STRUTTURE RELAZIONALI, GRAFI E ORDINAMENTI

(parte 1)

Stefania Bandini

REPETITA IUVANT

Quest locuzione significa "le cose ripetute aiutano": una cosa, a forza di essere ripetuta, viene appresa da chi ascolta.

RELAZIONI BINARIE

Una *relazione binaria* R tra due insiemi S e T è un insieme di coppie ordinate $\langle x, y \rangle$ con $x \in S$ e $y \in T$: $R \subseteq S \times T$).

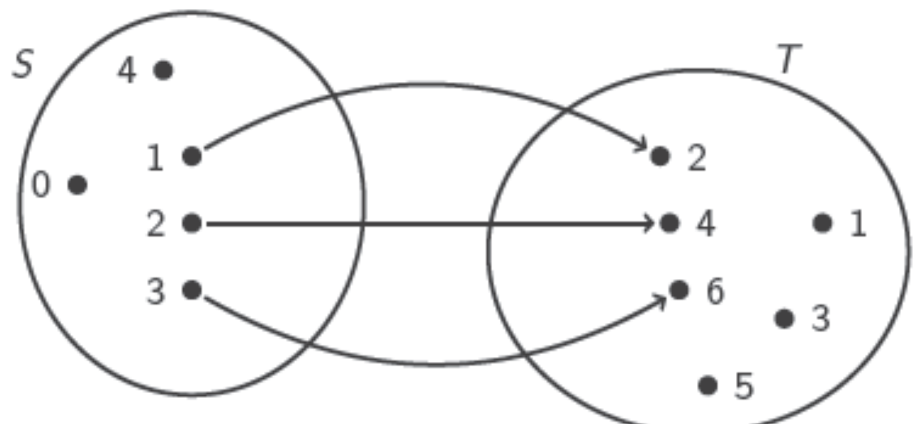
Rappresentazione di una relazione (I)

Le relazioni possono essere rappresentate di diverse forme:

Rappresentazione per elencazione descrivere l'insieme di coppie ordinate

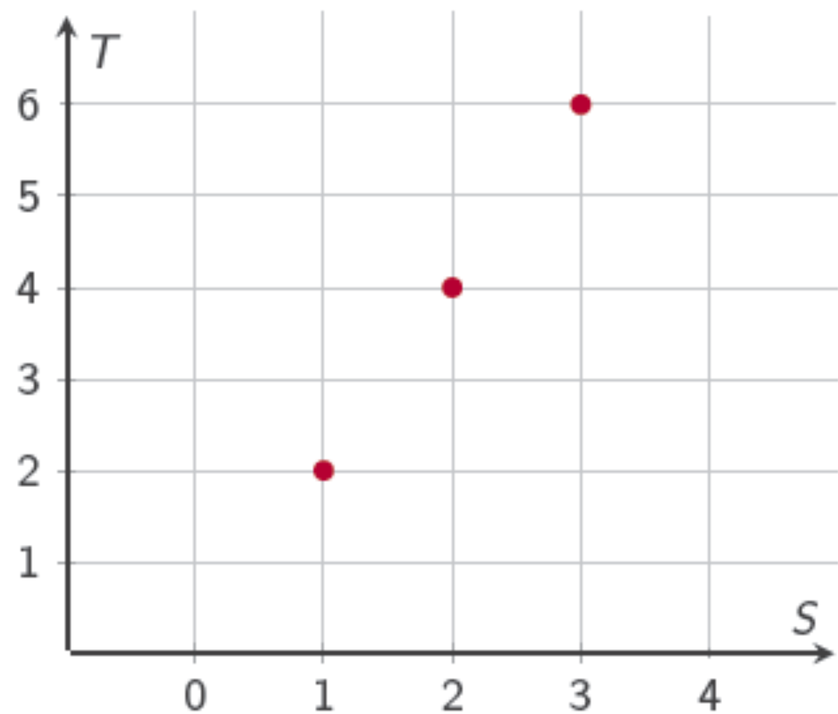
$$R = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 4\rangle, \langle 3, 6\rangle\}$$

Rappresentazione sagittale collegare con delle frecce gli elementi che verificano la relazione



Rappresentazione di una relazione (II)

Rappresentazione tramite diagramma cartesiano se S e T sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}$, rappresentare coppie ordinate come coordinate sul piano cartesiano



Rappresentazione di una relazione (III)

Rappresentazione tramite tabella con colonne gli elementi dell'insieme di arrivo, e righe l'insieme di partenza

