LOGICA PREDICATIVA

Stefania Bandini

LINGUAGGI PREDICATIVI

Ci sono argomentazioni molto semplici che non possono essere formalizzate nella logica proposizionale perché la validità dell'argomento dipende dalle relazioni che sussistono tra i *costituenti* delle proposizioni.

Ci serve un linguaggio in cui sia possibile:

- Riferirsi a concetti (o proprietà) e a individui (oggetti particolari)

- Fare affermazioni particolari o universali, senza necessariamente far riferimento a individui specifici (usare pronomi e aggettivi indefiniti)

Fido è un cane, quindi ho almeno un amico fedele.
Qualche mammifero è carnivoro; tutti i carnivori sono predatori; quindi qualche mammifero è predatore.
Nessuno dei referendum darà gli esiti desiderati. Quindi, ogni referendum darà esiti indesiderati.
Gianni è più alto di Luca, Luca è più alto di Andrea; quindi Gianni è più alto di Andrea.
Luca è più alto di Andrea. Quindi c'è qualcuno che è più alto di Andrea.

LINGUAGGI PREDICATIVI

Tramite un **linguaggio del primo ordine** (*) si ha la possibilità di esprimere proprietà e operazioni relative a individui e quindi di **predicare** delle caratteristiche di oggetti e individui, e tramite l'uso di variabili e quantificatori si può astrarre una caratteristica, o un’operazione, da un individuo a una classe di individui.

Si ha, nel linguaggio formale, ciò che nel linguaggio naturale è espresso da "**un**", "**alcuni**” e ”**tutti**", quantificatori che permettono di indicare in modo generico oggetti che godono di proprietà.

(*) "primo ordine”: si può solo quantificare su individui (simboli di variabili) e non su insiemi di individui (simboli di funzioni e predicato).

Si noti che, per definizione, i quantificatori $\forall$ ed $\exists$ possono solo essere applicati a simboli di variabile individuale e non, per esempio, a simboli di funzione o predicato. Questo spiega il nome di “logica del primo ordine,” per contrasto con le “logiche di ordine superiore” in cui si può quantificare non solo su individui, ma su insiemi di individui.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

Un *linguaggio predicativo* o *linguaggio del primo ordine* $\mathcal{L}$ è costruito sui seguenti insiemi di simboli.

Simboli Logici

- I connettivi proposizionali: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow$ e $\leftrightarrow$;
- Le costanti proposizionali $\top$ e $\bot$;
- Il simbolo di uguaglianza $=$, eventualmente assente;
- I simboli separatori '(', ')' e ',';
- Un'infinità numerabile di simboli di *variabile individuale* $x_1, x_2, \ldots$;
- Il simbolo di *quantificazione universale* $\forall$;
- Il simbolo di *quantificazione esistenziale* $\exists$.

Parametri

- Un insieme finito o numerabile di *simboli di predicato*, ognuno dei quali ha associato un intero positivo n detto arità. Un predicato di arità n è detto n-ario;
- Un insieme finito o numerabile di *simboli di funzione*, ognuno dei quali ha associato un intero positivo detto arità. Una funzione di arità n è detta n-aria;
- Un insieme finito o numerabile di *simboli di costante*.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

Come nel linguaggio proposizionale, altri connettivi possono essere definiti in termini di quelli presentati sopra. L'insieme dei connettivi che abbiamo introdotto non è minimale, per esempio, come si vedrà nel seguito, il simbolo di quantificazione esistenziale $\exists$ può essere definito in termini di quello universale: $\exists = \neg\forall\neg$.

Osserviamo che i connettivi proposizionali, le variabili e le parentesi sono considerati simboli logici, in quanto sono gli elementi immutabili costituenti ogni linguaggio del primo ordine. Gli altri simboli, cioè i simboli di predicato, di costante e di funzione, sono considerati parametri poiché possono essere diversi, a seconda del linguaggio. Molti testi preferiscono chiamare l'insieme dei parametri una "segnatura" del linguaggio, in quanto i simboli della segnatura contraddistinguono il linguaggio stesso.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

Si osservi che gli insiemi dei simboli di costante e funzione possono essere vuoti; non sono quindi essenziali nella definizione di una logica del primo ordine; viceversa l'insieme dei simboli di predicato – nel caso in cui il simbolo di uguaglianza sia assente – deve essere non vuoto. L'insieme dei simboli di variabile è infinito: vogliamo infatti avere sempre a disposizione variabili "fresche" da utilizzare nelle formule.

