LOGICA 2

Stefania Bandini

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Il *sistema di valutazione* $\mathcal{S} = \langle \mathcal{B}, \mathcal{T}, \mathcal{O}p \rangle$ della logica proposizionale è definito da

1. $\mathcal{B} = \{0, 1\}$;
2. $\mathcal{T} = \{1\}$;
3. $\mathcal{O}p = \{\mathcal{O}p_{\neg}, \mathcal{O}p_{\wedge}, \mathcal{O}p_{\vee}, \mathcal{O}p_{\rightarrow}, \mathcal{O}p_{\leftrightarrow}\}$ uno per ognuno dei connettivi del linguaggio $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, con $\mathcal{O}p_{\neg} : \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$ e $\mathcal{O}p_{\circ} : \mathcal{B} \times \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B}$, $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

TABELLA DEI VALORI DI VERITA'

		$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

VALUTAZIONE BOOLEANA

*Un'*assegnazione booleana $\mathcal{V}$ *ai simboli proposizionali* $\mathcal{P}$ *è una funzione totale*

$$\mathcal{V} : \mathcal{P} \rightarrow \{1, 0\}.$$

Una valutazione booleana

$$I_{\mathcal{V}} : \textsc{Prop} \mapsto \{1, 0\}$$

è l'estensione a PROP *di un'assegnazione booleana, cioè*

$$\begin{aligned}
I_{\mathcal{V}}(A) &= \mathcal{V}(A) \textit{ se } A \in \mathcal{P}; \\
I_{\mathcal{V}}(\top) &= 1; \\
I_{\mathcal{V}}(\bot) &= 0; \\
I_{\mathcal{V}}(\neg A) &= \mathcal{O}p_{\neg}(I_{\mathcal{V}}(A)); \\
I_{\mathcal{V}}(A \circ B) &= \mathcal{O}p_{\circ}(I_{\mathcal{V}}(A), I_{\mathcal{V}}(B)).
\end{aligned}$$

dove $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

VALUTAZIONE BOOLEANA

Definizioni

Una formula della logica proposizionale A *è* soddisfatta *da una valutazione booleana* $I_{\mathcal{V}}$ *se* $I_{\mathcal{V}}(A) = 1$.

Una formula della logica proposizionale A *è* tautologica, *ossia è una* tautologia, *se è soddisfatta da ogni valutazione booleana* $I_{\mathcal{V}}$.

Una formula della logica proposizionale A *è* contraddittoria, *ossia è una* contraddizione, *se non è soddisfatta da nessuna valutazione booleana* $I_{\mathcal{V}}$.

per determinare se una formula proposizionale A è soddisfacibile, tautologica o contraddittoria, basta costruire una tabella di valori di verità in cui compaiono $n+1$ colonne, dove n è il numero di simboli proposizionali distinti $A_1, A_2, \cdots A_n$ che compaiono in A e nella $n+1$-esima colonna viene riportato il corrispondente valore $I_{\mathcal{V}}(A)$. La tabella ha 2^n righe, tante sono le possibili assegnazioni distinte di valori di verità ai simboli di A.

VALUTAZIONE BOOLEANA

A_1	A_2	$\dots$	A_n	$I_{\mathcal{V}}(A)$
1	1	$\dots$	1	$I_{\mathcal{V}_1}(A)$
1	1	$\cdots$	0	$I_{\mathcal{V}_2}(A)$
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
0	0	$\cdots$	0	$I_{\mathcal{V}_{2^n}}(A)$

A è una tautologia sse l'ultima colonna contiene solo 1, è soddisfacibile sse essa contiene almeno un 1, è contraddittoria sse essa contiene tutti 0.

Una formula A è una tautologia sse $\neg A$ è una contraddizione.

EQUIVALENZA LOGICA

Diciamo che A implica logicamente B *sse ogniqualvolta* $I_{\mathcal{V}}(A) = 1$ *anche* $I_{\mathcal{V}}(B) = 1$.

