INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 2)

STEFANIA BANDINI

OPERAZIONI SU INSIEMI: UNIONE

Dati due insiemi S e T si denota l'**unione** di S e T come

$$S \cup T$$

cioè l'insieme degli elementi che stanno in S **oppure** in T

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \vee x \in T\}$$

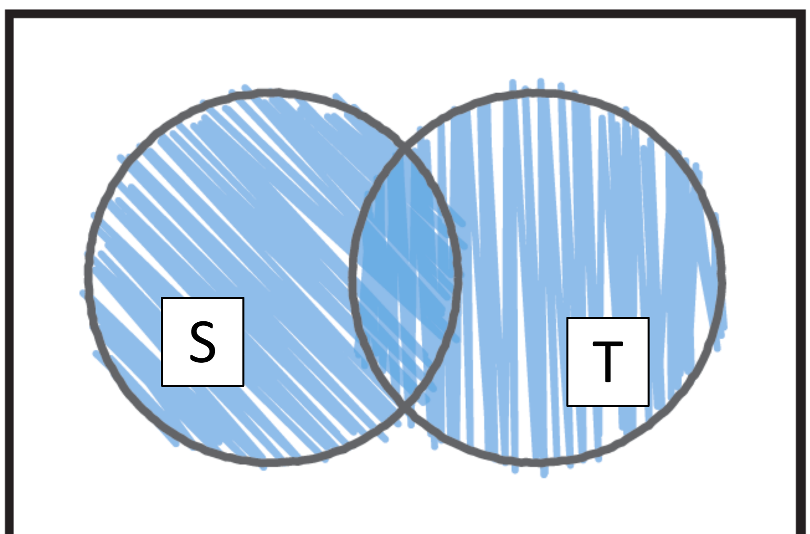
OPERAZIONI SU INSIEMI: UNIONE

Dati due insiemi *S* e *T* si denota l'**unione** di *S* e *T* come

$$S \cup T$$

cioè l'insieme degli elementi che stanno in *S* **oppure** in *T*

$$S \cup T = \{x \mid x \in S \lor x \in T\}$$



OPERAZIONI SU INSIEMI: UNIONE

ESEMPI

1. {*rosso, giallo*} $\cup$ {*arancio*} = {*rosso, giallo, arancio*}

2. {*rosso, giallo*} $\cup$ {*arancio, giallo*} = {*rosso, giallo, arancio*}

3. $\{x \mid x > 3 \text{ e } x \le 20\} \cup \{x \mid x > 100 \text{ e } x < 101\} = \{4, 5, \ldots, 20\}$

4. $\{x \mid \text{Madre}(x, \text{Anna})\} \cup \{x \mid \text{Padre}(x, \text{Anna})\}$ è l'insieme formato dal padre e dalla madre di Anna

5. $\{x \mid x > 3\} \cup \{x \mid x \le 12\} = \{x \mid x > 3 \text{ oppure } x \le 12\} = \{4, 5, \ldots, 12\}$

OPERAZIONI SU INSIEMI: UNIONE

L'*unione* di due insiemi S e T, $S \cup T = \{x | x \in S \ oppure \ x \in T\}$, è l'insieme di tutti gli oggetti che sono elementi di S oppure di T. Per l'operazione $\cup$ valgono le seguenti proprietà:

1. $S \cup S = S$ *(Idempotenza)*.
2. $S_1 \cup S_2 = S_2 \cup S_1$ *(Commutatività)*.
3. $S \cup \emptyset = S = \emptyset \cup S$ *(Elemento neutro)*.
4. $S_1 \cup S_2 = S_2$ sse $S_1 \subseteq S_2$ *(Assorbimento)*.
5. $(S_1 \cup S_2) \cup S_3 = S_1 \cup (S_2 \cup S_3)$ *(Associatività)*.
6. $S_1 \subseteq S_1 \cup S_2, \quad S_2 \subseteq S_1 \cup S_2.$ *(Monotonicità)*