$S \backslash T$	1	2	3	4	5	6
0						
1		×				
2				×		
3						×
4						

Una **Matrice Booleana** se le crocette si scrivono con un 1 e le celle vuote con 0

Relazioni in un insieme

Una relazione $R \subseteq S \times S$ è detta **relazione in** S

In una relazione in S, la rappresentazione sagittale collassa ad un **grafo**. Usiamo lo stesso insieme per l'origine e la destinazione di ogni freccia

Formalmente, un grafo è costituito da **nodi** collegati tra loro da frecce (o **spigoli**)

Grafo

Se $\langle x, y \rangle \in R$, disegniamo uno spigolo da x a y

coppie	**grafo**
$\langle x, y \rangle \in R$	
$\langle x, x \rangle \in R$	
$\langle x, y \rangle \in R$ e $\langle y, x \rangle \in R$	

Proprietà fondamentali delle relazioni

Data una relazione binaria R su un insieme (dominio) S diciamo che:

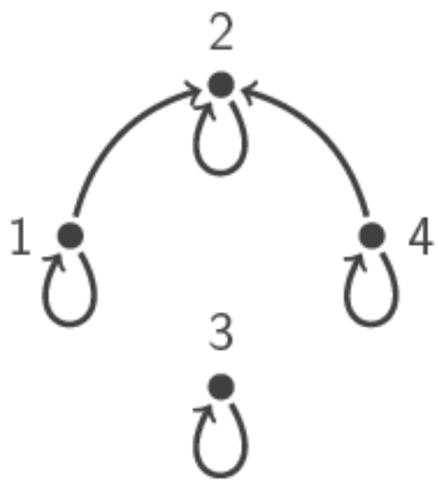
R è *riflessiva* se $\langle x, x \rangle \in R$ per ogni $x \in S$;
R è *irriflessiva* se $\langle x, x \rangle \notin R$ per ogni $x \in S$;
R è *simmetrica* se $\langle x, y \rangle \in R$ qualora $\langle y, x \rangle \in R$;
R è *asimmetrica* se $\langle x, y \rangle \in R$ implica che $\langle y, x \rangle \notin R$;
R è *antisimmetrica* se $\langle x, y \rangle \in R$ e $\langle y, x \rangle \in R$ implica $x = y$;
R è *transitiva* se $\langle x, y \rangle \in R$ e $\langle y, z \rangle \in R$ comporta che $\langle x, z \rangle \in R$.

