



UNIVERSIDAD TECNICA  
FEDERICO SANTA MARIA



Universidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Ingeniería Mecánica

# **Tarea 5: “Método de diferencias finitas aplicado a transferencia de calor en una placa”**

IPM-458 - Computación Científica.

Alumno: Nicolás Espinoza M.

Profesor: Franco Perazzo M.  
Ayudante: Luis Fuenzalida L.

Valparaíso - Julio 05, 2017

# Contenidos

<b>1</b>	<b>Presentación del problema</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Establecimiento de las ecuaciones para los distintos tipos de nodo</b>	<b>3</b>
2.1	Nodos del borde izquierdo . . . . .	3
2.2	Nodos del borde inferior . . . . .	4
2.3	Esquina inferior izquierda . . . . .	4
2.4	Nodos del borde superior . . . . .	4
2.5	Nodos en el borde derecho . . . . .	4
2.6	Esquina superior derecha $i = n-1, j = n-1$ . . . . .	5
2.7	Nodos interiores . . . . .	5

# 1 Presentación del problema

El presente informe desarrolla el método de diferencias finitas, en particular de segundo orden, aplicado a la transferencia de calor en una placa cuadrada. La placa tiene dos tipos de condiciones:

- Dirichlet en los bordes superior y derecho.
- Neumann en los bordes inferior e izquierdo.

Los valores de estas condiciones se pueden ver en la Figura 1. Se consideran dos dimensiones (ejes  $x$  e  $y$ ), con un mismo número  $n$  de nodos en ambas direcciones. La ecuación que rige el problema planteado, transferencia de calor en dos dimensiones en estado estacionario, es

$$\frac{\partial^2 T(\vec{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(\vec{x})}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

Discretizando con diferencias finitas centradas (2°orden), obtenemos la aproximación siguiente:

$$\frac{\partial^2 T(\vec{x})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(\vec{x})}{\partial y^2} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{(\Delta y)^2} = 0 \quad (2)$$

Esta ecuación es la que se utilizará para aproximar las soluciones del sistema, a modo de trabajar con resultados numéricos y poder programar la situación en el computador. Como los pasos en ambas direcciones tienen el mismo tamaño, se puede trabajar con la ecuación simplificada siguiente, en remplazo de la Ecuación 2:

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 4T_{i,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} = 0 \quad (3)$$

## 2 Establecimiento de las ecuaciones para los distintos tipos de nodo

En esta placa se tienen distintos tipos de condiciones, por lo que se tienen distintas ecuaciones para los diferentes tipos de nodo. En esta sección se establecerán dichas ecuaciones según dónde se ubican los nodos a tratar.

### 2.1 Nodos del borde izquierdo

Para estos nodos, la condición que se cumple es la de Neumann. Las paredes están aisladas, por lo que la condición queda igualada a cero.

$$\begin{aligned} -k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} &= \dot{q} = 0 \\ \frac{T_{i+1,j} - T_{i-1,j}}{2\Delta x} &= 0 \rightarrow T_{i+1,j} = T_{i-1,j} \\ 2T_{i+1,j} - 4T_{i,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} &= 0 \end{aligned}$$

La 3ª ecuación es la que modela la transferencia con diferencias finitas, habiendo remplazado la condición de Neumann correspondiente.

## 2.2 Nodos del borde inferior

Se cumple la misma condición en los nodos inferiores, pero la diferencia es que se considera la coordenada  $y$  en vez de la  $x$ . Luego, las condiciones de contorno y la ecuación para este tipo de nodos es:

$$\begin{aligned} -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \dot{q} = 0 \\ \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j-1}}{2\Delta y} &= 0 \quad \longrightarrow \quad T_{i,j+1} = T_{i,j-1} \\ T_{i+1,j} + T_{i-1,j} - 4T_{i,j} + 2T_{i,j+1} &= 0 \end{aligned}$$

## 2.3 Esquina inferior izquierda

El nodo de la esquina inferior izquierda está aislado por abajo y por la izquierda, por lo que se aplican las dos condiciones anteriores simultáneamente:

$$2T_{i+1,j} - 4T_{i,j} + 2T_{i,j+1} = 0$$

## 2.4 Nodos del borde superior

Los nodos en este borde tienen una temperatura dada, lo que corresponde a una condición de tipo Dirichlet. La ecuación en este caso queda como

$$\begin{aligned} T_{i,j} &= T_{borde} \\ \text{En este caso, corresponde a } T_{i,j} &= 100^\circ C \end{aligned}$$

Para los nodos inmediatamente inferiores a estos sin embargo, nos sirve esta condición, pues se despeja la temperatura conocida  $T_{i,j+1} = 100$  como solución de la ecuación, quedando para los nodos  $j = n - 1$ :

$$-4T_{i,j} + T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j-1} = -100$$

## 2.5 Nodos en el borde derecho

Para el borde derecho se repite la situación de los nodos en el borde superior, pero en la otra dirección y con otro valor de  $T_{borde}$ .

$$\begin{aligned} T_{i,j} &= T_{borde} \\ T_{borde} &= 50^\circ C \end{aligned}$$

Nuevamente, para los nodos directamente a la izquierda de los del borde, nos resulta útil esta condición, pues permite utilizar esa condición de Dirichlet como resultado de las ecuaciones que modelan a aquellos.

$$-4T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} = -50$$

## 2.6 Esquina superior derecha $i = n-1, j = n-1$

Esta esquina tiene dos condiciones de Dirichlet asociadas, que son las temperaturas de los bordes derecho y superior. La ecuación de este nodo queda así:

$$-4T_{i,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j-1} = -150 \quad (4)$$

## 2.7 Nodos interiores

Estos nodos, que no están en el borde sino que en el centro, tienen otro nodo como vecino en ambas direcciones en ambos ejes. La Ecuación 3 se mantiene para este tipo de nodos, sin cambio.

El siguiente paso es establecer la matriz de factores y el vector de resultados, y programar o aplicar el método de resolución del sistema.