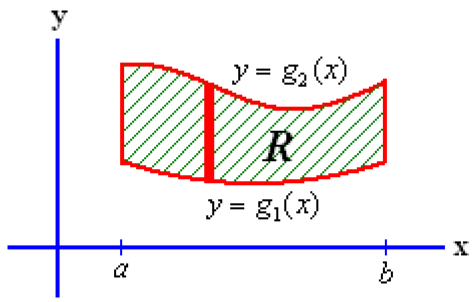
บทที่ 9

อินทิกรัลหลายชั้น (Multiple Integrals)

เราได้ศึกษาอินทิกรัลจำกัดเขตของฟังก์ชันตัวแปรเดียว $\int_a^b f(x)dx$ มาแล้ว ต่อไปเราจะขยายแนวคิดไปสู่ฟังก์ชันหลายตัวแปร ซึ่งเป็นการศึกษาถึงอินทิกรัลหลายชั้น ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาอินทิกรัลสองชั้นของฟังก์ชันสองตัวแปรและอินทิกรัลสามชั้นของฟังก์ชันสามตัวแปร พร้อมทั้งคุณสมบัติพื้นฐาน การหาค่า และการประยุกต์สำหรับอินทิกรัล

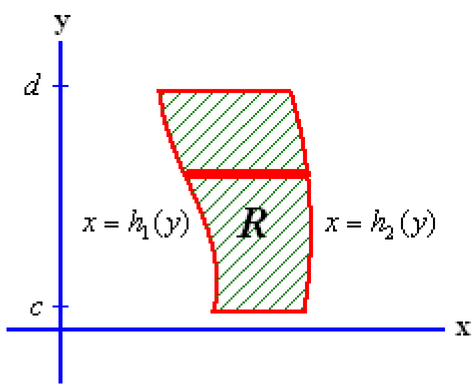
9.1 อินทิกรัลสองชั้น (Double Integrals)

ให้ g_1 , g_2 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $g_1 \le g_2$ ทุกๆ $x \in [a,b]$ ดังรูป



เราจะเรียกบริเวณ R ข้างต้นว่า***บริเวณรูปแบบที่ 1***

ให้ h_1 , h_2 เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[c,d]$ และ $h_1 \le h_2$ ทุกๆ $y \in [c,d]$ ดังรูป

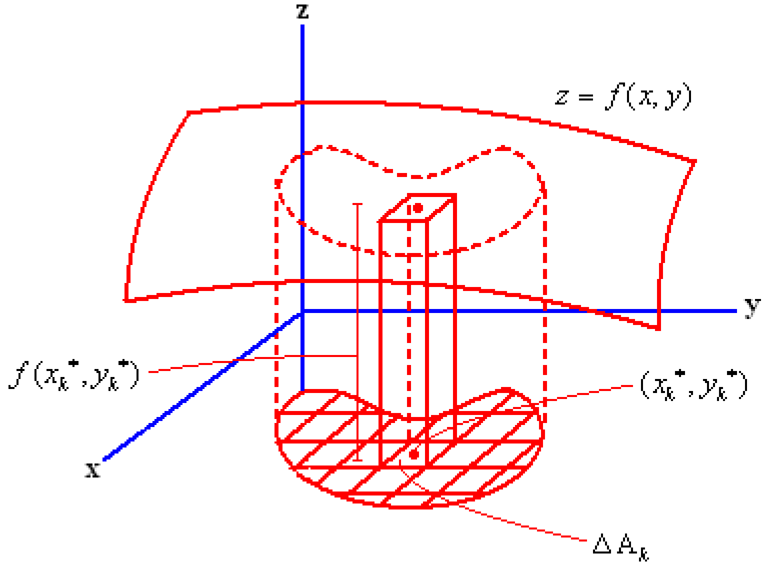


เราจะเรียกบริเวณ R ข้างต้นว่า***บริเวณรูปแบบที่ 2***

นิยาม ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณ R ดังรูป ดังนั้นอินทิกรัลสองชั้นของ f บน R เขียนแทนด้วย $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ กำหนดโดย

$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f(x_k^{\ *},y_k^{\ *})(\Delta A_k)\right]$$

โดยที่ลิมิตหาค่าได้



สมบัติของอินทิกรัลสองชั้น

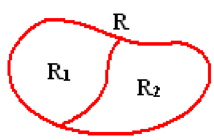
ให้ $f(x,y)$ และ $g(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณ R จะได้ว่า

1 $\iint\limits_R c\,f(x,y)\,dA = c\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ โดยที่ c เป็นค่าคงที่

2 $\iint\limits_R [f(x,y)\pm g(x,y)]\,dA = \iint\limits_R f(x,y)\,dA \pm \iint\limits_R g(x,y)\,dA$

3 ถ้า $R = R_1\cup R_2$ โดยที่ R_1 และ R_2 ไม่มีส่วนที่ซ้อนกัน

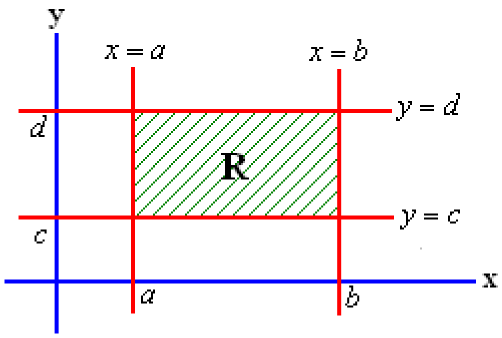
$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{R_2} g(x,y)\,dA$



9.1.1 การหาค่าอินทิกรัลสองชั้น

เราจะหา $\iint_R f(x,y)\,dA$ โดยการศึกษาบนบริเวณ R ที่เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าก่อนดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด $R=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b$ และ $c\le y\le d\}$ ดังรูป



ดังนั้น
$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$$

ข้อสังเกต

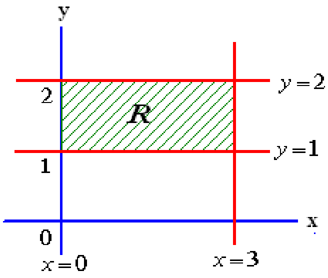
- ในการหาค่า $\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$ เราจะพิจารณาหา $\int_c^d f(x,y)\,dy$ ก่อน (โดยถือว่า x คงที่) หลังจากนั้นเราจึงพิจารณาหา $\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]dx$
- ในการหาค่า $\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$ เราจะพิจารณาหา $\int_a^b f(x,y)\,dx$ ก่อน (โดยถือว่า y คงที่) หลังจากนั้นเราจึงพิจารณาหา $\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)\,dx\right]dy$

บทแทรก ให้ $f(x),\ g(y)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้าปิด $R=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b$ และ $c\le y\le d\}$ ดังนั้นจะได้ว่า
$$\int_c^d\int_a^b f(x)g(y)\,dx\,dy=\left(\int_a^b f(x)\,dx\right)\left(\int_c^d g(y)\,dy\right)$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy)\,dydx$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 $\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy)\,dydx =$



