LOGICA 1

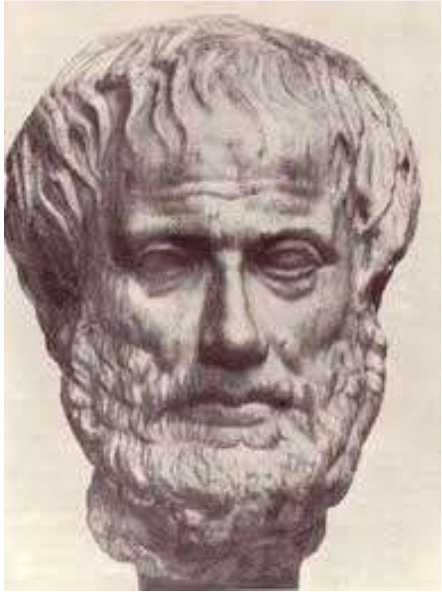
Stefania Bandini

LOGICA

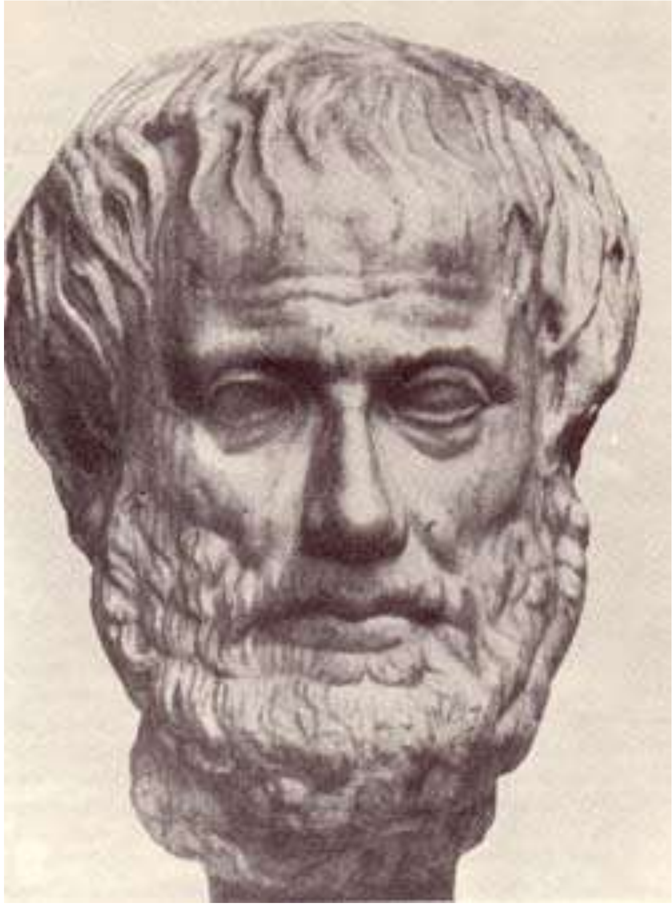
La **logica** è lo studio del ragionamento e dell'argomentazione e, in particolare, dei procedimenti inferenziali, rivolto a chiarire quali procedimenti di pensiero siano validi e quali non validi.

Fanno parte degli studi della logica anche quelli per le espressioni verbali dell'analisi logica della proposizione e dell'analisi logica del periodo.

La parola "logica" deriva dal greco *logos*, ovvero "parola, pensiero, idea, argomento, ragione".



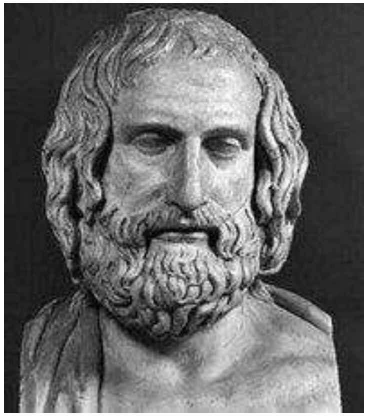
LOGICA Vs LOGICA MATEMATICA



DIALETTICA
PARADOSSI
DIMOSTRAZIONI

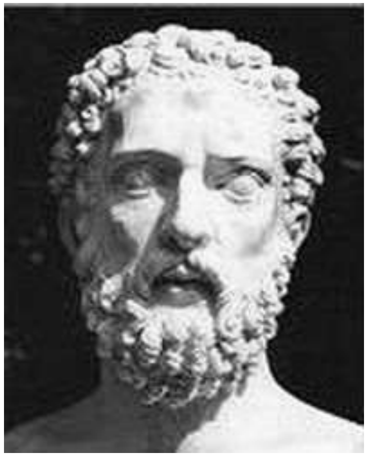
RETORICA – DIALETTICA

SOFISTI



Protagora

Abdera 486 a.C. - Mar Ionio 411 a.C.



