OPERAZIONI SU MATRICI BOOLEANE

Slide integrative – Fondamenti dell'informatica AA 23/24

alex.graudenzi@unimib.it

Operazioni su matrici booleane: join (⊔) e meet (⊓)

Date A e B due matrici booleane di dimensioni n × m (*stessa dimensione*), in cui:

a_{ij} è l'elemento della matrice A nella i-esima riga e j-esima colonna,

b_{ij} è l'elemento della matrice B nella i-esima riga e j-esima colonna,

A⊔B è il <u>JOIN</u> di A e B

ed è definito come la matrice di dimensione n x m in cui gli elementi x_{ij} sono:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1\ se\ a_{ij} = 1\ \boldsymbol{o}\ b_{ij} = 1 \\ 0\ altrimenti \end{cases}$$ *(si prende il MAX)* $(or, \vee\ - \boldsymbol{unione})$

A⊓B è il <u>MEET</u> di A e B

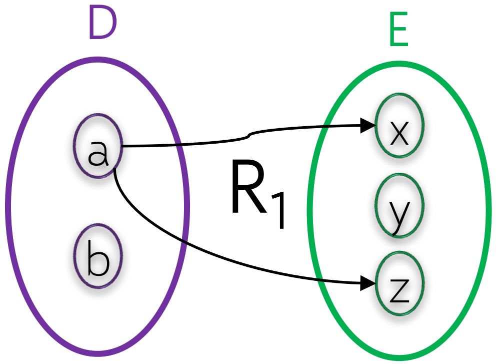
ed è definito come la matrice di dimensione n x m in cui gli elementi x_{ij} sono:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1\ se\ a_{ij} = 1\ \boldsymbol{e}\ b_{ij} = 1 \\ 0\ altrimenti \end{cases}$$ *(si prende il min)* $(and, \wedge\ - \boldsymbol{intersezione})$

Esempio: join (⊔) e meet (⊓)

$D = \{a,b\}$
$E = \{x,y,z\}$

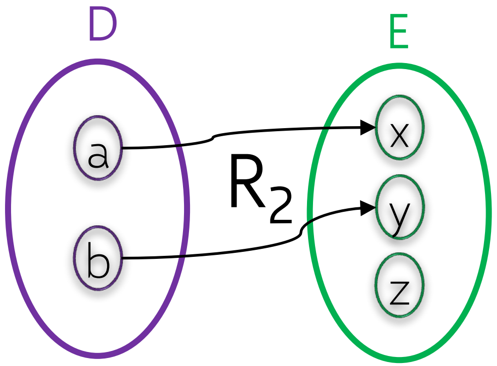
$R_1 \subseteq D \times E$
$R_1 = \{\langle a,x\rangle, \langle a,z\rangle\}$



M_{R1}

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$R_2 \subseteq D \times E$
$R_2 = \{\langle a,x\rangle, \langle b,z\rangle\}$

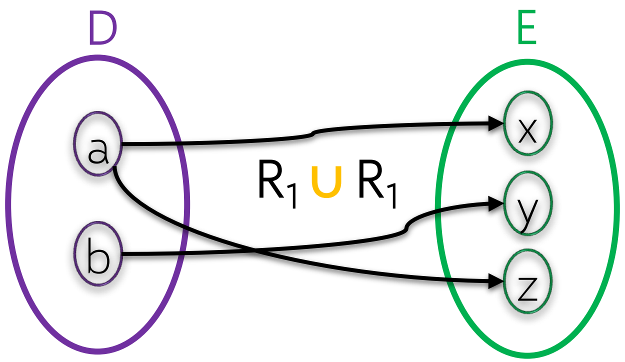


M_{R2}

$$\begin{array}{c c} & \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\underset{M_{R1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \sqcup \underset{M_{R2}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{M_{R1} \sqcup M_{R2}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

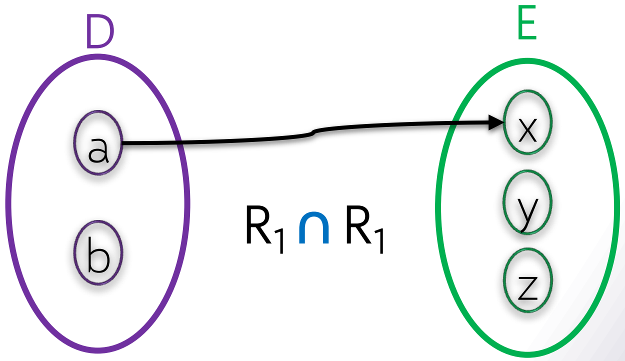
MAX (elemento per elemento)



unione

$$\underset{M_{R1}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \sqcap \underset{M_{R2}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}} = \underset{M_{R1} \sqcap M_{R2}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