วิธีที่ 2

$$\int_0^3 \int_1^2 (1+8xy)\,dydx = \int_1^2 \int_0^3 (1+8xy)\,dxdy$$

$$= \int_1^2 \left[x+4x^2y\right]_{x=0}^{3} dy$$

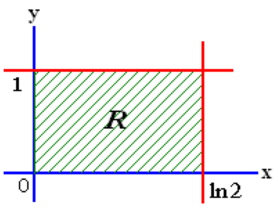
$$= \int_1^2 \left[(3+36y)-(0+0)\right] dy$$

$$= \int_1^2 (3+36y)\,dy \quad = 3y+18y^2 \Big|_1^2$$

$$= (6+72)-(3+18) = 57$$ ■

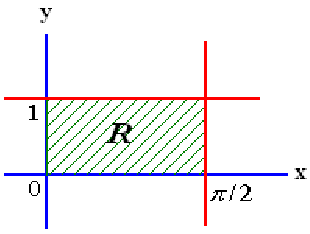
ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^{\ln 2} \int_0^1 xye^{y^2x}\,dydx$

วิธีทำ $\int_0^{\ln 2} \int_0^1 xye^{y^2x}\,dydx =$



ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^1 \int_0^{\pi/2} (e^y + \sin x)\, dxdy$

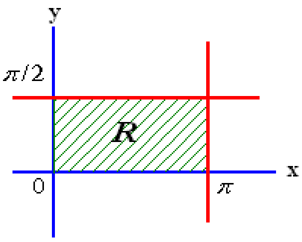
วิธีทำ
$$\int_0^1 \int_0^{\pi/2} (e^y + \sin x)\, dxdy = \int_0^1 \left[xe^y - \cos x \right]_{x=0}^{\pi/2} dy$$



$$= \int_0^1 \left[\left(\frac{\pi}{2} e^y - 0 \right) - (0-1) \right] dy$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{\pi}{2} e^y + 1 \right) dy$$
$$= \frac{\pi}{2} e^y + y \Big|_0^1$$
$$= \frac{\pi}{2} e + 1 - \left(\frac{\pi}{2} + 0 \right)$$
$$= \frac{\pi}{2}(e-1) + 1$$
■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \cos x \cos y\, dxdy$

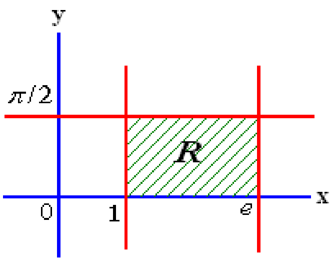
วิธีทำ
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi} \cos x \cos y\, dxdy = \left(\int_0^{\pi} \cos x dx \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos y dy \right)$$



$$= \left(\sin x \Big|_0^{\pi} \right) \left(\sin y \Big|_0^{\pi} \right)$$
$$= (\sin \pi - \sin 0)(\sin \pi - \sin 0)$$
$$= 0$$
■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_0^{\pi/2} \int_1^{e} \frac{\sin y}{x}\, dxdy$

วิธีทำ
$$\int_0^{\pi/2} \int_1^{e} \frac{\sin y}{x}\, dxdy = \left(\int_1^{e} \frac{1}{x} dx \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin y dy \right)$$

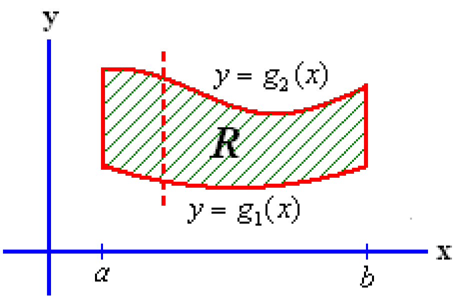


$$= \left(\ln x \Big|_1^{e} \right) \left(-\cos y \Big|_0^{\pi/2} \right)$$
$$= -(\ln e - \ln 1)(\cos \tfrac{\pi}{2} - \cos 0)$$
$$= -(1-0)(0-1)$$
$$= 1$$
■

ในกรณีที่บริเวณ R ไม่เป็นรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แต่เป็นบริเวณรูปแบบที่ 1 หรือ รูปแบบที่ 2 เราจะหา $\iint\limits_R f(x,y)\,dA$ โดยใช้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

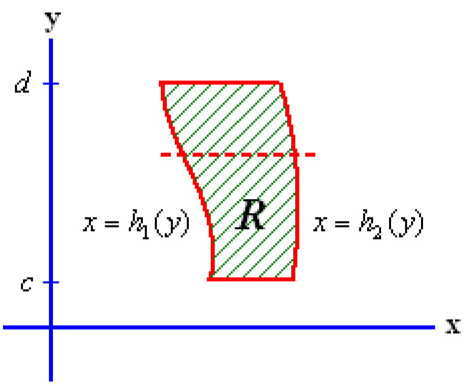
ทฤษฎีบท ให้ $f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันที่มีความต่อเนื่องบนบริเวณ R

1 ถ้า R เป็นบริเวณรูปแบบที่ 1



จะได้ว่า
$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

2 ถ้า R เป็นบริเวณรูปแบบที่ 2

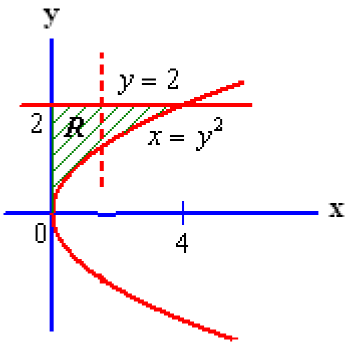


จะได้ว่า
$$\iint\limits_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

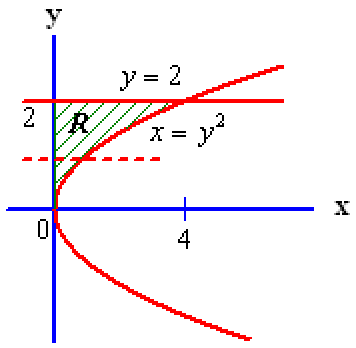
ตัวอย่าง จงหา $\iint_R (x^2+4y)dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยแกน y เส้นตรง $y=2$ และเส้นโค้ง $x=y^2$

วิธีทำ

วิธีที่ 1 $\iint_R (x^2+4y)dA =$



วิธีที่ 2 $\iint_R (x^2+4y)dA = \int_0^2 \int_0^{y^2} (x^2+4y)\,dxdy$



$$= \int_0^2 \left[\frac{x^3}{3}+4xy\right]_{x=0}^{y^2} dx$$

$$= \int_0^2 \left[\left(\frac{y^6}{3}+4y^3\right)-(0+0)\right]dy$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{y^6}{3}+4y^3\right)dy$$

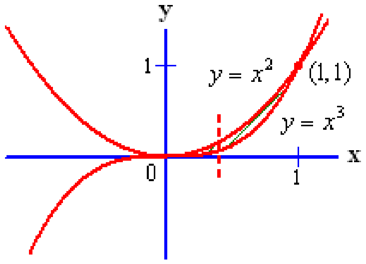
$$= \frac{y^7}{21}+y^4\Big|_0^2$$

$$= \left[\frac{128}{21}+16\right]-[0+0] = \frac{464}{21}$$ ■

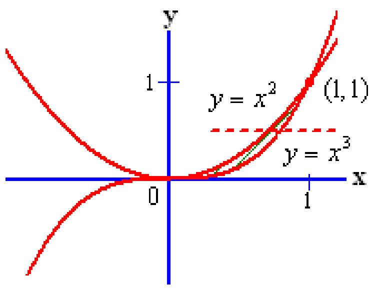
ตัวอย่าง จงหา $\iint_R xy^2 dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งซึ่งล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y = x^2$ และ $y = x^3$

