Ordinamenti, poset e reticoli

Docenti (Turno A-L)

Alex Graudenzi: alex.graudenzi@unimib.it

Stefania Bandini: stefania.bandini@unimib.it

Fondamenti dell'Informatica

Corso di Laurea Triennale in Informatica - 1° anno

Anno Accademico 2023/2024

Dip. di Informatica, Sistemistica e Comunicazione | Univ. di Milano-Bicocca

elearning: https://elearning.unimib.it/course/view.php?id=49487

CHIUSURE

Chiusura riflessiva

Data una relazione R su S:

La **chiusura riflessiva** di R è la più piccola relazione riflessiva R^{refl} su S che contiene R.

$R^{refl} = R \cup I_S$ $\qquad$ $R \subseteq R^{refl}$ $\qquad$ $I_S = \{\langle x,x \rangle \mid x \in S\}$

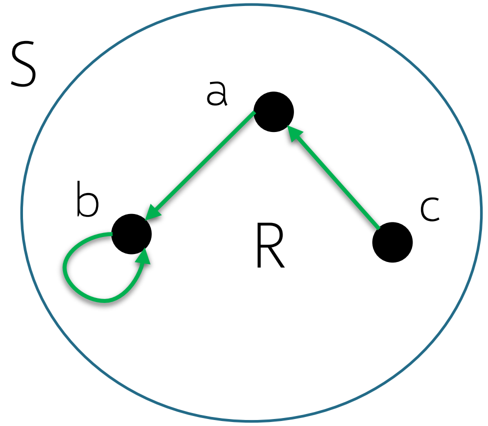
Nella rappresentazione a grafo:

Dato un grafo G, la chiusura riflessiva è quel grafo G^{refl} in cui ogni nodo di G ha necessariamente un cappio (oltre agli altri archi).

Chiusura riflessiva: esempio

$S = \{a,b,c\}$, $R \subseteq S \times S$

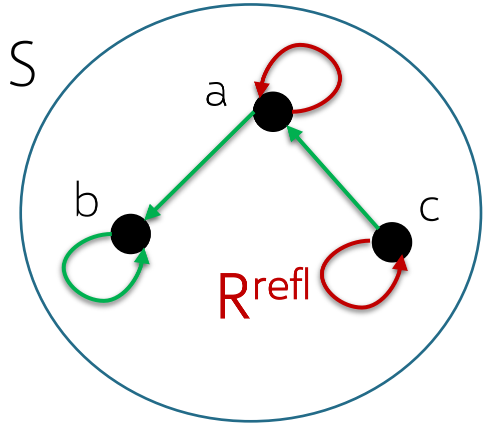
$R = \{\langle a,b\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,a\rangle\}$



R	a	b	c
a	0	1	0
b	0	1	0
c	1	0	0

$R^{refl} = \{\langle a,a\rangle, \langle a,b\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,c\rangle\}$

$R \subseteq R^{refl}$



R^{refl}	a	b	c
a	**1**	1	0
b	0	1	0
c	1	0	**1**

Chiusura transitiva

Data una relazione R su S:

La **chiusura transitiva** di R è la più piccola relazione transitiva $\mathbf{R^{trans}}$ su S che contiene R.

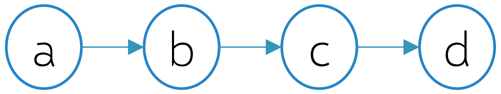
$R^{trans} = \{\langle x,y\rangle \mid \exists\, y_1, \ldots, y_n \in S, \text{ con } n > 1, y_1 = x, y_n = y.\ \langle y_i,y_{i+1}\rangle \in R, i = 1, \ldots, n\text{-}1\}$

$R \subseteq R^{trans}$

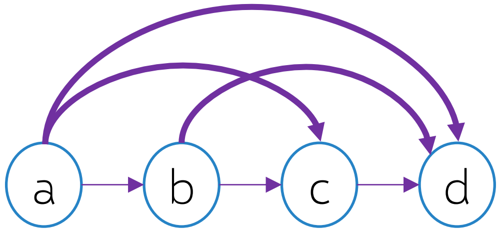
Nella rappresentazione a **grafo**:

Dato un grafo G, la chiusura transitiva è quel grafo G^{trans} in cui esiste un arco tra i nodi x e y se esiste un **cammino** tra x e y in G.

G

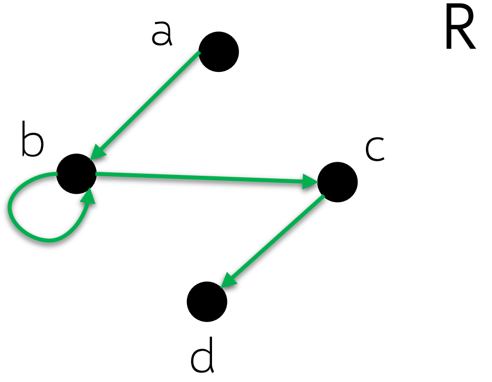


G^{trans}



Chiusura transitiva: esempio

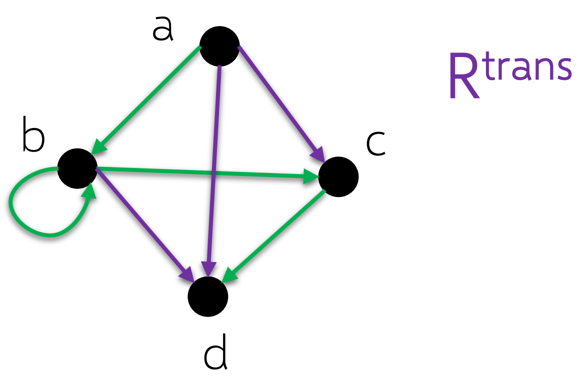
$S = \{a,b,c,d\}$, $R \subseteq S \times S$



$R = \{\langle a,b\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle\}$

$R^{trans} = \{\langle a,b\rangle, \langle a,c\rangle, \langle a,d\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle b,d\rangle, \langle c,d\rangle\}$

$R \subseteq R^{trans}$



Chiusura riflessiva e transitiva

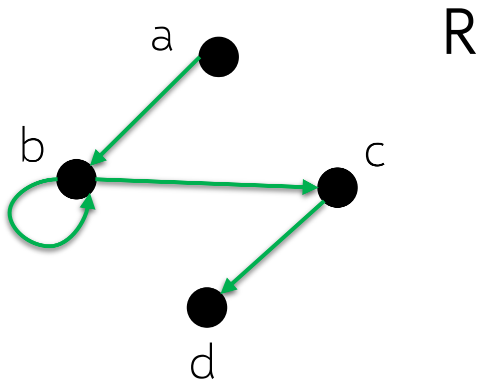
Data una relazione R su S:

La chiusura riflessiva e transitiva di R è la più piccola relazione riflessiva e transitiva $R^{\text{refl-trans}}$ che contiene R.

$$R^{\text{refl-trans}} = R^{\text{trans}} \cup I_S$$

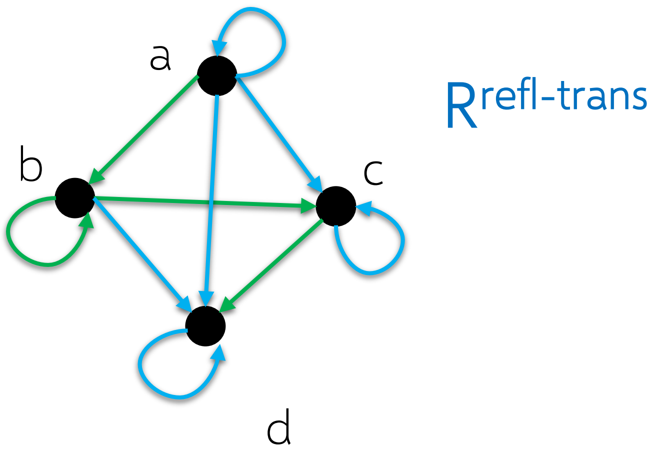
Chiusura riflessiva e transitiva: esempio

S = {a,b,c,d}, R $\subseteq$ S x S



R = {⟨a,b⟩, ⟨b,b⟩, ⟨b,c⟩ , ⟨c,d⟩}

$R^{refl\text{-}trans}$ = {⟨a,a⟩, ⟨a,b⟩, ⟨a,c⟩, ⟨a,d⟩, ⟨b,b⟩, ⟨b,c⟩,
⟨b,d⟩, ⟨c,c⟩, ⟨c,d⟩, ⟨d,d⟩}



R $\subseteq$ $R^{refl\text{-}trans}$

Chiusura simmetrica

Data una relazione R su S:

La **chiusura simmetrica** di R è la più piccola relazione simmetrica R^{simm} su S che contiene R.

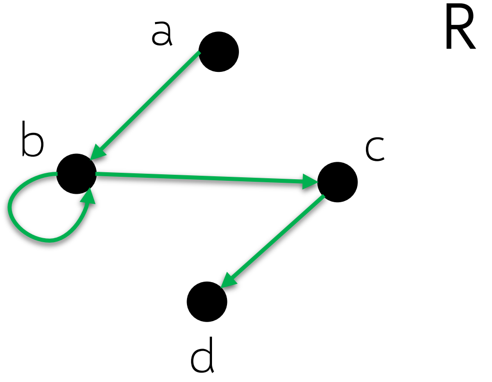
$R^{simm} = R \cup R^{-1}$ $\qquad\qquad$ $R \subseteq R^{simm}$

Nella rappresentazione a grafo:

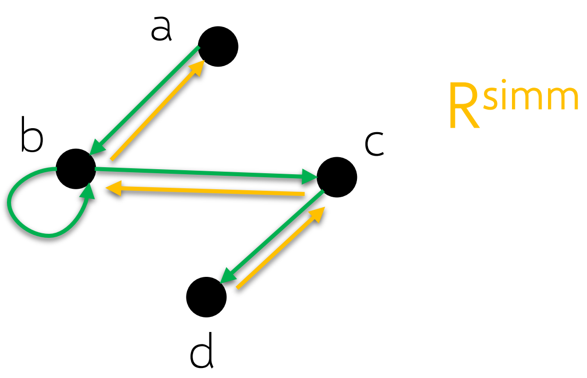
Dato un grafo G, la chiusura simmetrica è quel grafo G^{simm} in cui se esiste un arco in una direzione, esiste anche l'arco in direzione opposta (inclusi i cappi)

Chiusura simmetrica: esempio

$S = \{a,b,c,d\}$, $R \subseteq S \times S$



$R = \{\langle a,b\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,d\rangle\}$



$R^{simm} = \{\langle a,b\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,c\rangle\}$

$R \subseteq R^{simm}$

ORDINAMENTI

Ordinamenti

- Molto spesso, gli elementi in un insieme hanno una struttura d’ordine
- Per esempio, $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$
- Anche se a volte non è possibile paragonare tutti gli oggetti
  - È più grande $\langle 0,1 \rangle$ o $\langle 1,0 \rangle$?

Ordinamenti (II)

Studiare le proprietà degli ordinamenti è utile per

- gestione di dati
- ottimizzazione di processi
- sviluppo di strutture di dati
- studiare/inferire modelli di fenomeni reali (es. evoluzione)

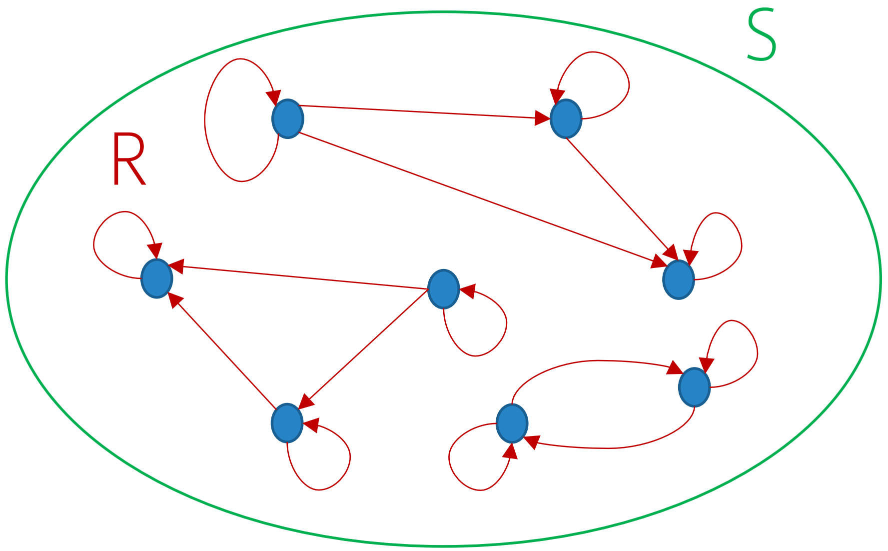
- Un ordinamento è un tipo particolare di relazione fra elementi

che definisce la precedenza

Definizioni: **pre-ordine e ordine stretto**

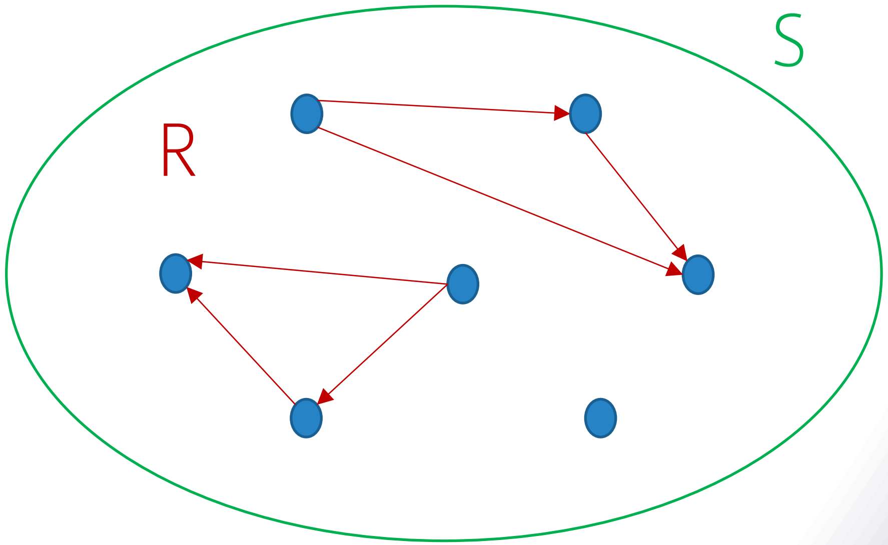
Una ***relazione binaria*** R su un insieme S è un:

- **preordine** sse R è:
  - riflessiva e transitiva su S



preordine

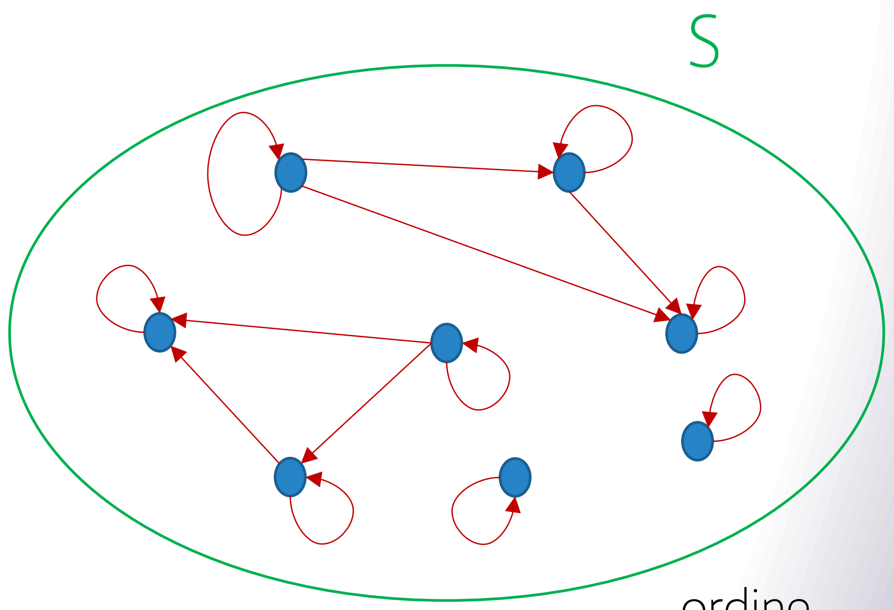
- **ordine stretto** (o quasi-ordine) sse R è:
  - irriflessiva, transitiva (e quindi anche asimmetrica) su S
  - si può rappresentare con **<**



ordine stretto

Definizioni: **ordine parziale e poset**

Una ***relazione binaria*** R su un insieme S è un:

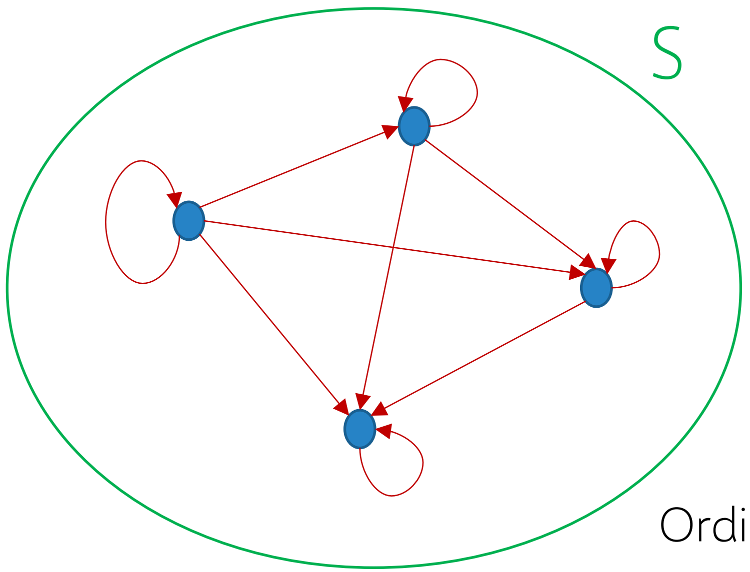


- **ordine parziale** sse R è un preordine antisimmetrico, cioè:
  - **riflessiva**, **antisimmetrica** e **transitiva** su S
  - si può rappresentare con **≤** (ma anche con ≼,⊆, ⊑)
  - La coppia **(S,≤)** si chiama *insieme parzialmente ordinato*: **poset** *(partially ordered set)*
  - Se x ≤ y o y ≤ x allora x e y sono comparabili (**precedenza**),
    - altrimenti sono incomparabili x | | y
  - Qualsiasi relazione di ordine parziale ≤ è la **chiusura riflessiva** dell'ordine stretto associato <.