Riflessività

- "x ha la stessa età di y" è riflessiva
- "x è figlio di y" non è riflessiva

Visualizzazione

Grafo



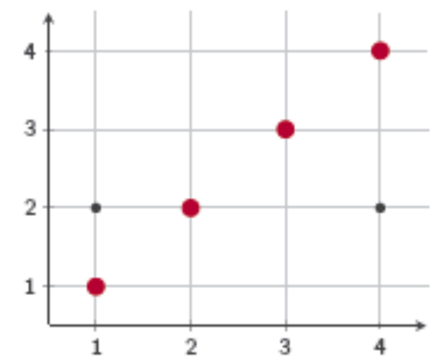
Ogni nodo ha un cappio

Tabella

	1	2	3	4
1	×	×		
2		×		
3			×	
4		×		×

Ogni casella della diagonale principale ha una crocetta

Diagramma cartesiano

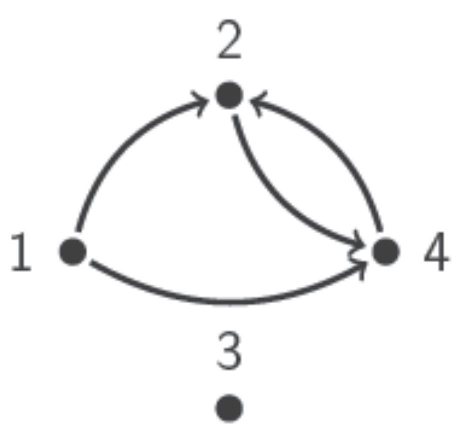


Ogni punto sulla bisettrice è contrassegnato

Irriflessività

- “x è figlio di y” è irriflessiva
- “x è divisore di y” non è irriflessiva

Grafo



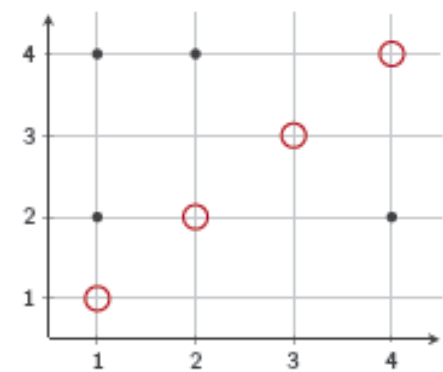
Nessun nodo ha un cappio

Tabella

	1	2	3	4
1		×		×
2				×
3				
4		×		

Nessuna casella della diagonale ha una crocetta

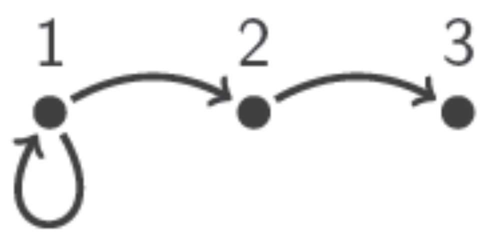
Diagramma cartesiano



Nessun punto sulla bisettrice è contrassegnato

Riflessività ed irriflessività

Ci sono relazioni che non sono né riflessive né irriflessive

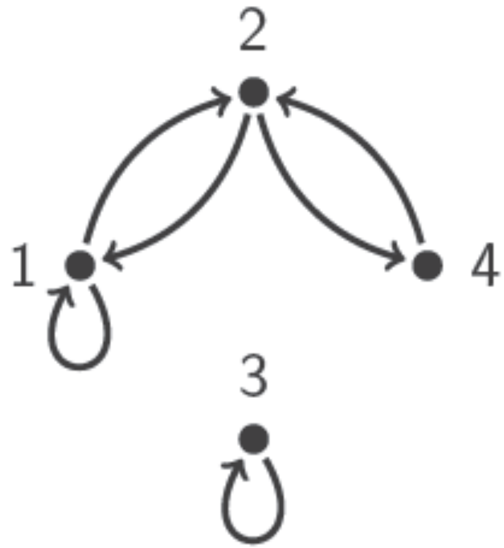


- Non è riflessiva perchè $\langle 2,2\rangle \notin R$
- Non è irriflessiva perchè $\langle 1,1\rangle \in R$

Simmetria

- "x è fratello o sorella di y" è simmetrica
- "x è figlio di y" non è simmetrica

Grafo



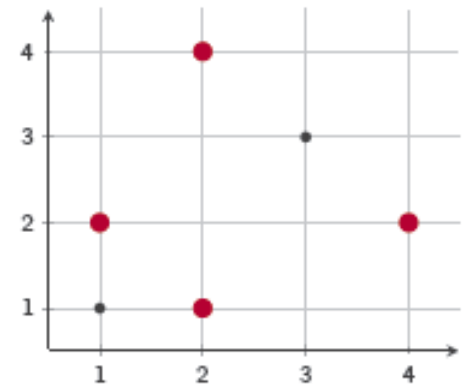
Per ogni freccia c'è anche l'inverso

Tabella

	1	2	3	4
1	×	×		
2	×			×
3			×	
4		×		

La tabella è simmetrica rispetto alla diagonale

Diagramma cartesiano



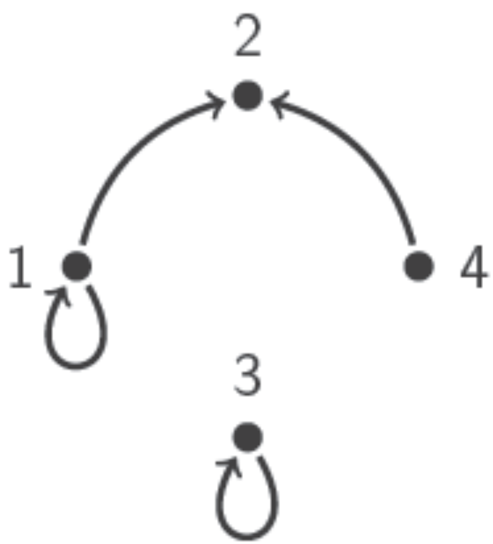
Il diagramma è simmetrico rispetto alla bisettrice

Antisimmetria

Per ogni $x, y \in S$, se $x \neq y$ e xRy, allora $\langle y, x \rangle \notin R$

- "x è figlio di y" è antisimmetrica
- "x è fratello di y" non è antisimmetrica

Grafo



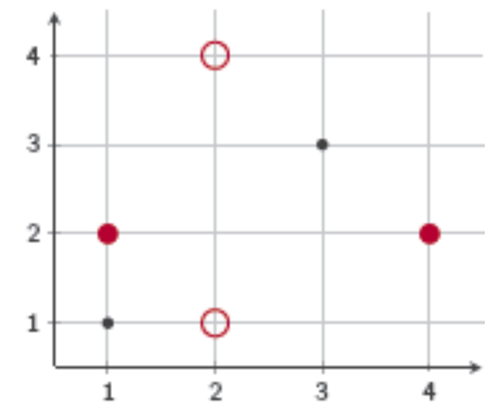
Per ogni freccia, non c'è l'inverso (tranne i cappi)

