UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Universidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Ingeniería Mecánica

Tarea 2:
"Resolución de sistemas de ecuaciones lineales."

IPM-458 - Computación Científica.
Alumno: Nicolás Espinoza M.

Profesor: Franco Perazzo M.
Ayudante: Luis Fuenzalida L.

Valparaíso - Mayo 12, 2017

1 Introducción y Teoría.

2 Preguntas no numéricas (1 y 2).

En general las normas, tanto vectoriales como matriciales, sirven para definir el "tamaño" de alguno de estos dos objetos. Existen distintas normas que se pueden utilizar. A continuación se explican dos de estas propiedades, relacionándolas con el *número de condición* de una matriz.

2.1 Factorización LU de una matriz para obtener su inversa.

Teniendo las matrices L y U en las que se descompone la matriz del sistema A, se puede obtener la matriz inversa a través de un paso intermedio. Supongamos que se tienen ya las matrices L y U. A continuación se define la operatoria para obtener A^{-1} de manera genérica, para una matriz en este caso 3x3 (por simplicidad), aunque el procedimiento se puede aplicar a una matriz nxn cualquiera:

$$L = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Se define un vector **D** que contiene elementos para un paso auxiliar que nos ayude a encontrar A^{-1}. El planteamiento parte de saber que $A \cdot A^{-1} = I$, y que $L \cdot U = A$.

$$\begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & l_{13} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} l_{11} \cdot d_1 & = 1 \\ l_{21} \cdot d_1 + l_{22} \cdot d_2 & = 0 \\ l_{31} \cdot d_1 + l_{32} \cdot d_2 + l_{33} \cdot d_3 & = 0 \end{matrix} \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \tag{2}$$

El vector de elementos a_{ij} es la primera columna de la matriz inversa. Repitiendo el mismo procedimiento para las columnas 2 y 3 de la matriz identidad en el sistema (1) hace que el vector **D** tenga otros valores en sus componentes, que permiten obtener respectivamente las columnas 2 y 3 de la matriz inversa en el sistema (2). Así es que se puede formar la matriz A^{-1} a partir de la descomposición LU de la matriz A.

2.2 Norma de Frobenius.

La Norma de Frobenius, también conocida como Norma l_2, se define como la raíz de la suma de los cuadrados de los elementos de la matriz. Un ejemplo de esto se puede ver en la siguiente matriz A_{3x3}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$||A||_{l_2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} a_{i,j}^2} \quad = \quad \sqrt{a_{1,1}^2 + a_{1,2}^2 + a_{1,3}^2 + a_{2,1}^2 + a_{2,2}^2 + a_{2,3}^2 + a_{3,1}^2 + a_{3,2}^2 + a_{3,3}^2}$$

El caso más fácil de entender esta norma es con un vector. En el caso 2D, la norma l_2 nos indica la longitud del vector representado en un plano. Ocurre lo mismo en el caso 3D, aunque ya no es tan fácil de realizar una asociación de este estilo en tres dimensiones.

2.3 Norma Infinito.

La Norma Infinito también permite visualizar el tamaño de una matriz, pero se trabaja de otra forma: considera sólo el máximo valor de entre las sumas de los elementos de las distintas filas. En el siguiente ejemplo, esta vez con números, se puede ver más claramente esto:

$$||A||_\infty = \max_{1\leq i\leq 3} \left\{ \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| \right\}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 9 \\ 1 & 9 & 1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \max\{(2+5+9),(1+9+1),(7+3+0)\} = 16$$

Luego, la Norma Infinito de la matriz A del ejemplo sería: $\quad ||A||_\infty = 16$

Si se define $\mathbf{x}$ como la solución real de un sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, y $\mathbf{x}'$ la solución numérica, entonces $\mathbf{e}$ es el error en el método numérico, definido como $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$.
También se define el residual $\mathbf{r}$ como $r = \mathbf{r} = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}' = \mathbf{b} - \mathbf{b}'$. Luego, la relación de las normas con el *número de condición* de una matriz se define como $cond(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$, donde $\|A\|$ es alguna norma de la matriz, por ejemplo una de las anteriormente definidas.

El número de condición, y por ende las normas de la matriz, se utiliza para acotar el residual mediante el error. La expresión correspondiente es la siguiente:

$$\frac{1}{cond(A)} \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|} \leq \frac{\|\mathbf{e}\|}{\|\mathbf{x}\|} \leq cond(A) \frac{\|\mathbf{r}\|}{\|\mathbf{b}\|}$$

3 Programas aplicados para la resolución de una armadura (3 en adelante).

3.1 Método LU.

3.2 Método del Pivote de Gauss.

3.3 Métodos de Gauss-Seidel y Jacobi.

4 Conclusiones.

Referencias