วิธีทำ

วิธีที่ 1



วิธีที่ 2



$$\iint_R xy^2 dA = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{y^{1/3}} xy^2\, dx dy$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2 y^2}{2}\right]_{x=\sqrt{y}}^{y^{1/3}} dy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (y^{8/3} - y^3)\, dy$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{3}{11} y^{11/3} - \frac{y^4}{4}\right]_0^1$$

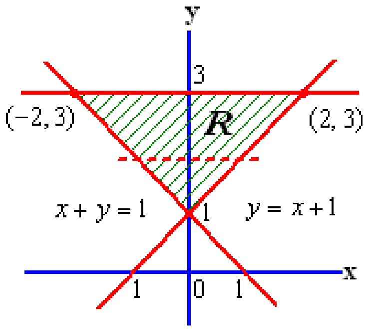
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{3}{11} - \frac{1}{4}\right) - (0-0)\right]$$

$$= \frac{1}{88}$$ ■

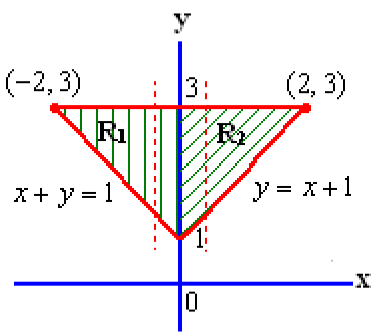
ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iint_R (2x-y^2)dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $x+y=1$ เส้นตรง $y=x+1$ และ $y=3$

วิธีทำ

วิธีที่ 1



วิธีที่ 2



$$\iint_R (2x-y^2)dA = \iint_{R_1} (2x-y^2)dA + \iint_{R_2} (2x-y^2)dA$$

$$= \int_{-2}^{0}\int_{-x+1}^{3} (2x-y^2)\,dydx + \int_{0}^{2}\int_{x+1}^{3} (2x-y^2)\,dydx$$

$$= \int_{-2}^{0} \left[2xy-\frac{y^3}{3}\right]_{y=-x+1}^{3} dx + \int_{0}^{2} \left[2xy-\frac{y^3}{3}\right]_{y=x+1}^{3} dx$$

$$\iint\limits_R (2x-y^2)dA = \int_{-2}^{0}\left[(6x-9)-\left\{2x(-x+1)-\frac{(-x+1)^3}{3}\right\}\right]dx+\int_{0}^{2}\left[(6x-9)-\left\{2x(x+1)-\frac{(x+1)^3}{3}\right\}\right]dx$$

$$=\int_{-2}^{0}\left[4x-9+2x^2+\frac{(-x+1)^3}{3}\right]dx+\int_{0}^{2}\left[4x-9-2x^2+\frac{(x+1)^3}{3}\right]dx$$

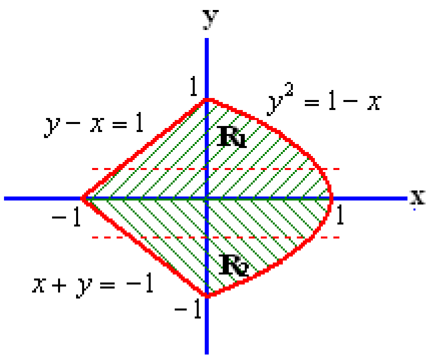
$$=\left[2x^2-9x+\frac{2}{3}x^3-\frac{(-x+1)^4}{12}\right]_{-2}^{0}+\left[2x^2-9x-\frac{2}{3}x^3+\frac{(x+1)^4}{12}\right]_{0}^{2}$$

$$=\left[\left(0-0+0-\frac{1}{12}\right)-\left(8+18-\frac{16}{3}-\frac{81}{12}\right)\right]-\left[\left(8-18-\frac{16}{3}+\frac{81}{12}\right)-\left(0-0-0+\frac{1}{12}\right)\right]$$

$$=-\frac{68}{3} \qquad \blacksquare$$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iint\limits_R (x-y)dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y^2=1-x$ เส้นตรง $x+y=-1$ และ $y-x=1$

วิธีทำ



$$\iint\limits_R (x-y)dA=\iint\limits_{R_1}(x-y)dA+\iint\limits_{R_2}(x-y)dA$$

$$=\int_{0}^{1}\int_{y-1}^{1-y^2}(x-y)\,dxdy+\int_{-1}^{0}\int_{-1-y}^{1-y^2}(x-y)\,dxdy$$

$$=\int_{0}^{1}\left[\frac{(x-y)^2}{2}\right]_{x=y-1}^{1-y^2}dy+\int_{-1}^{0}\left[\frac{(x-y)^2}{2}\right]_{x=-1-y}^{1-y^2}dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left[(1-y^2-y)^2-(-1)^2\right]dy+\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}\left[(1-y^2-y)^2-(1-2y)^2\right]dy$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}(y^4+2y^3-y^2-2y)\,dy+\frac{1}{2}\int_{-1}^{0}(y^4+2y^3-5y^2-6y)\,dy$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{y^5}{5}+\frac{y^4}{2}-\frac{y^3}{3}-y^2\right]_0^1+\frac{1}{2}\left[\frac{y^5}{5}+\frac{y^4}{2}-\frac{5}{3}y^3-3y^2\right]_{-1}^0$$

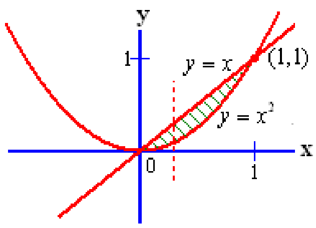
$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-1\right)-0\right]+\frac{1}{2}\left[0-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{5}{3}+3\right)\right]\quad=\frac{12}{60}\quad=\frac{1}{5}$$

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x}8y^3x\,dydx$

วิธีทำ

วิธีที่ 1



$$\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x}8y^3x\,dydx=\int_{0}^{1}\left[2xy^4\right]_{y=x^2}^{x}\,dx$$

$$=2\int_{0}^{1}\left[x^5-x^9\right]dx$$

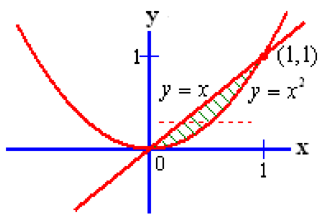
$$=2\left[\frac{x^6}{6}-\frac{x^{10}}{10}\right]_0^1$$

$$=2\left[\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right]$$

$$=\frac{2}{15}$$

■

วิธีที่ 2



$$\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x}8y^3x\,dydx=\int_{0}^{1}\int_{y}^{\sqrt{y}}8y^3x\,dxdy$$

$$=\int_{0}^{1}\left[4y^3x^2\right]_{x=y}^{\sqrt{y}}\,dx$$

$$=4\int_{0}^{1}\left[y^4-y^5\right]dy$$

$$=4\left[\frac{y^5}{5}-\frac{y^6}{6}\right]_0^1$$

$$=4\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right]$$

$$=\frac{2}{15}$$

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_{0}^{2}\int_{y/2}^{1} e^{x^2}\,dxdy$