Definizioni: ordini totali

- Un <u>ordine totale</u> è un ordine **parziale** in cui ogni coppia di elementi è **confrontabile:**

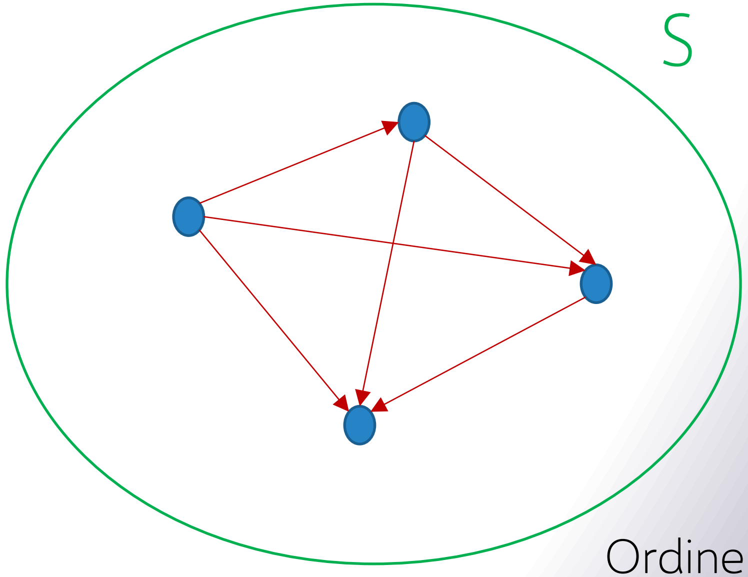
  per ogni $x,y \in S$: $x \leq y$ oppure $y \leq x$



Ordine totale

- Un <u>ordine totale stretto</u> è un ordine **stretto** in cui ogni coppia di elementi è **confrontabile:**

  per ogni $x,y \in S$ tali che $x \neq y$: $x<y$ oppure $y<x$



Ordine totale stretto

In entrambi i casi la relazione è connessa.

Relazione fra ordini totali

Ordini **totali** stretti e non-stretti sono ovviamente molto affini

- se **R** è un ordine totale (non-stretto, **≤**) allora

  $R \setminus I_S$ è un ordine totale stretto

- se **R** è un ordine totale stretto (**<**) allora

  $R \cup I_S$ è un ordine totale *(chiusura riflessiva)*

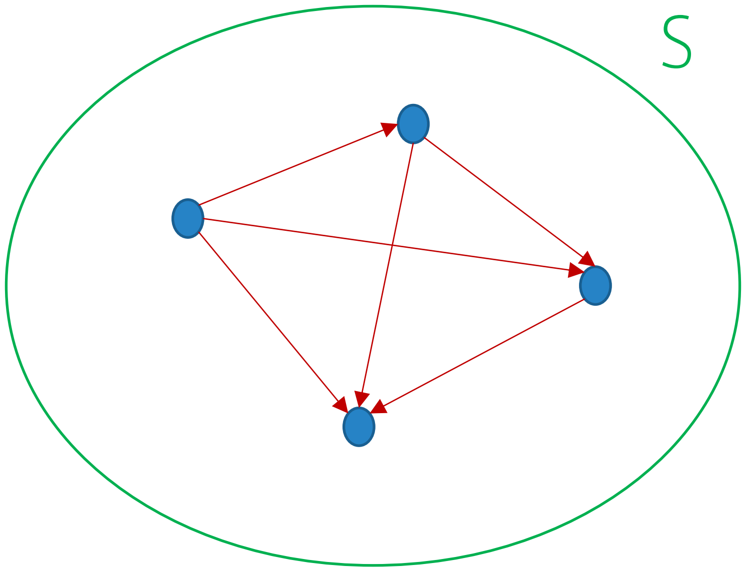
All'ordine stretto 'mancano' le coppie di ogni elemento con sé stesso (elementi diagonali della matrice, cioè gli elementi di I_S)

Tricotomia

In un ordine totale **stretto** R per ogni x,y ∈ S si soddisfa **esattamente una** condizione fra le seguenti.

1. $x = y$
2. $\langle x,y \rangle \in R$
3. $\langle y,x \rangle \in R$

(proprietà tricotomica)



Esempi

- “essere nato in una data precedente a” è:

  un ordine stretto (non totale, perché?)
- la relazione $\leq$ (minore o uguale) su $\mathbb{N}$ è:

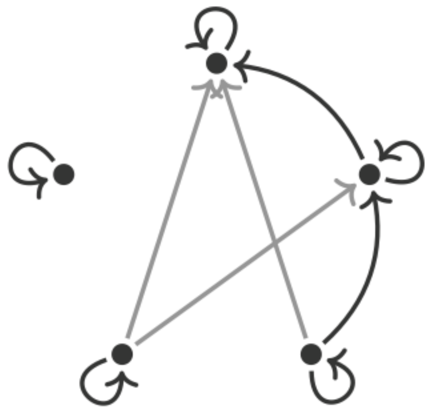
  un ordine totale non stretto
- la relazione $\subseteq$ su insiemi è:

  un ordine parziale
- $<$ su R è

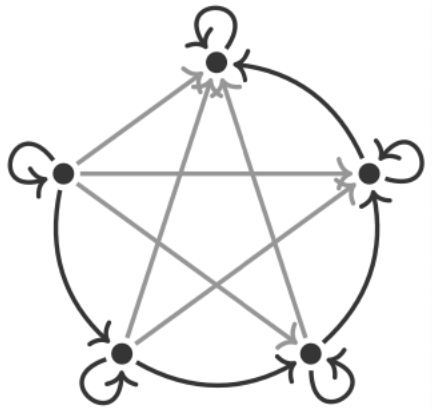
  un ordine totale stretto
- la chiusura transitiva di un DAG è

  un ordine parziale

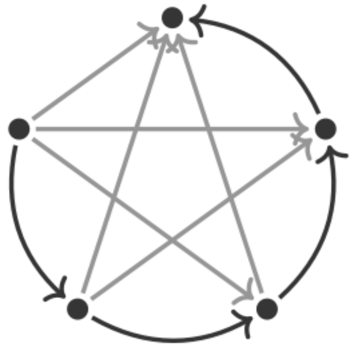
Rappresentazione



ordine parziale



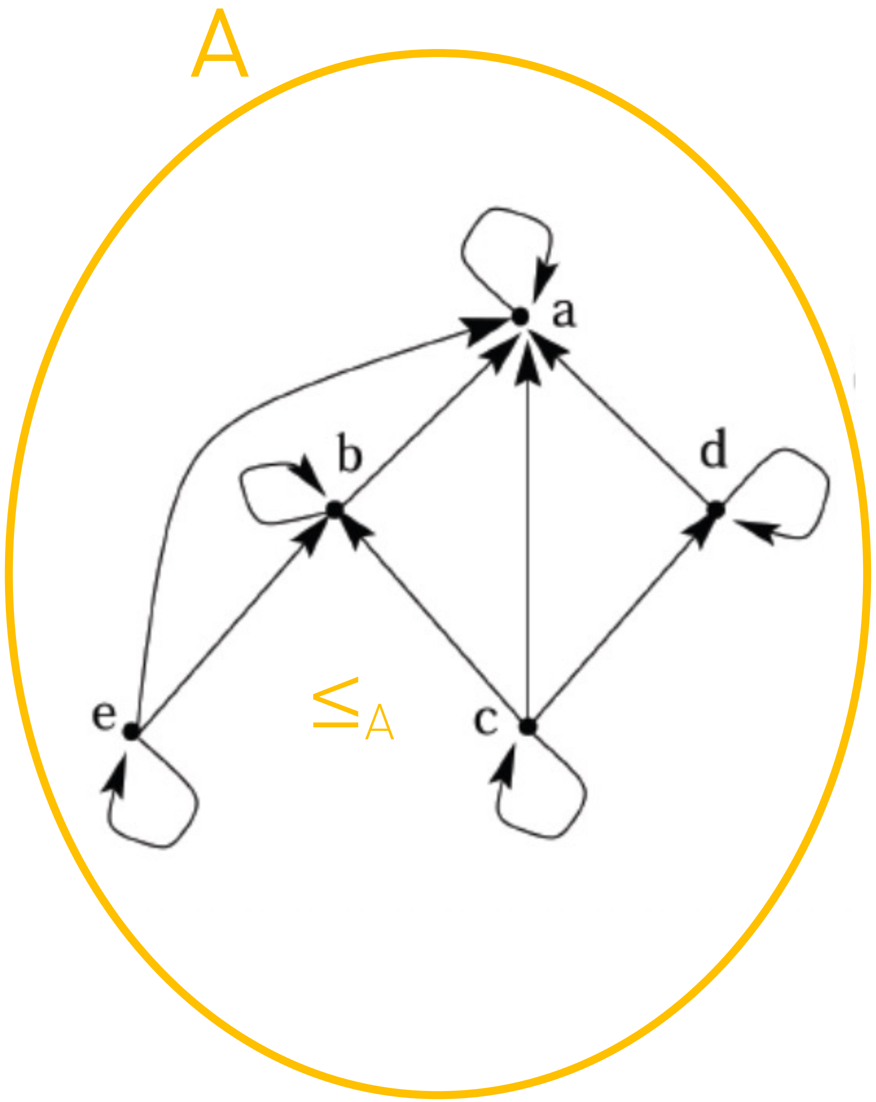
ordine totale

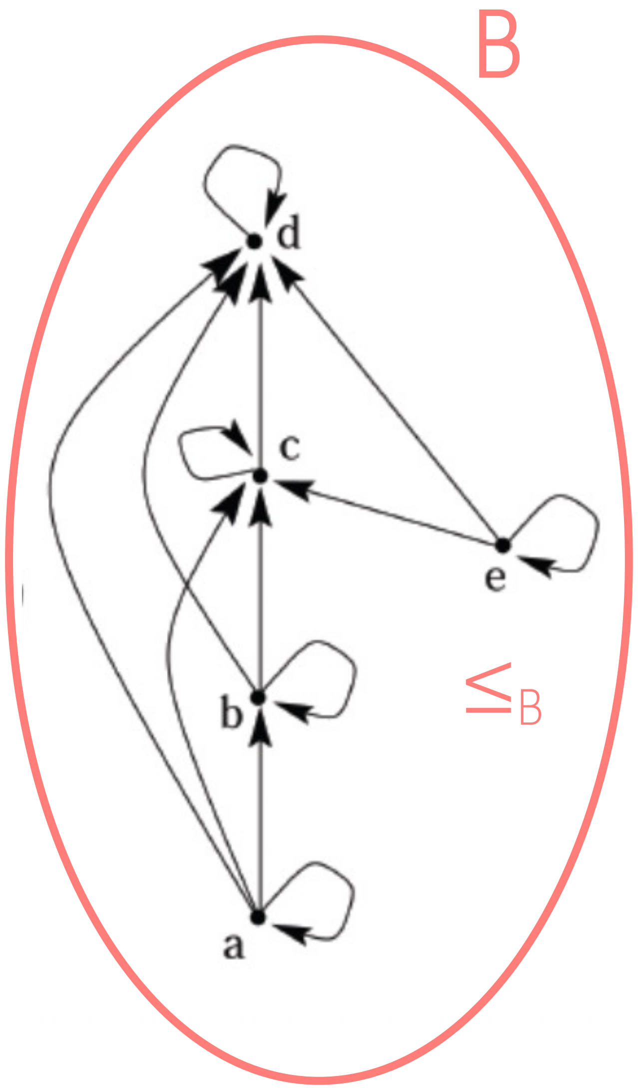


ordine totale stretto

POSET

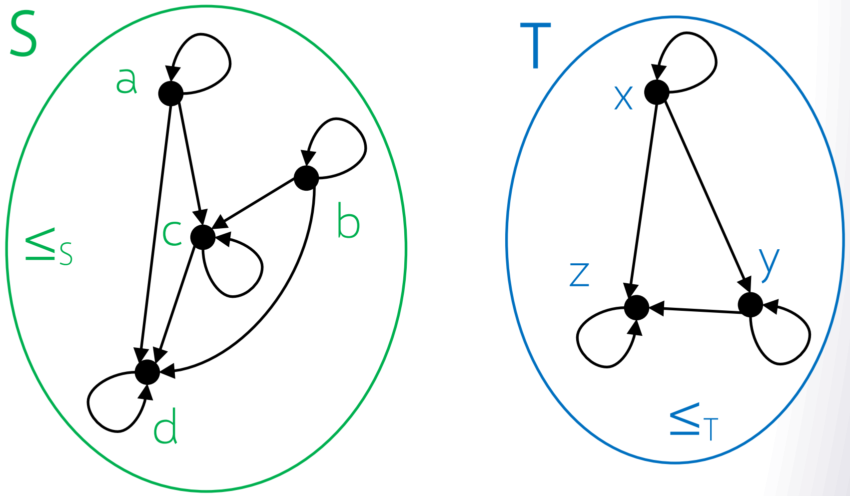
PARTIALLY ORDERED SETS





ESEMPI DI POSET

Prodotto di ordinamenti

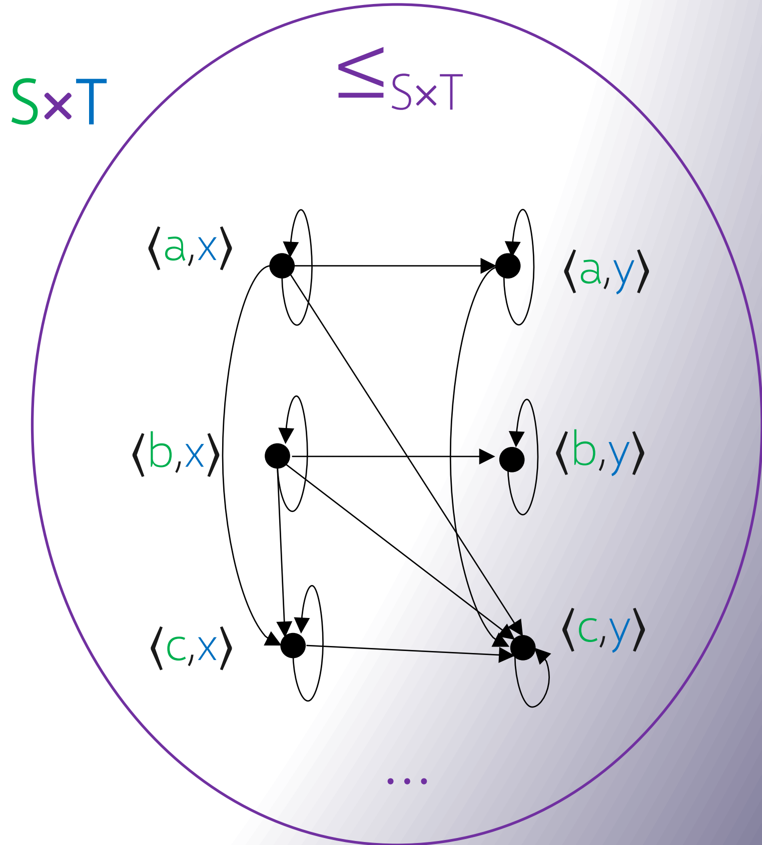


Siano $(S,\leq_S)$ e $(T,\leq_T)$ due poset

Definiamo la relazione $\leq_{S\times T}$ su $S \times T$ come:

$$\langle s,t\rangle \leq_{S\times T} \langle s',t'\rangle \text{ sse } s \leq_S s',\ t \leq_T t'$$

$(S \times T, \leq_{S\times T})$ è anch'esso un poset



Ordine lessicografico

L'ordine lessicografico paragona tuple di elementi posizione per posizione

La relazione $\leq_{lex}$ su $S \times T$ (*per parole lunghe 2 lettere*) è definita da:

$\langle s,t \rangle \leq_{lex} \langle s',t' \rangle$ sse:

(i) $s <_S s'$

oppure

(ii) $s = s', t \leq_T t'$

$\langle s,t \rangle$	$\langle s',t' \rangle$	$s <_S s'$	$s = s', t \leq_T t'$	$\langle s,t \rangle \leq_{lex} \langle s',t' \rangle$
$\langle a,b \rangle$	$\langle b,a \rangle$	✓		✓
$\langle c,t \rangle$	$\langle c,z \rangle$	X	✓	✓
$\langle d,t \rangle$	$\langle d,t \rangle$	X	✓	✓
$\langle d,t \rangle$	$\langle a,t \rangle$	X	X	X

- $(S \times T, \leq_{lex})$ è un poset (preserva ordini totali)
- Generalizza l'ordine alfabetico usuale e si può estendere a tuple di lunghezza arbitraria

Esempio

- Sia A = {a,b,..., z} l'alfabeto della lingua italiana
- Sia A* l'universo linguistico costruito su A (tutte le sequenze di lunghezza arbitraria di lettere)
- Siano w_1, $w_2 \in A^*$, $w_1 \langle a_1, a_2, ..., a_{lun1}\rangle$, $w_2 = \langle b_1, b_2, ..., b_{lun2}\rangle$, m = min(lun1,lun2)

Definiamo ≤lex-ita ⊆ A*x A*, dove w_1 ≤lex-ita w_2 sse:

1. $\langle a_1, a_2, ..., a_{lun1}\rangle \leq lex \langle b_1, b_2, ..., b_{lun2}\rangle$ in A^m

oppure

2. $\langle a_1, a_2, ..., a_{lun1}\rangle = \langle b_1, b_2, ..., b_{lun2}\rangle$ e lun1 < lun2

Cioè la prima parola precede la seconda in A^m, oppure è un segmento iniziale della seconda

- **amo ≤lex-ita ara** (precede ara in A^3)
- **amo ≤lex-ita amore** (sono uguali in A^3, ma lun1 < lun2)
- **amo ≤lex-ita zero** (precede ara in A^3)

Copertura

Dato un poset (S,≤) e siano x, y e z elementi di S,

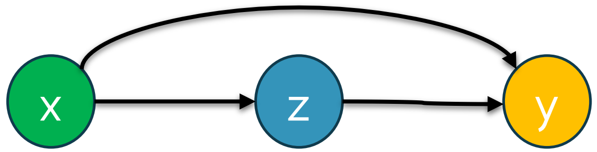
si dice che y è una <u>copertura</u> di x **sse**:

1. $x \leq y$
2. $x \neq y$
3. **<u>non esiste</u>** z, $z \neq y \neq x$ tale che: $x \leq z$, $z \leq y$

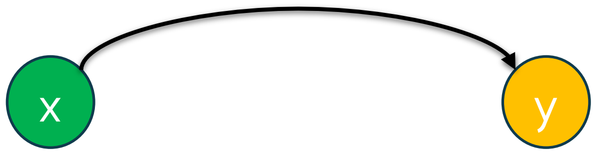
Cioè y è una copertura di x sse:

- y **segue** x, e
- **<u>non esiste</u>** alcun elemento z che si "**frapponga**" nella relazione di ordinamento tra x e y.

