INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 4)

Stefania Bandini

RELAZIONI BINARIE

Una *relazione binaria* R tra due insiemi S e T è un insieme di coppie ordinate $\langle x, y\rangle$ con $x \in S$ e $y \in T$: $R \subseteq S \times T$).

Il *dominio* di R, indicato con $dom(R)$, è l'insieme di tutti gli oggetti x tali che $\langle x, y\rangle \in R$ per qualche y.

Il *codominio* di R, indicato con $codom(R)$, è l'insieme di tutti gli oggetti y tali che $\langle x, y\rangle \in R$ per qualche x.

L'unione del dominio e del codominio di una relazione R si chiama il *campo* di R oppure *estensione*.

FUNZIONI

Tra le relazioni binarie, alcune hanno particolare importanza: le ***funzioni*** (o ***applicazioni***) sono relazioni tra gli elementi di un insieme *S* e gli elementi di un insieme *T* tali che ***ad ogni*** elemento dell'insieme *S* corrisponde **al più** un elemento di *T.*

Una corrispondenza tra gli elementi di S e quelli di T è una funzione quando:

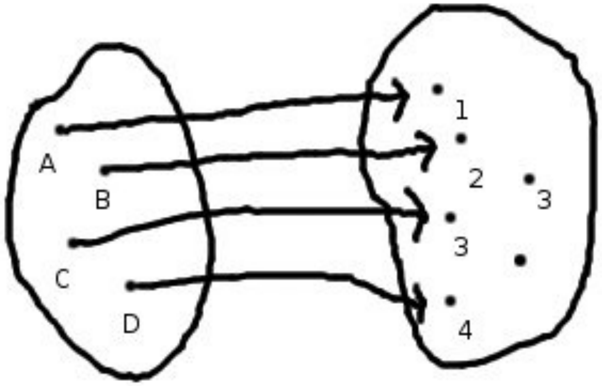
1. Ogni elemento di *S* (*dominio)* ha al più una corrispondenza in *T (codominio)*
2. (Ovvero) nessun elemento di *S* ha più di una corrispondenza in *T*

Formalmente: se $\langle a, b \rangle, \langle a, c \rangle \in R$ allora $b = c$

Se per ogni $a \in A$ esiste esattamente un $b \in B$ tale che $\langle a, b \rangle \in R$, allora R è una funzione totale

FUNZIONI

Una relazione $R \subseteq S \times T$ si dice *funzione* (o *applicazione*) se per ogni $x \in S$ esiste al massimo *un* $y \in T$ tale che $<x, y> \in R$.



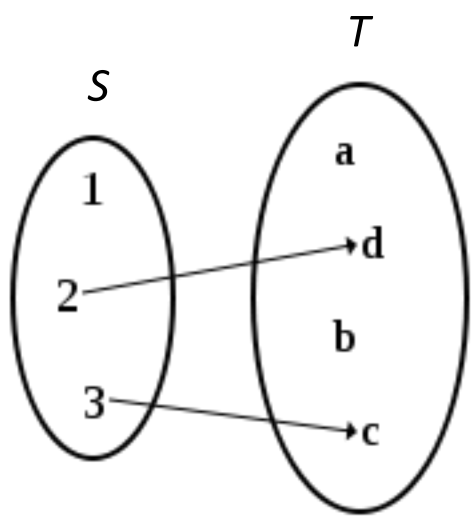
FUNZIONI

Sia f una relazione $f \subseteq S \times T$

f è una *funzione* se per ogni $x \in dom(f)$ esiste un *unico* y per cui $\langle x, y \rangle \in f$.

Se $x \in S$ è nel dominio di f allora si dice che $f(x)$ è definito.

Se il dominio di f coincide con S si dice che f è *totale*, altrimenti f è detta *parziale*.



Funzione parziale

Esempio

- Se U è l'insieme degli esseri umani, allora la relazione $R \subseteq U \times U$ che lega ogni individuo alla sua madre (biologica) è una funzione

ma R^{-1} non lo è

FUNZIONI PARZIALI VS. FUNZIONI TOTALI

Funzione PARZIALE

Ogni a ∈ A è in relazione con al più un elemento di B, ma possono esistere elementi di A che *non* sono in relazione con nessun elemento di B (*i.e., la funzione non è definita*)

[*definizione di funzione usata in questo corso*]

Funzione TOTALE

Se per ogni a ∈ A esiste esattamente un b ∈ B tale che ⟨a,b⟩ ∈ R, allora R è una funzione totale

[*definizione di funzione usata in analisi matematica*]

RIFORMULAZIONE

- Una relazione $f \subseteq A \times B$ è una funzione (parziale) se per ogni $x \in dom(f)$ esiste un unico $y \in B$ tale che $\langle x,y \rangle \in f$

$f(x)$ denota tale elemento y

- Se $z \in dom(f)$, allora si dice che f è definita in z

- Se $A = dom(f)$ allora f è una funzione totale

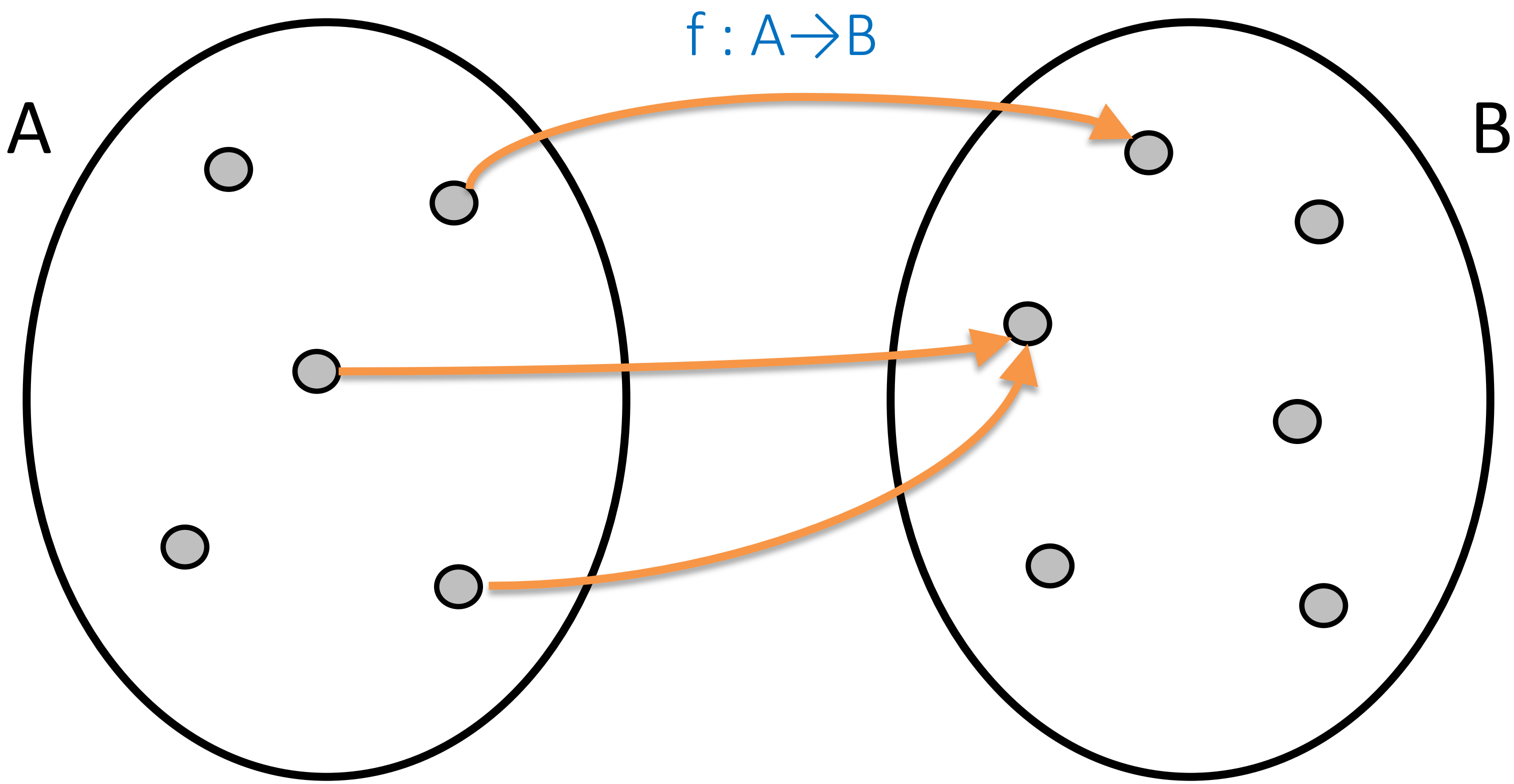
NOTAZIONE

Se $f \subseteq A \times B$ è una funzione, scriviamo

$$f : A \rightarrow B$$

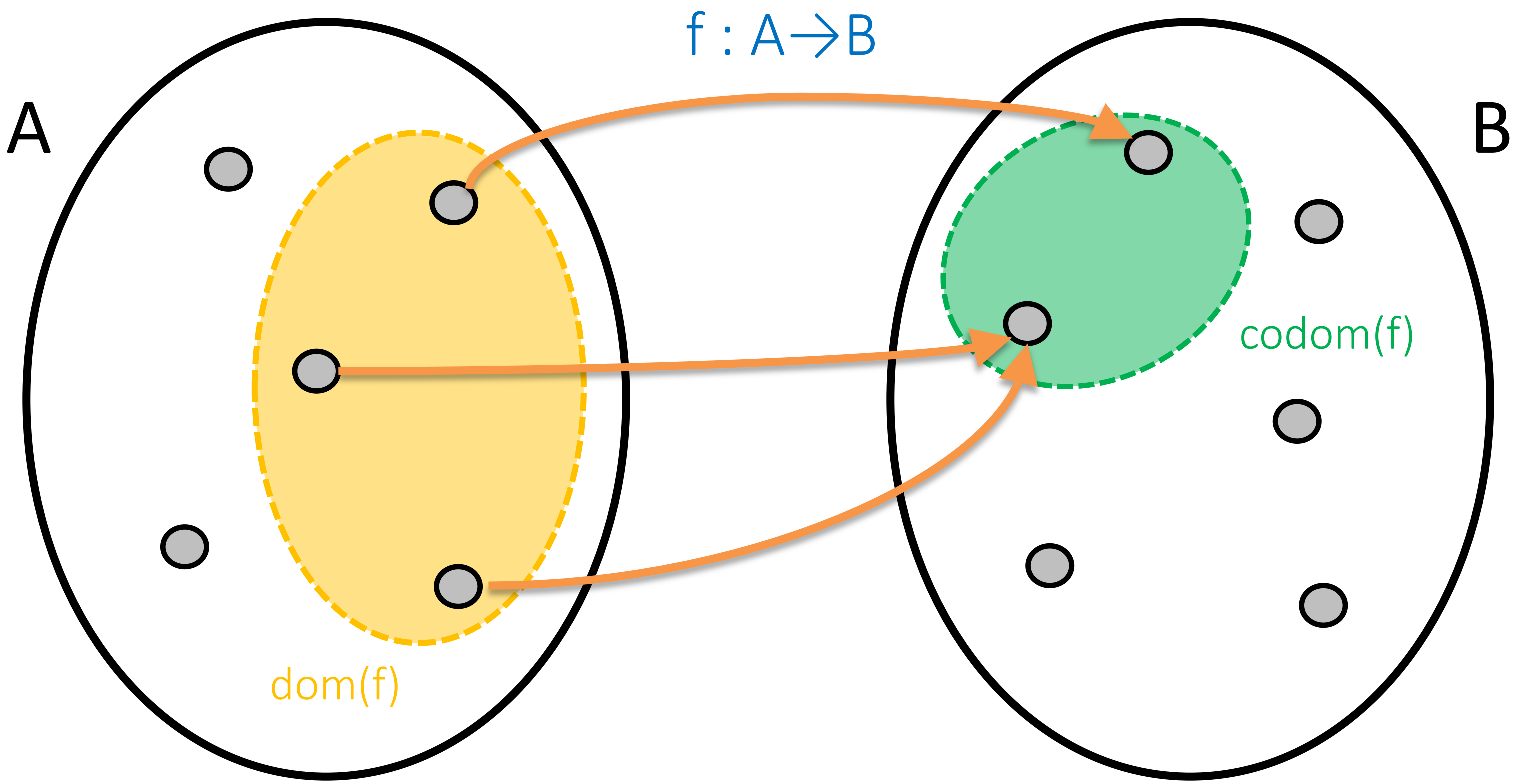
In questo caso, $dom(f) \subseteq A$ e $codom(f) \subseteq B$

Funzione (parziale)



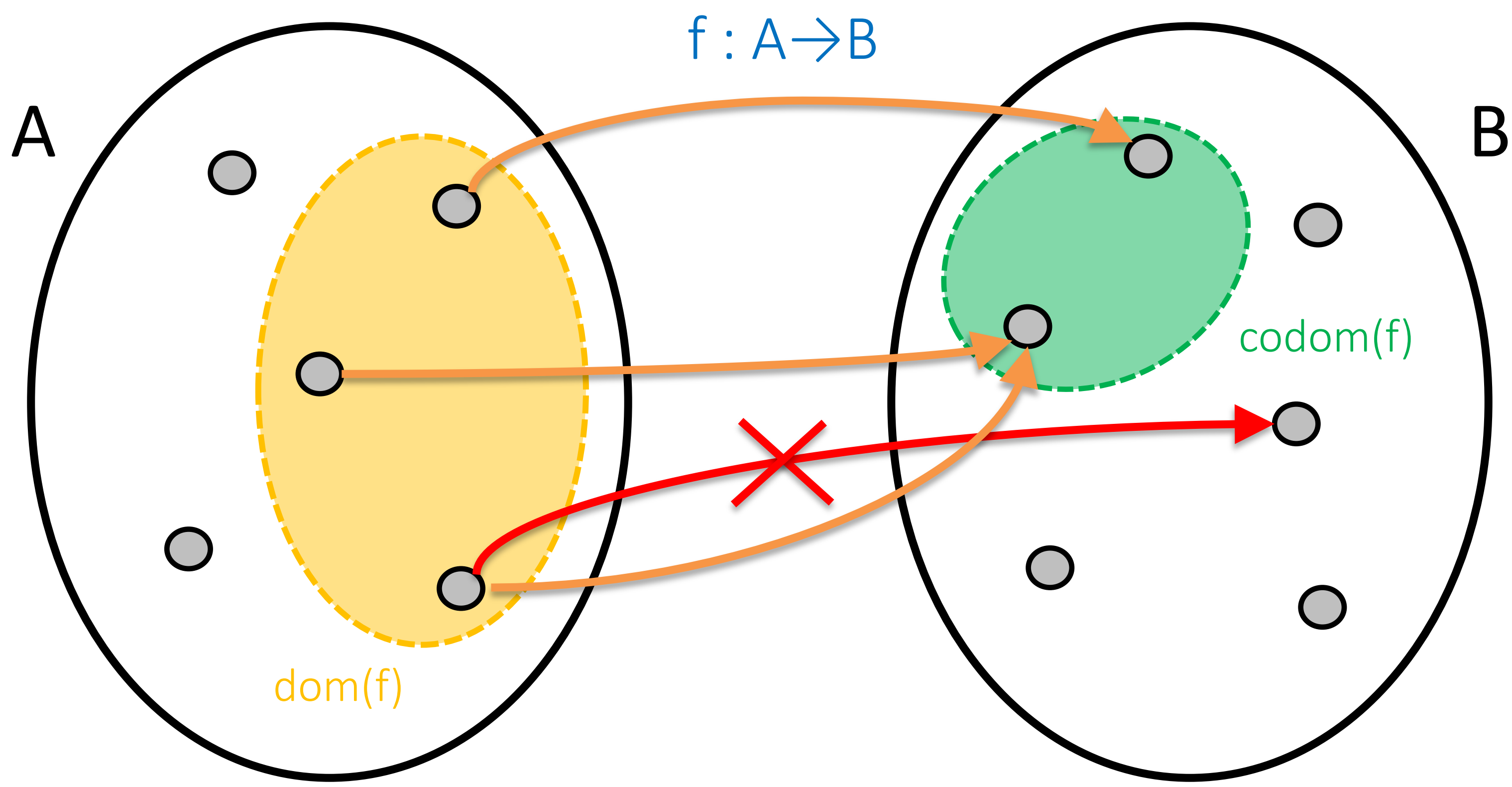
Al più un arco uscente da ogni elemento di dom(f) $\subseteq A$

