'intersection de la droite (BC) avec le plan (IJK).
6. Sur la figure en annexe, placer le point L et construire l'intersection du plan (IJK) avec la face $(BCGF)$.
7. Soit $\mathrm{M}\left(\frac{1}{4};1;0\right)$. Montrer que les points I, J, L et M sont coplanaires.

Exercice 5 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1;0;2)$, $B(2;1;0)$, $C(0;1;2)$ et la droite Δ dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x &= 1+2t\\ y &= -2+t\\ z &= 4-t\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.

1. Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

   Réponse A : $M(2;1;-1)$; **Réponse B :** $N(-3;-4;6)$;

   Réponse C : $P(-3;-4;2)$; **Réponse D :** $Q(-5;-5;1)$.

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées :

Réponse A : $\begin{pmatrix}1,5\\0,5\\1\end{pmatrix}$; **Réponse B :** $\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}$;

Réponse C : $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ **Réponse D :** $\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$.

3. Une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

Réponse A : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+2t \\ y &=& t \\ z &=& 2 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$ **Réponse B :** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2-t \\ y &=& 1-t \\ z &=& 2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

Réponse C : $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 2+t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$ **Réponse D :** $\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 1+t \\ y &=& 1+t \\ z &=& 2-2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$

4. Une équation cartésienne du plan passant par le point C et orthogonal à la droite Δ est :

Réponse A : $x-2y+4z-6=0$; **Réponse B :** $2x+y-z+1=0$;

Réponse C : $2x+y-z-1=0$; **Réponse D :** $y+2z-5=0$.

5. On considère le point D défini par la relation vectorielle $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

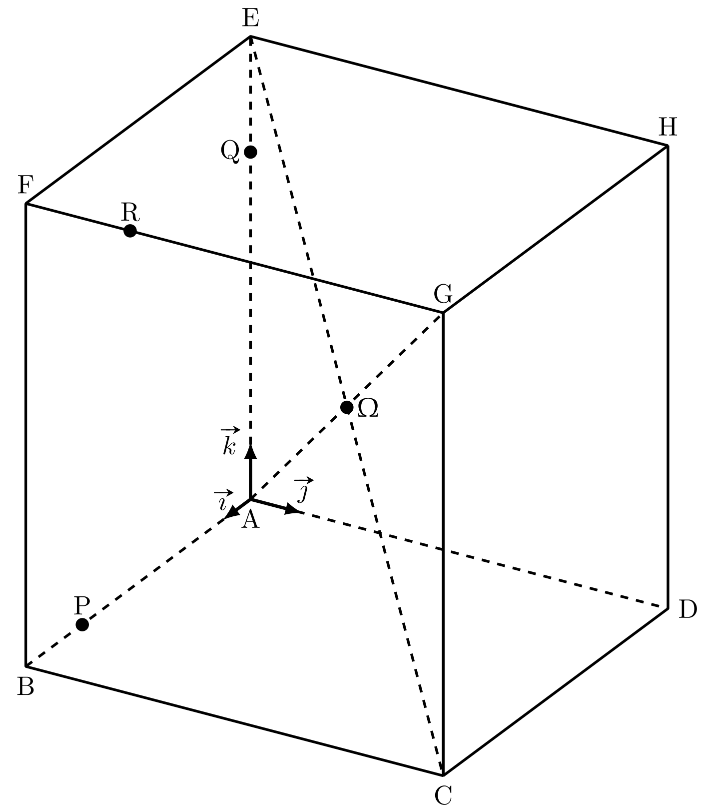
Réponse A : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires ; **Réponse B :** $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$;

Réponse C : D a pour coordonnées $(3;-1;-1)$; **Réponse D :** les points A, B, C et D sont alignés.

Exercice 6 :

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 8 cm et de centre Ω.
Les points P, Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR}=\frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.

On se place dans le repère orthonormé $\left(A;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ avec : $\vec{\imath}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$; $\vec{\jmath}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k}=\frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.



Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8;2;8)$. Donner les coordonnées des points P et Q.
2. Montrer que le vecteur $\vec{n}(1;-5;1)$ est un vecteur normal au plan (PQR).
3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x-5y+z-6=0$.

Partie II

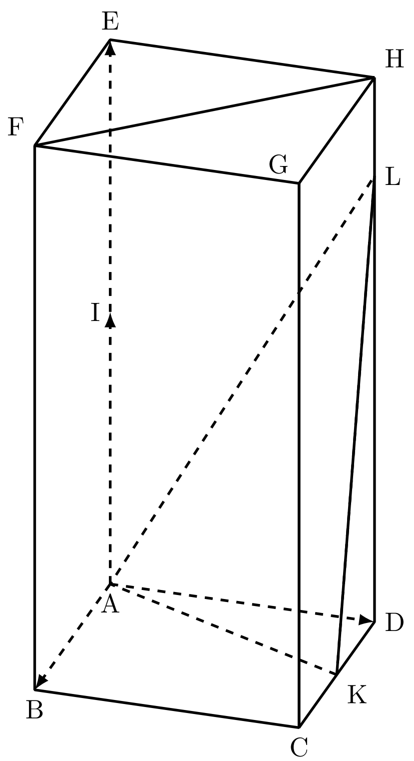
On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR).

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4;4;4)$.

2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω.
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3}; \frac{2}{3}; \frac{14}{3}\right)$
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR).

Exercice 7 :

On considère un pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = AD = 1$ et $AE = 2$, représenté ci- dessous.
Le point I est le milieu du segment $[AE]$. Le point K est le milieu du segment $[DC]$.
Le point L est défini par : $\overrightarrow{DL} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AI}$. Le point N est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).



On se place dans le repère orthonormé $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}\right)$.

On admet que le point L a pour coordonnées $\left(0; 1; \frac{3}{2}\right)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AL}$.
2. (a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(6; -3; 2)$ est un vecteur normal au plan (AKL).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (AKL).
   (c) Déterminer un système d'équations paramétriques de la droite Δ passant par D et perpendiculaire au plan (AKL).
   (d) En déduire que le point N de coordonnées $\left(\frac{18}{49}; \frac{40}{49}; \frac{6}{49}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (AKL).

On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times (\text{aire de la base}) \times \text{hauteur}.$$

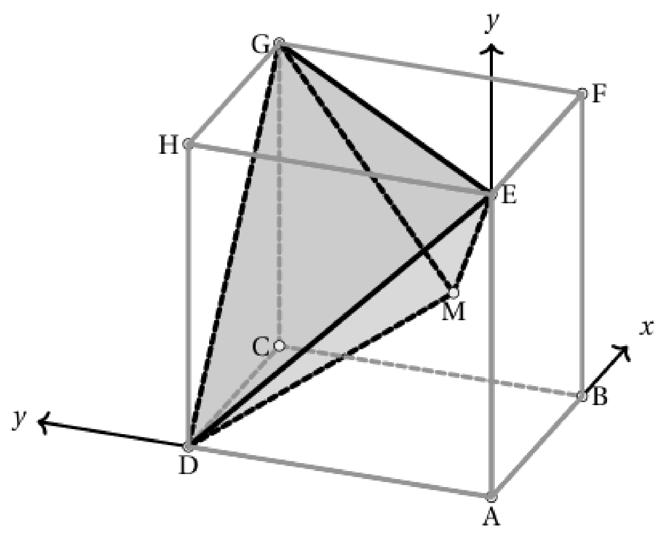
3. (a) Calculer le volume du tétraèdre $ADKL$ en utilisant le triangle ADK comme base.
   (b) Calculer la distance du point D au plan (AKL).
   (c) Déduire des questions précédentes l'aire du triangle AKL.

Exercice 8 :

$ABCDEFGH$ est un cube. I est le centre de la face $ADHE$ et J est un point du segment $[CG]$.
Il existe donc $a \in [0; 1]$ tel que $\overrightarrow{CJ} = a\overrightarrow{CG}$.
On note (d) la droite passant par I et parallèle à (FJ).
On note K et L les points d'intersection de la droite (d) et des droites (AE) et (DH).
On se place dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Partie A : Dans cette partie $a = \frac{2}{3}$

1. Donner les coordonnées des points F, I et J.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).



3. (a) Montrer que le point de coordonnées $\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$ est le point K.
   (b) Déterminer les coordonnées du point L, intersection des droites (d) et (DH).
4. (a) Démontrer que le quadrilatère $FJLK$ est un parallélogramme.
   (b) Démontrer que le quadrilatère $FJLK$ est un losange.
   (c) Le quadrilatère $FJLK$ est-il un carré ?

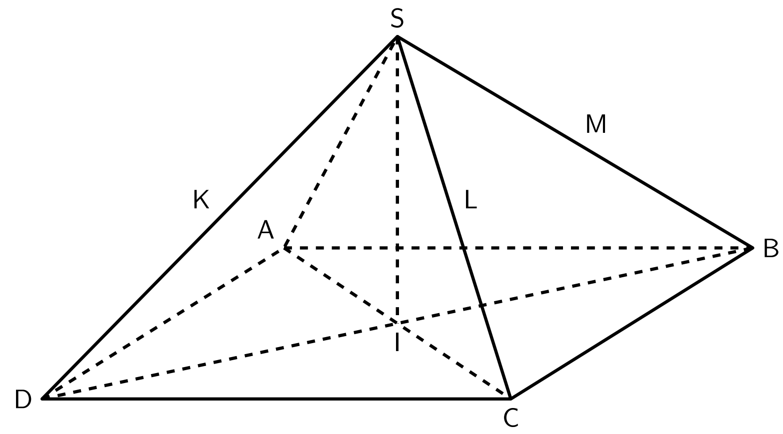
<u>Partie B :</u> Cas général

On admet que les coordonnées des points K et L sont : $K\left(0;0;1-\frac{a}{2}\right)$ et $L\left(0;1;\frac{a}{2}\right)$.
On rappelle que $a \in [0;1]$.

