STRUTTURE RELAZIONALI, GRAFI E ORDINAMENTI

(parte 3)

Stefania Bandini

GRAFI

GRAFI

I **grafi** sono strutture matematiche discrete che rivestono interesse sia per la matematica che per un'ampia gamma di campi applicativi.

La **teoria dei grafi** costituisce un'importante parte di: combinatoria, topologia, teoria degli automi, funzioni speciali, geometria dei poliedri, etc.

In **informatica**: per schematizzare programmi, circuiti, reti di computer, mappe di siti.

Sono alla base di **modelli di sistemi e processi** studiati nell'ingegneria, nella chimica, nella biologia molecolare, nella ricerca operativa, nella organizzazione aziendale, nella geografia (sistemi fluviali, reti stradali, trasporti), nella linguistica strutturale, nella storia (alberi genealogici, filologia dei testi).

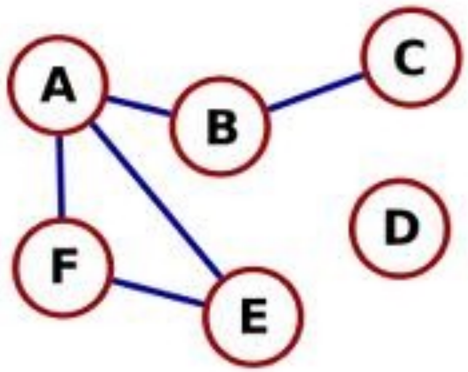
GRAFI

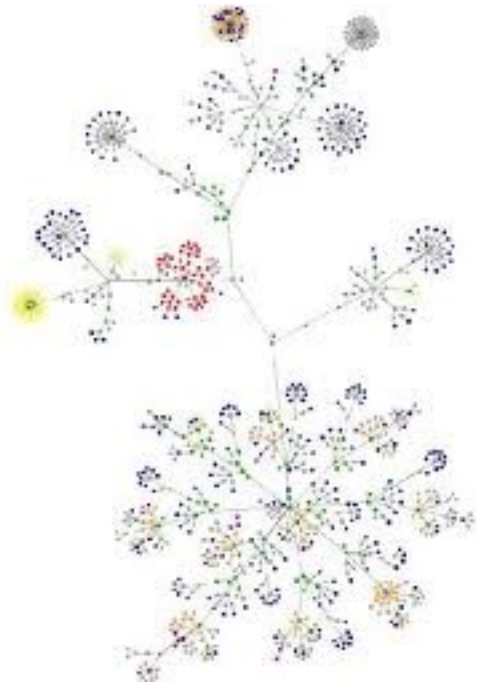
Le **strutture** che possono essere rappresentate da grafi sono onnipresenti e molti problemi di interesse pratico possono essere formulati come questioni relative a grafi. In particolare, le reti possono essere descritte in forma di grafi.

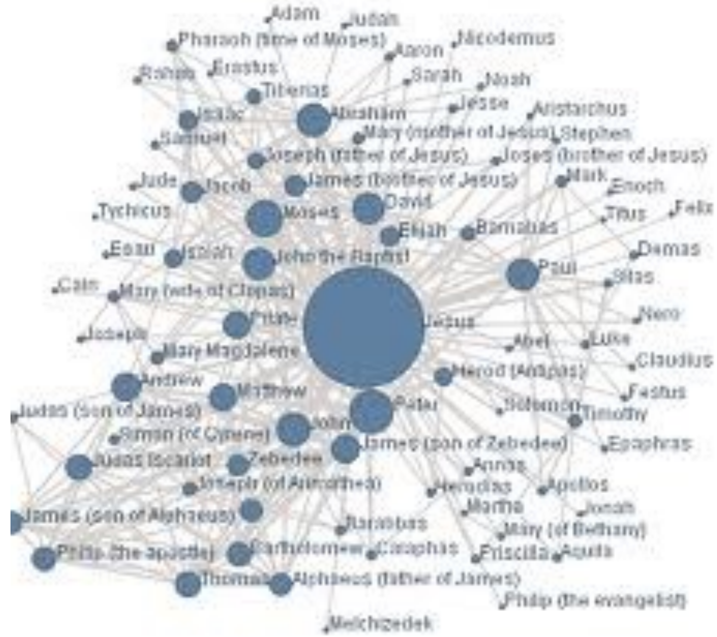
Esempio: la struttura dei link della Wikipedia, come tutti gli ipertesti, può essere rappresentata da un grafo orientato, dove i vertici sono gli articoli e gli archi rappresentato l'esistenza di un link tra un articolo e l'altro.

I grafi orientati sono anche utilizzati per rappresentare le macchine a stati finiti e molti altri formalismi, come ad esempio diagrammi di flusso, catene di Markov, schemi entità-relazione, reti di Petri e molti altri.

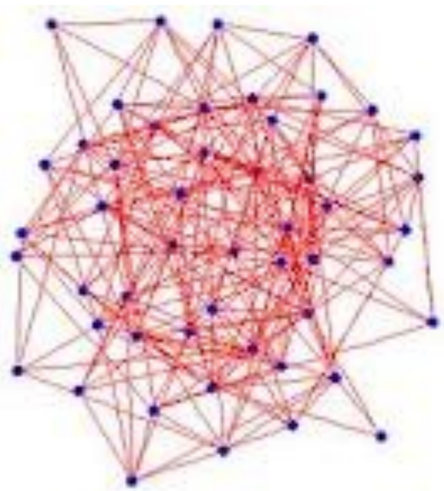
Lo sviluppo di algoritmi per manipolare i grafi è una delle aree di maggior interesse dell'informatica.


A
B
C
D
E
F




Adam
Judah
Pharaoh (time of Moses)
Aaron
Nicodemus
Erastus
Sarah
Noah
Tiberias
Jesse
Aristarchus
Isaac
Abraham
Mary (mother of Jesus)
Stephen
Samuel
Joseph (father of Jesus)
Joses (brother of Jesus)
Jude
Jacob
James (brother of Jesus)
Mark
Enoch
Tychicus
David
Moses
Titus
Felix
Elijah
Barnabas
Esau
Isaiah
John the Baptist
Demas
Paul
Silas
Cain
Mary (wife of Clopas)
Nero
Pilate
Jesus
Joseph
Abel
Luke
Mary Magdalene
Claudius
Herod (Antipas)
Andrew
Festus
Matthew
Judas (son of James)
Peter
Solomon
Timothy
John
Simon (of Cyrene)
James (son of Zebedee)
Epaphras
Judas Iscariot
Zebedee
Annas
Joseph (of Arimathea)
Herodias
Apollos
Martha
Jonah
James (son of Alphaeus)
Barabbas
Mary (of Bethany)
Philip (the apostle)
Bartholomew
Caiaphas
Priscilla
Aquila
Thomas
Alphaeus (father of James)
Philip (the evangelist)
Melchizedek


Magnanella
Castagneto
TERAMO
Torricella
Poggio Cono
Valle
Borgonovo
Canzano
Caprafico
Cle.S. Pietro
Miano
Roicciano
Frondarola
Spiano
Rapino
Montorio al Vomano
Collevecchio
Villa Maggiore
Leognano
Villa Petto
Sta. Maria
Falano
Castiglione
Ronzano
Castel Castagna
Fossicia
Ornano Gr.
Figura 10



