STRUTTURE RELAZIONALI, GRAFI E ORDINAMENTI

(parte 2)

Stefania Bandini

RELAZIONI D'EQUIVALENZA

Una **relazione di equivalenza** è un concetto matematico che esprime in termini formali quello di *similitudine* tra oggetti

RELAZIONI D'EQUIVALENZA

Sono relazioni per le quali alcuni elementi dell'insieme si equivalgono in base ad una determinata **caratteristica comune**; dal punto di vista della relazione, non esistono differenze tra due elementi equivalenti.

Esempi di relazioni di equivalenza

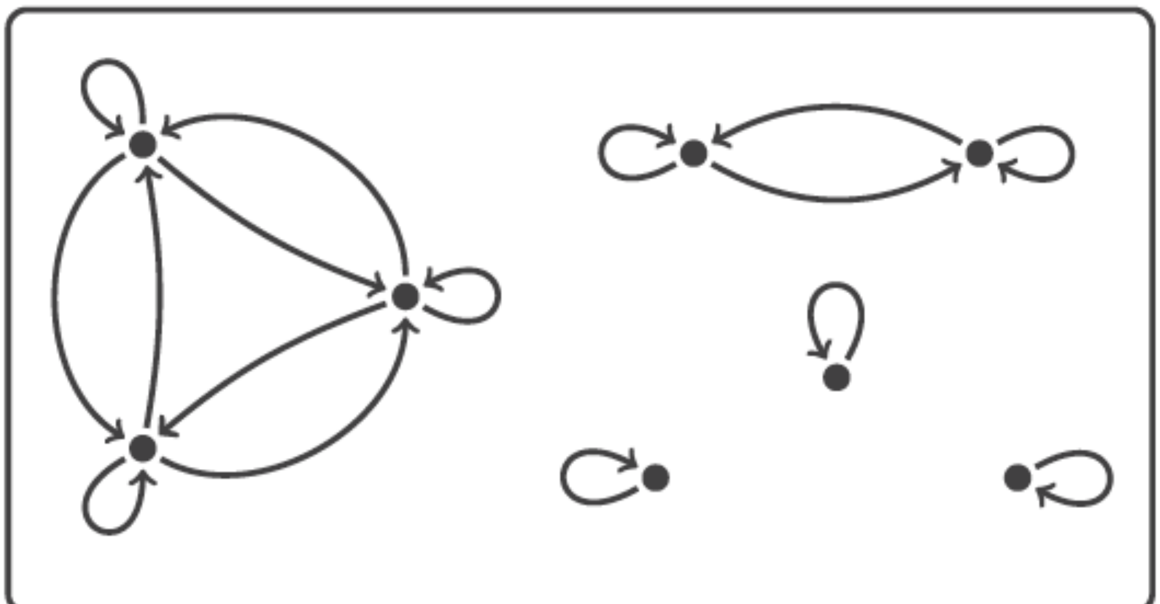
- "essere parallele" nell'insieme delle rette del piano
- "essere isometrici", oppure "avere lo stesso perimetro" nell'insieme dei triangoli
- "avere la stessa altezza"
- "essere nati nello stesso anno", "risiedere nella stessa città" nell'insieme delle persone

RELAZIONI D'EQUIVALENZA

R è una relazione di *equivalenza* su un insieme S sse R è una relazione binaria su S riflessiva, simmetrica e transitiva.

Visualizzazione

La rappresentazione sagittale di una relazione di equivalenza di diversi grafi totalmente collegati



RELAZIONI D'EQUIVALENZA

Esempio

La relazione R:"lo studente x appartiene alla stessa classe dello studente y" è una relazione di equivalenza.

Esempio

La relazione definita nell'insieme dei cittadini italiani nel seguente modo

$$R = \{\langle x, y\rangle \mid x \text{ risiede nella stessa città di } y\}$$

R è una relazione che gode delle proprietà riflessiva, simmetrica, transitiva, quindi è una

RELAZIONI D’EQUIVALENZA

Controesempio

La relazione definita nell'insieme A = {2, 3, 4, 5, 6, 8} nel seguente modo

$$R = \{\langle x, y \rangle \mid x * y \text{ è pari}\}$$

La relazione è l'insieme formato dalle seguenti coppie:

R = {<2, 2>, <2, 4>, <2, 6, <2, 8>, <4, 2>, <4, 4>, <4, 6>, <4, 8>, <6 ,2>, <6, 4>, <6, 6>, <6, 8>, <8, 2>, <8, 4>, <8, 6>, <8, 8>}

R non è riflessiva perché esiste almeno un elemento che non è in relazione con sé stesso: il 3.
R è simmetrica (in base alla proprietà commutativa della moltiplicazione). Non è quindi una relazione di equivalenza.