Nel grafo: se c'è un <u>unico</u> cammino di <u>lunghezza 1</u> da x a y

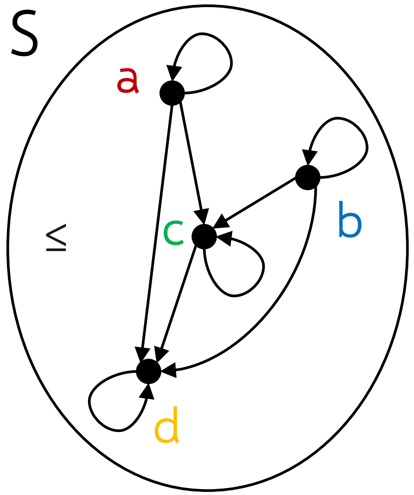


y **NON** è una copertura di x



y è una copertura di x

Esempio



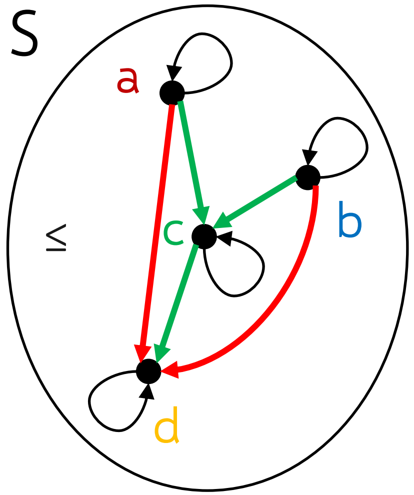
b **non** è copertura di a
c è copertura di a
d **non** è copertura di a

a **non** è copertura di b
c è copertura di b
d **non** è copertura di b

a **non** è copertura di c
b **non** è copertura di c
d è copertura di c

a **non** è copertura di d
b **non** è copertura di d
c **non** è copertura di d

Esempio



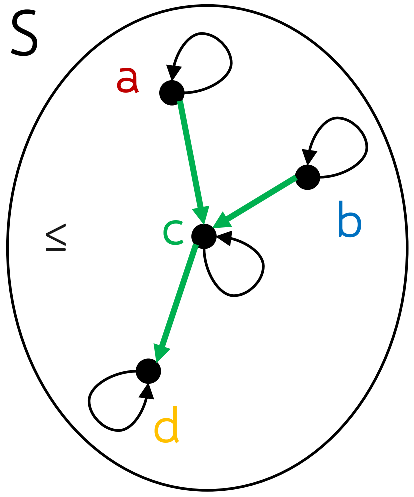
b **non** è copertura di a
<u>c è copertura di a</u>
d **non** è copertura di a

a **non** è copertura di b
<u>c è copertura di b</u>
d **non** è copertura di b

a **non** è copertura di c
b **non** è copertura di c
<u>d è copertura di c</u>

a **non** è copertura di d
b **non** è copertura di d
c **non** è copertura di d

Esempio



Abbiamo mantenuto solo le coperture

b **non** è copertura di a
c è copertura di a
d **non** è copertura di a

a **non** è copertura di b
c è copertura di b
d **non** è copertura di b

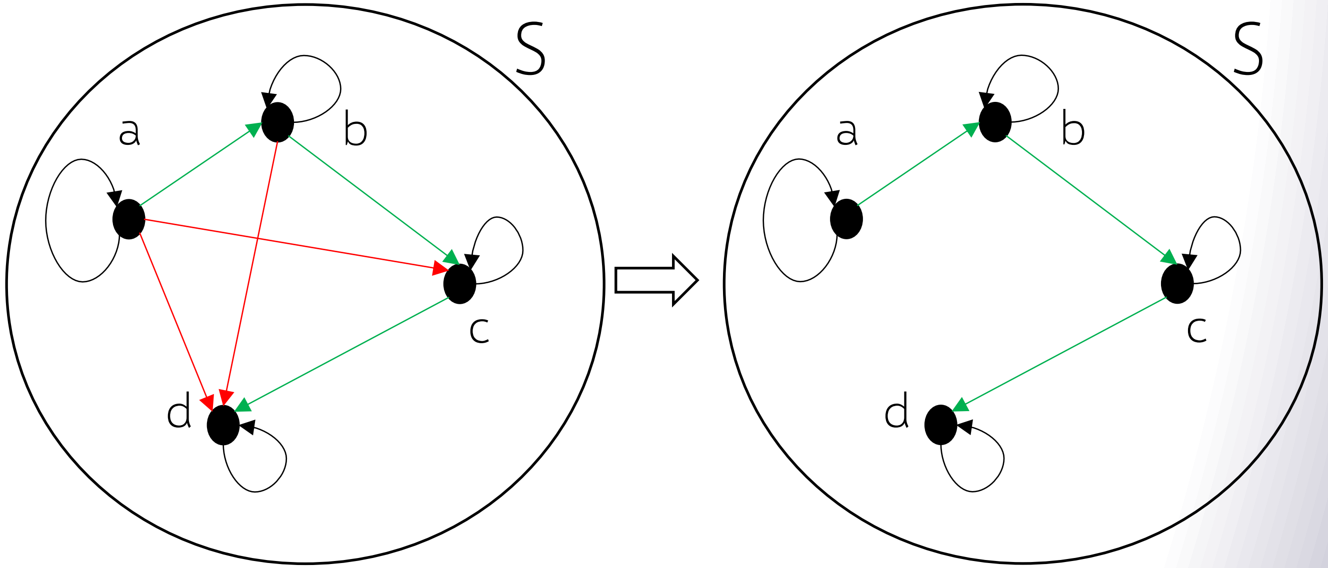
a **non** è copertura di c
b **non** è copertura di c
d è copertura di c

a **non** è copertura di d
b **non** è copertura di d
c **non** è copertura di d

Copertura e ordini totali

In verde le coperture

Solo le coperture



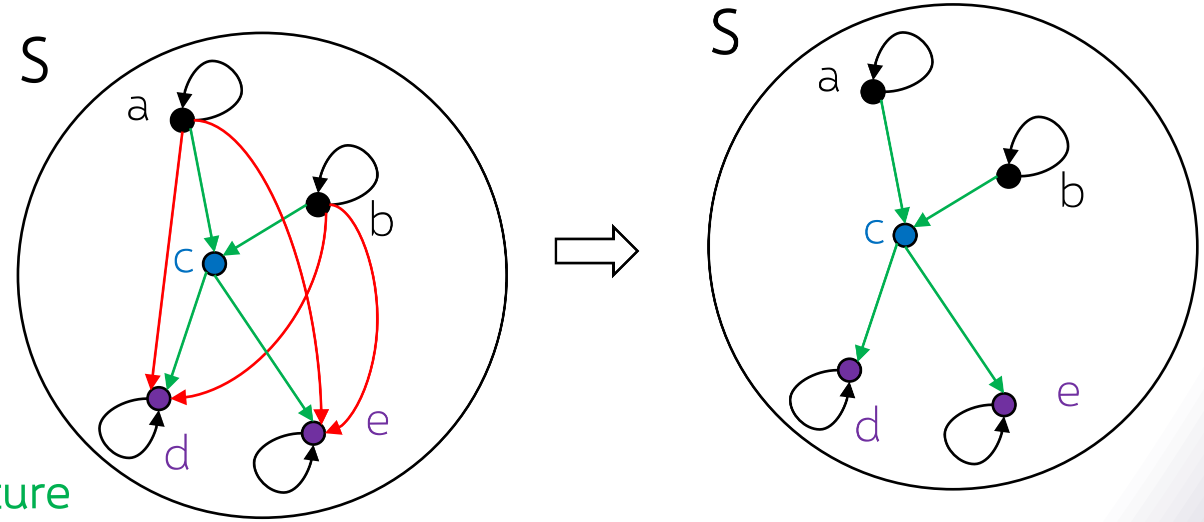
- In un ordine totale,

ogni elemento **ha al più una** copertura

- In un ordine **non totale**,

ogni elemento può avere più coperture

d e e sono copertura di c



In verde le coperture

Solo le coperture

Copertura: esempi (I)

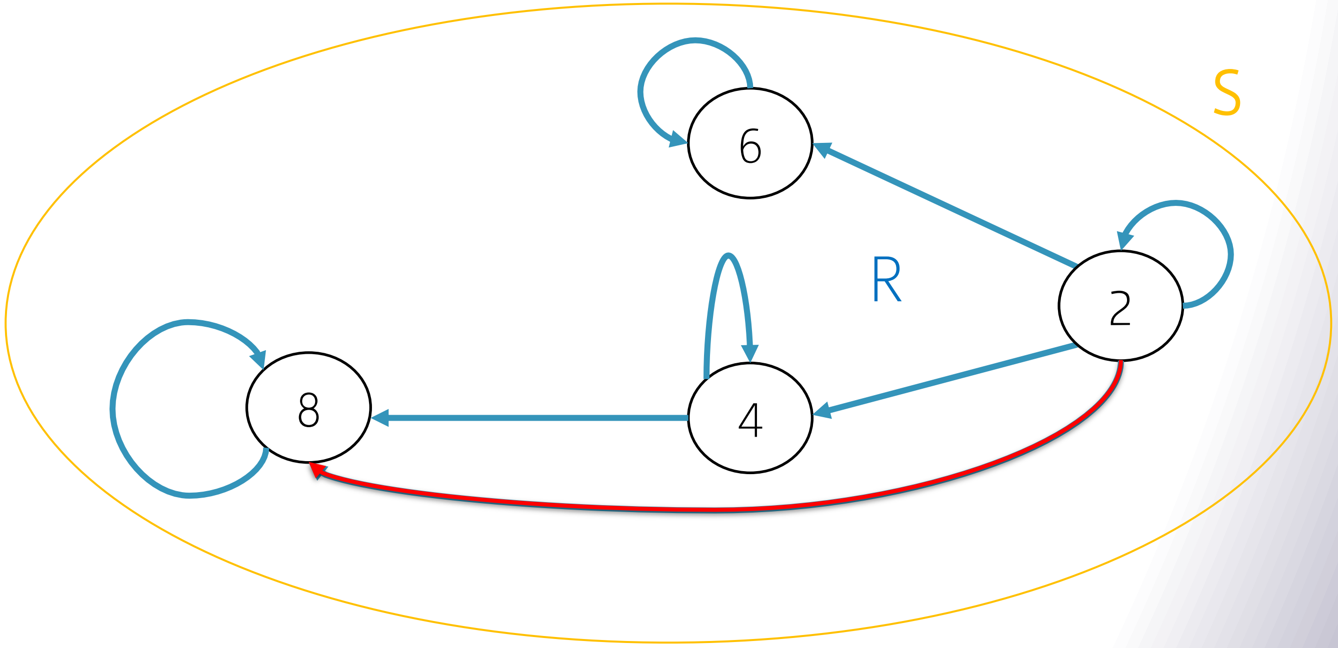
S = {2, 4, 6, 8}
R ⊆ S x S

R = {⟨2,2⟩, ⟨2,4⟩, ⟨2,6⟩, ⟨2,8⟩,
⟨4,4⟩, ⟨4,8⟩, ⟨6,6⟩, ⟨8,8⟩}

Es.:

- l’insieme S = {2, 4, 6, 8}, e
- la relazione x ***R*** y ⇔ ‘x divide y’

definiscono un ***poset***



- 8 è una copertura di 4
- 4 è una copertura di 2
- 8 NON è una copertura di 2 perché, nonostante che 2 ***R*** 8, esiste l'elemento 4 che si frappone tra 8 e 2 nella relazione di ordinamento parziale

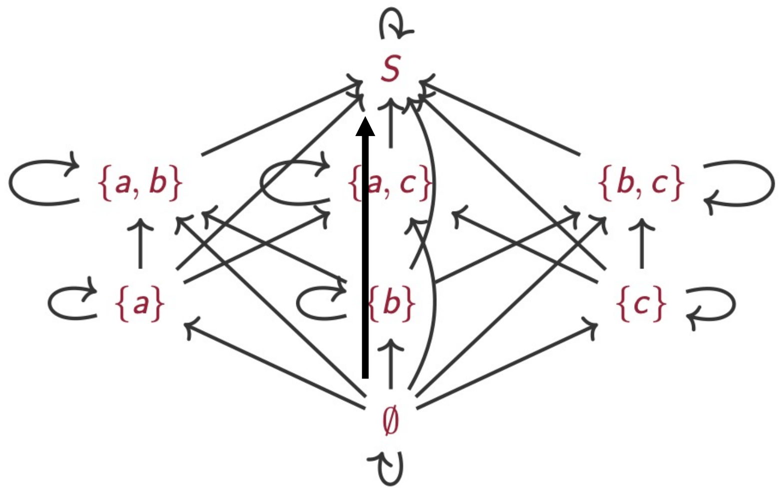
Copertura: esempi (II)

Nel poset (N, ≤)

- 5 è una copertura di 4
- 6 non è una copertura di 4 (c'è il 5 'in mezzo')

Nel poset (P(S),⊆) con S = {a,b,c}

- ogni singoletto è una copertura di Ø
- S non è una copertura di Ø
- {a,b} non è copertura di Ø
- S è una copertura di {a,b}, di {a,c} e di {b,c}
- {a,b} non è una copertura di {a,c}
- …



Elementi estremali

In un poset (S,$\leq$), un elemento $s \in S$ è:

- **minimale** se **NON** esiste un elemento $s' \neq s$ tale che: $s' \leq s$

  nessun elemento lo precede *(tranne sé stesso); non ha archi entranti (tranne cappio)*

- Se il minimale è ***unico,*** allora è il minimo del poset (S,$\leq$) e viene denotato da 0

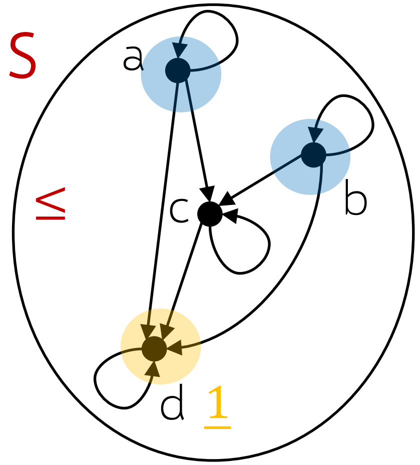
- **massimale** se **NON** esiste un elemento $s' \neq s$ tale che: $s \leq s'$

  non precede nessun elemento *(tranne sé stesso); non ha archi uscenti (tranne cappio)*

- Se il massimale è ***unico,*** allora è il massimo del poset (S,$\leq$) e viene denotato da 1