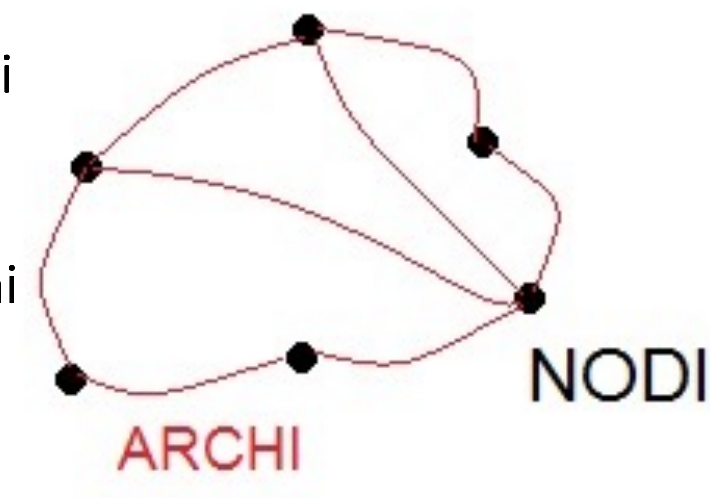
GRAFI - RAPPRESENTAZIONE

Un grafo viene generalmente raffigurato sul piano da punti o cerchietti, che rappresentano i nodi.

Archi (o spigol)i sono rappresentati da segmenti o curve che collegano due nodi.

Il posizionamento dei nodi e la forma degli archi è irrilevante, dal momento che a contare sono solo i nodi e le relazioni tra essi.

Lo stesso grafo può essere disegnato in molti modi diversi senza modificarne le proprietà.



GRAFI

I **grafi** sono oggetti discreti che permettono di schematizzare una grande varietà di situazioni e di processi e spesso di consentirne l'analisi in termini quantitativi e algoritmici.

In termini informali, per **grafo** si intende una struttura costituita da:

- **oggetti semplici**, detti vertici (*vertices*) o nodi (*nodes*)
- **collegamenti** tra i vertici. I collegamenti possono essere:
  - **orientati**, e in questo caso sono detti archi (*arcs*), e il grafo è detto **orientato**
  - **non orientati**, e in questo caso sono detti spigoli (*edges*), e il grafo è detto **non orientato**
  - eventualmente **dati associati a nodi e/o collegamenti**

GRAFI

Nel caso una relazione binaria G sia definita su un insieme V: $G \subseteq V \times V$ la relazione binaria può essere rappresentata mediante un *grafo orientato* (talvolta detto *diretto* o anche *digrafo*, dall'inglese "directed graph").

Gli elementi di V sono detti *vertici* o *nodi* del grafo e gli elementi di G sono detti *archi*.

Rappresentazioni di una relazioni binaria G

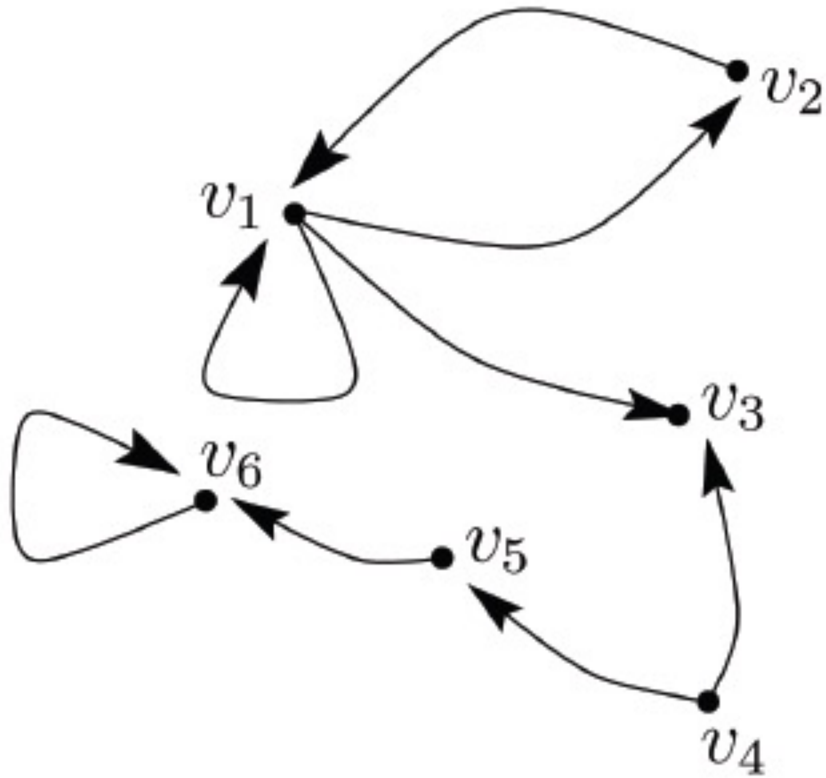
Sia dato un insieme di vertici $V = \{v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6\}$. Sia data la relazione binaria G su $V \times V$

$\{\langle v_1, v_1\rangle, \langle v_1, v_2\rangle, \langle v_1, v_3\rangle, \langle v_2, v_1\rangle, \langle v_4, v_3\rangle, \langle v_4, v_5\rangle, \langle v_5, v_6\rangle, \langle v_6, v_6\rangle\}$

La seguente tabella rappresenta la relazione binaria G

v_1	v_1
v_1	v_2
v_1	v_3
v_2	v_1
v_4	v_3
v_4	v_5
v_5	v_6
v_6	v_6

Rappresentazioni di una relazioni binaria G



Grafo associato alla relazione introdotta nell'esempio precedente

Rappresentazioni di relazioni

La relazione G introdotta nell'esempio precedente può anche essere rappresentata mediante la seguente matrice booleana

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Definizione formale di grafo

Un **grafo orientato** è una coppia $G = (V, E)$ dove

- V è un insieme di **nodi** ed
- $E \subseteq V \times V$ è una relazione binaria in V (**archi**)

Un **grafo non orientato** è un caso particolare di un grafo orientato, dove E è una relazione simmetrica

In questo caso, gli archi sono a volta rappresentati come **coppie non ordinate** (v, w) dove $(v, w) = (w, v)$ per ogni $v, w \in V$

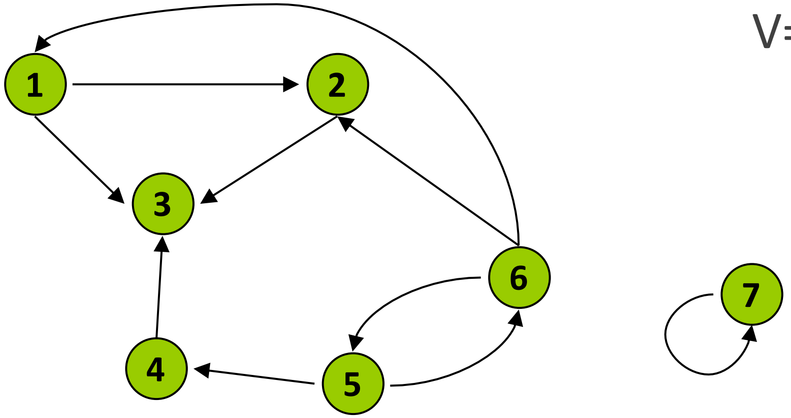
Per rappresentare un grafo non orientato togliamo le frecce (l'ordine) dagli archi

Grafo diretto

Un grafo diretto **G** è definito da due insiemi (V, E).