1. Déterminer les coordonnées de J en fonction de a.
2. Montrer que le quadrilatère $FJLK$ est un parallélogramme.
3. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère $FJLK$soit un losange ? Justifier.
4. Existe-t-il des valeurs de a telles que le quadrilatère $FJLK$ soit un carré ? Justifier.

Exercice 9 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.



$SABCD$ est une pyramide régulière à base carrée $ABCD$ dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré $ABCD$. On suppose que : $IC = IB = IS = 1$.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes $[SD]$, $[SC]$ et $[SB]$.

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

(a) (DK) et (SD)	(b) (AS) et (IC)	(c) (AC) et (SB)	(d) (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(I;\overrightarrow{IC},\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IS}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$I(0;0;0)$; $A(-1;0;0)$; $B(0;1;0)$; $C(1;0;0)$; $D(0;-1;0)$; $S(0;0;1)$.

2. Les coordonnées du milieu N de $[KL]$ sont :

(a) $\left(\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$	(b) $\left(\frac{1}{4};-\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$	(c) $\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{1}{2}\right)$	(d) $\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2};1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :
(a) $(1;1;0)$ (b) $(1;0;1)$ (c) $(2;1;-1)$ (d) $(1;1;1)$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :
(a) $\begin{cases} x &= -1-t \\ y &= t \\ z &= -t \end{cases}$ (b) $\begin{cases} x &= -1+2t \\ y &= 0 \\ z &= 1+2t \end{cases}$ (c) $\begin{cases} x &= t \\ y &= 0 \\ z &= 1+t \end{cases}$ (d) $\begin{cases} x &= -1-t \\ y &= 1+t \\ z &= 1-t \end{cases}$

5. Une équation cartésienne du plan (SCB) est :
(a) $y+z-1=0$ (b) $x+y+z-1=0$ (c) $x-y+z=0$ (d) $x+z-1=0$

Exercice 10 :

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :
$A(2;-1;0)$; $B(3;-1;2)$; $C(0;4;1)$ et $S(0;1;4)$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC).
   (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).
   (c) Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S. Elle coupe le plan (ABC) en H.
   (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).
   (b) Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2;2;3)$.
4. On rappelle que le volume $\mathcal{V}$ d'un tétraèdre est $\mathcal{V} = \dfrac{\text{Aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
   Calculer le volume du tétraèdre $SABC$
5. (a) Calculer la longueur SA.
   (b) On indique que $SB=\sqrt{17}$.
   En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

V.2 Analyse

Exercice 1 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=10000$ et pour tout entier naturel n :

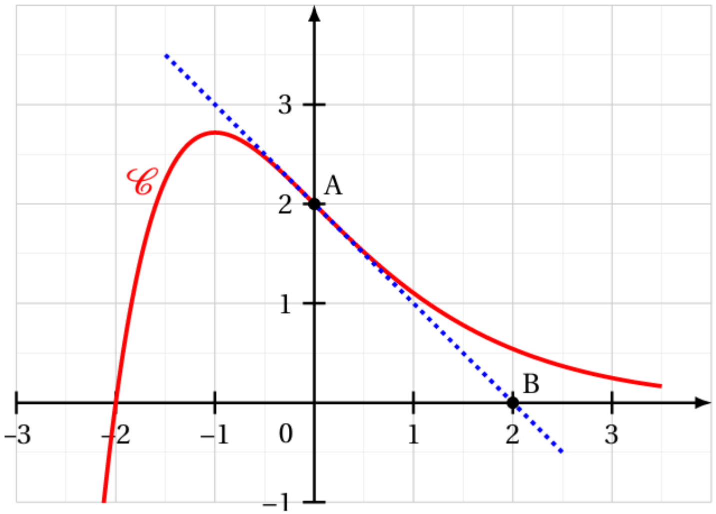
$$u_{n+1}=0,95u_n+200.$$

1. Calculer u_1 et vérifier que $u_2=9415$.
2. (a) Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier n :
   $$u_n<4000.$$
   (b) On admet que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Justifier qu'elle converge.
3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n=u_n-4000$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison égale à $0,95$.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n :
   $$u_n=4000+6000\times 0,95^n.$$
   (d) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Justifier la réponse.
4. En 2020, une espèce animale comptait 10000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.
   Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.
   Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».
   Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse.

Exercice 2 :

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:
On considère les points $A(0;2)$ et $B(2;0)$.



Partie 1

Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, donner par lecture graphique :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
2. Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle

$$y' = -y + \mathrm{e}^{-x}.$$

On admet que $g : x \mapsto x\mathrm{e}^{-x}$ est une solution particulière de (E).

1. Donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(H) : y' = -y$.
2. En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
3. Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie $f(0) = 2$, déterminer une expression de $f(x)$ en fonction de x.

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
   On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.
   On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.
2. On rappelle que f'' désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f.
   (a) Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$.
   (b) Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0;+\infty[$?

Exercice 3 :

Certains résultats de la première partie seront utilisés dans la deuxième.

Partie 1 : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1;4]$ par :

$$f(x) = -30x + 50 + 35\ln(x).$$

1. On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
   (a) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1;4]$, montrer que :
   $$f'(x) = \frac{35-30x}{x}.$$
   (b) Dresser le tableau de signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1;4]$.
   (c) En déduire les variations de f sur ce même intervalle.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, sur l'intervalle $[1;4]$ puis donner une valeur approchée de α à 10^{-3} près.
3. Dresser le tableau de signe de $f(x)$ pour $x \in [1;4]$.

Partie 2 : Optimisation

Une entreprise vend du jus de fruits. Pour x milliers de litres vendus, avec x nombre réel de l'intervalle $[1;4]$, l'analyse des ventes conduit à modéliser le bénéfice $B(x)$ par l'expression donnée en milliers d'euros par :

$$B(x) = -15x^2 + 15x + 35x\ln(x).$$

1. D'après le modèle, calculer le bénéfice réalisé par l'entreprise lorsqu'elle vend 2500 litres de jus de fruits.
   On donnera une valeur approchée à l'euro près de ce bénéfice.
2. Pour tout x de l'intervalle $[1;4]$, montrer que $B'(x) = f(x)$ où B' désigne la fonction dérivée de B.
3. (a) À l'aide des résultats de la **partie 1**, donner les variations de la fonction B sur l'intervalle $[1;4]$.
   (b) En déduire la quantité de jus de fruits, au litre près, que l'entreprise doit vendre afin de réaliser un bénéfice maximal.

Exercice 4 :

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.
Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 600 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n\big(1-0,15u_n\big) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $f(x) = 0,75x(1-0,15x)$.

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0;1]$ et dresser son tableau de variations.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0;1]$ l'équation $f(x) = x$.
4. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.
   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   (c) Déterminer la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.
   (a) Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.
   (b) Le biologiste a programmé en langage Python la fonction `menace()` ci-dessous :

```python
def menace():
        u = 0.6
        n = 0
        while u > 0.02 :
                u = 0.75*u*(1-0.15*u)
                n = n+1
        return n
```

   Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction `menace()`.
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 5 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une questionne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Il faut justifier ces réponses.

Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{x}.$$

On donne l'expression de la dérivée seconde f'' de f, définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f''(x) = \frac{2e^{2x}(2x^2-2x+1)}{x^3}.$$

1. La fonction f', dérivée de f, est définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

   (a) $f'(x) = 2e^{2x}$ (b) $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(x-1)}{x^2}$

   (c) $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(2x-1)}{x^2}$ (d) $f'(x) = \dfrac{e^{2x}(1+2x)}{x^2}$

2. La fonction f :
   (a) est décroissante sur $]0;+\infty[$ (b) est monotone sur $]0;+\infty[$
   (c) admet un minimum en $\frac{1}{2}$ (d) admet un maximum en $\frac{1}{2}$
3. La fonction f admet pour limite en $+\infty$:
   (a) $+\infty$ (b) 0
   (c) 1 (d) e^{2x}
4. La fonction f est
   (a) est concave sur $]0;+\infty[$ (b) est convexe sur $]0;+\infty[$
   (c) est concave sur $\left]0;\frac{1}{2}\right[$ (d) est représentée par une courbe admettant un point d'inflexion

Exercice 6 :

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés.
Elle sort les gâteaux du congélateur à -19°C et les apporte sur la terrasse où la température ambiante est de 15°C.
Au bout de 10 minutes, la température des gâteaux est de $1,3$°C.

I – Premier modèle

On suppose pue la vitesse de décongélation est constante, c'est-à-dire que l'augmentation de la température des gâteaux est la même minute après minute.

Selon ce modèle, déterminer quelle serait la température des gâteaux 25 minutes après leur sortie du congélateur.

Ce modèle semble-t-il pertinent ?

II – Second modèle

On note T_n la température des gâteaux, en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ T_{n+1} - T_n = -0,06 \times (T_n - 25)$$

1. Justifier pue,pour tout entier naturel n, on a : $T_{n+1} = 0,94T_n + 1,5$.
2. Calculer T_1 et T_2. On donnera des valeurs arrondies au dixième.
3. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n < 25$.
   En revenant à fa situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?
4. Étudier le sens de variation de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Démontrer que la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
6. On pose, pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.
   (a) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = 14 \times 0,94^n + 25$.
   (c) En déduire la limite de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
7. (a) Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur. Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
   (b) Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10°C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.
   (c) Le programme suivant, écrit en langage Python, doit renvoyer après son exécution le plus petite valeur de l'entier n pour laquelle $T_n \geqslant 10$.

```
def seuil() :
        n = 0
        T = ......
        while T....... :
                T = ......
                n = n+1
        return n
```

Recopier ce programme sur la copie et compléter les lignes incomplètes afin que le programme renvoie la valeur attendue.

Exercice 7 :

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = y + 2xe^x$.

On cherche l'ensemble des fonctions définies et dérivables sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels qui sont solutions de cette équation.

1. Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 e^x$. On admet que u est dérivable et on note u' sa fonction dérivée. Démontrer que u est une solution particulière de (E).
2. Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$g(x) = f(x) - u(x).$$
   (a) Démontrer que si la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) alors la fonction g est solution de l'équation différentielle : $y' = y$.
   On admet que la réciproque de cette propriété est également vraie.
   (b) À l'aide de la résolution de l'équation différentielle $y' = y$, résoudre l'équation différentielle (E).
3. **Étude de la fonction** u
   (a) Étudier le signe de $u'(x)$ pour x variant dans $\mathbb{R}$.
   (b) Dresser le tableau de variations de la fonction u sur $\mathbb{R}$ (les limites ne sont pas demandées).
   (c) Déterminer le plus grand intervalle sur lequel la fonction u est concave.

Exercice 8 :

Dans cet exercice, les résultats des probabilités demandées seront, si nécessaire, arrondis au millième.
La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus.
Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie.
On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire.
Ce test possède les caractéristiques suivantes :
- lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas ;
- lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :
- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

1. (a) Traduire la situation par un arbre pondéré.
   (b) Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.
   (c) Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.
   (d) On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.
2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise.
   On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.
   (a) Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X.
   (b) Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.
   (c) Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.
   (d) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.
   (a) Montrer que $p_n = 1 - 0,55^n$.
   (b) Décrire le rôle du programme ci-contre écrit en langage Python, dans lequel la variable `n` est un entier naturel et la variable `P` un nombre réel.

```
def seuil() :
        n = 0
        P = 0
        while P < 0.99 :
                n = n+1
                P = 1-0.55**n
        return n
```

   (c) Déterminer, en précisant la méthode employée, la valeur renvoyée par ce programme.

Exercice 9 :

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$définie par : $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{4u_n}{u_n + 4}.$$

1. La copie d'écran ci-dessous présente les valeurs, calculées à l'aide d'un tableur, des termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour n variant de 0 à 12, ainsi que celles du quotient $\frac{4}{u_n}$ (avec, pour les valeurs de u_n, affichage de deux chiffres pour les parties décimales).

	A	B	C
1	n	u_n	$4/u_n$
2	0	1,00	4
3	1	0,80	5
4	2	0,67	6
5	3	0,57	7
6	4	0,50	8
7	5	0,44	9
8	6	0,40	10
9	7	0,36	11
10	8	0,33	12
11	9	0,29	13
12	10	0,27	14
13	11	0,27	15
14	12	0,25	16

   À l'aide de ces valeurs, conjecturer l'expression de $\frac{4}{u_n}$ en fonction de n.

   Le but de cet exercice est de démontrer cette conjecture (question 5.), et d'en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (question 6.).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n > 0$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
4. Que peut-on conclure des questions 2. et 3. concernant la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
5. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{4}{u_n}$.
   Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique. Préciser sa raison et son premier terme.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
   En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 :

Partie I

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x^2}.$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0;+\infty[$ et on note h' sa fonction dérivée.

1. Déterminez les limites de h en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, $h'(x) = \dfrac{1-2\ln(x)}{x^3}$.
3. En déduire les variations de la fonction h sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
4. Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique α appartenant à $]0;+\infty[$ et vérifier que : $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.
5. Déterminer le signe de $h(x)$ pour x appartenant à $]0;+\infty[$.

Partie II

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$g_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x^2} \quad \text{et } f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

On note $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ les représentations graphiques respectives de f_1 et f_2 dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x appartenant à $]0;+\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

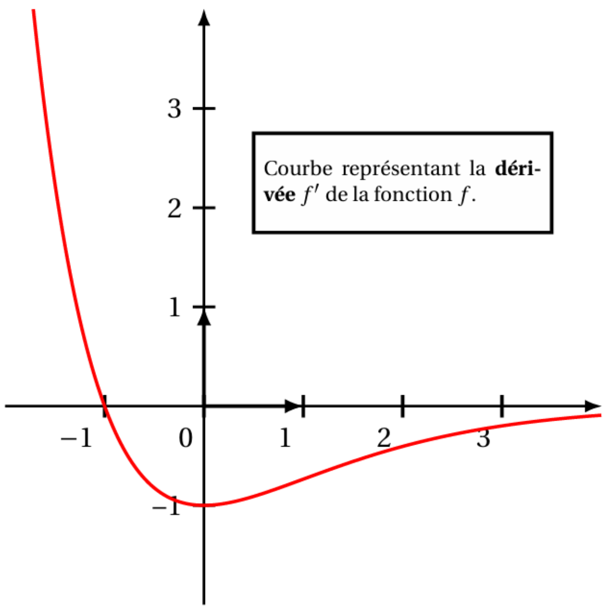
2. Déduire des résultats de la **Partie I** la position relative des courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.
   On justifiera que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\alpha;\alpha)$.
   On rappelle que α est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

Exercice 11 :

Partie I

On donne ci-dessous, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la **fonction dérivée** f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.
À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Partie II

On admet que la fonction f mentionnée dans la **Partie I** est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. Montrer que, pour tout nombre réel x,
$$f(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} + 2\mathrm{e}^{-x}.$$
En déduire la limite de f en $+\infty$.
Justifier que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote que l'on précisera.
On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.
2. (a) Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
   (b) Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.
   (c) Montrer que l'équation$f(x) = 2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-2; 1]$ dont on donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.
3. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f. Que représente pour la courbe $\mathcal{C}$ son point A d'abscisse 0 ?

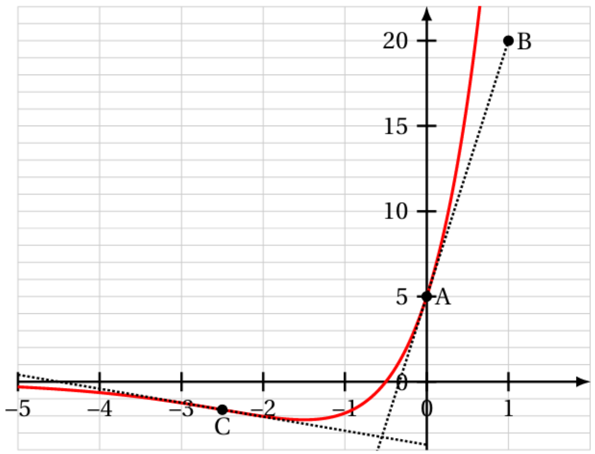
Exercice 12 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On notera f' la fonction dérivée de f.
On donne les points A de coordonnées $(0; 5)$ et B de coordonnées $(1; 20)$. Le point C est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ ayant pour abscisse $-2,5$.
La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.

Les questions 1. à 3. se rapportent à cette même fonction f.

1. On peut affirmer que :
   (a) $f'(-0,5) = 0$



(b) si $x \in]-\infty;-0,5[$, alors $f'(x) < 0$

(c) $f'(0) = 15$

(d) la fonction dérivée f' ne change pas de signe sur $\mathbb{R}$.

2. On admet que la fonction f représentée ci-dessus est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^x$, où a et b sont deux nombres réels et que sa courbe coupe l'axe des abscisses en son point de coordonnées $(-0,5;0)$.

   On peut affirmer que :

(a) $a = 10$ et $b = 5$

(b) $a = 2,5$ et $b = -0,5$

(c) $a = -1,5$ et $b = 5$

(d) $a = 0$ et $b = 5$

3. On admet que la dérivée seconde de la fonction f est définie sur $]-\infty;-0,5[$ par :

$$f''(x) = (10x+25)\mathrm{e}^x.$$

   On peut affirmer que :

(a) La fonction f est convexe sur $\mathbb{R}$

(b) La fonction f est concave sur $\mathbb{R}$

(c) Le point C est l'unique point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$

(d) $\mathcal{C}_f$ n'admet pas de point d'inflexion

4. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$ telles que :
   — pour tout entier naturel n, $U_n \leqslant V_n$;
   — $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = 2$.

   On peut affirmer que :

(a) la suite (U_n) converge

(b) pour tout entier naturel n, $V_n \leqslant 2$

(c) la suite (U_n) diverge

(d) la suite (U_n) est majorée

Exercice 13 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$ par :

$$f(x) = \frac{4x}{1+3x}$$

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Calculer u_1 .
2. On admet que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left]-\dfrac{1}{3};+\infty\right[$.

   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $\dfrac{1}{2} \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 2$.

   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   (c) On appelle ℓ la limite de la suite (u_n). Déterminer la valeur de ℓ.
3. (a) Recopier et compléter la fonction Python ci-dessous qui, pour tout réel positif E, détermine la plus petite valeur P tel que : $1 - u_P < E$.

```
def seuil(E) :
        u = 0.5
        n = 0
        while .............
                u = ...........
                n = n+1
        return n
```

(b) Donner la valeur renvoyée par ce programme dans le cas où $E = 10^{-4}$.

4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par :

$$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$$

(a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison 4.
En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.

(b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{v_n}{v_n+1}$.

(c) Montrer alors que, pour tout entier naturel n , on a :

$$u_n = \frac{1}{1+0,25^n}.$$

Retrouver par le calcul la limite de la suite (u_n).

Exercice 14 :

Dans le parc national des Pyrénées, un chercheur travaille sur le déclin d'une espèce protégée dans les lacs de haute-montagne : le « crapaud accoucheur ».
Les parties **I** et **II** peuvent être abordées de façon indépendante.

Partie I : Effet de l'introduction d'une nouvelle espèce.

Dans certains lacs des Pyrénées, des truites ont été introduites par l'homme afin de permettre des activités de pêche en montagne. Le chercheur a étudié l'impact de cette introduction sur la population de crapauds accoucheurs d'un lac.
Ses études précédentes l'amènent à modéliser l'évolution de cette population en fonction du temps par la fonction f suivante :

$$f(t) = \left(0,04t^2 - 8t + 400\right) \mathrm{e}^{\frac{t}{50}} + 40 \text{ pour } t \in [0;120].$$

La variable t représente le temps écoulé, en jour, à partir de l'introduction à l'instant $t = 0$ des truites dans le lac, et $f(t)$ modélise le nombre de crapauds à l'instant t.