OPERAZIONI SU INSIEMI: INTERSEZIONE

Dati due insiemi S e T si denota l’**intersezione** di S e T come

$$S \cap T$$

cioè l'insieme degli elementi che stanno **sia** in S **che** in T

$$S \cap T = \{x \mid x \in S \land x \in T\}$$

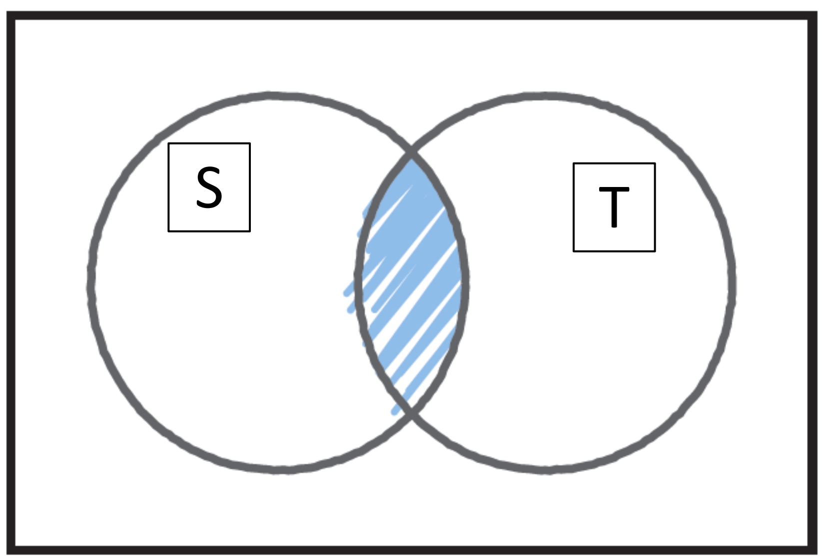
OPERAZIONI SU INSIEMI: INTERSEZIONE

Dati due insiemi S e T si denota l'**intersezione** di S e T come

$$S \cap T$$

cioè l'insieme degli elementi che stanno **sia** in S **che** in T

$$S \cap T = \{x \mid x \in S \land x \in T\}$$



OPERAZIONI SU INSIEMI: INTERSEZIONE

L'*intersezione* di due insiemi S e T, scritto $S \cap T = \{x | x \in S \ e \ x \in T\}$, è l'insieme di tutti gli oggetti che sono elementi sia di S che di T. S e T sono *disgiunti* se la loro intersezione è vuota. Esempio

1. $\{rosso, giallo\} \cap \{arancio, giallo\} = \{giallo\}$.
2. $\{rosso, giallo\} \cap \{arancio, blu\} = \{\} = \emptyset$.
3. $\{x \ | x > 3 \ e \ x \leq 20\} \cap \{x | x > 100 \ e \ x < 101\} = \emptyset$.
4. $\{x | Madre(Anna, x)\} \cap \{x | Padre(Giovanni, x)\}$ è l'insieme formato dai figli di Anna e Giovanni.

PROPRIETA' DELL'INTERSEZIONE

Per l'operazione $\cap$ valgono le seguenti proprietà:

1. $S \cap S = S$ *(Idempotenza)*.
2. $S_1 \cap S_2 = S_2 \cap S_1$ *(Commutatività)*.
3. $S \cap \emptyset = \emptyset \cap S = \emptyset$. *(Annichilazione).*
4. $(S_1 \cap S_2) \cap S_3 = S_1 \cap (S_2 \cap S_3)$ *(Associatività)*.
5. $S_1 \cap S_2 = S_1$ sse $S_1 \subseteq S_2$ *(Assorbimento)*.
6. $S_1 \cap S_2 \subseteq S_1$.
7. $S_1 \cap S_2 \subseteq S_2$.

(Monotonicità)

PROPRIETA' DELL'UNIONE DELL'INTERSEZIONE

$\cup$ e $\cap$ sono legate dalle seguenti proprietà distributive

1. $S_1 \cap (S_2 \cup S_3) = (S_1 \cap S_2) \cup (S_1 \cap S_3)$.
2. $S_1 \cup (S_2 \cap S_3) = (S_1 \cup S_2) \cap (S_1 \cup S_3)$.