V è l'insieme dei **vertici** {1, 2, 3, … , n} (detti anche **nodi**).

E è l'insieme degli **archi diretti (u, v)** con u e v in V



V= {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}

Grafo non diretto

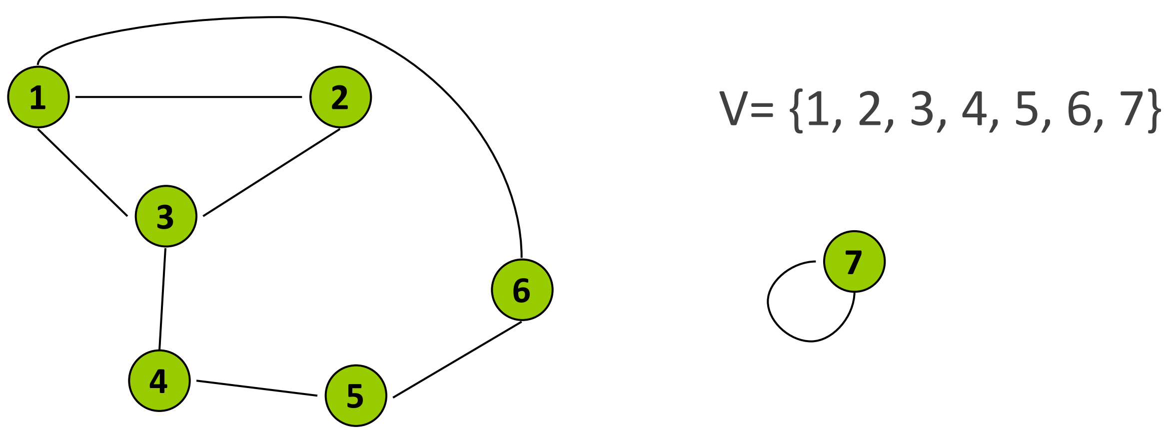
Un grafo non diretto **G'** è definito da due insiemi (V', E').

V' è l'insieme dei **vertici** {1, 2, 3, … , n} (detti anche **nodi**).

E' è l'insieme degli **archi non diretti (u, v)** con u e v in V'.

Nota: *(u, v) risulta identico a (v, u)!*

Quindi, per rappresentare il grafo G' con un grafo diretto, basta sostituire ogni arco non diretto (u,v) con i due archi diretti (u,v) e (v,u).



Grado

Se c'è un arco tra v e w (in qualunque direzione) diciamo che v e w sono **adiacenti**. L'arco è **incidente** su v e w

Il **grado** di v è il numero di nodi adiacenti a v

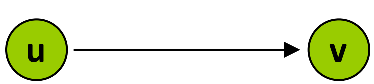
Incidenza e adiacenza

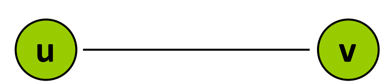
Nel grafo diretto G = (V, E), si dice che l’arco diretto **(u, v)** è **incidente** da **u** a **v** (l’arco esce da u ed entra in v).

Nel grafo non diretto G’ = (V’, E’), si dice semplicemente che l’arco non diretto **(u, v)** è **incidente su u** e **v.**

I vertici **u** e **v** risultano **adiacenti** tra di loro

In un grafo diretto G si può scrive **u** $\rightarrow$ **v**, per mettere in evidenza il verso di percorrenza dei due vertici adiacenti.



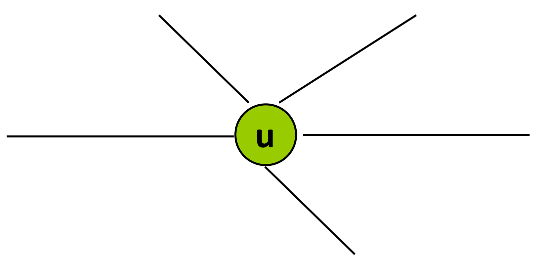


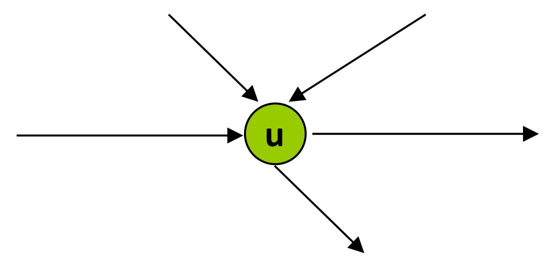
Grado di un nodo

Il grado di un nodo u corrisponde al **numero di archi incidenti** con u.

In un grafo diretto si può anche calcolare il **grado uscente** o il **grado entrante** di u, rispettivamente il numero di archi uscenti da u o entranti in u.

$\delta^{-}(u) = 3$





$\delta(u) = 5$

$\delta^{+}(u) = 2$

TERMINOLOGIA

Un arco che congiunge v_i a v_j si dice *uscente* da v_i ed *entrante* in v_j.

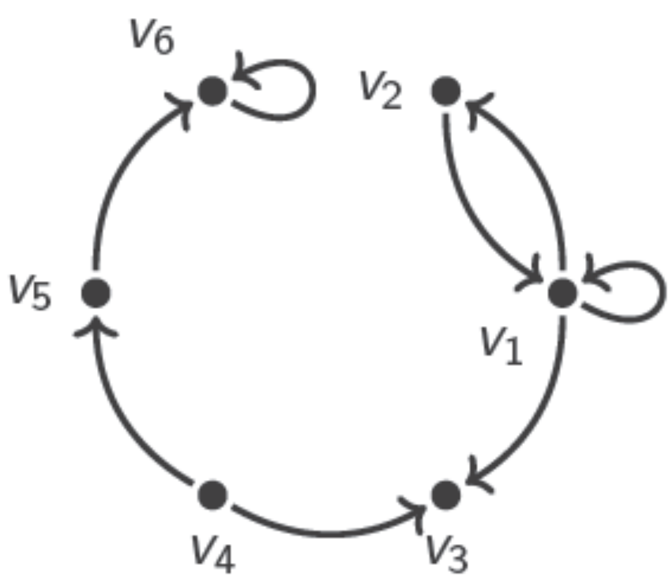
Il numero di archi uscenti da un nodo è detto *grado di uscita* del nodo.

Il numero di archi entranti in un nodo è detto *grado di ingresso* del nodo.

Un nodo di un grafo si chiama *nodo sorgente* se non ha archi entranti, *nodo pozzo* se non ha archi uscenti.

Un nodo di un grafo si dice *nodo isolato* se non ha archi entranti né uscenti.