Funzione (parziale)



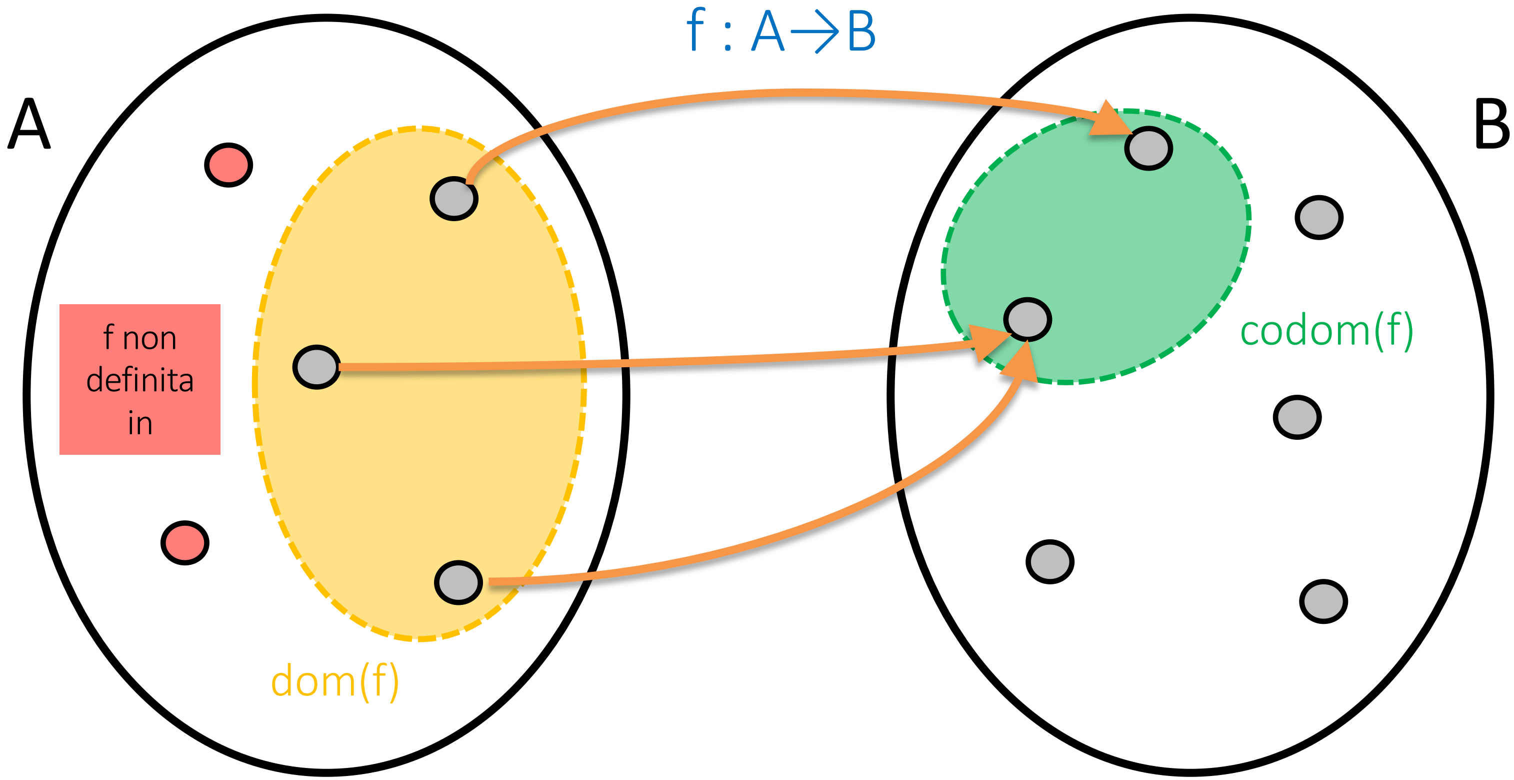
Al più un arco uscente da ogni elemento di dom(f) $\subseteq A$

Funzione (parziale)



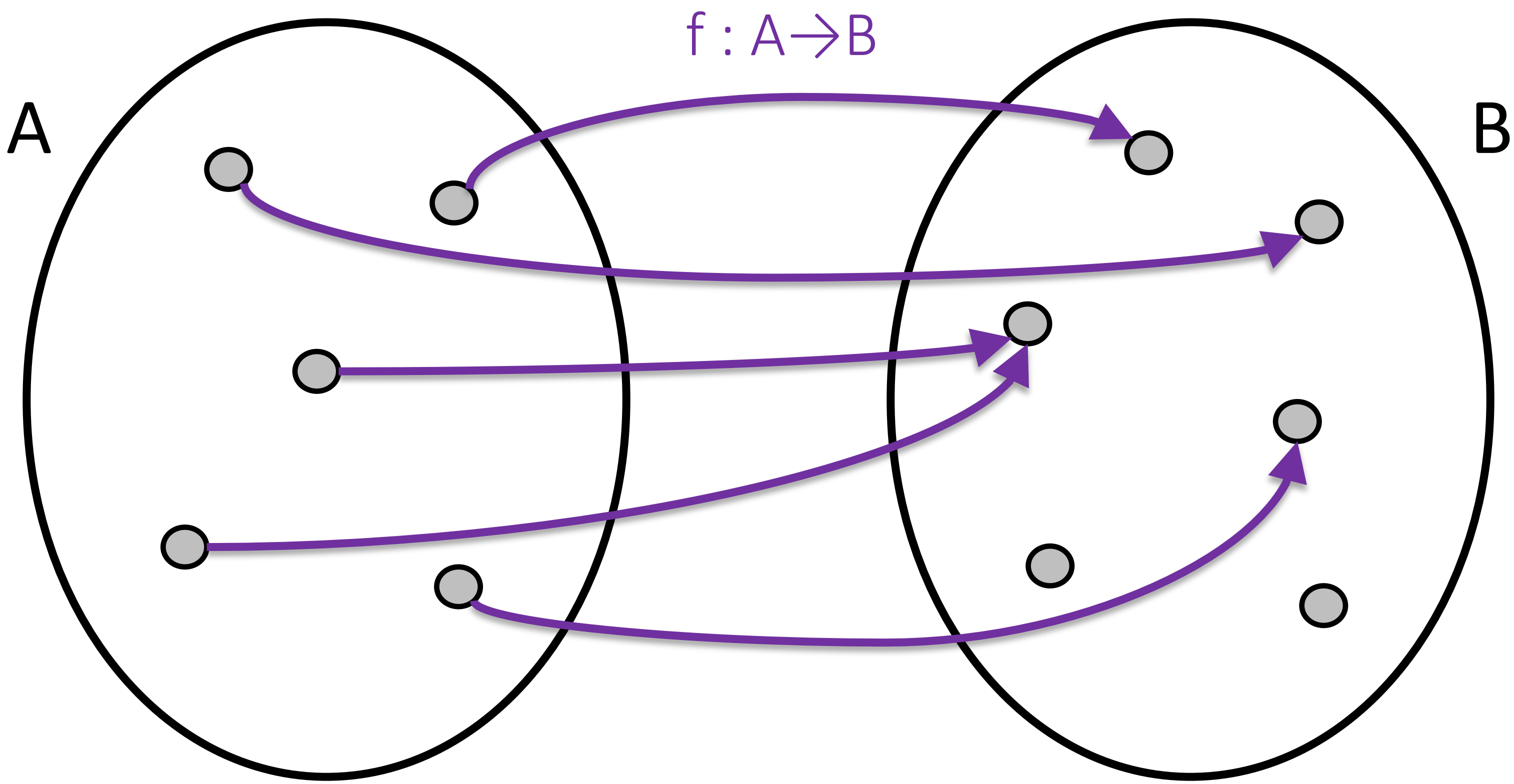
Al più un arco uscente da ogni elemento di dom(f) $\subseteq A$

Funzione (parziale)



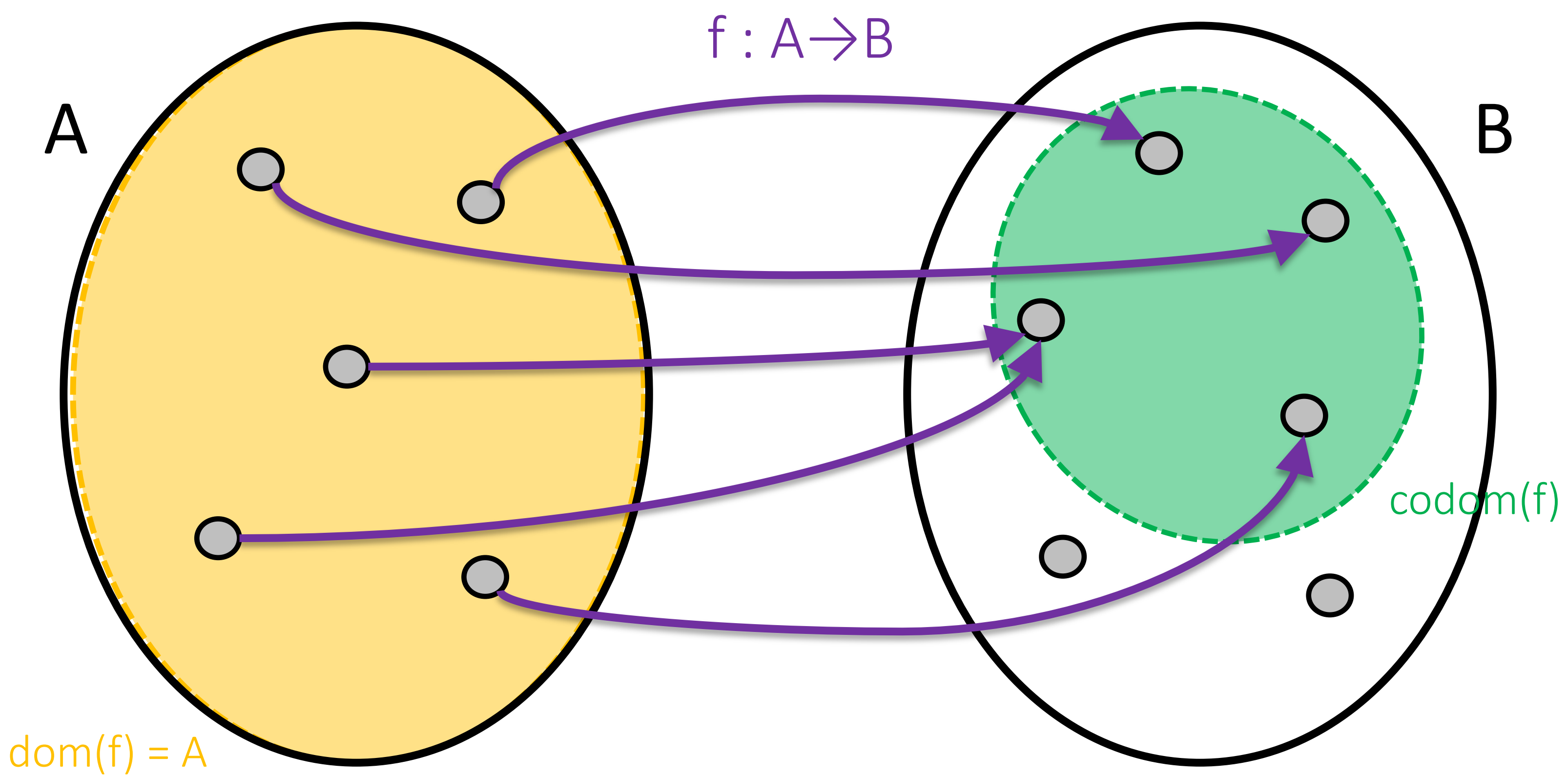
Al più un arco uscente da ogni elemento di dom(f) ⊆ A

Funzione totale



Uno ed un solo *arco uscente da ogni elemento di dom(f) = A*

Funzione totale



Uno ed un solo *arco uscente da ogni elemento di dom(f) = A*

FUNZIONI

Dati S e T, se f è una *funzione* da S in T scriviamo

$$f : S \mapsto T$$

per indicare che il dominio di f è contenuto in S e che il codominio di f è contenuto in T: $dom(f) \subseteq S$ e $codom(f) \subseteq T$.