A cosa servono?

Dividendo S in gruppi i cui elementi sono uguali rispetto ad una proprietà, possiamo studiare insiemi grandi, osservando soltanto pochi elementi

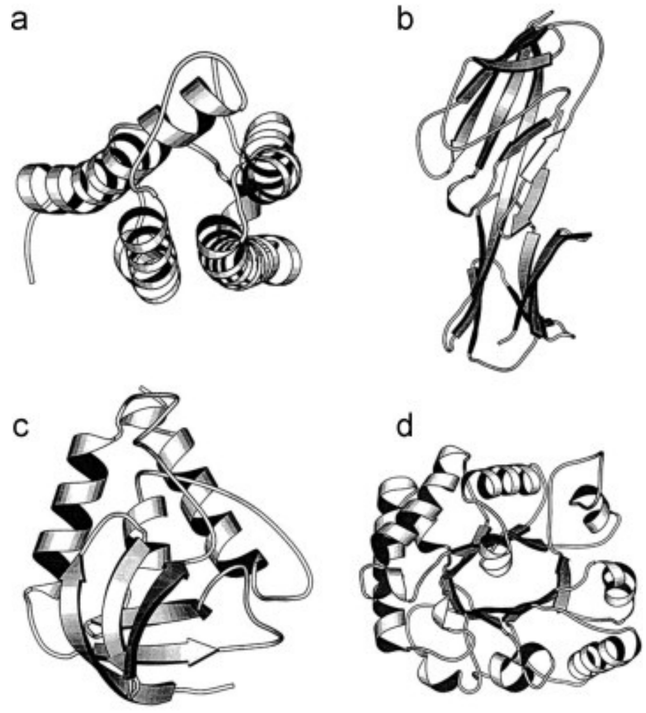
Questi gruppi sono chiamati **classi di equivalenza**

CLASSI D’EQUIVALENZA

CLASSI D'EQUIVALENZA

Equivalence Classes is the input (and sometimes output) data which are processed by the same application or their processing leads to the same results.
Equivalence Class Testing is a technique for test design which can reduce the amount of your test cases. It can be used at all testing levels – unit, integration, system, and system-integration test levels.

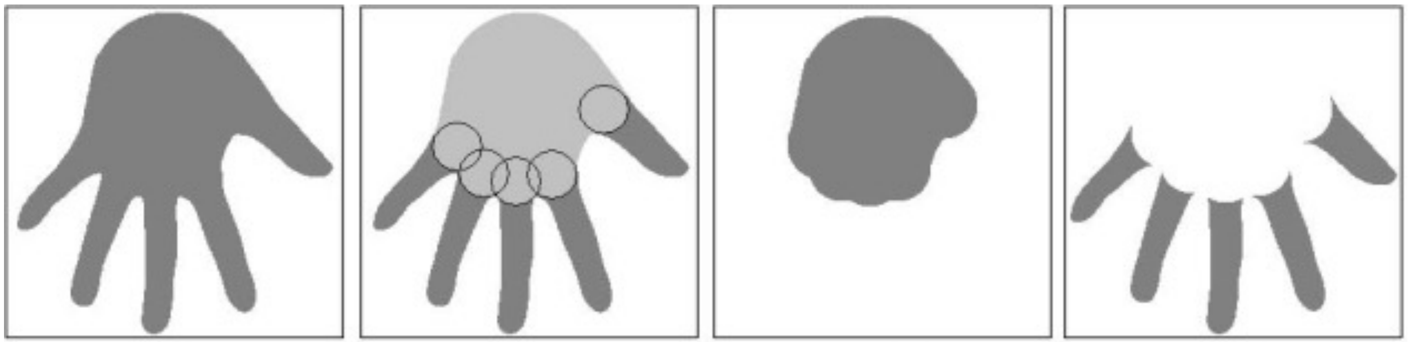
CLASSI D’EQUIVALENZA



From Chou and Zhang (1995). Standard **equivalence classes** for inexact protein symmetries according to Levitt and Chothia (1976): (a) all-α helices; (b) all-β sheets; (c) α + β; (d) α/β. More recent work identifies a minimum of seven, and possibly as many as ten, such classes (Chou and Maggiora, 1998).

http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S030326471000167X

CLASSI D'EQUIVALENZA


(a) (b) (c) (d)