Per le variabili, nel seguito, piuttosto che usare pedici, preferiamo usare le ultime lettere dell'alfabeto minuscole: x, y, w, z, t. Inoltre, indicheremo i simboli di predicato con $P, Q, R, S, \ldots$, oppure con parole con iniziale maiuscola. Indicheremo i simboli di funzione con $f, g, h, \ldots$, oppure con parole con iniziale minuscola. Ometteremo l'apice che denota l'arità quando questa sarà chiara dal contesto; infine, indicheremo le costanti con le lettere minuscole della prima parte dell'alfabeto oppure con nomi con iniziale minuscola.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

Alcuni testi preferiscono non inserire i simboli di costante nell'alfabeto, inserendo al loro posto simboli di funzioni 0-arie. I simboli di predicato a un argomento, cioè di arità 1, vengono anche detti *monadici*.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

Predicati. Un *predicato* è una proposizione contente una o più *variabili (predicative)*[1] (o *argomenti*). Si hanno quindi predicati *unari*, *binari*, *ternari*, etc...a seconda di quante variabili si vuole compaiono in essi. Ad esempio in

$$P(x):\ \text{“}x \text{ è un uomo”}\ ,\quad Q(x,y):\ \text{“}x \geq y\text{”}\ ,\qquad R(x,y,z):\ \text{“}x \text{ è padre di } y\text{, e } z \text{ è padre di } x\text{”}\ ,$$

P è un predicato unario nella variabile x, Q è un predicato binario nelle variabili predicative x, y, ed R è un predicato ternario nelle variabili x, y, z.

[1] Le variabili si dicono "predicative" perché di esse si "predica", cioé si afferma, qualcosa.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

Quantificatori: universale $\forall$ ed esistenziale $\exists$. A partire da predicati noti si possono costruire nuovi predicati usando le parentesi ed i connetivi logici, come per la logica proposizionale vista sopra. Ma la *logica predicativa* è più ricca. Un altro modo di formare nuovi predicati (o semplici proposizioni) è per mezzo dell'introduzione dei cosiddetti *quantificatori*: universale, $\forall$ "(per) ogni", ed esistenziale, $\exists$ "esiste (al meno un)". Ad esempio, se con $L(x, y)$ indichiamo il predicato

$$L(x, y):\ \text{“}x \text{ ha letto il libro } y\text{”}$$

allora (sottointendendo i "*domini*" entro cui prendiamo le variabili predicative x ed y)

$\exists x : L(x, y)$ significa: "il libro y è stato letto da qualcuno".

$\forall x : L(x, y)$ significa: "tutti hanno letto il libro y".

$\exists y : L(x, y)$ significa: "x ha letto un libro".

$\forall y : L(x, y)$ significa: "x ha letto ogni libro".

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

Dagli esempi precedenti si capisce come la presenza di un quantificatore (esistenziale o universale che sia) riduce il numero delle "*variabili libere*" nel predicato: i valori di verità del predicato $\exists x : L(x, y)$ non dipendendono più da due variabili x ed y, ma solo da y; analogo discorso vale per $\forall x : L(x, y)$. In queste situazioni si dice che la "variabile" x è *saturata*, o (*resa*) *muta*, dal quantificatore, mentre la variabile y è una *variabile libera*, o *non condizionata* (da nessun quantificatore...). Il "nome" che si dà ad una variabile quantificata (e quindi muta) è ininfluente, sono rilevanti invece solo le "*occorrenze*" di quella stessa variabile nel predicato. Cosí i predicati

$$\exists x : L(x, y) \qquad \text{e} \qquad \exists w : L(w, y)$$

sono equivalenti, cosí come sono equivalenti i predicati

$$\forall y : L(x, y) \qquad \text{e} \qquad \forall a : L(x, a).$$

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

Negazione dei quantificatori. Evidenziamo solo le "negazioni dei quantificatori" che ingenerano spesso problemi. Negare la proposizione: "*OGNI mucca è bianca*" è "*NON OGNI mucca è bianca*", ovvero "*ESISTE (almeno) una mucca che NON è bianca*" (anche rosa a pallini verdi va bene...). In simboli

$$\neg(\forall x : P(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \exists x : \neg P(x).$$