Tabella

	1	2	3	4
1	×	×		
2				
3			×	
4		×		

Per ogni crocetta, la cella opposta sulla diagonale è libera

Diagramma cartesiano



Per ogni punto, l'opposto sulla bisettrice è libero

Simmetria ed antisimmetria

Ci sono relazioni che non sono né simmetriche né antisimmetriche

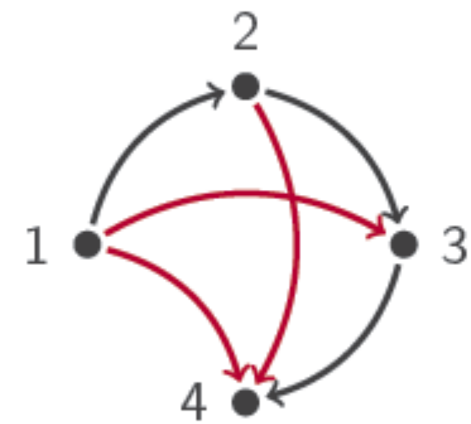
- Non è simmetrica perchè $\langle 1, 2\rangle \in R$ ma $\langle 2, 1\rangle \notin R$
- Non è antisimmetrica perchè $\langle 2, 3\rangle \in R$ e $\langle 3, 2\rangle \in R$

Transitività

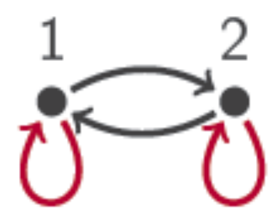
- "x e y sono dallo steso anno" è transitiva
- "x è figlio di y" non è transitiva

In questo caso, l'unica rappresentazione utile è tramite grafo.

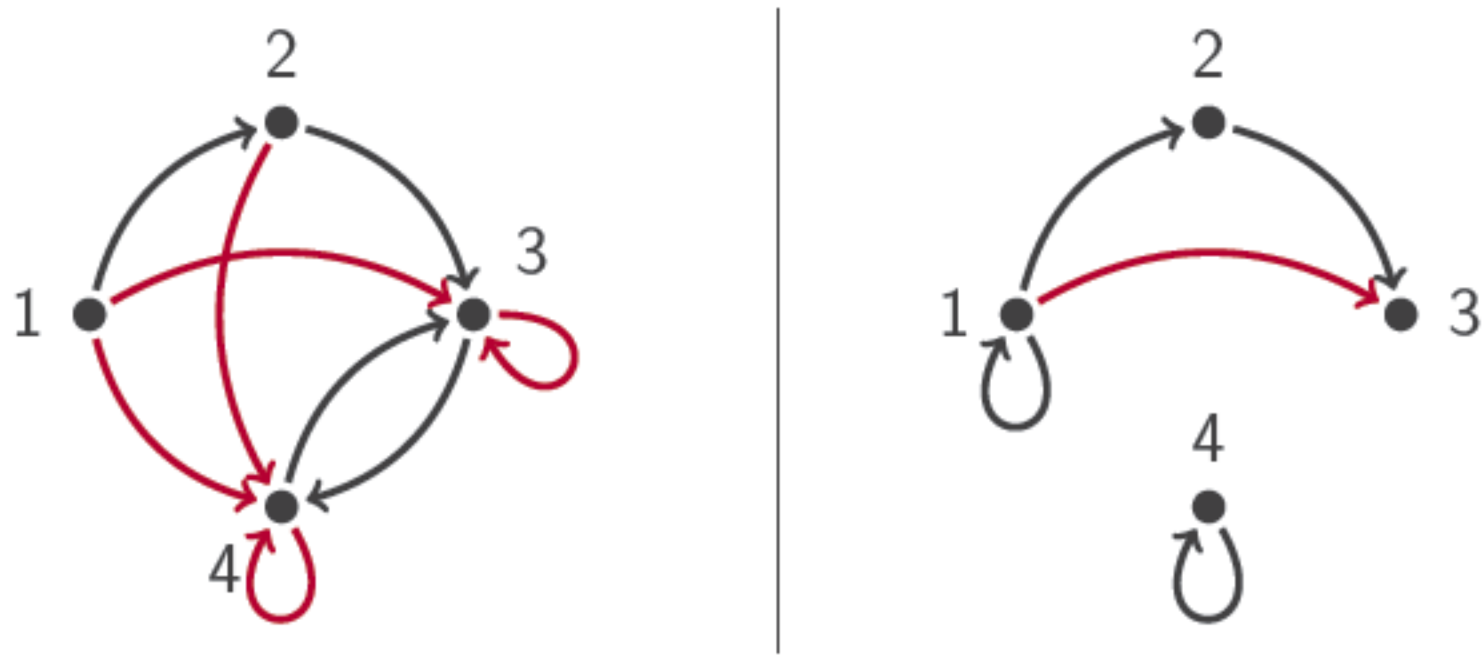
1. Ogni nodo che è **raggiungibile** è direttamente collegato



