Logica predicativa

Docenti (Turno A-L)

Alex Graudenzi: alex.graudenzi@unimib.it

Stefania Bandini: stefania.bandini@unimib.it

Fondamenti dell'Informatica

Corso di Laurea Triennale in Informatica - 1° anno

Anno Accademico 2023/2024

Dip. di Informatica, Sistemistica e Comunicazione | Univ. di Milano-Bicocca

elearning: https://elearning.unimib.it/course/view.php?id=49487

Limitazioni della logica proposizionale

La logica proposizionale parla di **proprietà generali**

ma è incapace di parlare di oggetti specifici e delle loro proprietà

Quindi, è anche impossibile sviluppare argomenti logici

che dipendono di questi oggetti

Per esempio, non possiamo fare affermazioni esistenziali

Esempio

Uno zio ha un fratello che è un genitore

Esistono mammiferi carnivori e

tutti i carnivori sono predatori

La relazione “essere avo di” è transitiva

Siccome Luca è più alto di Andrea,

Andrea non può essere il più alto della classe

Linguaggi predicativi

Vogliamo un linguaggio logico capace di:

- riferirsi a oggetti, concetti, proprietà e relazioni; e
- fare affermazioni particolari o universali

  potenzialmente con pronomi e aggettivi *indefiniti*

Per fare ciò, utilizziamo:

- costanti,
- variabili,
- quantificatori

Linguaggi predicativi II

Introdurremo una **logica di primo ordine** (*FOL*)

dove le variabili si riferiscono a **individui** (oggetti)

Come **quantificatori** useremo

- esiste (∃) — un, alcuni, alcune
- per ogni (∀) — ogni, tutti, tutte

che fanno riferimento alle variabili

Differenza fra predicati vs. funzioni

Nella logica predicativa:

I PREDICATI ritornano un **valore di verità**:

Sì o no, vero o falso

li indicheremo con prima lettera Maiuscola

Le FUNZIONI ritornano **oggetti**

le indicheremo con prima lettera minuscola (così come le costanti)

Esempio:

predicato: Genitore_di(x,y) (forma prefissa)

Genitore_di(paolo,michela) = VERO $\leftrightarrow$ *se Paolo è genitore di Michela*

funzione: matricola_di(x)

matricola_di(alex) = 20203

Relazione fra predicati e funzioni

Predicato (binario) Data_di_nascita(x,y)

restituisce un valore di verità se la data di nascita di x è y

Funzione (unaria) data_di_nascita(x)

restituisce un oggetto, un nome

Possiamo mettere in relazione i predicati con le funzioni attraverso il predicato uguaglianza =

$\forall x. \forall y\ (Data\_di\_nascita(x,y) \leftrightarrow data\_di\_nascita(x) = y)$

$\forall x. \forall y\ (Data\_di\_nascita(x,y) \leftrightarrow =(data\_di\_nascita(x), y))$

Simboli

Il linguaggio della logica dei predicati è definito da **insiemi** potenzialmente infiniti di:

- variabili $\mathcal{V}$ = x_1, x_2, . . . , y_1, . . .
- simboli di costanti $\mathcal{C}$ = a_1, a_2, . . . , b, . . .,
- simboli predicativi $\mathcal{P}$ = P_1, Q, . . . associati ad un'arietà *(predicati unari, binari, ecc.)*

    su quanti oggetti stiamo predicando

- simboli funzionali $\mathcal{F}$ = f_1, g, . . . associati ad un'arietà *(funzioni unarie, binarie, ecc.)*

    a quanti argomenti applichiamo tale funzione

Questi insiemi formano la **segnatura del linguaggio $\mathcal{L}$**

Le formule sono costruite tramite:

- i **costruttori logici** ($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$), e
- i **quantificatori** ($\exists$, $\forall$)

Alcune proprietà

variabili $\boldsymbol{\mathcal{V}}$
costanti $\boldsymbol{\mathcal{C}}$
simboli predicativi $\boldsymbol{\mathcal{P}}$
simboli funzionali $\boldsymbol{\mathcal{F}}$

Gli insiemi $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{F}}$ possono essere vuoti

$\boldsymbol{\mathcal{V}}$ e $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ non sono mai vuoti

$\boldsymbol{\mathcal{V}}$ è sempre infinito (e numerabile)

Il **predicato di uguaglianza =** è in $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ (l'identità)

Le costanti sono un tipo particolare di funzioni

funzioni nullarie o zero-aria, che non hanno argomenti

Arietà

variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$

I simboli predicativi $\mathcal{P}$ e i simboli funzionali $\mathcal{F}$ sono associati ad **un'arietà**

cioè il numero di parametri oppure oggetti che manipolano

- I predicati $\mathcal{P}$ ritornano sì o no
- Le funzioni $\mathcal{F}$ ritornano **oggetti**

L'arietà si rappresenta con:

- un apice (P^n: P è un predicato n-ario) oppure
- un quoziente (P/n)

Es. $Siciliano^1$ = Siciliano/1 = Siciliano(x) → predicato unario

$PresidenteDi^4$ = PresidenteDi/4 = PresidenteDi(x,y,n,t) → predicato 4-ario

Esempio

variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$

Il predicato di uguaglianza **=** è binario

$=^2$ (arietà 2)

è VERO se i due termini sono uguali

Il predicato **Genitore_di** è binario

Genitore_di(anna,bob), genitore_di^2 (arietà 2)

è VERO se anna è genitore di bob

La funzione **matricola_di** è unaria

ritorna la matricola di uno studente

Repeat: i predicati ritornano valore di verità, le funzioni ritornano oggetti

Quantificazione

I <u>QUANTIFICATORI</u> si riferiscono a

- un oggetto potenzialmente sconosciuto (∃) → quantificatore esistenziale
  - ESISTE ALMENO UNO/A…
- a ogni oggetto di un dominio (∀) → quantificatore universale
  - PER TUTTI/E, OGNI…

Quantificazione esistenziale ∃

«Qualche messicano vive in Italia»

- 2 predicati: «essere messicano» unario, «vivere in» binario
- 1 costante: Italia
- $\exists x\ (\mathrm{Messicano}(x) \land \mathrm{ViveIn}(x,\mathrm{Ita}))$

«Esiste una stella più grande del Sole»

- 2 predicati: «essere una stella» unario, «essere più grande di» binario
- 1 costante: Sole
- $\exists x\ (\mathrm{Stella}(x) \land \mathrm{PiùGrandeDi}(x,\mathrm{Sole}))$

«Ci sono pianeti abitati»

«Lorenzo viaggia con qualcuno»

Quantificazione universale ∀

«Tutti i pianeti orbitano intorno al Sole»

- 2 predicati: «essere un pianeta» unario, «orbitare intorno a» binario
- 1 costante: Sole
- $\forall x.\ (\mathrm{Pianeta}(x) \rightarrow \mathrm{OrbitaIntornoA}(x,\mathrm{Sole}))$ *(non è un ∧, perché?)*

«Non esistono creature aliene»

Tradotto: *«tutte le creature NON sono aliene»*

$$\forall x.\ (\mathrm{Creatura}(x) \rightarrow \neg \mathrm{Aliena}(x))$$

«Tutti gli studenti hanno una matricola»

«Ogni animale è mortale»

Attenzione!

Nel nostro sistema logico (linguaggio) **NON** useremo:

- $\nexists$ (che equivale a $!\exists$)
- $\exists!$

Perché possiamo costruirli con i simboli a disposizione

Predicati: forma prefissa vs. infissa

I predicati si possono scrivere in modi diversi:

- **Forma prefissa**
  - *OrbitaIntornoA*(x, Sole)

- **Forma infissa**
  - x *OrbitaIntornoA* Sole

In alcuni casi può essere utile la notazione infissa, per esempio con l'uguaglianza

=(x, Sole) è equivalente a x = Sole

Il linguaggio della teoria dei numeri (naturali)

variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$

Simbolo di costante $\mathcal{C}$: 0

Simboli di predicato $\mathcal{P}$:

- ≤/2 (minore o uguale) VERO o FALSO
  - ≤(x,y) –> x ≤ y
- =/2 (uguale) VERO o FALSO
  - =(x,y) –> x = y

Simboli di funzione $\mathcal{F}$:

- s/1 (successivo)

  s(0)
- +/2 (somma)

  +(s(0),s(0)) = s(0)+s(0)
- x/2 (prodotto)

  x(s(0),s(0)) = s(0) x s(0)

Espressioni formali

Questi ingredienti insieme producono ***espressioni formali***

che ci aiutano a rappresentare la conoscenza

- *«esiste un numero maggiore di 0»*

  $\exists x.(0 \leq x \land \neg(0 = x))$ in forma prefissa $\exists x.(\leq(0,x) \land \neg=(0,x)$

- *«il successore di qualunque numero naturale è maggiore di 0»*

  $\forall x.(0 \leq s(x) \land \neg(0 = s(x)))$

- *«la somma di due numeri è sempre maggiore o uguale agli addendi»*

  $\forall x.\forall y.(x \leq x + y \land y \leq x + y)$ in forma prefissa $\forall x.\forall y.(\leq(x,+(x,y)) \land \leq(y,+(x,y))$

Altri esempi

«La somma è commutativa»

$\forall x.\ \forall y.(x + y = y + x)$ in forma prefissa: $\forall x.\ \forall y.(=(+(x,y),+(y,x))$

«La somma di un numero e il successore di un altro è uguale al successore della somma dei due numeri»

$$\forall x.\ \forall y.(x + s(y) = s(x + y))$$

«Ogni numero diverso da 0 è il successore di qualche numero»

$$\forall x.(\neg(x = 0) \rightarrow \exists y.(x = s(y)))$$

«Non esiste un numero più grande di tutti gli altri»

FORMULE BEN FORMATE

Formalizzazione

Ora introduciamo formalmente **l'insieme delle** formule ben formate (fbf) della **logica dei predicati**

Ci serve introdurre prima:

- i **termini**
- gli **atomi**

Termini

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term

Data una segnatura $\mathcal{L}$:

l'insieme dei TERMINI di $\mathcal{L}$ (*Term*) è definito ricorsivamente da:

- ogni simbolo di **costante** e ogni **variabile** è un termine

  $\mathcal{C} \cup \mathcal{V} \subseteq \text{Term}$

- se $t_1, \ldots, t_n \in \text{Term}$ e f è un simbolo di funzione n-ario ($f \in \mathcal{F}$)

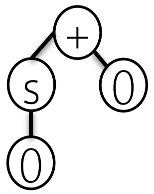
  allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine (***termine funzionale***)

Esempio:

- dati: f = matricola_di(funzione unaria), x variabile e Alex costante

  matricola_di(x) e matricola_di(Alex) sono termini funzionali

- +(s(0),0) è un termine



I termini si riferiscono sempre a **OGGETTI** (**NON** c'è un valore di verità)

NON sono fbf!

Atomi

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom

L'insieme **Atom** degli <u>ATOMI</u> (o *formula atomiche*) è definito ricorsivamente da:

- $\top$ e $\bot$ sono atomi *(1 e 0 dell'algebra di Boole, tautologie e contraddizioni)*
- **se** $t_1, \ldots, t_n \in$ **Term** e P $\in \mathcal{P}$ un simbolo di **predicato** n-ario

  allora $P(t_1, \ldots, t_n)$ è un atomo

Esempio:

- Dati: Termini t1: +(s(0),0), t2: s(s(0)), e Predicato P **'='** uguaglianza
  - **=**(+(s(0),0),s(s(0))) → **questo è un atomo,** perché può essere vero o falso *(in questo caso?)*

    in forma infissa (s(0)+0 = s(s(0))

Gli atomi – che sono fbf – parlano di **PROPRIETA'**

→ possono essere VERI o FALSI

Quindi, si possono combinare in formule complesse con attenzione alle variabili

Formule

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom

Le FORMULE (fbf) sulla segnatura $\mathcal{L}$ sono definite da:

- ogni atomo a ∈ **Atom** è una formula (*formula atomica*)
- se φ è una formula

  allora anche $\neg\varphi$ lo è *(operatore unario)*
- se φ, ψ sono formule,

  allora lo sono anche $\varphi \land \psi$, $\varphi \lor \psi$, $\varphi \rightarrow \psi$, $\varphi \leftrightarrow \psi$ *(operatori binari)*
- se φ è una formula e x è una variabile x ∈ $\mathcal{V}$ allora

  $\exists x.\varphi$ e $\forall x.\varphi$ sono formule *(quantificatori)*

Le fbf sono atomi o combinazioni di atomi

Useremo lettere greche minuscole per denotare **formule** ($\varphi, \psi, \gamma, \ldots$)

maiuscole per denotare **insiemi di formule** ($\Gamma, \Lambda, \Xi, \ldots$)

Esempi formule

- $\exists x.(P(x))$ è una formula
- $\exists y.(P(x))$ è una formula (indipendentemente dal senso)
- $\exists x.(P(barack.obama))$ è una formula

Sintassi esempi

«Qualunque oggetto appartiene ad un insieme di oggetti»

$\forall x.\exists y.(x \in y)$

«Se due insiemi di oggetti hanno gli stessi elementi, allora sono uguali»

$\forall y.\ \forall z.(\forall x.(x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow \mathbf{y = z})$

«Due più due uguale a quattro»