Gorgia

Lentini ca. 485 a.C. - Larissa ca. 375 a.C.

PARADOSSI

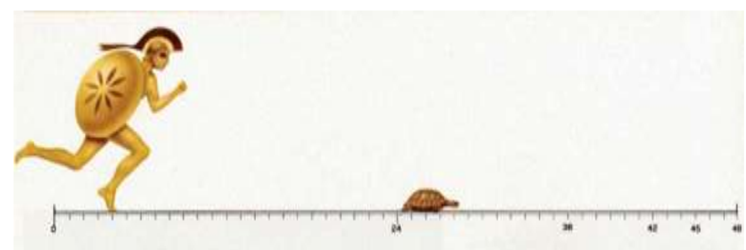
MENTITORE

Epimenide (+ EUBULIDE)
(Cnosso VIII/VII a.C.)

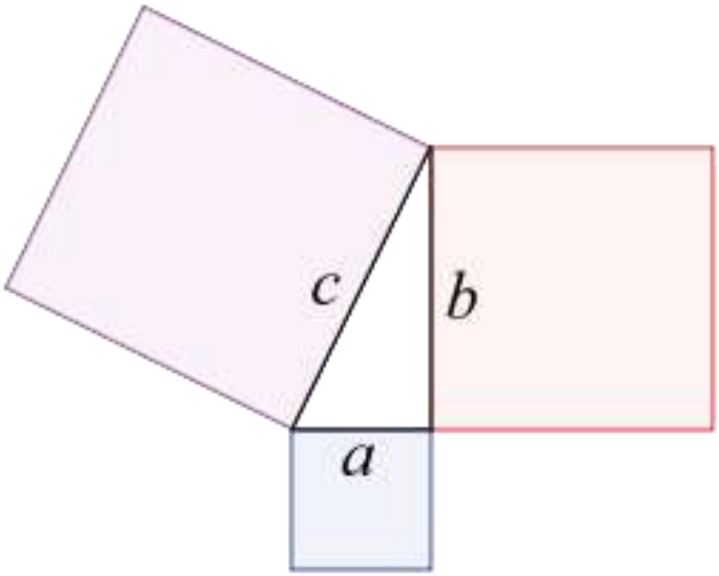
TUTTI I CRETESI SONO BUGIARDI

ACHILLE E LA TARTARUGA

Zenone
(Elea 489 a.C. – Larissa 431 a.C.)



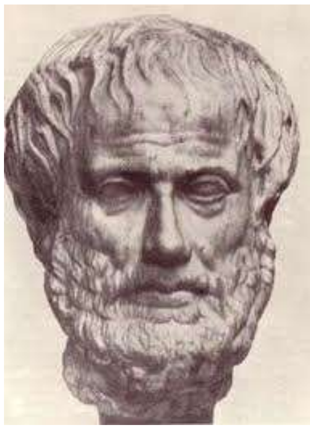
DIMOSTRAZIONI



«La matematica e la logica, dal punto di vista storico, sono state due discipline completamente distinte. Comunque tutte e due si sono sviluppate nell'età moderna: la logica diventando sempre più matematica e la matematica sempre più logica. La conseguenza è che ora è completamente impossibile tracciare tra le due discipline una linea di demarcazione; sostanzialmente le due sono in realtà una disciplina sola» (Russell, 1970)

«Il rapporto fra logica e matematica si risolve nella cultura greca in termini di reciproca indipendenza tecnica e dipendenza metodologica della matematica dalla logica, nel senso che l'edificazione teorica della prima ha bisogno dei metodi e degli strumenti della seconda» (Freguglia, 1978).

DIMOSTRAZIONE



Il termine "dimostrazione" ha, secondo il dizionario, almeno 5 significati:

1 - esempio, testimonianza
2 - spiegazione, argomentazione, ragionamento
3 - conferma, attestazione, prova
4 - presentazione, performance
5 - manifestazione, corteo, comizio

Una dimostrazione consiste nel verificare, nel senso di mostrarne la ragionevole verità rendendo innegabile un'affermazione.

Aristotele (384 a.C.-322 a.C.) fu il primo ad analizzare e definire il concetto di dimostrazione: attraverso varie forme di ragionamenti si arriva a provare un'affermazione.

Averroè (filosofo, medico, matematico e giurista arabo/spagnolo 1126-1198) portò avanti questo concetto distinguendo fra dimostrazione dell'esistenza e quella dell'essenza.

DIMOSTRAZIONI

Dimostrazione come impegno a verificare le conoscenze attraverso l’esperienza e la continuità; la volontà di imparare dagli errori; la disponibilità ad abbracciare il dubbio, il paradosso e l’incertezza.