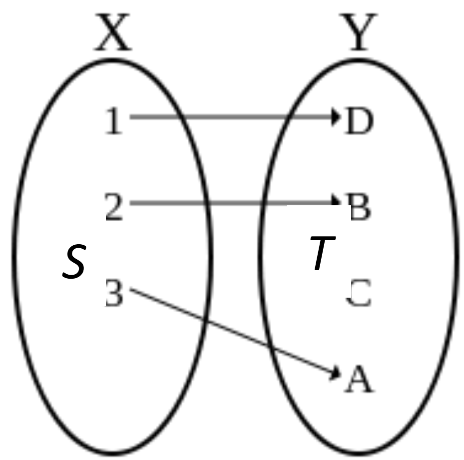
Funzione iniettiva

Una funzione $f : S \mapsto T$ è *iniettiva* se per ogni $x, y \in S$ con $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$. Esempio

- La funzione $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $f(x) = 2x$ è iniettiva
- La funzione che asegna ad ogni studente una matricola è iniettiva

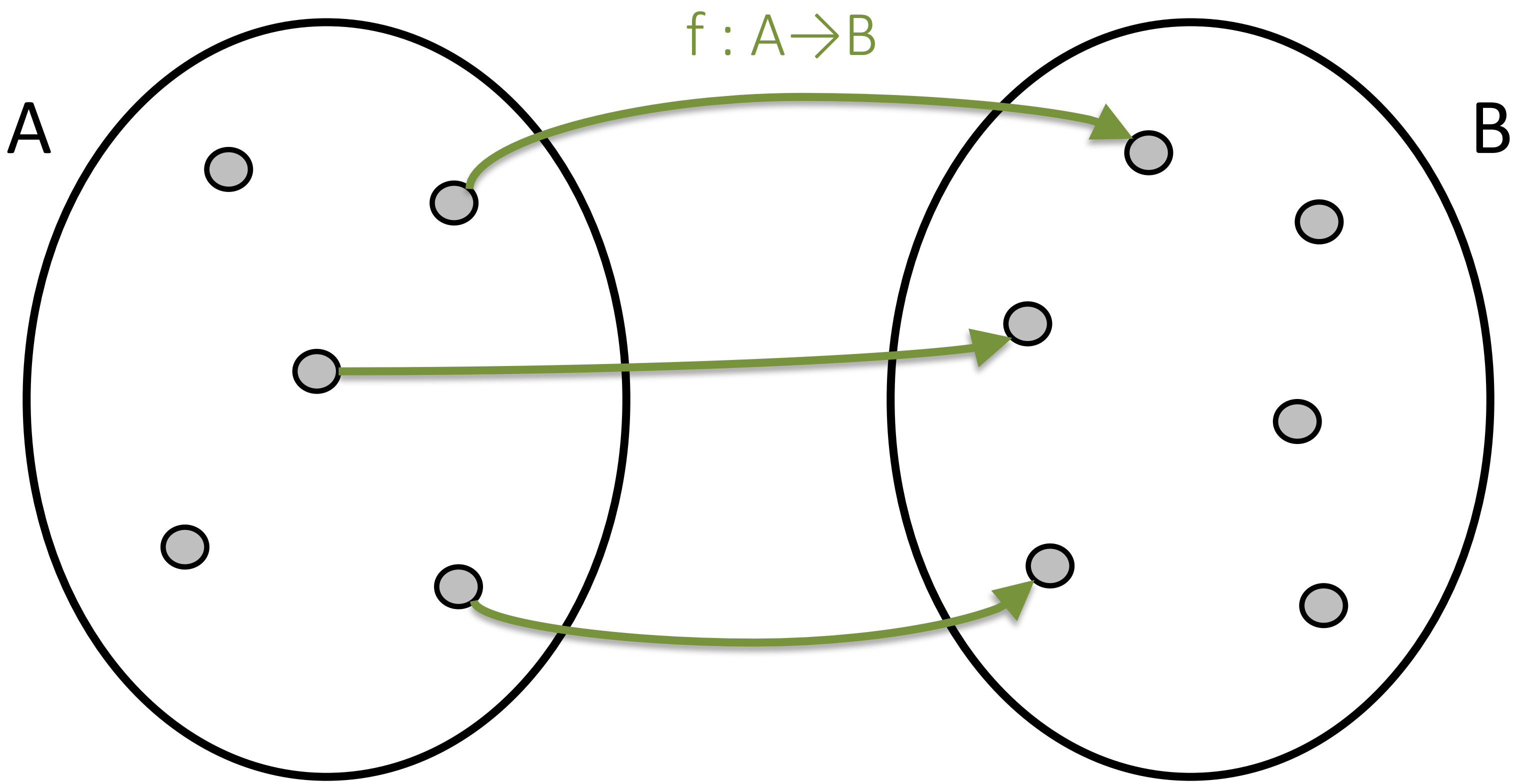
FUNZIONE INIETTIVA

Una **funzione iniettiva** (detta anche **funzione ingettiva** oppure **iniezione**) è una funzione che porta **elementi distinti** del dominio in **elementi distinti** dell'immagine.



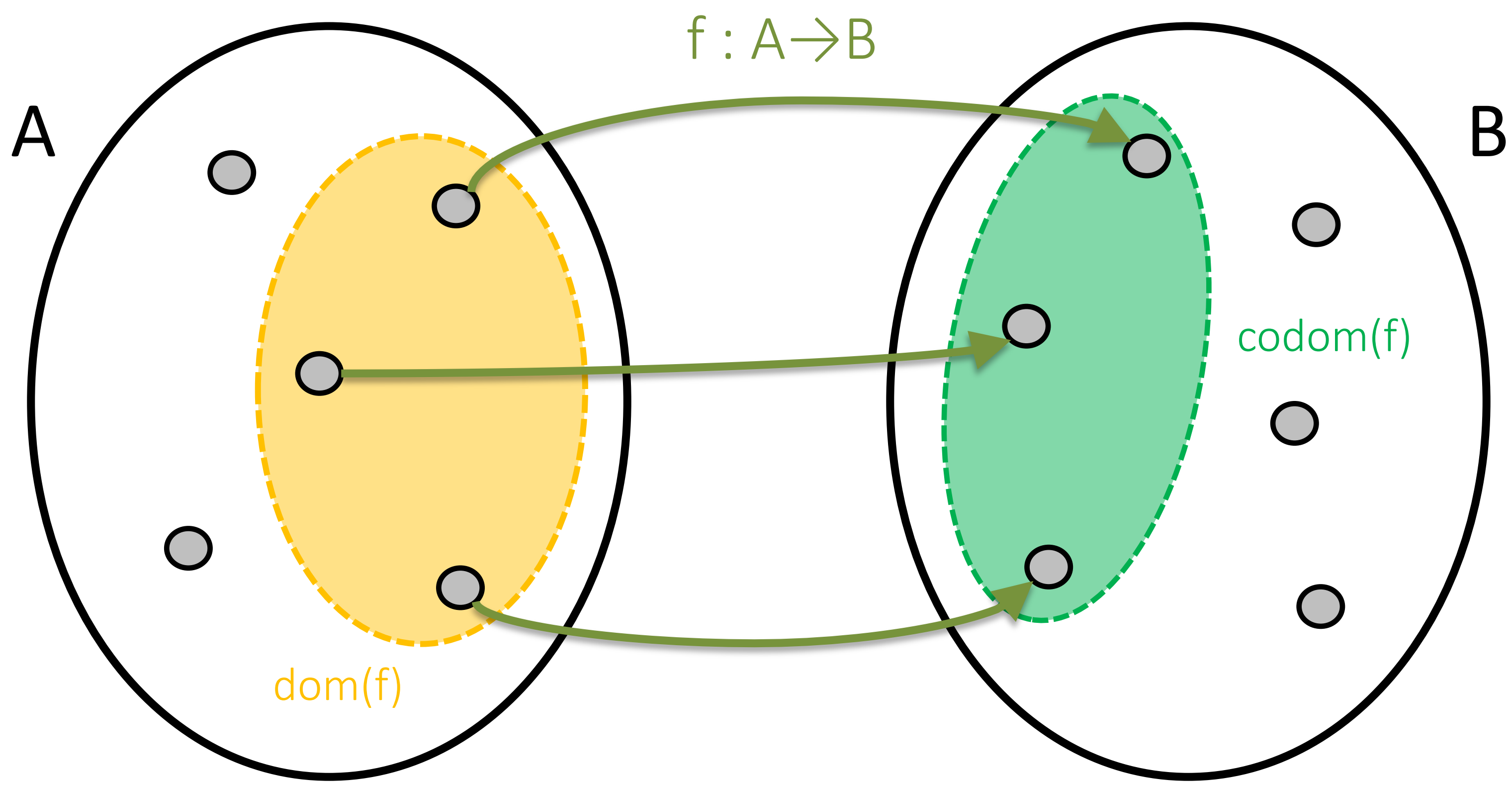
Formalmente, $f : A \to B$ è iniettiva sse per ogni $x, y \in A$, $x \neq y$ implica $f(x) \neq f(y)$

Funzione iniettiva



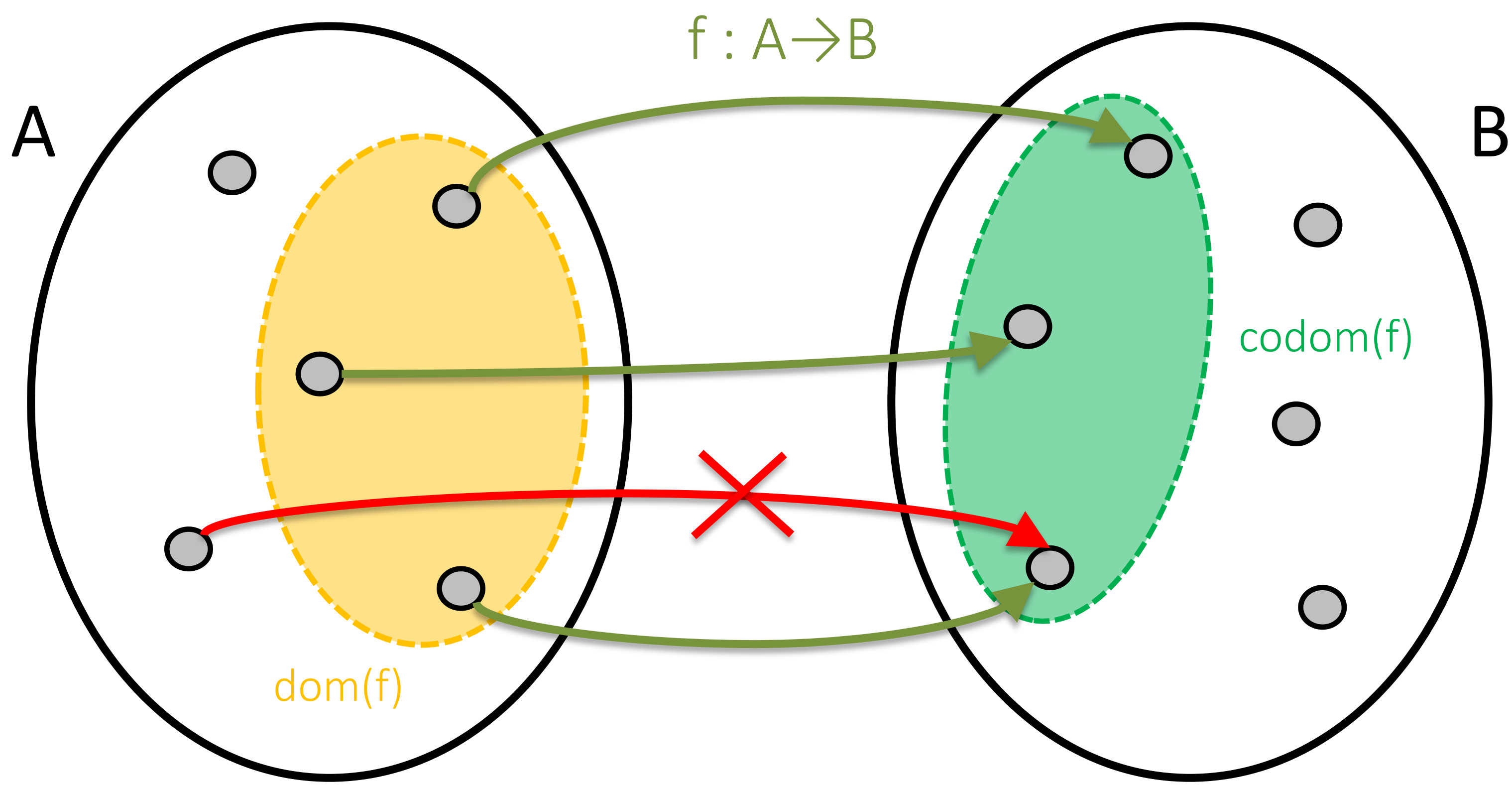
Al più *un arco entrante in ogni elemento di codom(f)* $\subseteq B$

Funzione iniettiva



Al più *un arco entrante in ogni elemento di codom(f)* $\subseteq B$

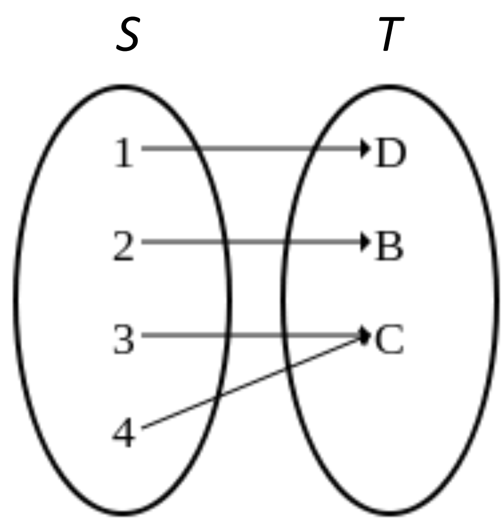
Funzione iniettiva



*Al **più** un arco entrante in ogni elemento di codom(f)* $\subseteq B$

FUNZIONE SURRIETTIVA

Una funzione da un insieme S a un insieme T si dice **suriettiva** (o **surgettiva**, o una **suriezione**) quando ogni elemento di T è immagine di **almeno un elemento** del dominio, ovvero quanto T = codom (f).



Funzione suriettiva

Una funzione è *suriettiva* se per ogni $y \in T$ esiste un x in S tale che $f(x) = y$, in tal caso $f(S) = T$. Esempio

- La funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(x) = 2x$ non è suriettiva
- La funzione che asegna ad ogni studente una matricola non è suriettiva

FUNZIONE SURIETTIVA

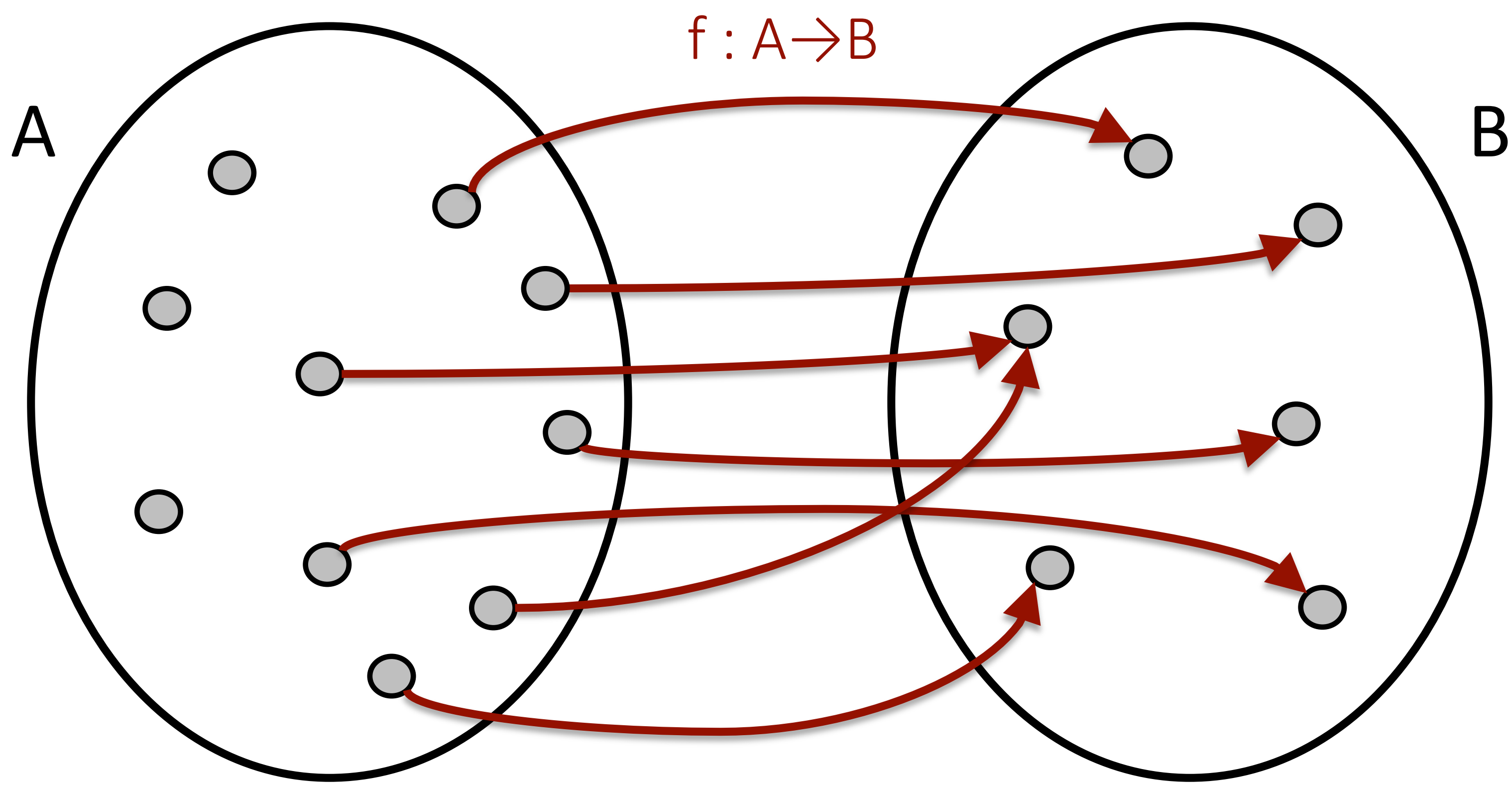
- Una funzione $f : A \rightarrow B$ è suriettiva quando **ogni elemento** di B è immagine di almeno un elemento di A

