INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 3)

Stefania Bandini

INSIEMI ORDINATI

Quanto finora studiato a proposito del concetto di **insieme** non fa riferimento all'ordine con cui gli elementi di un insieme sono elencati.

E' però utile, in determinati casi, specificare un particolare **ORDINAMENTO** all'interno di un dato insieme

Coppia ordinata

Una *coppia ordinata* è una collezione di due oggetti tale che uno può distinguersi come il *primo elemento* e l'altro come il *secondo elemento*. Una coppia ordinata con primo elemento x e secondo elemento y si scrive $\langle x, y \rangle$.

Proprietà 1. $\langle x, y \rangle = \langle z, t \rangle$ *sse* $x = z$ e $y = t$.

Notare che $\langle x, y \rangle \neq \langle y, x \rangle$ e che $\langle x, x \rangle$ denota la coppia in cui il primo e il secondo elemento sono uguali tra di loro.

Una rappresentazione insiemistica di $\langle x, y \rangle$ è $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.

n-upla ordinata

Una *n-upla* ordinata di oggetti $x_1, \ldots, x_n$ è definita come

$$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle = \langle \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle, x_n \rangle$$

dove $\langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle$ è una $(n$-$1)$-upla ordinata.

PRODOTTO CARTESIANO

Dati due insiemi non vuoti *S* e *T* si definisce prodotto cartesiano

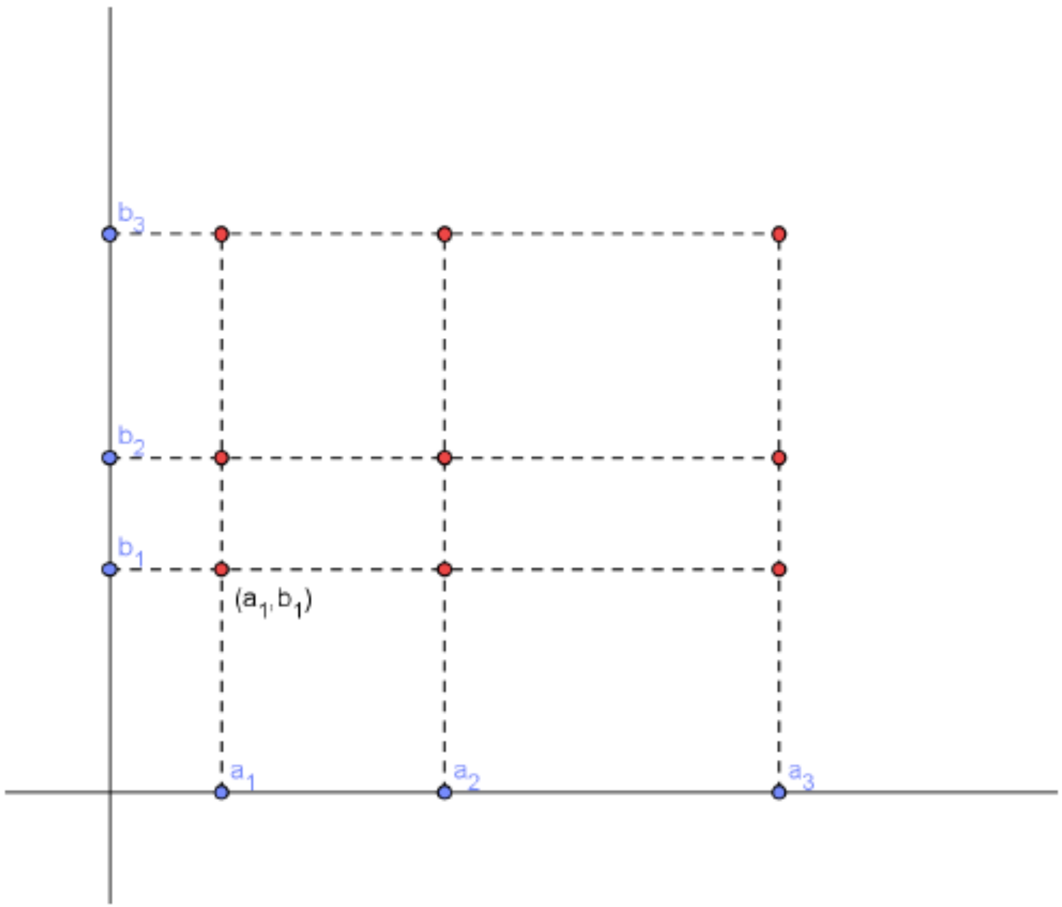
$$S \times T = \{ <x, y> \mid x \in S,\ y \in T\}$$

dove il simbolo <x, y> denota una coppia ordinata, cioè un insieme di due elementi nel quale specifichiamo chi è il primo elemento e chi è il secondo.