Secondo Galileo Galilei (fisico, filosofo, astronomo e matematico italiano 1564-1642) ogni fatto, evento o fenomeno naturale va compreso e analizzato passandolo al vaglio dell’esperimento, cioè quel metodo di verifica che permette di accertare concretamente ed empiricamente l’esattezza delle teorie fisiche. Quanto più si riuscirà a riprodurre concretamente il fenomeno previsto dalle teorie, tanto più verrà certificato il dominio sul fenomeno stesso, quindi non solo la capacità di replicarlo a piacere e di prevederlo con esattezza.

LOGICA Vs INFORMATICA

LOGICA E INFORMATICA

La logica e lo studio delle forme del ragionamento, con l'obiettivo principale di riconoscere e individuare le forme dei ragionamenti corretti, e distinguerle da quelli scorretti. Per questo motivo essa viene a volte chiamata logica “formale”, o anche “simbolica", perché le “forme" del ragionamento vengono espresse mediante l'uso di simboli, che consentono di astrarre dal contenuto dei ragionamenti stessi.

Astrarre significa semplificare: sbarazzandosi dei dettagli, si guardano oggetti diversi da uno stesso punto di vista, e gli si può dare un trattamento uniforme.

LOGICA E INFORMATICA

Si considerino ad esempio questi i due ragionamenti:

a) Se nevica, la temperatura è di $0^o C$.
Nevica.
Quindi la temperatura è di $0^o C$.

b) Se la matematica è un'opinione, allora $1 + 1 = 0$.
La matematica è un'opinione.
Quindi $1 + 1 = 0$.

LOGICA E INFORMATICA

I due ragionamenti hanno evidentemente la stessa **forma**, anche se essi riguardano concetti diversi e diverso e il contenuto di verità delle proposizioni in essi coinvolte.

Possiamo identificare la loro forma comune utilizzando simboli, A e B, al posto delle proposizioni:

Se A allora B.
A.
Quindi B.

LOGICA E INFORMATICA

Per quel che riguarda l'impatto della logica sull'informatica, essa è innanzitutto uno strumento di base per la meta-informatica: ha portato, a definire la nozione di **calcolabilità**, ai risultati di **indecidibilità**, alla **classificazione dei problemi** secondo la loro **complessità**.

La logica ha fornito all'informatica molti concetti fondamentali, come quello di **semantica formale**, che e alla base **della semantica denotazionale dei linguaggi di programmazione**, e metodologie generali come il **trattamento assiomatico di informazioni**, che trova applicazione, ad esempio, nella **dimostrazione di proprietà di programmi**.

LOGICA E INFORMATICA

La logica svolge un ruolo interno e pratico rispetto all'informatica, dove trovano applicazione i suoi metodi e gli strumenti da essa forniti. La logica è infatti il formalismo fondamentale per la rappresentazione della conoscenza in **intelligenza artificiale**, dove trovano applicazione i **metodi automatici per la dimostrazione di teoremi**, studiati e realizzati prima ancora della loro applicazione nella costruzione di sistemi di informatica e intelligenza artificiale.

Inoltre, i **linguaggi di specifica formale** e la **specifica algebrica di tipi astratti di dati** si fondano su metodologie logiche.

Uno dei terreni in cui la logica gioca un ruolo pratico essenziale e relativo ai paradigmi di calcolo: i due fondamentali sono quelli della **risoluzione** e della **riduzione**, associati rispettivamente alla **programmazione logica** (es. **PROLOG**) e alla **programmazione funzionale** (es. **LISP**).

LOGICA

LOGICA PROPOSIZIONALE

SINTASSI DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

La sintassi della logica proposizionale determina quali sono le espressioni corrette di tale logica, cioè definisce che cos'è un linguaggio proposizionale.

SINTASSI DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Introduciamo in questo paragrafo la nozione di *linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}_\Sigma$ costruito su un alfabeto Σ. Iniziamo con la definizione di alfabeto.

Un alfabeto Σ *è costituito da*

- *I connettivi proposizionali* $\neg$ *(unario) e* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *e* $\leftrightarrow$ *(binari);*
- *Le costanti proposizionali* $\top$, $\bot$ *(per denotare il vero e il falso);*
- *Un insieme non vuoto (finito o numerabile) di simboli proposizionali* $\mathcal{P} = \{A, B, \ldots, P, Q, \ldots\}$;
- *I simboli separatori '(' e ')'.*

Nel seguito scriveremo $\mathcal{L}$ quando Σ è chiaro dal contesto. Definiamo ora le formule di $\mathcal{L}$.