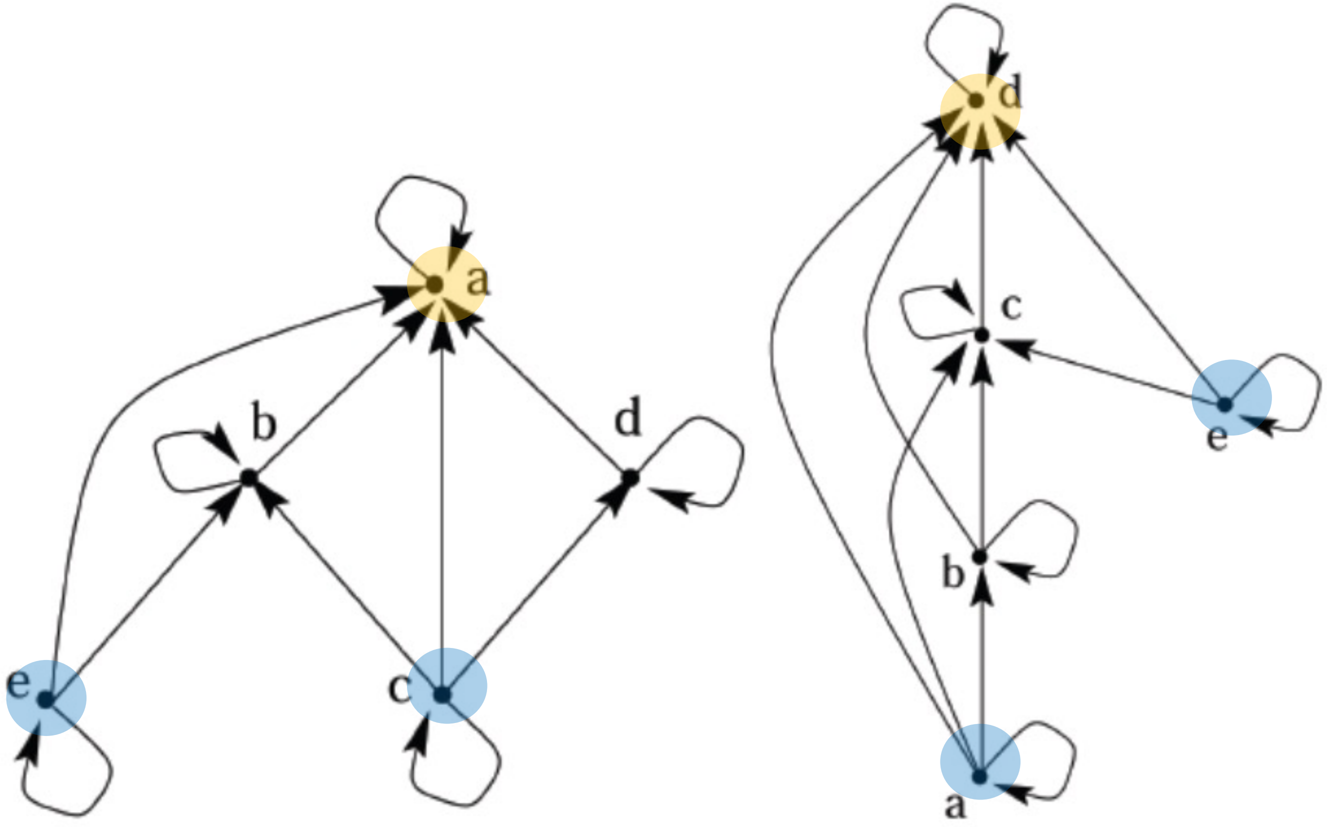
Un poset può avere **nessuno, uno**,

o **tanti** elementi minimali e massimali



a e b sono minimali (non confrontabili)
d è l'unico massimale: massimo

Minimali e massimali



Minoranti

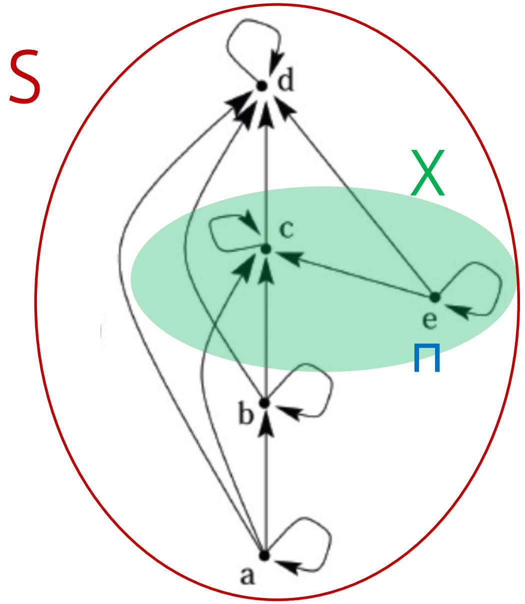
Dato un poset (S,≤) e un **sottoinsieme** X ⊆ S, un elemento s ∈ S è:

- **minorante** di X sse s ≤ x **per ogni** x ∈ X

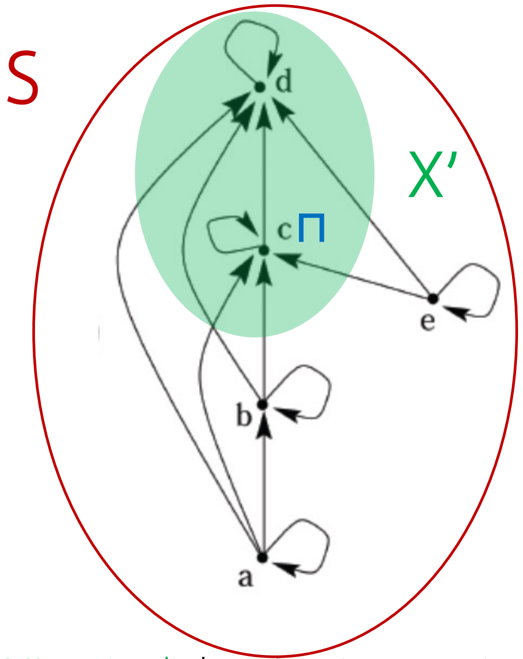
  *precede **ogni** elemento del sottoinsieme X (i.e., ha archi uscenti verso **tutti** gli elementi di X)*

- **massimo minorante** di X (⊓X) sse s′ ≤ s **per ogni** minorante s′ di X

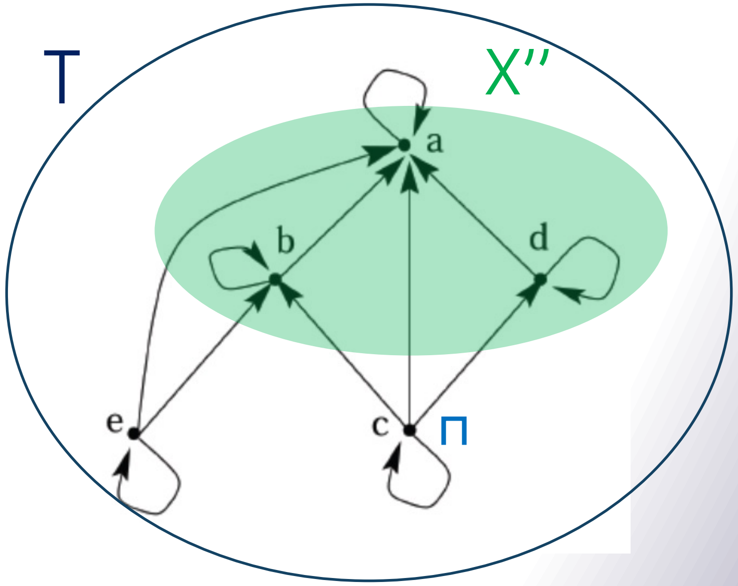
  segue tutti gli altri minoranti di X (i.e., ha archi entranti da tutti i minoranti)



X = {c,e} ha un minorante: e
ha un massimo minorante ⊓: e



X’ = {c,d} ha 4 minoranti: a,b,c,e
ha un massimo minorante ⊓: c



X’’ = {a,b,d} ha un minorante: c
Ha un massimo minorante ⊓: c

Maggioranti

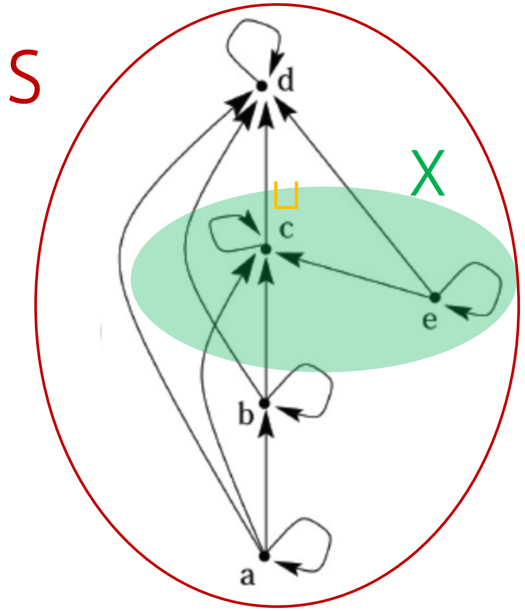
Dato un poset $(S,\leq)$ e un **sottoinsieme** $X \subseteq S$, un elemento $s \in S$ è:

- **maggiorante** di X sse $x \leq s$ **per ogni** $x \in X$

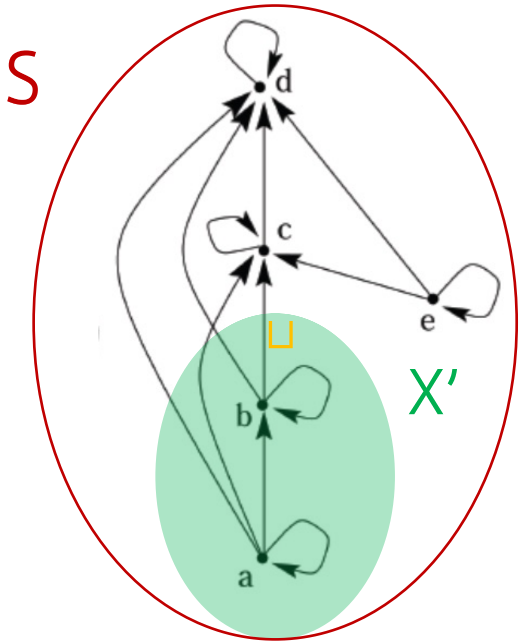
  *segue **ogni** elemento del sottoinsieme X (i.e., ha archi entranti da **tutti** gli elementi di X)*

- **minimo maggiorante** di X ($\sqcup X$) sse $s \leq s'$ **per ogni** maggiorante s' di X

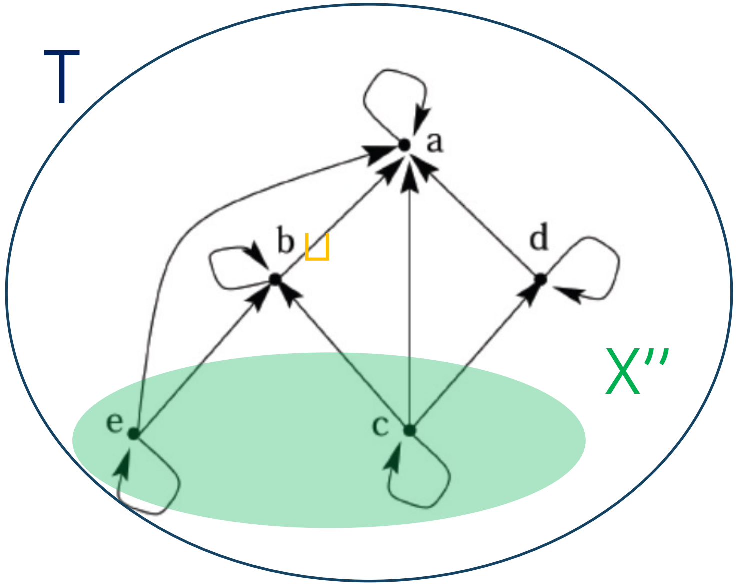
  precede tutti gli altri maggioranti di X (i.e., ha archi uscenti verso tutti i maggioranti)



$X = \{c,e\}$ ha due maggioranti: c,d
Ha un minimo maggiorante $\sqcup$: c



$X' = \{a,b\}$ ha 3 maggioranti: b,c,d
Ha un minimo maggiorante $\sqcup$: b



$X'' = \{c,e\}$ ha 2 maggioranti: a,b
ha un minimo maggiorante $\sqcup$: b

⊓ (meet) e ⊔ (join)

- Massimo minorante (MEET) ⊓ si scrive ‘greatest lower bound’ (glb) o infimum
  - Ricorda: il massimo comun denominatore (MCD) è esattamente il massimo minorante nella relazione di divisione intera
  - E’ l’intersezione insiemistica ∩ quando si considera il poset (P(X), ⊆)

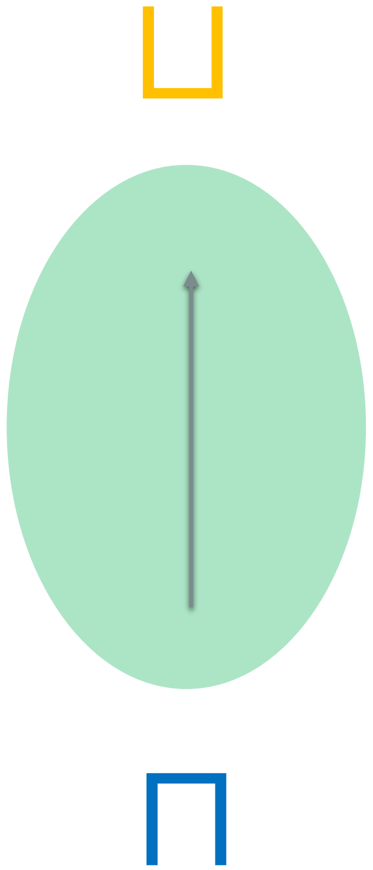
- Minimo maggiorante (JOIN) ⊔ si scrive 'least upper bound’ (lub) o supremum
  - Ricorda: il minimo comune multiplo (mcm) è il minimo maggiorante della relazione di divisione intera
  - E’ l’unione insiemistica U quando si considera il poset (P(X), ⊆)

  - Sono le operazioni binarie di meet ⊓ e join ⊔ (*)

Tip

$\sqcup$ ☞ JOIN

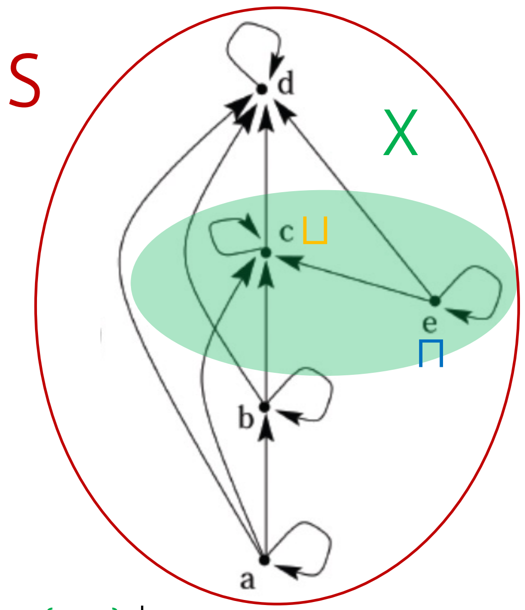
$\sqcap$ ☞ MEET



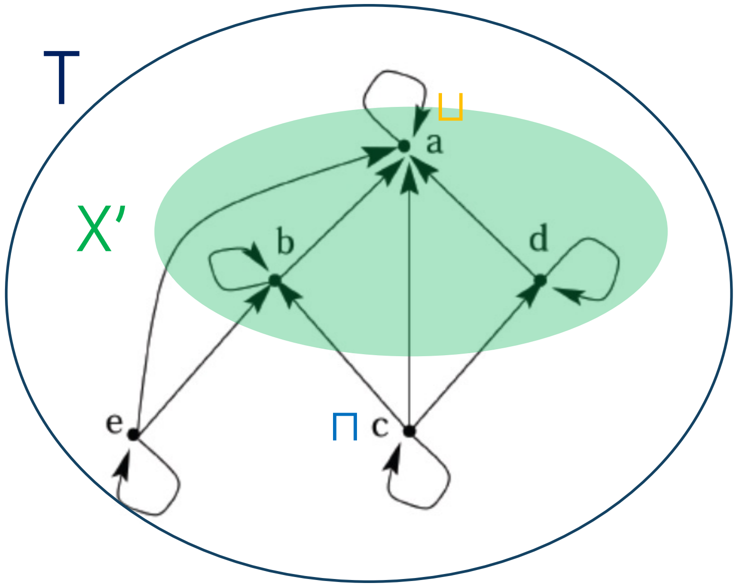
Massimo e minimo di un sottoinsieme

Dato un poset $(S,\leq)$ e un **sottoinsieme** $X \subseteq S$, un elemento $s \in S$ è:

- **minimo** di X sse $s = \sqcap X \in X$ ($\sqcap$ massimo minorante - meet)
- **massimo** di X sse $s = \sqcup X \in X$ ($\sqcup$ minimo maggiorante - join)



$X = \{c,e\}$ ha:
un minorante: e
un massimo minorante $\sqcap$: $e \in X$ → minimo
due maggioranti: c,d
un minimo maggiorante $\sqcup$: $c \in X$ → massimo



$X' = \{a,b,d\}$ ha:
un minorante: c
un massimo minorante $\sqcap$: $c \notin X'$
un maggiorante a
un minimo maggiorante $\sqcup$: $a \in X'$ → massimo

Proprietà

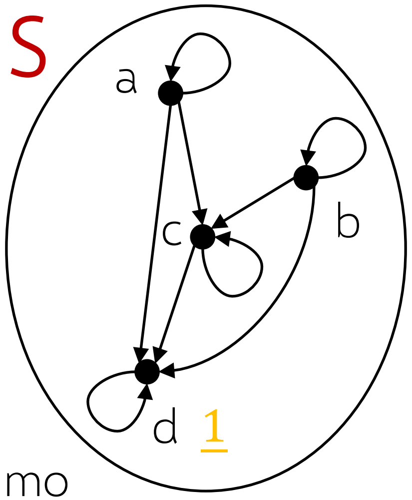
- Ogni X ⊆ S ha al più un massimo minorante e un minimo maggiorante

- Se ogni X ⊆ S ha un minimo,

  allora (S,≤) è un insieme ben ordinato (o ben fondato)

Massimo e minimo di un poset (def II)

- Se esiste, ⊓S è il minimo del poset (S,≤) e viene denotato da 0
  - Unico minimale
- Se esiste, ⊔S è il massimo del poset (S,≤) e viene denotato da 1
  - Unico massimale



L'insieme S non ha un minimo
Ha un massimo: d

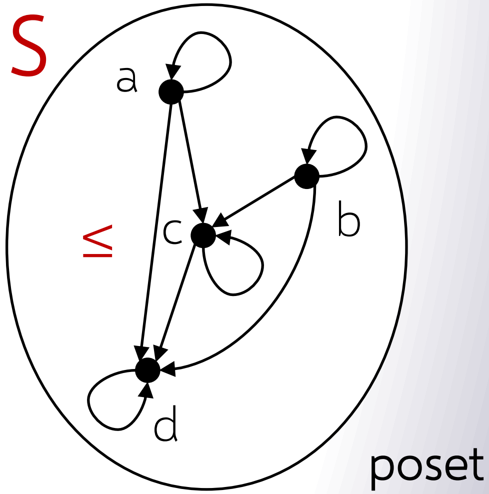
Diagramma di Hasse

- Un **diagramma di Hasse** è una rappresentazione compatta di un poset

- Utilizza la *posizione* per rappresentare l'ordine e considera la riflessività e transitività implicite