Diciamo che due proposizioni A *e* B *sono* logicamente equivalenti *o* tautologicamente equivalenti *sse* $I_{\mathcal{V}}(A) = I_{\mathcal{V}}(B)$ *per ogni valutazione booleana* $I_{\mathcal{V}}$.
In tal caso scriviamo $A \equiv B$.

FORMULE TAUTOLOGICAMENTE EQUIVALENTI

1. Idempotenza

$$A \wedge A \equiv A$$
$$A \vee A \equiv A$$

2. Associatività

$$A \wedge (B \wedge C) \equiv (A \wedge B) \wedge C$$
$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$$
$$A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C) \equiv (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C$$

3. Commutatività

$$A \wedge B \equiv B \wedge A$$
$$A \vee B \equiv B \vee A$$
$$A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A$$

FORMULE TAUTOLOGICAMENTE EQUIVALENTI

4. Distributività

$$A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$$
$$A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

5. Assorbimento

$$A \wedge (A \vee B) \equiv A$$
$$A \vee (A \wedge B) \equiv A$$

6. Doppia negazione

$$\neg\neg A \equiv A$$

7. Leggi di De Morgan

$$\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$$
$$\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$$

FORMULE TAUTOLOGICAMENTE EQUIVALENTI

8. Terzo escluso

$$A \vee \neg A \quad \equiv \quad \top$$

9. Contrapposizione

$$A \to B \quad \equiv \quad \neg B \to \neg A$$

10. Contraddizione

$$A \wedge \neg A \quad \equiv \quad \perp.$$

Relativamente alla legge del terzo escluso, il fatto che $A \vee \neg A$ sia sempre vero sembra del tutto intuitivo. In effetti questa è una caratteristica della logica classica; in altre logiche, per esempio nella logica intuizionista, questo fatto non vale.

Intuitivamente ci si aspetta che, se una proposizione A è tautologicamente equivalente a una proposizione B, sostituendo A al posto di B all'interno di una formula C, il valore di verità di C non cambi.

Dal par 5.1: LINGUAGGIO E SEMANTICA

Solitamente $\mathcal{B}$ contiene esattamente due elementi $\mathcal{B}= \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$ (in tal caso la logica è detta "a due valori di verità": $\mathbf{t}$ sta per il vero, $\mathbf{f}$ sta per il falso), ma può anche contenerne tre, quattro, o un qualunque numero finito o infinito (anche non numerabile, come nel caso delle logiche "fuzzy"[3]); $\mathcal{T}$ è l'insieme dei valori che designano il vero. Nel caso della logica a due valori di verità, cioè nel caso $\mathcal{B}= \{\mathbf{t}, \mathbf{f}\}$, si avrà $\mathcal{T}= \{\mathbf{t}\}$.

Alternativamente alle funzioni di interpretazione, si può studiare il significato di una formula in una "struttura" matematica o "realtà": invece di una notazione funzionale si adotta una notazione relazionale, basata sulla relazione di *soddisfacibilità* $\models$, dove $\models \subseteq \mathcal{M} \times \mathcal{F}$; $\mathcal{M}$ è una struttura e $\mathcal{M} \models A$ si legge "$\mathcal{M}$ modella A". In questo contesto una frase si dirà valida sse $\mathcal{M} \models A$ vale per ogni $\mathcal{M}$.

MODELLI

Sia $\mathcal{M}$ un insieme di simboli proposizionali, definiamo $\models \subseteq (\mathcal{M} \times \mathcal{L})$ ricorsivamente come segue.