SINTASSI DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

L'insieme PROP *delle* formule ben formate *o* formule *del linguaggio proposizionale* $\mathcal{L}$ *è l'insieme definito induttivamente come segue.*

1. *Le costanti e i simboli proposizionali sono formule;*
2. *Se* A *è una formula* $(\neg A)$ *è una formula;*
3. *Se* $\circ$ *è un connettivo binario (cioè* $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$*) e se* A *e* B *sono due formule,* $(A \circ B)$ *è una formula.*

Le costanti e i simboli proposizionali sono anche detti *atomi*, le loro negazioni sono dette *atomi negati*. Gli atomi e gli atomi negati sono anche detti *letterali*. Gli atomi negati sono talvolta detti *letterali negativi*. Una formula del linguaggio proposizionale è anche detta *proposizione* o *enunciato proposizionale*.

SINTASSI DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Sia A una formula di PROP, *l'insieme delle* sottoformule *di A è definito come segue.*

1. *Se A è una costante o un simbolo proposizionale allora A stessa è la sua sola sottoformula.*
2. *Se A è una formula del tipo $(\neg A')$ allora le sottoformule di A sono A stessa e le sottoformule di A'; $\neg$ è detto* connettivo principale *e A'* sottoformula immediata *di A.*
3. *Se A è una formula del tipo $B \circ C$ dove $\circ$ è un connettivo binario (cioè $\circ \in \{\vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow\}$), e B e C due formule, le sottoformule di A sono A stessa e le sottoformule di B e C; $\circ$ è detto* connettivo principale; *B e C* sottoformule immediate *di A.*

SINTASSI DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

1. *ogni variabile proposizionale in* P *è una formula;*

2. $\top$ *e* $\bot$ *sono formule;*

3. *se* A *è una formula, allora anche* $\neg A$ *è una formula;*

4. *se* A *e* B *sono formule, allora anche* $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \equiv B)$ *sono formule;*

5. *nient'altro è una formula.*

Una formula della forma $A \wedge B$ si dice congiunzione, e A e B sono i due congiunti. Una formula della forma $A \vee B$ si dice disgiunzione, e A e B sono i due disgiunti. Una formula della forma $A \rightarrow B$ si dice implicazione, A è l'antecedente e B il conseguente dell'implicazione. Una formula della forma $A \equiv B$ si dice doppia implicazione.

SINTASSI DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

enunciato sempre vero

1. …e *proposizionale in* P *è una formula;*
2. $\top$ *e* $\bot$ *sono formule;*
3. *se* A *è una formula, allora anche* $\neg A$ *è una formula;*
4. *se* A *e* B *sono formule, allora anche* $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \equiv B)$ *sono formule;*
5. *nient'altro è una formula.*

Una formula della forma $A \wedge B$ si dice congiunzione, e A e B sono i due congiunti. Una formula della forma $A \vee B$ si dice disgiunzione, e A e B sono i due disgiunti. Una formula della forma $A \rightarrow B$ si dice implicazione, A è l'antecedente e B il conseguente dell'implicazione. Una formula della forma $A \equiv B$ si dice doppia implicazione.

SINTASSI DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

enunciato sempre falso

1. *og… posizionale in P è una formula;*
2. $\top$ *e* $\bot$ *sono formule;*
3. *se A è una formula, allora anche $\neg A$ è una formula;*
4. *se A e B sono formule, allora anche $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$, $(A \equiv B)$ sono formule;*
5. *nient'altro è una formula.*

Una formula della forma $A \wedge B$ si dice congiunzione, e A e B sono i due congiunti. Una formula della forma $A \vee B$ si dice disgiunzione, e A e B sono i due disgiunti. Una formula della forma $A \rightarrow B$ si dice implicazione, A è l'antecedente e B il conseguente dell'implicazione. Una formula della forma $A \equiv B$ si dice doppia implicazione.

SINTASSI DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

$\neg$ è la negazione: si legge "non";

$\wedge$ è la congiunzione: si legge "e";

$\vee$ è la disgiunzione: si legge "oppure";

$\longrightarrow$ è l'implicazione: si legge "implica" (o "se ... allora ...");

$\equiv$ è la doppia implicazione: si legge "se e solo se".

SINTASSI DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Ad esempio, l'enunciato "Caino e fratello di Abele "è un atomo, che possiamo rappresentare mediante la lettera proposizionale p; "a ogni paziente piace qualche dottore" è un altro atomo, che rappresentiamo mediante un'altra variabile proposizionale, q. Le frasi nella tabella che segue sono allora rappresentate dalle formule:

Caino è fratello di Abele *oppure* a ogni paziente piace qualche dottore	$p \vee q$
Caino *non* è fratello di Abele	$\neg p$
Caino è fratello di Abele *e* a ogni paziente piace qualche dottore	$p \wedge q$
Se Caino è fratello di Abele, *allora* a ogni paziente piace qualche dottore	$p \rightarrow q$
Caino è fratello di Abele *se e solo se* a ogni paziente piace qualche dottore	$p \equiv q$
Se Caino *non* è fratello di Abele, *allora* Caino è fratello di Abele *oppure* a ogni paziente piace qualche dottore	$\neg p \rightarrow (p \vee q)$