Advanced Hand-Based Biometric Authentication Systems

To identify each of the fingers automatically, we assume that hand rotations are less than 40 degrees. In our prototype system, larger rotations would require purposeful, unnatural efforts from the user. Handling larger rotations can be easily handled by the use of higher level information such as the length, width, aspect ratio, and area of each finger. To identify each finger region automatically, we use connected components analysis. The main steps of the algorithm are outlined below:

1. Run-length encode the input image
2. Scan the runs assigning preliminary labels and recording label equivalences in a local equivalence table
3. **Resolve the equivalence classes**
4. Relabel the runs based on the resolved equivalence classes

http://www.cse.unr.edu/~cip/wiki/index.php/Advanced_Hand-Based_Biometric_Authentication_Systems

RELAZIONI D'EQUIVALENZA

Una relazione di equivalenza definita su un insieme ne determina una partizione: l'insieme risulta ripartito in

classi esaustive
(ogni elemento dell'insieme appartiene a qualche classe)

disgiunte
(le diverse classi non hanno elementi in comune).

Se su un insieme *A* è definita una relazione di equivalenza

$$\sim$$

e se *a* è un elemento di *A*, si definisce la *classe di equivalenza* di *a* come il sottoinsieme di *A* (talvolta indicato con il simbolo [*a*]) costituito da tutti gli elementi di *A* che sono in relazione con *a*: dunque la classe di equivalenza di *a* coincide con il sottoinsieme

$$[a] = \{x \in A : x \sim a\}$$

CLASSI D'EQUIVALENZA

L'insieme delle classi di equivalenza di *A* rispetto a ~ costituisce una **partizione** di *A*, detta *partizione associata* a ~

Partizioni e classi di equivalenza I

Sia S un insieme

Una **partizione** di S è una famiglia di insiemi $\mathcal{P} = \{T_1, \ldots, T_n\}$, $T_i \subseteq S, 1 \leq i \leq n$ tali che:

- $T_i \neq \emptyset$ per ogni $i, 1 \leq i \leq n$;
- $T_i \cap T_j = \emptyset$ per ogni $1 \leq i < j \leq n$; e
- $\bigcup \mathcal{P} = S$

Se R è una relazione di equivalenza su S, allora $T \subseteq S$ è una **classe di equivalenza** se $T \neq \emptyset$ e per ogni $x \in S$:

$$x \in T \text{ sse } \{y \in S \mid \langle x, y \rangle \in R\} = T$$

Cioè, x è in relazione con tutti e soltanto quelli elementi di T

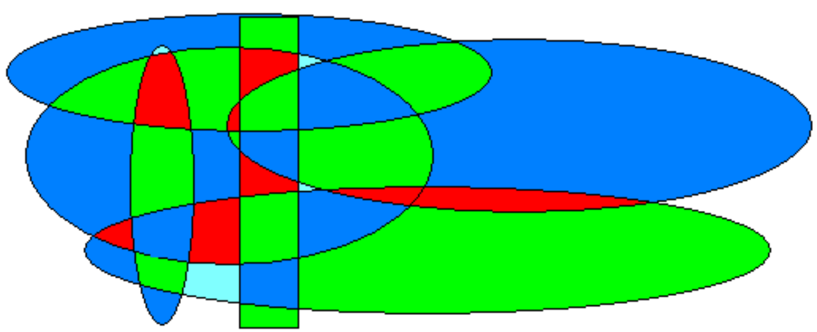
CLASSI D'EQUIVALENZA

Data una relazione di equivalenza R definita in un insieme A, si consideri un elemento $a \in A$. Prende il nome di classe di equivalenza di a il sottoinsieme di A così formato:

$$[a] = \{x : x \in A \wedge xRa\}$$

Una classe di equivalenza è individuata da uno qualsiasi dei suoi elementi, quindi ciascuno di questi elementi può essere scelto come rappresentante della classe. Le classi di equivalenza godo delle seguenti proprietà:

- ogni classe di equivalenza non è vuota
- ogni elemento $a \in A$ appartiene ad una sola classe di equivalenza
- l'intersezione di due qualunque classi di equivalenza da come risultato l'insieme vuoto