Nel caso in cui almeno uno dei due insiemi *S* o *T* sia vuoto, il loro prodotto Cartesiano è **l'insieme vuoto**.

In generale $S \times T \neq T \times S$. Nel caso in cui $S = T$ il prodotto $S \times T$ si denota anche con S^2.

PRODOTTO CARTESIANO



Una rappresentazione grafica del prodotto Cartesiano di due insiemi.

Prodotto Cartesiano e sequenze

Dati due insiemi S e T, possiamo formare l'insieme $S \times T$ di tutte le coppie $\langle x, y \rangle$ per le quali $x \in S$ e $y \in T$. L'insieme $S \times T$ è chiamato *il prodotto cartesiano* di S e T.

S^n è l'insieme di tutte le n-uple di elementi di S, per esempio, per $n = 4$, $S^4 = (((S \times S) \times S) \times S)$.

Dato un insieme S, σ è una *sequenza finita* di elementi di S se $\sigma = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ per qualche intero positivo n e ciascun $s_i \in S$.

Un *segmento* di una sequenza finita $\sigma = \langle s_1, \ldots, s_n \rangle$ è una sequenza finita $\sigma' = \langle s_k, s_{k+1} \ldots, s_{m-1}, s_m \rangle$, dove $1 \leq k \leq m \leq n$. Se $k = 1$ il segmento è detto *iniziale*.

DAL PRODOTTO CARTESIANO ALLE RELAZIONI

Se a $S \times T$ *appartengono* tutte le coppie ordinate costituite da un primo elemento tra S e da un secondo elemento tratto da T,

ogni sottoinsieme di $S \times T$ potrà essere considerato come una **RELAZIONE** tra gli elementi di S e quelli di T, esplicitata da specifiche proprietà

ESEMPIO

Consideriamo gli insiemi:
S = {Arno, Po, Tevere} e *T* = {Firenze, Pisa, Torino}

Consideriamo il loro prodotto cartesiano

S × *T* = {<Arno, Firenze>, <Arno, Pisa>, <Arno, Torino>, <Po, Firenze>, <Po, Pisa>, <Po, Torino>, <Tevere, Firenze>, <Tevere, Pisa>, <Tevere, Torino>}

Tra tutte le coppie aventi per primo elemento un elemento di S (un fiume) e per secondo un elemento di T (una città), individuiamo quelle costituite dal nome di un fiume e da quello di una città bagnata da quel fiume

R = {<Arno, Firenze>, <Arno, Pisa>, <Po, Torino>}

DAL PRODOTTO CARTESIANO ALLE RELAZIONI

Il sottoinsieme R di $S \times T$ è caratterizzato esattamente dalla proprietà che tutte (e soltanto) le coppie ad esso appartenenti sono costituite *da un fiume e da una città bagnata da esso.*

Il sottoinsieme R è uno dei possibili sottoinsiemi di $S \times T$

Altri sottoinsiemi possono essere individuati mediante la definizione di altre relazioni denotate da specifiche proprietà

DAL PRODOTTO CARTESIANO ALLE RELAZIONI

Se si considera la coppia <x, y> appartenente a un dato sottoinsieme R di $S \times T$, si dice che l'elemento $x \in S$ ha come corrispondente $y \in T$ nella relazione R, oppure, più semplicemente, che

x è in relazione con y

Una relazione, come ogni sottoinsieme del prodotto cartesiano fra insiemi, può essere rappresentata graficamente con una tabella

	Arno	Po	Tevere
Torino		•	
Pisa	•		
Firenze	•		

RAPPRESENTAZIONE MATRICIALE

R si può anche rappresentare tramite una matrice booleana

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ogni riga rappresenta un'elemento in A; ogni colonna un'elemento in B

In questo caso:

- $\langle Arno, Pisa \rangle \in R$
- $\langle Tevere, Pisa \rangle \notin R$

RELAZIONI BINARIE

Una *relazione binaria* R tra due insiemi S e T è un insieme di coppie ordinate $\langle x, y \rangle$ con $x \in S$ e $y \in T$: $R \subseteq S \times T$).

Il *dominio* di R, indicato con $dom(R)$, è l'insieme di tutti gli oggetti x tali che $\langle x, y \rangle \in R$ per qualche y.

Il *codominio* di R, indicato con $codom(R)$, è l'insieme di tutti gli oggetti y tali che $\langle x, y \rangle \in R$ per qualche x.