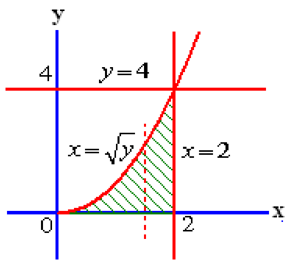
วิธีทำ

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} y\cos x^5\,dxdy$

วิธีทำ

$$\int_{0}^{4}\int_{\sqrt{y}}^{2} y\cos x^5\,dxdy = \int_{0}^{2}\int_{0}^{x^2} y\cos x^5\,dydx$$



$$= \int_{0}^{2}\left[\frac{y^2}{2}\cos x^5\right]_{y=0}^{x^2} dx$$

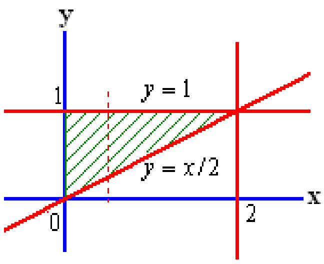
$$= \int_{0}^{2}\left[\frac{x^4}{2}\cos x^5\right] dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}\sin x^5\right]_{0}^{2} \quad = \frac{1}{10}\sin 32$$ ■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_{0}^{2}\int_{x/2}^{1} xe^{y^3}\,dydx$

วิธีทำ

$$\int_{0}^{2}\int_{x/2}^{1} xe^{y^3}\,dydx = \int_{0}^{1}\int_{0}^{2y} xe^{y^3}\,dxdy$$



$$= \int_{0}^{1}\left[\frac{x^2}{2}e^{y^3}\right]_{x=0}^{2y} dy$$

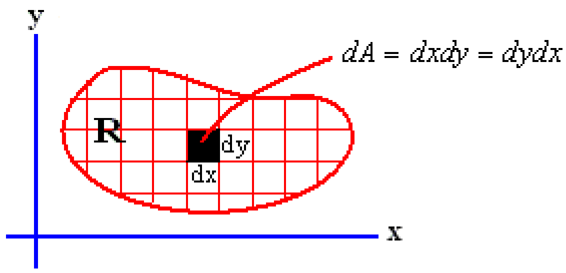
$$= \int_{0}^{1} 2y^2 e^{y^3}\,dy$$

$$= \frac{2}{3}e^{y^3}\Big|_{0}^{1}$$

$$= \frac{2}{3}(e^1 - e^0) \quad = \frac{2}{3}(e-1)$$ ■

9.1.2 การประยุกต์ของอินทิกรัลสองชั้น

9.1.2.1 การหาพื้นที่โดยใช้อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดฉาก

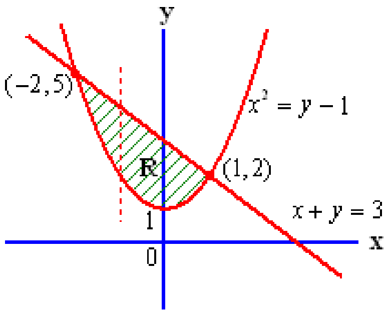


จากรูปจะได้ว่า

$$\boxed{A = \iint_R dA = \iint_R dydx = \iint_R dxdy}$$

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $x^2 = y-1$ และเส้นตรง $x+y=3$

วิธีทำ **วิธีที่ 1**



<u>หาจุดตัด</u>

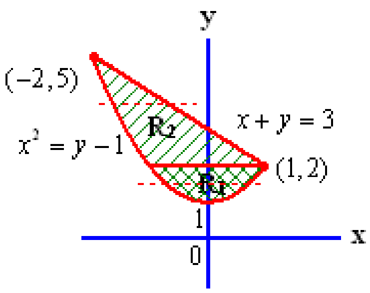
$x^2+1=3-x$

$x^2+x-2=0$

$(x-1)(x+2)=0$

$\therefore x=-2,1$

วิธีที่ 2 $A = \iint_{R_1} dA + \iint_{R_2} dA$



$$= \int_1^2 \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} dxdy + \int_2^5 \int_{-\sqrt{y-1}}^{3-y} dxdy$$

$$= \int_1^2 \left[x\right]_{x=-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} dy + \int_2^5 \left[x\right]_{x=-\sqrt{y-1}}^{3-y} dy$$

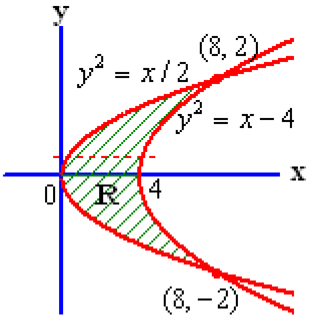
$$= \int_1^2 \left[2\sqrt{y-1}\right] dy + \int_2^5 \left[3-y+\sqrt{y-1}\right] dy$$

$$A=\left[\frac{4}{3}(y-1)^{3/2}\right]_1^2+\left[3y-\frac{y^2}{2}+\frac{2}{3}(y-1)^{3/2}\right]_2^5$$

$$=\frac{4}{3}+\frac{19}{6}=\frac{9}{2} \qquad \text{ตารางหน่วย}$$ ■

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดด้วยเส้นโค้ง $x^2=y-1$ และเส้นตรง $x+y=3$

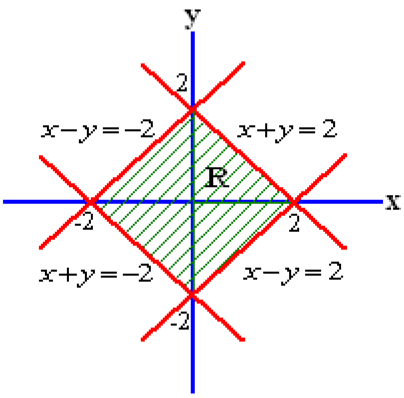
วิธีทำ $A=\iint_R dA$



■

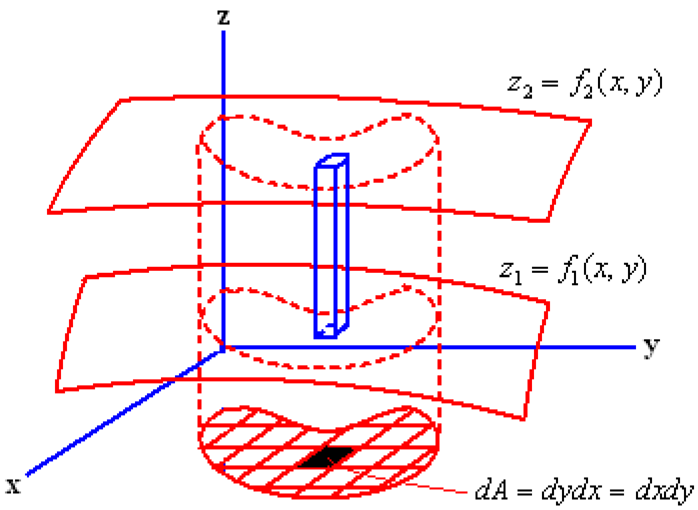
ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ปิดด้วยเส้นตรง $x+y=2,\ x-y=2,\ x+y=-2$ และ $x-y=-2$