- Dato un poset (S,≤) , un diagramma di Hasse è un grafo **non orientato** tale che per ogni x,y:
  - x e y sono collegati sse y è una **copertura** di x
  - se x **≤** y allora x appare **sotto** di y (più in basso)

- L'ordine corrispondente è la **chiusura riflessiva e transitiva** del grafo orientato dal basso verso l'alto



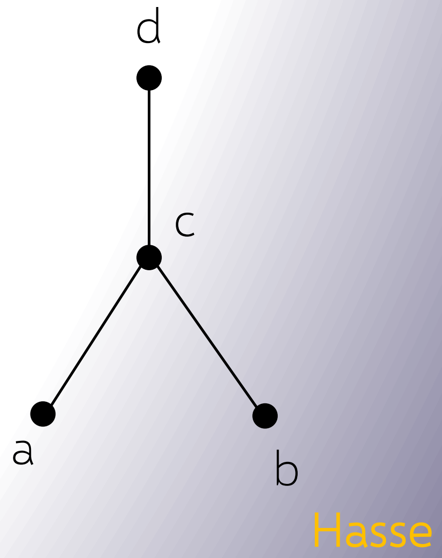
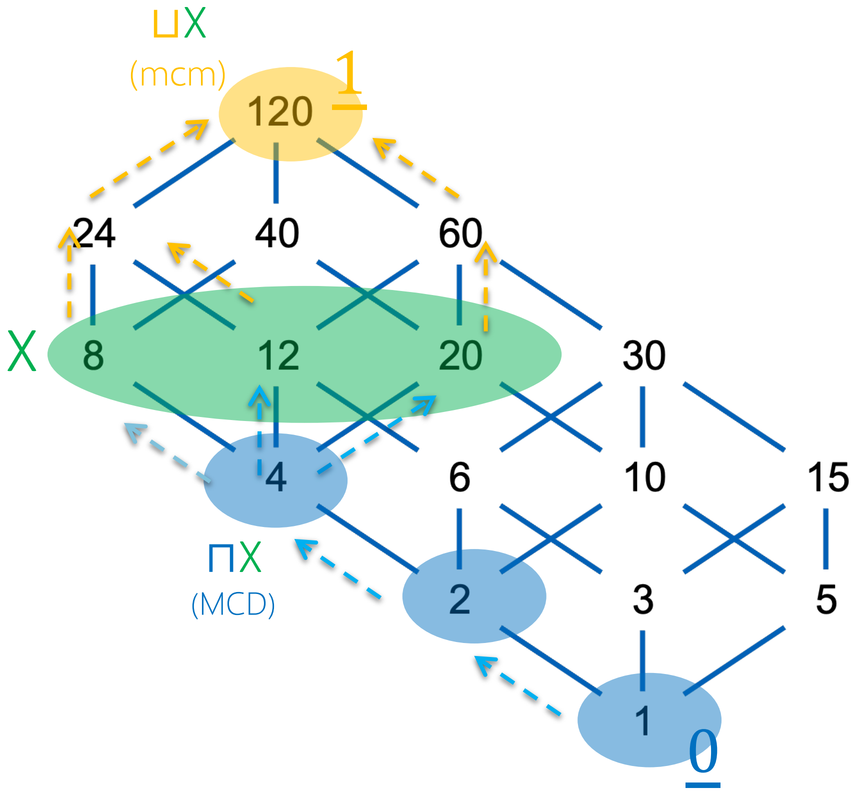


Diagramma di Hasse



Poset: (S, $\leq_{div}$)

S = {x ∈ ℕ | x ≤ 120 ∧ 120 mod x = 0}

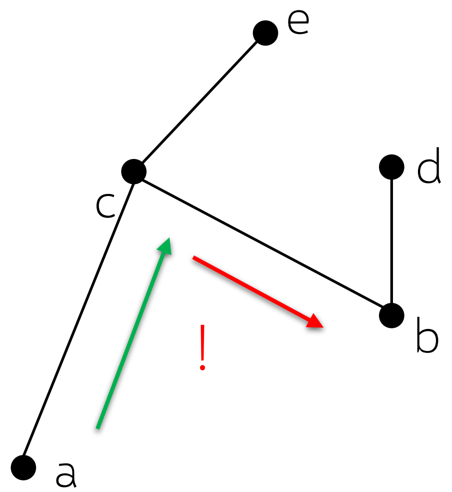
$\leq_{div}$ su S x S è definita come

x $\leq_{div}$ y sse x è divisore di y

X = {8,12,20}

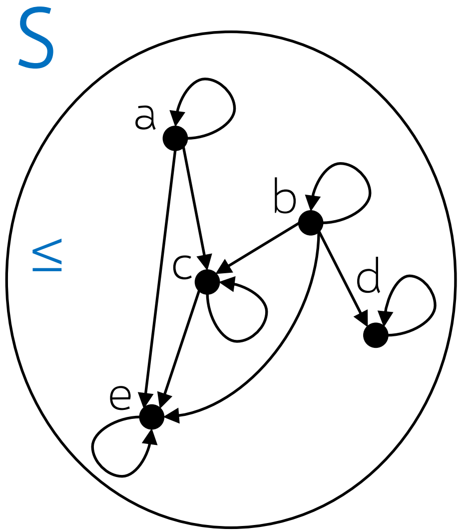
- Se c'è (almeno) un cammino verso l'alto che collega due nodi, allora quello in basso precede (≤) quello in alto
- Due elementi non confrontabili (||) non hanno un cammino verso l'alto che li colleghi
- Gli elementi minimali di sono quelli che non hanno archi provenienti da nodi più in basso (se unico: minimo 0)
- Gli elementi massimali sono quelli che non hanno archi verso nodi più in alto (se unico: massimo 1)
- Un minorante è un nodo che raggiunge ogni elemento di X ⊆ S con (almeno) un cammino verso l'alto
  - Il massimo minorante (**meet**) ⊓X è il minorante 'più vicino' a X
- Un maggiorante è nodo raggiungibile da tutti gli elementi di X ⊆ S con (almeno) un cammino verso l'alto
  - Il minimo maggiorante ⊔X (join) è il maggiorante 'più vicino' a X

Attenzione

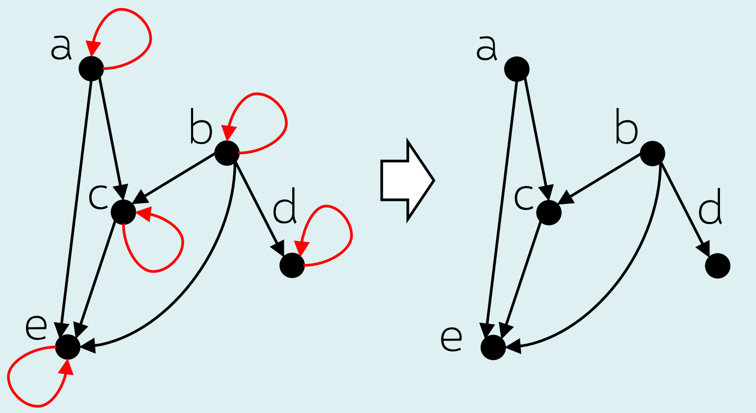


a non precede b!

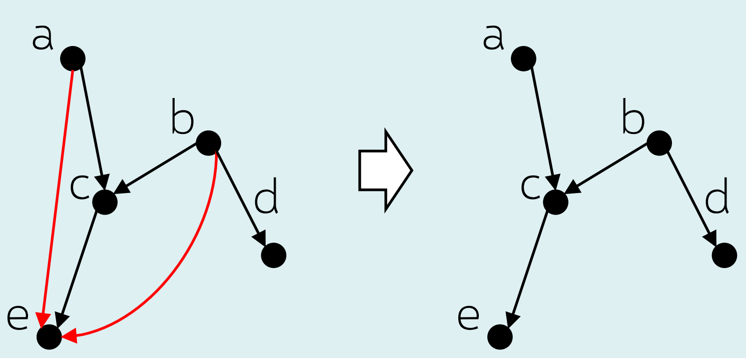
Da poset a diagramma di Hasse



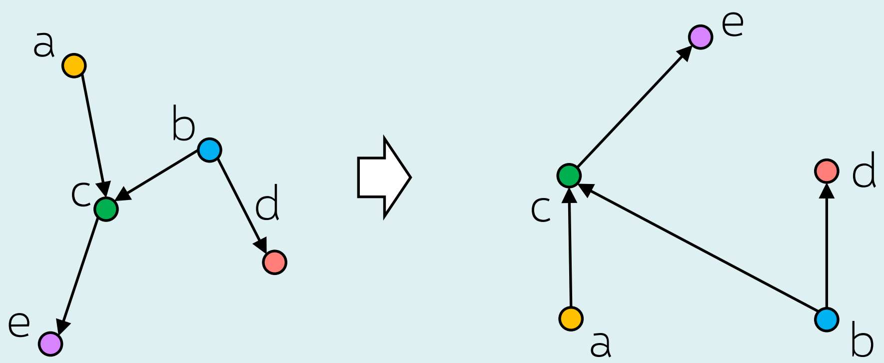
1) Rimuoviamo i **cappi**



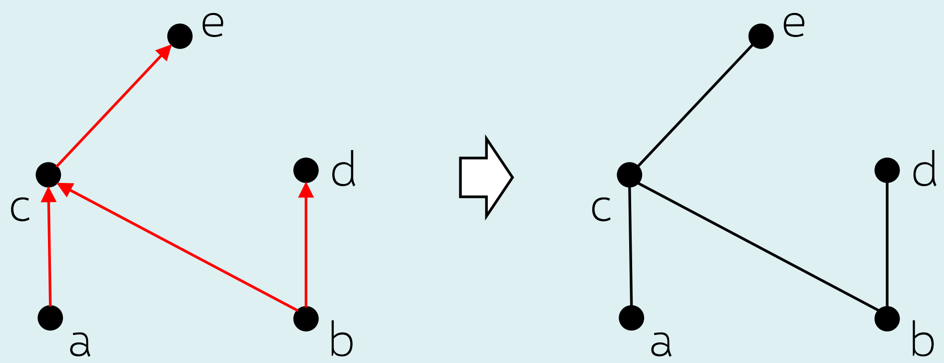
2) Manteniamo gli archi corrispondenti a **coperture**



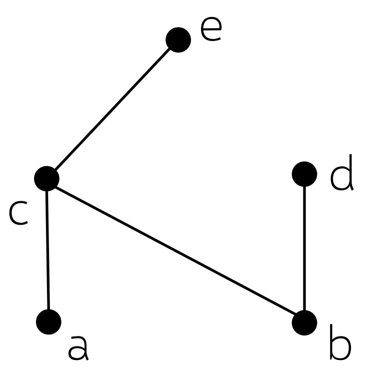
3) **Ordiniamo** i nodi per livello: ogni nodo deve essere più in <u>basso</u> dei nodi che precede (figli)



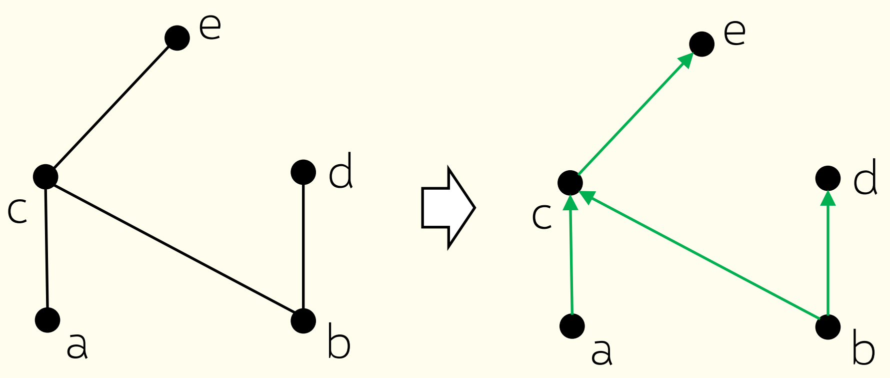
4) Rendiamo il grafo **non orientato**



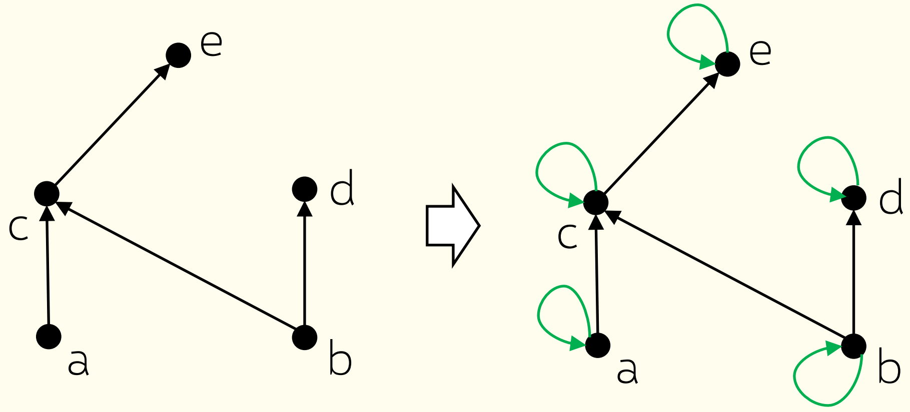
Da diagramma di Hasse a poset



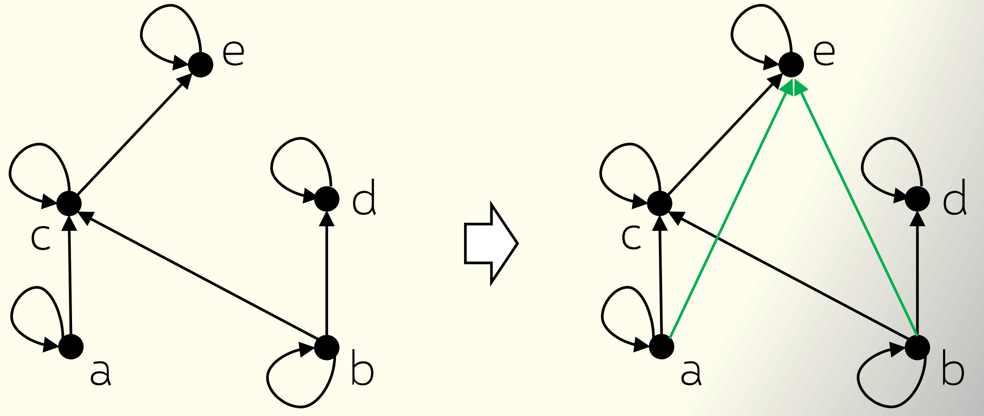
1) Rendiamo il grafo **orientato** (dal basso verso l'alto)



2) **Chiusura riflessiva** (aggiungiamo i cappi)



3) **Chiusura transitiva** (colleghiamo tutti i nodi raggiungibili con un cammino)