MIN (elemento per elemento)



intersezione

Proprietà di join e meet

$\sqcup$ e $\sqcap$ sono

- commutative,
- associative,
- distributive

fra di loro

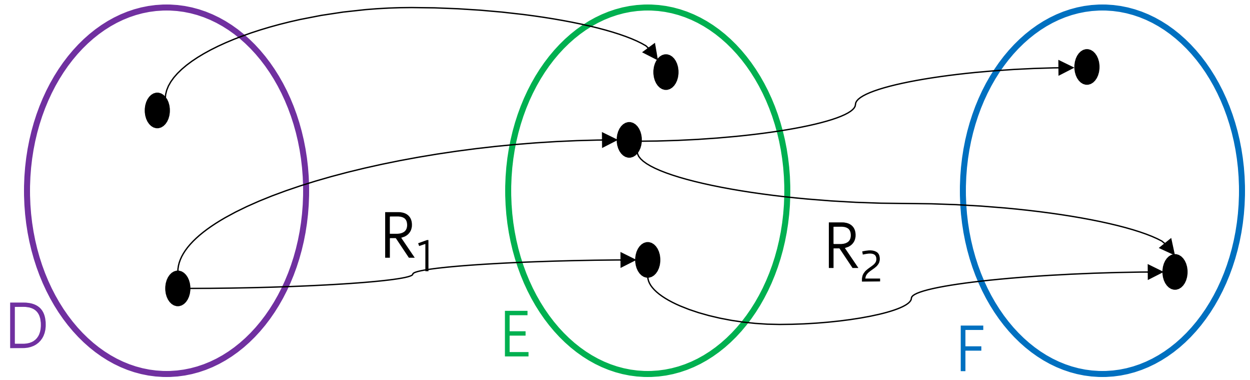
Composizione di Relazioni

- $R_1 \subseteq D \times E$
- $R_2 \subseteq E \times F$

- $R_2 \circ R_1 \subseteq D \times F$

  $R_2 \circ R_1 = \{\langle s,u \rangle \in D \times F \mid \exists\, t.\ \langle s,t \rangle \in R_1, \langle t,u \rangle \in R_2\}$

$R_2 \circ R_1$ è la composizione di R_2 e R_1 *(prima si applica R1 e poi R2)*



Prodotto Booleano

- Se A e B sono matrici Booleane di dimensioni $n \times m$ e $m \times p$ rispettivamente,
- il loro **prodotto Booleano** è la matrice Booleana

$$X = A \odot B$$

di dimensioni $n \times p$ con elementi x_{ij} dati da:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & se\ esiste\ k, 1 \leq k \leq m, tale\ che\ a_{ik} = 1\ e\ b_{kj} = 1 \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

2° colonna

1° riga

$x_{1,2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- $\odot$ è associativa ma non commutativa

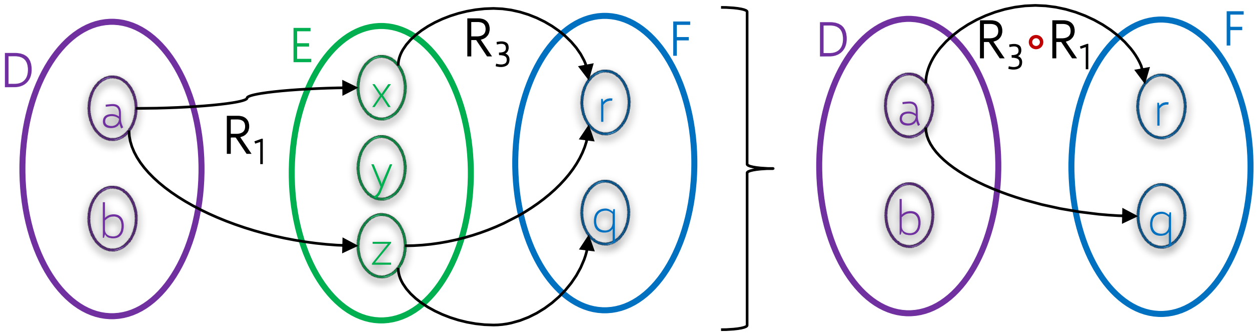
Composizione di relazioni

- La composizione di relazioni si può calcolare tramite il prodotto di matrici Booleane:

$$M_{R2 \circ R1} = M_{R1} \odot M_{R2}$$

Esempio: prodotto booleano ⊙

$D = \{a,b\}$, $E = \{x,y,z\}$, $F = \{r,q\}$

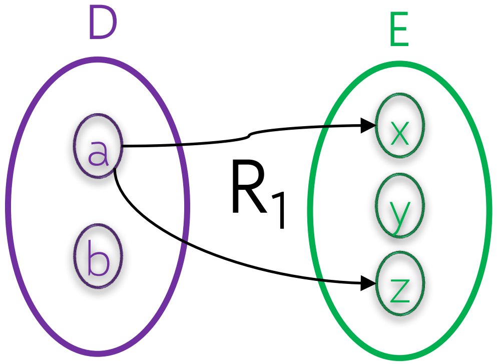


$R_3 \circ R_1 \subseteq D \times F$

$R_3 \circ R_1 = \{\langle a,r\rangle, \langle a,q\rangle\}$

$R_1 \subseteq D \times E$

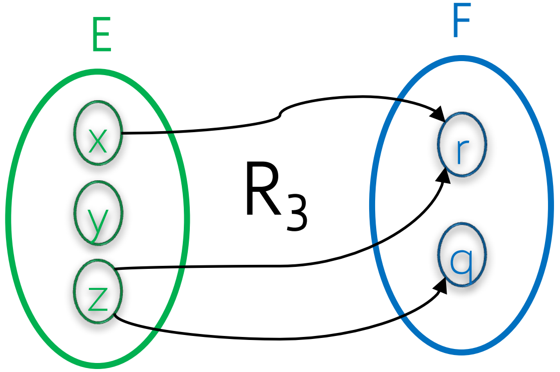
$R_1 = \{\langle a,x\rangle, \langle a,z\rangle\}$



$$M_{R1} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$R_3 \subseteq E \times F$