วิธีทำ $A=\iint_R dA$



■

9.1.2.2 การหาปริมาตรของรูปทรงโดยใช้อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดฉาก



ดังนั้น จากรูปจะได้ว่า

$$V = \iint_{R_{xy}} [z_2 - z_1]\,dA$$

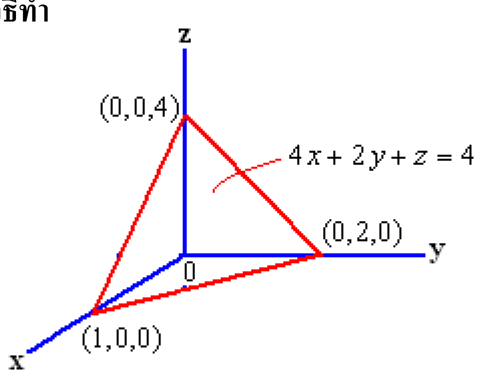
$$= \iint_{R_{xy}} [\,f_2(x,y) - f_1(x,y)]\,dydx$$

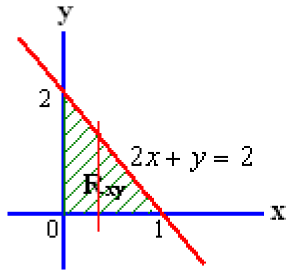
$$= \iint_{R_{xy}} [\,f_2(x,y) - f_1(x,y)]\,dxdy$$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยระนาบพิกัดฉากและระนาบ $4x+2y+z=4$

วิธีทำ

$$V = \iint_{R_{xy}} (z-0)\,dA = \iint_{R_{xy}} z\,dA$$

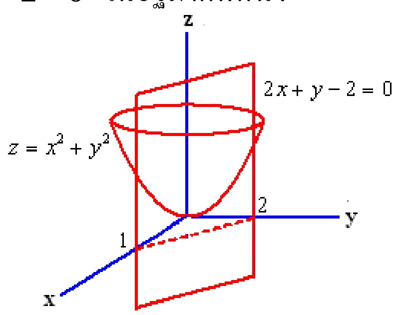




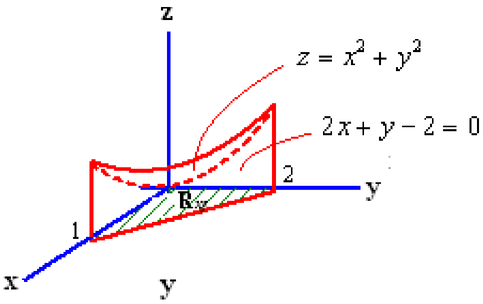
■

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยระนาบพิกัดฉาก พื้นผิว $z = x^2 + y^2$ และระนาบ $2x+y-2=0$ ในอัฐภาคที่หนึ่ง

วิธีทำ



$$V = \iint_{R_{xy}} (z-0)\,dA = \int_0^1 \int_0^{2-2x} (x^2+y^2)\,dydx$$



$$= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^{2-2x} dx$$

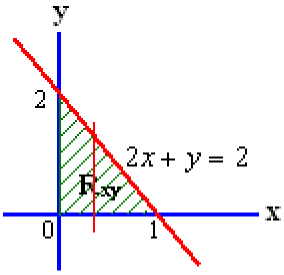
$$= \int_0^1 \left[x^2(2-2x) + \frac{1}{3}(2-2x)^3 \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[2x^2 - 2x^3 + \frac{1}{3}(2-2x)^3 \right] dx$$

$$= \left[\frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{2} - \frac{1}{24}(2-2x)^4 \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} - 0 \right) - \left(0 - 0 - \frac{2}{3} \right)$$

$$= \frac{5}{6}$$ ลูกบาศก์หน่วย ■



ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$ และระนาบ $y + z = 4$ เหนือระนาบ xy (นักศึกษาสามารถกดที่ลิงก์ด้านล่างนี้หรือสแกนQR Code เพื่อดูภาพเคลื่อนไหวที่แสดงการตัดกันของพื้นผิวที่โจทย์กำหนด)

https://www.youtube.com/watch?v=hFwiAapdaJE&list=PLaeVrh4dXQEeazHEEIqum_JIPyPS8ueeS&index=1

วิธีทำ

$$V = \iint_{R_{xy}} (z-0)\, dA$$

$$= \int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-y)\, dy dx$$

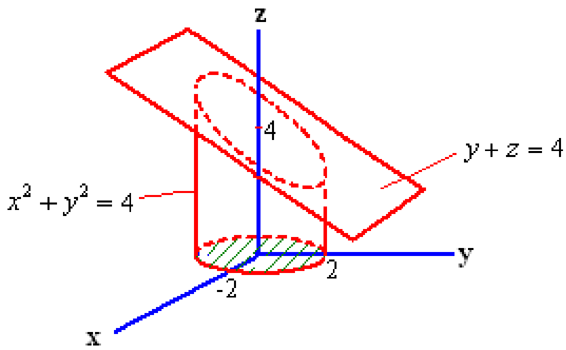
$$= 2\int_{0}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (4-y)\, dy dx$$

$$= 2\int_0^2 \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx$$

$$= 2\int_0^2 8\sqrt{4-x^2}\, dx = 16\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\, dx$$

ให้ $x = 2\sin\theta$

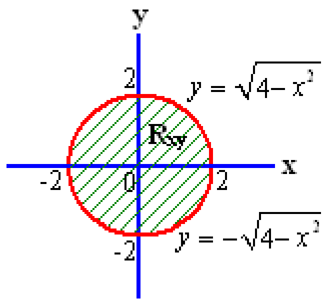
$\therefore dx = 2\cos\theta d\theta$



$$= 16\int_0^{\pi/2} \sqrt{4 - 4\sin^2\theta}\ 2\cos\theta\, d\theta$$

$$= 64\int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2\theta}\ \cos\theta\, d\theta = 64\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta\, d\theta$$

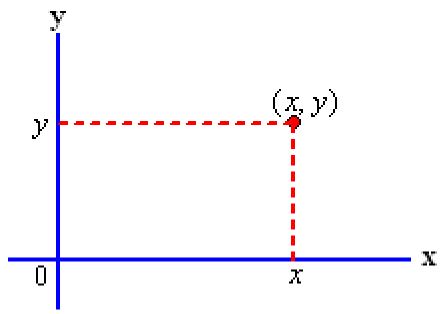
$$= 64\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2} \right) d\theta = 32\int_0^{\pi/2} (1+\cos 2\theta)\, d\theta$$

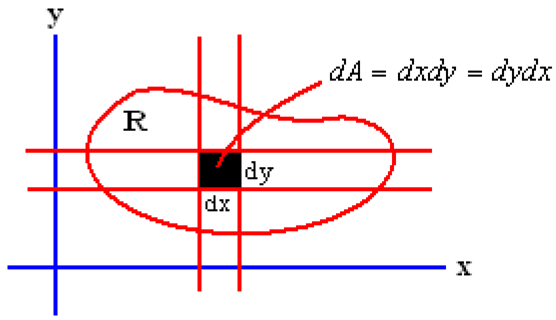


$$= 32\left(\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta \right)\Big|_0^{\pi/2} = 32\left[\left(\frac{\pi}{2} + 0 \right) - (0+0) \right] = 16\pi$$ ลูกบาศก์หน่วย ■