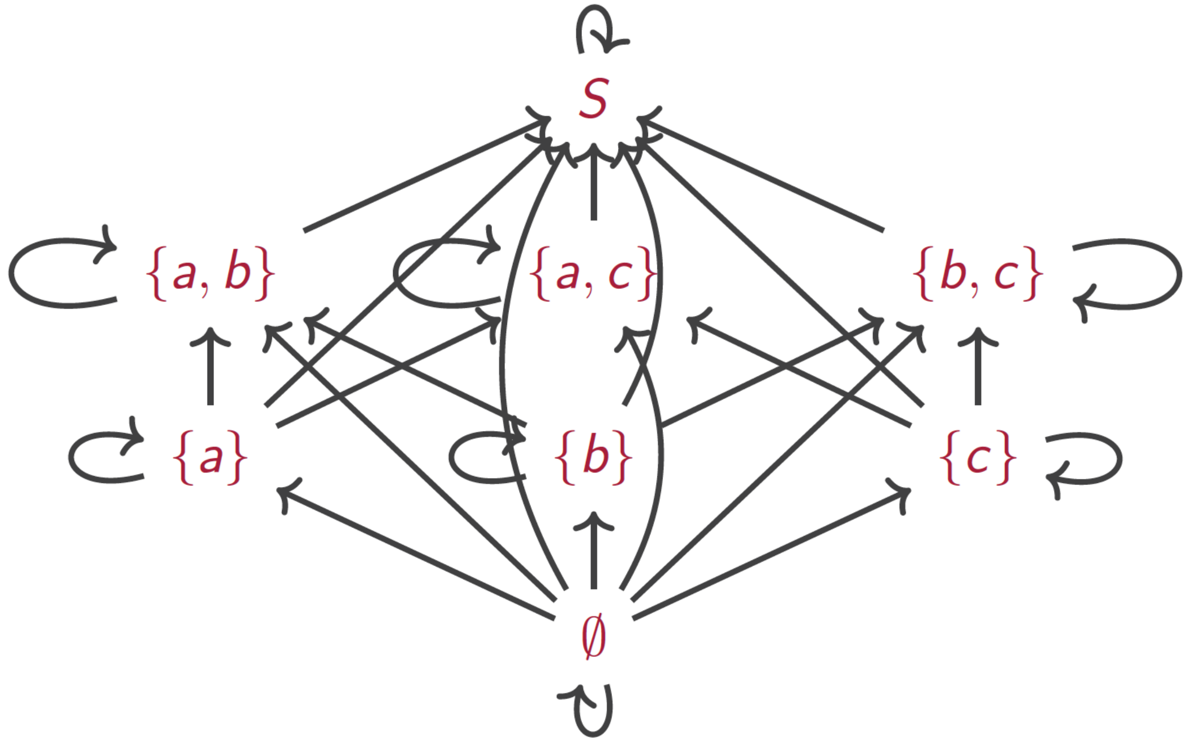


Esempio

- Sia $S = \{a, b, c\}$. Consideriamo il poset $(P(S), \subseteq)$

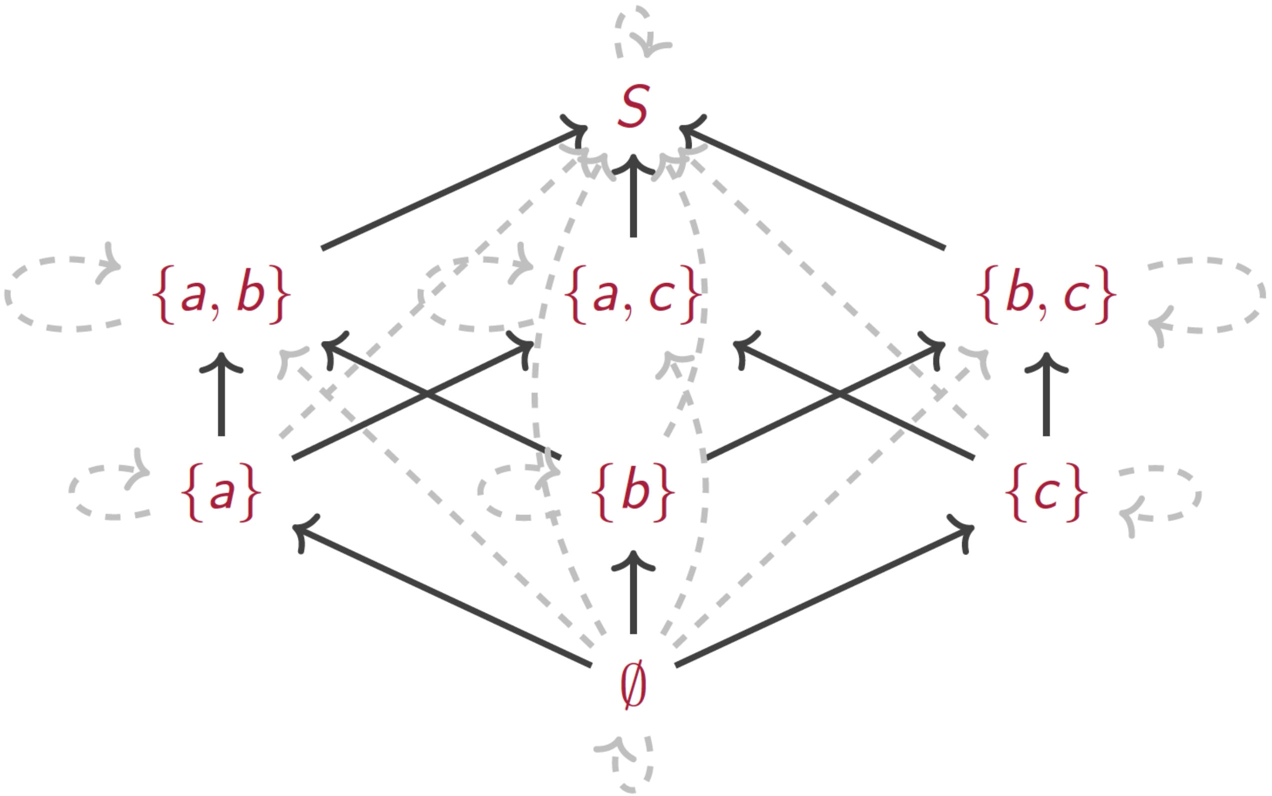
Esempio

- Sia S = {a, b, c}. Consideriamo il poset (P(S), ⊆)



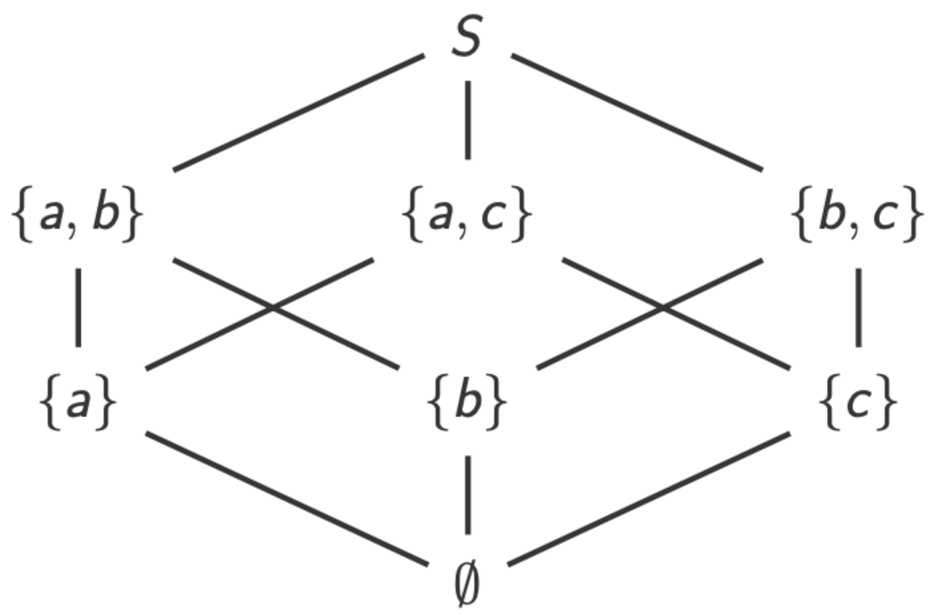
Esempio

- Sia S = {a, b, c}. Consideriamo il poset $(P(S), \subseteq)$



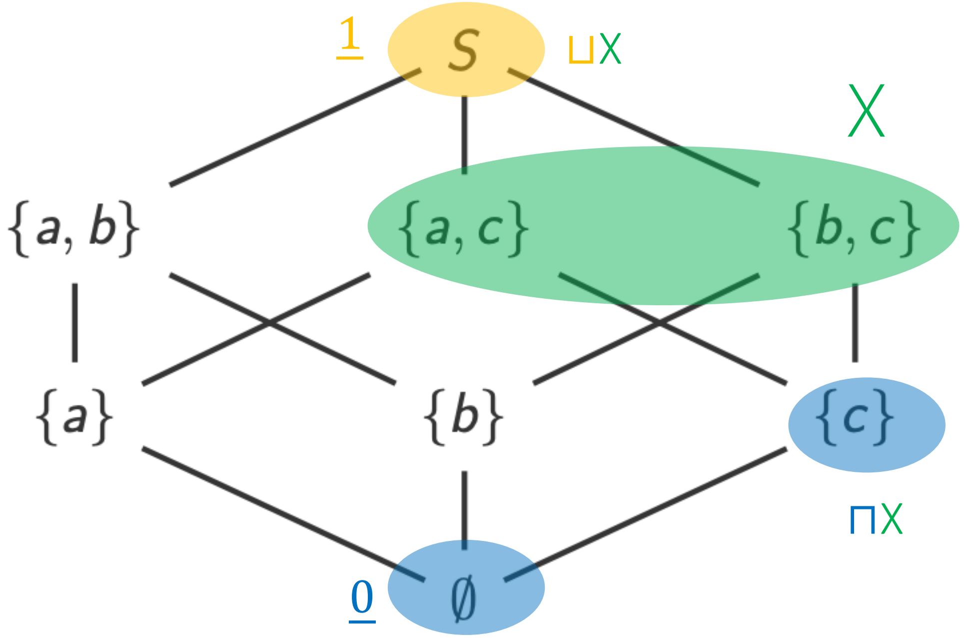
Esempio

Il diagramma di Hasse di ($P(S)$, $\subseteq$) per $S = \{a, b, c\}$ è



Esempio

Dato X = {{a,c},{b,c}}



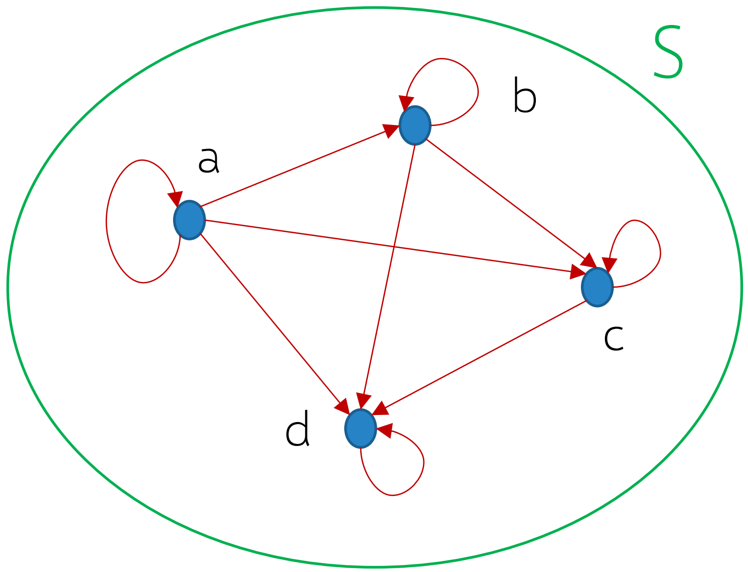
massimo $\underline{1}$ = S
minimo $\underline{0}$ = Ø

maggioranti(X) = S = {a,b,c}
minimo maggiorante ⊔X = S

minoranti(X) = {{c}, Ø}
massimo minorante ⊓X = {c}

S = {a,b,c} = {a,c} ∪ {b,c}
{c} = {a,c} ∩ {b,c}

Diagrammi di Hasse di ordinamenti totali

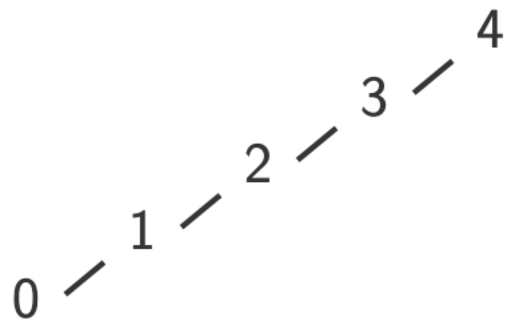


?

Ordinamenti totali

- Il diagramma di Hasse di un ordinamento totale formerà sempre una **catena.**
- **E’ per questo che gli ordini totali sono anche definiti come lineari**

Esempio: $(\{0, 1, 2, 3, 4\}, \leq)$:



Provate a disegnare il poset corrispondente

RETICOLI

Reticoli

Un reticolo è un poset (S,≤) tale che **per ogni coppia x,y** ∈ S:

- esiste un minimo maggiorante $\sqcup\{x,y\} = x \sqcup y$ (join)
- esiste un massimo minorante $\sqcap\{x,y\} = x \sqcap y$ (meet)

Se **nel grafo** esiste un **cammino** tra i nodi x e y,

- quello che *segue* (più in alto nel diagramma di Hasse) è il minimo maggiorante ⊔ (join)
- quello che *precede* (più in basso nel diagramma di Hasse) è il massimo minorante ⊓ (meet)

- Per tutte le coppie {x,x}, x è sia join sia meet

Reticoli: intuizione

Il reticolo è un tipo particolare di poset in cui, dati due elementi qualunque di S, riesco sempre a stabilire:

1. ‘cosa c’è prima’ (meet $\sqcap$)
2. ‘cosa c’è dopo’ (join $\sqcup$)

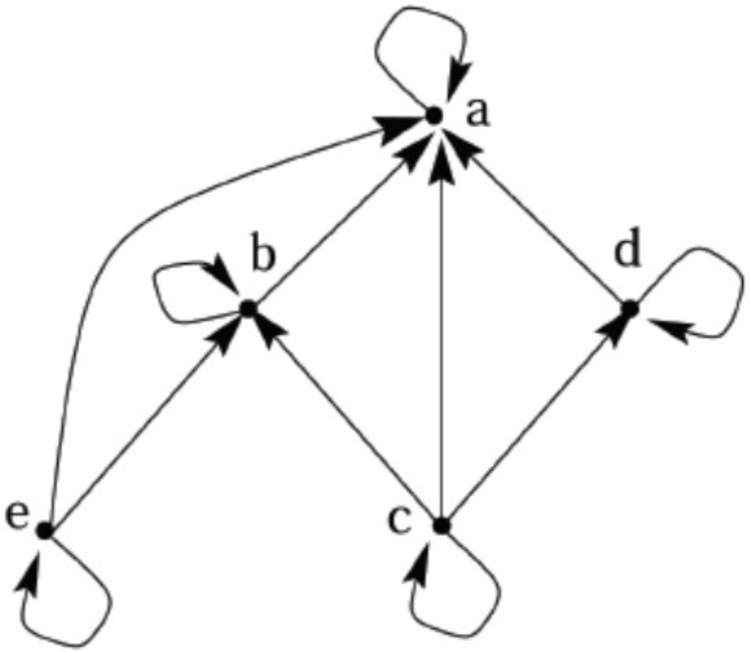
Nel caso particolare dei nodi direttamente connessi (da un cammino sul grafo):

1. viene prima (meet $\sqcap$) proprio il nodo che precede (in basso nel diagramma di Hasse),
2. viene dopo (join $\sqcup$) proprio il nodo che segue (più in alto nel diagramma di Hasse)

massimo minorante ⊓ (meet)

minimo maggiorante ⊔ (join)

È un reticolo?



Bisogna guardare gli elementi non collegati

S = {a,b,c,d,e}

S x S = S^2

		⊔	⊓
a	a		
a	b		
a	c		
a	d		
a	e		
b	a		
b	b		
b	c		
b	d		
b	e		
c	a		
c	b		
c	c		
c	d		
c	e		

		⊔	⊓
d	a		
d	b		
d	c		
d	d		
d	e		
e	a		
e	b		
e	c		X
e	d		X
e	e		

e⊓c = {}

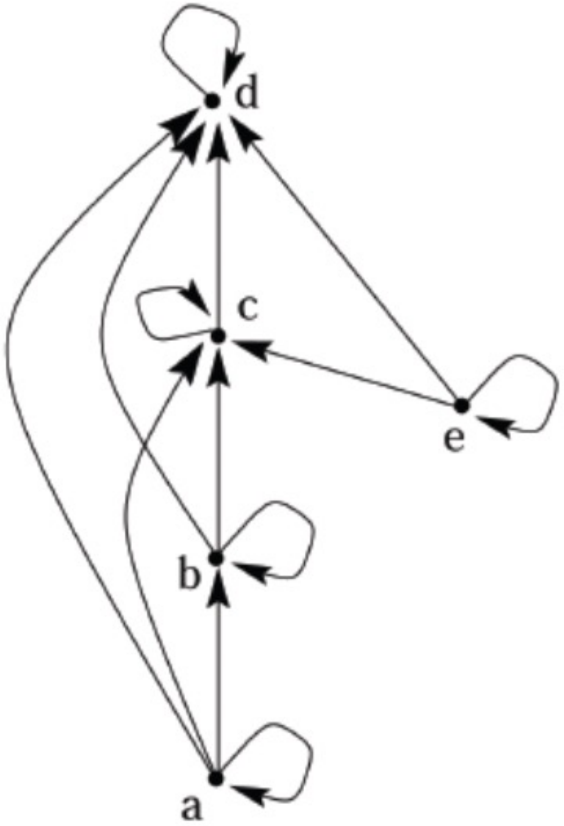
e⊓d = {}

Non è un reticolo! Basta una coppia

massimo minorante ⊓ (meet)

minimo maggiorante ⊔ (join)

È un reticolo?



S = {a.b,c,d,e}

$S \times S = S^2$

		⊔	⊓
a	a		
a	b		
a	c		
a	d		
a	e		X
b	a		
b	b		
b	c		
b	d		
b	e		X
c	a		
c	b		
c	c		
c	d		
c	e		

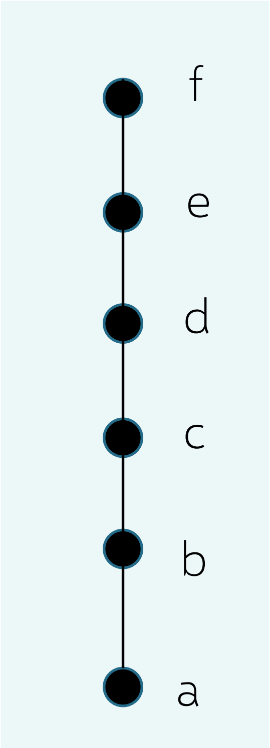
		⊔	⊓
d	a		
d	b		
d	c		
d	d		
d	e		
e	a		
e	b		
e	c		
e	d		
e	e		

a⊓e = {}

b⊓e = {}

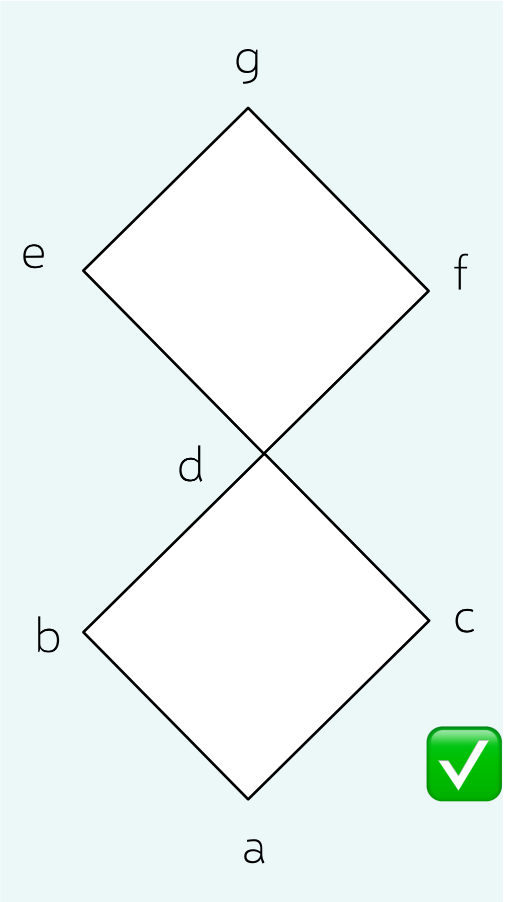
Non è un reticolo!