$(s(s(0))+(s(s(0)) = s(s(s(s(0))))$ in forma prefissa $=(t1,t2)$

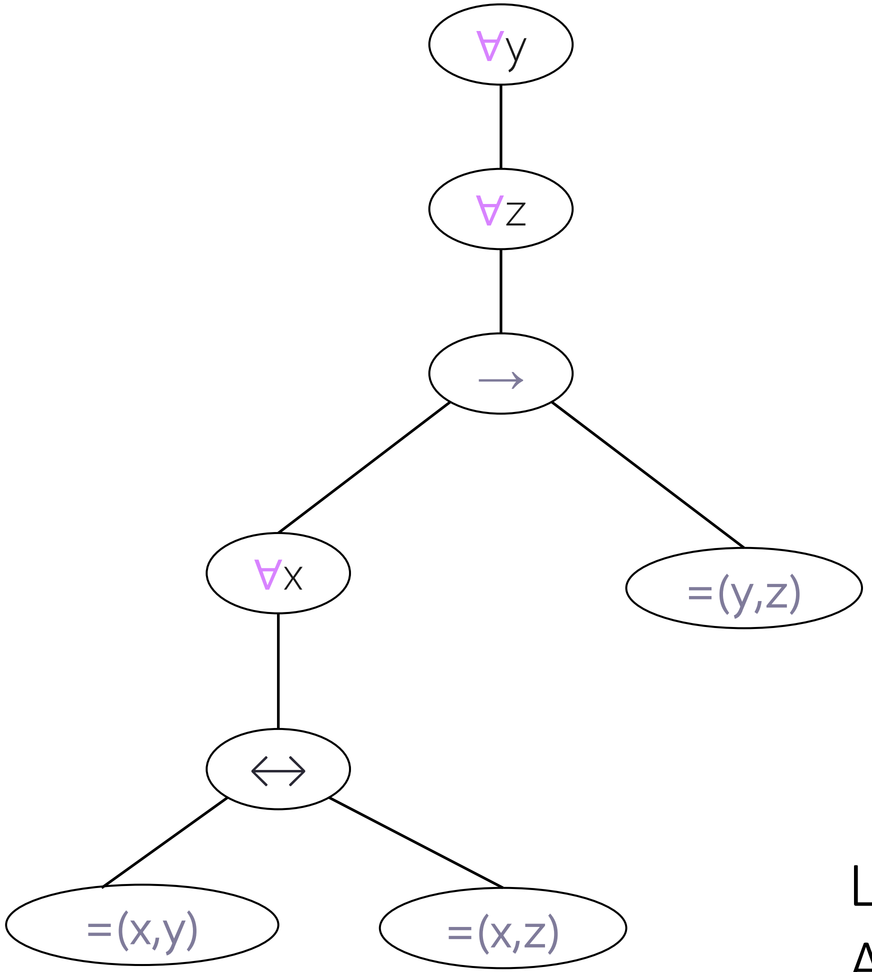
È una formula atomica

Albero sintattico

«Se due insiemi di oggetti hanno gli stessi elementi, allora sono uguali»

$\forall y.\forall z.(\forall x.(x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow y = z)$

- connettivo principale $\forall y$
  - $\forall z.(\forall x.(x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow y = z)$
    - connettivo principale $\forall z$
      - $\forall x.(x \in y \leftrightarrow x \in z) \rightarrow y = z$
        - connettivo principale $\rightarrow$
          - …



Le foglie sono ATOMI

Precedenza tra gli operatori

Consideriamo la **precedenza** tra gli operatori stabilita da

$$\forall,\ \exists,\ \neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow$$

Gli operatori, come nel caso proposizionale, associano a **DESTRA**

Per brevità, possiamo accumulare sequenze di quantificatori uguali in uno solo

$\exists x.\ \exists y. \rightsquigarrow \exists xy.$

$\forall x.\ \forall y. \rightsquigarrow \forall xy.$

Esempio

$\forall x.P(x) \rightarrow \exists yz.Q(y, z) \wedge \neg\forall x.R(x)$ descrive la formula

$$(\forall x.P(x)) \rightarrow \Big((\exists y.(\exists z.Q(y, z))) \wedge (\neg(\forall x.R(x)))\Big)$$

Recap

Termini *(oggetti):*

Costanti

Variabili

Applicazione di **Funzioni** su **Costanti** e/o **Variabili**

Atomi *(valore di verità)*

$\top$ e $\bot$

Applicazione di **Predicati** a **Termini**

Formule ben formate *(valore di verità)*

Atomi combinati attraverso operatori $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e quantificatori $\forall$, $\exists$

Marinai

«Tutti i marinai amano una ragazza»

$\forall x.\exists y.(Marinaio(x) \rightarrow (Ama(x,y) \land Ragazza(y))$

«Per ciascun marinaio, esiste una ragazza che lui ama, ognuno la propria»

$\exists y.\forall x.(Marinaio(x) \rightarrow (Ama(x,y) \land Ragazza(y))$

«Esiste una ragazza che è amata da tutti i marinai»

Attenzione all'interpretazione del linguaggio naturale!

Campo d'azione

Il <u>CAMPO D'AZIONE</u>:

- del quantificatore $\forall x$ nella formula $\forall x.\varphi$ è φ
- del quantificatore $\exists x$ nella formula $\exists x.\varphi$ è φ

Esempio

$\forall x.(\forall y.\ \neg P(x, y) \rightarrow \exists z.Q(z, w)) \vee \exists w.Q(x, w)$

- Il campo d'azione di $\exists w$ è $Q(x, w)$
- Il campo d'azione di $\forall y$ è $\neg P(x, y)$
- Il campo d'azione di $\forall x$ è $(\forall y.\ \neg P(x, y) \rightarrow \exists z.Q(z, w))$ occhio alle parentesi

Variabili LIBERE

Una formula può avere variabili SENZA quantificatori:

Es. $Alto(x) \wedge Rosso(x)$

Cosa vuol dire questa formula ben formata?

La variabile x è <u>LIBERA</u> (*non è sotto lo scopo di qualche quantificatore*)

NON possiamo assegnare un VALORE DI VERITA' alla formula

Variabili e quantificatori II

Considerate invece la formula

$$\exists x.(Alto(x) \land Rosso(x))$$

che esprime che *«esiste un oggetto alto e rosso»*

Qui, la variabile x è <u>QUANTIFICATA</u> (<u>LEGATA</u> o <u>VINCOLATA</u>)

e la formula può acquisire un **valore di verità**

vs. variabili <u>LIBERE</u>

Variabili di un termine e di un atomo

L'insieme var(t) delle <u>VARIABILI DI UN TERMINE</u> t è definito da:

- var(t) = {t} se t ∈ $\mathcal{V}$ (termine stesso se t è una variabile)
- var(t) = ∅ se t ∈ $\mathcal{C}$ (0 variabili se t è una costante)
- $var(f(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} var(ti)$ (unione delle variabili della funzione)
  - Es. var(+(x,s(0))) = {x} *(s(0) termine che si applica a costante (0), x è una variabile)*

    var(+(x,s(y)))= {x,y} *(x e y sono variabili)*

Un termine t è <u>CHIUSO</u> se var(t) = ∅ (se non contiene variabili)

Le <u>VARIABILI DI UN ATOMO</u> sono:

- var(⊤) = var(⊥) = ∅;
- $var(P(t_1, \ldots, t_n)) = \bigcup_{i=1}^{n} var(ti)$

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom

Occorrenza libera

Si dice che una variabile x <u>occorre libera</u> in una formula ϕ (oppure che è una variabile libera di ϕ)

se c'è almeno un'occorrenza libera di x in ϕ

<u>L'OCCORRENZA LIBERA</u> di x in una formula ϕ è definita come segue.

- Se ϕ è un atomo, ogni occorrenza di x in ϕ è libera (non ci sono quantificatori o operatori)
- Se ϕ è della forma ¬ψ allora le occorrenze libere di x sono quelle di ψ
- Se ϕ è della forma ψ ∧ (oppure ∨, →, ↔) χ allora le occorrenze libere di x,

  sono quelle di x in ψ e quelle di x in χ
- Se ϕ è della forma ∀y.ψ oppure ∃z. ψ, se x è diverso da y, allora le occorrenze libere di x

  sono le occorrenze libere di x in ψ
- Se ϕ è della forma ∀x.ψ oppure ∃x. ψ allora tutte le occorrenze di x sono vincolate

Variabili legate

I quantificatori ∃x e ∀x **legano** le occorrenze libere di x nel proprio campo d'azione

Un'occorrenza di una variabile x è **legata** se non è libera

Le occorrenze legate sono esattamente quelle nel campo d'azione di un quantificatore

Esempio

Nella formula

$$\forall x.(P(x) \rightarrow Q(x, y))$$

- la variabile x ha due occorrenze legate da ∀, non è mai libera
- la variabile y ha un’occorrenza libera, non è mai quantificata

Esempio II

Nella formula

$$\forall x.(\exists y.P(x, y) \rightarrow Q(x, y))$$

il campo di azione del quantificatore $\exists y$ è $P(x, y)$

non include $Q(x, y)$!

- la variabile x ha due occorrenze legate
- la variabile y ha una occorrenza libera e una legata

Formule chiuse ed enunciati

Una formula ϕ è <u>CHIUSA</u> **sse**

nessuna variabile occorre libera in ϕ

Le formule CHIUSE si chiamano anche <u>ENUNCIATI</u>

La semantica è propriamente definita unicamente per formule chiuse

Recap sintassi logica predicativa (I)

Termini *(oggetti):*

Costanti *bob, anna, sole, ℕ, …*

Variabili *x,y,z…*

Applicazione di **Funzioni** su **Costanti** e/o **Variabili** *anni_di(bob), anni_di(x)…*

Atomi *(valore di verità)*

$\top$ e $\bot$

Applicazione di **Predicati** a **Termini** *Maggiore_o_uguale_di(anni_di(x),10))*

Formule ben formate *(valore di verità)*

Atomi combinati attraverso operatori $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e quantificatori $\forall$, $\exists$

∃.x. ∀y.(Maggiore_o_uguale_di(anni_di(x),anni_di(y)) ∧ Maggiore_o_uguale_di(200,anni_di(x)))

Recap sintassi logica predicativa (II)

Variabili

- **Libere** (se non sono sotto l’azione di un quantificatore)
- **Legate** (se sono quantificate)

Formule

- **Aperte** (con variabili libere)
- **Chiuse** o **Enunciati** (senza variabili libere)

SEMANTICA DELLA LOGICA PREDICATIVA

Semantica della logica dei predicati

Finora abbiamo soltanto introdotto le espressioni permesse nella logica dei predicati

Ma cosa ***significano***?

“semantica”

Ogni formula **chiusa** riceve un valore di verità che dipende dagli elementi che la compongono

Perché non quelle aperte?

Legame con la logica proposizionale

Nella **logica proposizionale** si assegna un valore di verità ad ogni variabile proposizionale

- Un'<u>ASSEGNAZIONE BOOLEANA</u> è la **totale** $\mathcal{V}: \mathcal{A} \to \{0, 1\}$ che determina quali <u>**proposizioni atomiche**</u> sono VERE e quali FALSE

  Es: $\mathcal{A} = \{A, B, C\}$, $\mathcal{V}_1(A) = 1$, $\mathcal{V}_1(B) = 1$, $\mathcal{V}_1(C) = 0$

- Le assegnazioni determinano il valore delle <u>VALUTAZIONI BOOLEANE</u> $I_v : \mathcal{F} \to \{0, 1\}$ sulle fbf:

  Es: $I_{\mathcal{V}1}(\neg A \to (C \leftrightarrow \neg B)) = 1$, $I_{\mathcal{V}1}(A \vee C) = 1$

Vogliamo estendere questa idea alla **logica dei predicati**

- assegnare un valore di verità a ogni atomo
- propagarlo a formule complesse

Dobbiamo specificare anche gli oggetti di interesse

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom

Atomi chiusi e aperti

Gli **atomi chiusi** ricevono un valore di verità (VERO o FALSO)

- Professore(anna) (predicato unario: Professore(x))

  Dipende da come interpretiamo anna e l'insieme (relazione unaria) Professore

- Amico(anna,bob) (predicato binario: Amico(x,y))

  Dipende da come interpretiamo anna e la relazione binaria Amico

- Pari(matricola(bob)) (predicato unario: Pari(x))

  Dipende da come interpretiamo bob, la funzione matricola, e la relazione unaria Pari

  NB: *La funzione unaria matricola è applicata alla costante bob*

Inoltre, come gestire l'uso di **variabili** negli **atomi aperti**?