Analogamente, negare la proposizione: "*ESISTE (almeno) una mucca rosa a pallini verdi*" è "*NON ESISTE una mucca rosa a pallini verdi*", ovvero "*OGNI mucca NON è rosa a pallini verdi*". In simboli

$$\neg(\exists x : P(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x : \neg P(x).$$

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

Alcuni linguaggi del primo ordine includono tra i simboli logici il simbolo di *uguaglianza*, indicata con $=$. Il simbolo di uguaglianza è un simbolo di predicato binario che si distingue dagli altri simboli di predicato perché è un simbolo logico e ha un’interpretazione prefissata: qualunque sia il linguaggio del primo ordine e qualunque sia l’interpretazione che se ne dà, il simbolo di uguaglianza deve essere interpretato come l’identità sul dominio di interpretazione.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPIO: Linguaggio puro dei predicati

Uguaglianza: assente;

Simboli di predicato n-ari: $P_1^n, P_2^n, \ldots$;

Simboli di costante: $c_1, c_2, \ldots$;

Simboli di funzione n-ari, $n > 0$: nessuno.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPIO: Linguaggio della teoria degli insiemi

Uguaglianza: presente;

Simboli di predicato: un simbolo di predicato binario $\in$;

Simboli di costante: $\emptyset$;

Simboli di funzione n-ari, $n > 0$: nessuno.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPIO: Linguaggio della teoria dei numeri

Uguaglianza: presente;

Simboli di predicato: un simbolo di predicato binario $<$;

Simboli di costante: 0;

Simboli di funzione: un simbolo di funzione unario s, che sta per la funzione successore, e i simboli di funzione binari $+$ e $\times$, che stanno rispettivamente per l'addizione e la moltiplicazione.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPI di rappresentazione del linguaggio naturale nel linguaggio del primo ordine

Se vogliamo rappresentare

Alcuni medici sono arroganti;
Qualche operaio è metalmeccanico

useremo un linguaggio del primo ordine puro e scriveremo:

$$
\begin{array}{ll}
a) & \exists x(Medico(x) \wedge Arrogante(x)); \\
b) & \exists x(Operaio(x) \wedge Metalmeccanico(x)).
\end{array}
$$

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

QUANTIFICATORI

I quantificatori non vanno letti come se indicassero entità specifiche (il tutto o un qualcuno in particolare) ma come se indicassero tutte le entità di un certo dominio (quello universale) e almeno una entità di un certo dominio (quello esistenziale).

Esistenziale

Qualche italiano è simpatico. Maria ama qualcuno. Esiste un pianeta abitato. Moltissimi cinesi sono veloci. Quasi tutti gli svedesi sono biondi. Amo solo una ragazza.

Universale

Tutti gli italiani sono simpatici. Ogni cinese conosce l’elettronica. I numeri o sono divisibili o sono primi. Non esiste un numero primo divisibile per 2. Tutti coloro che studiano saranno promossi. Nessuno dei promossi è stato pigro.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPI di rappresentazione del linguaggio naturale nel linguaggio del primo ordine

Abbiamo usato il quantificatore esistenziale $\exists$ per rappresentare "alcuni medici" e "qualche operaio".

Con la formalizzazione appena esposta, ci diciamo sicuri dell'esistenza di medici arroganti e di operai metalmeccanici. Diverso sarebbe il significato se formalizzassimo le due frasi come:

$$
\begin{array}{ll}
a') & \exists x(Medico(x) \rightarrow Arrogante(x)); \\
b') & \exists x(Operaio(x) \rightarrow Metalmeccanico(x)).
\end{array}
$$

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPI di rappresentazione del linguaggio naturale nel linguaggio del primo ordine

$$a') \quad \exists x(Medico(x) \rightarrow Arrogante(x));$$
$$b') \quad \exists x(Operaio(x) \rightarrow Metalmeccanico(x)).$$

In questa caso di fatto non asseriamo l'esistenza di un medico. Infatti la formula a' essendo del tipo $M \longrightarrow A$ è vera anche quando la premessa e falsa. Analogo ragionamento vale per la formula b' . Quindi la differenza sostanziale tra la prima e la seconda traduzione è che la prima asserisce l'esistenza di medici arroganti e di operai metalmeccanici, la seconda no. Questa osservazione troverà ulteriore approfondimento quando parleremo di semantica della logica del primo ordine.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPI di rappresentazione del linguaggio naturale nel linguaggio del primo ordine

Supponiamo di voler rappresentare in logica del primo ordine la frase:

Tutti i pasticcieri sanno fare la pasta frolla.