Partizioni e classi di equivalenza II

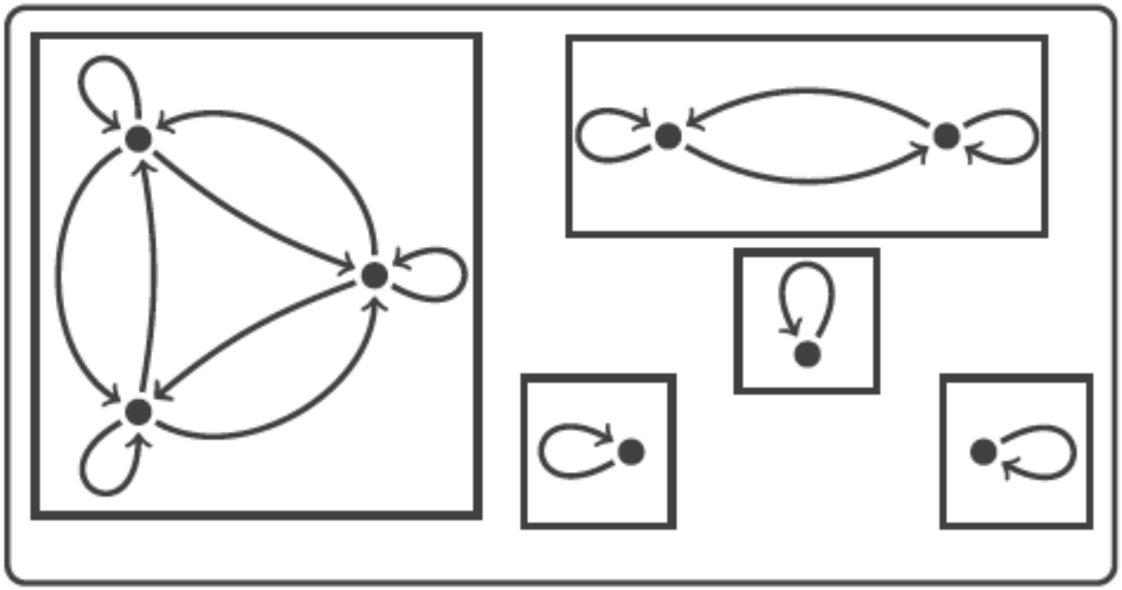
Se S è un insieme e R una relazione di equivalenza su S, ogni elemento $x \in S$ definisce una classe di equivalenza:

$$[x]_R = \{y \in S \mid \langle x, y\rangle \in R\}$$

La famiglia di insiemi $\{[x]_R \mid x \in S\}$, che ha per elementi le classi di equivalenza di S, è chiamato il **insieme quoziente** di S rispetto a R e si indica con S/R

L'insieme quoziente è una partizione di S

Esempio



Ogni componente connesso è una classe di equivalenza.

L'insieme quoziente ha 5 insiemi: uno con tre elementi, uno con due elementi, e tre singoletti

La relazione R parte o **divide** l'insieme in classi di equivalenza; da ciò deriva il nome "quoziente"

INSIEME QUOZIENTE

Data una relazione di equivalenza R su un insieme A, prende il nome di insieme quoziente di A rispetto alla relazione R e si indica con $\frac{A}{R}$ l'insieme delle classi di equivalenza determinate da R nell'insieme A.

Il risultato di un'operazione di partizione su un insieme: da ciò deriva il nome "quoziente" e la scrittura, che ricordano entrambi la divisione.

/

CLASSI D'EQUIVALENZA

Data una relazione di equivalenza R su un insieme S, la *classe di equivalenza* di un elemento $x \in S$ è definita come

$$[x] = \{y \mid \langle x, y\rangle \in R\}.$$

L'**insieme quoziente** è l'insieme delle classi di equivalenza della relazione *R*.

Data una relazione di equivalenza $\simeq$ in S, la partizione che essa determina si dice l'*insieme quoziente* di S *rispetto a* $\simeq$, o anche *modulo* $\simeq$, e si indica con $S/\simeq$ o $S_{\simeq}$.

La relazione $x \simeq_n y$ sui naturali definita come $x \simeq_n y$ sse $(x\ mod\ n) = (y\ mod\ n)$ è una relazione di equivalenza. Nel caso $n = 4$, le classi di equivalenza sono $[0], [1], [2]$ e $[3]$. L'insieme quoziente è $\{[0], [1], [2], [3]\}$, spesso indicato con $\mathbb{N}_4$.

Partizione

Dato un insieme A, si dice **partizione** di A, e si indica con P_A , la suddivisione dell'insieme A in sottoinsiemi così definita :

1. nessuno dei sottoinsiemi di A è vuoto;
2. tutti i sottoinsiemi di A sono, a due a due, disgiunti;
3. l'unione di tutti i sottoinsiemi S di A da l'insieme A .