Complementazione di Insiemi

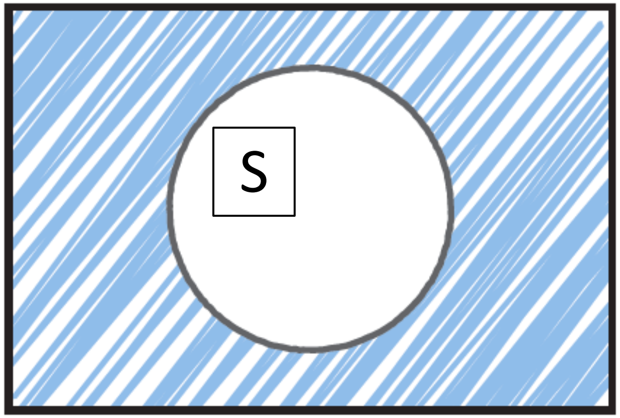
Dato un insieme U che chiamiamo *universo*, la differenza di un sottoinsieme S di U rispetto a U si chiama *complemento di S in U*, oppure complemento di S, se l'insieme U può essere sottinteso. Per indicare il complemento di S scriviamo $\overline{S}$. In maniera intensionale possiamo descrivere $\overline{S}$ come

$$\overline{S} = \{x | x \in U \ e \ x \notin S\}.$$

Complementazione di Insiemi

Dato un insieme U che chiamiamo *universo*, la differenza di un sottoinsieme S di U rispetto a U si chiama *complemento di S in U*, oppure complemento di S, se l'insieme U può essere sottinteso. Per indicare il complemento di S scriviamo $\overline{S}$. In maniera intensionale possiamo descrivere $\overline{S}$ come

$$\overline{S} = \{x | x \in U \ e \ x \notin S\}.$$



Proprietà della complementazione

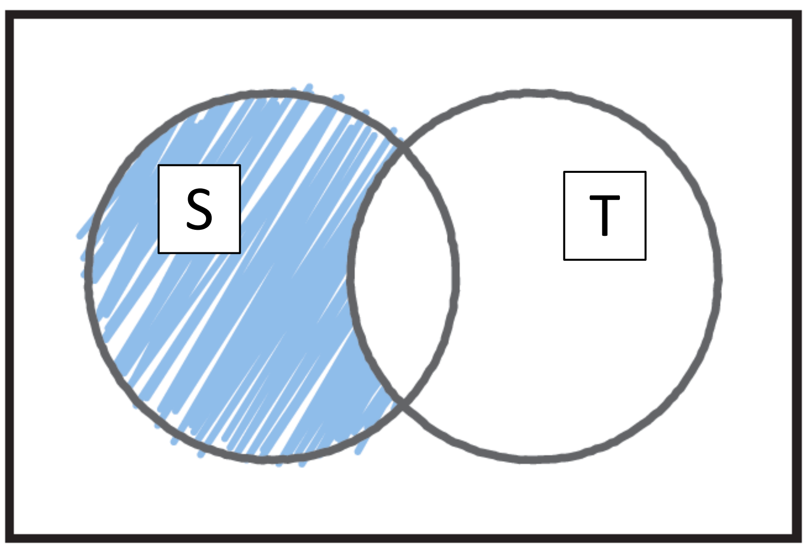
1. $\overline{U} = \emptyset$.
2. $\overline{\emptyset} = U$.
3. $\overline{\overline{S}} = S$.
4. $\overline{(S_1 \cup S_2)} = \overline{S_1} \cap \overline{S_2}$ *(Legge di De Morgan per $\cup$).*
5. $\overline{(S_1 \cap S_2)} = \overline{S_1} \cup \overline{S_2}$ *(Legge di De Morgan per $\cap$).*
6. $S \cap \overline{S} = \emptyset$.
7. $S \cup \overline{S} = U$.
8. $S_1 = S_2$ sse $\overline{S_1} = \overline{S_2}$.
9. $S_1 \subseteq S_2$ sse $\overline{S_2} \subseteq \overline{S_1}$.

