ÔN THI GIỮA KỲ XÁC SUẤT THỐNG KÊ

[HỌC KỲ 2 2023-2024]

Nguyễn Văn Thùy, HCMUS

VẤN ĐỀ 1. CÁC CÔNG THỨC XÁC SUẤT CƠ BẢN

- *Định nghĩa xác suất cổ điển*

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

với $|A|$: tổng số trường hợp thuận lợi của biến cố A; $|\Omega|$ là tổng số trường hợp có thể xảy ra

- *Công thức cộng*

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

- *Công thức nhân*

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B)$$

- *Nếu $\{A_1;\ A_2;\ \cdots;\ A_n\}$ là hệ biến cố đầy đủ, B là biến cố bất kỳ trong Ω thì*

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + (A_n)P(B|A_n)$$

$$P(A_k|B) = \frac{P(A_kB)}{P(B)} = \frac{P(A_k)P(B|A_k)}{P(A_1)P(B|A_1) + \cdots + (A_n)P(B|A_n)}$$

<u>Bài 1.</u> Đĩa nhựa polycarbon được sản xuất với các tính năng chống xước và chống sốc. Kết quả từ 100 đĩa được tóm tắt trong bảng sau

	Chống sốc cao	Chống sốc thấp
Chống xước cao	70	9
Chống xước thấp	16	5

Cho A là biến cố một đĩa có khả năng chống sốc cao và B là biến cố một đĩa có khả năng chống xước cao. Nếu chọn ngẫu nhiên một đĩa, tính các xác suất sau

(a) $P(A); P(B)$;

(b) $P(A \cap B); P(A \cup B)$;

(c) $P(A|B)$.

<u>Bài 2.</u> Một sinh viên phải thi liên tiếp hai môn là triết và sau đó là toán. Xác suất qua triết là 0,6; qua toán là 0,7. Nếu trước đó đã qua triết, thì xác suất qua toán là 0,8. Tính xác suất

(a) Qua cả 2 môn;

(b) Qua ít nhất 1 môn;

(c) Qua đúng 1 môn;

(d) Qua toán, biết rằng đã không qua triết.

<u>Bài 3.</u> Bóng đèn bán ở thị trường là do 3 xí nghiệp I; II; III sản xuất ra. Tổng số bóng đèn của xí nghiệp I chiếm 30%; xí nghiệp II chiếm 50%; xí nghiệp iii chiếm 20%. Trong đám sản phẩm của xí nghiệp I tỷ lệ hỏng là 1%, của xí nghiệp II tỷ lệ hỏng là 3%, và xí nghiệp III tỷ lệ hỏng là 5%. Mua ngẫu nhiên một bóng đèn ở thị trường.

(a) Tính xác suất để bóng đèn này hỏng;

(b) Giả sử mua phải bóng hỏng. Tính xác suất để bóng ấy là do xí nghiệp I sản xuất.

VẤN ĐỀ 2. BIẾN NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

- *Bảng phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc X*
- *Nếu biến ngẫu nhiên X nhận một số hữu hạn các giá trị* $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$ *với các xác suất tương ứng là* $p_k = P(X = x_k)$ *thì hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X là*

$$F(x) = P(X < x) = \begin{cases} 0; x \leq x_1 \\ p_1 + \cdots + p_{k-1};\ x_{k-1} < x \leq x_k \\ 1; x > x_k \end{cases}$$

- *Kỳ vọng, phương sai*

$$E(X) = \sum_{i=n}^{n} x_i p_i =: \mu;$$

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2 =: \sigma^2$$

<u>Bài 4.</u> Tung hai đồng xu cân đối và đồng chất. Gọi X là số mặt ngửa xuất hiện.

(a) Lập bảng phân phối xác suất của X;

(b) Tìm hàm phân phối xác suất của X;

(c) Tính kỳ vọng và phương sai của X.