- ossia, quando B = codom(f)

$f : A \rightarrow B$ è suriettiva sse

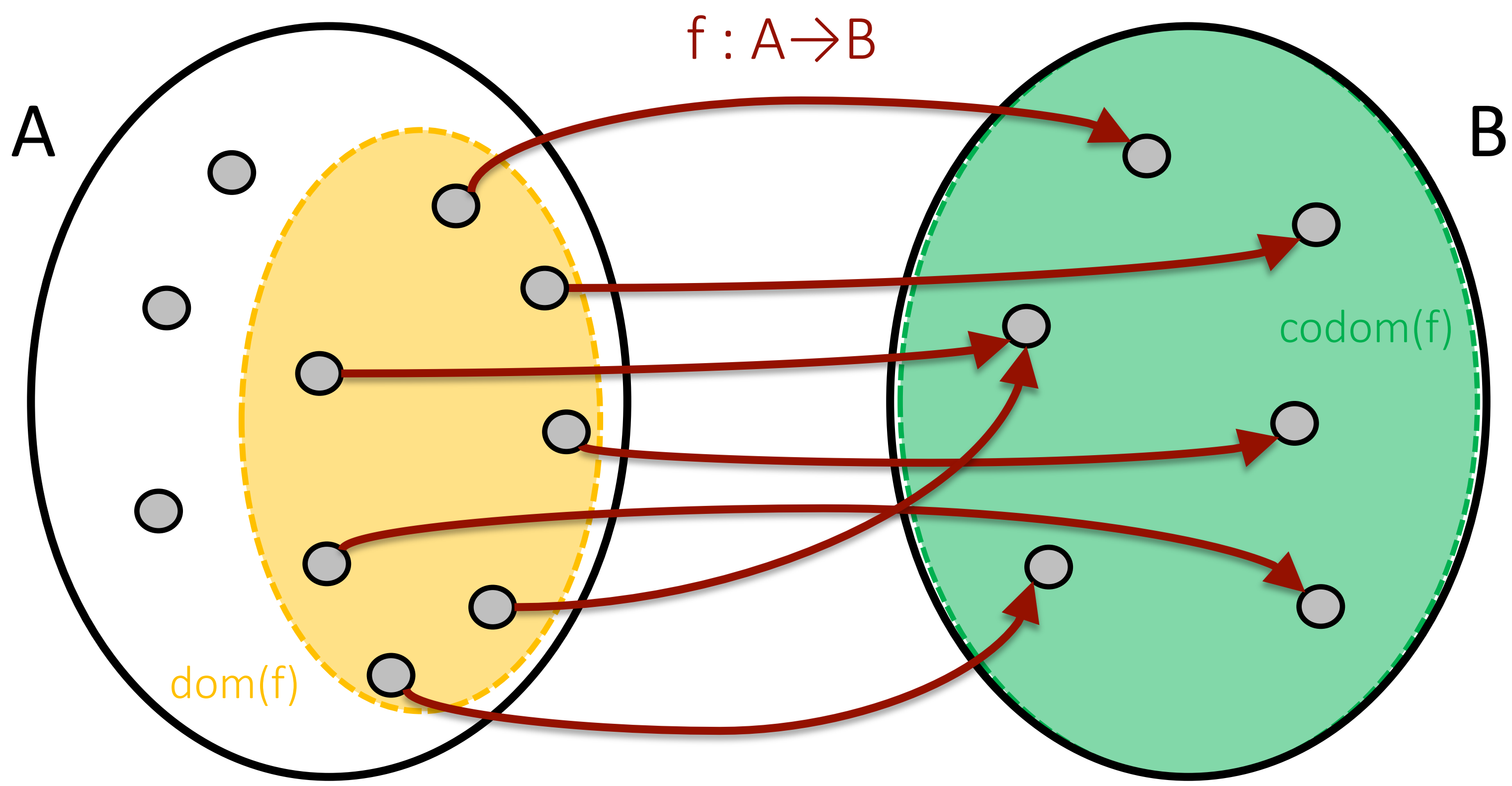
per ogni $y \in B$ esiste un $x \in A$ tale che $f(x) = y$

Funzione suriettiva



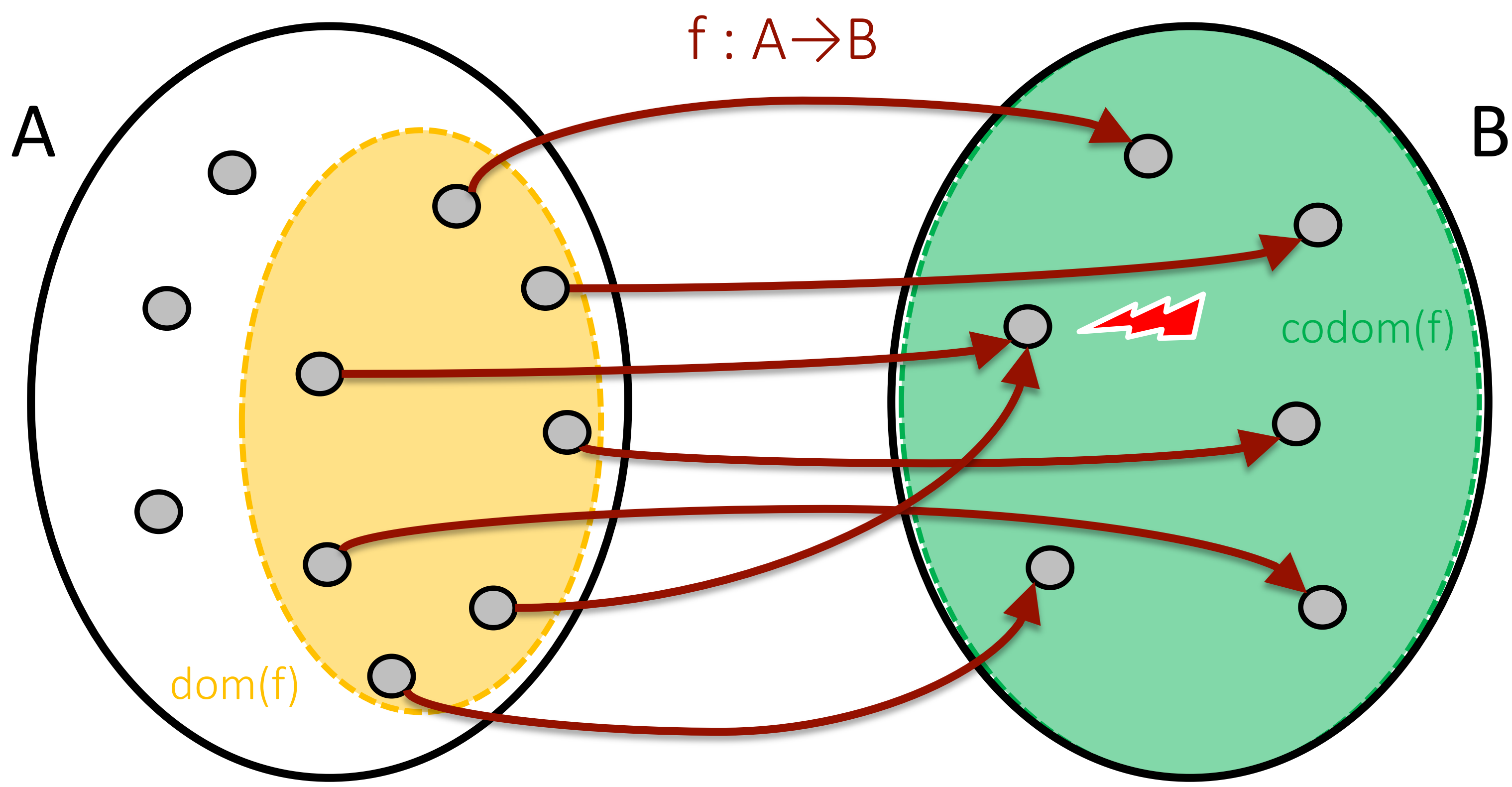
Almeno un arco entrante in ogni elemento di codom(f) = B

Funzione suriettiva



Almeno un arco entrante in ogni elemento di codom(f) = B

Funzione suriettiva



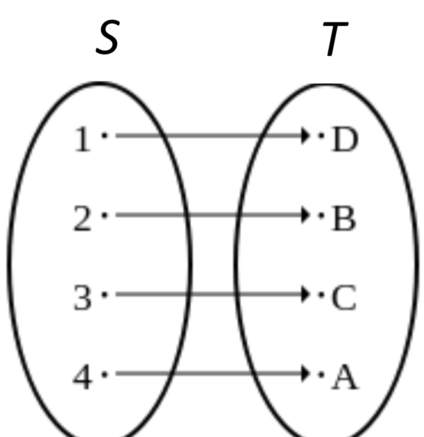
Almeno un arco entrante in ***ogni*** *elemento di codom(f) = B*

FUNZIONE BIUNIVOCA

Una **corrispondenza biunivoca** tra due insiemi *S* e *T* è una relazione binaria tra *S* e *T*, tale che ad ogni elemento di *S* corrisponda *uno ed un solo* elemento di *T*, e viceversa ad ogni elemento di *T* corrisponda uno ed un solo elemento di *S*.

Lo stesso concetto può anche essere espresso usando le funzioni: una funzione è una **biiettiva**, **bigettiva** o **biunivoca** se per ogni elemento *y* di *T* vi è uno e un solo elemento *x* di *S* tale che $f : S \longrightarrow T$.

Una tale funzione è detta anche **biiezione** o **bigezione**.



Una funzione è biiettiva se e solo se è contemporaneamente iniettiva e suriettiva.