L'unione del dominio e del codominio di una relazione R si chiama il *campo* di R oppure *estensione*.

$$dom(R) \cup codom(R)$$

ELEMENTI DI UNA RELAZIONE

dominio

Sia $R \subseteq A \times B$ una relazione

Il **dominio** di R (dom(R)) è:
l'insieme di tutti gli oggetti $x \in A$ tali che $\langle x,y \rangle \in R$ per qualche $y \in B$

$$\mathrm{dom}(R)=\{x \in A \mid \exists\ y \in B.\ \langle x,y \rangle \in R\}$$

($\exists$: esiste almeno un …)

ELEMENTI DI UNA RELAZIONE

codominio

Il **codominio** di R (codom(R)) è:

l'insieme di tutti gli oggetti $y \in B$ tali che $\langle x,y \rangle \in R$ per qualche $x \in A$

$$\text{codom}(R)=\{y \in B \mid \exists\, x \in A.\ \langle x,y \rangle \in R\}$$

Il campo o estensione di R è:

$\text{dom}(R) \cup \text{codom}(R)$

ESEMPIO: DOMINIO E CODOMINIO

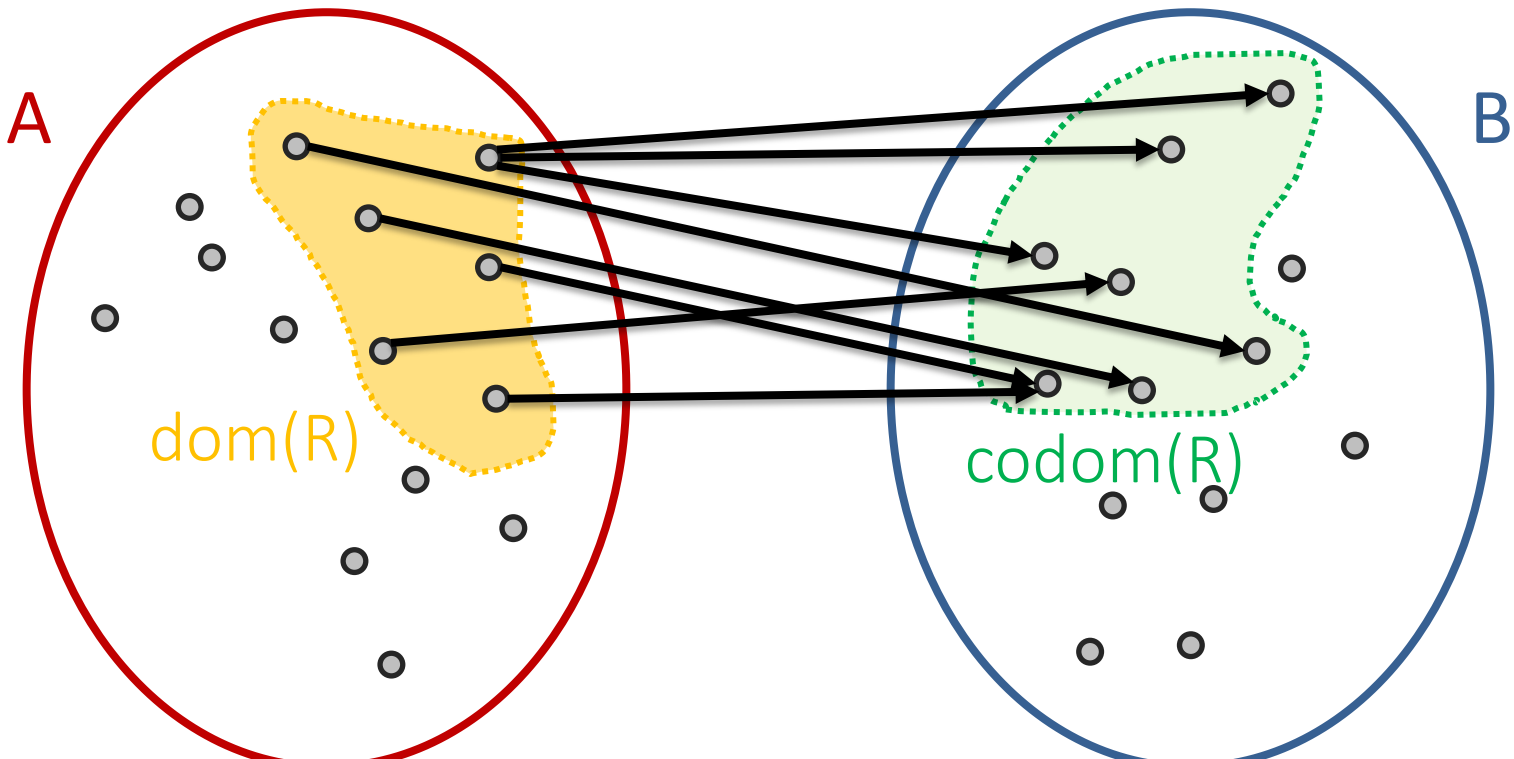
- Il dominio di R è {Arno, Po}
- Il codominio di R è B