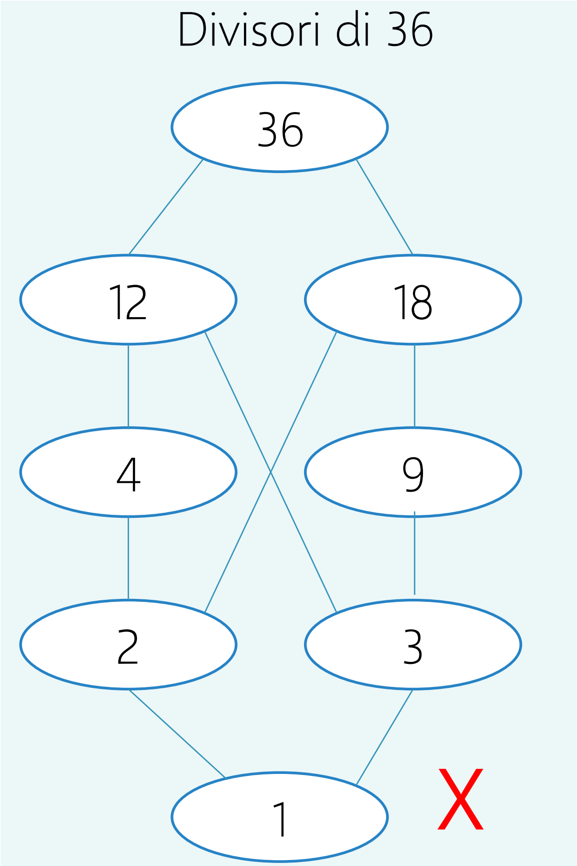
Diagrammi di Hasse e reticoli



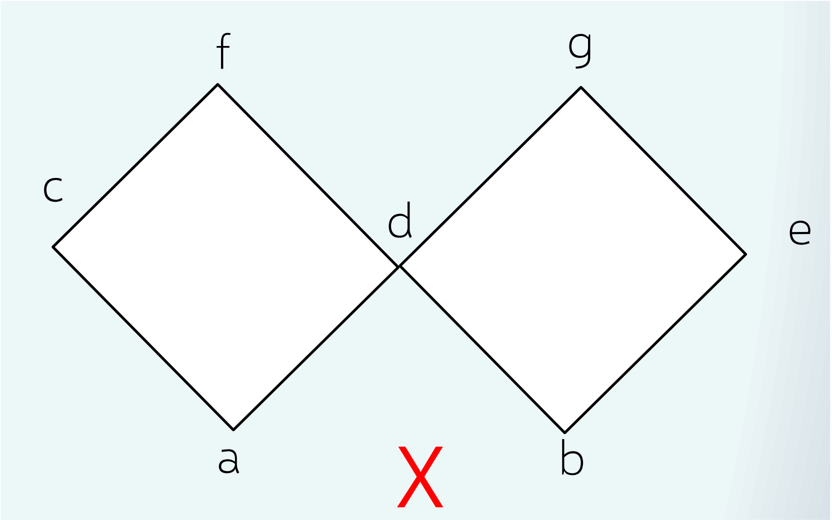
✅

Se prendo a e c
il meet ⊓ è a
il join ⊔ è c

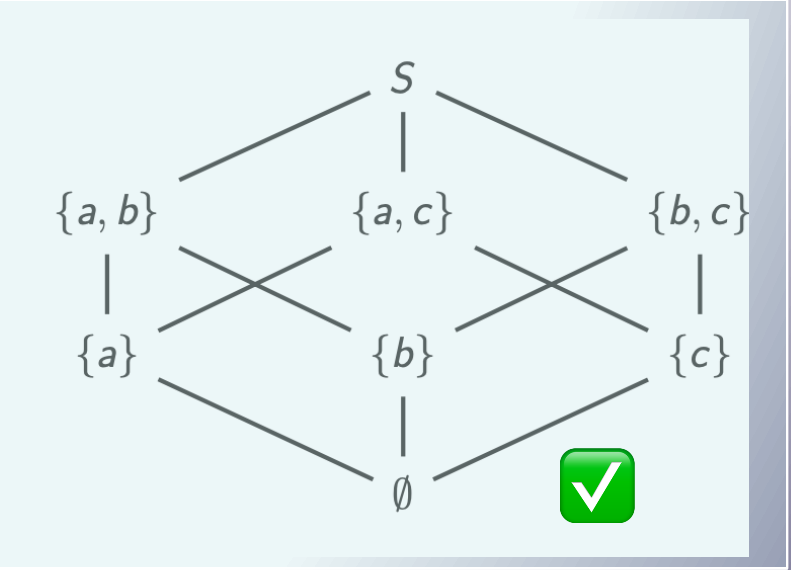




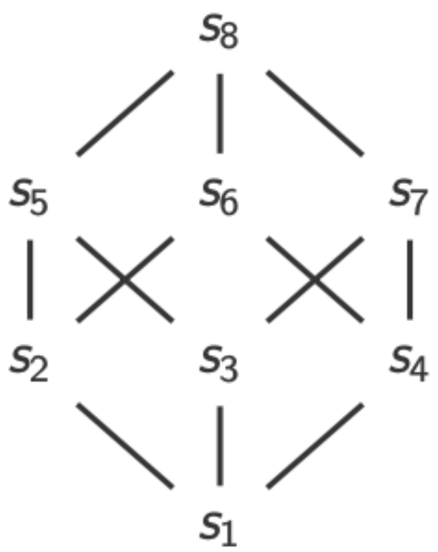
2 e 3 **non** hanno un join ⊔



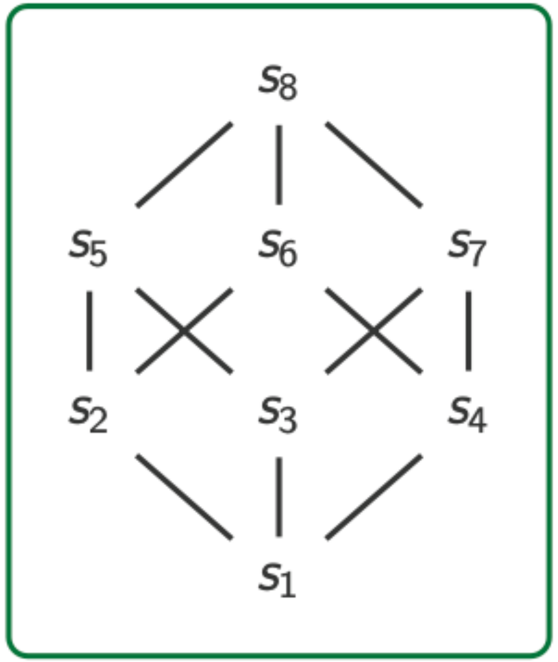
f e g **non** hanno un join ⊔
a e b **non** hanno un meet ⊓



Esempio



Esempio

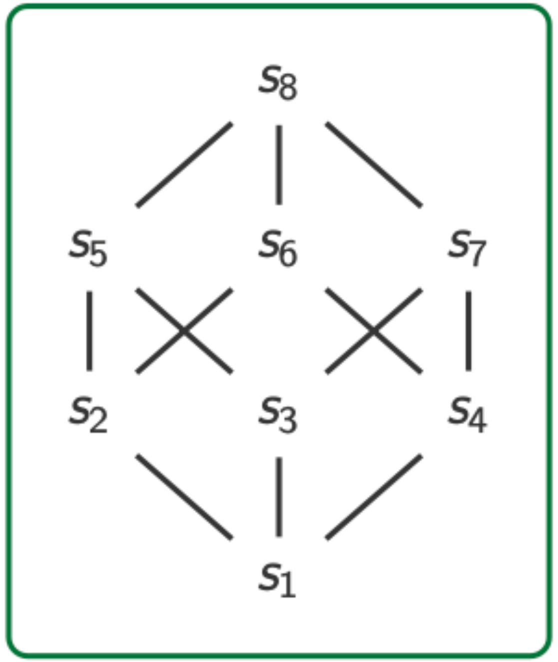


reticolo

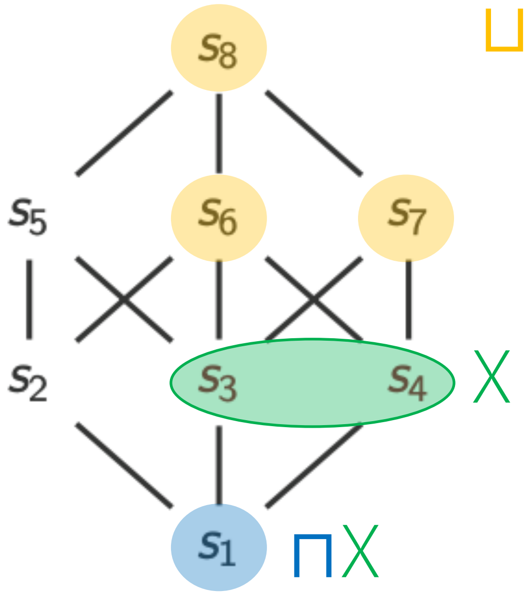
Esempio

maggioranti

minoranti



reticolo

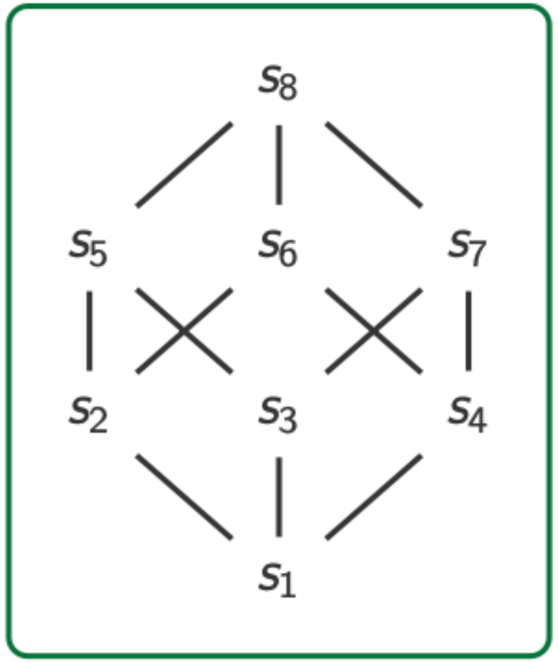


$\sqcup$? → non c'è!

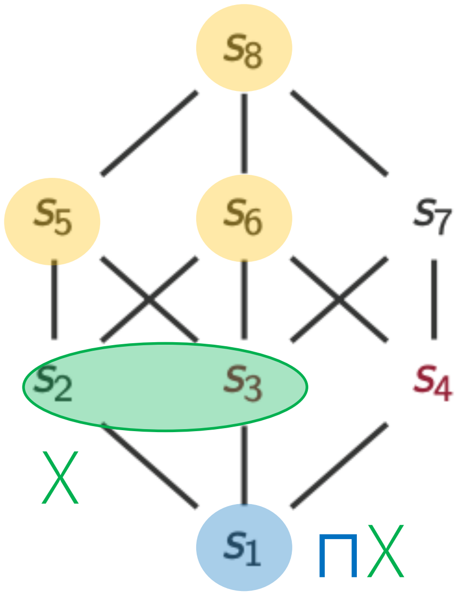
Esempio

maggioranti

minoranti

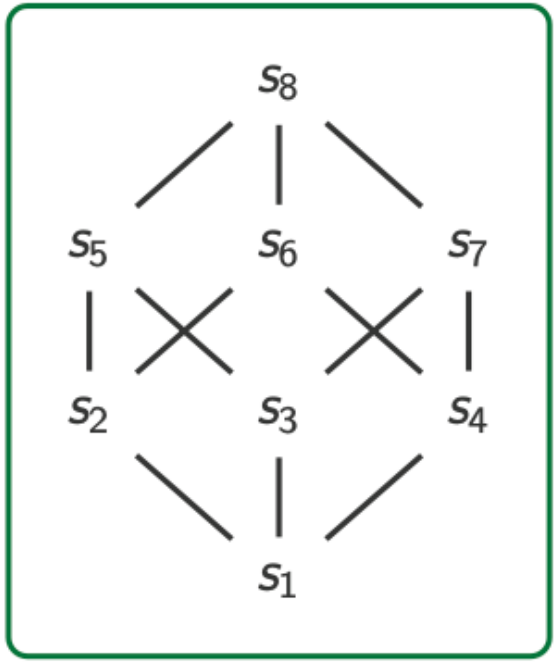


reticolo

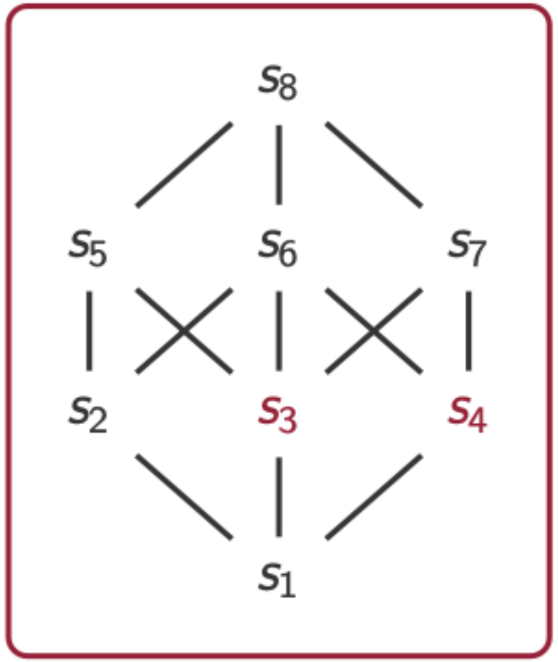


$\sqcup$? → non c'è!