- Professore(x)
- Amico(y,bob)
- Pari(matricola(x))

INTERPRETAZIONI

Interpretazione (o struttura del primo ordine)

Un'INTERPRETAZIONE (o **struttura del primo ordine**) è una **coppia** $\boldsymbol{I} = (\Delta^{\boldsymbol{I}}, \cdot^{\boldsymbol{I}})$ tale che:

- $\Delta^{\boldsymbol{I}}$ è un insieme **non vuoto** chiamato il DOMINIO di $\boldsymbol{I}$
- $\cdot^{\boldsymbol{I}}$ è una FUNZIONE DI INTERPRETAZIONE che associa:
  - a ogni $c \in \mathcal{C}$ un **elemento** $c^{\boldsymbol{I}} \in \Delta^{\boldsymbol{I}}$ *(restituisce un elemento dominio)*

    es. Bob, Anna saranno associati ad elementi del dominio
  - a ogni $f/n \in \mathcal{F}$ una **funzione** n-aria $f^{\boldsymbol{I}}: (\Delta^{\boldsymbol{I}})^n \rightarrow \Delta^{\boldsymbol{I}}$ *(restituisce una funzione su $\Delta^{\boldsymbol{I}}$)*

    es. matricola(bob) sarà associato ad una funzione che restituisce un elemento del dominio
  - a ogni $P/n \in \mathcal{P}$ una **relazione** n-aria $P^{\boldsymbol{I}} \subseteq (\Delta^{\boldsymbol{I}})^n$ *(restituisce una relazione su $\Delta^{\boldsymbol{I}}$)*

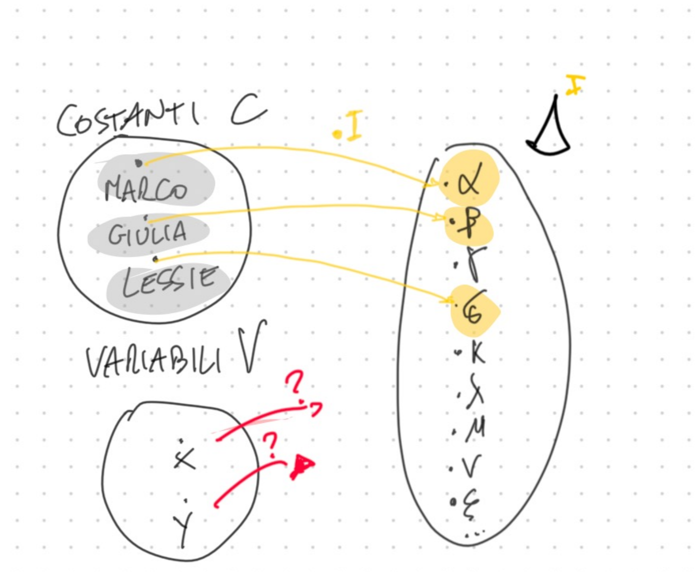
    es. se è un predicato n-ario sarà associato ad una relazione n-aria sul dominio, se unario ad un

    sottoinsieme del dominio

Notate la differenza fra i **simboli** (che non hanno significato di per sé)
e la loro **interpretazione** (che si riflette nel dominio)

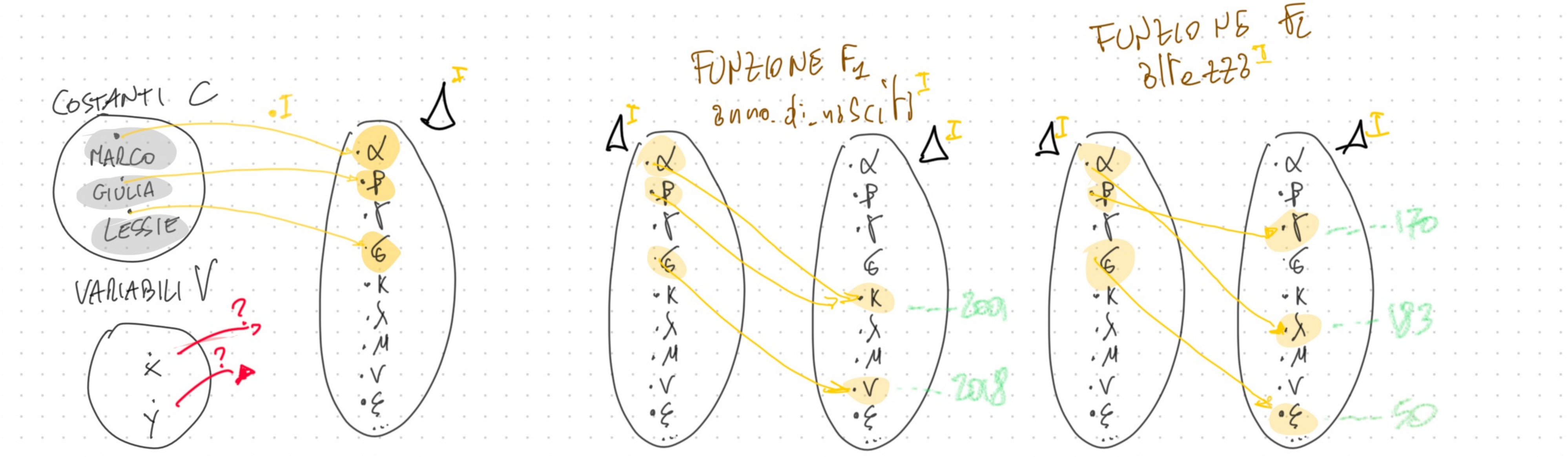
segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom

$\mathcal{V}$={x,y} , $\mathcal{C}$={marco, giulia, lessie} , $\mathcal{P}$={Maggiore_di{a,b},Essere_cane{a}}, $\mathcal{F}$={anno_di_nascita{a}, altezza{a}}
Δ^{I}={α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ σ…}

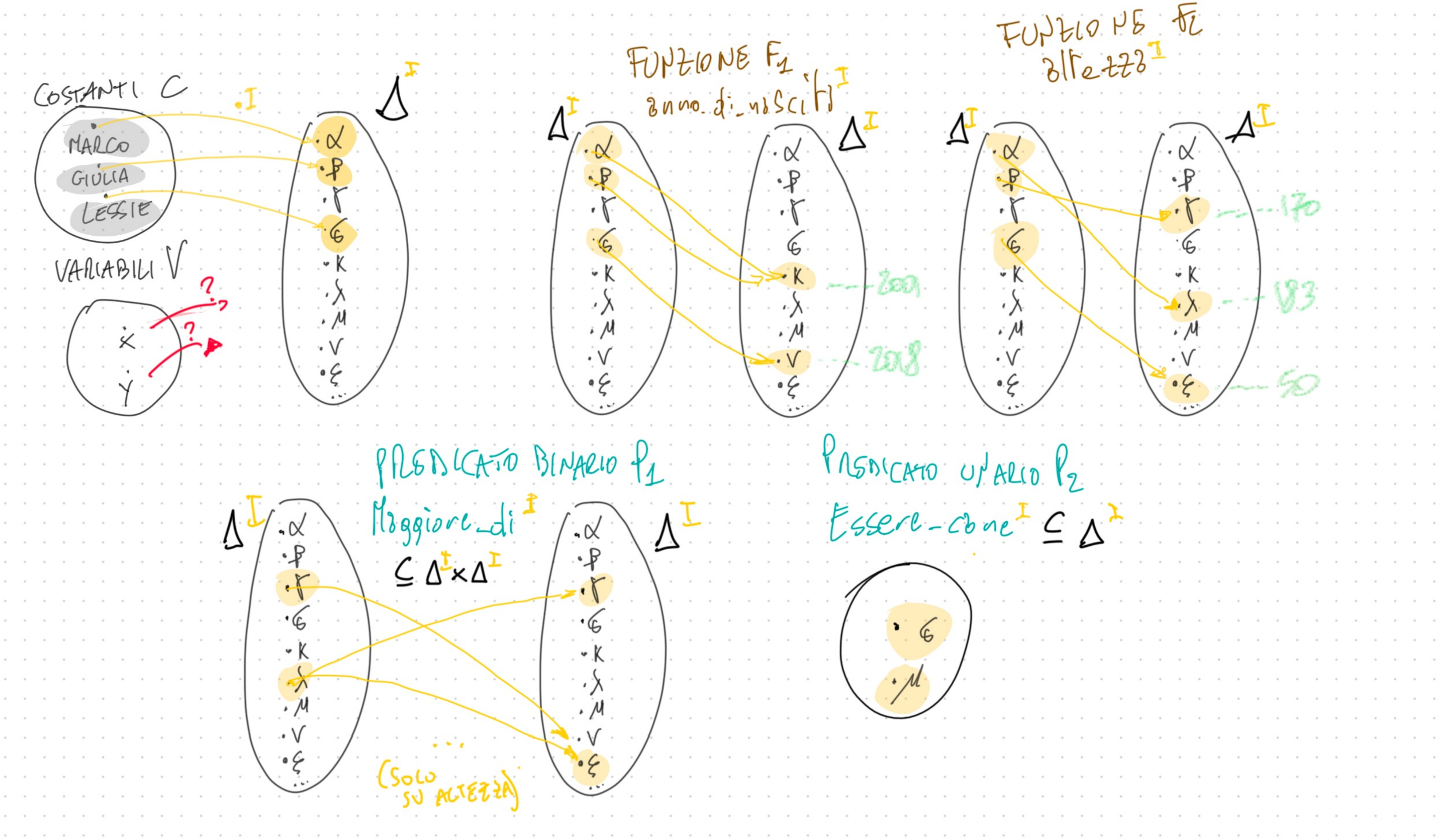


$\mathcal{V}$={x,y} , $\mathcal{C}$={marco, giulia, lessie} , $\mathcal{P}$={Maggiore_di{a,b},Essere_cane{a}}, $\mathcal{F}$={anno_di_nascita{a}, altezza{a}}

Δ^{I}={α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ σ…}



$\mathcal{V}$={x,y} , $\mathcal{C}$={marco, giulia, lessie} , $\mathcal{P}$={Maggiore_di{a,b},Essere_cane{a}}, $\mathcal{F}$={anno_di_nascita{a}, altezza{a}}
Δ^{I}={α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ σ…}



Perché del primo ordine?

"*del primo ordine*" indica che c'è un insieme di riferimento (il dominio) e che i quantificatori possano riguardare solo gli elementi di tale insieme e NON i sottoinsiemi.

Ad esempio è consentito dire:

"per tutti gli x elementi dell'insieme vale P(x)"

ma non si può dire

"per tutti i sottoinsiemi C vale P(C)"

Esempio

$\mathcal{C}$ = {anna, bob},
$\mathcal{P}$ = {Professore(x), Pari(x), Amico(x,y)}
$\mathcal{F}$ = {matricola(x)}
$\mathcal{V}$ = {}

Considerate l'interpretazione $\boldsymbol{I} = (\Delta^{\boldsymbol{I}}, \cdot^{\boldsymbol{I}})$ con:

[dominio] $\Delta^{\boldsymbol{I}} := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$;

[funzione di interpretazione]

[costante] anna $^{\boldsymbol{I}} := \alpha$, *(al simbolo anna associo l'elemento $\alpha \in \Delta^{\boldsymbol{I}}$)*

[costante] bob$^{\boldsymbol{I}} := \beta$; *(al simbolo bob associo l'elemento $b \in \Delta^{\boldsymbol{I}}$)*

[funzione] matricola$^{\boldsymbol{I}} := \{\langle\beta, \delta\rangle\} \equiv f(\beta) = \delta$ *(ritorna una funzione, che associa a β l'elemento δ)*

[predicato unario] Professore$^{\boldsymbol{I}} := \{\gamma\}$; *(restituisce un sottoinsieme di $\Delta^{\boldsymbol{I}}$)*

[predicato unario] Pari $^{\boldsymbol{I}} := \{\delta\}$; *(restituisce un sottoinsieme di $\Delta^{\boldsymbol{I}}$)*

[predicato binario] Amico $^{\boldsymbol{I}} := \{\langle\alpha, \beta\rangle, \langle\beta, \gamma\rangle, \langle\gamma, \beta\rangle\}$ *(restituisce relazione binaria sul $\Delta^{\boldsymbol{I}}$)*

Come posso interpretare delle formule atomiche CHIUSE? Determinare se sono vere o false?

Professore(anna) Amico(anna,bob) Pari(matricola(bob))

Come posso interpretare le formule atomiche? In questo caso chiuse.

$\mathcal{C}$ = {anna, bob},
$\mathcal{P}$ = {Professore(x), Pari(x), Amico(x,y)}
$\mathcal{F}$ = {matricola(x)}
$\mathcal{V}$ = {}

$\Delta^{\boldsymbol{I}}$:= {α, β, γ, δ}
anna$^{\boldsymbol{I}}$:= α,
bob$^{\boldsymbol{I}}$:= β;
matricola$^{\boldsymbol{I}}$:= f(β)=δ;
Professore$^{\boldsymbol{I}}$:= {γ};
Pari$^{\boldsymbol{I}}$:= {δ};
Amico$^{\boldsymbol{I}}$:= {⟨α, β⟩ , ⟨β, γ⟩ , ⟨γ, β⟩}

Professore(anna)

Sarà vera (in questa interpretazione $\boldsymbol{I}$) se l'elemento che associamo ad anna cioè α è **contenuto nell'insieme** che interpretiamo come Professore cioè {γ}

FALSO

Amico(anna,bob)

Sarà vera se la coppia dei simboli che associamo ad anna,bob, cioè α, β è inclusa nell'insieme di coppie ordinate con cui interpretiamo Amico, cioè {⟨α, β⟩ , ⟨β, γ⟩ , ⟨γ, β⟩}.

VERO

Pari(matricola(bob))

La funzione matricola associa β a δ. Ora occorre controllare se δ appartiene all'insieme con cui interpretiamo Pari cioè {δ}

VERO

Formule aperte

Cosa succede se abbiamo **formule aperte**

che contengono cioè **variabili libere**?