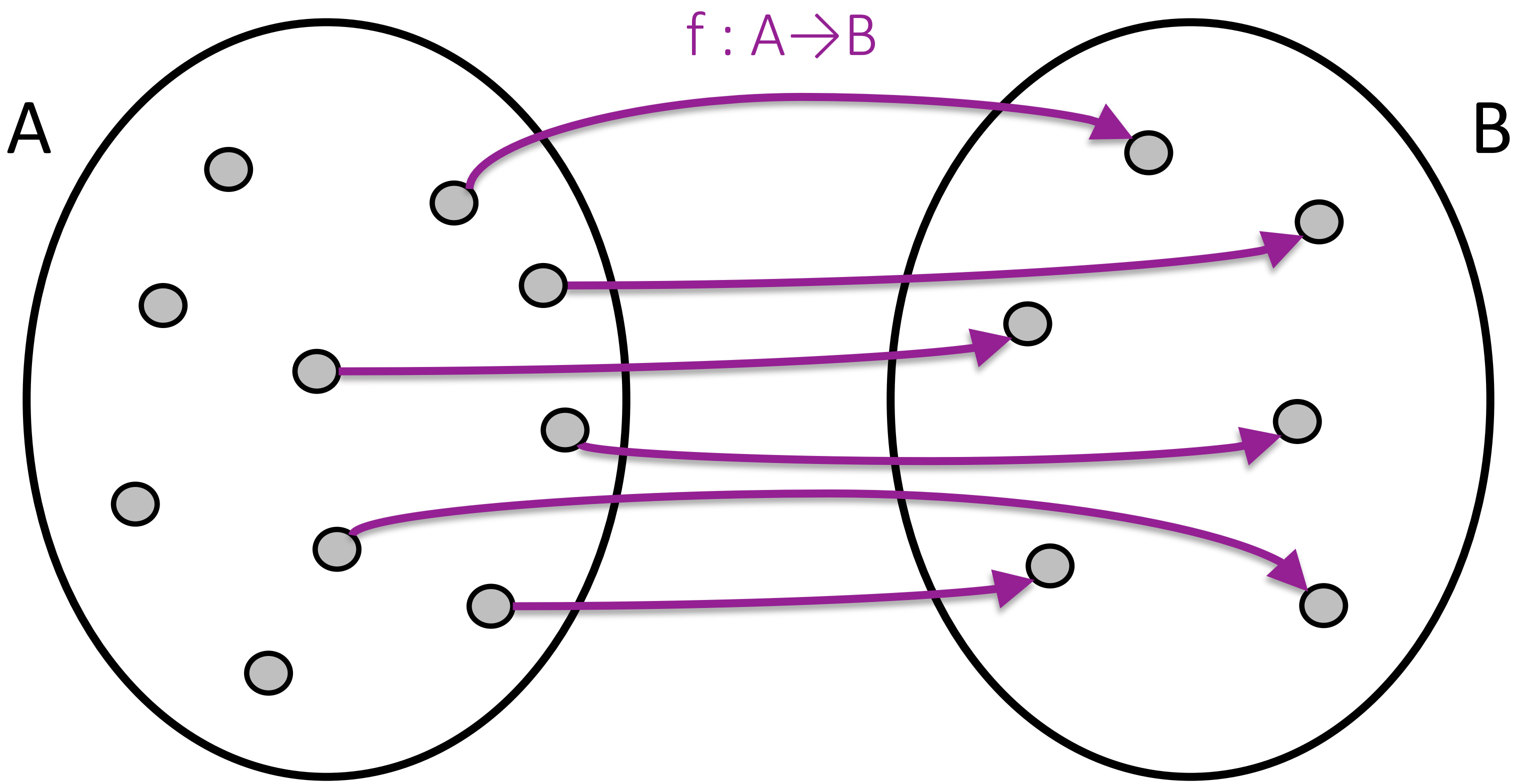
FUNZIONE BIIETTIVA

- Una funzione $f : A \rightarrow B$ è biiettiva sse è iniettiva e suriettiva

Attenzione: f può **non** essere totale

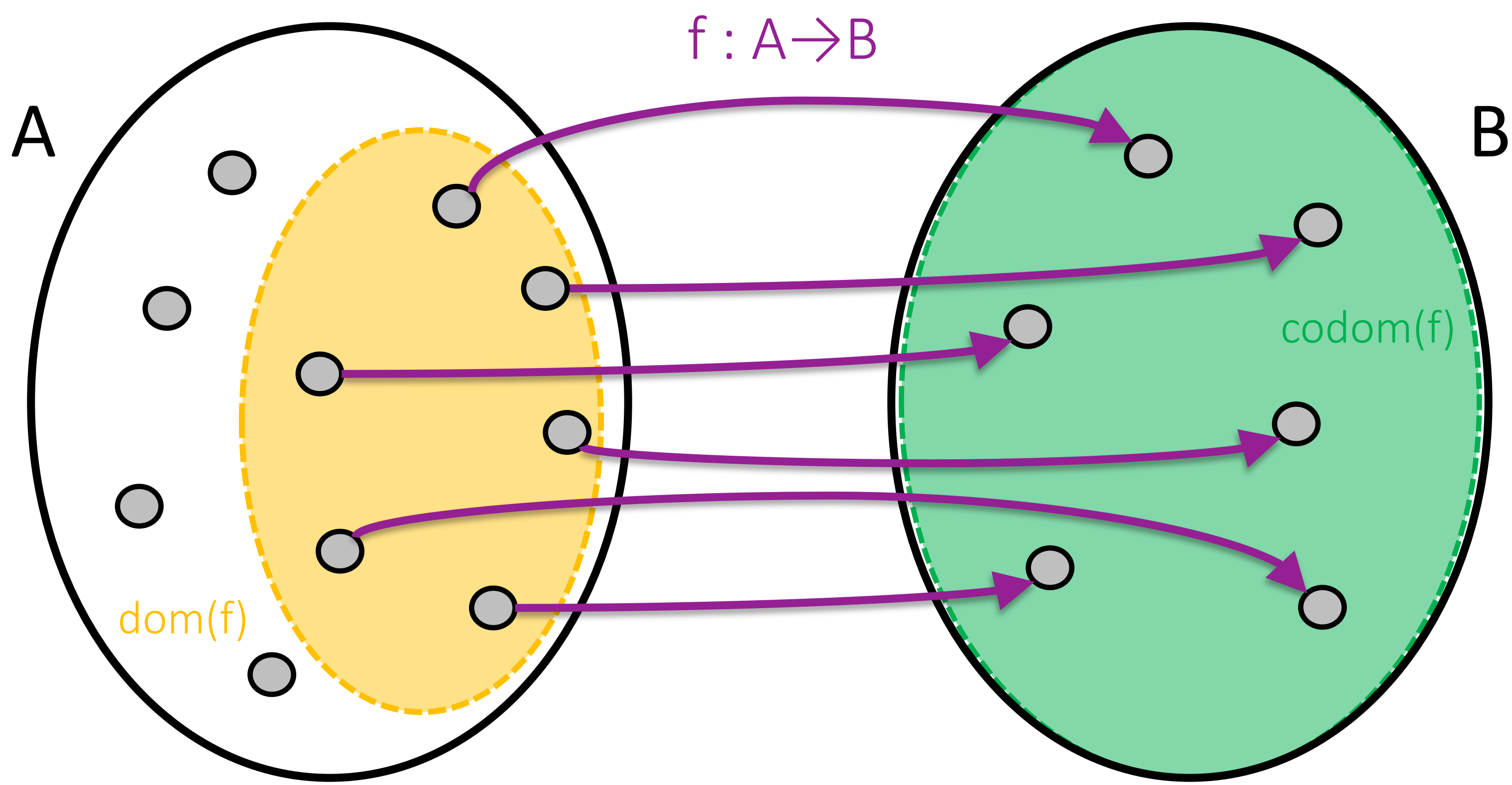
- Ad ogni $x \in dom(f)$ corrisponde esattamente un $y \in B$,
- ad ogni $y \in B$ corrisponde esattamente un $x \in dom(f)$

Funzione bieettiva



Uno ed un solo arco entrante in ogni elemento di codom(f) = B

Funzione bieettiva



Uno ed un solo *arco entrante in ogni elemento di codom(f) = B*

Corrispondenza Biunivoca

Una corrispondenza biunivoca tra A e B è una relazione binaria $R \subseteq A \times B$ tale che ad ogni elemento di A corrisponde uno ed un solo elemento di B e viceversa, ad ogni elemento di B corrisponde uno ed un solo elemento di A

Tale R deve essere una funzione totale, iniettiva e suriettiva (funzione biunivoca o uno-a-uno)

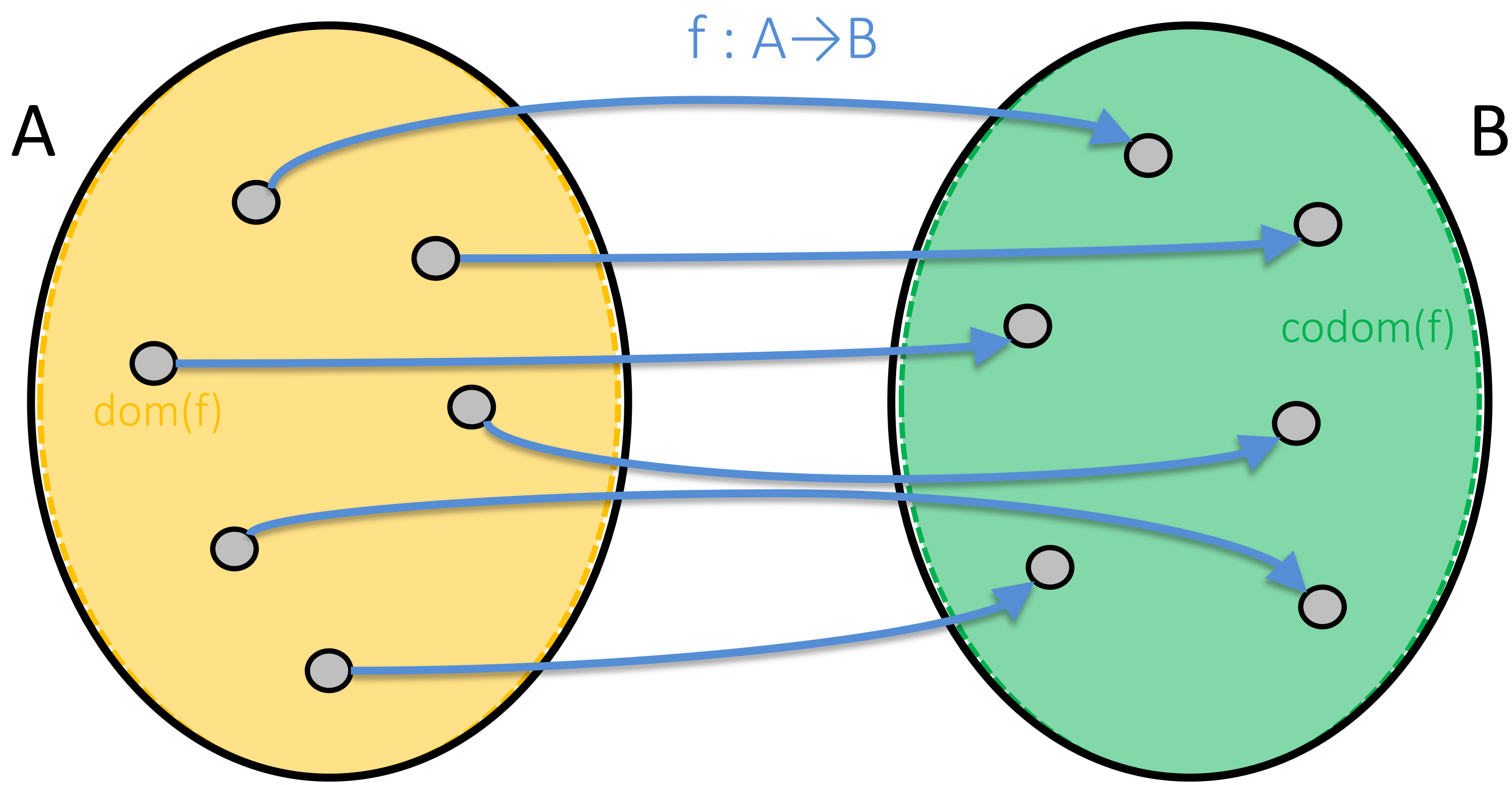
FUNZIONE BIUNIVOCA

- Una corrispondenza biunivoca tra A e B è una relazione binaria $R \subseteq A \times B$ tale che:
  - ad ogni elemento di A corrisponde uno ed un solo elemento di B,
  - ad ogni elemento di B corrisponde uno ed un solo elemento di A

- Tale R deve essere una funzione
  1. totale
  2. iniettiva
  3. suriettiva

(funzione biunivoca o uno-a-uno)

Funzione biunivoca



Ogni elemento di dom(f) = A è in relazione con un solo elemento di B
Ogni elemento di codom(f) = B è in relazione con un solo elemento di A

ARIETÀ

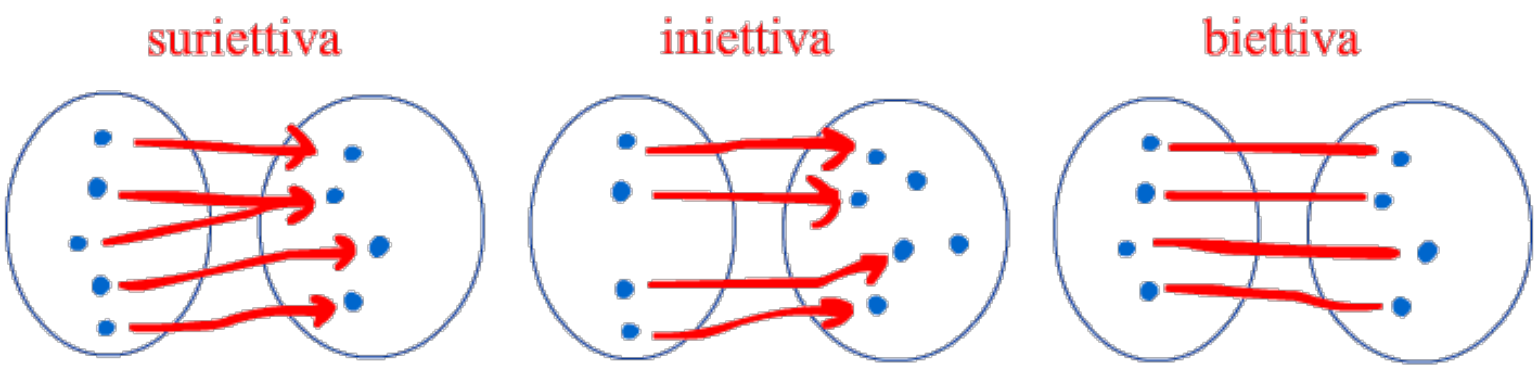
Esistono relazioni (e funzioni) con più argomenti o operandi, in cui l'insieme di partenza è definito dal prodotto cartesiano di più insiemi

funzione unaria	$f : A \rightarrow B$
funzione binaria	$f : A_1 \times A_2 \rightarrow B$
funzione ternaria	$f : A_1 \times A_2 \times A_3 \rightarrow B$
funzione n-aria	$f : A_1 \times \cdots \times An \rightarrow B$

L'arietà di una relazione è il numero dei domini nel prodotto cartesiano.

FUNZIONI

Dominio: l'insieme su cui una funzione è definita.
Immagine/codominio: l'insieme di valori che una funzione assume, ovvero gli elementi *b* del codominio per i quali esiste almeno un elemento *a* del dominio A tale che f(*a*)=*b*
Funzione biiettiva: o corrispondenza biunivoca, è una funzione che a ogni elemento del dominio corrisponde uno e un solo elemento del codominio, e a ogni elemento del codominio corrisponde uno e un solo elemento del dominio.
Funzione suriettiva: quando l'immagine coincide con l’insieme all’interno del quale è definito il codominio.
Funzione iniettiva: quando elementi distinti del dominio hanno un'immagine distinta, cioè ogni elemento del codominio corrisponde a un solo o a nessun elemento del dominio.
una funzione allo stesso tempo iniettiva e suriettiva è biiettiva



RECAP

$f: X \mapsto Y$	se $x = y$ allora $f(x) = f(y)$
funzione iniettiva	se $f(x) = f(y)$ allora $x = y$,
funzione suriettiva	per ogni $y \in Y$, esiste un $x \in X$ tale che $f(x) = y$
funzione biettiva	suriettiva e iniettiva
funzione totale	$dom(f) = X$
funzione biunivoca	biiettiva e totale

Funzioni Parziali

Definizione: Siano A e B due insiemi, una *funzione parziale* $F : A \rightarrow B$ è un insieme di coppie $\langle a, b\rangle$ (con $a \in A$ e $b \in B$) in cui ogni elemento di A è in coppia con al più un elemento di B.

Formalizzazione:

$$\forall a \in A((\exists b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(funz. parziale)}$$

Funzioni Totali

Definizione: Siano A e B due insiemi, una *funzione totale* $F : A \longrightarrow B$ è una funzione parziale che associa ad ogni elemento di A un elemento di B.

Formalizzazione:

$$\forall a \in A((\exists b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(funz. parziale)}$$
$$\wedge$$
$$\forall a \in A(\exists b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \qquad \text{(associa ad ogni elemento di } A \text{ uno di } B\text{)}$$
$$\equiv$$
$$\forall a \in A(\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \qquad \text{(funz. totale)}$$

Funzioni Iniettive

Definizione: Una funzione parziale $F : A \longrightarrow B$ è *iniettiva* se per ogni $b \in Im(F)$ esiste al più un a tale che $\langle a, b\rangle \in F$.

Formalizzazione:

$$\forall a \in A((\exists b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(funz. parziale)}$$
$$\wedge$$
$$\forall b \in B((\exists a \in A \;\; \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! a \in A \;\; \langle a, b\rangle \in F)) \qquad \text{(iniettività)}$$

Funzioni Suriettive

Definizione: Una funzione parziale $F : A \rightarrow B$ è *suriettiva* se $Im(F) = B$.
Formalizzazione:

$$\begin{array}{ll} \forall a \in A((\exists b \in B \ \ \langle a, b \rangle \in F) \Rightarrow (\exists! b \in B \ \ \langle a, b \rangle \in F)) & \text{(funz. parziale)} \\ \wedge & \\ \forall b \in B(\exists a \in A \ \ \langle a, b \rangle \in F) & \text{(suriettività)} \end{array}$$

Funzioni Biiettive

Definizione: Una funzione parziale $F : A \to B$ è *biiettiva* se è totale, iniettiva e suriettiva.