Esempio



reticolo

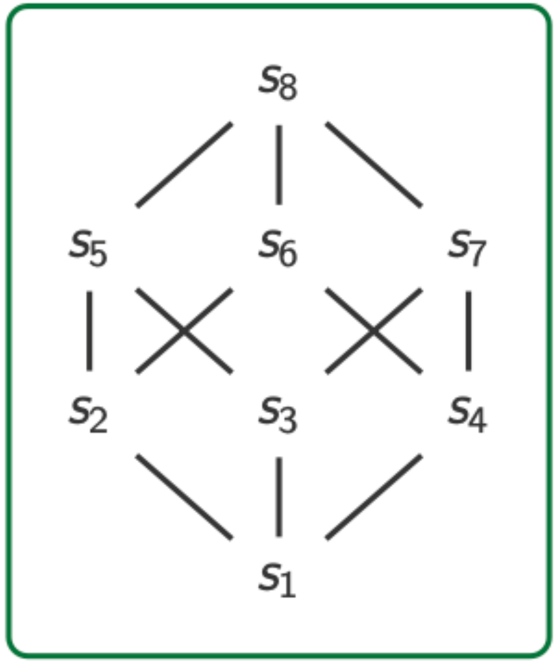


no reticolo

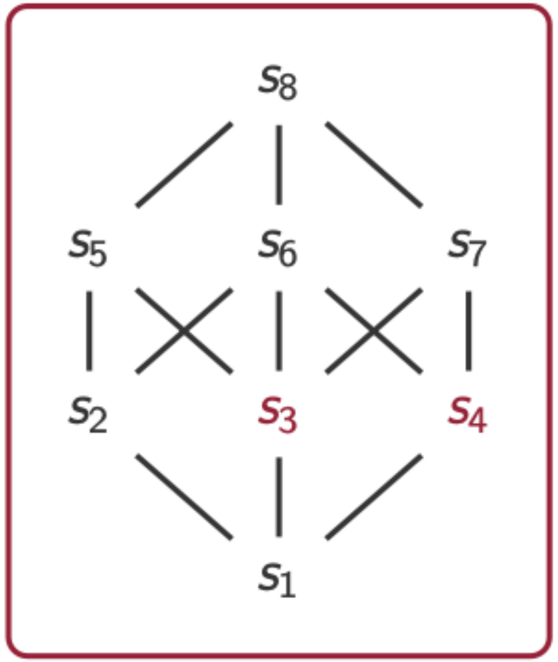
Esempio

maggioranti

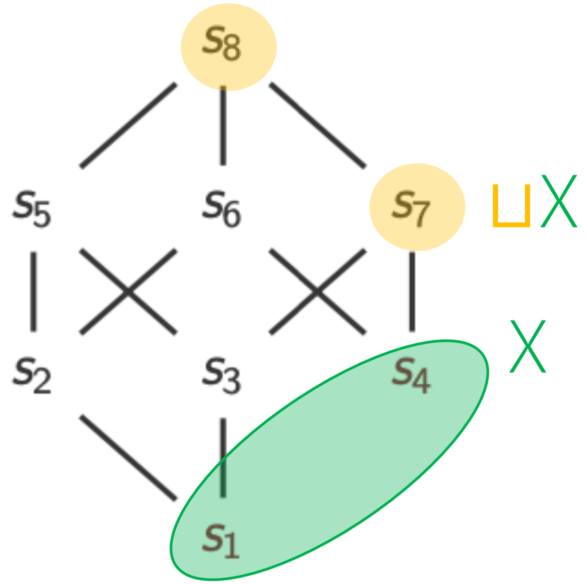
minoranti



reticolo

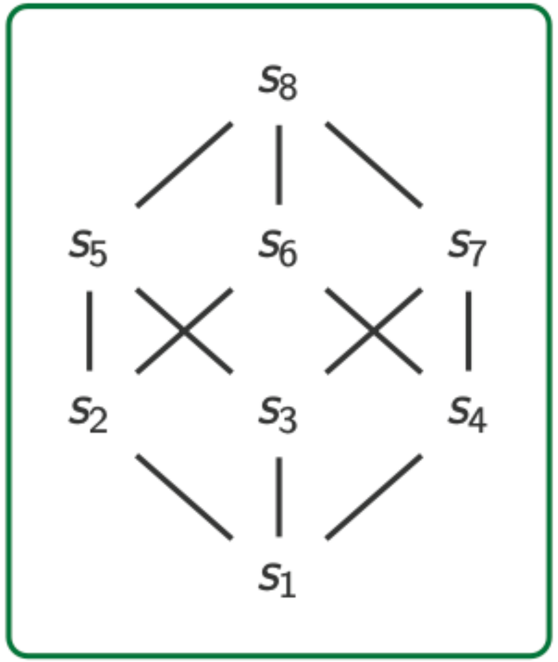


no reticolo

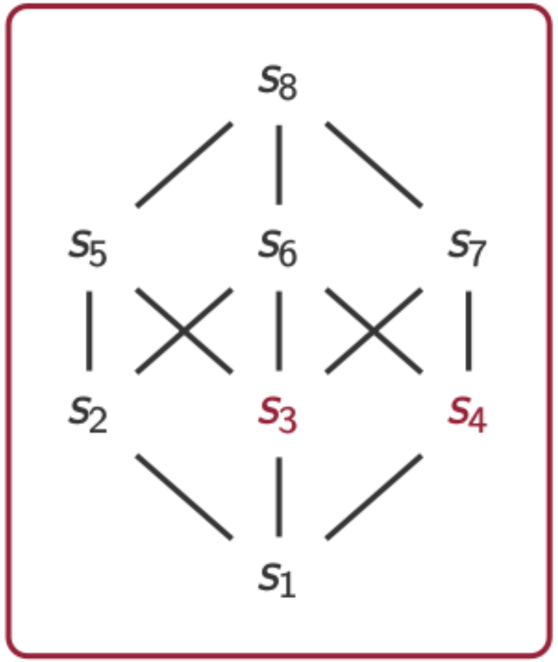


Non ci sono minoranti

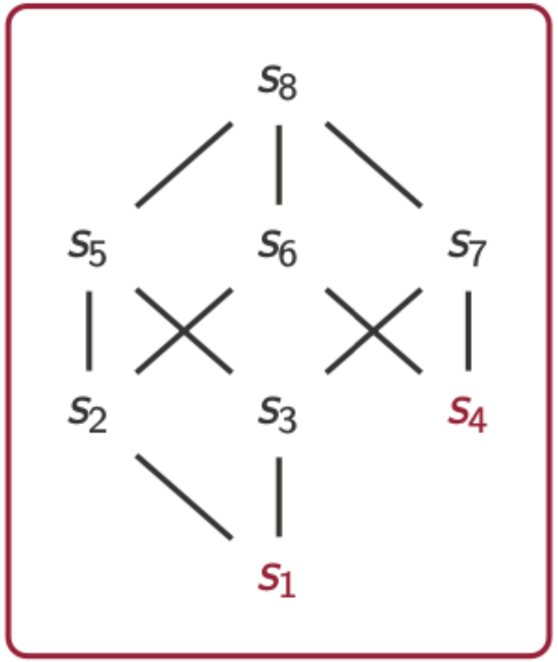
Esempio



reticolo



no reticolo



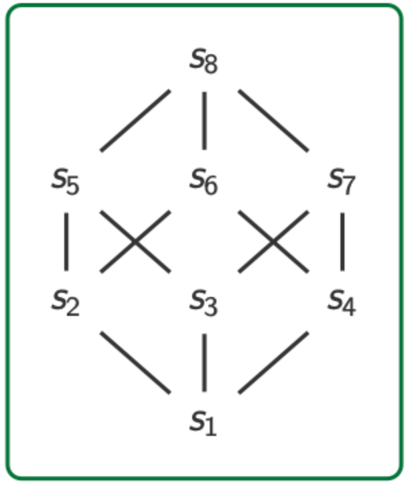
no reticolo

Reticolo prodotto

Se $(L_1, \leq_{L1})$ e $(L_2, \leq_{L1})$ sono reticoli

Anche $(L_1, x\ L_2, \leq_{L1xL2})$ è un reticolo

Proprietà



Se$(L,\leq)$ è un reticolo, allora per ogni $a,b,c \in L$:

- $a \leq a \sqcup b$, $b \leq a \sqcup b$ — $a \sqcup b$ è maggiorante di a e di b
- $a \sqcap b \leq a$, $a \sqcap b \leq b$ — $a \sqcap b$ è un minorante di a e di b

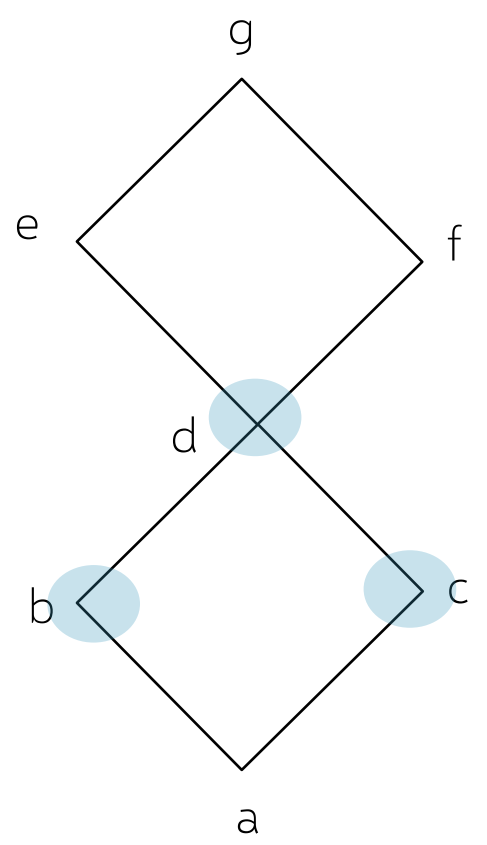
- Se $a \leq c$, $b \leq c$ allora $a \sqcup b \leq c$ — $a \sqcup b$ è il minimo maggiorante di a e b
- Se $c \leq a$, $c \leq b$ allora $c \leq a \sqcap b$ — $a \sqcap b$ è il massimo minorante di a e di b

- $a \sqcup b = b$ sse $a \leq b$ — se c'è cammino da a a b
- $a \sqcap b = a$ sse $a \leq b$ — se c'è cammino da a a b

Proprietà (II)

join e meet sono operazioni (binarie*)

- Idempotenza: $a \sqcup a = a = a \sqcap a$
- Commutatività: $a \sqcup b = b \sqcup a$
- Commutatività: $a \sqcap b = b \sqcap a$
- Associatività: $a \sqcup (b \sqcup c) = (a \sqcup b) \sqcup c$
- Associatività: $a \sqcap (b \sqcap c) = (a \sqcap b) \sqcap c$
- Assorbimento: $a \sqcup (a \sqcap b) = a = a \sqcap (a \sqcup b)$



Monotonicità

- Il join e il meet sono monotoni, cioè:

Se **$a \leq c$** e **$b \leq d$** allora:

$$a \sqcup b \leq c \sqcup d$$

$$a \sqcap b \leq c \sqcap d$$

Tipi di reticoli

Un **reticolo** $(L, \leq)$ è:

- completo sse per ogni $M \subseteq L$, $\sqcup M$ e $\sqcap M$ esistono
  - Il reticolo $(\mathbb{N}, \leq)$ è completo?

- limitato sse $\underline{1} = \sqcup L$ e $\underline{0} = \sqcap L$ esistono: sse esistono minimo e massimo
  - Ogni reticolo **completo** è **limitato**
  - Ogni reticolo **finito** è **completo** e **limitato**

- distributivo sse meet e join distribuiscono fra di loro:
  1. $a \sqcap (b \sqcup c) = (a \sqcap b) \sqcup (a \sqcap c)$
  2. $a \sqcup (b \sqcap c) = (a \sqcup b) \sqcap (a \sqcup c)$

Esempi di reticoli completi

- L'insieme dei sottoinsiemi di un insieme, ordinato secondo la relazione di inclusione.

  Il join $\sqcup$ è l’unione dei sottoinsiemi, il meet $\sqcap$ l’intersezione dei sottoinsiemi.

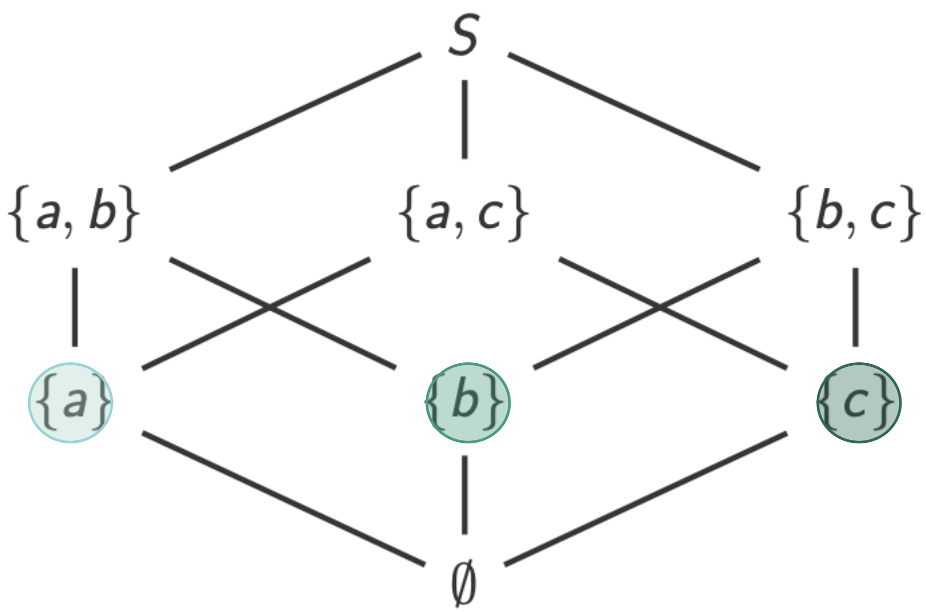
- L'intervallo unitario [0,1] e la retta reale, con la relazione d'ordine totale

  join $\sqcup$ e meet $\sqcap$ sono dati dagli estremi

- I numeri interi non negativi, ordinati dalla relazione di divisibilità.
  - Minimo è 1 (divide tutti gli interi), massimo è 0 (è diviso da tutti gli interi)
  - Il join $\sqcup$ di un sottoinsieme è il minimo comune multiplo
  - Il meet $\sqcap$ è il massimo comun divisore.
  - Se 0 è rimosso il reticolo **non** è più completo.

Esempio di reticolo distributivo

1. a ⊓ (b ⊔ c) = (a ⊓ b) ⊔ (a ⊓ c)
2. a ⊔ (b ⊓ c) = (a ⊔ b) ⊓ (a ⊔ c)



{b}⊔{c}

{a}⊓{b,c} = {a}⊓{b} = {a}⊓{c} = {}

{a} ⊓ ({b} ⊔ {c}) = {}

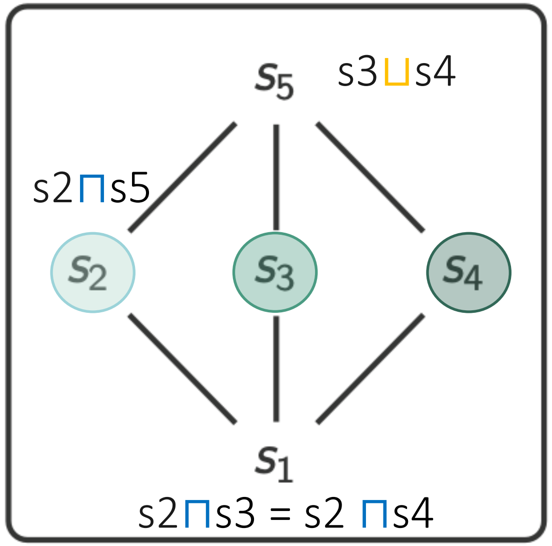
=

({a} ⊓ {b}) ⊔ ({a} ⊓ {c}) = {}

Esempi di reticoli non distributivi

1. a ⊓ (b ⊔ c) = (a ⊓ b) ⊔ (a ⊓ c)
2. a ⊔ (b ⊓ c) = (a ⊔ b) ⊓ (a ⊔ c)

I due reticoli non distributivi prototipici sono

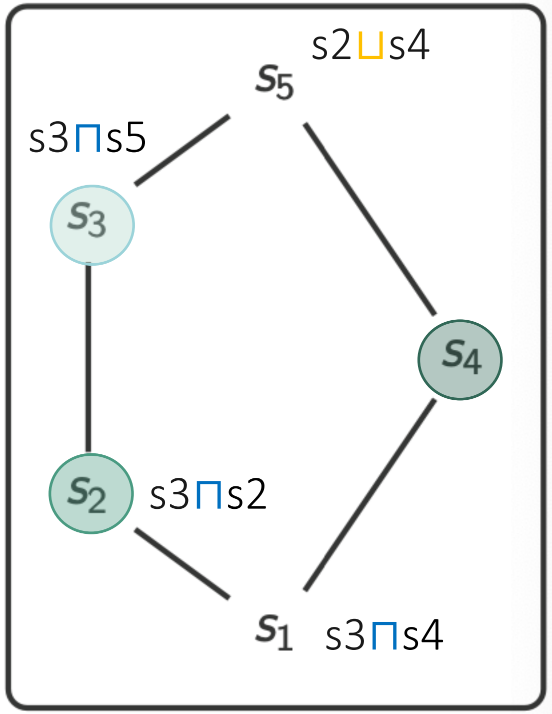


M_3

s2 ⊓ (s3 ⊔ s4) = s2

≠

(s2 ⊓ s3) ⊔ (s2 ⊓ s4) = s1



N_5

s3 ⊓ (s2 ⊔ s4) = s3

≠

(s3 ⊓ s2) ⊔ (s3 ⊓ s4) = s2

Complemento

Siano (L, ≤) un <u>**reticolo distributivo limitato**</u> e a ∈ L

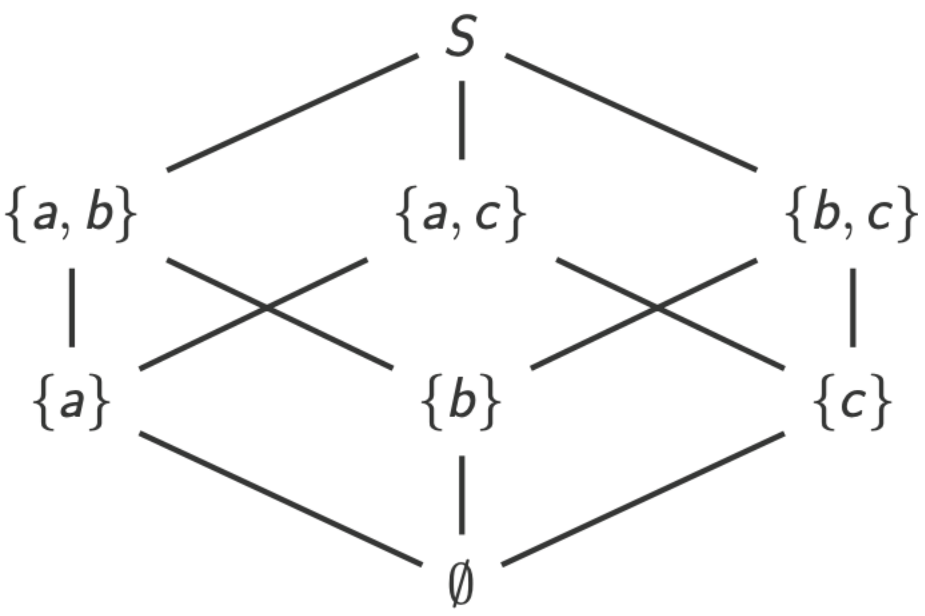
- Un elemento b ∈ L è il complemento di a (cioè b = $\bar{a}$) sse:

$$a \sqcap b = \underline{0}\ (\text{minimo})$$

$$a \sqcup b = \underline{1}\ (\text{massimo})$$

- In un **reticolo distributivo limitato** se a ∈ L ha un complemento $\bar{a}$, allora questo è unico
- (L, ≤) è un <u>reticolo complementato</u> sse <u>**ogni**</u> a ∈ L ha un complemento
- Un reticolo non limitato non può essere complementato

Complemento: esempio



Qual è il complemento di {a}?

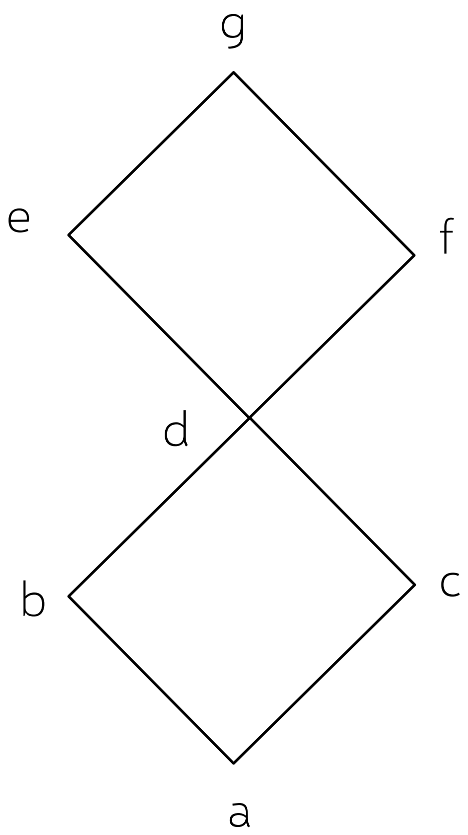
Quell'elemento tale che:
se faccio il join $\sqcup$ con {a} è il massimo: S = {a,b,c}
Se faccio il meet $\sqcap$ con {a} è il minimo: {}

→ $\overline{\{a\}}$ = {b,c}

Qual è il complemento di {a,b}?
$\overline{\{a, b\}}$ = {c}

È esattamente il complemento insiemistico

Complemento: esempio



Qual è il complemento di e?

Il join con f è il massimo
Il meet con f è d
Non c'è complemento di e

Non è un reticolo complementato

Credits

Rafael Penaloza: rafael.penaloza@unimib.it

Stefania Bandini: stefania.bandini@unimib.it

Ugo Moscato: ugo.moscato@unimib.it

Matteo Palmonari: matteo.palmonari@unimib.it