OPERAZIONI SU INSIEMI: DIFFERENZA

Dati due insiemi *S* e *T* si definisce **differenza** tra *S* e *T* il seguente insieme

$$S - T \ (o\ S \backslash T)$$

cioè l'insieme degli elementi che stanno in *S* **ma non** in *T*



Ovviamente, si avrà che $S - T \neq T - S$

Differenza di insiemi

Dati due insiemi X e Y chiamiamo $Y \backslash X$ (scritto anche $Y - X$) insieme *differenza* di X in Y: l'insieme costituito da tutti gli elementi di Y che non sono elementi di X. Definiamo $S \backslash T = \{x | x \in S \ e \ x \notin T\}$.

Per l'operazione $\backslash$ valgono le seguenti proprietà:

1. $S \backslash S = \emptyset$.
2. $S \backslash \emptyset = S$.
3. $\emptyset \backslash S = \emptyset$.
4. $(S_1 \backslash S_2) \backslash S_3 = (S_1 \backslash S_3) \backslash S_2 = S_1 \backslash (S_2 \cup S_3)$.
5. $S_1 \backslash S_2 = S_1 \cap \overline{S}_2$.

Esempio

1. Sia $S = \{a, b, c, d, e\}$ e $T = \{a, c, f, g, e, h\}$.

$$S \backslash T = \{x | x \in S \ e \ x \notin T\} = \{b, d\}$$

2. Sia $\mathbb{N}$ l'insieme dei naturali, $\mathcal{P}$ l'insieme dei numeri pari e $\mathcal{D}$ l'insieme dei numeri dispari: $\mathbb{N} \backslash \mathcal{D} = \mathcal{P}$.

Differenza simmetrica fra insiemi

La *differenza simmetrica* di due insiemi S_1 e S_2 è $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \backslash S_2) \cup (S_2 \backslash S_1)$.

Valgono le seguenti proprietà:

1. $S \triangle S = \emptyset$.

2. $S \triangle \emptyset = S$.

3. $S_1 \triangle S_2 = S_2 \triangle S_1$.

4. $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \cap \overline{S}_2) \cup (S_2 \cap \overline{S}_1)$.

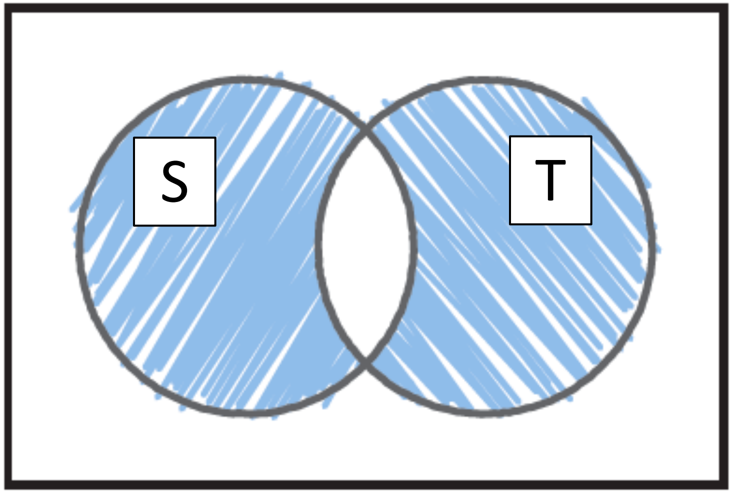
5. $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \cup S_2) \backslash (S_2 \cap S_1)$.

Differenza simmetrica fra insiemi

La *differenza simmetrica* di due insiemi S_1 e S_2 è $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \backslash S_2) \cup (S_2 \backslash S_1)$.