Dobbiamo assegnare una valore alle variabili libere

ASSEGNAZIONI

Assegnazione

*Cosa succede quando abbiamo delle **variabili**?*

Data un'interpretazione $\boldsymbol{I} = (\Delta^{\boldsymbol{I}}, \cdot^{\boldsymbol{I}})$,

un'ASSEGNAZIONE (in $\boldsymbol{I}$) è una funzione **totale** $\eta: \mathcal{V} \rightarrow \Delta^{\boldsymbol{I}}$

L'assegnazione η associa

un **elemento del dominio** $\Delta^{\boldsymbol{I}}$ alle variabili in $\mathcal{V}$

Esempio:

$\mathcal{C}$ = {anna, bob}, $\mathcal{P}$ = {Professore(x), Pari(x), Amico(x,y)}, $\mathcal{F}$ = {matricola(x)}

$\mathcal{V}$ = {z}, $\boldsymbol{I} = (\Delta^{\boldsymbol{I}}, \cdot^{\boldsymbol{I}})$, $\Delta^{\boldsymbol{I}} := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ … *(non riportiamo l'interpretazione)*

Amico(z,bob)

$\eta: \mathcal{V} \rightarrow \Delta^{\boldsymbol{I}}$, $\eta(z) = \beta$ *(con l'assegnazione associo ad una variabile un elemento del dominio)*

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom
dominio $\boldsymbol{\Delta}$
interpretazione $\boldsymbol{I}$
assegnazione η

Assegnazione di termini (estensione di η)

Data una interpretazione $\boldsymbol{I}$ e un'assegnazione η: $\mathcal{V} \rightarrow \Delta^{\boldsymbol{I}}$

l'assegnazione sui termini $\bar{\eta}$ è definita ricorsivamente da:

- per $x \in \mathcal{V}$, $\bar{\eta}(x) = \eta(x)$ — variabili come in η
- per $c \in \mathcal{C}$, $\bar{\eta}(c) = c^{\boldsymbol{I}}$ — costanti come in $\boldsymbol{I}$
- se $f/n \in \mathcal{F}$ e $t_1, \ldots, t_n$ sono **termini**, allora

$$\bar{\eta}(f(t_1, \ldots, t_n)) = f^{\boldsymbol{I}}(\bar{\eta}(t_1), \ldots, \bar{\eta}(t_n))$$

In pratica, stiamo sostituendo ogni variabile x nel termine con il valore stabilito dall'assegnazione η(x)

Per abbreviare, scriviamo $t^{\boldsymbol{I},\eta}$ invece di $\bar{\eta}(t)$

L'interpretazione dei termini dipende da due cose:

1. Dall'interpretazione $\boldsymbol{I}$ per le **costanti** e i **simboli funzionali**
2. Dall'assegnazione η per le **variabili**

SODDISFACIBILITÀ

Soddisfacibilità atomica

Un'interpretazione $\boldsymbol{I}$ e un'assegnazione η: $\mathcal{V} \rightarrow \Delta^{\boldsymbol{I}}$ insieme

1. associano ogni **termine** → ad un elemento del **dominio** $\Delta^{\boldsymbol{I}}$

   $t^{\boldsymbol{I},\eta} \in \Delta^{\boldsymbol{I}}$

2. determinano univocamente un valore di verità (vero o falso) per ogni ATOMO

   $\boldsymbol{I},\eta \models P(t_1, \ldots, t_n)$ sse $\langle t_1^{\boldsymbol{I},\eta},\ldots,t_n^{\boldsymbol{I},\eta} \rangle \in P^{\boldsymbol{I}}$

   cioè se la tupla di oggetti con cui interpretiamo a tutti i termini t1…tn appartiene all'interpretazione del predicato (insieme o relazione n-aria)

   $\boldsymbol{I}, \eta \models P(t_1, \ldots, t_n)$ si legge

   "$\boldsymbol{I}$, η SODDISFANO la formula atomica $P(t_1, \ldots, t_n)$"

L'atomo è VERO nell'**interpretazione $\boldsymbol{I}$** sotto **l'assegnazione** η

Poi trasferiremo il valore di verità alle formule

Esempio

$\mathcal{C}$ = {anna, bob},

$\mathcal{P}$ = {Professore(x), Pari(x), Amico(x,y)}

$\mathcal{F}$ = {matricola(x)}

$\boldsymbol{\mathcal{V}}$ **= {x,y,z}**

$\boldsymbol{I} = (\Delta^{\boldsymbol{I}}, \cdot^{\boldsymbol{I}})$

$\Delta^{\boldsymbol{I}} := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

anna$^{\boldsymbol{I}} := \alpha$,

bob$^{\boldsymbol{I}} := \beta$;

matricola$^{\boldsymbol{I}} := f(\beta)=\delta$;

Professore$^{\boldsymbol{I}} := \{\gamma\}$;

Pari$^{\boldsymbol{I}} := \{\delta\}$;

Amico$^{\boldsymbol{I}} := \{\langle\alpha, \beta\rangle , \langle\beta, \gamma\rangle , \langle\gamma, \beta\rangle\}$

$\eta := \{\langle x, \alpha\rangle , \langle y, \alpha\rangle , \langle z, \beta\rangle\}$ *(assegnazione)*

$\rightarrow \eta(x)=\alpha, \eta(y)=\alpha, \eta(z)=\beta$

Quali atomi sono soddisfatti da $\boldsymbol{I}$, $\eta \vDash$? :

Professore(x)

non è soddisfatta ($\nvDash$) perché $\eta(x) = \alpha \notin \{\gamma\}$

Amico(y,bob)

è soddisfatta ($\vDash$) perché $\eta(y) = \alpha$, bob$^{\boldsymbol{I}} := \beta$
e $\langle\alpha, \beta\rangle \in \{\langle\alpha, \beta\rangle , \langle\beta, \gamma\rangle , \langle\gamma, \beta\rangle\}$

Pari(matricola(z))

è soddisfatta ($\vDash$) perché $\eta(z) = \beta$,
matricola$^{\boldsymbol{I}}(\beta) = \delta \in \{\delta\}$

Esempio

$\mathcal{C}$ = {anna, bob},

$\mathcal{P}$ = {Professore(x), Pari(x), Amico(x,y)}

$\mathcal{F}$ = {matricola(x)}

$\mathcal{V}$ = {x,y,z}

$\boldsymbol{I} = (\Delta^{\boldsymbol{I}}, \cdot^{\boldsymbol{I}})$

$\Delta^{\boldsymbol{I}} := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$

anna$^{\boldsymbol{I}} := \alpha$,

bob$^{\boldsymbol{I}} := \beta$;

matricola$^{\boldsymbol{I}} := f(\beta)=\delta$;

Professore$^{\boldsymbol{I}} := \{\gamma\}$;

Pari$^{\boldsymbol{I}} := \{\delta\}$;

Amico$^{\boldsymbol{I}} := \{\langle\alpha, \beta\rangle , \langle\beta, \gamma\rangle , \langle\gamma, \beta\rangle\}$

Come definiamo un'interpretazione η_1

Che rende vera la prima e falsa

la seconda?

$\eta_1 := \{\langle x, \gamma\rangle , \langle y, \beta\rangle , \langle z, \beta\rangle\}$

$\rightarrow \eta_1(x) = \gamma,\ \eta_1(y) = \beta,\ \eta_1(z) = \beta$

Professore(x)

è soddisfatta ($\vDash$) perché $\eta_1(x) = \gamma \in \{\gamma\}$

Amico(y,bob)

NON è soddisfatta ($\nvDash$) perché $\eta_1(y) = \beta$, bob$^{\boldsymbol{I}} := \beta$

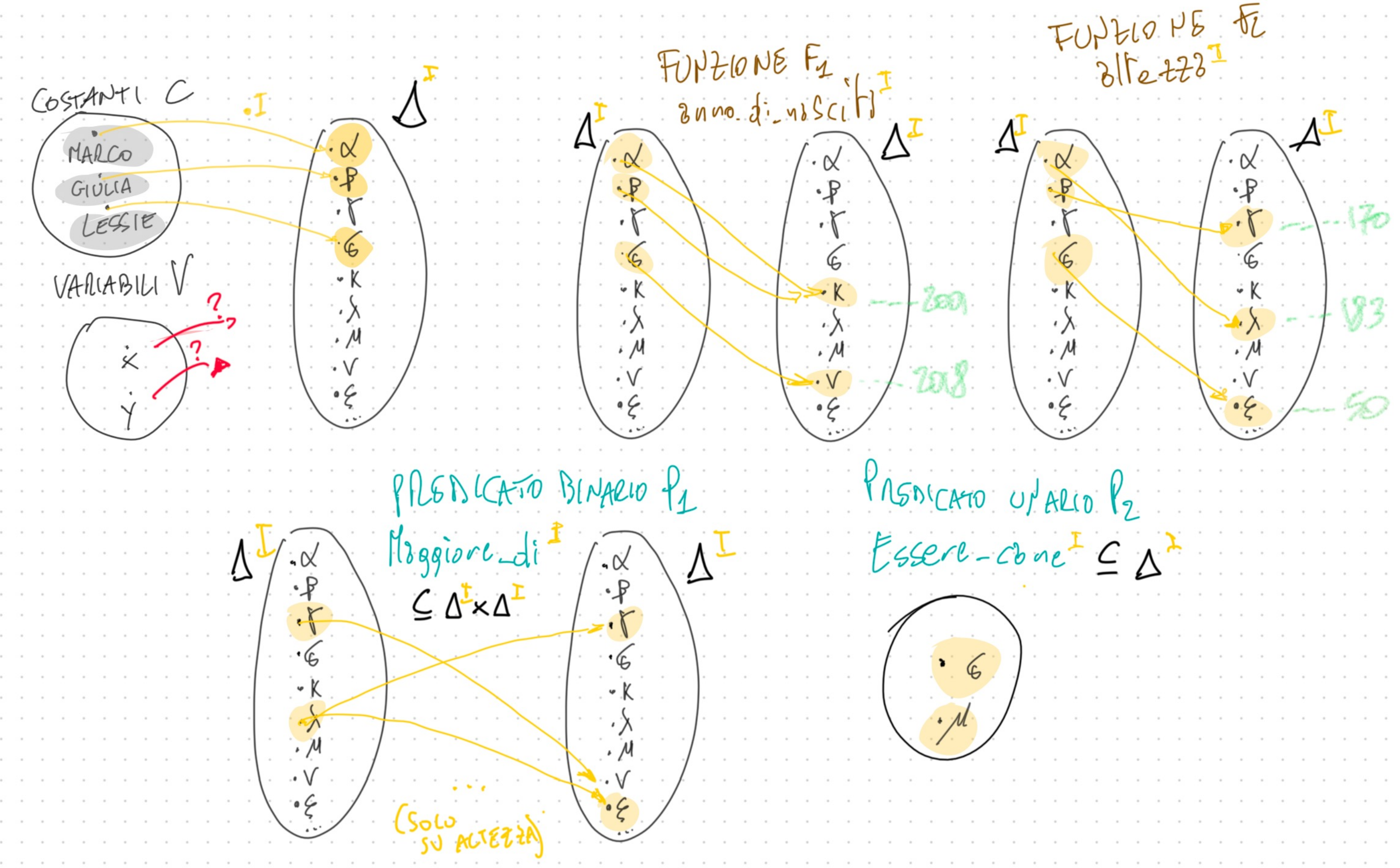
e $\langle\beta, \beta\rangle \notin \{\langle\alpha, \beta\rangle , \langle\beta, \gamma\rangle , \langle\gamma, \beta\rangle\}$

Pari(matricola(z))

è soddisfatta ($\vDash$) perché $\eta_1(z) = \beta$,

matricola$^{\boldsymbol{I}}(\beta) = \delta \in \{\delta\}$

$\mathcal{V}$={x,y} , $\mathcal{C}$={marco, giulia, lessie} , $\mathcal{P}$={Maggiore_di{a,b},Essere_cane{a}}, $\mathcal{F}$={anno_di_nascita{a}, altezza{a}}
Δ^{I}={α β γ δ ε ζ η θ ι κ λ μ ν ξ ο π ρ σ…}



«Lessie è un cane?»
Essere_cane(lessie)

Il predicato è VERO, perché l'interpretazione I:
- associa la costante lessie all'elemento del dominio δ
- L'elemento δ fa parte del sottoinsieme del dominio identificato dal predicato Essere_cane. Cioè δ ∈ {δ, μ}

«Marco è più alto di Giulia?»
Maggiore_di(altezza(marco),altezza(giulia))

Il predicato è VERO perché l'interpretazione I:
- Associa alla costante marco l'elemento α e alla costante giulia l'elemento β
- La funzione altezza associa ad α→ λ e a β → γ
- La coppia ordinata ⟨λ, γ⟩ fa parte della relazione Maggiore_di, cioè ⟨λ, γ⟩ ∈ {⟨λ, γ⟩, ⟨λ, ξ⟩, ⟨γ, ξ⟩}

Sostituzioni

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom
dominio $\boldsymbol{\Delta}$
interpretazione $\boldsymbol{I}$
assegnazione η

Siano $\boldsymbol{I}$ un'interpretazione e $\eta: \mathcal{V} \to \Delta^{\boldsymbol{I}}$ un'assegnazione

Date $x \in \mathcal{V}$ e $d \in \Delta^{\boldsymbol{I}}$, l'assegnazione **$\eta[x/d]$** è la funzione

$$\eta[x/d](y) := \begin{cases} \eta(y) & \text{se } x \neq y \\ d & \text{se } x = y \end{cases}$$

Assegna tutte le variabili che non sono x secondo η,

ma assegna $d \in \Delta^{\boldsymbol{I}}$ alla variabile x

Modifica cioè l'assegnazione per la variabile x

η		
x	->	γ
y	->	β
z	->	β
a	->	γ
b	->	α

η[x/α]		
x	->	α
y	->	β
z	->	β
a	->	γ
b	->	α

Soddisfacibilità delle formule $\boldsymbol{I}$, η ⊨ ϕ

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom
dominio $\boldsymbol{\Delta}$
interpretazione $\boldsymbol{I}$
assegnazione η

La soddisfacibilità di una formula si definisce ricorsivamente

(nell'interpretazione $\boldsymbol{I}$ rispetto all'assegnazione η)

Atomi

- $\boldsymbol{I}, \eta \models \top$ (formula sempre vera) $\boldsymbol{I}, \eta \not\models \bot$ (formula sempre falsa)
- $\boldsymbol{I}, \eta \models P(t_1, \ldots, t_n)$ sse $\langle t_1^{\boldsymbol{I},\eta}, \ldots, t_n^{\boldsymbol{I},\eta} \rangle \in P^{\boldsymbol{I}}$