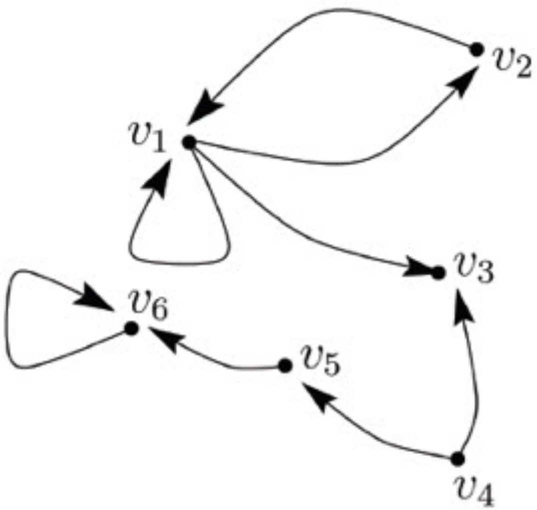
Esempio



	grado di uscita	grado di ingresso	sorgente	pozzo
v_1	3	2	no	no
v_2	1	1	no	no
v_3	0	2	no	si
v_4	2	0	si	no
v_5	1	1	no	no
v_6	1	2	no	no

PROPRIETA' DEI NODI

Esempio



v_1 ha grado di ingresso 2 e uscita 3;

v_2 ha grado di ingresso 1 e uscita 1;

v_3 ha grado di ingresso 2 e uscita 0 (nodo pozzo);

v_4 ha grado di ingresso 0 (nodo sorgente) e uscita 2;

v_5 ha grado di ingresso 1 e uscita 1;

v_6 ha grado di ingresso 2 e uscita 1.

TERMINOLOGIA

Un *cammino* tra due nodi v_{in} e v_{fin} di un grafo è una sequenza finita di nodi $\langle v_1, v_2, \ldots v_n \rangle$ con $v_1 = v_{in}$ e $v_n = v_{fin}$, dove ciascun nodo è collegato al successivo della sequenza da un arco uscente dal primo ed entrante nel secondo.

Un *semicammino* tra due nodi v_{in} e v_{fin} di un grafo è una sequenza finita $\langle v_1, v_2, \ldots v_n \rangle$ con $v_1 = v_{in}$ e $v_n = v_{fin}$, dove ciascun nodo è collegato al successivo della sequenza da un arco di direzione arbitraria.

La *lunghezza* di un cammino (o di un semicammino) tra due nodi di un grafo è data dal numero di archi che lo compongono; quindi essa è uguale al numero dei nodi della sequenza, meno 1.

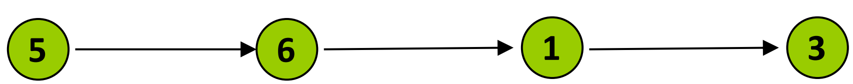
Cammini su un grafo

Un **cammino** è una sequenza **<v_1, v_2, …, v_k>** di nodi a due a due adiacenti, dove (v_i, v_{i+1}) con i = 1 ,…, k-1 è un arco del grafo.

Se v_1 = u e v_k= v, allora si dice che esiste un cammino tra u e v (u~>v) e che v è **raggiungibile** da u.

Il **cammino** di dice **semplice** se i vertici sono tutti distinti.

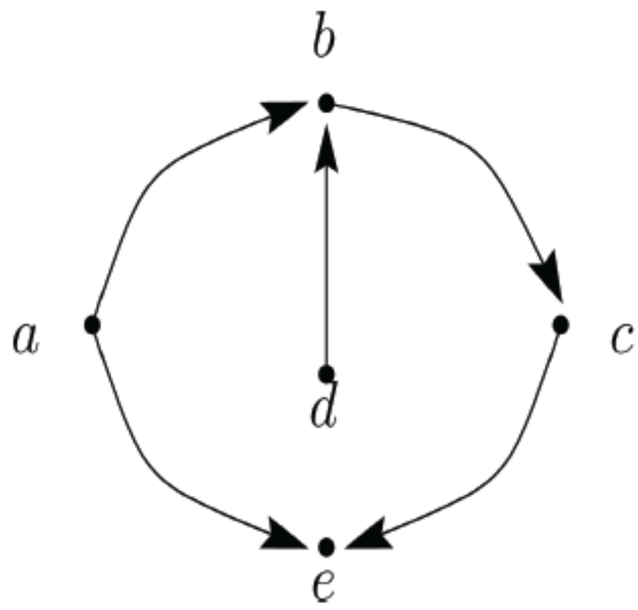
Un **sottocammino <v_i, v_{i+1}, …, v_j>** (con 0 ≤ i ≤ j ≤ k) è una sottosequenza continua dei vertici che compongono un cammino.



Un cammino semplice del primo grafo diretto:

<5, 6, 1, 3>

CAMMINI



Nel grafo in figura ci sono due **cammini** tra *a* ed *e*

- un cammino di lunghezza 1: $\langle a, e\rangle$;
- un cammino di lunghezza 3: $\langle a, b, c, e\rangle$.

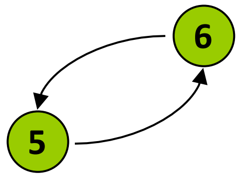
Non ci sono cammini tra a e d, ma c'è un semicammino di lunghezza 2: $\langle a, b, d\rangle$, un semicammino di lunghezza 4: $\langle a, e, c, b, d\rangle$, uno di lunghezza 6: $\langle a, b, c, e, a, b, d\rangle$, eccetera.

Cicli su un grafo

Un **ciclo** è un cammino $\mathbf{<v_1, v_2, \ldots, v_k>}$ dove $\mathbf{v_1 = v_k}$

Quando il sottocammino $<v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}>$ del ciclo è semplice allora di dice che il **ciclo è semplice**.

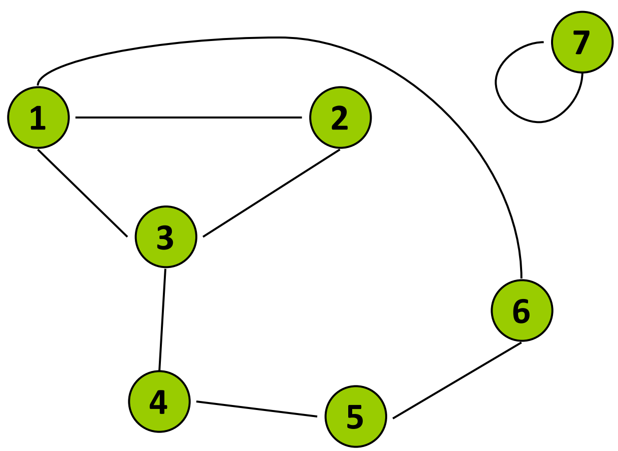
Un grafo senza cicli è detto **aciclico**.



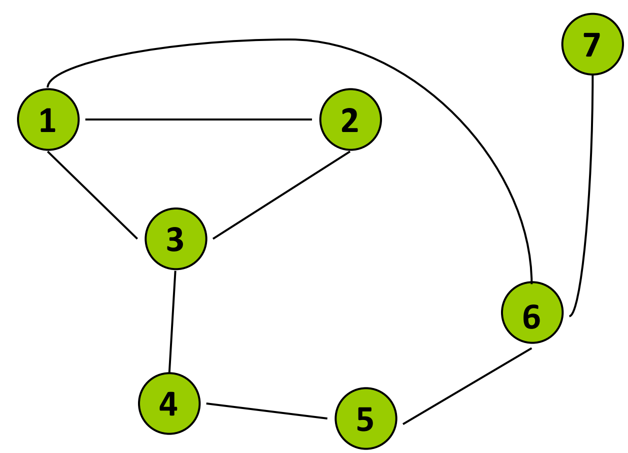
Grafo connesso

Un **grafo non diretto** è **connesso** se ogni coppia di vertici è connesso da un cammino.