Formalizzazione:

$$
\begin{array}{ll}
\forall a \in A(\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) & \text{(funz. totale)} \\
\wedge & \\
\forall b \in B((\exists a \in A \;\; \langle a, b\rangle \in F) \Rightarrow (\exists! a \in A \;\; \langle a, b\rangle \in F)) & \text{(iniettività)} \\
\wedge & \\
\forall b \in B(\exists a \in A \;\; \langle a, b\rangle \in F) & \text{(suriettività)}
\end{array}
$$

$$\equiv$$

$$
\begin{array}{ll}
\forall a \in A(\exists! b \in B \;\; \langle a, b\rangle \in F) & \text{(funz. totale)} \\
\wedge & \\
\forall b \in B(\exists! a \in A \;\; \langle a, b\rangle \in F) & \text{(iniettività e suriettività)}
\end{array}
$$

PUNTO FISSO

Un **punto fisso** per una funzione definita da un insieme in sé è un elemento coincidente con la sua immagine.

Un punto fisso per una funzione $f : S \longrightarrow S$ definita su un insieme *S* è un elemento *x* in *S* tale che:

$$x = f(x)$$

ESEMPI

- La funzione *op* (opposto) ha un solo punto fisso (0)
- La funzione identità id : A → A dove id(x) = x per ogni x ∈ A ha tutti gli elementi di A come punti fissi
- La funzione doppio su ℕ ha un solo punto fisso (0)
- La funzione f : ℕ→ℕ dove f(n)=n+1 non ha punti fissi

Operazioni

Sia A un insieme.

Una operazione (n-aria) su A è una funzione $A^n \to A$

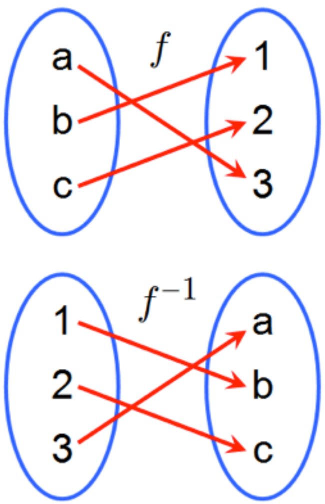
L'operazione è totale sse la funzione è totale

FUNZIONE INVERSA

Una funzione $f : X \to Y$ si dice **invertibile** se esiste una funzione $g : Y \to X$ tale che

$g(f(x)) = x$ per ogni $x \in X$

$f(g(y)) = y$ per ogni $y \in Y$



f^{-1} mappa 3 in *a* poiché *f* mappa *a* in 3

Funzione inversa, composizione di funzioni

Una funzione $f : S \mapsto T$ ammette una *funzione inversa* $f^{-1} : T \mapsto S$ sse f è iniettiva.

f: A $\rightarrow$ B dove f = {⟨a,x⟩, ⟨b,y⟩, ⟨c,y⟩}

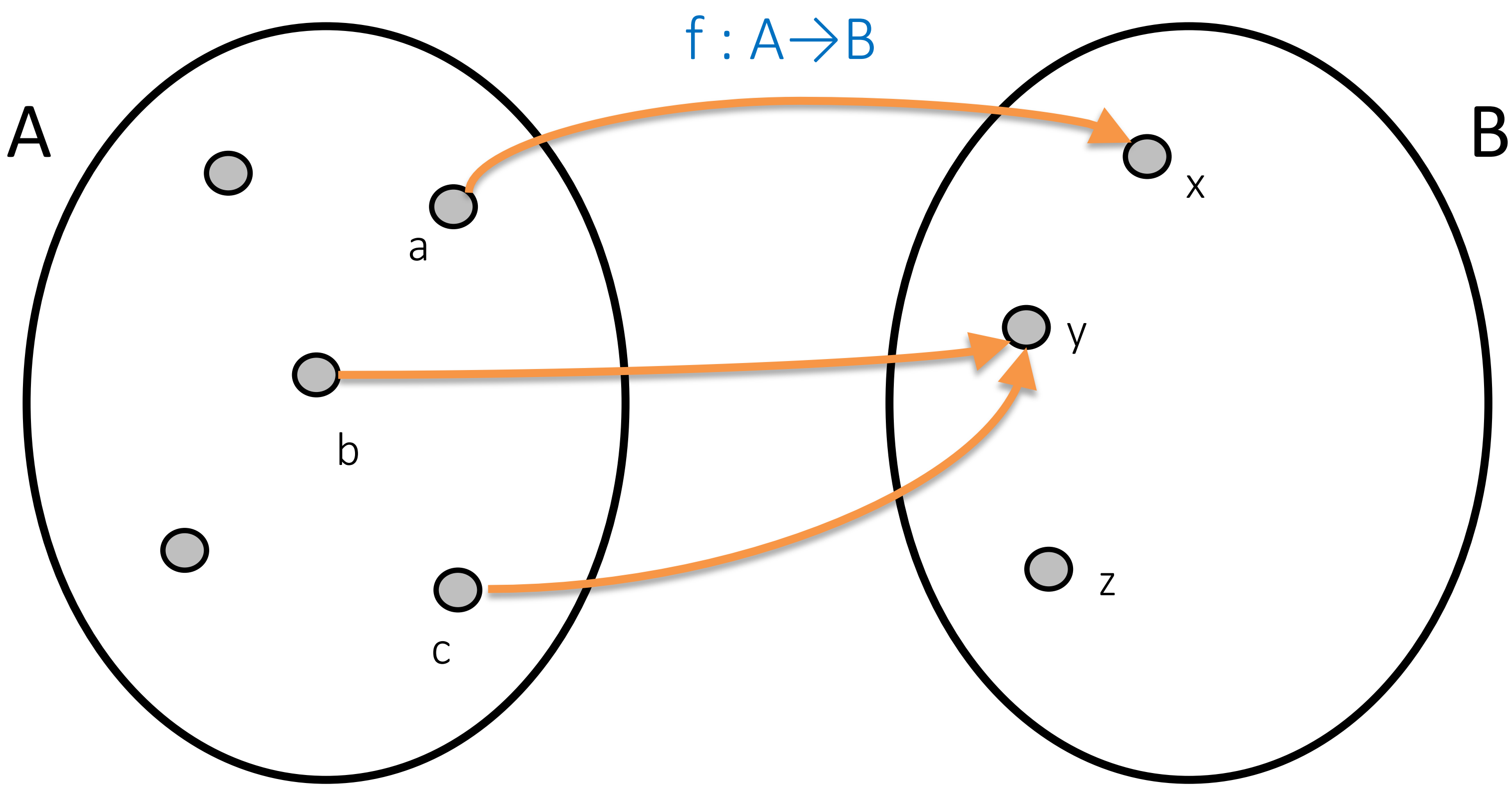
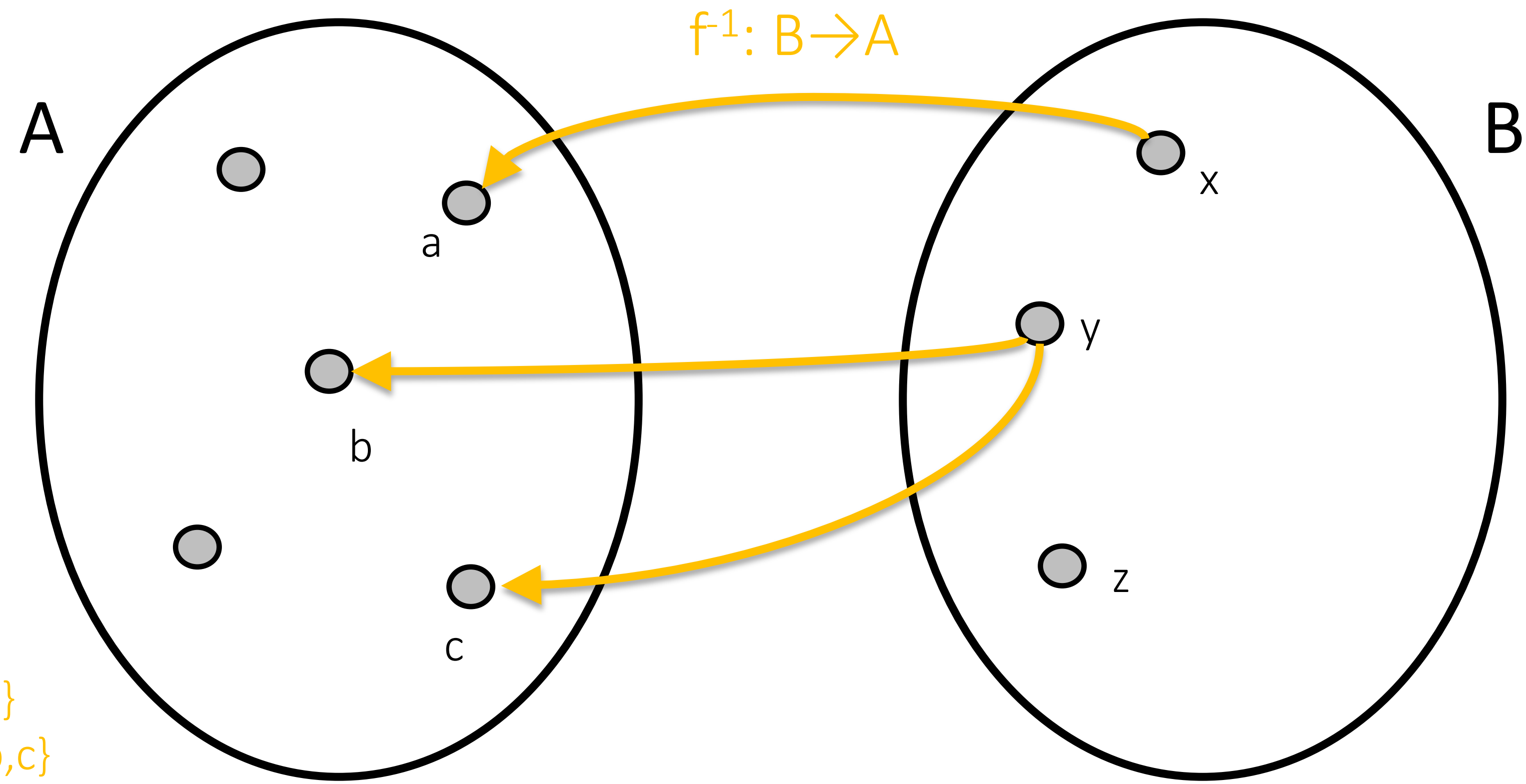


Immagine inversa

f: A → B dove f = {⟨a,x⟩, ⟨b,y⟩, ⟨c,y⟩}

f^{-1}: B → A dove f^{-1} = {⟨x,a⟩, ⟨y,b⟩, ⟨y,c⟩}



$f^{-1}(x) = \{a\}$

$f^{-1}(y) = \{b,c\}$

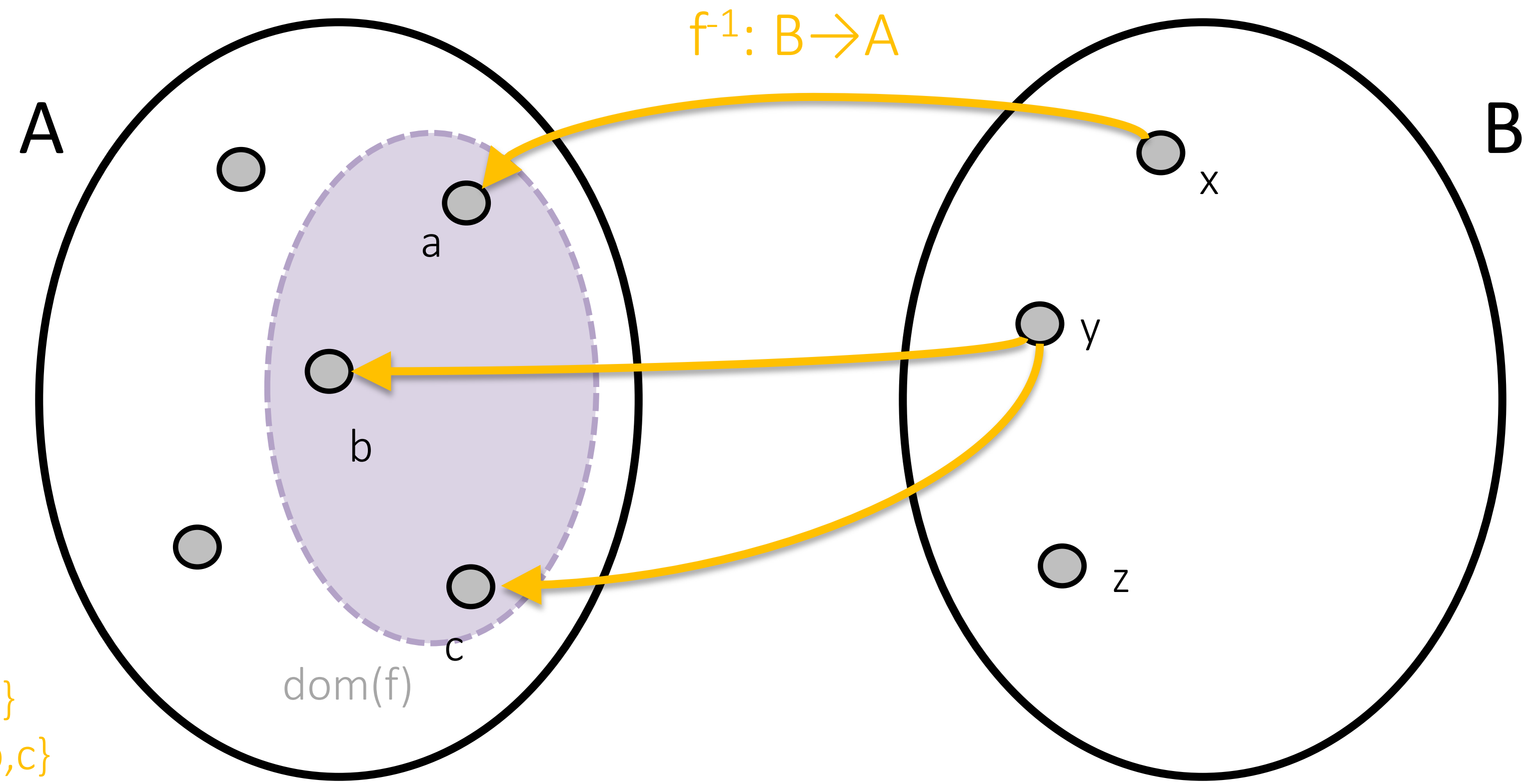
$f^{-1}(z) = \emptyset$

In generale NON è una funzione

Immagine inversa

$f: A \rightarrow B$ dove $f = \{\langle a,x\rangle, \langle b,y\rangle, \langle c,y\rangle\}$

$f^{-1}: B \rightarrow A$ dove $f^{-1} = \{\langle x,a\rangle, \langle y,b\rangle, \langle y,c\rangle\}$



$f^{-1}(x) = \{a\}$

$f^{-1}(y) = \{b,c\}$

$f^{-1}(z) = \emptyset$

(partizione di dom(f))

In generale NON è una funzione

Immagine Inversa

Sia $f : A \to B$ una funzione e $y \in B$

l'immagine inversa di f in y è

$$f^{-1}(y) = \{x \in A \mid f(x) = y\}$$

Nota
f è iniettiva sse per ogni $y \in B$, $f^{-1}(y)$ ha al più un elemento

Funzione Inversa

Una funzione $f : A \to B$ è invertibile se esiste una funzione $g : B \to A$ tale che per ogni $x \in A$ e ogni $y \in B$:

$$g(f(x)) = x$$
$$f(g(y)) = y$$

In questo caso, g è l'inverso di f e si rappresenta come f^{-1}

Proprietà di funzioni inverse

Sia $f : A \mapsto B$ invertibile, con funzione inversa f^{-1}:

1. f^{-1} è totale sse f è suriettiva;
2. f è totale sse f^{-1} è suriettiva.