Anche in questo caso useremo un linguaggio del primo ordine e scriveremo:

$$\forall x(Pasticciere(x) \rightarrow SaFare(x, pasta\text{-}frolla)).$$

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPI di rappresentazione del linguaggio naturale nel linguaggio del primo ordine

Per rappresentare "tutti i pasticceri" abbiamo usato il quantificatore universale $\forall$.
Per quanto riguarda la formalizzazione di questa frase non sorgono ambiguità nella scelta dei connettivi. Infatti, l'utilizzo del connettivo $\forall$ sembra del tutto inappropriato in quanto:

$$\forall x(Pasticciere(x) \wedge SaFare(x, pasta\text{-}frolla))$$

starebbe a significare che tutti (gli esseri umani) sono pasticceri e sanno fare la pasta frolla. Nessuna delle due formule comunque asserisce l'esistenza di pasticceri: tutte le proprietà sono infatti vere sull'insieme vuoto.

Anche su questa torneremo. quando ·introdurremo la semantica della logica del primo ordine, dove vedremo che per ovviare al fatto che anche la seconda formula possa essere vacuamente verificata si assume che il dominio di interpretazione delle variabili sia non vuoto per definizione.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPI di rappresentazione del linguaggio naturale nel linguaggio del primo ordine

Supponiamo di volere rappresentare frasi del tipo:

Qualunque oggetto appartiene a un insieme di oggetti.
Se due insiemi di oggetti hanno gli stessi elementi, allora sono uguali.

Per rappresentare in un linguaggio del primo ordine, notiamo che le frasi parlano di "insiemi", di "elementi di insiemi" e di "appartenenza”:

$$\forall x \exists y (x \in y)$$
$$\forall y \forall z (\forall x (x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow y = z)$$

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPI di rappresentazione del linguaggio naturale nel linguaggio del primo ordine

Infine costruiamo alcune frasi in cui si trattano i numeri naturali.

Due più due è uguale a quattro;
Per ogni numero x e y la somma di x e del successore di y è uguale al successore della somma di x e y;
Ogni numero diverso da zero è successore di qualche numero.

$$s(s(0)) + s(s(0)) = s(s(s(s(0))))$$
$$\forall x \forall y((x + s(y)) = s(x + y))$$
$$\forall x(x \neq 0 \rightarrow \exists y(x = s(y)))$$

dove $a \neq b$ è una abbreviazione per $\neg(a = b)$.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

Definiamo ora le *espressioni legali* del linguaggio $\mathcal{L}$, cioè le formule.

Per definire le formule dobbiamo prima definire i *termini* e le *formule atomiche* o *atomi*.

[TERMINI] *L'insieme* TERM *dei* termini *di* $\mathcal{L}$ *è l'insieme induttivo definito come segue:*

1. *Ogni simbolo di costante e di variabile è un termine;*
2. *Se* $t_1 \ldots t_n$ *sono termini e* f *è un simbolo di funzione n-aria,* $f(t_1, \ldots, t_n)$ *è un termine (detto* termine funzionale*).*

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

[ATOMI] *L’insieme* ATOM *degli* atomi *o* formule atomiche *è definito induttivamente come segue:*

1. $\perp$ *e* $\top$ *sono atomi;*
2. *Se* t_1 *e* t_2 *sono termini allora* $t_1 = t_2$ *è un atomo;*
3. *Se* $t_1, \ldots, t_n$ *sono termini e* P *è un simbolo di predicato a* n *argomenti, allora* $P(t_1, \ldots, t_n)$ *è un atomo.*