B \ A	Arno	Po	Tevere
Torino		×	
Pisa	×		
Firenze	×		

DIAGRAMMA DI EULERO-VENN:

DOMINIO E CODOMINIO

$R \subseteq A \times B$



PROPRIETA' DELLE RELAZIONI

Una relazione R definita su un insieme X è:

- *riflessiva* se $(x,x) \in R, \quad \forall x \in X,$ equivalentemente se $I_X \subset R$.
- *simmetrica* se $(x,y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in R,$ equivalentemente se $R = R^t$.
- *antisimmetrica* se $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R \quad \Rightarrow \quad x = y,$ equivalentemente se $R \cap R^t \subset I_X$.
- *transitiva* se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z)$.

PROPRIETA' DELLE RELAZIONI

Sia $X = \{a, b, c\}$ e $R_i \subseteq X \times X$

- $R_1 = \{(a,a),(a,b),(b,a),(a,c)\}$
  non riflessiva, non simmetrica, non transitiva, non antisimmetrica

- $R_2 = \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(a,c)\}$
  riflessiva, non simmetrica, non transitiva, non antisimmetrica

- $R_3 = \{(a,a),(b,b)\}$
  non riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica

RELAZIONI *n*-ARIE

Una relazione n-aria su un insieme S è un sottoinsieme di S^n, $n \geq 1$. Se $n = 1$ la relazione R su S si dice *unaria*.

Se $n = 2$ la relazione R su S si dice *binaria*.

Se $n = 3$ la relazione R su S si dice *ternaria*.

$\ldots$

OPERAZIONI SU RELAZIONI

$R_1 \cup R_2$ è una relazione su $S \times T$, ed è costituita da tutte le coppie che appartengono a R_1 o a R_2.

$R_1 \cap R_2$ è la relazione costituita da quelle coppie che appartengono a entrambe R_1 e R_2.

$\overline{R} = \{\langle x, y\rangle |\ \langle x, y\rangle \notin R\} \subseteq S \times T$ è la relazione *complementare* di R.

$R^{-1} = \{\langle y, x\rangle | \langle x, y\rangle \in R\} \subseteq T \times S$ è la relazione *inversa* di R.

OPERAZIONI SU RELAZIONI

Siano $R, S \subseteq A \times B$ due relazioni

1. se $R \subseteq S$ allora $\overline{S} \subseteq \overline{R}$
2. $\overline{(R \cap S)} = \overline{R} \cup \overline{S}$ e $\overline{(R \cup S)} = \overline{R} \cap \overline{S}$

3. se $R \subseteq S$ allora $R^{-1} \subseteq S^{-1}$
4. $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$ e $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$

Esempio

Siano $A = \{a, b\}$, $R = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$, $S = \{\langle a, b\rangle, \langle a, a\rangle\}$

1. $R \cap S = \{\langle a, b\rangle\}$
2. $\overline{(R \cup S)} = \{\langle b, b\rangle\}$
3. $R^{-1} = R$
4. $S^{-1} \neq S$

L'identità

Dato un insieme A, la relazione

$$I_A = \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$$

dove ogni elemento è in relazione con se steso si chiama l'identità su A

Proprietà delle Relazioni Binarie

Una relazione $R \subseteq A^2$ è

riflessiva se $\langle x, x \rangle \in R$ per ogni $x \in A$ $\quad (I_A \subseteq R)$

simmetrica se $\langle x, y \rangle \in R$ implica $\langle y, x \rangle \in R$ $\quad (R = R^{-1})$

antisimmetrica se $\langle x, y \rangle, \langle y, x \rangle \in R$ implica $x = y$ $\quad (R \cap R^{-1} \subseteq I_A)$

transitiva se $\langle x, y \rangle, \langle y, z \rangle \in R$ implica $\langle x, z \rangle \in R$

Esempio

Sia $A = \{a, b, c\}$

1. $R_1 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, c\rangle\}$
   non riflessiva, non simmetrica, non transitiva, non antisimmetrica
2. $R_2 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, c\rangle\}$
   riflessiva, non simmetrica, non transitiva, non antisimmetrica
3. $R_3 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$
   non riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica

INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 3)

END