UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

TAREA N° 4
COMPUTACIÓN CIENTÍFICA IPM458
(1er. Semestre 2017)

Antecedentes
Fecha de publicación: jueves 15 de junio
Fecha de entrega: viernes 23 de junio, hasta las 17:00 hrs.
Lugar de entrega: buzón de secretaría del Departamento de Ingeniería Mecánica.

1. Sistemas de Ecuaciones Diferenciales de Primer Orden

En clase se presentaron diversos métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO) de primer orden en la forma

$$\frac{d\phi}{dt} = f(\phi, t) \tag{1}$$

con la condición inicial $\phi(0) = \phi_0$, cuando la función f no admite una integración analítica. Estos métodos se pueden extender fácilmente a sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Considere por ejemplo un sistema de N ecuaciones diferenciales de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{d\phi_1}{dt} &= F_1(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N, t) \\ \frac{d\phi_2}{dt} &= F_2(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N, t) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \frac{d\phi_N}{dt} &= F_N(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N, t) \end{aligned} \tag{2}$$

para las funciones $\phi_1(t),\ \phi_2(t),\ \cdots,\ \phi_N(t)$, con la condición inicial

$$\phi_1(0) = \phi_1^0 \ ; \ \phi_2(0) = \phi_2^0 \ ; \ \cdots \ ; \ \phi_N(0) = \phi_N^0 .$$

Al discretizar la variable t en intervalos Δt e integrar el sistema de Ecs. (2) desde el instante t_n hasta el instante t_{n+1} se obtiene

$$\begin{aligned} \phi_1^{n+1} &= \phi_1^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F_1(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N, t)\, dt \\ \phi_2^{n+1} &= \phi_2^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F_2(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N, t)\, dt \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \phi_N^{n+1} &= \phi_N^n + \int_{t_n}^{t_{n+1}} F_N(\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_N, t)\, dt \end{aligned} \tag{3}$$

Por lo tanto, cada una de las funciones $\{\phi_k(t)\ ;\ k = 1, \cdots, N\}$ se puede obtener numéricamente aplicando los métodos vistos. La única diferencia es que en este caso las expresiones que se usan para aproximar las integrales del lado derecho contendrán funciones de varias variables.

2. Integración Numérica de una Ecuación de Segundo Orden

Considérese ahora una ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} + q(t)\frac{d\phi}{dt} + r(t) = 0 \tag{4}$$

cuya condición inicial es:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \phi_0 \\ \left.\frac{d\phi}{dt}\right|_0 &= \dot{\phi}_0 \end{aligned} \tag{5}$$

Si esta ecuación no se puede resolver analíticamente (ejemplo; si las funciones $q(t)$, $r(t)$ son demasiado complicadas), un modo de resolverla numéricamente es transformándola en un sistema de dos ecuaciones de primer orden, y aplicando luego alguno de los métodos existentes para ecuaciones de primer orden. Para esto se define una función auxiliar

$$\psi \equiv \frac{d\phi}{dt} \tag{6}$$

De este modo la segunda derivada de ϕ se puede reemplazar como

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = \frac{d\psi}{dt} \tag{7}$$

por lo que resolver la Ec. (4) resulta equivalente a resolver un sistema de dos ecuaciones para las funciones $\{\phi(t)\ ,\ \psi(t)\}$:

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= \psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= -q(t)\psi - r(t) \end{aligned} \tag{8}$$

con la condición inicial:

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \phi_0 \\ \psi(0) &= \dot{\phi}_0 \end{aligned} \tag{9}$$

3. Ejemplo de Aplicación

Un área importante de la mecánica de fluidos la constituye el campo de flujos multifásicos, y dentro de éste la dinámica de burbujas de gas moviéndose en el seno de un líquido es un problema con gran cantidad de aplicaciones en ingeniería. Dentro de los diferentes tipos de burbujas que se han estudiado [1], se ha observado que burbujas “grandes” (con un volumen del orden de algunos cm^3) al ascender por flotación en un líquido toman la forma de un segmento esférico, mientras que su superficie inferior es relativamente plana (*Spherical-Cap Bubbles*, SCB). La superficie superior de la SCB está sujeta a una inestabilidad de Rayleigh-Taylor, y experimenta por lo tanto fluctuaciones (que pueden llegar a destruir la burbuja). Se puede establecer que la amplitud de las fluctuaciones de la superficie de la burbuja (respecto a su forma esférica) está determinada por la ecuación

$$\frac{d^2A}{d\tau^2} + 3\frac{dA}{d\tau} + \left[2 - \frac{\alpha}{\beta\,\mathrm{e}^{\tau}}\left(1 - \frac{1}{\beta^2\mathrm{e}^{2\tau}}\right)\right]A = 0 \tag{10}$$

donde A es la amplitud (adimensionalizada por una longitud conveniente) y τ es el tiempo adimensionalizado. La evolución de la perturbación de la superficie de la burbuja está controlada por los parámetros α y β:

$$\alpha = \frac{2\pi R}{\lambda_c} \quad (11)$$

$$\beta = \frac{\lambda_0}{\lambda_c} \quad (12)$$

R es el radio de curvatura de la burbuja, λ_0 es la longitud de onda de una perturbación inicial y λ_c es la llamada longitud de onda crítica de la interfaz líquido-gas:

$$\lambda_c = 2\pi\sqrt{\frac{\sigma}{\rho g}} \quad (13)$$

donde σ es la tensión superficial líquido-gas, ρ es la densidad del líquido y g es la aceleración de gravedad.

En esta tarea Ud. debe desarrollar un programa en Fortran para resolver numéricamente la Ec. (10) para diferentes valores de los parámetros α y β utilizando el método Runge-Kutta de cuarto orden. El programa deberá leer el tiempo total de integración, $\Delta\tau$, α y β desde un archivo de entrada. Los resultados deberán ser escritos a un archivo de salida formateado. Para la salida de resultados, el programa deberá escribir tres columnas que contengan los valores de τ, $A(\tau)$ y $\hat{\tau} = \tau + \ln\beta$.

Utilice este programa para determinar el comportamiento de la amplitud A en función del tiempo adimensional para diferentes valores de los parámetros α y β. Presente tres gráficos de A versus $\hat{\tau}$, para β = 0.33, 0.5, 0.67, 0.91, 1.0, 1.33 y 2.0 (todas las curvas para los diferentes valores de β en el mismo gráfico) para α = 50, 65 y 80.

El intervalo de tiempo de integración para los resultados a mostrar es desde $\hat{\tau}$ = 0 hasta $\hat{\tau}$ = 8 (para determinar un $\Delta\tau$ apropiado, Ud. puede comparar los resultados obtenidos utilizando un valor arbitrario para $\Delta\tau$ con los que se obtienen al reducir $\Delta\tau$). La condición inicial (por razones físicas propias del fenómeno descrito por la Ec. (10)) es la siguiente:

$$\text{En } \tau = 0 : \quad A = 0 \;\; ; \;\; \frac{dA}{d\tau} = 1$$

4. Bilbiografía

[1] G. K. Batchelor, "The stability of a large gas bubble rising through liquid", Journal of Fluid Mechanics, Vol. 184, pp. 399-422 (1987)

Nota importante:

Para comprobar la correcta implementación de los programas, se deberá enviar al ayudante del curso, en un mail, el(los) archivo(s) fuente (*.f90) y ejecutable desarrollados en la tarea.