VẤN ĐỀ 3. BIẾN NGẪU NHIÊN LIÊN TỤC

- *Hàm số f xác định trên toàn trục số được gọi là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X nếu*

$$(i)\ f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R};\ (ii)\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$$

$$(iii)\ P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx\,; P(X \leq a) = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx$$

- *Hàm phân phối (phân bố) xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X là hàm $F(x)$ xác định với mọi số thực x theo công thức sau*

$$F(x) = P(X < x)$$

và có các tính chất sau

i) $0 \leq F(x) \leq 1;\ \forall x \in \mathbb{R}$

ii) F là một hàm không giảm, tức là nếu $x_1 < x_2$ *thì* $F(x_1) \leq F(x_2)$

iii) F là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}$

iv) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0;\ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$

v) Nếu f và F tương ứng là hàm mật độ và hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên X thì

$$f(x) = F'(x);\ F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

- *Kỳ vọng, phương sai*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx =: \mu;\ Var(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 =: \sigma^2$$

Bài 5. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm phân phối xác suất

$$F(x) = a + b \arctan\left(\frac{x}{c}\right);$$

ở đó $a; b; c$ là các hằng số mà ta cần xác định. Tìm $a; b; c$ và hàm mật độ $f(x)$.

Bài 6. Cho biến ngẫu nhiên X có hàm mật độ

$$f(x) = \begin{cases} 0; x < 0 \\ \dfrac{6x}{5}; 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{6}{5x^4}; x > 1 \end{cases}.$$

Tìm hàm phân phối $F(x)$.

Bài 7. Tổng bức xạ mặt trời hàng ngày (X) ở một địa điểm D trong tháng Mười có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \begin{cases} C(x-2)(6-x); 2 \leq x \leq 6 \\ 0; x < 2 \vee x > 6 \end{cases}.$$

với các số đo theo đơn vị 100 calories.

(a) Tìm hằng số C.

(b) Tính giá trị của hàm phân phối xác suất tại 5.

(c) Cho $Y = 3X^2 + 4$. Tính kỳ vọng của Y.

VẤN ĐỀ 4. PHÂN PHỐI NHỊ THỨC

- *Nếu X là số lần thành công trong dãy n phép thử Bernoulli với xác suất thành công là p thì X~B(n;p);*

$$P(X=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

- *Kỳ vọng, phương sai*

$$E(X)=np; Var(X)=np(1-p)$$

<u>Bài 8.</u> Một phân xưởng có 5 máy. Xác suất để trong một ca, mỗi máy bị hỏng là 0,1. Tìm xác suất để trong một ca, có đúng 2 máy bị hỏng.

<u>Bài 9.</u> Tỷ lệ một loại bệnh bẩm sinh trong dân số là $p = 0{,}01$. Bệnh này cần sự chăm sóc đặc biệt lúc mới sinh. Một bệnh viện phụ sản thường có 20 ca sinh trong một tuần. Tính xác suất để

(a) Không có trường hợp nào cần chăm sóc đặc biệt;

(b) Có đúng một trường hợp cần chăm sóc đặc biệt;

(c) Có nhiều hơn một trường hợp cần chăm sóc đặc biệt.

VẤN ĐỀ 5. PHÂN PHỐI POISSON

- *Ta nói rằng đại lượng ngẫu nhiên X có phân bố Poisson với tham số* $\lambda > 0$ *và ký hiệu* $X \sim P(\lambda)$ *nếu*

$$X(\Omega) = \{0; 1; 2; \cdots\};\ P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

- *Kỳ vọng, phương sai*

$$E(X) = \lambda; Var(X) = \lambda$$

- *Ứng dụng: Phân phối Poisson được sử dụng để mô hình hóa số lượng sự kiện xảy ra trong một khoảng thời gian cố định, với điều kiện các sự kiện xảy ra độc lập và tỷ lệ xảy ra là cố định trong khoảng thời gian đó. Các biến ngẫu nhiên mô tả các sự kiện sau thường được xem là có phân phối Poison*

-Số lỗi in trong một trang (cuốn) sách;

-Số người đến bưu điện nào đó trong một ngày;…

Bài 10. Quan sát 5 phút thấy có 15 người ghé vào một đại lý bưu điện. Tính xác suất trong một phút có 4 người ghé vào đại lý bưu điện đó.