USO DELLE PARENTESI

Si omettono le parentesi dalle formule quando non ci sia rischio di ambiguità, secondo le seguenti convenzioni:

- Si possono omettere le parentesi esterne. Ad esempio, anziché $(p \wedge q)$ si può scrivere $p \wedge q$.
- Associatività: i connettivi associano da sinistra a destra (se non indicato altrimenti dall'uso di parentesi). Ad esempio: $((p \wedge q) \wedge r)$ si può scrivere $p \wedge q \wedge r$, e $((p \rightarrow q) \rightarrow r)$ si può scrivere $p \rightarrow q \rightarrow r$. Ma $(p \rightarrow (q \rightarrow r))$ non si può scrivere $p \rightarrow q \rightarrow r$, che sta invece per $((p \rightarrow q) \rightarrow r)$.
- L'ordine di precedenza dei connettivi è:

$$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \equiv$$

(se non indicato altrimenti dall'uso di parentesi). Ad esempio: $(p \rightarrow (q \wedge r))$ si può scrivere $p \rightarrow q \wedge r$, e $\neg(p \rightarrow (q \wedge r))$ si può scrivere $\neg(p \rightarrow q \wedge r)$. Ma $\neg(p \rightarrow (q \wedge r))$ non si può scrivere $\neg p \rightarrow q \wedge r$, che sta invece per $((\neg p) \rightarrow (q \wedge r))$; e $(p \rightarrow (q \equiv r))$ non si può scrivere $p \rightarrow q \equiv r$, che sta invece per $((p \rightarrow q) \equiv r)$.

USO DELLE PARENTESI

Esempio

$s \rightarrow p \wedge q \vee \neg r$ abbrevia $(s \rightarrow ((p \wedge q) \vee \neg r))$

$p \rightarrow (p \rightarrow r \wedge q)$ abbrevia $(p \rightarrow (p \rightarrow (r \wedge q)))$

$p \equiv \neg q \equiv r \vee s$ abbrevia $((p \equiv \neg q) \equiv (r \vee s))$

PRECEDENZA TRA CONNETTIVI

Le parentesi si possono eliminare con l'introduzione di un'opportuna precedenza tra i connettivi. Per le formule proposizionali si usa la seguente convenzione:

la massima precedenza a $\neg$, poi, nell'ordine, ai connettivi $\wedge, \vee$, $\rightarrow$ e infine a $\leftrightarrow$.

Questo significa che, in assenza di parentesi, una formula ben formata, va parentetizzata privilegiando Ie sottoformule i cui connettivi principali hanno precedenza più alta.
A parità di precedenza, cioè se siamo in presenza di pin occorrenze dello stesso connettivo, si assume che esso associ a destra.

Esempio

La formula $A \rightarrow B \rightarrow C$ viene parentetizzata come $(A \rightarrow (B \rightarrow C))$;

la formula $\neg A \wedge \neg B \rightarrow C \wedge D \wedge E$ come $(((\neg A) \wedge (\neg B)) \rightarrow (C \wedge (D \wedge E)))$;

la formula $\neg A \wedge (\neg B \rightarrow C) \wedge D \wedge E$ come $((\neg A) \wedge ((\neg B) \rightarrow C) \wedge (D \wedge E))$.

PRECEDENZA TRA CONNETTIVI

Il *connettivo principale* di una formula (non atomica) è l'ultimo connettivo utilizzato nella costruzione della formula:

1. il connettivo principale di $\neg A$ è $\neg$;
2. il connettivo principale di $A \wedge B$ è $\wedge$;
3. il connettivo principale di $A \vee B$ è $\vee$;
4. il connettivo principale di $A \rightarrow B$ è $\rightarrow$;
5. il connettivo principale di $A \equiv B$ è $\equiv$.

ALBERO SINTATTICO

Un albero sintattico $\mathcal{T}_s$ è un albero binario coi nodi etichettati da simboli di $\mathcal{L}$, che rappresenta la scomposizione di una formula ben formata X come segue.