1. $\mathcal{M} \models A$ sse $A \in \mathcal{M}$;
2. $\mathcal{M} \models \top$ e $\mathcal{M} \not\models \bot$;
3. $\mathcal{M} \models \neg A$ sse non $(\mathcal{M} \models A)$ sse $\mathcal{M} \not\models A$;
4. $\mathcal{M} \models A \wedge B$ sse $\mathcal{M} \models A$ e $\mathcal{M} \models B$;
5. $\mathcal{M} \models A \vee B$ sse $\mathcal{M} \models A$ oppure $\mathcal{M} \models B$;
6. $\mathcal{M} \models A \rightarrow B$ sse $\mathcal{M} \not\models A$ oppure $\mathcal{M} \models B$;
7. $\mathcal{M} \models A \leftrightarrow B$ sse $\mathcal{M} \models A$ e $\mathcal{M} \models B$, oppure $\mathcal{M} \not\models A$ e $\mathcal{M} \not\models B$.

MODELLI

La relazione con la valutazione booleana è data dal fatto che l'insieme dei simboli proposizionali che appartengono a $\mathcal{M}$ hanno valutazione booleana 1, e gli altri hanno valutazione booleana 0, ovvero

$$p \in \mathcal{M} \text{ sse } \mathcal{V}(p) = 1.$$

Dunque il passo base della definizione ricorsiva di $\models$ coincide con la definizione di assegnazione booleana $\mathcal{V}$. Il passo ricorsivo, sui connettivi $\neg$ e $\wedge$, in realtà, sfrutta una nozione metalogica come "non" ed "e". Tuttavia la definizione è giustificata dal fatto che si può basare su $I_{\mathcal{V}}$, che estende unicamente $\mathcal{V}$.

Osserviamo che, nella definizione di $\models$, stiamo sottintendendo il linguaggio proposizionale $\mathcal{L}$. Nel caso in cui non sia chiaro dal contesto a quale linguaggio ci si riferisce, allora si usa indicare $\models_{\mathcal{L}}$.

MODELLI

Definizioni

Sia A una formula, se $\mathcal{M} \models A$ diciamo che $\mathcal{M}$ è un modello *di A, ovvero che* $\mathcal{M}$ rende vera A.

Se $\mathcal{M}$ rende vere tutte le formule di un insieme Γ, cioè se $\mathcal{M} \models A$, per ogni formula A in Γ, diciamo che $\mathcal{M}$ è un modello *per Γ e indichiamo questo con $\mathcal{M} \models \Gamma$.*

Se A è una tautologia, possiamo scrivere $\models A$, in quanto A è vera in ogni modello, compreso quello vuoto.

Se $\mathcal{M} \models A$ per qualche $\mathcal{M}$, allora diciamo che A è soddisfacibile.

Se per nessun insieme di simboli proposizionali $\mathcal{M}$ è verificato che $\mathcal{M} \models A$ allora diciamo che A è insoddisfacibile.

Quindi una formula è insoddisfacibile sse per essa non esiste alcun modello.

MODELLI

Il simbolo $\models$ è giustificato quando si considerano le nozioni di implicazione tautologica e di equivalenza tautologica, perché permettono una semplificazione notazionale.

Infatti se A *implica tautologicamente* B scriviamo $\models A \to B$. Dato un insieme di proposizioni Γ e una proposizione A, se Γ *implica logicamente* A scriviamo $\Gamma \models A$. Infine, se A è *tautologicamente equivalente a* B, cioè se $A \equiv B$, scriviamo $\models A \leftrightarrow B$.

$$\Gamma \models A \textit{ sse } \Gamma \cup \{\neg A\} \textit{ è insoddisfacibile}.$$

MODELLI

Esempi

1. La formula $A \wedge B$ ha $\{A, B\}$ come (unico) modello. Dunque la formula è soddisfacibile.
2. La formula $A \wedge \neg B$ ha $\{A\}$ come modello.
3. La formula $A \wedge \neg A$ non ha alcun modello. Dunque la formula non è soddisfacibile.
4. La formula $A \to B$ ha $\{\}$, $\{B\}$ e $\{A, B\}$ come modelli; mentre $\{A\}$ non è un modello.
5. La formula $A \vee B$ ha $\{A\}$, $\{B\}$ e $\{A, B\}$ come modelli.
6. Sia $A \to ((B \wedge C) \vee (C \to \neg A))$, la formula dell'esempio 79 a pagina 121. $\mathcal{M} = \{A, B\}$ è un modello per essa. Il lettore verifichi se la formula ha o no altri modelli.