Operatori booleani

- $\boldsymbol{I}, \eta \models \neg\phi$ sse $\boldsymbol{I}, \eta \not\models \phi$ (data un'assegnazione e un'interpretazione una formule è sempre vera o falsa)
- $\boldsymbol{I}, \eta \models \phi \wedge \psi$ sse $\boldsymbol{I}, \eta \models \phi$ *e* $\boldsymbol{I}, \eta \models \psi$
- $\boldsymbol{I}, \eta \models \phi \vee \psi$ sse $\boldsymbol{I}, \eta \models \phi$ *oppure* $\boldsymbol{I}, \eta \models \psi$
- $\boldsymbol{I}, \eta \models \phi \rightarrow \psi$ sse $\boldsymbol{I}, \eta \models \neg\phi \vee \psi$
- $\boldsymbol{I}, \eta \models \phi \leftrightarrow \psi$ sse $\boldsymbol{I}, \eta \models (\phi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \phi)$

Soddisfacibilità delle formule (II)

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom
dominio $\boldsymbol{\Delta}$
interpretazione $\boldsymbol{I}$
assegnazione $\mathcal{V}$

Quantificatori

- $\boldsymbol{I},\eta \models \exists x.\phi$ **sse** ESISTE ALMENO UN elemento del dominio d $\in \Delta^{\boldsymbol{I}}$ tale che

  $\boldsymbol{I},\eta[x/d] \models \phi$

  Tale che sostituendo d a x la formula è soddisfatta

  Deve esistere almeno un elemento del dominio che sostituito a x rende vera la formula

- $\boldsymbol{I},\eta \models \forall x.\phi$ **sse** PER OGNI d $\in \Delta^{\boldsymbol{I}}$ si verifica

  $\boldsymbol{I},\eta[x/d] \models \phi$

  Tutti gli elementi del dominio se sostituiti a x devono rendere vera la formula

  Come intuizione, pensate che $\boldsymbol{I},\eta[x/d] \models \phi$ sostituisce tutte le occorrenze **libere** di x in ϕ mettendo d

Intuizione

$\Delta^{\boldsymbol{I}}$ ={a,b,c,d}, $\mathcal{P}$ = {P/1 = P(x)} , $\mathcal{V}$ = {x}

Valutiamo ∃x. (P(x))

`[ciclo for]`

$\boldsymbol{I}$,η[x/a] → P(a) VERO o FALSO

$\boldsymbol{I}$,η[x/b] → P(b) VERO o FALSO

$\boldsymbol{I}$,η[x/c] → P(c) VERO o FALSO

$\boldsymbol{I}$,η[x/d] → P(d) VERO o FALSO

Se almeno uno è vero, allora $\boldsymbol{I}$,η ⊨ ∃x.ϕ

Valutiamo ∀x.(P(x))

`[ciclo for]`

$\boldsymbol{I}$,η[x/a] → P(a) VERO o FALSO

$\boldsymbol{I}$,η[x/b] → P(b) VERO o FALSO

$\boldsymbol{I}$,η[x/c] → P(c) VERO o FALSO

$\boldsymbol{I}$,η[x/d] → P(d) VERO o FALSO

Se tutti sono veri, allora $\boldsymbol{I}$,η ⊨ ∀x.ϕ

Esempio

$\boldsymbol{I} = (\Delta^{\boldsymbol{I}}, \cdot^{\boldsymbol{I}})$

$\eta := \{\langle x, \alpha\rangle, \langle y, \alpha\rangle, \langle z, \beta\rangle\}$

$\rightarrow \eta(x) = \alpha, \eta(y) = \alpha, \eta(z) = \beta$

- $\Delta^{\boldsymbol{I}} := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$;
- $anna^{\boldsymbol{I}} := \alpha$,
- $bob^{\boldsymbol{I}} := \beta$;
- $matricola^{\boldsymbol{I}} := \{\langle\beta, \delta\rangle\}$;
- $Professore^{\boldsymbol{I}} := \{\gamma\}$;
- $Pari^{\boldsymbol{I}} := \{\delta\}$;
- $Amico^{\boldsymbol{I}} := \{\langle\alpha, \beta\rangle, \langle\beta, \gamma\rangle, \langle\gamma, \beta\rangle\}$.

Data l'assegnazione η

$\boldsymbol{I}, \eta \not\models Professore(x)$

Perché $\eta(x) = \alpha \notin Professore^{\boldsymbol{I}} := \{\gamma\}$

<u>MA</u>

$\boldsymbol{I}, \eta \models \exists x.Professore(x)$

Perché

$\boldsymbol{I}, \eta[x/\gamma] \models Professore(x)$

Esiste almeno un elemento del dominio $\Delta^{\boldsymbol{I}}$ che soddisfa la formula, cioè γ

Esempio (II)

$\boldsymbol{I} = (\Delta^{\boldsymbol{I}}, \cdot^{\boldsymbol{I}})$

η := {⟨x, α⟩ , ⟨y, α⟩ , ⟨z, β⟩}

→ η(x) = α, η(y) = α, η(z) = β

- $\Delta^{\boldsymbol{I}} := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\};$
- $\text{anna}^{\boldsymbol{I}} := \alpha,$
- $\text{bob}^{\boldsymbol{I}} := \beta;$
- $\text{matricola}^{\boldsymbol{I}} := \{\langle\beta, \delta\rangle\};$
- $\text{Professore}^{\boldsymbol{I}} := \{\gamma\};$
- $\text{Pari}^{\boldsymbol{I}} := \{\delta\};$
- $\text{Amico}^{\boldsymbol{I}} := \{\langle\alpha, \beta\rangle , \langle\beta, \gamma\rangle , \langle\gamma, \beta\rangle\}.$

Data l'assegnazione η

$\boldsymbol{I}, \eta \models \exists y.\text{Professore}(y)$

Perché

$\boldsymbol{I}, \eta[y/\gamma] \models \text{Professore}(y)$

Non cambia nulla se considero x, y o z

Esempio (III)

$\boldsymbol{I} = (\Delta^{\boldsymbol{I}}, \cdot^{\boldsymbol{I}})$

$\eta := \{\langle x, \alpha \rangle , \langle y, \alpha \rangle , \langle z, \beta \rangle\}$

→ $\eta(x) = \alpha, \eta(y) = \alpha, \eta(z) = \beta$

- $\Delta^{\boldsymbol{I}} := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\};$
- $\text{anna}^{\boldsymbol{I}} := \alpha,$
- $\text{bob}^{\boldsymbol{I}} := \beta;$
- $\text{matricola}^{\boldsymbol{I}} := \{\langle \beta, \delta \rangle\};$
- $\text{Professore}^{\boldsymbol{I}} := \{\gamma\};$
- $\text{Pari}^{\boldsymbol{I}} := \{\delta\};$
- $\text{Amico}^{\boldsymbol{I}} := \{\langle \alpha, \beta \rangle , \langle \beta, \gamma \rangle , \langle \gamma, \beta \rangle\}.$

Data l'assegnazione η

$\boldsymbol{I}, \eta \nvDash \forall y.\text{Professore}(y)$

Perché **NON** è vero che **tutti** gli elementi del dominio soddisfano la formula

$\boldsymbol{I}, \eta[y/\alpha] \nvDash \text{Professore}(y)$

$\boldsymbol{I}, \eta[y/\beta] \nvDash \text{Professore}(y)$

$\boldsymbol{I}, \eta[y/\gamma] \vDash \text{Professore}(y)$ (solo qui è vera)

$\boldsymbol{I}, \eta[y/\delta] \nvDash \text{Professore}(y)$

Altro esempio

$\forall x. \exists y. P(x, y)$

In quali domini/interpretazioni è vera?

Se il dominio Δ è l'insieme degli esseri umani e $P^{\mathcal{I}}$ l'insieme delle coppie A e B tali che A è padre di B

allora l'enunciato: «*tutti gli esseri umani hanno un padre*» è vero

Se il dominio Δ è $\mathbb{N}$ e J un'interpretazione tale che P^J è l'insieme delle coppie ordinate $\langle x,y \rangle$ tale che $x < y$

allora l'enunciato: «*per ogni numero naturale ne esiste uno maggiore*» è vero.

<u>Questa formula è soddisfatta da entrambi i domini e le interpretazioni</u>

Se però avessimo un'interpretazione K tale che P^K è l'insieme delle coppie ordinate $\langle x,y \rangle$ tale che $y < x$

La formula NON sarebbe sarebbe soddisfatta (0 è un numero naturale che non ha un precedente)

Recap

Dato un linguaggio e tutte le infinite formule che possiamo costruire ricorsivamente

possiamo stabilire se esse siano vere o false (se sono cioè soddisfacibili)

Se abbiamo <u>**formule aperte**</u> (che includono **variabili libere**), serviranno:

- L'interpretazione $\boldsymbol{I}$ per tutti i simboli del linguaggio (la segnatura)

  Predicati, funzioni e costanti

- L'assegnazione η per le **variabili libere**

Se abbiamo <u>**formule chiuse**</u> (in cui tutte le **variabili sono legate** dai quantificatori), basterà:

- L'interpretazione $\boldsymbol{I}$ (e solo quella)

  es. ∃x.Professore(x) ha un unico valore di verità che non dipende più dall'assegnazione (perché «le prova tutte»)

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom
dominio $\boldsymbol{\Delta}$
interpretazione $\boldsymbol{I}$
assegnazione η

MODELLI E TAUTOLOGIE

Modelli e tautologie

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom
dominio Δ
interpretazione $\boldsymbol{I}$
assegnazione η

L'interpretazione $\boldsymbol{I}$ è un MODELLO della formula ϕ sse

PER OGNI assegnazione η si verifica che $\boldsymbol{I}, \eta \models \phi$

In questo caso, scriviamo $\boldsymbol{I} \models \phi$ e diciamo che ϕ è VERA in $\boldsymbol{I}$

La formula ϕ è VALIDA (o TAUTOLOGICA) sse

ϕ è vera PER OGNI interpretazione $\boldsymbol{I}$

In questo caso, scriviamo $\models \phi$

Es. $\forall x.(P(x) \vee \neg P(x))$ *(non dipende dall'interpretazione scelta)*

Esempio

$\mathcal{I} = (\Delta^{\mathcal{I}}, \cdot^{\mathcal{I}})$

- $\Delta^{\mathcal{I}} := \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$;
- $anna^{\mathcal{I}} := \alpha$,
- $bob^{\mathcal{I}} := \beta$;
- $matricola^{\mathcal{I}} := \{\langle\beta, \delta\rangle\}$;
- $Professore^{\mathcal{I}} := \{\gamma\}$;
- $Pari^{\mathcal{I}} := \{\delta\}$;
- $Amico^{\mathcal{I}} := \{\langle\alpha, \beta\rangle, \langle\beta, \gamma\rangle, \langle\gamma, \beta\rangle\}$.

$\mathcal{I} \models \exists x.\exists y.(Professore(x) \wedge Amico(x, y))$

Non ci sono variabili libere, sono entrambe quantificate

Non dipende dall'assegnazione, ma dall'interpretazione

caso che soddisfa la fbf: interpretiamo la x con γ e y con β

$\mathcal{I}, \eta[x/\gamma, y/\beta]$ $Professore(\gamma) \wedge Amico(\gamma, \beta) = T$

$\mathcal{I} \not\models \forall x.(x = bob \vee Amico(x, bob))$

$\mathcal{I}, \eta[x/\alpha]$ $\alpha = bob \vee Amico(\alpha, \beta) \approx F \vee T \to T$

$\mathcal{I}, \eta[x/\beta]$ $\beta = bob \vee Amico(\beta, \beta) \approx T \vee F \to T$

$\mathcal{I}, \eta[x/\gamma]$ $\gamma = bob \vee Amico(\gamma, \beta) \approx F \vee T \to T$

$\mathcal{I}, \eta[x/\delta]$ $\delta = bob \vee Amico(\delta, \beta) \approx F \vee F \to F$

$\mathcal{I} \not\models \exists x.\forall y.(Professore(x) \wedge Amico(x, y))$

Occhio alla precedenza fra operatori e quantificatori!