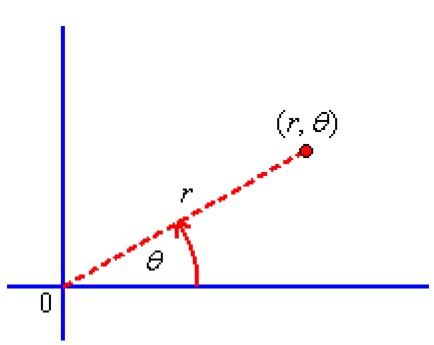
9.1.3 อินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinates)

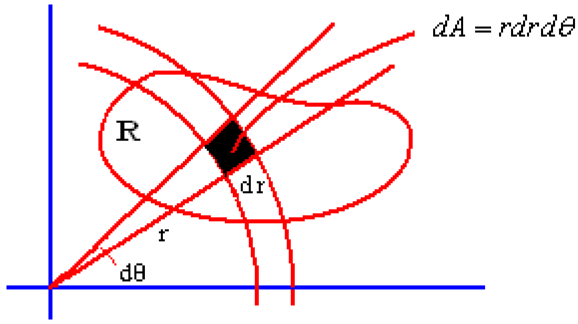
พิกัดฉาก (Rectangular Coordinates)





พิกัดเชิงขั้ว (Polar Coordinates)





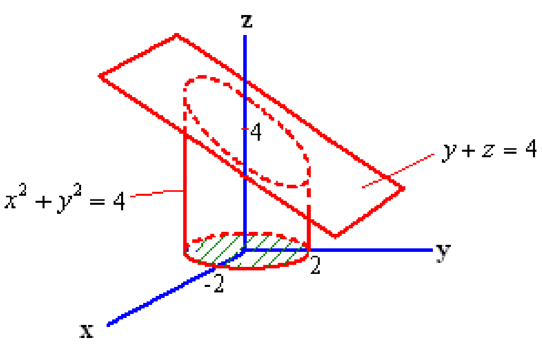
จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดเชิงขั้ว ดังนี้

$r^2 = x^2 + y^2$	และ	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$

$x = r\cos\theta$	และ	$y = r\sin\theta$

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $x^2 + y^2 = 4$ และระนาบ $y + z = 4$ และ $z = 0$

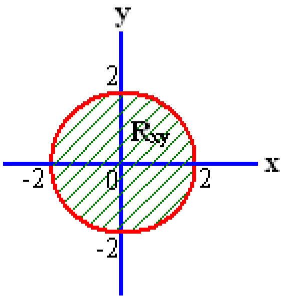
วิธีทำ



$$V = \iint_{R_{xy}} (z - 0)\, dA = \iint_{R_{xy}} z\, dA$$

$$= \iint_{R_{xy}} (4 - y)\, dA$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{2} (4 - r\sin\theta)\, r\, dr\, d\theta$$



$$= \int_0^{2\pi} \left[2r^2 - \frac{r^3}{3}\sin\theta \right]_{r=0}^{2} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(8 - \frac{8}{3}\sin\theta \right) d\theta$$

$$= \left[8\theta + \frac{8}{3}\cos\theta \right]_0^{2\pi}$$

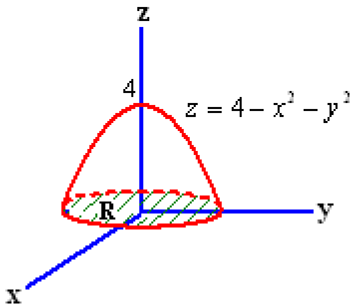
$$= 16\pi + \frac{8}{3} - \left(0 + \frac{8}{3} \right) = 16\pi \quad \text{ลูกบาศก์หน่วย}$$

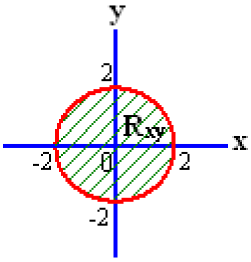
■

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรที่อยู่ใต้ผิวโค้ง $z = 4 - x^2 + y^2$ และอยู่เหนือระนาบ xy

วิธีทำ

$$V = \iint_{R_{xy}} z\, dA$$



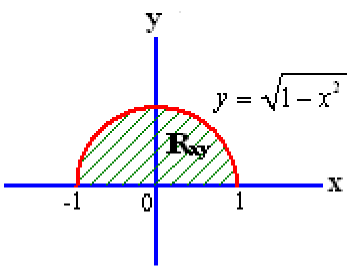


■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dydx$

วิธีทำ

$$\int_{-1}^{1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{3/2}\, dydx = \int_0^{\pi} \int_0^{1} (r^2)^{3/2}\, r drd\theta$$



$$= \int_0^{\pi} \int_0^{1} r^4 drd\theta$$

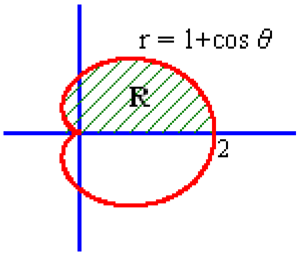
$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{r^5}{5} \right]_{r=0}^{1} d\theta$$

$$= \frac{1}{5} \int_0^{\pi} d\theta \quad = \left. \frac{\theta}{5} \right|_0^{\pi} = \frac{\pi}{5}$$

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iint\limits_R r^2 \sin\theta\, dA$ เมื่อ R คือบริเวณที่ปิดล้อมด้วยแกนเชิงขั้วและครึ่งบนของโค้งรูปหัวใจ $r = 1+\cos\theta$

วิธีทำ

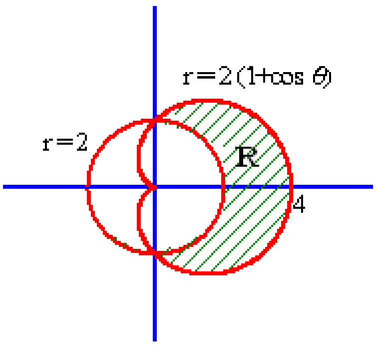


$$\begin{aligned}
\iint\limits_R r^2 \sin\theta\, dA &= \int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r^2 \sin\theta\, r\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\int_0^{1+\cos\theta} r^3 \sin\theta\, dr\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi}\left[\frac{r^4}{4}\sin\theta\right]_{r=0}^{1+\cos\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^4 \sin\theta\, d\theta \\
&= -\frac{1}{4}\frac{(1+\cos\theta)^5}{5}\Bigg|_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{20}(0-32) = \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง จงหาพื้นที่ของบริเวณ R ที่อยู่ภายนอกวงกลม $r=2$ แต่อยู่ภายใน $r = 2(1+\cos\theta)$