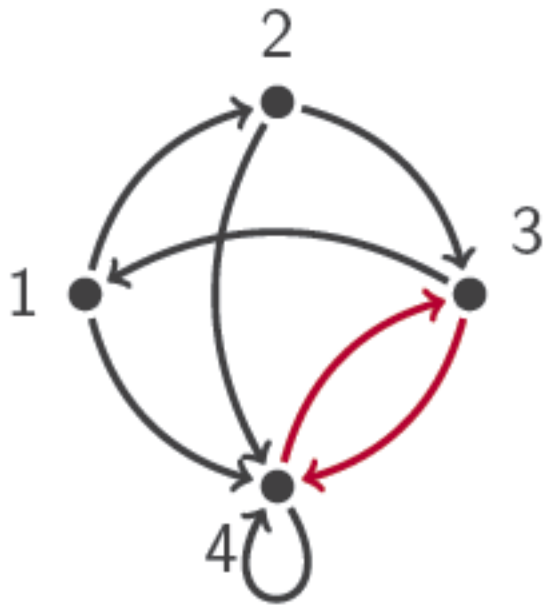
2. Se un nodo può raggiungere **se steso** allora ha un cappio

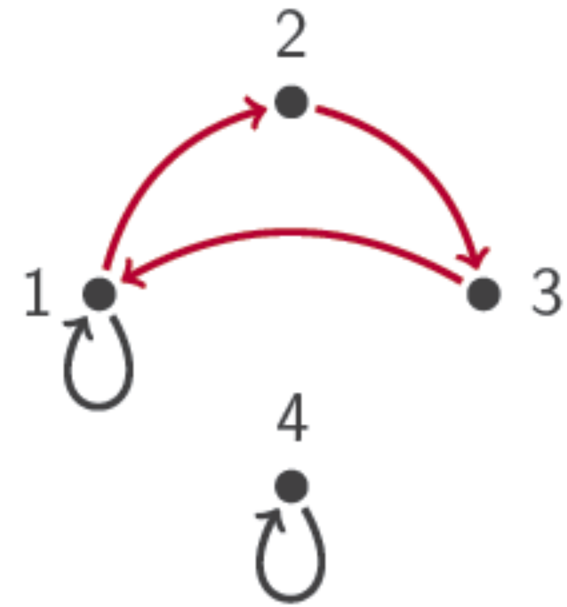


Esempio: Relazioni transitive



Esempio: Relazioni non transitive





Manca il cappio a 3	Manca $\langle 1, 3 \rangle$

Proprietà

Una relazione $R \subseteq S \times S$ in S è

connessa se ogni due elementi sono collegati. Per ogni $x, y \in S$, se $x \neq y$ allora $\langle x, y \rangle \in R$ oppure $\langle y, x \rangle \in R$

relazione di equivalenza se è riflessiva, transitiva e simmetrica

Esempio

Sia $A = \{marco, luca, giorgio, eva, anna\}$ e
$AmicoDi \subseteq A \times A$ la relazione definita estensionalmente per

$$AmicoDi = \{ \langle luca, giorgio \rangle , \langle giorgio, luca \rangle , \langle luca, eva \rangle , \langle eva, luca \rangle , \langle eva, anna \rangle , \langle anna, eva \rangle \}$$

Rappresentare *AmicoDi* con una matrice Booleana ed indicare le sue proprietà

AmicoDi è una relazione di equivalenza?