1. *Se X è una formula ben formata atomica, l'albero binario che la rappresenta è costituito dal solo nodo etichettato con X.*

2a. *Se $X = A \circ B$, X è rappresentata dall'albero binario che ha la radice etichettata con $\circ$ e i cui figli sinistro e destro sono rispettivamente la rappresentazione di A e di B.*

2b. *Se $X = \star A$, X è rappresentata dall'albero binario che ha la radice etichettata con $\star$ e un unico figlio che è la rappresentazione di A.*

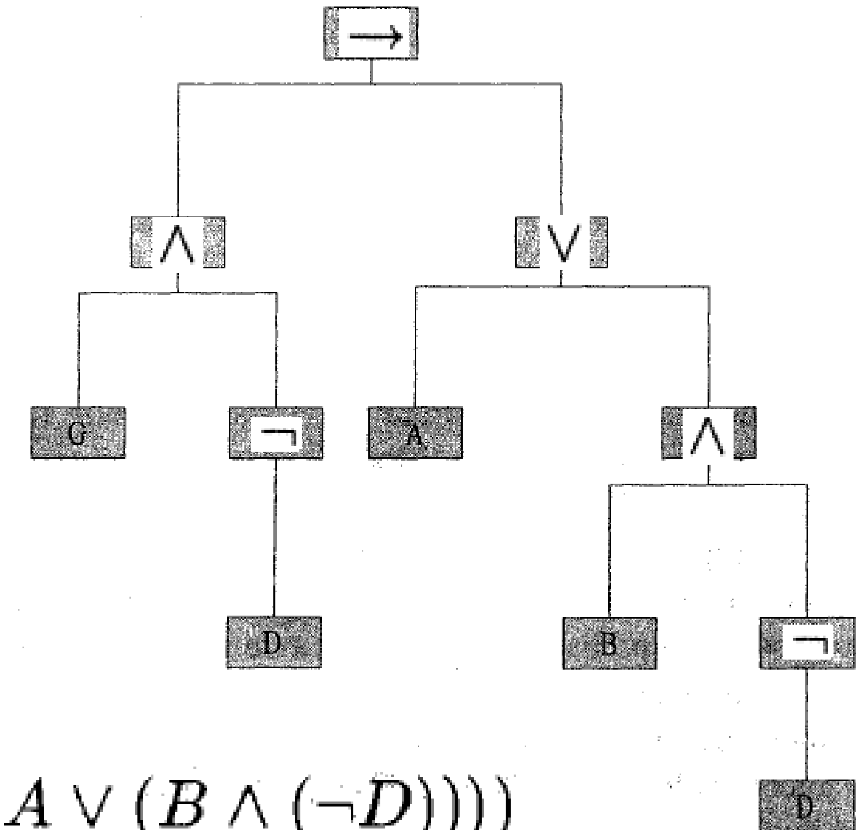
ESEMPIO: ALBERO SINTATTICO

Sia $Y = ((G \wedge (\neg D)) \rightarrow (A \vee (B \wedge (\neg D))))$, l'albero sintattico che rappresenta la scomposizione di Y è illustrato in figura Il nodo radice dell'albero è etichettato dal connettivo principale di Y, cioè $\rightarrow$. Il sottoalbero sinistro è etichettato dal connettivo principale della sottoformula $(G \wedge (\neg D))$, cioè $\wedge$. Il sottoalbero destro è etichettato dal connettivo principale della sottoformula $(A \vee (B \wedge (\neg D)))$, cioè $\vee$. Scomponendo la formula ricorsivamente e ponendo i connettivi delle sottoformule come etichette delle radici dei sottoalberi ad esse associati, si arriva alle foglie

$$foglie = \{G, D, A, B, D\}$$

Il principio di induzione strutturale permette di definire funzioni sull'insieme $\mathcal{F}$ delle formule ben formate ricorsivamente.

ESEMPIO: ALBERO SINTATTICO



$$((G \land (\neg D)) \rightarrow (A \lor (B \land (\neg D))))$$

Da questa definizione emerge come la struttura dell'albero binario rappresenta in maniera univoca la struttura della formula; inoltre tutti i nodi intermedi sono etichettati con operatori, e i nodi foglia con atomi.

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

La sintassi di un linguaggio determina la forma delle espressioni corrette nel linguaggio. La semantica assegna un significato alle espressioni sintatticamente corrette di tale linguaggio. Per stabilire la semantica di un linguaggio, occorre specificare innanzituto un **dominio di interpretazione**, cioè l'insieme degli oggetti che costituiscono possibili significati per le espressioni del linguaggio. La semantica di un linguaggio associa allora ad ogni espressione sintattica un oggetto del dominio di interpretazione.

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Nel caso della logica proposizionale il dominio di interpretazione è costituito dall'insieme $Bool = \{T, F\}$ dei valori booleani (o valori di verità). Per studiare il significato dei connettivi proposizionali, infatti, si stabilisce che una proposizione atomica può essere vera o falsa. Il significato dei connettivi viene stabilito definendo il valore di verità di proposizioni complesse a partire da quello dei loro componenti immediati.