1. Déterminer le nombre de crapauds présents dans le lac lors de l'introduction des truites.

2. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0;120]$ et on note f' sa fonction dérivée.
Montrer, en faisant apparaitre les étapes du calcul, que pour tout nombre réel t appartenant à l'intervalle $[0;120]$ on a :

$$f'(t) = t(t-100)\mathrm{e}^{\frac{t}{50}} \times 8 \times 10^{-4}.$$

3. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;120]$, puis dresser le tableau de variations de f sur cet intervalle (on donnera des valeurs approchées au centième).

4. Selon cette modélisation :

(a) Déterminer le nombre de jours J nécessaires afin que le nombre de crapauds atteigne son minimum. Quel est ce nombre minimum ?

(b) Justifier que, après avoir atteint son minimum, le nombre de crapauds dépassera un jour 140 individus.

(c) À l'aide de la calculatrice, déterminer la durée en jour à partir de laquelle le nombre de crapauds dépassera 140 individus ?

Partie II : Effet de la Chytridiomycose sur une population de têtards

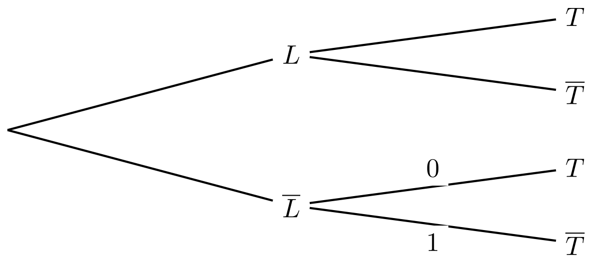
Une des principales causes du déclin de cette espèce de crapaud en haute montagne est une maladie, la « Chytridiomycose », provoquée par un champignon.
Le chercheur considère que :

— Les trois quarts des lacs de montagne des Pyrénées ne sont pas infectés par le champignon, c'est-à- dire qu'ils ne contiennent aucun têtard (larve du crapaud) contaminé.

— Dans les lacs restants, la probabilité qu'un têtard soit contaminé est de $0,74$.

Le chercheur choisit au hasard un lac des Pyrénées, et y procède à des prélèvements.
Pour la suite de l'exercice, les résultats seront arrondis au millième lorsque cela est nécessaire.
Le chercheur prélève au hasard un têtard du lac choisi afin d'effectuer un test avant de le relâcher.
On notera T l'évènement « Le têtard est contaminé par la maladie » et L l'évènement « Le lac est infecté par le champignon ».
On notera $\overline{L}$ l'évènement contraire de L et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.

1. Recopier et compléter l'arbre de probabilité suivant en utilisant les données de l'énoncé :



2. Montrer que la probabilité $P(T)$ que le têtard prélevé soit contaminé est de $0,185$.
3. Le têtard n'est pas contaminé. Quelle est la probabilité que le lac soit infecté ?

Exercice 15 :

Partie I

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en 0.
2. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
3. On note h' la fonction dérivée de h. Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, on a :
$$h'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}.$$
4. Dresser le tableau de variations de la fonction h sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
5. Démontrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.
Justifier que l'on a : $0,5 < \alpha < 0,6$.

Partie II

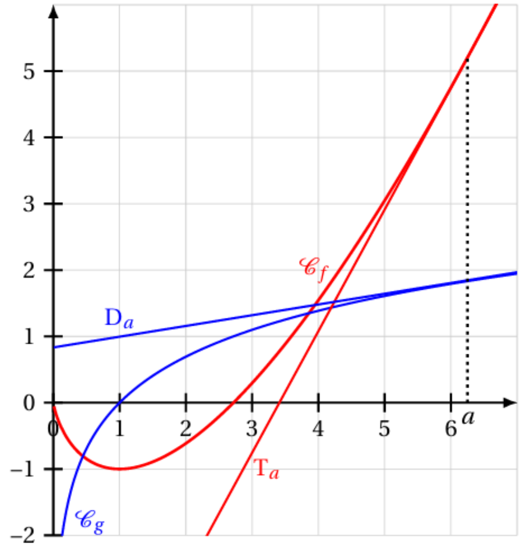
Dans cette partie, on considère les fonctions f et g définies sur $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x \text{ et } g(x) = \ln(x).$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentant respectivement les fonctions f et g dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
Pour tout nombre réel a strictement positif, on appelle :

— T_a la tangente à $\mathcal{C}_f$ en son point d'abscisse a ;
— D_a la tangente à $\mathcal{C}_g$ en son point d'abscisse a.

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ainsi que deux tangentes T_a et D_a sont représentées ci-dessous.



On recherche d'éventuelles valeurs de a pour lesquelles les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.
Soit a un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;+\infty[$.

1. Justifier que la droite D_a a pour coefficient directeur $\dfrac{1}{a}$.
2. Justifier que la droite T_a a pour coefficient directeur $\ln(a)$.
On rappelle que dans un repère orthonormé, deux droites de coefficients directeurs respectifs m et m'sont perpendiculaires si et seulement si $mm' = -1$.
3. Démontrer qu'il existe une unique valeur de a, que l'on identifiera, pour laquelle les droites T_a et D_a sont perpendiculaires.

Exercice 16 :

Partie I

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \mathrm{e}^{-2x}.$$

On appelle Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer les limites de la fonction f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variation.
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$, dont on donnera une valeur approchée à 10^{-2} près.
4. Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Partie II

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on appelle $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

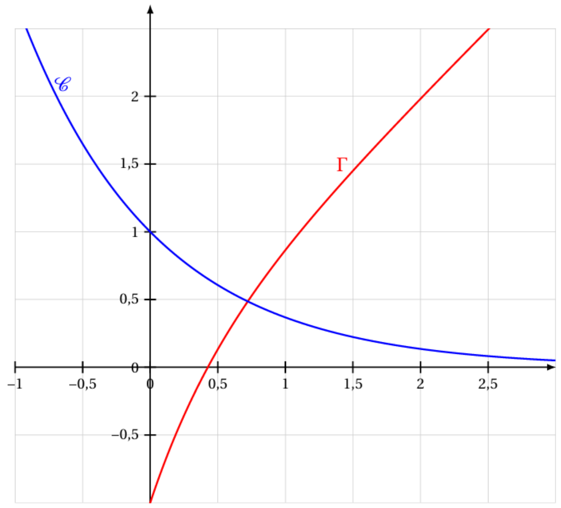
$$g(x) = \mathrm{e}^{-x}.$$

La courbes $\mathcal{C}$ et la courbe Γ (qui représente la fonction f de la **Partie I**) sont tracées sur le **graphique donné en annexe qui est à compléter et à rendre avec la copie.**

Le but de cette partie est de déterminer le point de la courbe $\mathcal{C}$ le plus proche de l'origine O du repère et d'étudier la tangente à $\mathcal{C}$ en ce point.

1. Pour tout nombre réel t, on note M le point de coordonnées $\left(t;\mathrm{e}^{-t}\right)$ de la courbe $\mathcal{C}$.
   On considère la fonction h qui, au nombre réel t, associe la distance OM.
   On a donc : $h(t) = \mathrm{O}M$, c'est-à-dire :
   $$h(t) = \sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}$$
   (a) Montrer que, pour tout nombre réel t,
   $$h'(t) = \frac{f(t)}{\sqrt{t^2 + \mathrm{e}^{-2t}}}$$
   où f désigne la fonction étudiée dans la **Partie I**.
   (b) Démontrer que le point A de coordonnées $\left(\alpha;\mathrm{e}^{-\alpha}\right)$ est le point de la courbe $\mathcal{C}$ pour lequel la longueur OM est minimale.
   Placer ce point sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie**.
2. On appelle T la tangente en A à la courbe $\mathcal{C}$.
   (a) Exprimer en fonction de α le coefficient directeur de la tangente T.
   On rappelle que le coefficient directeur de la droite (OA) est égal à $\dfrac{\mathrm{e}^{-\alpha}}{\alpha}$.
   On rappelle également le résultat suivant qui pourra être utilisé sans démonstration :
   Dans un repère orthonormé du plan, deux droites D et D' de coefficients directeurs respectifs m et m' sont perpendiculaires si, et seulement si le produit mm' est égal à -1.
   (b) Démontrer que la droite (OA) et la tangente T sont perpendiculaires.
   Tracer ces droites sur le **graphique donné en annexe, à rendre avec la copie.**

Annexe fournie



Exercice 17 :

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 16 \quad ; \quad v_0 = 5;$$

et pour tout entier naturel n :

$$\begin{cases} u_{n+1} & = & \dfrac{3u_n + 2v_n}{5} \\ v_{n+1} & = & \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et v_1.
2. On considère la suite (w_n) définie pour tout entier naturel n par : $w_n = u_n - v_n$.
   (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique de raison $0,1$.
   En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de w_n en fonction de n.
   (b) Préciser le signe de la suite (w_n) et la limite de cette suite.
3. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = -0,4w_n$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est décroissante. On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est croissante.
   On admet ce résultat, et on remarque qu'on a alors : pour tout entier naturel n, $v_n \geqslant v_0 = 5$.
   (c) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant 5$.
   En déduire que la suite (u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de (u_n).

On peut démontrer de la même manière que la suite (v_n) est convergente. On admet ce résultat, et on appelle ℓ' la limite de (v_n).

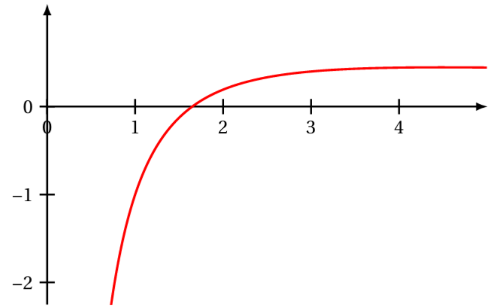
4. (a) Démontrer que $\ell = \ell'$.
   (b) On considère la suite (c_n) définie pour tout entier naturel n par : $c_n = 5u_n + 4v_n$.
   Démontrer que la suite (c_n) est constante, c'est-à-dire que pour tout entier naturel n, on a : $c_{n+1} = c_n$.
   En déduire que, pour tout entier naturel n, $c_n = 100$.
   (c) Déterminer la valeur commune des limites ℓ et ℓ'.

