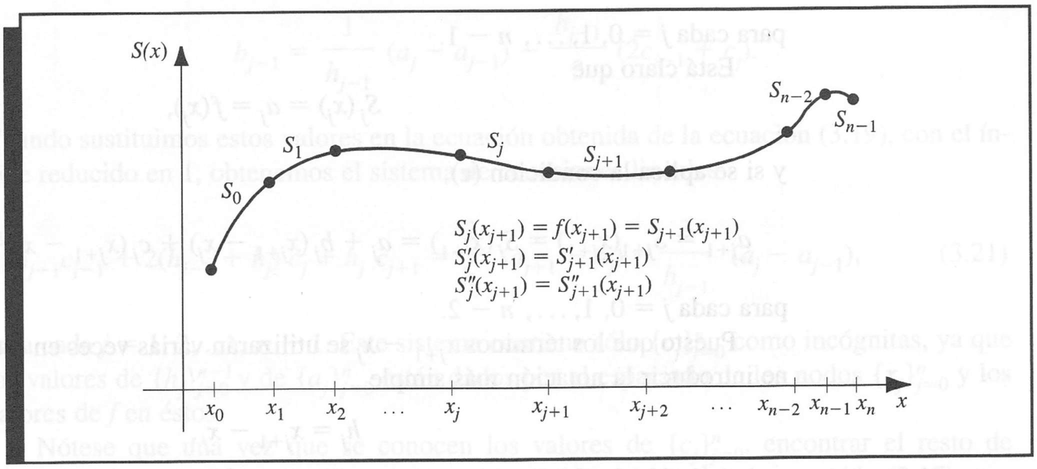
**Figura 3.8**




Dada una función $f$ definida en $[a, b]$ y un conjunto de nodos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ un **interpolante de trazador cúbico** $S$ para $f$ es una función que cumple con las condiciones siguientes:

**a.** $S(x)$ es un polinomio cúbico, denotado $S_j(x)$, en el subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n-1$;

**b.** $S(x_j) = f(x_j)$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n$;

**c.** $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

**d.** $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

**e.** $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n-2$;

**f.** Una de las siguientes condiciones de frontera se satisface:

**(i)** $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ **(frontera libre o natural);**

**(ii)** $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ **(frontera sujeta).**

Aunque los trazadores cúbicos se definen con otras condiciones de frontera, las condiciones dadas en **(f)** son suficientes en este caso. Cuando se presentan las condiciones de frontera libre, el trazador recibe el nombre de **trazador natural** y su gráfica se aproxima a la forma que adoptaría una varilla larga y flexible si la hiciéramos pasar por los puntos $\{(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \ldots, (x_n, f(x_n))\}$.

En términos generales, en las condiciones de frontera sujeta se logran aproximaciones más exactas, ya que abarcan más información acerca de la función. Pero para que se cumpla este tipo de condición de frontera, se requiere tener los valores de la derivada en los extremos o bien una aproximación precisa de ellos.

Si queremos construir el interpolante del trazador cúbico de determinada función $f$, aplicamos las condiciones de la definición a los polinomios cúbicos:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3,$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Está claro que

$$S_j(x_j) = a_j = f(x_j),$$

y si se aplica la condición **(c)**,

$$a_{j+1} = S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1}) = a_j + b_j(x_{j+1} - x_j) + c_j(x_{j+1} - x_j)^2 + d_j(x_{j+1} - x_j)^3,$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, n - 2$.

Puesto que los términos $x_{j+1} - x_j$ se utilizarán varias veces en este desarrollo, conviene introducir la notación más simple

$$h_j = x_{j+1} - x_j,$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, n - 1$. Si también definimos $a_n = f(x_n)$, entonces la ecuación

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \tag{3.15}$$

será válida para cada $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

De manera análoga, defina $b_n = S'(x_n)$ y observe que

$$S_j'(x) = b_j + 2c_j(x - x_j) + 3d_j(x - x_j)^2$$

significa que $S_j'(x_j) = b_j$ para cada $j = 0, 1, \ldots, n - 1$. Al aplicar la condición **(d)** obtenemos

$$b_{j+1} = b_j + 2c_j h_j + 3d_j h_j^2, \tag{3.16}$$

para cada $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

Al definir $c_n = S''(x_n)/2$ y aplicar la condición **(e)**, se obtiene otra relación entre los coeficientes de $S_j$. En este caso, para cada $j = 0, 1, \ldots, n - 1$.

$$c_{j+1} = c_j + 3d_j h_j. \tag{3.17}$$

Al despejar $d_j$ en la ecuación (3.17) y sustituir este valor en las ecuaciones (3.15) y (3,16), para cada $j = 0, 1, \ldots, n - 1$ se obtienen las ecuaciones

$$a_{j+1} = a_j + b_j h_j + \frac{h_j^2}{3}(2c_j + c_{j+1}) \tag{3.18}$$

y

$$b_{j+1} = b_j + h_j(c_j + c_{j+1}) \tag{3.19}$$

La relación final que incluye los coeficientes se obtiene resolviendo la ecuación correspondiente en la forma de la ecuación (3.18), primero para $b_j$,

$$b_j = \frac{1}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{h_j}{3}(2c_j + c_{j+1}), \tag{3.20}$$

y entonces, con una reducción del índice, para $b_{j-1}$:

$$b_{j-1} = \frac{1}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}) - \frac{h_{j-1}}{3}(2c_{j-1} + c_j).$$

Cuando sustituimos estos valores en la ecuación obtenida de la ecuación (3.19), con el índice reducido en 1, obtenemos el sistema de ecuaciones lineales

$$h_{j-1}c_{j-1} + 2(h_{j-1} + h_j)\, c_j + h_j\, c_{j+1} = \frac{3}{h_j}(a_{j+1} - a_j) - \frac{3}{h_{j-1}}(a_j - a_{j-1}), \tag{3.21}$$

para cada $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Este sistema contiene sólo $\{c_j\}_{j=0}^{n}$ como incógnitas, ya que los valores de $\{h_j\}_{j=0}^{n-1}$ y de $\{a_j\}_{j=0}^{n}$ están dados por el espaciado de los nodos $\{x_j\}_{j=0}^{n}$ y los valores de $f$ en éstos.

Nótese que una vez que se conocen los valores de $\{c_j\}_{j=0}^{n}$, encontrar el resto de las constantes $\{b_j\}_{j=0}^{n-1}$ partiendo de la ecuación (3.20) y $\{d_j\}_{j=0}^{n-1}$ de la ecuación (3.17) para construir los polinomios cúbicos $\{S_j(x)\}_{j=0}^{n-1}$ es fácil.