Il significato (il valore di verità) di una formula in $Prop[P]$ dipende quindi dal significato (il valore di verità) delle lettere proposizionali in P. Dunque, per stabilire il significato di una formula proposizionale occorre *assegnare* un valore di verità a ciascuna variabile proposizionale. Ad esempio, il significato della formula $p \wedge q$ si può stabilire soltanto conoscendo il significato di p e di q; se tali atomi sono entrambi veri, allora $p \wedge q$ è vero, altrimenti è falso.

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Sia P un insieme di lettere proposizionali. Una **interpretazione** *o* **assegnazione** $\mathcal{M}$ *per P è una funzione*

$$\mathcal{M}: \; P \rightarrow Bool$$

Ad esempio, se $P = \{p, q, r\}$, ci sono 8 possibili interpretazioni di P:

	p	q	r
$\mathcal{M}_1$	T	T	T
$\mathcal{M}_2$	T	T	F
$\mathcal{M}_3$	T	F	T
$\mathcal{M}_4$	T	F	F

	p	q	r
$\mathcal{M}_5$	F	T	T
$\mathcal{M}_6$	F	T	F
$\mathcal{M}_7$	F	F	T
$\mathcal{M}_8$	F	F	F

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

L'interpretazione di una formula dipende dall'interpretazione delle lettere proposizionali che occorrono in essa. Una volta fissata un'interpretazione $\mathcal{M}$ per P, risulta comunque stabilita l'interpretazione di qualsiasi formula in $Prop[P]$, in base al significato delle lettere proposizionali che occorrono in essa e al significato dei connettivi logici. Se A è una formula e $\mathcal{M}$ un'interpretazione di A, la notazione $\mathcal{M} \models A$ indica che A è vera in $\mathcal{M}$, cioè che il significato di A in $\mathcal{M}$ è T (e si dice allora che $\mathcal{M}$ è un *modello* di A). Se A è falsa in $\mathcal{M}$ scriviamo $\mathcal{M} \not\models A$ (e si dice allora che $\mathcal{M}$ è un *contromodello* di A). La verità o falsità di una formula in $\mathcal{M}$ costituisce la sua interpretazione secondo $\mathcal{M}$, ed è definita induttivamente come segue ("sse" sta per "se e solo se"):

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

La funzione $\mathcal{O}p_{\neg}$ della logica proposizionale è definita come segue: $\mathcal{O}p_{\neg}(1) = 0$ e $\mathcal{O}p_{\neg}(0) = 1$. Questo è di solito espresso in maniera concisa come: $\neg(0) = 1$ e $\neg(1) = 0$, cioè la funzione di valutazione associata a un connettivo viene indicata col simbolo stesso del connettivo e viene definita in forma tabellare mediante la *tavola* o *tabella dei valori di verità* per il connettivo

	$\neg$
1	0
0	1

TABELLA DEI VALORI DI VERITA’

		$\wedge$	$\vee$	$\rightarrow$	$\leftrightarrow$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	0	0
0	1	0	1	1	0
0	0	0	0	1	1

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Congiunzione

Il connettivo di *congiunzione* $\wedge$ viene definito in modo che $A \wedge B$ è vero sse sia A che B (i due *congiunti*) sono veri, quindi $\mathcal{O}p_{\wedge} = min$.

		$\wedge$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Disgiunzione

Il connettivo di *disgiunzione* $\vee$ viene definito in modo che $A \vee B$ è vero sse A oppure B (uno dei due *disgiunti*) sono veri, quindi $\mathcal{O}p_{\vee} = max$.

		$\vee$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Implicazione

La definizione della semantica del connettivo di *implicazione* $A \to B$ (detta *implicazione materiale*, in cui A è detto *premessa* e B *conseguenza*) è in un certo senso meno intuitiva. Innanzi tutto si noti che, con la definizione data, si ha che $A \to A$ è sempre vero, qualunque sia il valore di verità di A; questo corrisponde alla nostra intuizione. Possiamo quindi accettare il fatto che affinché $A \to B$ sia vero basta che B sia vero, indipendentemente dal valore di verità di A. Questo di fatto ci dice che, se B è vero e $B \to B$ è vero, possiamo "rafforzare" la premessa sostituendo a B un qualunque A e l'implicazione resta vera.

Ovviamente, se la premessa è vera e la conseguenza è falsa, l'implicazione e falsa. Si noti che con questa definizione è difficile immaginare un nesso di causa-effetto tra premessa e conseguenza. Infatti in un opportuno linguaggio proposizionale avremmo anche che *"Se il Presidente della Repubblica si chiama Filippo, allora oggi ho vinto alla Lotteria di Capodanno"* è un'implicazione vera, anche se sia la premessa che la conseguenza sono false (a oggi) ed è difficile immaginare un nesso di causa-effetto tra le due.