Un **grafo diretto** è detto **fortemente connesso** se esiste un cammino tra ogni coppia di vertici. Quindi si ha u~> v e v~> u per ogni coppia di vertici (u, v).



G_1 non connesso



G_2 connesso

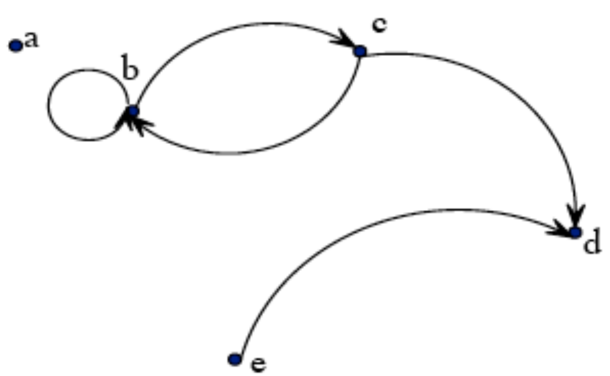
CONNESSIONI

Un grafo si dice *connesso* se, dati due nodi qualunque purché distinti, esiste sempre un semicammino tra essi.

Un *ciclo* intorno ad un nodo v di un grafo è un cammino in cui $v = v_{in} = v_{fin}$.

Un *semiciclo* intorno ad un nodo di un grafo è un semicammino in cui $v = v_{in} = v_{fin}$.

Un *cappio* intorno ad un nodo è un cammino di lunghezza 1.



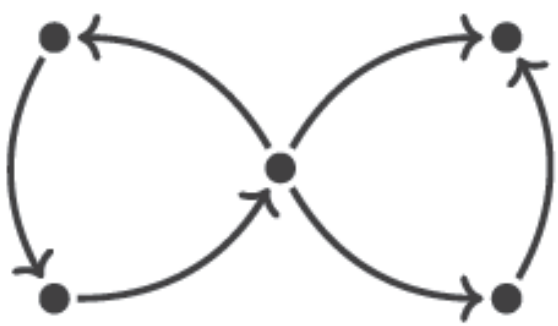
Esempio di grafo non connesso.

Connetività

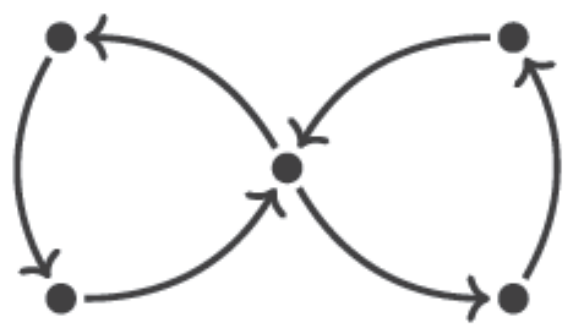
Ricordiamo che un grafo $G = (V, E)$ è **connesso** se per ogni due nodi $v, w \in V$ esiste un **semicammino** da v a w

G è **fortemente connesso** se per ogni due nodi $v, w \in V$ esiste un **cammino**—che preserva la direzione degli archi—da v a w

In particolare, in un grafo fortemente connesso esiste sempre un ciclo (non necessariamente semplice) che visita **ogni** nodo e non ci sono né sorgenti né pozzi



connesso



fortemente connesso

DISTANZA

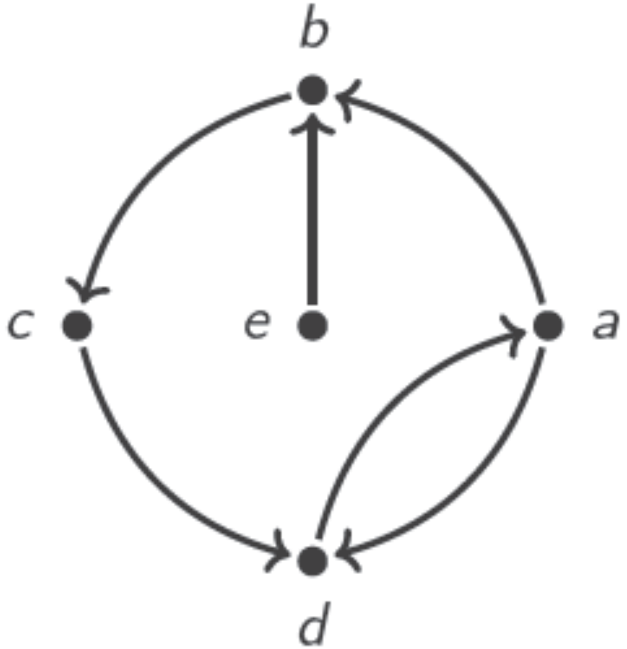
La **distanza** da v a w è la lunghezza del cammino **più corto** tra v e w

- La distanza da v a v è **sempre** 0
- Se v e w non sono connessi—ossia, non c'è nessun cammino tra v e w—allora la distanza è infinita (∞)

Nota: in un grafo ordinato, la distanza da v a w **non** è sempre uguale alla distanza da w a v

DISTANZA

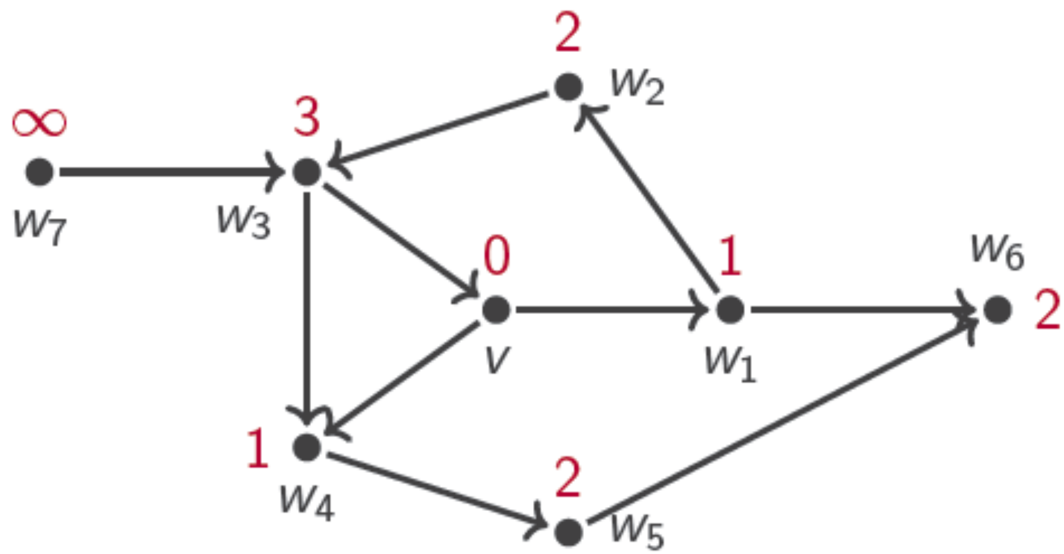
Esempio



- distanza da a a b: 1
- distanza da a a d: 1
- distanza da b ad a: 3
- distanza da d ad a: 1
- distanza da e a d: 3
- distanza da a ad e: ∞

DISTANZA

Trovare distanze



Le distanze da v ad ogni nodo del grafo

Trovare distanze: Algoritmo

Per trovare le distanze di un nodo v ad ogni nodo del grafo, utilizziamo un'algoritmo di ricerca in ampiezza