Exercice 18 :

Partie 1

Le graphique ci-dessous donne la représentation graphique dans un repère orthonormé de la fonction f définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{2\ln(x) - 1}{x}.$$



1. Déterminer par le calcul l'unique solution α de l'équation $f(x) = 0$.
   On donnera la valeur exacte de α ainsi que la valeur arrondie au centième.
2. Préciser, par lecture graphique, le signe de $f(x)$ lorsque x varie dans l'intervalle $]0;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$g(x) = [\ln(x)]^2 - \ln(x).$$

1. (a) Déterminer la limite de la fonction g en 0.
   (b) Déterminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
2. On note g' la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   Démontrer que, pour tout nombre réel x de $]0;+\infty[$, on a : $g'(x) = f(x)$, où f désigne la fonction définie dans la **partie I**.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction g sur l'intervalle $]0;+\infty[$.
   On fera figurer dans ce tableau les limites de la fonction g en 0 et en $+\infty$, ainsi que la valeur du minimum de g sur $]0;+\infty[$.

4. Démontrer que, pour tout nombre réel $m > -0,25$, l'équation $g(x) = m$ admet exactement deux solutions.
5. Déterminer par le calcul les deux solutions de l'équation $g(x) = 0$.

Exercice 19 :

En 2020, une influenceuse sur les réseaux sociaux compte 1000 abonnés à son profil. On modélise le nombre d'abonnés ainsi : chaque année, elle perd 10 %de ses abonnés auxquels s'ajoutent 250 nouveaux abonnés.
Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre d'abonnés à son profil en l'année $(2020+n)$, suivant cette modélisation. Ainsi $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n,, $u_{n+1} = 0,9u_n + 250$.
3. La fonction Python nommée « suite » est définie ci-dessous. Dans le contexte de l'exercice, interpréter la valeur renvoyée par `suite(10)`.

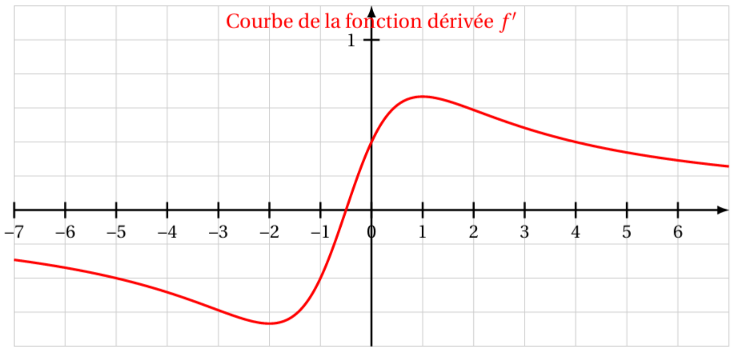
```
def suite(n) :
        u = 1000
        for i in range(n) :
                u = 0,9*u + 250
        return u
```

4. (a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 2500$.
   (b) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (c) Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergente.
5. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 2500$ pour tout entier naturel n.
   (a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,9 et de terme initial $v_0 = -1500$.
   (b) Pour tout entier naturel n, exprimer v_n en fonction de n et montrer que :
   $$u_n = -1500 \times 0,9^n + 2500.$$
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n) et interpréter dans le contexte de l'exercice.
6. Écrire un programme qui permet de déterminer en quelle année le nombre d'abonnés dépassera 2200.
   Déterminer cette année.

Exercice 20 :

Partie I : lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f'.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes

1. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en O.
2. (a) Donner les variations de la fonction dérivée f'.
   (b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie II : étude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right).$$

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire le tableau des variations de f. On veillera à placer les limites dans ce tableau.
4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

(b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

5. La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$. On admet que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = \dfrac{-2x^2-2x+4}{\left(x^2+x+\dfrac{5}{2}\right)^2}$.
   Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f.

Exercice 21 :

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0,4y + 0,4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.

1. (a) Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
   (c) Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie $g(0) = 10$.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1+9\mathrm{e}^{-0,4t}}.$$

1. Déterminer la limite de p en $+\infty$.
2. Montrer que $p'(t) = \dfrac{3,6\mathrm{e}^{-0,4t}}{(1+9\mathrm{e}^{-0,4t})^2}$ pour tout $t \in [0;+\infty[$.
3. (a) Montrer que l'équation $p(t) = \dfrac{1}{2}$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.
   (b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

1. p désigne la fonction de la partie II.
   Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0,4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0) = \dfrac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur $[0;+\infty[$.
2. Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet.
   Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet.
   On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
   La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par $p(t)$.
   Interpréter dans ce contexte la limite de la question **II.**1. puis la valeur approchée de α de la question **II.**3.(b) ainsi que la valeur $p(0)$.

Exercice 22 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM)

Pour chaque question, trois affirmations sont proposées, une seule de ces affirmations est exacte.
Le candidat recopiera sur sa copie le numéro de chaque question et la lettre de la réponse choisie pour celle-ci.
AUCUNE JUSTIFICATION n'est demandée. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'enlève aucun point.

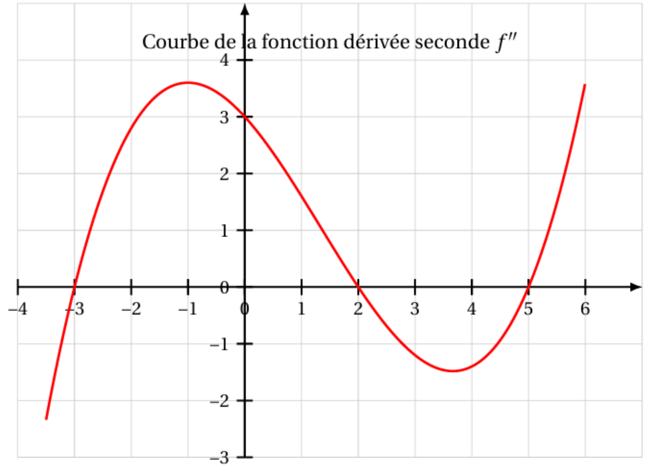
1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \left(x^2-2x-1\right)\mathrm{e}^x.$$

   A. La fonction dérivée de f est la fonction définie par $f'(x) = (2x-2)\mathrm{e}^x$.
   B. La fonction f est décroissante sur l'intervalle $]-\infty;2]$.
   C. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

2. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3}{5+\mathrm{e}^x}$.
   Sa courbe représentative dans un repère admet :
   A. une seule asymptote horizontale ;
   B. une asymptote horizontale et une asymptote verticale ;
   C. deux asymptotes horizontales.

3. On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_{f''}$ représentant la fonction dérivée seconde f'' d'une fonction f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[-3,5;6]$.



A. La fonction f est convexe sur l'intervalle $[-3;3]$.
B. La fonction f admet trois points d'inflexion.
C. La fonction dérivée f' de f est décroissante sur l'intervalle $[0;2]$.

4. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^2 - 17n + 20$.
A. La suite (u_n) est minorée.
B. La suite (u_n) est décroissante.
C. L'un des termes de la suite (u_n) est égal à 2021.

5. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 5$.
On considère la fonction « `seuil` » suivante écrite en Python :

```
def seuil() :
        u = 2
        n = 0
        while u < 45 :
                u = 0.75*u + 5
                n = n+1
        return n
```

Cette fonction renvoie :
A. la plus petite valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$;
B. la plus petite valeur de n telle que $u_n < 45$;
C. la plus grande valeur de n telle que $u_n \geqslant 45$.

Exercice 23 :

Dans cet exercice, on s'intéresse à la croissance du bambou Moso de taille maximale 20 mètres.
Le modèle de croissance de Ludwig von Bertalanffy suppose que la vitesse de croissance pour un tel bambou est proportionnelle à l'écart entre sa taille et la taille maximale.

Partie I : modèle discret

Dans cette partie, on observe un bambou de taille initiale 1 mètre.
Pour tout entier naturel n, on note u_n la taille, en mètre, du bambou n jours après le début de l'observation. On a ainsi $u_0 = 1$.
Le modèle de von Bertalanffy pour la croissance du bambou entre deux jours consécutifs se traduit par l'égalité :

$$u_{n+1} = u_n + 0,05\,(20 - u_n) \text{ pour tout entier naturel } n.$$

1. Vérifier que $u_1 = 1,95$.
2. (a) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,95u_n + 1$.
   (b) On pose pour tout entier naturel n, $v_n = 20 - u_n$.
   Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le terme initial v_0 et la raison.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = 20 - 19 \times 0,95^n$.
3. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Partie II : modèle continu

Dans cette partie, on souhaite modéliser la taille du même bambou Moso par une fonction donnant sa taille, en mètre, en fonction du temps t exprimé en jour.
D'après le modèle de von Bertalanffy, cette fonction est solution de l'équation différentielle

$$(E) \qquad y' = 0,05(20 - y)$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et y' désigne sa fonction dérivée.

Soit la fonction L définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par

$$L(t)=20-19\mathrm{e}^{-0,05t}.$$

1. Vérifier que la fonction L est une solution de (E) et qu'on a également $L(0)=1$.
2. On prend cette fonction L comme modèle et on admet que, si on note L' sa fonction dérivée, $L'(t)$ représente la vitesse de croissance du bambou à l'instant t.
   (a) Comparer $L'(0)$ et $L'(5)$.
   (b) Calculer la limite de la fonction dérivée L' en $+\infty$.
   Ce résultat est-il en cohérence avec la description du modèle de croissance exposé au début de l'exercice ?

Exercice 24 :

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par

$$f(x)=x-\ln(x-1).$$

On considère la suite (u_n) de terme initial $u_0=10$ et telle que $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout entier naturel n.

Partie I :

La feuille de calcul ci-dessous a permis d'obtenir des valeurs approchées des premiers termes de la suite (u_n).