วิธีทำ



$$\begin{aligned}
A = \iint\limits_R dA &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_2^{2(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2}\int_2^{2(1+\cos\theta)} r\,dr\,d\theta \\
&= 2\int_0^{\pi/2}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{r=2}^{2(1+\cos\theta)} d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/2}\left[(1+\cos\theta)^2 - 1\right] d\theta \\
&= 4\int_0^{\pi/2}(2\cos\theta + \cos^2\theta)\, d\theta \\
&= 4\left(2\sin\theta + \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_0^{\pi/2} \\
&= 4\left[\left(2+\frac{\pi}{4}+0\right) - (0+0+0)\right] \\
&= 8+\pi \quad \text{ตารางหน่วย}
\end{aligned}$$

■

9.1.4 การเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัลสองชั้น

ในหัวข้อที่ผ่านมาเราหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\iint\limits_{R_{xy}} f(x,y)dA$ โดยการเปลี่ยนให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (r,θ) แต่ในหัวข้อนี้ เราจะศึกษา การเปลี่ยนตัวแปรให้อยู่ในระบบพิกัด (u,v) ใดๆ

ก่อนที่จะศึกษาการแปลงของพิกัด (Transformation of Coordinates) (x,y) ไปเป็น (u,v) ใดๆ เราจะขอกล่าวถึงนิยามต่อไปนี้ก่อน

นิยาม ให้ $x=g(u,v)$ และ $y=h(u,v)$ โดยที่ g และ h สามารถหาอนุพันธ์ย่อยได้ จะได้ว่า **ค่าตัวกำหนดจาโคเบียน** (Jacobian determinant) เขียนแทนด้วย $J(u,v)$ กำหนดโดย

$$J(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_u & x_v\\ y_u & y_v\end{vmatrix}$$

หมายเหตุ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\dfrac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$ โดยที่ $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0$

ทฤษฎีบท ให้ $x=g(u,v)$ และ $y=h(u,v)$ โดยที่ g และ h สามารถหาอนุพันธ์ย่อยได้ จะได้ว่า

$$\iint\limits_{R_{xy}} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{R_{uv}} f\left(g(u,v),\,h(u,v)\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|dudv$$

โดยที่ $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\neq 0$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ จงแปลง $\iint\limits_{R_{xy}} f(x,y)dxdy$ ให้อยู่ในระบบพิกัด (r,θ)

วิธีทำ

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix}x_r & x_\theta\\ y_r & y_\theta\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

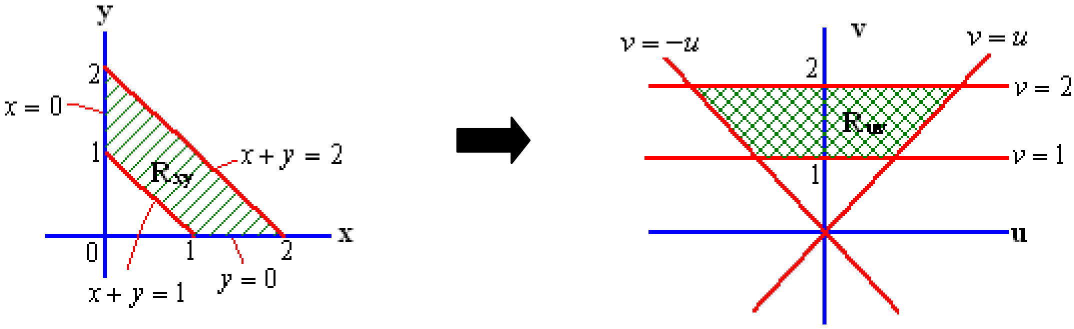
จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\iint\limits_{R_{xy}} f(x,y)dxdy &=\iint\limits_{R_{r\theta}} f\left(r\cos\theta,\,r\sin\theta\right)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|drd\theta\\ &=\iint\limits_{R_{r\theta}} f\left(r\cos\theta,\,r\sin\theta\right)\left|r\right|drd\theta\\ &=\iint\limits_{R_{r\theta}} f\left(r\cos\theta,\,r\sin\theta\right)rdrd\theta\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง ให้ R เป็นบริเวณสี่เหลี่ยมคางหมูในระนาบ xy ซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(0,1)$, $(0,2)$, $(2,0)$ และ $(1,0)$ จงหาค่าของ $\iint\limits_R e^{\frac{y-x}{y+x}}\,dA$ โดยใช้การแปลง $u = y - x$ และ $v = y + x$

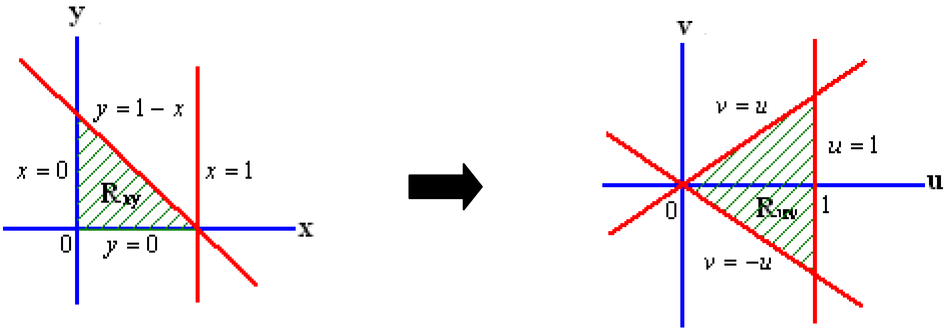
วิธีทำ



■

ตัวอย่าง จงใช้การแปลง $u=x+y$ และ $v=x-y$ หาค่าของ $\int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)\cos(x-y)\,dydx$

วิธีทำ



ดังนั้น $$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1-1=-2$$

นั่นคือ $$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{2}$$

จะได้ว่า

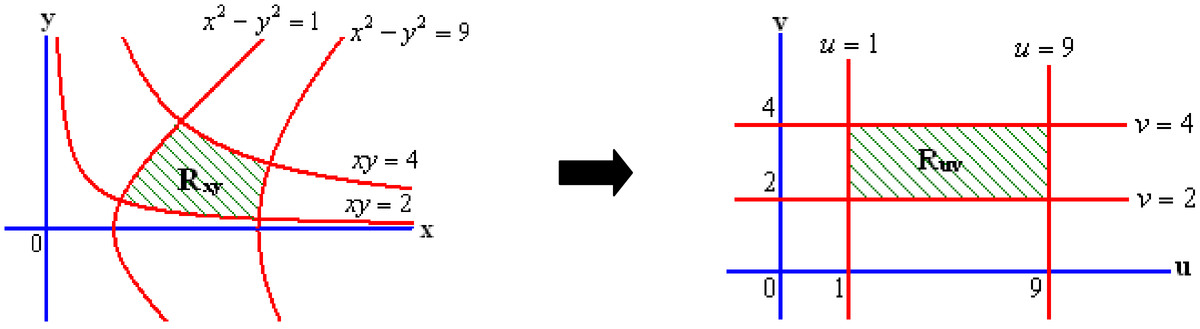
$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_0^{1-x}(x+y)\cos(x-y)\,dydx &= \int_0^1\int_{-u}^{u} u\cos v\left|-\frac{1}{2}\right|dvdu \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\int_{-u}^{u} u\cos v\,dvdu \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[u\sin v\right]_{v=-u}^{u}\,du \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[u\sin u-u\sin(-u)\right]\,du \\
&= \int_0^1 u\sin u\,du \\
&= -u\cos u+\sin u\,\Big|_0^1 \\
&= -\cos 1+\sin 1-(0+\sin 0) \\
&= \sin 1-\cos 1
\end{aligned}$$

u	$+$	$\sin u$
1	$-$	$-\cos u$
0		$-\sin u$

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iint_{R_{xy}} (x^2+y^2)dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณในจตุภาคที่หนึ่ง ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $x^2-y^2=1,\ x^2-y^2=9$ $xy=2$ และ $xy=4$