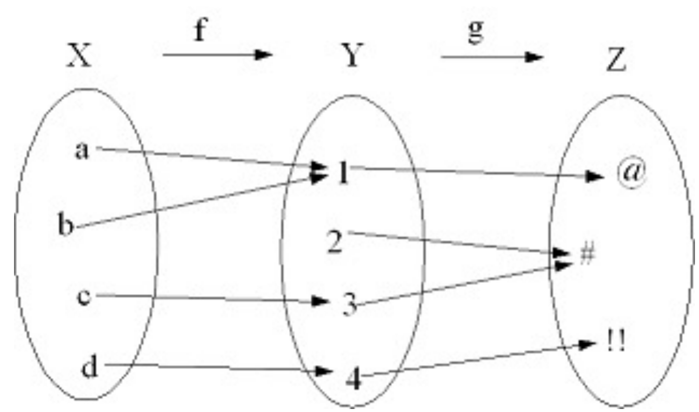
COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

La **composizione di funzioni** è l'applicazione di una funzione al risultato di un'altra funzione. Più precisamente, una funzione *f* tra due insiemi *X* e *Y* trasforma ogni elemento di *X* in uno di *Y*: in presenza di un'altra funzione *g* che trasforma ogni elemento di *Y* in un elemento di un altro insieme *Z*, si definisce la composizione di *f* e *g* come la funzione che trasforma ogni elemento di *X* in uno di *Z* usando prima *f* e poi *g*.

Formalmente, date due funzioni *f*: *X* → *A* e *g*: *B* → *Z* con *f* (A)⊆B definiamo la funzione composta

$$g \circ f : X \to Z$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \; \forall x \in X$$



Composizione di Funzioni

La composizione di due funzioni si riferisce all'applicazione di una funzione al risultato di un'altra

Siano $f : A \to B$ e $g : B \to C$ due funzioni

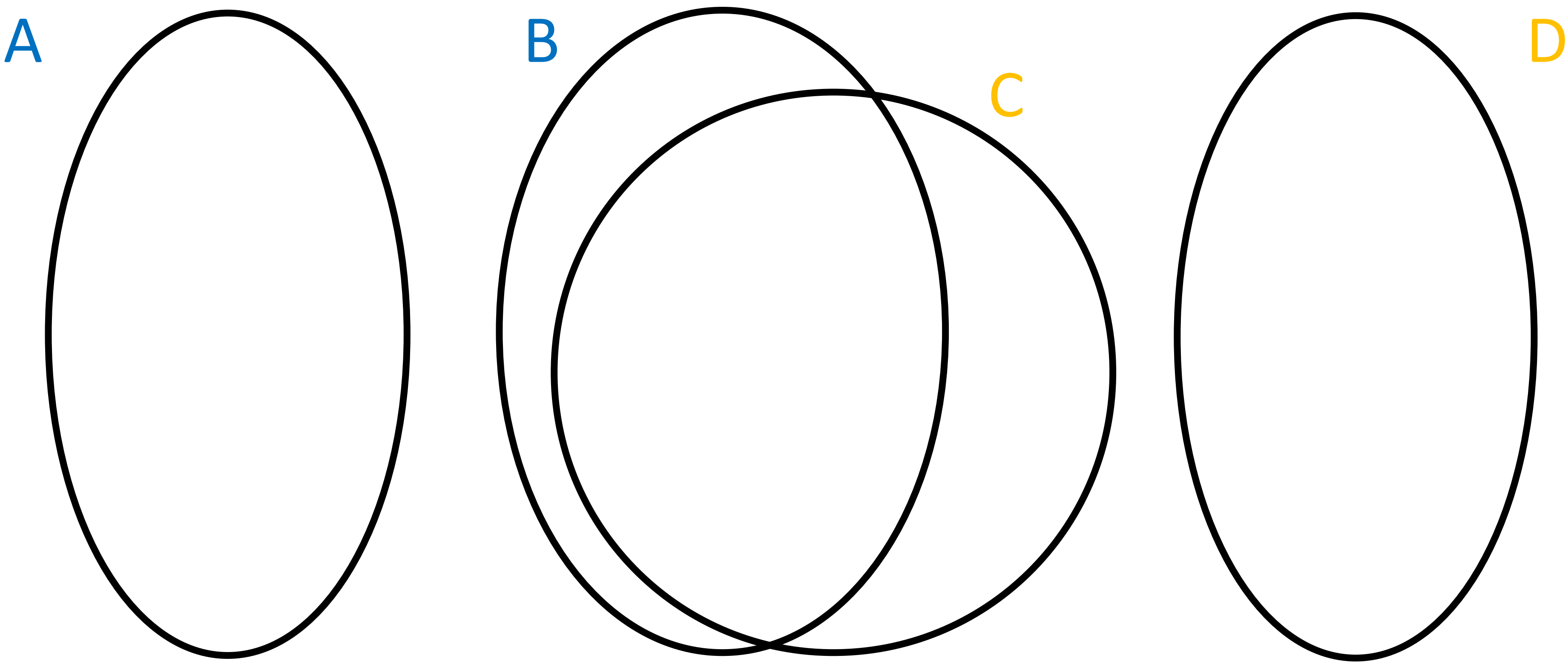
(notate l'insieme comune B)

la funzione composta $g \circ f : A \to C$ è definita per ogni $x \in A$ da

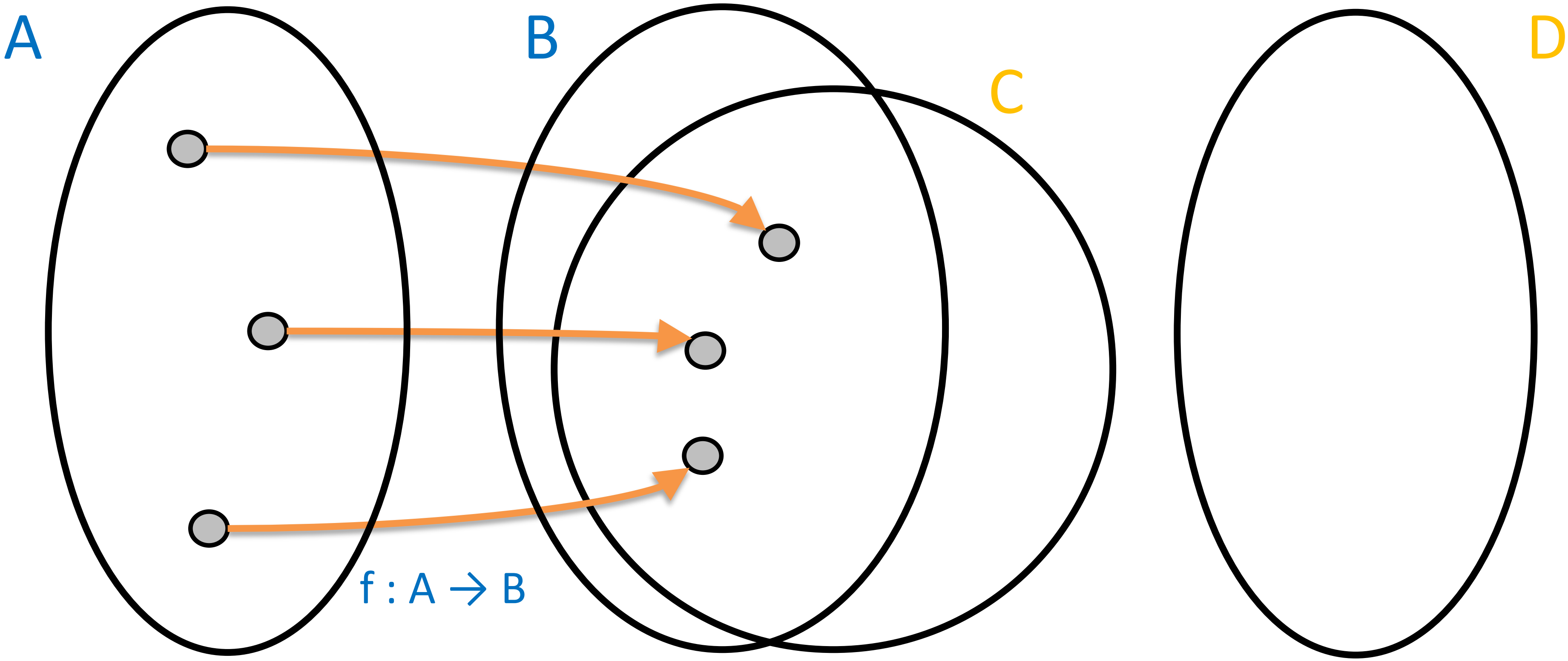
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$(g \circ f)(x)$ è definita sse $f(x)$ e $g(f(x))$ sono definite

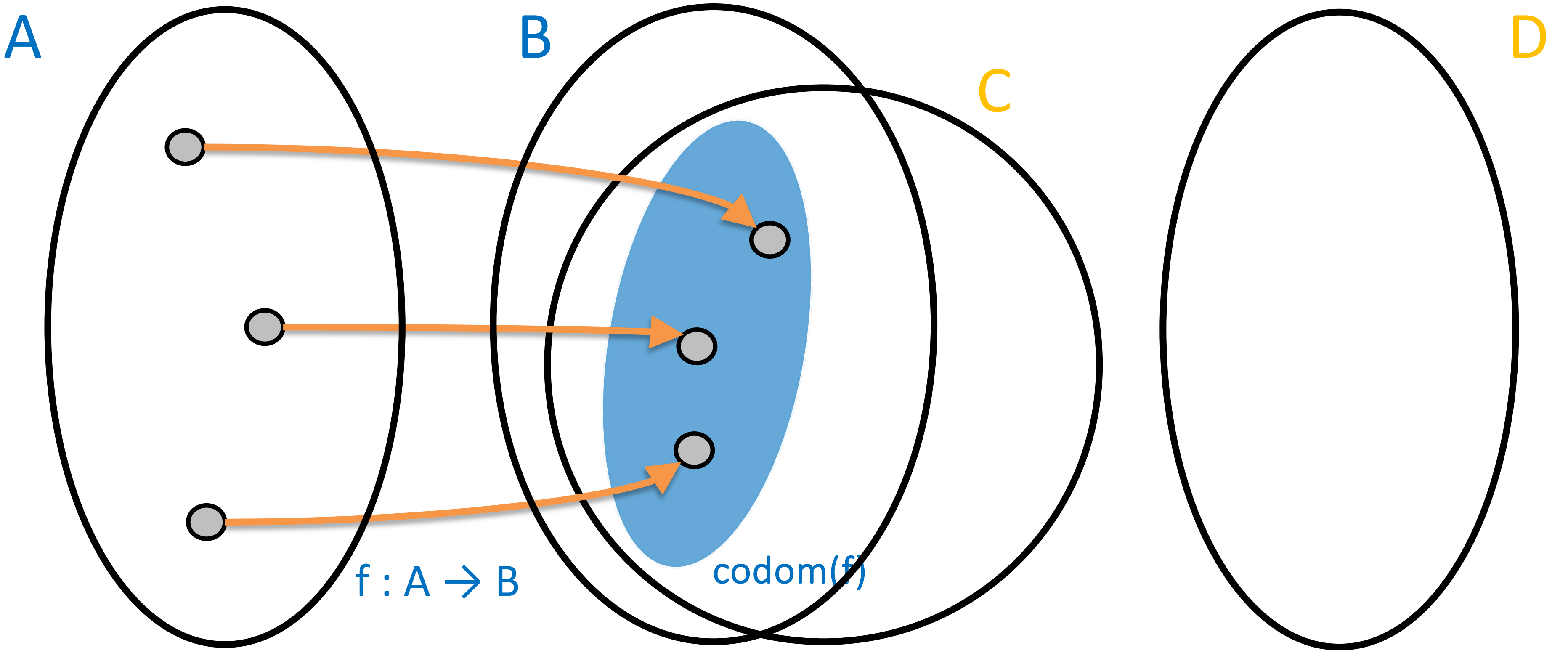
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



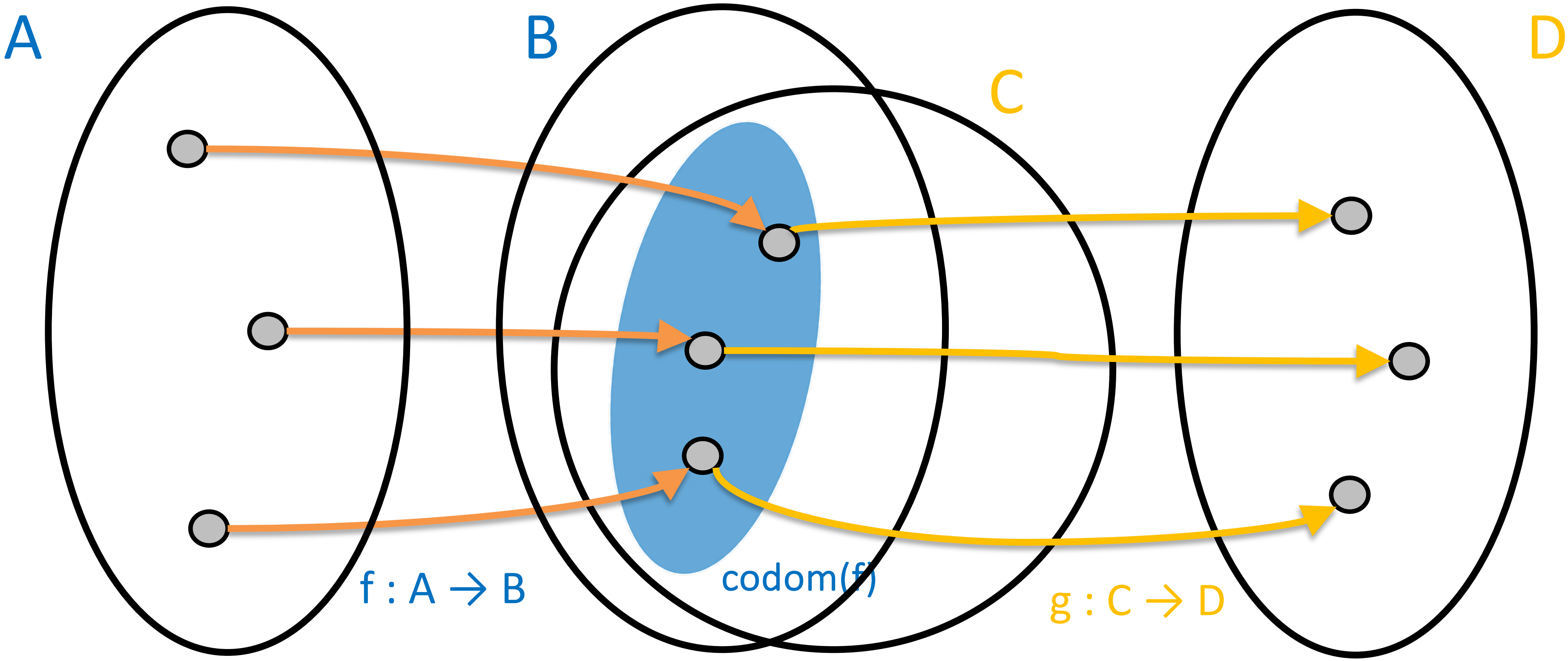
$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