L’insieme FBF delle *formule ben formate* di $\mathcal{L}$ è l’insieme delle espressioni che possono essere costruite, a partire dai termini e dagli atomi, usando opportunamente i connettivi e i quantificatori. In genere chiameremo una formula ben formata semplicemente *formula*, o anche *enunciato*.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

[FBF] *L'insieme delle* formule *di* $\mathcal{L}$ *è l' insieme induttivo definito come segue:*

- *Ogni atomo è una formula;*
- *Se* A *è una formula* $\neg A$ *è una formula;*
- *Se* $\circ$ *è un connettivo binario,* A *e* B *due formule,* $A \circ B$ *è una formula;*
- *Se* A *è una formula,* x *una variabile,* $\forall x A$ *e* $\exists x A$ *sono formule.*

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

Denotiamo, nel seguito, le formule di $\mathcal{L}$ sia con le lettere dell'alfabeto greco $\alpha, \beta, \gamma, \phi, \psi, \ldots$, sia con lettere maiuscole della prima parte dell'alfabeto, A, B, C, ... Insiemi di formule verranno indicati con lettere greche maiuscole Γ, Δ o anche con alcune lettere maiuscole, tipo T.

La *precedenza* tra gli operatori logici è stabilita come segue:

$$\forall, \exists, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$$

e, come nel caso proposizionale, si assume che tutti gli operatori associno a destra.

Inoltre quando uno stesso simbolo di quantificazione si ripete, invece di scrivere $\forall x \forall y$ possiamo scrivere $\forall xy$, analogamente quando si ripete il quantificatore esistenziale.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPIO: Precedenza degli operatori

Si consideri il seguente enunciato senza parentesi:

$$\forall x P(x) \rightarrow \exists y \exists z Q(y, z) \wedge \neg \forall x R(x)$$

introducendo le parentesi per segnare la precedenza fra gli operatori otteniamo:

$$(\forall x P(x)) \rightarrow ((\exists y (\exists z Q(y, z))) \wedge (\neg (\forall x R(x)))).$$

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPIO: Enunciato nella logica dei predicati

Sia $\mathcal{L}$ un linguaggio puro dei predicati. Il seguente enunciato espresso nella lingua italiana

> *Ognuno ama qualcuno e nessuno ama tutti, oppure qualcuno ama chiunque e qualcuno non ama nessuno*

è rappresentato in $\mathcal{L}$ come:

$$(\forall x \exists y \text{ ama}(x,y) \land \neg \exists x \forall y \text{ ama}(x,y)) \lor (\exists x \forall y \text{ ama}(x,y) \land \exists x \forall y \neg \text{ ama}(x,y)).$$

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPIO: Enunciato nella teoria degli insiemi

Sia $\mathcal{L}$ il linguaggio della teoria degli insiemi. L’enunciato

Non esiste un insieme tale che tutti gli insiemi siano suoi elementi

è rappresentato in $\mathcal{L}$ come:

$$\neg\exists x\forall y(y \in x).$$

ESEMPIO: Enunciato nella teoria dei numeri

Sia $\mathcal{L}$ il linguaggio della teoria elementare dei numeri. L’enunciato

Non esiste un numero più grande di tutti i numeri

è rappresentato in $\mathcal{L}$ come:

$$\neg\exists y\forall x(y > x).$$

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPIO: Enunciato nella teoria degli insiemi

Sia $\mathcal{L}$ il linguaggio della teoria degli insiemi. L'enunciato

Non esiste un insieme tale che tutti gli insiemi siano suoi elementi

è rappresentato in $\mathcal{L}$ come:

$$\neg\exists x\forall y(y \in x).$$

ESEMPIO: Enunciato nella teoria dei numeri

Sia $\mathcal{L}$ il linguaggio della teoria elementare dei numeri. L'enunciato

Non esiste un numero più grande di tutti i numeri

è rappresentato in $\mathcal{L}$ come:

$$\neg\exists y\forall x(y > x).$$

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

In una formula atomica, per definizione, non occorrono quantificatori, ma possono comparire variabili.

Consideriamo le seguenti formule non atomiche di $\mathcal{L}$:

1. $\forall x \exists y \exists z (Madre(y, x) \wedge Padre(z, x))$
2. $Film(x) \wedge Bello(x)$

Nella formula 1 le tre variabili x, y e z sono quantificate. Possiamo parafrasare l'enunciato come segue "Ognuno ha un padre e una madre". Qualunque sia il discorso in cui esprimiamo questa frase, essa può essere vera o falsa[2], comunque è dotata di senso.