	A	B
1	n	u_n
2	0	10
3	1	7,802 775 42
4	2	5,885 444 74
5	3	4,299 184 42
6	4	3,105 509 13
7	5	2,360 951 82
8	6	2,052 767 5
9	7	2,001 345 09
10	8	2,000 000 9

1. Quelle formule a été saisie dans la cellule B3 pour permettre de (u_n) par recopie vers le bas ?
2. À l'aide de ces valeurs, conjecturer le sens de variation et la le calcul des valeurs approchées limite de la suite (u_n).

Partie II :

On rappelle que la fonction f est définie sur l'intervalle $]1;+\infty[$ par

$$f(x)=x-\ln(x-1).$$

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$. On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
2. (a) Soit f' la fonction dérivée de f. Montrer que pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x-2}{x-1}$.
   (b) En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]1;+\infty[$, complété par les limites.
   (c) Justifier que pour tout $x \geqslant 2$, $f(x) \geqslant 2$.

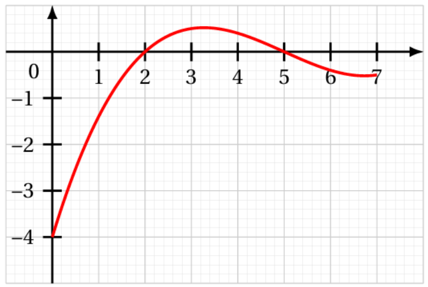
Partie III :

1. En utilisant les résultats de la partie **II**, démontrer par récurrence que $u_n \geqslant 2$ pour tout entier naturel n.
2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
3. En déduire que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
4. On admet que ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$. Donner la valeur de ℓ.

Exercice 25 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une questionne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée

1. On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x\mathrm{e}^{-2x}$.
   On note f'' la dérivée seconde de la fonction f.
   Quel que soit le réel f, $f''(x)$ est égal à :
   (a) $(1-2x)\mathrm{e}^{-2x}$
   (b) $4(x-1)\mathrm{e}^{-2x}$
   (c) $4\mathrm{e}^{-2x}$
   (d) $(x+2)\mathrm{e}^{-2x}$
2. Un élève de première générale choisit trois spécialités parmi les douze proposées.
   Le nombre de combinaisons possibles est :
   (a) 1728
   (b) 1320
   (c) 220
   (d) 33
3. On donne ci-dessous la représentation graphique de f' fonction dérivée d'une fonction f définie sur $[0;7]$.



   Le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0;7]$ est :

x	0		3,25		7
f		↗		↘	

Tableau (a)

x	0		2		5		7
f		↘		↗		↘	

Tableau (b)

x	0		2		5		7
f		↗		↘		↗	

Tableau (c)

x	0		2		7
f		↗		↘	

Tableau (d)

4. Une entreprise fabrique des cartes à puces. Chaque puce peut présenter deux défauts notés A et B.
   Une étude statistique montre que 2,8 % des puces ont le défaut A et 2,2 % des puces ont le défaut B et, heureusement 95,4 % des puces n'ont aucun des deux défauts.
   La probabilité qu'une puce prélevée au hasard ait les deux défauts est :

(a) 0,05
(b) 0,004
(c) 0,046
(d) On ne peut pas le savoir

5. On se donne une fonction f, supposée dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' sa fonction dérivée.
On donne ci-dessous le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

D'après ce tableau de variation :
(a) f' est positive sur $\mathbb{R}$
(b) f' est positive sur $]-\infty;-1]$
(c) f' est négative sur $\mathbb{R}$
(d) f' est positive sur $[-1;+\infty[$

Exercice 26 :

En mai 2020, une entreprise fait le choix de développer le télétravail afin de s'inscrire dans une démarche écoresponsable.
Elle propose alors à ses 5000 collaborateurs en France de choisir entre le télétravail et le travail au sein des locaux de l'entreprise.
En mai 2020, seuls 200 d'entre eux ont choisi le télétravail.
Chaque mois, depuis la mise en place de cette mesure, les dirigeants de l'entreprise constatent que 85 % de ceux qui avaient choisi le télétravail le mois précédent choisissent de continuer, et que, chaque mois, 450 collaborateurs supplémentaires choisissent le télétravail.

On modélise le nombre de collaborateurs de cette entreprise en télétravail par la $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le terme a_n désigne ainsi une estimation du nombre de collaborateurs en télétravail le n-ième mois après le mois de mai 2020. Ainsi $a_0 = 200$.

Partie A :

1. Calculer a_1.
2. Justifier que pour tout entier naturel n,
$$a_{n+1} = 0,85a_n + 450.$$
3. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par :
$$v_n = a_n - 3000.$$
   (a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $0,85$.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n pour tout entier naturel n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n,
$$a_n = -2800 \times 0,85^n + 3000.$$
4. Déterminer le nombre de mois au bout duquel le nombre de télétravailleurs sera strictement supérieur à 2500, après la mise en place de cette mesure dans l'entreprise.

Partie B :

Afin d'évaluer l'impact de cette mesure sur son personnel, les dirigeants de l'entreprise sont parvenus à modéliser le nombre de collaborateurs satisfaits par ce dispositif à l'aide de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,
$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 4}{u_n + 2}$$
où u_n désigne le nombre de milliers de collaborateurs satisfaits par cette nouvelle mesure au bout de n mois après le mois de mai 2020

1. Démontrer que la fonction f définie pour tout $x \in [0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x+4}{x+2}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n,
$$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4.$$
   (b) Justifier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

3. On admet que pour tout entier naturel n,

$$0 \leqslant 4 - u_n \leqslant 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et l'interpréter dans le contexte de la modélisation.

Exercice 27 :

Partie A :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}x - 2.$$

1. On admet que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note g' sa fonction dérivée.
   Montrer que, pour tout réel x :
   $$g'(x) = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x} + \frac{2}{3}.$$
2. En déduire le sens de variations de la fonction g sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer le signe de $g(x)$, pour tout x réel.

Partie B :

1. On considère l'équation différentielle :
   $$(E) \quad : \quad 3y' + y = 0.$$
   Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution particulière dont la courbe représentative, dans un repère du plan, passe par le point $M(0;2)$.
3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f(x) = 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{3}x}$$
   et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
   (a) Montrer que la tangente (Δ_0) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $M(0;2)$ admet une équation de la forme :
   $$y = -\frac{2}{3}x + 2.$$
   (b) Étudier, sur $\mathbb{R}$, la position de cette courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la tangente (Δ_0).

Partie C :

1. Soit A le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a, a réel quelconque.
   Montrer que la tangente (Δ_a) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A coupe l'axe des abscisses en un point P d'abscisse -3.
2. Expliquer la construction de la tangente (Δ_{-2}) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point B d'abscisse -2.

Exercice 28 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une questionne rapporte ni n'enlève de point. Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée

Question 1 :

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 + 2x - \dfrac{2}{x}$.
Une équation de la tangente à la courbe représentative de g au point d'abscisse 1 est :

(a) $y = 7(x-1)$	(c) $y = 7x + 7$
(b) $y = x - 1$	(d) $y = x + 1$

Question 2 :

On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{3n}{n+2}$. On cherche à déterminer la limite de v_n lorsque n tend vers $+\infty$.

(a) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$	(c) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \dfrac{3}{2}$
(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 3$	(d) On ne peut pas la déterminer

Question 3 :

Dans une urne il y a 6 boules noires et 4 boules rouges. On effectue successivement 10 tirages aléatoires avec remise. Quelle est la probabilité (à 10^{-4} près) d'avoir 4 boules noires et 6 boules rouges ?

(a) $0,1662$	(c) $0,115$
(b) $0,4$	(d) $0,8886$

Question 4 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\mathrm{e}^x - x$.

(a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$	(c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$	(d) On ne peut pas déterminer la limite de f en $+\infty$

Question 5 :

Un code inconnu est constitué de 8 signes. Chaque signe peut être une lettre ou un chiffre. Il y a donc 36 signes utilisables pour chacune des positions.
Un logiciel de cassage de code teste environ cent millions de codes par seconde.
En combien de temps au maximum le logiciel peut-il découvrir le code ?

(a) environ $0,3$ seconde	(c) environ 3 heures
(b) environ 8 heures	(d) environ 470 heures

Exercice 29 :

Au 1er janvier 2020, la centrale solaire de Big Sun possédait 10560 panneaux solaires. On observe, chaque année, que 2 % des panneaux se sont détériorés et nécessitent d'être retirés tandis que 250 nouveaux panneaux solaires sont installés.

Partie A - Modélisation à l'aide d'une suite

On modélise l'évolution du nombre de panneaux solaires par la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 10560$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,98u_n + 250$, où u_n est le nombre de panneaux solaires au 1er janvier de l'année $2020 + n$.

1. (a) Expliquer en quoi cette modélisation correspond à la situation étudiée.
   (b) On souhaite savoir au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires sera strictement supérieur à 12000. À l'aide de la calculatrice, donner la réponse à ce problème.
   (c) Recopier et compléter le programme en Python ci-dessous de sorte que la valeur cherchée à la question précédente soit stockée dans la variable `n` à l'issue de l'exécution de ce dernier.

```
u = 10560
n = 0
while ......... :
        u = .......
        n = .......
```

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 12500$.
3. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
4. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Il n'est pas demandé, ici, de calculer sa limite.
5. On définit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $v_n = u_n - 12500$, pour tout entier naturel n.
   (a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0,98 dont on précisera le premier terme.
   (b) Exprimer, pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.
   (c) En déduire, pour tout entier naturel n, u_n en fonction de n.
   (d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interpréter ce résultat dans le contexte du modèle.

Partie B - Modélisation à l'aide d'une fonction

Une modélisation plus précise a permis d'estimer le nombre de panneaux solaires de la centrale à l'aide de la fonction f définie pour tout $x \in [0;+\infty[$ par $f(x) = 12500 - 500\mathrm{e}^{-0,02x+1,4}$, où x représente le nombre d'années écoulées depuis le 1er janvier 2020.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f.

2. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
3. En utilisant ce modèle, déterminer au bout de combien d'années le nombre de panneaux solaires dépassera 12000.

Exercice 30 :

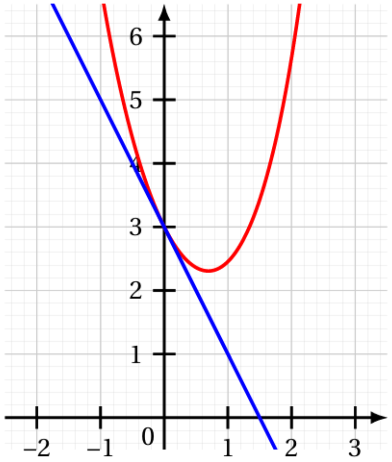
<u>Partie A</u> : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^x + ax + b\mathrm{e}^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.

Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.



1. Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.
2. En utilisant l'expression de la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
   (a) Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.
   (b) Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.
   (c) En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de $f(x)$.
4. On considère l'équation différentielle :

$$(E) \quad : \quad y' + y = 2\mathrm{e}^x - x - 1.$$

   (a) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^x - x + 2\mathrm{e}^{-x}$$

   est solution de l'équation (E).
   (b) Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$.
   (c) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

<u>Partie B</u> : Étude de la fonction g sur $[1;+\infty[$

1. Vérifier que pour tout réel x, on a :

$$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x - 2 = \left(\mathrm{e}^x - 2\right)\left(\mathrm{e}^x + 1\right).$$

2. En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x.
3. On admettra que, pour tout $x \in [1;+\infty[$, $\mathrm{e}^x - 2 > 0$.
   Étudier le sens de variation de la fonction g sur $[1;+\infty[$.

Exercice 31 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. (a) Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.
   (b) Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.
4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x)=m$.
5. On note Δ la droite d'équation $y=-x$.
   On note A un éventuel point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.
   (a) Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1)+x^2=0$.
   On note g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\mathrm{e}^x(x-1)+x^2$.
   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.
   (b) Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;+\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$.
   (c) Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathcal{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice 32 :

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1}=\frac{3}{4}u_n+\frac{1}{4}n+1.$$

1. Calculer, en détaillant les calculs, u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.

L'extrait, reproduit ci-dessous, d'une feuille de calcul réalisée avec un tableur présente les valeurs des premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

	A	B
1	n	u_n
2	0	1
3	1	1,75
4	2	2,5625
5	3	3,421875
6	4	4,31640625

2. (a) Quelle formule, étirée ensuite vers le bas, peut-on écrire dans la cellule **B3** de la feuille de calcul pour obtenir les termes successifs de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans la colonne **B** ?
   (b) Conjecturer le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $n\leqslant u_n\leqslant n+1$.
   (b) En déduire, en justifiant la réponse, le sens de variation et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) Démontrer que :
   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{n}=1.$$
4. On désigne par $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n-n$.
   (a) Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{3}{4}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n=\left(\frac{3}{4}\right)^n+n$.

V.3 Probabilités

Exercice 1 :

Les probabilités demandées dans cet exercice seront arrondies à 10^{-3}.

Un laboratoire pharmaceutique vient d'élaborer un nouveau test anti-dopage.

Partie A

Une étude sur ce nouveau test donne les résultats suivants :

— si un athlète est dopé, la probabilité que le résultat du test soit positif est $0,98$ (sensibilité du test) ;

— si un athlète n'est pas dopé, la probabilité que le résultat du test soit négatif est $0,995$ (spécificité du test).

On fait subir le test à un athlète sélectionné au hasard au sein des participants à une compétition d'athlétisme. On note D l'événement « l'athlète est dopé » et P l'événement « le test est positif ». On admet que la probabilité de l'événement D est égale à $0,08$.

1. Traduire la situation sous la forme d'un arbre pondéré.
2. Démontrer que $P(T) = 0,083$.
3. (a) Sachant qu'un athlète présente un test positif, quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

   (b) Le laboratoire décide de commercialiser le test si la probabilité de l'événement « un athlète présentant un test positif est dopé » est supérieure ou égale à $0,95$.

   Le test proposé par le laboratoire sera-t-il commercialisé ? Justifier.

Partie B

Dans une compétition sportive, on admet que la probabilité qu'un athlète contrôlé présente un test positif est $0,103$.

1. Dans cette question 1., on suppose que les organisateurs décident de contrôler 5 athlètes au hasard parmi les athlètes de cette compétition. On note X la variable aléatoire égale au nombre d'athlètes présentant un test positif parmi les 5 athlètes contrôlés.

   (a) Donner la loi suivie par la variable aléatoire X. Préciser ses paramètres.

   (b) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(X)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

   (c) Quelle est la probabilité qu'au moins un des 5 athlètes contrôlés présente un test positif ?
2. Combien d'athlètes faut-il contrôler au minimum pour que la probabilité de l'événement « au moins un athlète contrôlé présente un test positif » soit supérieure ou égale à $0,75$? Justifier.

Exercice 2 :

Une chaîne de fabrication produit des pièces mécaniques. On estime que $5\,\%$ des pièces produites par cette chaîne sont défectueuses.
Un ingénieur a mis au point un test à appliquer aux pièces. Ce test a deux résultats possibles : « positif » ou bien « négatif ».
On applique ce test à une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne.
On note $p(E)$ la probabilité d'un événement E.
On considère les événements suivants :

— D : « la pièce est défectueuse » ;

— T : « la pièce présente un test positif » ;

— $\overline{D}$ et $\overline{T}$ désignent respectivement les évènements contraires de D et T.

Compte tenu des caractéristiques du test, on sait que :

— la probabilité qu'une pièce présente un test positif sachant qu'elle défectueuse est égale à $0,98$;

— la probabilité qu'une pièce présente un test négatif sachant qu'elle n'est pas défectueuse est égale à $0,97$.

Les parties I et II peuvent être traitées de façon indépendante.

PARTIE I

1. Traduire la situation à l'aide d'un arbre pondéré.
2. (a) Déterminer la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans la production de la chaîne soit défectueuse et présente un test positif.

   (b) Démontrer que : $p(T) = 0,0775$.
3. On appelle valeur prédictive positive du test la probabilité qu'une pièce soit défectueuse sachant que le test est positif. On considère que pour être efficace, un test doit avoir une valeur prédictive positive supérieure à $0,95$.

   Calculer la valeur prédictive positive de ce test et préciser s'il est efficace.

PARTIE II

On choisit un échantillon de 20 pièces dans la production de la chaîne, en assimilant ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de pièces défectueuses dans cet échantillon.
On rappelle que : $p(D) = 0,05$.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et déterminer les paramètres de cette loi.
2. Calculer la probabilité que cet échantillon contienne au moins une pièce défectueuse.
   On donnera un résultat arrondi au centième.
3. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 3 :

Une entreprise reçoit quotidiennement de nombreux courriels (courriers électroniques).
Parmi ces courriels, 8 % sont du « spam », c'est-à-dire des courriers à intention publicitaire, voire malveillante, qu'il est souhaitable de ne pas ouvrir.
On choisit au hasard un courriel reçu par l'entreprise.
Les propriétés du logiciel de messagerie utilisé dans l'entreprise permettent d'affirmer que :

* La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que c'est un spam est égale à $0,9$.
* La probabilité que le courriel choisi soit classé comme « indésirable » sachant que ce n'est pas un spam est égale à $0,01$.

On note :

— S l'évènement « le courriel choisi est un spam » ;
— I l'évènement « le courriel choisi est classé comme indésirable par le logiciel de messagerie ».
— $\overline{S}$ et $\overline{I}$ les évènements contraires de S et I respectivement.

1. Modéliser la situation étudiée par un arbre pondéré, sur lequel on fera apparaître les probabilités associées à chaque branche.
2. (a) Démontrer que la probabilité que le courriel choisi soit un message de spam et qu'il soit classé indésirable est égale à $0,072$.
   (b) Calculer la probabilité que le message choisi soit classé indésirable.
   (c) Le message choisi est classé comme indésirable. Quelle est la probabilité que ce soit effectivement un message de spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.
3. On choisit au hasard 50 courriels parmi ceux reçus par l'entreprise. On admet que ce choix se ramène à un tirage au hasard avec remise de 50 courriels parmi l'ensemble des courriels reçus par l'entreprise.
   On appelle Z la variable aléatoire dénombrant les courriels de spam parmi les 50 choisis.
   (a) Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire Z, et quels sont ses paramètres ?
   (b) Quelle est la probabilité que, parmi les 50 courriels choisis, deux au moins soient du spam ? On donnera un résultat arrondi au centième.

Exercice 4 :

Un sac contient les huit lettres suivantes : A B C D E F G H (2 voyelles et 6 consonnes).
Un jeu consiste à tirer simultanément au hasard deux lettres dans ce sac.
On gagne si le tirage est constitué d'une voyelle **et** d'une consonne.

1. Un joueur extrait simultanément deux lettres du sac.
   (a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
   (b) Déterminer la probabilité que le joueur gagne à ce jeu.

Les questions 2. et 3. de cet exercice sont indépendantes.
Pour la suite de l'exercice, on admet que la probabilité que le joueur gagne est égale à $\frac{3}{7}$.

2. Pour jouer, le joueur doit payer k euros, k désignant un entier naturel non nul.
   Si le joueur gagne, il remporte la somme de 10 euros, sinon il ne remporte rien.
   On note G la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur (c'est-à-dire la somme remportée à laquelle on soustrait la somme payée).
   (a) Déterminer la loi de probabilité de G.
   (b) Quelle doit être la valeur maximale de la somme payée au départ pour que le jeu reste favorable au joueur ?
3. Dix joueurs font chacun une partie. Les lettres tirées sont remises dans le sac après chaque partie.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de joueurs gagnants.
   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

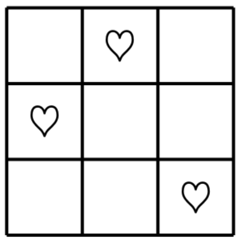
(b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, qu'il y ait exactement quatre joueurs gagnants.