Bài 11. Ở một tổng đài bưu điện, các cú điện thoại gọi đến xuất hiện ngẫu nhiên, độc lập với nhau và tốc độ trung bình 2 cuộc gọi trong một phút. Tính xác suất để

(a) Có đúng 5 cú điện thoại trong 2 phút;

(b) Không có cú điện thoại nào trong khoảng thời gian 30 giây;

(c) Có ít nhất 1 cú điện thoại trong khoảng thời gian 10 giây.

VẤN ĐỀ 6. PHÂN PHỐI MŨ

- *Đại lượng ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối mũ với tham số* $\lambda > 0$*, ký hiệu* $X \sim E(\lambda)$*, nếu nó có hàm mật độ như sau*

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}; x \geq 0 \\ 0; x < 0 \end{cases}$$

- *Ta có*

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}; Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$P(X \leq x) = F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}; x > 0 \\ 0; x \leq 0 \end{cases}$$

- *Ứng dụng: Những đại lượng ngẫu nhiên sau có phân phối mũ*

-Khoảng thời gian giữa hai ca cấp cứu ở một bệnh viện;

-Khoảng thời gian giữa hai lần hỏng hóc của một chiếc máy;

-Tuổi thọ của một loại bóng đèn; …

Bài 12. Giả sử tuổi thọ (tính bằng năm) của một mạch điện tử trong máy tính là một đại lượng ngẫu nhiên có phân phối mũ với kỳ vọng là 6,25. Thời gian bảo hành của mạch điện tử này là 5 năm. Hỏi có bao nhiêu phần trăm mạch điện tử bán ra phải thay thế trong thời gian bảo hành?

VẤN ĐỀ 7. PHÂN PHỐI CHUẨN

- *Đại lượng ngẫu nhiên X được gọi là có phân phối chuẩn, ký hiệu* $X \sim N(\mu;\sigma^2)$*, nếu hàm mật độ của X có dạng*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}};\ \sigma > 0$$

- *Ta có*

$$E(X) = \mu; Var(X) = \sigma^2$$

$$P(X \leq a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right);\ P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

- ***Định lý giới hạn trung tâm:*** *Cho* $X_1;\ X_2;\ \cdots;\ X_n$ *là các biến ngẫu nhiên độc lập và có cùng phân phối với trung bình μ và phương sai* σ^2*. Khi đó,* $\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{\sigma}$ *có phân phối xấp xỉ chuẩn tắc* $N(0;1)$ *khi* $n \to +\infty$*; trong đó* $\bar{X} = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$.
- *Ứng dụng: Một biến ngẫu nhiên là kết quả cộng tính của nhiều biến ngẫu nhiên thành phần, trong đó mỗi biến ngẫu nhiên thành phần này tác động một ít và không có biến ngẫu nhiên thành phần nào thống trị, sẽ có phân phối chuẩn. Các biến ngẫu nhiên sau thường có phân phối chuẩn:*

-Sai số trong đo đạc vật lý và thiên văn;

-Năng suất của một giống cây trồng;

-Chiều cao của một dân số;...

Bài 13. Đường kính của một chi tiết máy do một máy tiện tự động sản xuất có phân phối chuẩn với trung bình 50mm và độ lệch chuẩn 0,05mm. Chi tiết máy được xem là đạt yêu cầu nếu đường kính sai khác với trung bình không sai quá 0,1mm.

(a) Tính tỷ lệ sản phẩm đạt yêu cầu.

(b) Lấy ngẫu nhiên 3 sản phẩm. Tính xác suất có ít nhất một sản phẩm đạt yêu cầu.

Bài 14. Một nhà máy sản xuất một loại điện trở với giá trị trung bình 100 ohm và độ lệch chuẩn 10 ohm. Tính xác suất giá trị trung bình của 50 điện trở được chọn ngẫu nhiên nhỏ hơn 95 ohm.