La relazione è simmetrica ma non riflessiva né transitiva

Proprietà delle relazioni

$R \subseteq S \times S$ è:

riflessiva se $\langle x, x \rangle \in R$ per ogni $x \in S$

irriflessiva se $\langle x, x \rangle \notin R$ per ogni $x \in S$

simmetrica se $\langle x, y \rangle \in R$ qualora $\langle y, x \rangle \in R$

asimmetrica se $\langle x, y \rangle \in R$ implica che $\langle y, x \rangle \notin R$

antisimmetrica se $\langle x, y \rangle \in R$ e $\langle y, x \rangle \in R$ implica $x = y$

transitiva se $\langle x, y \rangle \in R$ e $\langle y, z \rangle \in R$ implica che $\langle x, z \rangle \in R$

Esempio 1. • **Proprietà di relazioni**

1. La relazione "essere sposati con" sull'insieme U degli esseri umani non è riflessiva, è simmetrica, non è transitiva.

2. La relazione "essere figlio di" sull'insieme U degli esseri umani non è riflessiva, non è simmetrica (è asimmetrica), non è transitiva.

3. La relazione "essere avo di" sull'insieme U degli esseri umani non è riflessiva, non è simmetrica (è asimmetrica), è transitiva.

4. $R = \{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \neq y\}$, R è la relazione di diseguaglianza ed è irriflessiva, non è transitiva, è simmetrica.

5. $R = \emptyset \subseteq S \times S$ è la relazione vuota sull'insieme S. R non è riflessiva, poiché $\langle x, x\rangle \notin R$, per tutti gli elementi di S.

Proposizione 1. *Siano R ed R' relazioni su S,*

1. *se R è riflessiva anche R^{-1} è riflessiva;*
2. *R è riflessiva sse $\overline{R}$ è irriflessiva;*
3. *se R ed R' sono riflessive anche $R \cup R'$ e $R \cap R'$ sono riflessive.*

Indichiamo con $\Im_S$ la *relazione di uguaglianza* o *identità* su un generico insieme S:

$$\Im_S = \{\langle x, x\rangle | x \in S\}$$

$\Im_S$ è riflessiva e il suo complemento $\overline{\Im_S}$ è irriflessiva.

Proprietà di relazioni

Proposizione 2. *Siano R ed R' relazioni su S,*

1. *R è simmetrica sse $R = R^{-1}$;*
2. *se R è simmetrica anche R^{-1} e $\overline{R}$ sono simmetriche;*
3. *R è antisimmetrica sse $R \cap R^{-1} \subseteq \Im_S$;*
4. *R è asimmetrica sse $R \cap R^{-1} = \emptyset$;*
5. *se R ed R' sono simmetriche anche $R \cup R'$ e $R \cap R'$ sono simmetriche.*

Proposizione 3. *Siano R ed R' relazioni su S, se R ed R' sono transitive anche $R \cap R'$ è transitiva.*

RELAZIONI *n*-ARIE

Una relazione n-aria su un insieme S è un sottoinsieme di S^n, $n \geq 1$. Se $n = 1$ la relazione R su S si dice *unaria*.

Se $n = 2$ la relazione R su S si dice *binaria*.

Se $n = 3$ la relazione R su S si dice *ternaria*.

$\ldots$

TABELLE E MATRICI BOOLEANE

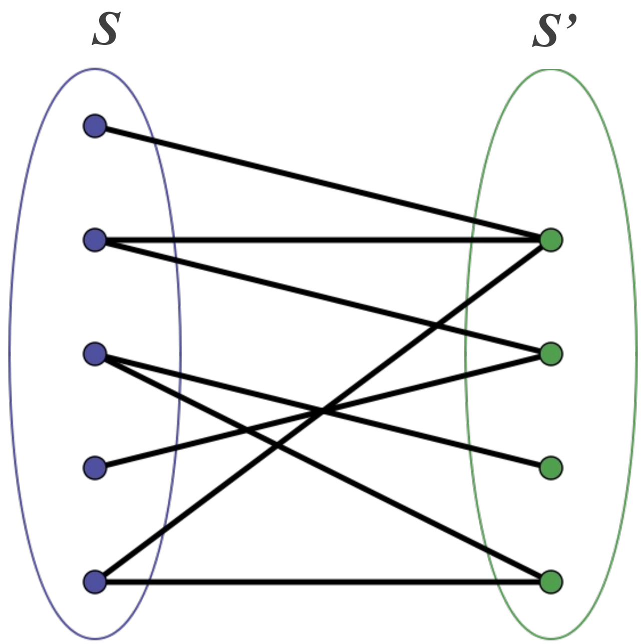
Le relazioni n-arie vengono di solito visualizzate mediante *tabelle* a n colonne. Se la relazione R è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n$, la colonna i-esima della tabella che la rappresenta conterrà gli elementi dell'insieme S_i che fanno parte di n-uple per cui la relazione R vale.