MODELLI

Definizioni

Un insieme di formule Γ si dice finitamente soddisfacibile *sse ogni suo sottoinsieme finito è soddisfacibile.*

Un insieme di formule Γ si dice massimale *sse per ogni A di $\mathcal{L}$ si ha $A \in \Gamma$ oppure $\neg A \in \Gamma$.*

Sia Γ un insieme di formule. Se ogni sottoinsieme finito di Γ è soddisfacibile, allora per ogni formula A, ogni sottoinsieme finito di $\Gamma \cup \{A\}$ o di $\Gamma \cup \{\neg A\}$ è soddisfacibile.

Teorema di Compattezza della Sodisfacibilità

Un insieme di proposizioni Γ è soddisfacibile sse è finitamente soddisfacibile.

oppure

Un insieme Γ di formule è insoddisfacibile sse esiste un sottoinsieme finito $\Delta \subseteq \Gamma$

MODELLI

Esempio: Modelli e Insoddisfacibilità

Verifichiamo che (a) $A \wedge B \models B$ e che (b) $\{A \wedge B\} \cup \{\neg B\}$ è insoddisfacibile.

(a) Sia $\mathcal{M} = \{A, B\}$. $\mathcal{M}$ è il più piccolo modello che soddisfa $A \wedge B$, infatti, nessun sottoinsieme proprio di $\mathcal{M}$ è un modello di $A \wedge B$. Ovviamente $\mathcal{M}$ soddisfa anche B. Ogni modello $\mathcal{M}'$ che contiene $\mathcal{M}$ è un modello di $A \wedge B$ e anche un modello di B. Quindi (a) vale.

(b) Se esistesse $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \models \{A \wedge B\} \cup \{\neg B\}$ avremmo $\mathcal{M} \models A$, $\mathcal{M} \models B$, e $\mathcal{M} \models \neg B$: contraddizione.

DECIDIBILITA' DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

La logica proposizionale è decidibile (per la nozione di decidibilità si veda l'appendice, al paragrafo A.2). In effetti, la logica proposizionale si chiama calcolo delle proposizioni perché esiste una *procedura effettiva* che stabilisce se una proposizione A è una tautologia o meno. Nel caso del calcolo proposizionale possiamo sempre essere in grado di calcolare le formule vere del linguaggio. In verità, come vedremo nel caso della logica del primo ordine, la dizione calcolo si usa anche qualora si abbia una logica semidecidibile.

Per verificare la decidibilità del calcolo proposizionale siamo interessati a decidere se una formula A del calcolo proposizionale è una tautologia o meno.

un insieme Γ di formule è enumerabile se può essere trasformato in una sequenza

DECIDIBILITA' DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Tabella di verità per $P \to (Q \to P)$

P	$\to$	Q	$\to$	P
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	0	1	0

Il valore della quarta colonna è $I_{\mathcal{V}}(Q \to P)$ secondo le assegnazioni booleane a P e Q. Il valore della seconda colonna, ovvero della colonna del connettivo principale, è $I_{\mathcal{V}}(P \to (Q \to P))$.

COMPLETEZZA DI INSIEMI DI CONNETTIVI

I connettivi definiscono delle funzioni da $\{0,1\}$ (nel caso del connettivo unario $\neg$) oppure $\{0,1\}\times\{0,1\}$ (nel caso dei connettivi binari $\vee, \wedge, \ldots$) in $\{0,1\}$. Ciascuna di queste funzioni, dette *funzioni booleane*, è definita attraverso la relativa tabella dei valori di verità oppure, equivalentemente, attraverso le funzioni $\mathcal{O}p_\neg$ e $\mathcal{O}p_\circ$, $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$.