In questo caso se x = γ, γ NON è in relazione con TUTTI gli

elementi di $Amico^{\mathcal{I}}$

Formule chiuse

Notate che una formula con **variabili libere** non è possibile avere un significato univoco che sia indipendente dalle assegnazioni

Perciò, utilizziamo formule **chiuse**

In loro, le variabili hanno un significato nella formula, indipendente dell’assegnazione η

Recap: formule chiuse e assegnazioni

$\boldsymbol{I},\eta \models \exists x.\phi \quad \rightsquigarrow \quad \boldsymbol{I},\eta[x/d] \models \phi$

L'assegnazione originale di x in η diventa irrilevante

In una formula **chiusa** tutte le variabili sono legate da quantificatori

Possiamo costruire le assegnazioni finali

procedendo **dall'esterno verso l'interno della formula**

QUANTIFICATORI + OPERATORI

Uso del quantificatore esistenziale ∃

"Qualche messicano vive in Italia"

$\exists x. (\text{Messicano}(x) \land \text{Vive\_in}(x, \text{Italia}))$

"Esiste un individuo che è messicano e vive in Italia"

$\exists x.(\text{Messicano}(x) \rightarrow \text{Vive\_in}(x, \text{Italia}))$

"Se c'è un individuo messicano allora vive in Italia"

Uso del quantificatore universale ∀

«Ogni (oggetto che è un) animale è mortale»

$\forall x.(\text{animale}(x) \rightarrow \text{mortale}(x))$

«Per ogni oggetto, se è un animale, allora è mortale»

$\forall x.(\text{animale}(x) \land \text{mortale}(x))$

«ogni oggetto del dominio è un animale ed è mortale»

per essere vera richiede che nel dominio ci siano soltanto animali

Per questo si usa l'implicazione → :

Se qualcosa ha la tal proprietà **allora**…

1) $\exists x.\exists y.(Puffo(x) \land Nonno(x,y))$

C'è almeno un elemento del dominio che è un puffo ed è nonno di un (altro) elemento del dominio

2) $\exists x.\forall y.(Puffo(x) \land Nonno(x,y))$

C’è almeno un elemento che è un puffo ed è nonno di tutti gli elementi del dominio

3) $\forall x.\exists y.(Puffo(x) \land Nonno(x,y))$

Ogni elemento del dominio è un puffo ed è nonno di almeno un (altro) elemento del dominio

4) $\forall x.\forall y.(Puffo(x) \land Nonno(x,y))$

Ogni elemento del dominio è un puffo ed è nonno di tutti gli elementi del dominio

5) $\exists x.\exists y.(Puffo(x) \rightarrow Nonno(x,y))$

Esiste almeno un elemento che, se è puffo, allora è nonno di un altro elemento, ma potrebbe non essere un puffo (se tutti gli elementi sono puffi, almeno uno deve essere nonno di almeno un altro elemento)

6) $\exists x.\forall y.(Puffo(x) \rightarrow Nonno(x,y))$

Esiste almeno un elemento che, se è puffo, allora è nonno di tutti gli elementi, ma potrebbe non essere un puffo (se tutti gli elementi sono puffi, almeno uno deve essere nonno di tutti gli altri elementi)

7) $\forall x.\exists y.(Puffo(x) \rightarrow Nonno(x,y))$

Ogni elemento, se è un puffo, allora è nonno di almeno un (altro) elemento del dominio

8) $\forall x.\forall y.(Puffo(x) \rightarrow Nonno(x,y))$

Ogni elemento, se è un puffo, allora è nonno di tutti gli elementi del dominio

Esercizio

- Ogni studente ha una matricola
- Qualcuno ha visto tutti gli episodi di “The Crown”
- Uno studente ha presentato un progetto

EQUIVALENZE SEMANTICHE

Equivalenza semantica

Due formule ϕ e ψ sono **EQUIVALENTI** (scritto $\phi \equiv \psi$)

sse per ogni interpretazione $\boldsymbol{I}$:

$$\boldsymbol{I} \vDash \phi \text{ sse } \boldsymbol{I} \vDash \psi$$

Le formule hanno lo stesso **valore di verità** in qualunque interpretazione

Equivalenze

$\forall x.\phi \equiv \neg \exists x.\neg\phi$; $\exists x.\phi \equiv \neg\forall x.\neg\phi$; (parsimonia)

$\exists x.\exists y.\phi \equiv \exists y. \exists x.\phi$; $\forall x.\forall y.\phi \equiv \forall y.\forall x.\phi$;

se x non occorre in ϕ, allora $\phi \equiv \exists x.\phi \equiv \forall x.\phi$

$\forall x.(\phi \wedge \psi) \equiv \forall x.\phi \wedge \forall x.\psi$

$\exists x.(\phi \vee \psi) \equiv \exists x.\phi \vee \exists x.\psi$

(i duali NON si soddisfanno)

Equivalenze II

Se x non occorre libera in ψ, allora:

$\forall x.(\phi \lor \psi) \equiv \forall x.\phi \lor \psi$

$\exists x.(\phi \land \psi) \equiv \exists x.\phi \land \psi$

$\forall x.\phi \to \psi \equiv \exists x.(\phi \to \psi)$

$\exists x.\phi \to \psi \equiv \forall x.(\phi \to \psi)$

$\psi \to \forall x.\phi \equiv \forall x.(\psi \to \phi)$

$\psi \to \exists x.\phi \equiv \exists x.(\psi \to \phi)$

TEORIE DEL PRIM’ORDINE

Teorie del primo ordine

Di norma, la nostra **conoscenza base** si poggia su un insieme di formule che assumiamo siano valide

cioè gli ASSIOMI

Una TEORIA è rappresentata da **tutte** le conseguenze di questi assiomi

La logica del primo ordine ci serve per **assiomatizzare certi domini**

per poi **dedurre** e **dimostrare** le conseguenze logiche delle premesse

Conseguenze logiche

Un insieme di formule Γ è SODDISFACIBILE (o coerente) sse

esiste un'interpretazione $\boldsymbol{I}$ tale che $\boldsymbol{I} \vDash \phi$ per ogni $\phi \in \Gamma$

I soddisfa tutte le formule dell'insieme

Tale $\boldsymbol{I}$ è un modello di Γ $(\boldsymbol{I} \vDash \Gamma)$

ϕ è una CONSEGUENZA LOGICA di Γ (scritto $\Gamma \vDash \phi$) sse

ogni modello di Γ è un modello di ϕ

$(\boldsymbol{I} \vDash \Gamma \Rightarrow \boldsymbol{I} \vDash \phi)$

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom
dominio $\boldsymbol{\Delta}$
interpretazione $\boldsymbol{I}$
assegnazione $\mathcal{V}$

Teoria

Una <u>TEORIA</u> è un **insieme di formule** Θ che è

CHIUSO rispetto alle conseguenze

se $\Theta \models \phi$ allora $\phi \in \Theta$

Sia Γ un insieme di formule, chiamati **ASSIOMI**

La <u>TEORIA GENERATA da Γ</u> è l'insieme di **tutte le** conseguenze logiche di Γ

$\Theta_\Gamma := \{\phi \mid \Gamma \models \phi\}$

Gli assiomi rappresentano le nostre assunzioni

<u>La teoria</u> è data da TUTTE le conseguenze logiche degli assiomi

Proprietà delle teorie

Una teoria del primo ordine Θ è:

- <u>COERENTE/CONSISTENTE</u> sse NON esiste una formula ϕ tale che

$$\Theta \models \phi \text{ e } \Theta \models \neg\phi$$

- <u>COMPLETA</u> sse per ogni formula ϕ,

$$\Theta \models \phi \text{ oppure } \Theta \models \neg\phi$$

NB: la nozione di conseguenza logica è infinitaria, perché posso generare formule infinte, pertanto l'insieme delle conseguenze logiche è infinito per definizione

Estensioni conservative

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom
dominio $\boldsymbol{\Delta}$
interpretazione $\boldsymbol{I}$
assegnazione η

Se ho un insieme di assiomi da cui derivo una teoria,

cosa succede se aggiungo un altro assioma?

Siano $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{M}$ due segnature, e

Θ, Ξ due teorie in $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ rispettivamente

Ξ è un'<u>ESTENSIONE CONSERVATIVA</u> di Θ sse

per ogni formula $\phi \in \mathcal{L}$ si ha:

$$\Theta \models \phi \text{ sse } \Xi \models \phi$$

Cioè hanno lo stesso comportamento sul vocabolario ristretto $\mathcal{L}$

Teoria dei grafi

L'insieme di tutti i grafi è trivialmente definito da una segnatura con un solo simbolo di relazione binaria "Arco"

Ogni interpretazione deve definire:

- un dominio — i nodi del grafo
- una relazione binaria che interpreta Arco — gli archi

Teoria dei grafi irriflessivi:

Aggiungiamo l'assioma: $\forall x.\ \neg Arco(x,x)$

Sto vincolando la teoria ad interpretazioni in cui non ci sono cappi

Teoria dei grafi non-orientati:

Assioma: $\forall xy.\ (Arco(x, y) \rightarrow Arco(y, x))$

Intuizione

Qualsiasi relazione binaria può essere rappresentata come un grafo

Quali sono le interpretazioni che lo soddisfano?

Inizialmente tutte quelle possibili

Ogni volta che introduco **un nuovo assioma elimino alcune fra le possibili** interpretazioni

Nella pratica, sto progressivamente **specializzando la teoria**

Es. riflessività, transitività, simmetria

Un’estensione conservativa dei grafi

Introduciamo il concetto di **cammino** fra due nodi tramite un nuovo simbolo di relazione “Cammino”

Teoria dei cammini: (chiusura transitiva di Arco)

$\forall xy. (\mathrm{Arco}(x, y) \rightarrow \mathrm{Cammino}(x, y))$

$\forall xyz. (\mathrm{Cammino}(x, y) \land \mathrm{Cammino}(y, z) \rightarrow \mathrm{Cammino}(x, z))$

Come sarebbe la teoria dei **semicammini**?

Teoria dei numeri (naturali)

Assiomi (Γ)

1. $\forall x. \neg(x < 0)$
2. $\forall xy.(x < s(y) \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$
3. $\forall x.(x \neq 0 \rightarrow \exists y.(x = s(y)))$
4. $\forall xy.(x < y \rightarrow \neg(y < x))$
5. $\forall xyz.(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$
6. $\forall xy.(x < y \vee x = y \vee y < x)$

Predicati

$<(x,y)$

$=(x,y)$

$\neq(x,y)$

Funzioni

$s(x)$

Domini possibili

$\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$

...

Teoria dei numeri

Supponiamo ora di aggiungere un assioma alla volta

Assiomi

1. $\forall x. \neg(x < 0)$

Sto eliminando l'interpretazione che contempla i numeri negativi, es. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$

Predicati

$<(x,y)$

$=(x,y)$

$\neq(x,y)$

Funzioni

$s(x)$

Domini possibili

$\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$

...

Teoria dei numeri

Supponiamo ora di aggiungere un assioma alla volta

Assiomi

2. $\forall xy.(x < s(y) \leftrightarrow (x < y \lor x = y))$

Per tutti gli x e y, x è minore del successore di y

se e solo se x è minore di y o x è uguale a y.

Sto eliminando le interpretazioni per cui questo non è vero

Predicati

$<(x,y)$

$=(x,y)$

$\neq(x,y)$

Funzioni

$s(x)$

Domini possibili

$\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$

...

Teoria dei numeri

Supponiamo ora di aggiungere un assioma alla volta

Assiomi

3. $\forall x.(x \neq 0 \rightarrow \exists y.(x = s(y)))$

Per tutti gli x diversi da 0 esiste un y che è il suo successore

...

Predicati

$<(x,y)$

$=(x,y)$

$\neq(x,y)$

Funzioni

$s(x)$

Domini possibili

$\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$

...

Teoria dei numeri

Supponiamo ora di aggiungere un assioma alla volta

Predicati

$<(x,y)$

$=(x,y)$

$\neq(x,y)$

Funzioni

$s(x)$

Domini possibili

$\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$

…

Assiomi

4. $\forall xy.(x < y \rightarrow \neg(y < x))$

Sto vincolando le interpretazioni

che soddisfano queste relazioni ad essere relazioni

di ordinamento

Teoria dei numeri

Supponiamo ora di aggiungere un assioma alla volta

Assiomi

5. $\forall xyz.(x < y \land y < z \rightarrow x < z)$

Tutte le interpretazioni che soddisfano questo assioma

devono considerare la relazione minore come transitiva

Predicati

$<(x,y)$

$=(x,y)$

$\neq(x,y)$

Funzioni

$s(x)$

Domini possibili

$\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$

...

Teoria dei numeri

Supponiamo ora di aggiungere un assioma alla volta

Assiomi

6. $\forall xy.(x < y \lor x = y \lor y < x)$

Tutte le interpretazioni che soddisfano questo assioma

devono rispettare la tricotomia

Predicati

$<(x,y)$

$=(x,y)$

$\neq(x,y)$

Funzioni

$s(x)$

Domini possibili

$\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$

...

Teoria dei numeri

Assiomi

1. $\forall x. \neg(x < 0)$
2. $\forall xy.(x < s(y) \leftrightarrow (x < y \vee x = y))$
3. $\forall x.(x \neq 0 \rightarrow \exists y.(x = s(y)))$
4. $\forall xy.(x < y \rightarrow \neg(y < x))$
5. $\forall xyz.(x < y \wedge y < z \rightarrow x < z)$
6. $\forall xy.(x < y \vee x = y \vee y < x)$

Ogni nuovo assioma ha vincolato il numero di interpretazioni possibili (usando il simbolo di <)

Predicati

$<(x,y)$

$=(x,y)$

$\neq(x,y)$

Funzioni

$s(x)$

Domini possibili

$\mathbb{R}$

$\mathbb{N}$

...

Aritmetica di Peano

Qual è il numero minimo di assiomi da cui posso derivare tutte le proprietà dei numeri naturali?

In questo caso, Γ sono gli 11 assiomi di Peano

La **teoria** è tutto quello che posso derivare da tali assiomi

Ancora sul concetto di interpretazione: rappresentazione della conoscenza

ASSIOMI (Knowledge Base KB)

Abbiamo tre blocchi, a, b, c uno sopra l’altro

Il blocco in alto è verde

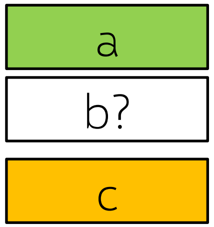
Il blocco in basso non è verde

Esiste un blocco verde direttamente sopra ad un blocco non verde?

$\Gamma = \{sopra(a,b), sopra(b,c), verde(a), \neg verde(c)\}$

$\alpha = \exists x \exists y (verde(x) \wedge \neg verde(y) \wedge sopra(x,y))$

$\Gamma \models \alpha$?



Caso 1: b è verde, cioè $\boldsymbol{I} \models verde(b)$

$\boldsymbol{I} \models verde(b) \wedge \neg verde(c) \wedge sopra(b,c)$

$\boldsymbol{I} \models \alpha$

Caso 2: b è non verde, cioè $\boldsymbol{I} \not\models verde(b)$

$\boldsymbol{I} \models \neg verde(b)$

$\boldsymbol{I} \models verde(a) \wedge \neg verde(b) \wedge sopra(a,b)$

$\boldsymbol{I} \models \alpha$

Pertanto in entrambi i casi, per ogni interpretazione $\boldsymbol{I}$, se $\boldsymbol{I} \models \Gamma$ allora $\boldsymbol{I} \models \alpha$.