Inizializzazione: segnare v come **visitato** con distanza $d(v) = 0$; segnare altri nodi **non visitato**

Ciclo: finché ci sono nodi **visitato**

- trovare un nodo w **visitato** con distanza minima $d(w) = n$
- segnare w come **esplorato**
- per ogni nodo w' incidente da w: se w' è **non visitato**, segnare w' come **visitato** e $d(w') = n + 1$

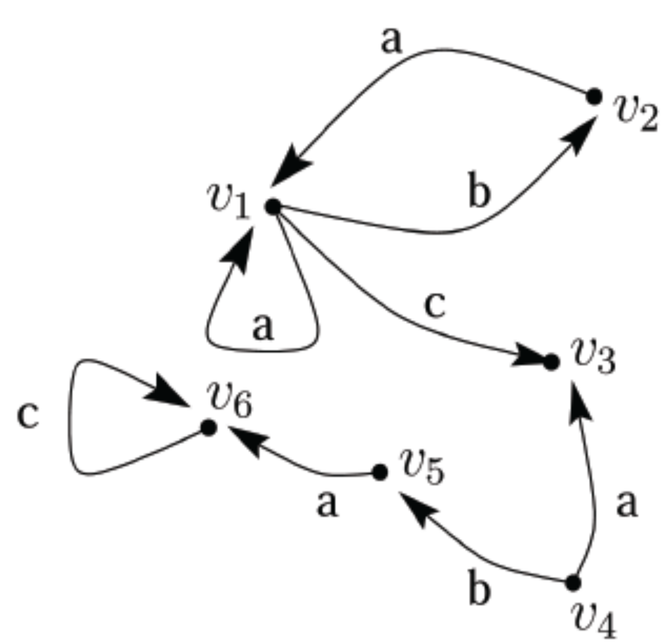
Finalizzazione: assegnare ad ogni nodo w **non visitato** distanza $d(w) = \infty$

GRAFO ETICHETTATO

Un *grafo etichettato* è una funzione che associa ad ogni arco di un grafo un'etichetta.

Sia $G \subseteq V \times V$ un grafo.

Un grafo etichettato è una funzione $E : G \mapsto N$ dove N è un insieme di nomi, o etichette.



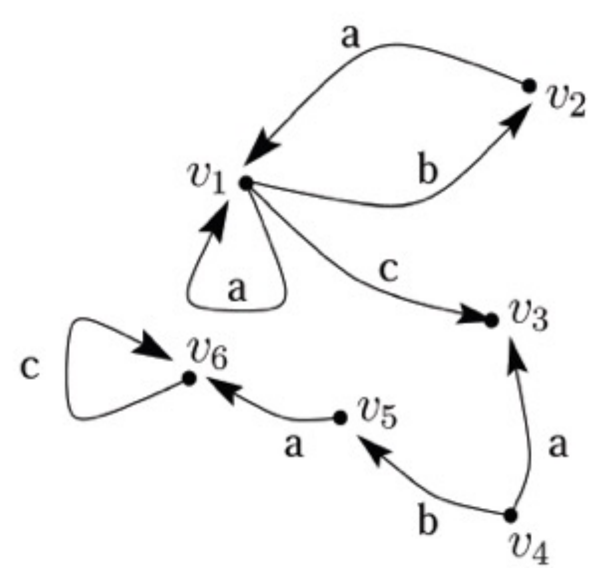
GRAFO ETICHETTATO NEGLI ARCHI

Sia dato l'insieme di vertici V e la relazione binaria G su $V \times V$

Sia $N = \{a, b, c\}$ un insieme di nomi e sia $E : G \mapsto N$

la funzione di etichettatura di G definita dalla seguente tabella

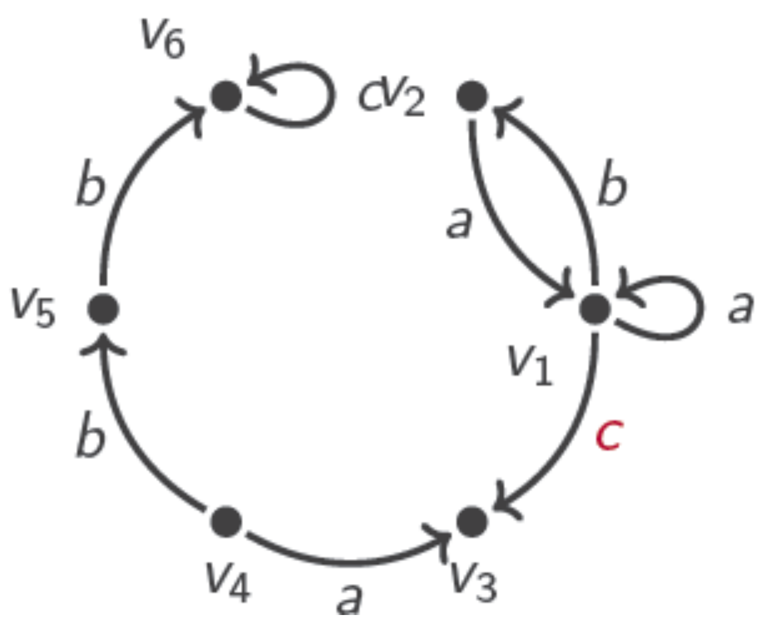
v_1	v_1	a
v_1	v_2	b
v_1	v_3	c
v_2	v_1	a
v_4	v_3	a
v_4	v_5	b
v_5	v_6	a
v_6	v_6	c



Grafi etichettati

Un **grafo etichettato** è una tripla $G = (V, E, \ell)$ dove (V, E) è un grafo e $\ell : E \to L$ è una funzione totale che associa ad ogni arco $e \in E$ una **etichetta** provenente da L

Intuitivamente, diamo una etichetta ad ogni arco dal grafo. Sul disegno, posizioniamo l'etichetta accanto ad ogni arco