Più in generale, ogni formula proposizionale A contenente simboli proposizionali distinti $A_1, A_2, \ldots, A_n$ definisce una funzione booleana da $\{0,1\}^n$ in $\{0,1\}$.

Definizione *Sia A una formula della logica proposizionale contenente esattamente n atomi distinti $A_1, A_2, \ldots, A_n$; la funzione $f_A : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$ tale che $f_A(v_1, v_2, \ldots, v_n) = I_{\mathcal{V}}(A)$, dove $\mathcal{V}$ è l'interpretazione per cui $\mathcal{V}(A_i) = v_i$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, n$ è detta la* funzione di verità *associata ad A.*

COMPLETEZZA DI INSIEMI DI CONNETTIVI

Quindi, ogni proposizione del calcolo proposizionale definisce una funzione n-aria (possiamo anche chiamarla connettivo n-ario), dove n è il numero degli atomi distinti che in essa compaiono. Si può facilmente verificare che, per ogni n esistono 2^{2^n} funzioni booleane distinte (cioè tante quanti sono i sottoinsiemi di $\{0,1\}^n$). Quindi, nel caso di $n = 2$ esistono 16 connettivi distinti. Noi ne abbiamo introdotti 4, e – come alcune equivalenze logiche introdotte precedentemente hanno mostrato – essi non sono indipendenti, nel senso che alcuni sono esprimibili in termini di altri.

Definizione *Dato un insieme di connettivi C e un connettivo $c \notin C$ per cui si abbia una funzione di verità $f_c = Op_c$, si dice che c* si deriva da *(oppure si* definisce in termini dei*) connettivi di C se esiste una formula proposizionale F costruita usando solo i connettivi di C tale che $f_c \equiv f_F$.*

COMPLETEZZA DI INSIEMI DI CONNETTIVI

Esempio Definizione di connettivi

Il connettivo $\wedge$ si può definire in termini di $\{\neg, \vee\}$ nel seguente modo: $(A \wedge B) \equiv \neg(\neg A \vee \neg B)$.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \vee \neg B$	$\neg(\neg A \vee \neg B)$	$A \wedge B$
1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	0	0

COMPLETEZZA DI INSIEMI DI CONNETTIVI

Teorema *Nella logica proposizionale valgono le seguenti equivalenze logiche.*

$$
\begin{array}{rcl}
(A \rightarrow B) & \equiv & (\neg A \vee B) \\
(A \vee B) & \equiv & (\neg A \rightarrow B) \\
(A \vee B) & \equiv & \neg(\neg A \wedge \neg B) \\
(A \wedge B) & \equiv & \neg(\neg A \vee \neg B) \\
(A \wedge B) & \equiv & (((A \rightarrow \bot) \rightarrow \bot) \rightarrow (B \rightarrow \bot)) \rightarrow \bot \\
\neg A & \equiv & A \rightarrow \bot \\
\bot & \equiv & A \wedge \neg A \\
(A \leftrightarrow B) & \equiv & (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A).
\end{array}
$$

Si noti che la costante proposizionale $\bot$ (così come la costante proposizionale $\top$) può essere considerata come un connettivo 0-ario.

COMPLETEZZA DI INSIEMI DI CONNETTIVI

Un insieme di connettivi logici $\mathcal{C}$ si dice completo *sse, data una qualunque $f : \{0,1\}^n \mapsto \{0,1\}$ esiste una formula proposizionale A costruita mediante i connettivi dell'insieme $\mathcal{C}$ tale che $f \equiv f_A$.*

In particolare, un insieme di connettivi logici è completo se mediante i suoi connettivi si può esprimere qualunque altro connettivo.

LOGICA 2

END