Per cui $\Gamma \models \alpha$

RAPPRESENTAZIONE DELLA CONOSCENZA

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom
dominio Δ
interpretazione I
assegnazione $\mathcal{V}$

Elementi della logica dei predicati

Gli elementi principali della logica dei predicati sono:

- costanti $\mathcal{C}$
- simboli predicativi $\mathcal{P}$
- simboli funzionali $\mathcal{F}$
- variabili (quantificate) $\mathcal{V}$

La semantica

La semantica è basata su interpretazioni

Ogni interpretazione è un “mondo possibile”

che esprime un ***potenziale*** significato per tutti i simboli

Interpretazioni (recap)

segnatura $\mathcal{L}$
variabili $\mathcal{V}$
costanti $\mathcal{C}$
simboli predicativi $\mathcal{P}$
simboli funzionali $\mathcal{F}$
termini funzionali Term
atomi Atom
dominio $\boldsymbol{\Delta}$
interpretazione $\boldsymbol{I}$
assegnazione η

Un'interpretazione $\boldsymbol{I}$ ha:

- un **dominio** Δ (non vuoto) e
- una **funzione d'interpretazione** $\cdot^{\boldsymbol{I}}$ che "definisce" ogni simbolo:
  - una costante → in un elemento di Δ
  - un simbolo predicativo n-ario → in una relazione in Δ^n
  - un simbolo funzionale n-ario → in una funzione $\Delta^n \rightarrow \Delta$

Le variabili **non** sono interpretate:

dipendono dalla quantificazione (quantificatori universale e esistenziale)

Valori di verità

Una formula è un predicato (ossia, una “frase”)

che può essere vero o falso

Dipende dalla interpretazione che si considera

per la logica, il nome del simbolo è irrilevante

Anche se esistono delle tautologie e delle contraddizioni

I simboli sono simboli

La logica **NON** legge il linguaggio naturale

- Padre(Adamo, Caino)
- $\forall x.(Umano(x) \rightarrow \exists y.Madre(y,x))$

Sono **simboli** senza un significato intrinseco

I simboli sono simboli

La logica **NON** legge il linguaggio naturale

- POfdskfs(Adamo, Caino)
- $\forall x.(\text{Mklfsklf}(x) \rightarrow \exists y.\text{mkkdsm9skn}(y,x))$

Sono **simboli** senza un significato intrinseco

Rappresentare cosa?

Vogliamo utilizzare la logica per **descrivere**

un **dominio** (mondo) d’interesse

Utilizziamo formule come **assiomi** che devono essere veri

Le interpretazioni che le **falsificano** sono irrilevanti: non le consideriamo

In certo senso, diamo un **significato** ai simboli, in relazione agli altri

Dominio vs. realtà

Importante:

le formule descrivono un **dominio** che può essere o meno collegato alla realtà

Possiamo potenzialmente descrivere un mondo fantastico con caratteristiche diverse

Conoscenza con restrizione

Quando rappresentiamo conoscenza,

LIMITIAMO la classe di interpretazioni d’interesse

Ogni assioma è una RESTRIZIONE imposta alle interpretazioni

In generale, esistono molte interpretazioni che soddisfano questi assiomi

Si potrebbe sempre aggiungere conoscenza (assiomi) più e più dettagliata, ma non è sempre necessario

Conoscenza incompleta e compromesso

Una BASE DI CONOSCENZA è sempre incompleta

Descriviamo ***quanto basta*** per l'applicazione

Vogliamo rappresentare al meglio possibile un dominio

Allo stesso tempo, più dettagli producono una base di conoscenza più COMPLESSA

Si deve trovare il giusto compromesso

Da formule a linguaggio naturale

Vogliamo trasformare la **conoscenza umana** in un insieme di formule logiche

Problema

Il linguaggio naturale è **AMBIGUO** mentre **la logica non lo è**

attenzione!

Prima di scrivere impariamo a **leggere**

Leggere i simboli

I simboli hanno una funzionalità specifica:

- costanti $\mathcal{C}$ parlano di **entità**
- predicati $\mathcal{P}$ parlano di **tuple** con una proprietà
- funzioni $\mathcal{F}$ ci ritornano una **nuova entità**
- variabili $\mathcal{V}$ "unificano" con **entità** in base al bisogno

Importanti ricordarsi di costruire formule ben formate

Grande Puffo

- Ha_barba(grande_puffo)
- $\exists x.(Puffo(x) \land Ha\_barba(x))$
- $\exists x.(Cappello(x) \land Indossa(grande\_puffo,x) \land Colore(x,rosso))$
- Colore(cappello_di(grande puffo), rosso)
- $\forall x.(Puffo(x) \rightarrow \exists y.(Cappello(y) \land indossa(x,y)))$
- $\forall x.(Colore(cappello\_di(x), rosso) \rightarrow x = grande\_puffo)$

Fondamentale

Capire la **funzione** di ogni elemento è

fondamentale per costruire formule adatte

Proviamo a scrivere

- Puffetta indossa un vestito
- Soltanto Puffetta indossa un vestito
- Tutti i cappelli sono bianchi o rossi
- Ogni puffo ha una casa propria
- In ogni casa vive soltanto un puffo
- Qualche puffo ha una casa con il tetto rosso
- Non ci sono puffi cattivi

Altri esempi

- Tutti gli uomini sono mortali
- Non tutte le divinità sono immortali
- Ercole è figlio di una divinità e di un mortale

Definire:

- fratello
- zio

a. Tutto è verde.
b. Alcune cose sono verdi.
c. Non qualsiasi cosa è verde.
d. Non ci sono cose verdi.
e. O tutto è verde o nulla è verde.
f. Tutto è o verde o non verde.
g. Alcune cose sono verdi e alcune cose non lo sono.
h. Alcune rane sono verdi e alcune non lo sono.
i. Vi sono rane verdi e rane testarde.
j. Vi sono rane verdi e testarde.
k. Alcune rane testarde non sono verdi.
l. Tutte le rane verdi sono testrade.
m. Ogni rana è o verde o testrada.
n. Qualche rana è sia verde che testarda.
o. Qualche rana verde è testarda.
p. Qualche rana testarda è verde.
q. Non esistono rane verdi testarde.
r. Tutte le rane verdi saltano.
s. Alcune rane verdi non saltano.
t. Nessuna rana che salta è testarda.
u. Ci sono rane testarde che non saltano.
v. Ci sono rane testarde che se piove, saltano.
w. Ci sono rane che, se piove, saltano.
x. Se piove qualche rana testarda salta.
y. Se non piove, nessuna rana salta.
z. Le rane testarde saltano se e solo se piove.

g.paronitti@gmail.com

a.	Tutto è verde.	$\forall x V(x)$
b.	Alcune cose sono verdi.	$\exists x V(x)$
c.	Non qualsiasi cosa è verde.	$\neg\forall x V(x)$
d.	Non ci sono cose verdi.	$\neg\exists x V(x)$
e.	O tutto è verde o nulla è verde.	$\forall x V(x) \lor \forall x \neg V(x)$ oppure $\forall x V(x) \lor \neg\exists x V(x)$
f.	Tutto è o verde o non verde.	$\forall x (V(x) \lor \neg V(x))$
g.	Alcune cose sono verdi e alcune cose non lo sono.	$\exists x V(x) \land \exists x \neg V(x)$
h.	Alcune rane sono verdi e alcune non lo sono.	$\exists x(R(x) \land V(x)) \land \exists x(R(x) \land \neg V(x))$
i.	Vi sono rane verdi e rane testarde.	$\exists x(R(x) \land V(x)) \land \exists x(R(x) \land T(x))$
j.	Vi sono rane verdi e testarde.	$\exists x(R(x) \land (V(x) \land T(x)))$
k.	Alcune rane testarde non sono verdi.	$\exists x((R(x) \land T(x)) \land \neg V(x))$
l.	Tutte le rane verdi sono testrade.	$\forall x((R(x) \land V(x)) \to T(x))$
m.	Ogni rana è o verde o testrada.	$\forall x(R(x) \to (V(x) \lor T(x)))$
n.	Qualche rana è sia verde che testarda.	$\exists x(R(x) \land (V(x) \land T(x)))$
o.	Qualche rana verde è testarda.	$\exists x((R(x) \land V(x)) \land T(x))$
p.	Qualche rana testarda è verde.	$\exists x((R(x) \land T(x)) \land V(x))$
q.	Non esistono rane verdi testarde.	$\neg\exists x((R(x) \land V(x)) \land T(x))$
r.	Tutte le rane verdi saltano.	$\forall x((R(x) \land V(x)) \to S(x))$
s.	Alcune rane verdi non saltano.	$\exists x((R(x) \land V(x)) \land \neg S(x))$
t.	Nessuna rana che salta è testarda.	$\forall x((R(x) \land S(x)) \to \neg T(x))$
u.	Ci sono rane testarde che non saltano.	$\exists x((R(x) \land T(x)) \land \neg S(x))$
v.	Ci sono rane testarde che se piove, saltano.	$\exists x((R(x) \land T(x)) \land (P \to S(x))$
w.	Ci sono rane che, se piove, saltano.	$\exists x(R(x) \land (P \to S(x))$
x.	Se piove qualche rana testarda salta.	$P \to \exists x((R(x) \land T(x)) \land S(x))$
y.	Se non piove, nessuna rana salta.	$\neg P \to \forall x(R(x) \to \neg S(x))$
z.	Le rane testarde saltano se e solo se piove.	$\forall x((R(x) \land T(x)) \to (S(x) \leftrightarrow P))$

g.paronitti@gmail.com

SISTEMI DEDUTTIVI E TABLEAUX PREDICATIVI

Ragionamento

Dopo che abbiamo costruita una **base di conoscenza**

vogliamo dedurre **conseguenze** di essa

Il processo di **ragionamento** non è altro che

la dimostrazione di una tautologia

Quindi, vogliamo sviluppare un metodo algoritmico per

dimostrare che una formula è una tautologia

→ SISTEMI DEDUTTIVI

RECAP 1 (da logica proposizionale) Collegamento fra sistemi

Abbiamo definiti due sistemi:

- un SISTEMA LOGICO con una relazione di conseguenza $\models$
  - *Semantica*: se queste formule sono vere (*significato*) allora…
- un SISTEMA DEDUTTIVO con una relazione di derivabilità $\vdash$
  - *Sintattica*: manipolo le formule con regole per generare altre formule

$\Gamma \models F$: F è una conseguenza logica di Γ

$\Gamma \vdash F$: da Γ possiamo dimostrare F

Vogliamo collegare i sistemi tali che si comportino allo stesso modo

In particolare identificare formule valide e teoremi

RECAP 2 (da logica proposizionale)

Il paradigma logico formale: sintassi e semantica

Sintassi

Linguaggio + calcolo

Simboli
FBF
ASSIOMI
Regole di inferenza

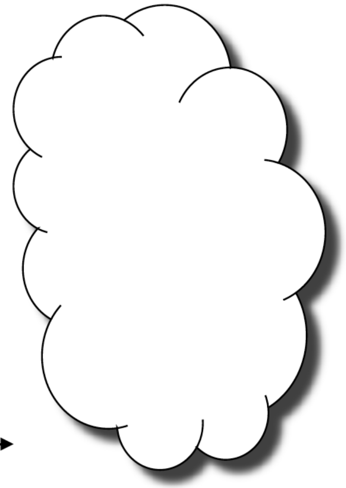
$S \vdash F$

Semantica

Funzione di interpretazione

$S \models F$

Mondo



Concetto di modello

???