La seguente tabella rappresenta una parte della relazione ternaria che associa a un certo insieme di persone il relativo anno di nascita e la nazione di origine.

Giorgio	1946	Italia
Giulio	1952	Italia
Harry	1972	USA
Wolfgang	1989	Germania
...	...	...

GRAFI BIPARTITI

Sia R un relazione su $S \times S'$. Un grafo bipartito viene visualizzato elencando gli elementi dei due insiemi e collegando con frecce (che vanno da elementi del primo insieme ad elementi del secondo) quelle coppie di elementi che sono in R.

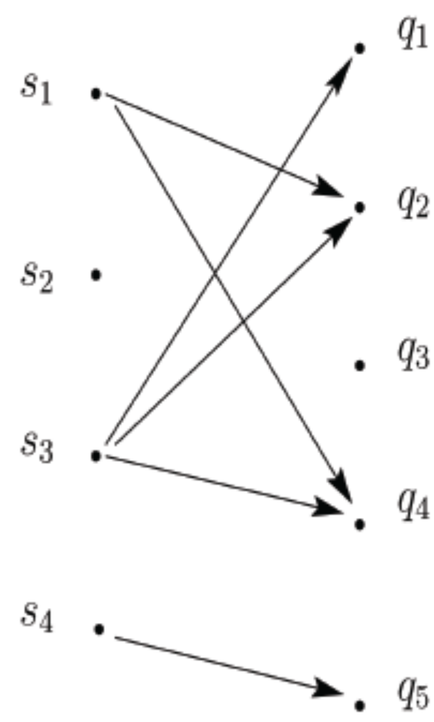


GRAFI BIPARTITI

Esempio

Siano dati due insiemi; $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$ e $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$. Sia data la relazione binaria G su $S \times Q$

$$\{\langle s_1, q_2\rangle, \langle s_1, q_4\rangle, \langle s_3, q_2\rangle, \langle s_3, q_4\rangle, \langle s_3, q_1\rangle, \langle s_4, q_5\rangle\}$$

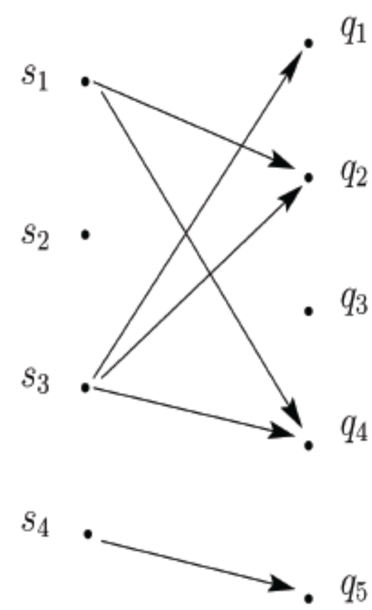


RAPPRESENTAZIONE TABELLARE DI RELAZIONI BINARIE

Esempio

La stessa relazione dell'esempio precedente può essere rappresentata mediante la seguente tabella

s_1	q_2
s_1	q_4
s_3	q_2
s_3	q_4
s_3	q_1
s_4	q_5



MATRICI BOOLEANE

Una relazione binaria può anche essere rappresentata mediante una *matrice booleana* a valori in $\{0, 1\}$.

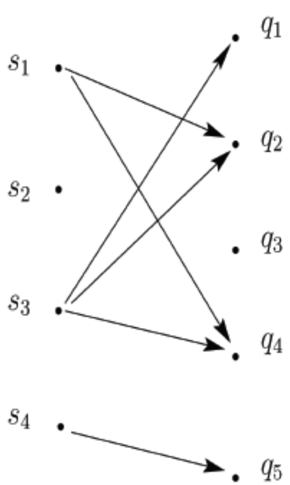
Siano $S = \{s_1, s_2, \ldots s_n\}$ e $T = \{t_1, t_2, \ldots t_m\}$ due insiemi finiti rispettivamente di cardinalità n ed m. Sia $R \subseteq S \times T$. La *matrice booleana* M_R *associata* a R ha n righe ed m colonne (che corrispondono rispettivamente agli n elementi di S e agli m elementi di T), e gli elementi sono così definiti

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{sse } \langle s_i, t_j \rangle \in R \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

MATRICI BOOLEANE

Esempio

La matrice booleana M_R associata alla relazione *R* introdotta precedentemente ha 4 righe (n = 4) e 5 colonne (m = 5) ed è la seguente



s_1	q_2
s_1	q_4
s_3	q_2
s_3	q_4
s_3	q_1
s_4	q_5

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

MATRICI BOOLEANE

Proprietà di $\mathbf{M}_R$

Sia *R* una relazione su *S*.