Valgono le seguenti proprietà:

1. $S \triangle S = \emptyset$.
2. $S \triangle \emptyset = S$.
3. $S_1 \triangle S_2 = S_2 \triangle S_1$.
4. $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \cap \overline{S}_2) \cup (S_2 \cap \overline{S}_1)$.
5. $S_1 \triangle S_2 = (S_1 \cup S_2) \backslash (S_2 \cap S_1)$.



Proprietà

- $A \triangle A = \emptyset$
- $A \triangle \emptyset = A$
- $A \triangle B = B \triangle A$
- $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

FAMIGLIE DI INSIEMI

FAMIGLIE DI INSIEMI

Un insieme può essere un elemento di un altro insieme.

Quando abbiamo un insieme i cui elementi sono tutti insiemi, lo chiamiamo

famiglia di insiemi

Esempio: ogni uomo è un insieme di cellule, ma ciò non esclude di considerare insiemi i cui elementi siano uomini, ad esempio una famiglia o una classe; a sua volta un condominio è un insieme di famiglie, così come una scuola è un insieme di classi. Dunque non è escluso di poter considerare insiemi i cui elementi siano a loro volta insiemi.

Per una semplice questione di gusto linguistico non si parla quasi mai di "insieme di insiemi", ma si preferisce, come sinonimo, "famiglia di insiemi".

FAMIGLIE DI INSIEMI

Sia $\mathcal{F}$ un insieme i cui elementi sono insiemi, $\mathcal{F}$ è una famiglia di insiemi. L'unione di tali insiemi è l'insieme

$$\bigcup \mathcal{F} = \{x : x \text{ appartiene a qualche elemento di } \mathcal{F}\};$$

l'intersezione di tali insiemi è l'insieme

$$\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid x \text{ appartiene a tutti gli elementi di } \mathcal{F}\}.$$

In particolare $\bigcup \wp S = S$, per ogni insieme S.

Partizioni di insiemi

Dato $S \neq \emptyset$, una *partizione* di S è una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di S tale che:

1. ogni elemento di S appartiene a qualche elemento di $\mathcal{F}$, cioè $\bigcup \mathcal{F} = S$;
2. due elementi qualunque di $\mathcal{F}$ sono disgiunti.

PARTIZIONE DI UN INSIEME

Sia A un insieme. Diremo che due o più sottoinsiemi di A formano una partizione di A se soddisfano tre condizioni:

1) nessuno deve essere vuoto;

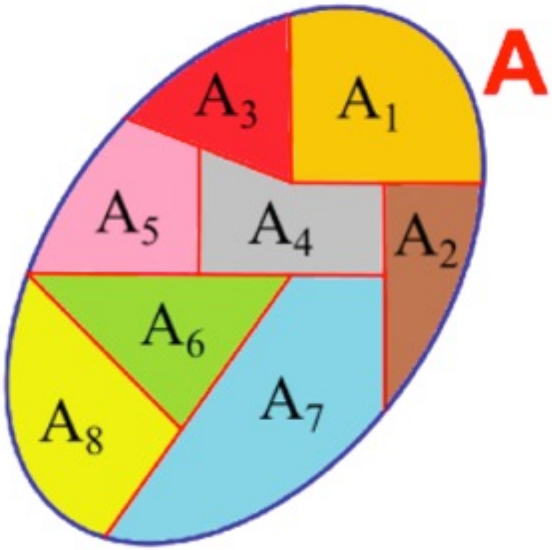
2) comunque si prendono due sottoinsiemi A la loro intersezione deve essere vuota;

3) la loro unione deve dare tutto l'insieme A.

$$\forall i \in \{1, 2, ..n\} : \; A_i \neq \emptyset$$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall i \in \{1, 2, ..n\}, \; i \neq j$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$$