		$\to$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

SEMANTICA DELLA LOGICA PROPOSIZIONALE

Doppia Implicazione

La definizione della semantica del connettivo di *doppia implicazione* è del tutto intuitiva: il valore di verità di $A \leftrightarrow B$ è vero se i valori di verità di A e B coincidono.

		$\leftrightarrow$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

TAVOLA DI VERITA' DI UNA FORMULA

$A = (\neg p \vee q) \rightarrow r$

p	q	r	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$(\neg p \vee q) \rightarrow r$
T	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F
F	T	F	T	T	F
T	F	F	F	F	T
F	F	F	T	T	F

TAVOLA DI VERITA' DI UNA FORMULA

Ogni riga rappresenta un'assegnazione di valori di verità alle lettere p, q, r (cioè un'interpretazione per $\{p, q, r\}$) e il corrispondente valore di verità assunto dalle sottoformule di A.

Si noti che, se in una formula ci sono n lettere diverse, si hanno 2^n possibili assegnazioni di valori di verità alle lettere enunciative e quindi 2^n righe nella tavola di verità.

Una tavola di verità può essere abbreviata scrivendo solo la formula completa, mettendo i valori di verità delle lettere proposizionali sotto ciascuna di esse e scrivendo, passo per passo, il valore di verità di ogni sottoformula sotto il suo connettivo principale. Ad esempio, la tavola di verità abbreviata per la formula $(p \vee q) \rightarrow (p \wedge \neg q)$ è la seguente:

TAVOLA DI VERITA' DI UNA FORMULA

(altro metodo per scrivere la tabella)

$(p$	$\vee$	$q)$	$\rightarrow$	$(p$	$\wedge$	$\neg$	$q)$
T	T	T	F	T	F	F	T
T	T	F	T	T	T	T	F
F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	T	F	F	T	F

SODDISFACIBILITA', VALIDITA', EQUIVALENZA LOGICA

Siano A e B formule nel linguaggio $Prop[P]$.

1. *A è una* **tautologia** *o una formula* **logicamente valida** *sse per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ di P, $\mathcal{M} \models A$ (A è vera in ogni interpretazione). Se A è una tautologia, si scrive $\models A$.*

2. *A è* **inconsistente** *(o è una* **contraddizione** *o è* insoddisfacibile*) sse per ogni interpretazione $\mathcal{M}$ di P, $\mathcal{M} \not\models A$ (A è falsa in ogni interpretazione).*

3. *A è* **soddisfacibile** *se esiste un'interpretazione $\mathcal{M}$ tale che $\mathcal{M} \models A$ (A è vera in almeno un'interpretazione).*

4. *Se $A \equiv B$ è una tautologia, allora A e B sono* **logicamente equivalenti**. *In tal caso si scrive $A \leftrightarrow B$.*

SODDISFACIBILITA’, VALIDITA’, EQUIVALENZA LOGICA

Per dimostrare che una formula non è valida, è sufficiente trovare un suo **contromodello**.

Ciò si può fare costruendo la tavola di verità della formula e controllando l'esistenza di almeno una riga in cui la formula è falsa.

Per dimostrare invece che una formula è una **tautologia**, si possono controllare tutte le assegnazioni di valori di verità alle sue lettere proposizionali e verificare che la formula è vera in ogni interpretazione.

Questo controllo può essere effettuato costruendo la tavola di verità della formula.

TAVOLA DI VERITA’ DI UNA FORMULA

(questa formula rappresenta il *modus ponens*)

$$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$$

TAVOLA DI VERITA' DI UNA FORMULA

A	B	$A \Rightarrow B$	$A \wedge (A \Rightarrow B)$	$A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

La formula è una tautologia, quindi ovviamente pure soddisfacibile.

TAVOLA DI VERITA' DI UNA FORMULA

$$(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge (B \rightarrow C))$$

TAVOLA DI VERITA' DI UNA FORMULA

A	B	C	$(A \vee B) \rightarrow (\neg A \wedge (B \rightarrow C))$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

La formula è soddisfacibile

TAVOLA DI VERITA' DI UNA FORMULA

$$(A \leftrightarrow A) \rightarrow (B \leftrightarrow \neg B)$$

TAVOLA DI VERITA' DI UNA FORMULA

A	B	$(A \leftrightarrow A) \rightarrow (B \leftrightarrow \neg B)$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	0

La formula è contraddittoria

LOGICA

END

LOGICA PROPOSIZIONALE E LINGUAGGIO NATURALE

"sarai promosso (p) *se e solo se* avrai scritto almeno 125 programmi corretti (c)": $p \equiv c$

"*condizione necessaria e sufficiente* per passare l'esame (p) è studiare (s) e avere fortuna (f)": $p \equiv (s \wedge f)$

"Andrò al cinema (c) o al teatro (t): $\neg(c \equiv t)$