1. R è *riflessiva* sse M_R ha tutti 1 sulla diagonale principale;
2. R è *irriflessiva* sse M_R ha tutti 0 sulla diagonale principale;
3. R è *simmetrica* sse M_R è una matrice simmetrica;
4. R è *asimmetrica* sse in M_R si ha che se $m_{ij} = 1$, per $i \neq j$, allora $m_{ji} = 0$.

MATRICI BOOLEANE

Proprietà di $\mathbf{M}_R$

Sia *R* una relazione su *S*.

1. $M_{\overline{R}}$ *è costituita dai seguenti elementi*

$$\overline{m}_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{sse } m_{ij} = 0 \\ 0 & \textit{sse } m_{ij} = 1 \end{cases}$$

2. $M_{R^{-1}}$ *è la trasposta di* M_R.

MATRICI BOOLEANE

Sia $S = \{a, b, c\}$, $R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, c\rangle\}$.

$$M_R = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

R non è nè riflessiva, nè simmetrica. Sia $R' = R \cup \{\langle b, b\rangle\}$.

$$M_{R'} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

R' è riflessiva, non è simmetrica. Sia $R'' = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$.

$$M_{R''} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

R'' è la relazione di uguaglianza $\Im_S$ e $M_{R''}$ è la matrice identità.

OPERAZIONI SU MATRICI BOOLEANE

Siano $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ due matrici booleane di dimensioni $n \times m$. $A \sqcup B = C$ è il *join* di A e B, dove C è una matrice booleana i cui elementi sono

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{ij} = 1 \text{ o } b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{se } a_{ij} = 0 \text{ e } b_{ij} = 0 \end{cases}$$

$A \sqcap B = C$ è il *meet* di A e B, dove C è una matrice booleana i cui elementi sono

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{ij} = 1 \text{ e } b_{ij} = 1 \\ 0 & \text{se } a_{ij} = 0 \text{ o } b_{ij} = 0 \end{cases}$$

$\sqcup$ e $\sqcap$ sono operazioni commutative, associative e distributive.

PRODOTTO BOOLEANO

Siano $A = [a_{ij}]$ e $B = [b_{ij}]$ due matrici booleane rispettivamente di dimensioni $n \times m$ e $m \times p$. Definiamo $A \odot B = C$ il *prodotto booleano* di A e B, dove C è una matrice booleana di dimensioni $n \times p$ i cui elementi sono

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } a_{ik} = 1 \text{ e } b_{kj} = 1 \text{ per qualche } k, 1 \leq k \leq m \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

1. $\odot$ *è associativa, ma non commutativa.*

COMPOSIZIONE DI RELAZIONI

Data una relazione R_1 su $S \times T$ e una relazione R_2 su $T \times Q$ si può definire una nuova relazione $R_2 \circ R_1$ su $S \times Q$ come segue

$$\langle a, c \rangle \in R_2 \circ R_1 \text{ sse esiste un } b \in T \text{ tale che } \langle a, b \rangle \in R_1 \text{ e } \langle b, c \rangle \in R_2.$$

La relazione $R_2 \circ R_1$ è detta *composizione* di R_1 e R_2.

Si può facilmente verificare che se M_{R_1} è la matrice booleana associata alla relazione R_1, e M_{R_2} è la matrice booleana associata alla relazione R_2, allora

$$M_{R_2 \circ R_1} = M_{R_1} \odot M_{R_2}$$

dove $\odot$ è il prodotto booleano

In generale $R_2 \circ R_1 \neq R_1 \circ R_2$.

Esempio

Siano $S = \{a, b\}$, $R_1 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, b\rangle\}$ e $R_2 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$, avremo:

$$R_1 \circ R_2 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$$

mentre

$$R_2 \circ R_1 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}.$$

2. RELAZIONI

Siano A = {1,3,7,9} e B = {1,2,3,4,5,6,7,9}.

- Rappresentare estensionalmente la relazione R ={<x, y> ∈ A x B | y = succ(x) }
  - {<1,2>,<3,4>}
- Disegnare il grafo bipartito che rappresenta la relazione R e dire se la relazione R è una funzione.
  - R è una funzione (anche se parziale)
- Definire una estensione R’ di R tale che R’ ={<x, y> ∈ A x B | y = succ(x) or y = succ(succ(x)) }
  - {<1,2>,<3,4>,<1,3>,<3,5>,<7,9>}

STRUTTURE RELAZIONALI, GRAFI E ORDINAMENTI

(parte 1)

END