PARTIZIONE DI UN INSIEME

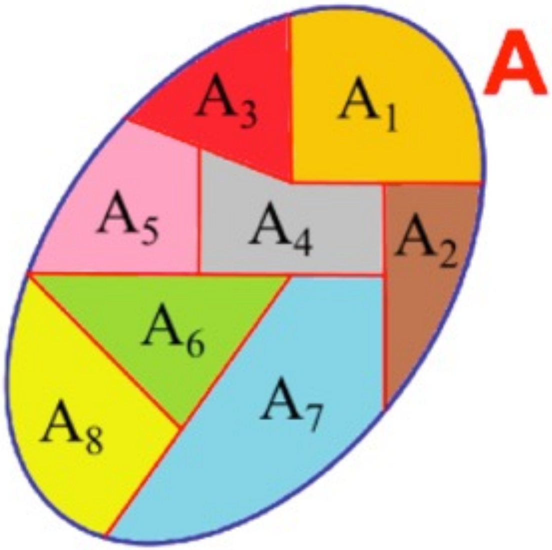
Sia A un insieme. Diremo che due o più sottoinsiemi di A formano una partizione di A se soddisfano tre condizioni:

1) nessuno deve essere vuoto;

2) comunque si prendono due sottoinsiemi A la loro intersezione deve essere vuota;

3) la loro unione deve dare tutto l'insieme A.

Supponendo infatti che nessuno di essi sia vuoto, la loro unione dà tutto l'insieme di partenza ed essi non hanno elementi in comune, quindi presi a due a due la loro intersezione è vuota.



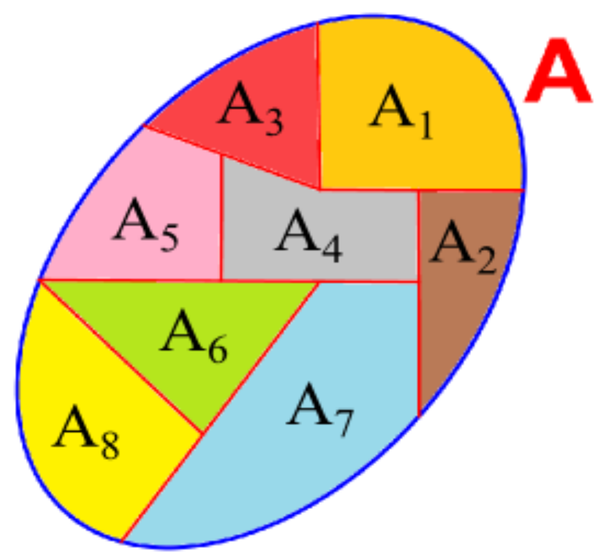
PARTIZIONE DI UN INSIEME

Sia A un insieme. Diremo che due o più sottoinsiemi di A formano una partizione di A se soddisfano tre condizioni:

1) nessuno deve essere vuoto

2) comunque si prendono due sottoinsiemi A la loro intersezione deve essere vuota

3) la loro unione ci deve dare tutto l'insieme A



Supponendo infatti che nessuno di essi sia vuoto, la loro unione dà tutto l'insieme di partenza ed essi non hanno elementi in comune, quindi presi a due a due la loro intersezione è vuota.

Esempio

Sia $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ e siano

$$S_1 = \{a, b, c, d\} \qquad S_2 = \{a, c, e, f, g, h\}$$
$$S_3 = \{a, c, e, g\} \qquad S_4 = \{b, d\}$$
$$S_5 = \{f, h\}$$

- $\mathcal{F}_1 = \{S_1, S_2\}$ non è una partizione
- $\mathcal{F}_2 = \{S_1, S_5\}$ non è una partizione
- $\mathcal{F}_3 = \{S_3, S_4, S_5\}$ è una partizione

$\{P, D\}$ è una partizione di $\mathbb{N}$

INSIEMI E OPERAZIONI

(parte 2)

END

ESEMPIO DI UN ESERCIZIO D'ESAME

Scrivere in notazione estensionale i seguenti insiemi:

- $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x^2 < 10\}$, $B = \{2^n + 1 \mid n \in \mathbf{N}, n \leq 3\}$
  - A= {0,1,2,3},
  - B= {2,3,5,9}
- $A \cap B$, A U B
  - {2,3},{0,1,2, 3,5,9}
- PowerSet(A-B)
  - A-B = {0,1}, POWERSET(A-B)= {{},{0},{1},{0,1}}