Classe di equivalenza

In un insieme A in cui è assegnata una relazione di equivalenza R, si dice **classe di equivalenza** ogni sottoinsieme S non vuoto di A che gode delle seguenti proprietà :

1. gli elementi di S sono tutti tra loro equivalenti (rispetto alla relazione R);
2. ogni elemento di che non appartiene ad S non è equivalente ad alcun elemento di S.

Teorema

Ad ogni relazione di equivalenza R definita nell'insieme A, corrisponde una partizione di A in classi di equivalenza.

Insieme quoziente

Si chiama **insieme quoziente** di un insieme A, rispetto a una relazione di equivalenza R, e si indica con A/R l'insieme che ha per elementi le classi di equivalenza S di A , rispetto alla relazione R.

STRUTTURE RELAZIONALI, GRAFI E ORDINAMENTI
(parte 2)

END

FAMIGLIE DI INSIEMI

FAMIGLIE DI INSIEMI

Un insieme può essere un elemento di un altro insieme.

Quando abbiamo un insieme i cui elementi sono tutti insiemi, lo chiamiamo

famiglia di insiemi

Esempio: ogni uomo è un insieme di cellule, ma ciò non esclude di considerare insiemi i cui elementi siano uomini, ad esempio una famiglia o una classe; a sua volta un condominio è un insieme di famiglie, così come una scuola è un insieme di classi. Dunque non è escluso di poter considerare insiemi i cui elementi siano a loro volta insiemi.

Per una semplice questione di gusto linguistico non si parla quasi mai di “insieme di insiemi”, ma si preferisce, come sinonimo, “famiglia di insiemi”.

FAMIGLIE DI INSIEMI

Sia $\mathcal{F}$ un insieme i cui elementi sono insiemi, $\mathcal{F}$ è una famiglia di insiemi. L'unione di tali insiemi è l'insieme

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x : x \text{ appartiene a qualche elemento di } \mathcal{F}\};$$

l'intersezione di tali insiemi è l'insieme

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid x \text{ appartiene a tutti gli elementi di } \mathcal{F}\}.$$

In particolare $\bigcup \wp S = S$, per ogni insieme S.

Partizioni di insiemi

Dato $S \neq \emptyset$, una *partizione* di S è una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di S tale che:

1. ogni elemento di S appartiene a qualche elemento di $\mathcal{F}$, cioè $\bigcup \mathcal{F} = S$;
2. due elementi qualunque di $\mathcal{F}$ sono disgiunti.

PARTIZIONE DI UN INSIEME

Sia A un insieme. Diremo che due o più sottoinsiemi di A formano una partizione di A se soddisfano tre condizioni:

1) nessuno deve essere vuoto;

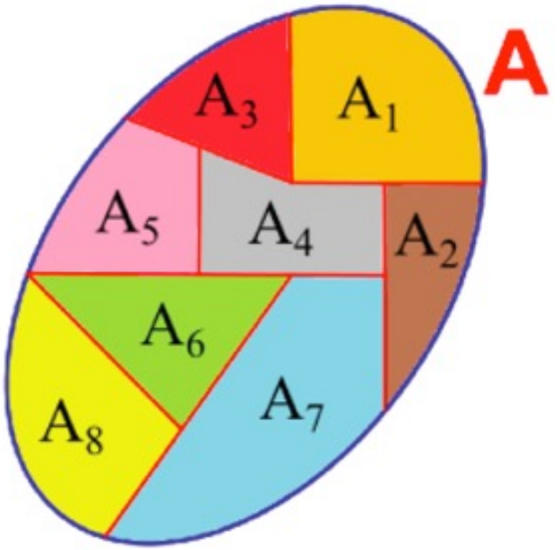
2) comunque si prendono due sottoinsiemi A la loro intersezione deve essere vuota;

3) la loro unione deve dare tutto l'insieme A.

$$\forall i \in \{1, 2, ..n\} : \ A_i \neq \emptyset$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \in \{1, 2, ..n\}, \ i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$



PARTIZIONE DI UN INSIEME

Sia A un insieme. Diremo che due o più sottoinsiemi di A formano una partizione di A se soddisfano tre condizioni:

1) nessuno deve essere vuoto

2) comunque si prendono due sottoinsiemi A la loro intersezione deve essere vuota

3) la loro unione ci deve dare tutto l'insieme A

Supponendo infatti che nessuno di essi sia vuoto, la loro unione dà tutto l'insieme di partenza ed essi non hanno elementi in comune, quindi presi a due a due la loro intersezione è vuota.