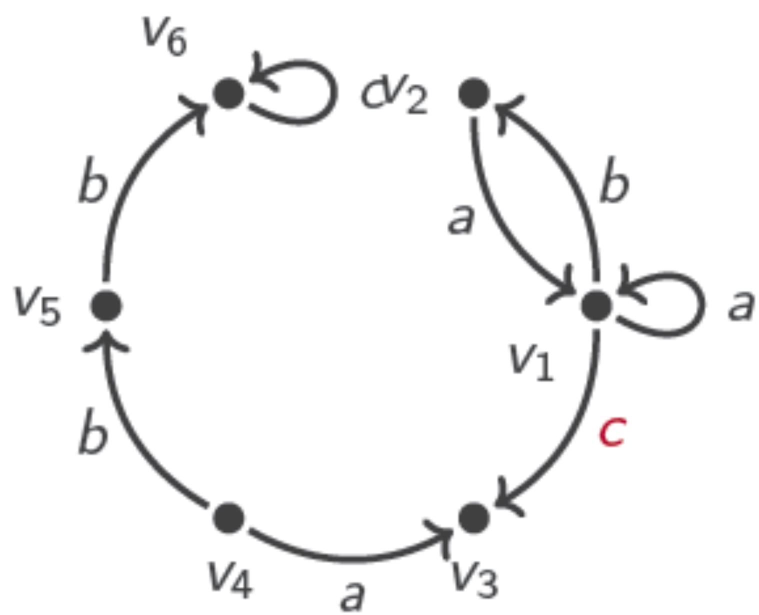


$$\ell(\langle v_1, v_3 \rangle) = c$$

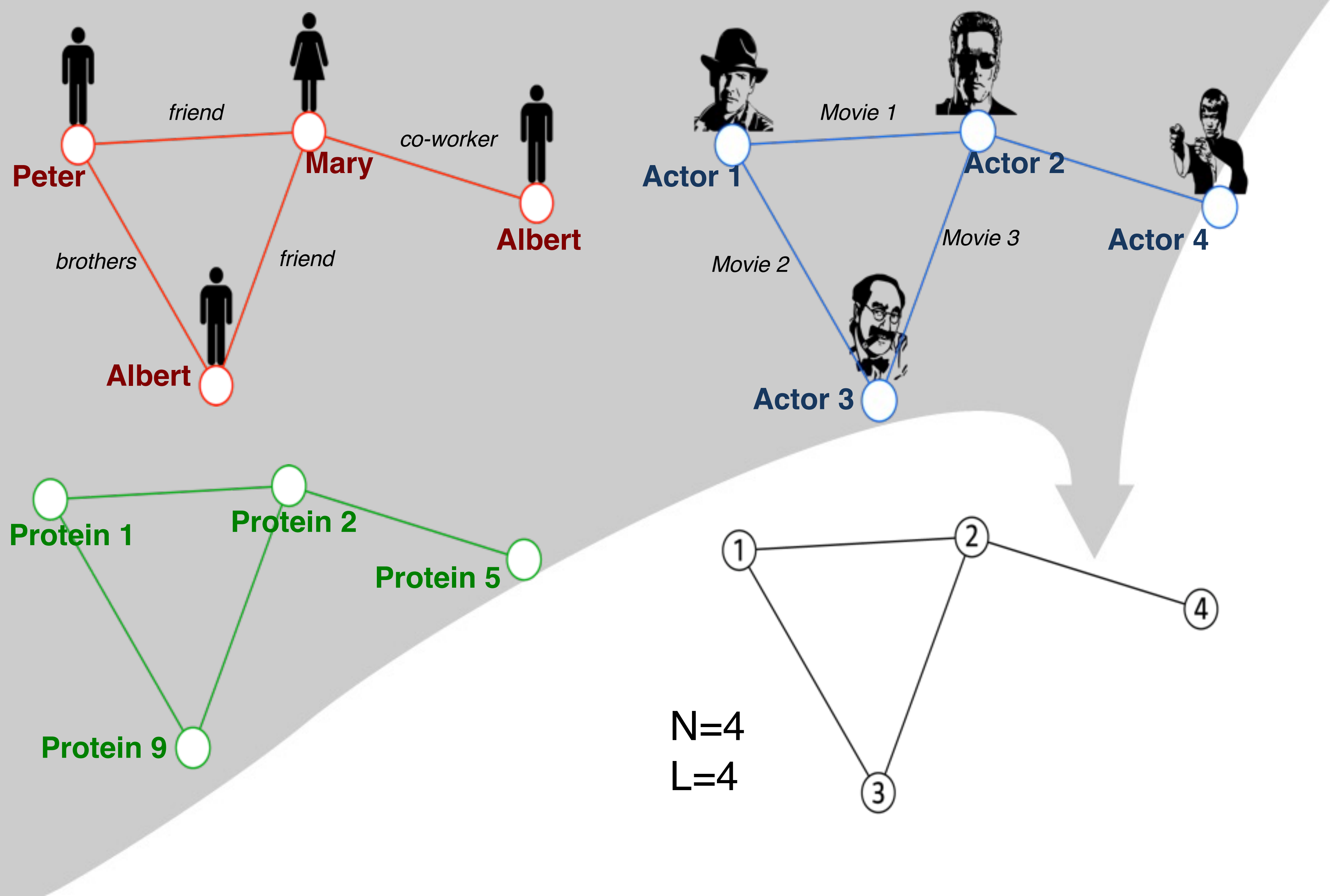
Relazioni ternarie

Un grafo etichettato si può utilizzare per rappresentare una relazione ternaria (e viceversa)

v_1	v_1	a
v_1	v_2	b
v_1	v_3	c
v_2	v_1	a
v_4	v_3	a
v_4	v_5	b
v_5	v_6	b
v_6	v_6	c

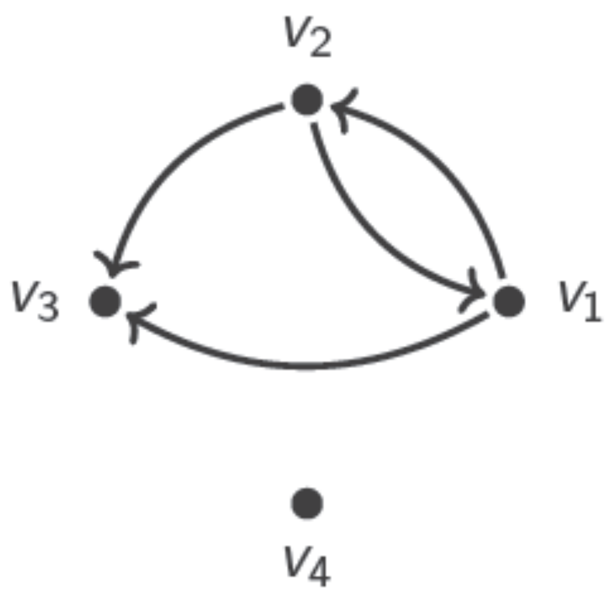


A COMMON LANGUAGE



Matrice di adiacenza

Se $G = (V, E)$ è un grafo con $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, la **matrice di adiacenza** è una matrice booleana di dimenzione $n \times n$ che contiene un 1 sulla posizione (i, j) sse $\langle v_i, v_j \rangle \in E$

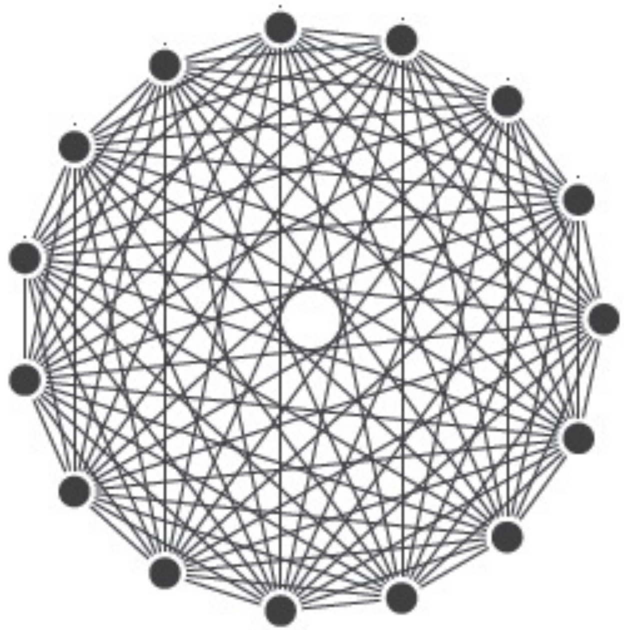


$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nota: per una grafo non orientato, la matrice di adiacenza è **sempre** simmetrica