RECAP 3 da logica proposizionale: Correttezza e completezza

Un **sistema deduttivo** è <u>CORRETTO</u> **sse** per ogni F ∈ $\mathcal{F}$

⊢ F implica ⊨ F

cioè, se F è un teorema del sistema deduttivo, allora F è una tautologia nel sistema logico

*Un sistema deduttivo **corretto** è capace di dimostrare unicamente formule valide (ogni teorema è "vero" nel sistema logico)*

Potrebbero esserci formule valide che non riesco a dimostrare

Un **sistema deduttivo** è <u>COMPLETO</u> **sse** per ogni F ∈ $\mathcal{F}$

⊨ F implica ⊢ F

cioè, se F è una tautologia nel sistema logico, allora F è un teorema nel sistema deduttivo

*Un sistema deduttivo **completo** è capace di dimostrare ogni formula valida*

Potrebbero esserci teoremi che non corrispondono a formule valide

RECAP 4 da logica proposizionale :conseguenze logiche (II)

Per verificare che una formula $F \in \mathcal{F}$ sia una conseguenza logica di un insieme di formule $\Gamma \subseteq \mathcal{F}$, $\Gamma = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$

$$\Gamma \models F$$

Occorre verificare che: l'implicazione ($\rightarrow$) della congiunzione logica ($\wedge$) di tali formule Γ (premesse)

con la formula F stessa (conseguenza)

sia una TAUTOLOGIA (FORMULA VALIDA)

$$\models G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n \rightarrow F$$

$\{G_1, G_2, G_3\} \models F$

G1, G2, G3 tutte vere

G1	G2	G3	G1 ∧ G2 ∧ G3	F	**G1 ∧ G2 ∧ G3 → F**
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1

Apparati deduttivi e teorie del primo ordine

Data una teoria del primo ordine $\{\phi \mid \Gamma \models \phi\}$,

cioè gli assiomi $\Gamma = \{G_1, G_2, \ldots, G_n\}$ e tutte le loro conseguenze logiche ϕ

Vogliamo un metodo per poter DIMOSTRARE:

- Una formula ϕ a partire da un insieme di assiomi Γ

  $\Gamma \vdash \phi$ (ϕ è derivabile da Γ)

  $\Rightarrow \Gamma \models \phi$, cioè $\phi \in C_n(\Gamma)$ (ϕ è conseguenza logica di Γ)

- Sotto certe condizioni:

  $\Gamma \vdash \phi$ sse $\vdash G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n \rightarrow \phi$

  $\Rightarrow \Gamma \models \phi$ sse $\models G_1 \wedge G_2 \wedge \ldots \wedge G_n \rightarrow \phi$

- Se una formula è **coerente** con gli assiomi

  $\Gamma \nvdash \neg\phi \Rightarrow$ esiste un'interpretazione $\boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{I} \models \Gamma \cup \phi$

Tableaux

Adattiamo il metodo del tableaux per il caso predicativo

Ricordate che il tableau è un metodo che genera modelli:

interpretazioni che soddisfano la formula

Nel caso predicativo, dobbiamo tenere in conto anche

il **dominio** e le **entità anonime**

Tableaux Predicativi

- Domanda:
  - α è valida, **soddisfacibile non valida** o contraddizione?
- Simile al caso proposizionale: costruiamo modelli mediante un albero
  - α è valida, i.e, $\vdash \alpha$?
    - $F : \alpha$ … cerchiamo un modello che falsifica α
      - se il tableaux è chiuso (= non riusciamo a costruire un contromodello)
        - allora α è valida …. $\vdash_{tab} \alpha$
      - altrimenti, costruiamo un tableaux per $F : \neg\alpha$, ovvero, $T : \alpha$,
        - se il tableaux è chiuso
          - allora α è contraddizione … $\vdash_{tab} \neg\alpha$
        - altrimenti, α è **soddisfacibile non valida** … $\nvdash_{tab} \alpha$, $\nvdash_{tab} \neg\alpha$
- Quali regole per trattare il caso predicativo?

> **La logica del primo ordine è semi-decidibile**
> - se $\vdash_{tab} \alpha$, allora esiste una dimostrazione che termina e ci dice che $\vdash_{tab} \alpha$
>   - Se α è valida o contraddizione possiamo scoprirlo in un numero finito di passi
> - se $\nvdash_{tab} \alpha$, allora non abbiamo la garanzia di scoprirlo in un numero finito di passi

Indecidibilità

Attenzione!

La logica del primo ordine è **semi-decidibile**

Nessun metodo può decidere in **tempo finito** se una formula è tautologica o meno

Diversamente al caso proposizionale, il tableaux predicativo <u>può non finire mai</u>

Perciò, serve creatività e attenzione

Restrizioni

Per semplificare la descrizione, consideriamo

formule **senza simboli funzionali**

In realtà, per il tableau non sono diversi delle costanti,

quindi non aggiungono niente al metodo

Tableaux I

I predicati **senza variabili** sono essenzialmente

proposizioni atomiche

$P(a) \wedge R(b, a) \rightarrow P(c)$ “$pa \wedge rba \rightarrow pc$”

Tableaux II

Le regole per i connettivi logici proposizionali

$\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$

si comportano come nel caso proposizionale

Quindi serve capire come gestire i **quantificatori** $\forall$, $\exists$ e le loro **variabili**

T $\land$	$\dfrac{\mathrm{S},\ \mathrm{T}\ (\mathrm{X} \land \mathrm{Y})}{\mathrm{S},\ \mathrm{TX},\ \mathrm{TY}}$	F $\land$	$\dfrac{\mathrm{S},\ \mathrm{F}\ (\mathrm{X} \land \mathrm{Y})}{\mathrm{S},\ \mathrm{FX} \mid \mathrm{S},\ \mathrm{FY}}$
T $\lor$	$\dfrac{\mathrm{S},\ \mathrm{T}\ (\mathrm{X} \lor \mathrm{Y})}{\mathrm{S},\ \mathrm{TX} \mid \mathrm{S},\ \mathrm{TY}}$	F $\lor$	$\dfrac{\mathrm{S},\ \mathrm{F}\ (\mathrm{X} \lor \mathrm{Y})}{\mathrm{S},\ \mathrm{FX},\ \mathrm{FY}}$
T $\neg$	$\dfrac{\mathrm{S},\ \mathrm{T}\ (\neg X)}{\mathrm{S},\ \mathrm{FX}}$	F $\neg$	$\dfrac{\mathrm{S},\ \mathrm{F}\ (\neg X)}{\mathrm{S},\ \mathrm{TX}}$
T $\rightarrow$	$\dfrac{\mathrm{S},\ \mathrm{T}\ (\mathrm{X} \rightarrow Y)}{\mathrm{S},\ \mathrm{FX} \mid \mathrm{S},\ \mathrm{TY}}$	F $\rightarrow$	$\dfrac{\mathrm{S},\ \mathrm{F}\ (\mathrm{X} \rightarrow Y)}{\mathrm{S},\ \mathrm{TX},\ \mathrm{FY}}$
T $\leftrightarrow$	$\dfrac{\mathrm{S},\ \mathrm{T}\ (\mathrm{X} \leftrightarrow Y)}{\mathrm{S},\ \mathrm{TX},\ \mathrm{TY} \mid \mathrm{S},\ \mathrm{FX},\ \mathrm{FY}}$	F $\leftrightarrow$	$\dfrac{\mathrm{S},\ \mathrm{F}\ (\mathrm{X} \leftrightarrow Y)}{\mathrm{S},\ \mathrm{TX},\ \mathrm{FY} \mid \mathrm{S},\ \mathrm{FX},\ \mathrm{TY}}$

Esistenziali positivi T : ∃x

Variabile legata	Possibili valori	Valore di verità
x	a	se [x/a] FALSO
	b	se [x/b] VERO
	c	se [x/c] FALSO
	d	se [x/d] VERO
	e	se [x/e] FALSO
	…	…

Se abbiamo una formula

$T : \exists x.\Phi(x)$ (dove x è una variabile legata)

il tableau la sostituisce per

$T : \Phi(a)$

dove a è una **NUOVA costante** (che NON è nel ramo)

Il razionale è:

- *E' sufficiente che ci sia **un** elemento del dominio che rende vera la formula*
- *Ma non è detto che sia uno degli elementi già incontrati nel tableaux e che rendono vere/false altre formule*

Universali negativi F : ∀x

Variabile legata	Possibili valori	Valore di verità
x	a	se [x/a] VERO
	b	se [x/a] FALSO
	c	se [x/a] VERO
	d	se [x/a] FALSO
	e	se [x/a] FALSO
	…	…

Se abbiamo una formula

F : $\forall x.\Phi(x)$ *(dove x è una variabile legata)*

il tableau la sostituisce per

F : $\Phi(a)$

dove **a** è una **NUOVA costante** (che NON è nel ramo)

Il razionale è:

- *E' sufficiente che ci sia **un** elemento del dominio che rende FALSA la formula*
- *Ma non è detto che sia uno degli elementi già incontrati nel tableaux e che rendono vere/false altre formule*

Specularità

Le regole dei quantificatori sono speculari per un motivo specifico

$\forall x.\ (\text{Uomo}(x) \rightarrow \text{Mortale}(x))$ *è equivalente a* $\neg\exists x\ \neg(\text{Uomo}(x) \rightarrow \text{Mortale}(x))$

$\exists x.\ (\text{Uomo}(x) \wedge \text{Filosofo}(x))$ *è equivalente a* $\neg\forall x\ \neg(\text{Uomo}(x) \wedge \text{Filosofo}(x))$

Altri casi

Per i casi restanti, dobbiamo stare molto attenti:

fanno referenza a **TUTTI** gli elementi del dominio

- T:∀ ci dice che TUTTI gli elementi del dominio devono rendere rendere vera la formula
- F:∃ ci dice che TUTTI gli elementi del dominio devono rendere rendere FALSA la formula

Universali positivi T:∀

Variabile legata	Possibili valori	Valore di verità
x	a	se [x/a] VERO
	b	se [x/b] VERO
	c	se [x/c] VERO
	d	se [x/d] VERO
	e	se [x/e] VERO
	…	VERO

La formula

$T : \forall x.\Phi(x)$

dice che TUTTI gli elementi del dominio devono soddisfare Φ

Quindi, dobbiamo introdurre $\Phi(a)$ per OGNI costante a che esiste nel tableau

Ma dobbiamo tenere presente che:

1. **nuovi oggetti** possono apparire più avanti nello sviluppo
2. E ricordare che il dominio **non può essere vuoto**

Universali positivi T:∀

La formula

$$T : \forall x.\Phi(x)$$

è sostituita per

$$T : \Phi(a),\ T : \forall x.\Phi(x)$$

dove a è:

- una costante nel tableau, se esiste
- se non esiste, introdurre una **nuova costante**

Es:

$$\frac{T: \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))}{T: P(t) \rightarrow Q(t),\ T: \forall x(P(x) \rightarrow Q(x))}\ T\forall[x/t]$$

Sostituiamo alla variabile x la costante t

La formula originale quantificata universalmente **riappare SEMPRE nella conclusione**

Il razionale è: dobbiamo verificare che ogni costante che appare nel tableau soddisfi la formula (per quello non basta una sola sostituzione e riportiamo la formula)

Esempio

$$\dfrac{F : \forall x.P(x) \land Q(a) \rightarrow \forall y.P(y)}{T : \forall x.P(x) \land Q(a),\ F : \forall y.P(y)}\ F\rightarrow$$

$$\dfrac{T : \forall x.P(x) \land Q(a),\ F : \forall y.P(y)}{T : \forall x.P(x),\ T : Q(a),\ F : \forall y.P(y)}\ T\land$$

$$\dfrac{T : \forall x.P(x),\ T : Q(a),\ F : \forall y.P(y)}{T : \boxed{\forall x.P(x)},\ T : Q(a),\ F : P(\mathbf{t})}\ F\forall[y/t]$$

$$\dfrac{T : \boxed{\forall x.P(x)},\ T : Q(a),\ F : P(\mathbf{t})}{T : P(t),\ T : \boxed{\forall x.P(x)},\ T : Q(a),\ F : P(t)}\ T\forall[x/t]$$

✖ Ramo chiuso → formula valida

Esistenziali negativi F:∃

Variabile legata	Possibili valori	Valore di verità
x	a	se [x/a] FALSO
	b	se [x/a] FALSO
	c	se [x/a] FALSO
	d	se [x/a] FALSO
	e	se [x/a] FALSO
	…	FALSO

La formula

$F : \exists x.\Phi(x)$

dice che NESSUN elemento del dominio soddisfa Φ

È sostituita con

$F : \Phi(a), F : \exists x.\Phi(x)$

Dove a è:

- una **costante** nel tableau, se esiste
- una **nuova costante**, se non esiste alcuna

<u>Anche in questo caso devo riportare $F : \exists x.\Phi(x)$</u>

Il razionale è: dobbiamo verificare che ogni costante che appare nel tableau renda falsa la formula (per quello non basta una sola sostituzione e riportiamo la formula)

Esempio

$F : \exists x.P(x) \wedge Q(a) \rightarrow \exists y.P(y)$

$F \rightarrow$

$T : \exists x.P(x) \wedge Q(a),\ F : \exists y.P(y)$

$T \wedge$

$T : \exists x.P(x),\ T : Q(a),\ F : \exists y.P(y)$

$T \exists[x/t]$

$T : P(t),\ T : Q(a),\ F : \exists y.P(y)$

$F \exists\ [y/a]$ Passaggio inutile, ma posso proseguire

$T : P(t),\ T : Q(a),\ F : P(a),\ F : \exists y.P(y)$

$F \exists\ [y/t]$

$T : P(t),\ T : Q(a),\ F : P(a),\ F : P(t),\ F : \exists y.P(y)$

Ramo chiuso → formula valida

T ∃	$\dfrac{S,\ T\ \exists x\ \phi(x)}{S,\ T\ \phi(a)}$	F ∃	$\dfrac{S,\ F\ \exists x\ \phi(x)}{S,\ F\phi(a),\ F\ \exists x\ \phi(x)}$
T ∀	$\dfrac{S,\ T\ \forall x\ \phi(x)}{S,\ T\phi(a),\ T\forall x\ \phi(x)}$	F ∀	$\dfrac{S,\ F\ \forall x\ \phi(x)}{S,\ F\ \phi(a)}$

Importante

Se non ho usato un ordine ottimale di sostituzione,

> *Portarsi dietro la* formula nei due casi, ci permette di fare nuove sostituzioni e chiudere il tableau

Teniamo presente che l'obiettivo è quello di far convergere il tableau ad una soluzione in cui ci sia un atomo segnato vero e falso (se esiste)

Processo del Tableau

Si applicano le regole del tableau finché
non si possono applicare più

Il tableau è aperto se NON c’`e una contraddizione ovvia
(senza variabili)

Ogni tableau completo aperto rappresenta
l’esistenza di un modello

Conseguenze

Se da F : Φ il tableau finisce con tutti i rami chiusi

Φ è una tautologia

Se da T : Φ il tableau finisce con tutti i rami chiusi

Φ è una contraddizione

Altrimenti, è soddisfacibile non tautologica

Credits

Rafael Penaloza: rafael.penaloza@unimib.it

Stefania Bandini: stefania.bandini@unimib.it

Ugo Moscato: ugo.moscato@unimib.it

Matteo Palmonari: matteo.palmonari@unimib.it

G Paronitti: g.paronitti@gmail.com