(c) Calculer $P(X \geqslant 5)$ en arrondissant à 10^{-3}. Donner une interprétation du résultat obtenu.

(d) Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $P(X \leqslant n) \geqslant 0,9$.

Exercice 5 :

Une société de jeu en ligne propose une nouvelle application pour smartphone nommée « Tickets cœurs ! ».
Chaque participant génère sur son smartphone un ticket comportant une grille de taille 3×3 sur laquelle sont placés trois cœurs répartis au hasard, comme par exemple ci-dessous.



Le ticket est gagnant si les trois cœurs sont positionnés côte à côte sur une même ligne, sur une même colonne ou sur une même diagonale.

1. Justifier qu'il y a exactement 84 façons différentes de positionner les trois cœurs sur une grille.
2. Montrer que la probabilité qu'un ticket soit gagnant est égale à $\dfrac{2}{21}$.
3. Lorsqu'un joueur génère un ticket, la société prélève 1 € sur son compte en banque. Si le ticket est gagnant, la société verse alors au joueur 5 €. Le jeu est-il favorable au joueur ?
4. Un joueur décide de générer 20 tickets sur cette application. On suppose que les générations des tickets sont indépendantes entre elles.

   (a) Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui compte le nombre de tickets gagnants parmi les 20 tickets générés.

   (b) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X = 5)$.

   (c) Calculer la probabilité, arrondie à 10^{-3}, de l'évènement $(X \geqslant 1)$ et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 6 :

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.

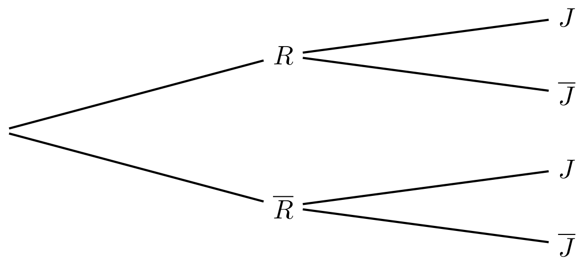
D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française. Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans.

(Source : TNS-Sofres)

Partie A :

On interroge une personne au hasard et on note :
- R l'événement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun » ;
- J l'événement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.
3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.
   Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3}.
4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B :

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun.
La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.
2. Calculer $P(X=5)$ et interpréter le résultat.
3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.
   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.
4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

Exercice 7 :

Partie A :

Dans un pays, une maladie touche la population avec une probabilité de $0,05$. On possède un test de dépistage de cette maladie.
On considère un échantillon de n personnes ($n \geqslant 20$) prises au hasard dans la population assimilé à un tirage avec remise.
On teste l'échantillon suivant cette méthode : on mélange le sang de ces n individus, on teste le mélange. Si le test est positif, on effectue une analyse individuelle de chaque personne.
Soit X_n la variable aléatoire qui donne le nombre d'analyses effectuées.

1. Montrer X_n prend les valeurs 1 et $(n+1)$.
2. (a) Prouver que $P(X_n=1)=0,95^n$.
   (b) Établir la loi de X_n en recopiant sur la copie et en complétant le tableau suivant :

x_i	1	$n+1$
$P(X_n=x_i)$		

3. Que représente l'espérance de X_n dans le cadre de l'expérience ?
   Montrer que $\mathbb{E}(X_n)=n+1-n\times 0,95^n$.

Partie B :

1. On considère la fonction f définie sur $[20;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x)+x\ln(0,95)$.
   Montrer que f est décroissante sur $[20;+\infty[$.
2. On rappelle que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}=0$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.
3. Montrer que $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $[20;+\infty[$.
   Donner un encadrement à $0,1$ près de cette solution.
4. En déduire le signe de f sur $[20;+\infty[$.

Partie C :

On cherche à comparer deux types de dépistages. La première méthode est décrite dans la **partie A**, la seconde, plus classique, consiste à tester tous les individus.
La première méthode permet de diminuer le nombre d'analyses dès que $\mathbb{E}(X_n)<n$.

En utilisant la **partie B**, montrer que la première méthode diminue le nombre d'analyses pour des échantillons comportant 87 personnes maximum.

Exercice 8 :

Dans une école de statistique, après étude des dossiers des candidats, le recrutement se fait de deux façons :
- 10 % des candidats sont sélectionnés sur dossier. Ces candidats doivent ensuite passer un oral à l'issue duquel 60 % d'entre eux sont finalement admis à l'école.
- Les candidats n'ayant pas été sélectionnés sur dossier passent une épreuve écrite à l'issue de laquelle 20 % d'entre eux sont admis à l'école.

Partie I

On choisit au hasard un candidat à ce concours de recrutement.
On notera :
- D l'événement « le candidat a été sélectionné sur dossier » ;
- A l'événement « le candidat a été admis à l'école » ;
- $\overline{A}$ et $\overline{D}$ les événements contraires des événements D et A respectivement.

1. Traduire la situation par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que le candidat soit sélectionné sur dossier et admis à l'école.

3. Montrer que la probabilité de l'événement A est égale à $0,24$.
4. On choisit au hasard un candidat admis à l'école. Quelle est la probabilité que son dossier n'ait pas été sélectionné ?

Partie II

1. On admet que la probabilité pour un candidat d'être admis à l'école est égale à $0,24$.

   On considère un échantillon de sept candidats choisis au hasard, en assimilant ce choix à un tirage au sort avec remise. On désigne par X la variable aléatoire dénombrant les candidats admis à l'école parmi les sept tirés au sort.

   (a) On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale. Quels sont les paramètres de cette loi ?

   (b) Calculer la probabilité qu'un seul des sept candidats tirés au sort soit admis à l'école. On donnera une réponse arrondie au centième.

   (c) Calculer la probabilité qu'au moins deux des sept candidats tirés au sort soient admis à cette école. On donnera une réponse arrondie au centième.

2. Un lycée présente n candidats au recrutement dans cette école, où n est un entier naturel non nul.

   On admet que la probabilité pour un candidat quelconque du lycée d'être admis à l'école est égale à $0,24$ et que les résultats des candidats sont indépendants les uns des autres.

   (a) Donner l'expression, en fonction de n, de la probabilité qu'aucun candidat issu de ce lycée ne soit admis à l'école.

   (b) À partir de quelle valeur de l'entier n la probabilité qu'au moins un élève de ce lycée soit admis à l'école est-elle supérieure ou égale à $0,99$?

Exercice 9 :

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A :

Une société de vente en ligne procède à une étude du niveau de fidélité de ses clients. Elle définit pour cela comme « régulier » un client qui a fait des achats chaque année depuis trois ans. Elle constate que 60 % de ses clients sont des clients réguliers, et que parmi eux, 47 % ont acheté la carte de fidélité.

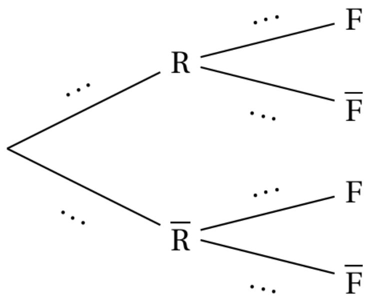
Par ailleurs, parmi l'ensemble de tous les clients de la société, 38 % ont acheté la carte de fidélité.

On interroge au hasard un client et on considère les évènements suivants :

— R : « le client est un client régulier » ;

— F : « le client a acheté la carte de fidélité ».

Pour un évènement E quelconque, on note $\overline{E}$ sont évènement contraire et $P(E)$ sa probabilité.



1. (a) Reproduire l'arbre ci-contre et compléter les pointillés.

   (b) Calculer la probabilité que le client interrogé soit un client régulier et qu'il ait acheté la carte de fidélité.

   (c) Déterminer la probabilité que le client ait acheté la carte de fidélité sachant que ce n'est pas un client régulier.

   (d) Le directeur du service des ventes affirme que parmi les clients qui ont acheté la carte de fidélité, plus de 80 % sont des clients réguliers. Cette affirmation est-elle exacte ?

Partie B :

La société demande à un institut de sondage de faire une enquête sur le profil de ses clients réguliers. L'institut a élaboré un questionnaire en ligne constitué d'un nombre variable de questions.

On choisit au hasard un échantillon de 1000 clients réguliers, à qui le questionnaire est proposé. On considère que ces 1000 clients répondent.

— Pour les remercier, la société offre un bon d'achat à chacun des clients de l'échantillon.
Le montant de ce bon d'achat dépend du nombre de questions posées au client.

— La société souhaite récompenser particulièrement les clients de l'échantillon qui ont acheté une carte de fidélité et, en plus du bon d'achat, offre à chacun d'eux une prime d'un montant de 50 euros versée sur la carte de fidélité.

On note Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients réguliers, associe le total, en euros, des montants du bon d'achat des 1000 clients. On admet que son espérance $E(Y_1)$ est égale à 30000 et que sa variance $V(Y_1)$ est égale à 10000.

On note X_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients réguliers, associe le nombre de clients ayant acheté la carte de fidélité parmi eux, et on note Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque échantillon de 1000 clients, associe le total, en euros, des montants de la prime de fidélité versée.
On admet que X_2 suit la loi binomiale de paramètres 1000 et $0,47$ et que $Y_2 = 50X_2$.

1. Calculer l'espérance $E(X_2)$ de la variable X_2 et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

On note $Y = Y_1 + Y_2$ la variable aléatoire égale au total général, en euros, des montants offerts (bon d'achat et prime de fidélité) aux 1000 clients. On admet que les variables aléatoires Y_1 et Y_2 sont indépendantes.
On note Z la variable aléatoire définie par $Z = \frac{Y}{1000}$.

3. Préciser ce que modélise la variable aléatoire Z dans le contexte de l'exercice. Vérifier que son espérance $E(Z)$ est égale à $53,5$ et que sa variance $V(Z)$ est égale à 0.72275.
4. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, vérifier que la probabilité que Z soit strictement compris entre $51,7$ euros et $55,3$ euros est supérieure à $0,75$.