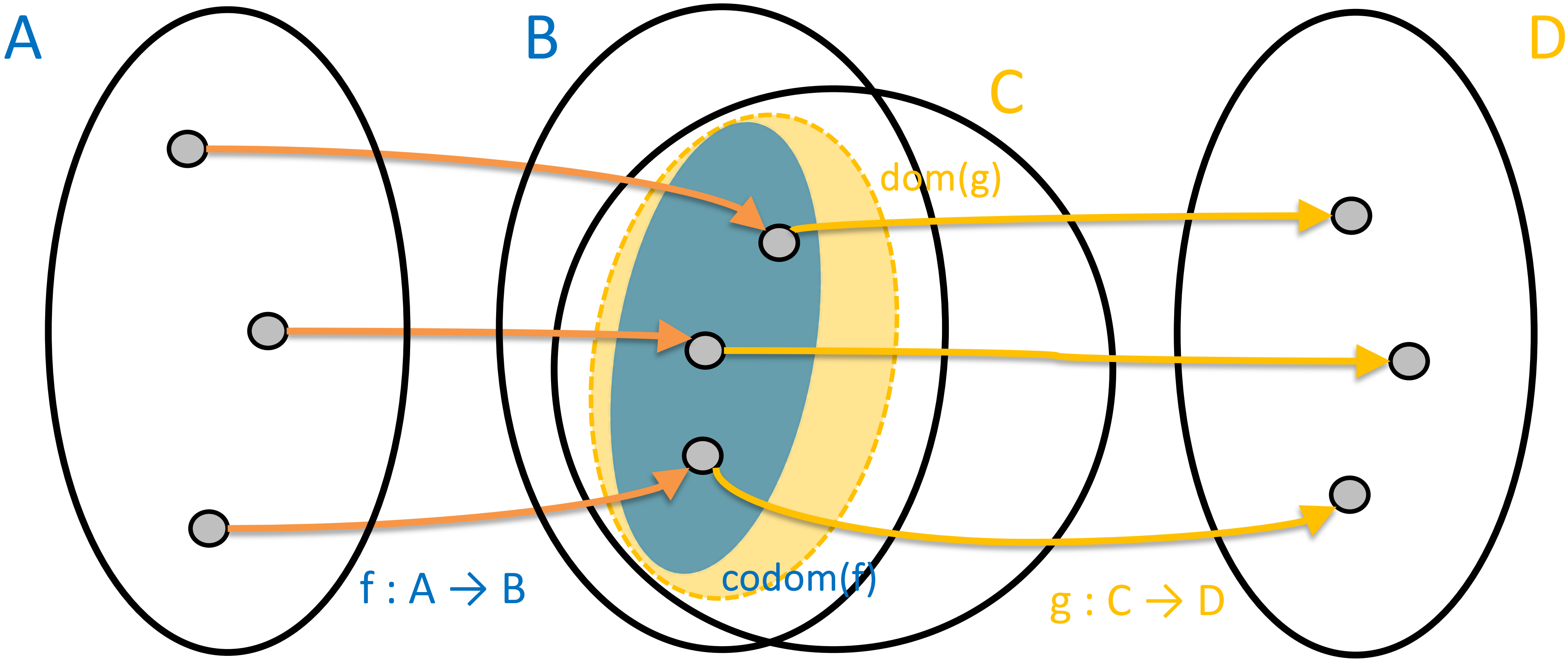


$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



$(g \circ f)(x) = g(f(x))$

1. codom(f) ⊆ dom(g)



Proprietà della composizione

La composizione è asociativa:

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

Se f e g sono entrambe iniettive, allora $f \circ g$ è iniettiva

Se f e g sono entrambe suriettive, allora $f \circ g$ è suriettiva

Se f e g sono entrambe invertibili, allora $f \circ g$ è invertibile
$((g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1})$

Composizione di funzioni

Date $f : S \mapsto T$ e $g : T \mapsto U$ la *composizione* di f e g è la funzione $g \circ f : S \mapsto U$ tale che $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ per ogni $x \in S$.

La funzione composta $(g \circ f)(x)$ è definita sse sono definite entrambe $g(f(x))$ e $f(x)$.

Proposizione 2. *Siano $f : S \mapsto T$ e $g : T \mapsto Q$ invertibili. Allora $g \circ f$ è invertibile e la sua inversa è $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

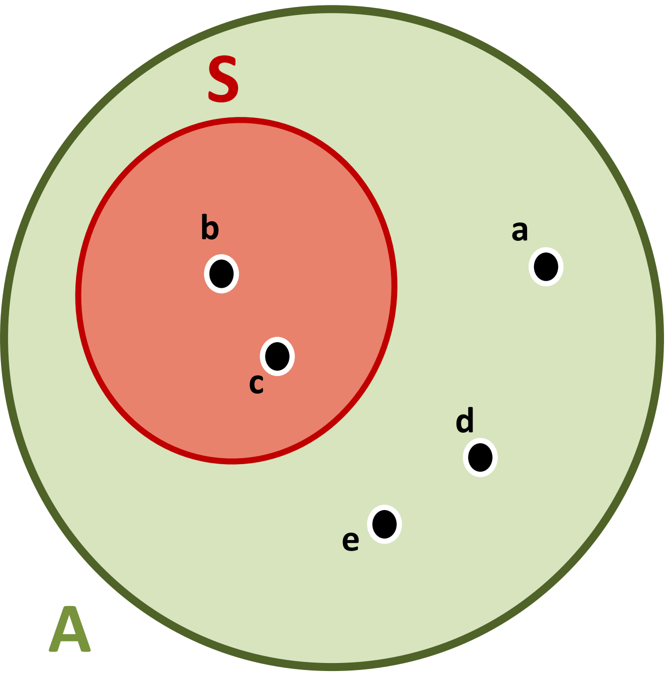
FUNZIONE CARATTERISTICA

Nella teoria degli insiemi, se ***A*** è un sottoinsieme dell'insieme ***S***, la **funzione indicatrice**, o **funzione caratteristica** di ***A*** è quella funzione da ***S*** all'insieme **{0, 1}** che sull'elemento $x \in S$ vale 1 se ***x*** appartiene ad *A*, e vale 0 in caso contrario.

La funzione caratteristica di un insieme $S \subseteq A$ è la funzione $f_S : A \to \{0,1\}$ dove

$$f_S(x) = \begin{cases} 0 & x \notin S \\ 1 & x \in S \end{cases}$$

FUNZIONE CARATTERISTICA: ESEMPIO



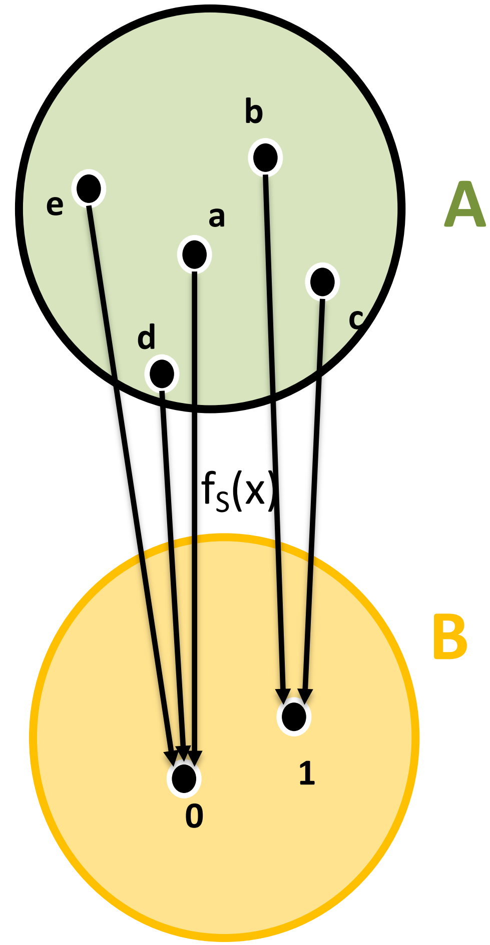
A = {a,b,c,d,e}

S = {b,c}

$S \subseteq A$

B = {0,1}

x	$f_S(x)$
a	0
b	**1**
c	**1**
d	0
e	0



Funzione caratteristica di sottoinsiemi

Sia U l' universo. La *funzione caratteristica* di un sottoinsieme $S \subseteq U$ è così definita:

$$f_S(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x \in S \\ 0 & \text{per } x \notin S. \end{cases}$$

Proposizione 3.

1. $f_{S \cap T} = f_S \times f_T$;

2. $f_{S \cup T} = f_S + f_T - f_S \times f_T$;

3. $f_{S \triangle T} = f_S + f_T - 2 \times f_S \times f_T$.

Proprietà delle funzioni

$f: X \mapsto Y$	se $x = y$ allora $f(x) = f(y)$
funzione iniettiva	se $f(x) = f(y)$ allora $x = y$,
funzione suriettiva	per ogni $y \in Y$, esiste un $x \in X$ tale che $f(x) = y$
funzione biettiva	suriettiva e iniettiva
funzione totale	$dom(f) = X$

Multinsiemi

Un multinsieme è una variante di un insieme dove gli elementi si possono ripetere

$$\{\!\{a, a, b, c, c, c\}\!\} \neq \{\!\{a, b, c\}\!\}$$

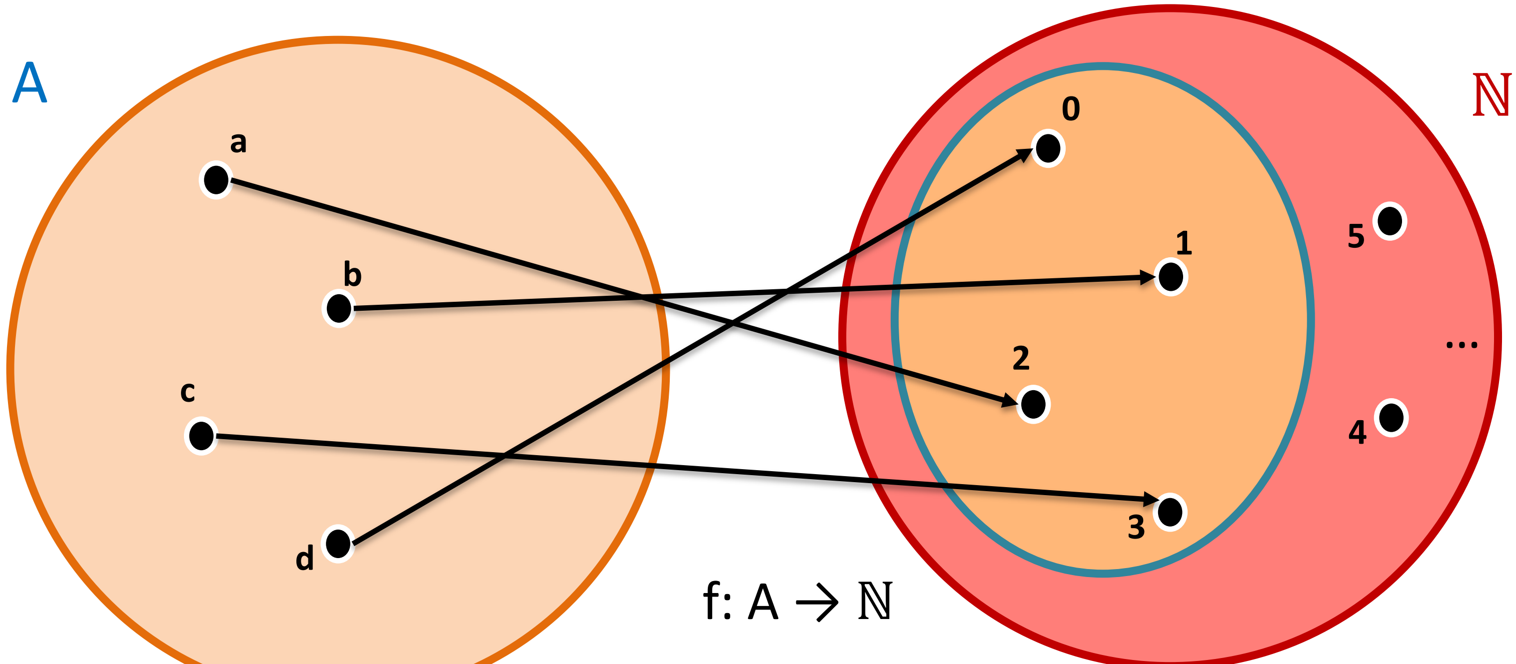
Formalmente, un multinsieme è una funzione da un insieme a $\mathbb{N}$

$$f : A \to \mathbb{N}$$

che sprime quante volte si ripete ogni elemento nel multinsieme $(A = \{a, b, c, d\})$

$$\{\langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle c, 3\rangle, \langle d, 0\rangle\}$$

MULTINSIEME: ESEMPIO {{a,a,b,c,c,c}



A = {a, b, c, d}

f: A → ℕ, f(x) ={⟨a,2⟩,⟨b,1⟩,⟨c,3⟩,⟨d,0⟩}

INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 4)

END

PROPRIETA' DELLE RELAZIONI

Una relazione R definita su un insieme X è:

- *riflessiva* se $(x,x) \in R, \quad \forall x \in X,$ equivalentemente se $I_X \subset R$.
- *simmetrica* se $(x,y) \in R \quad \Rightarrow \quad (y,x) \in R,$ equivalentemente se $R = R^t$.
- *antisimmetrica* se $(x,y) \in R$ e $(y,x) \in R \quad \Rightarrow \quad x = y,$ equivalentemente se $R \cap R^t \subset I_X$.
- *transitiva* se $(x,y) \in R$ e $(y,z) \in R \Rightarrow (x,z)$.

PROPRIETA' DELLE RELAZIONI

Sia $X = \{a, b, c\}$ e $R_i \subseteq X \times X$

- $R_1 = \{(a,a), (a,b), (b,a), (a,c)\}$
  non riflessiva, non simmetrica, non transitiva, non antisimmetrica

- $R_2 = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (b,a), (a,c)\}$
  riflessiva, non simmetrica, non transitiva, non antisimmetrica

- $R_3 = \{(a,a), (b,b)\}$
  non riflessiva, simmetrica, transitiva, antisimmetrica