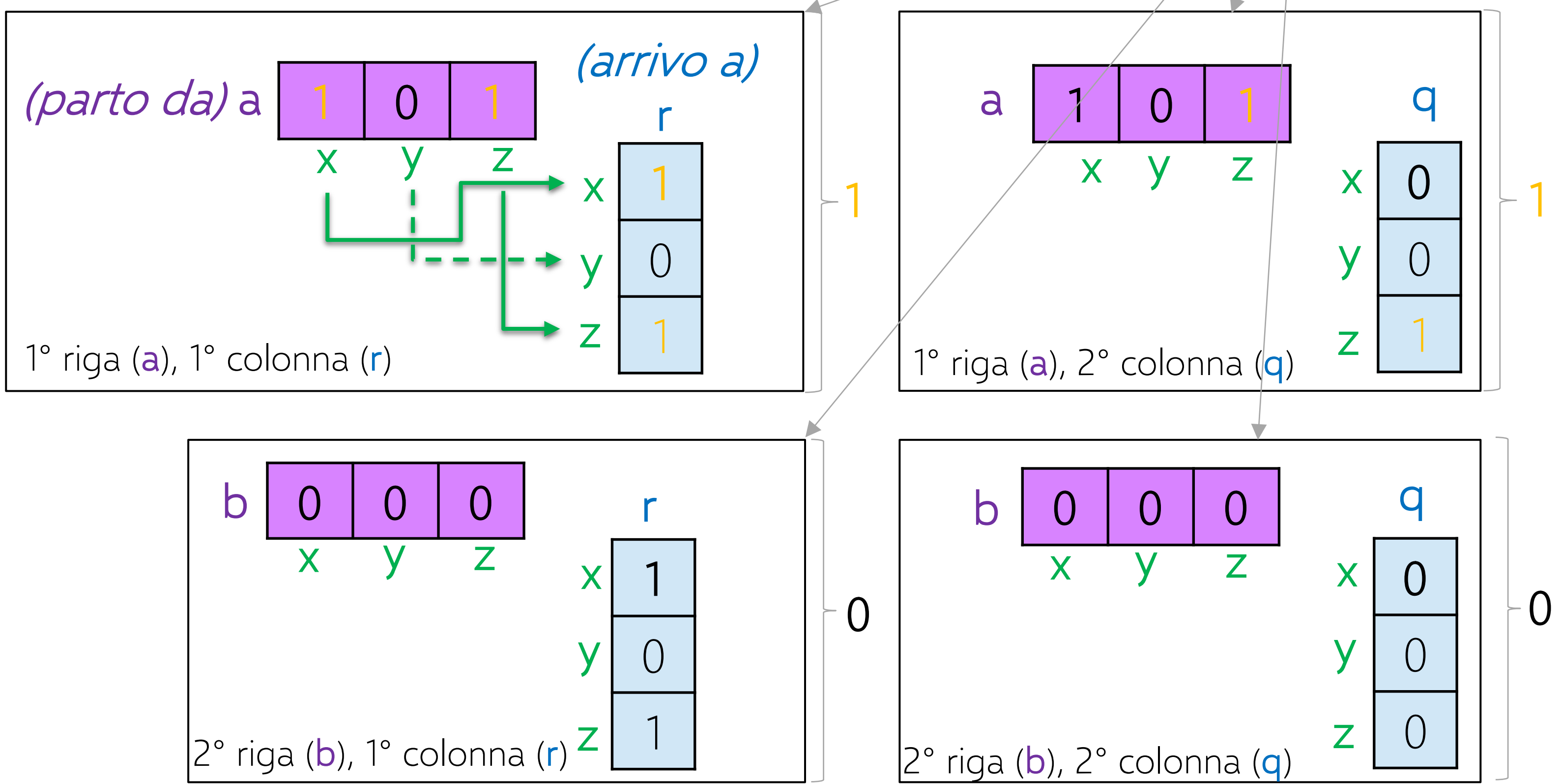
$R_3 = \{\langle x,r\rangle, \langle z,r\rangle, \langle z,q\rangle\}$



$$M_{R2} \quad \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & q \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$M_{R1} \odot M_{R3}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} x & y & z \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \odot \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & q \end{array} \\ \begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} r & q \end{array} \\ \begin{array}{c} a \\ b \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



Credits

Rafael Penaloza: rafael.penaloza@unimib.it

Stefania Bandini: stefania.bandini@unimib.it

Ugo Moscato: ugo.moscato@unimib.it

Matteo Palmonari: matteo.palmonari@unimib.it