Nella formula 2, invece, la variabile x occorre *libera*, poiché non ci sono quantificatori che la legano.

[2]Falsa, per esempio se la interpretiamo nell'insieme degli essere umani vivi.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

L'insieme $var(t)$ *delle* variabili di un termine t *è definito come segue:*

i. $var(t) = \{t\}$, *se* t *è una variabile;*

ii. $var(t) = \emptyset$, *se* t *è una costante;*

iii. $var(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} var(t_i)$

Un termine si dice chiuso – *o anche* ground – *se non contiene variabili.*

L'insieme delle variabili in una formula atomica $R(t_1, \ldots, t_n)$ *è:*

$$var(R(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} var(t_i)$$

Un atomo si dice chiuso – *o anche* ground – *se non contiene variabili.*

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

Nella formula $\forall x A$, *il* campo d'azione *del quantificatore* $\forall x$ *è* A. *Nella formula* $\exists x A$, *il* campo d'azione *del quantificatore* $\exists x$ *è* A.

Un quantificatore $\forall x$, $\exists x$ "lega" le (eventuali) occorrenze libere della *variabile quantificata* x nel campo d'azione A. Si noti che la nozione di campo di azione è coerente con la convenzione che stabilisce le precedenze dei connettivi.

ESEMPIO: Campo d'azione dei quantificatori

La formula:

$$\forall x \forall y \neg A \land \forall z B \to \exists u C$$

si legge:

$$((\forall x (\forall y (\neg A))) \land (\forall z B)) \to (\exists u C).$$

Quindi, C è il campo d'azione di $\exists u$; B è il campo d'azione di $\forall z$; $\neg A$ è il campo d'azione di $\forall y$; $\forall y(\neg A)$ è il campo d'azione di $\forall x$.

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

L'occorrenza libera di una variabile in una formula è definita induttivamente sulla struttura della formula, come segue:

1. *Se A è un atomo, x occorre libera in A se x occorre in A;*
2. *x occorre libera in $(\neg A)$ se x occorre libera in A;*
3. *x occorre libera in $(A \circ B)$ se x occorre libera in A o x occorre libera in B;*
4. *x occorre libera in $\forall z A$ (rispettivamente $\exists z A$) se x occorre libera in A e $x \neq z$.*

Si noti quindi che l'insieme delle variabili libere di $\forall x A$ e di $\exists x A$ è:

$$var(\forall x A) = var(\exists x A) = var(A) - \{x\}.$$

Un'occorrenza di una variabile x, in una formula, si dice vincolata *o* legata *se non è libera.*

Quindi, le occorrenze legate di una variabile x in una formula $\forall x A$ sono quella dopo il quantificatore $\forall$ e le eventuali occorrenze libere di x nella formula A; queste ultime sono dette *occorrenze proprie*.

Un enunciato *– detto altrimenti* formula chiusa *– è una formula senza occorrenze libere di variabili.*

SINTASSI DELLA LOGICA PREDICATIVA

ESEMPIO: Occorrenze libere e legate

Consideriamo la formula

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x, y)).$$

La variabile x è nel campo di azione del quantificatore $\forall x$ ed è legata da $\forall x$, quindi ha due occorrenze (proprie) legate, mentre la variabile y ha una occorrenza libera.

ESEMPIO: Occorrenze libere e legate

Nella formula $\forall x(\exists y P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$ la variabile x ha due occorrenze legate, mentre la variabile y ha una occorrenza libera (quella in $Q(x, y)$) e una legata. Nella formula $\forall x(Q(x) \wedge \exists y R(y, x))$ la variabile x ha due occorrenze legate dal quantificatore $\forall x$, mentre la variabile y ha una occorrenza legata dal quantificatore $\exists y$. Nella formula $\forall x(Q(x) \wedge \exists x R(x, x))$ la variabile x ha tre occorrenze legate, la prima, quella in $Q(x)$ dal quantificatore $\forall x$, le altre dal quantificatore $\exists x$.

LOGICA 3

END