Grafo completo

In un **grafo completo**, ogni nodo è collegato con tutti gli altri nodi (ma **non con se steso**)



La matrice di adiacenza di un grafo completo ha 0 su tutta la diagonale, ed 1 sulle altre posizioni

Sottografo

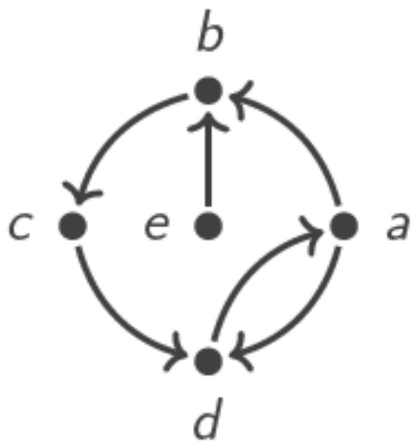
Il grafo $G_1 = (V_1, E_1)$ è un **sottografo** di $G_2 = (V_2, E_2)$ sse $V_1 \subseteq V_2$ ed $E_1 \subseteq E_2$

Un sottografo si ottiene rimuovendo nodi e/o archi dal grafo $(*)$

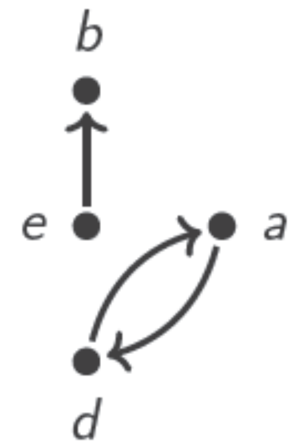
Sia $G = (V, E)$ un grafo. Il sottografo **indotto** da $V' \subseteq V$ è definito come il grafo che ha soltanto archi adiacenti agli elementi di V'.

Formalmente, è il grafo $G = (V', E')$ dove $E' = \{\langle v, w\rangle \in E \mid v, w \in V'\}$

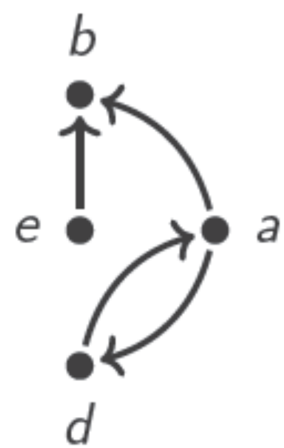
Esempio



Grafo



Sottografo



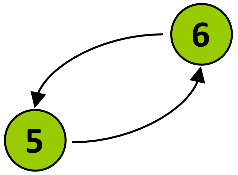
Sottografo indotto da $\{a, b, d, e\}$

Cicli su un grafo

Un **ciclo** è un cammino $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$ dove $v_1 = v_k$

Quando il sottocammino $\langle v_1, v_2, \ldots, v_{k-1} \rangle$ del ciclo è semplice allora di dice che il **ciclo è semplice**.

Un grafo senza cicli è detto **aciclico**.



Isomorfismi tra grafi

Due grafi $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$ sono **isomorfi** se esiste una funzione biunivoca $f : V_1 \to V_2$ tale che

$$\langle v, w \rangle \in E_1 \quad \text{sse} \quad \langle f(v), f(w) \rangle \in E_2$$

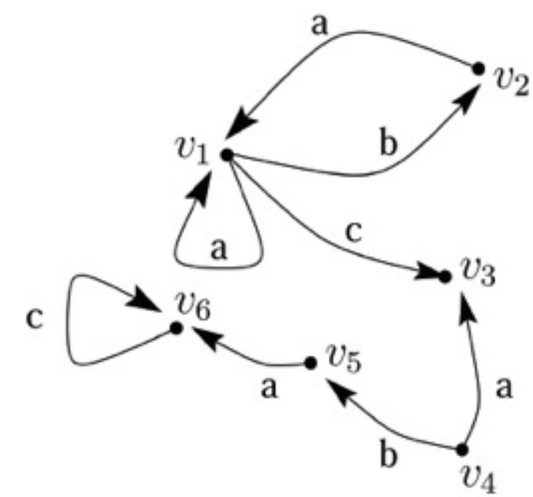
In parole, f mantiene la struttura del grafo G_1, ma cambiando i nomi dei vertici per quelli di G_2

Due grafi isomorfi sono in realtà lo **stesso grafo**, con i nodi rinominati

PROPRIETA’ DEI GRAFI

Sia G una relazione binaria su un insieme V

1. Se G è *riflessiva* allora il corrispondente grafo avrà un cappio intorno a ogni nodo.
2. Se G è una relazione *irriflessiva* allora nel grafo non ci sono cappi.
3. Se G è una relazione *simmetrica* allora nel grafo, ogni volta che c'è un arco tra due nodi, c'è anche quello che va in direzione opposta.
4. Se G è una relazione *asimmetrica* allora tra due nodi non ci saranno mai un arco e il suo inverso.
5. Se G è una relazione *transitiva* allora nel grafo ogni volta che ci sono due archi "in fila" tra tre nodi x_1, x_2 e x_3 c'è anche l'arco che chiude il triangolo tra x_1 e x_3.



RELAZIONI TRANSITIVE SU GRAFI

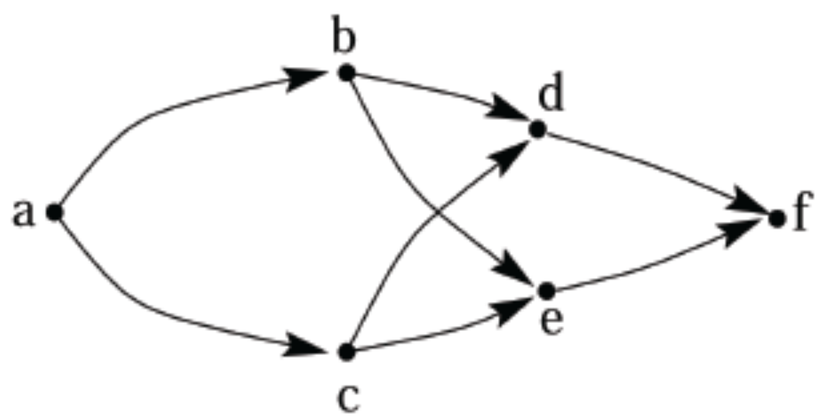
Proposizione 6. *Sia* V *un insieme e* R *una relazione binaria su* V, $R \subseteq V \times V$. R *è transitiva sse ogni qualvolta c'è un cammino di lunghezza* $m > 1$ *tra due nodi* v_i *e* v_n, *allora c'è un arco che collega direttamente* v_i *a* v_n.

GRAFO DIRETTO ACICLICO (DAG)

Un *grafo diretto aciclico* (detto anche DAG, dall'inglese "Directed Acyclic Graph") è un grafo diretto senza cicli.

Sia $R \subseteq S \times S$ dove $S = \{a, b, c, d, e, f\}$;

$$R = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, d\rangle, \langle c, d\rangle, \langle b, e\rangle, \langle c, e\rangle, \langle d, f\rangle, \langle e, f\rangle, \}.$$



STRUTTURE RELAZIONALI, GRAFI E ORDINAMENTI

(parte 3)

END