วิธีทำ



กำหนดให้ $u=x^2-y^2$ และ $v=xy$ จะได้ว่า

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{vmatrix}=2x^2+2y^2=2(x^2+y^2)$$

นั่นคือ

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{2(x^2+y^2)}$$

จะได้ว่า

$$\iint_{R_{xy}} (x^2+y^2)dA=\iint_{R_{uv}} (x^2+y^2)\left|\frac{1}{2(x^2+y^2)}\right|dudv$$

$$=\frac{1}{2}\iint_{R_{uv}} dudv \qquad \left(\iint_{R_{uv}} dudv = \text{พื้นที่ของ} \square \text{ผืนผ้า}\right)$$

$$=\frac{1}{2}(16)$$

$$=8$$

■

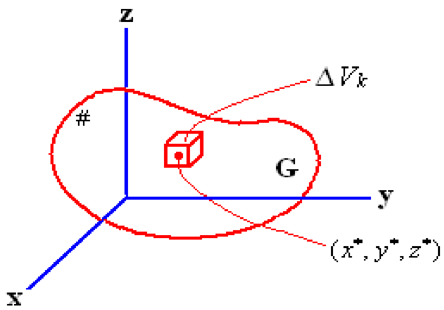
9.2 อินทิกรัลสามชั้น (Triple Integrals)

เรานิยามอินทิกรัลสามชั้นของฟังก์ชัน $f(x,y,z)$ บนบริเวณปิดของทรงสามมิติ G ในลักษณะเดียวกับอินทิกรัลสองชั้น ดังนี้

นิยาม ให้ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนรูปทรงสามมิติ G ดังนั้นอินทิกรัลสามชั้นของ f บน G เขียนแทนด้วย $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV$ กำหนดโดย

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)(\Delta V_k)\right]$$

โดยที่ลิมิตหาค่าได้



สมบัติของอินทิกรัลสามชั้น

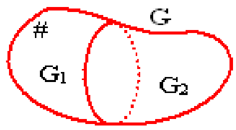
ให้ $f(x,y,z)$ และ $g(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนรูปทรง G จะได้ว่า

1 $\iiint\limits_G c\,f(x,y,z)\,dV = c\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV$ โดยที่ c เป็นค่าคงตัว

2 $\iiint\limits_G [\,f(x,y,z) \pm g(x,y,z)]\,dV = \iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV \pm \iiint\limits_G g(x,y,z)\,dV$

3 ถ้า $G = G_1 \cup G_2$ โดยที่ G_1 และ G_2 ไม่มีส่วนที่ซ้อนกัน

$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)\,dV \pm \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)\,dV$

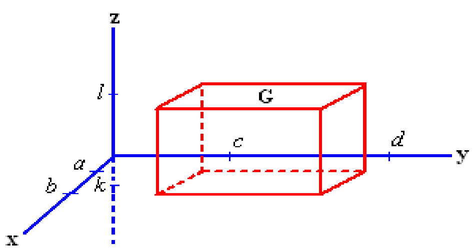


9.2.1 การหาค่าอินทิกรัลสามชั้น

เราจะหา $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV$ โดยการศึกษาบนรูปทรง G ที่เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนานก่อน

ทฤษฎีบท ให้ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนรูปทรงสี่เหลี่ยมด้านขนาน

$G = \{(x,y,z)\,|\, a \le x \le b,\ c \le y \le d$ และ $k \le z \le l\}$ ดังรูป



จะได้ว่า

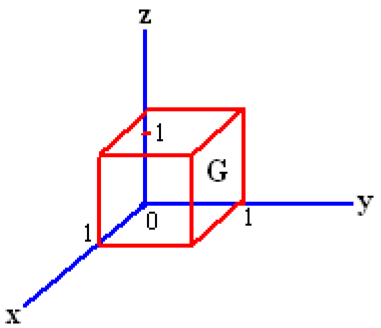
$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV = \int_a^b\int_c^d\int_k^l f(x,y,z)\,dzdydx$$

หมายเหตุ

- ในการหาค่า $\int_a^b\int_c^d\int_k^l f(x,y,z)\,dzdydx$ เราจะอินทิเกรตเทียบ z ก่อน (โดย x และ y เป็นค่าคงตัว) แล้วอินทิเกรตเทียบกับ y (โดย x เป็นค่าคงตัว) หลังจากนั้นจึงอินทิเกรตเทียบกับ x
- มีอีก 5 แบบที่เท่ากับ $\int_a^b\int_c^d\int_k^l f(x,y,z)\,dzdydx$ คือ $\int_c^d\int_a^b\int_k^l f(x,y,z)\,dzdxdy$, $\int_k^l\int_c^d\int_a^b f(x,y,z)\,dxdydz$, $\int_c^d\int_k^l\int_a^b f(x,y,z)\,dxdzdy$, $\int_k^l\int_a^b\int_c^d f(x,y,z)\,dydxdz$, $\int_a^b\int_k^l\int_c^d f(x,y,z)\,dydzdx$

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iiint_G (x^2+yz)\,dV$ เมื่อ G คือกล่องทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้า ซึ่ง $0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1$ และ $0\le z\le 1$

วิธีทำ

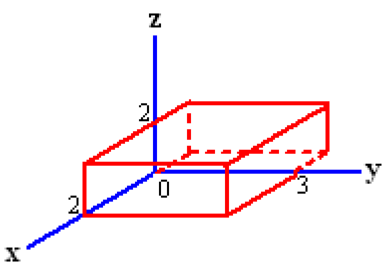


$$\begin{aligned}\iiint_G (x^2+yz)\,dV &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (x^2+yz)\,dzdydx\\ &= \int_0^1\int_0^1 \left[x^2z+\frac{yz^2}{2}\right]_{z=0}^{1} dydx\\ &= \int_0^1\int_0^1 \left(x^2+\frac{y}{2}\right)dydx\\ &= \int_0^1 \left[x^2y+\frac{y^2}{4}\right]_{y=0}^{1} dx\\ &= \int_0^1 \left(x^2+\frac{1}{4}\right)dx\\ &= \left.\frac{x^3}{3}+\frac{x}{4}\right|_0^1\\ &= \frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}\end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iiint_G 12xy^2z^3\,dV$ เมื่อ $G=\{(x,y,z)\,|\,-1\le x\le 2,\ 0\le y\le 3$ และ $0\le z\le 2\}$

วิธีทำ



$$\begin{aligned}\iiint_G 12xy^2z^3\,dV &= \int_0^2\int_0^3\int_{-1}^2 12xy^2z^3\,dxdydz\\ &= \int_0^2\int_0^3 \left[6x^2y^2z^3\right]_{x=-1}^{2} dydz\\ &= \int_0^2\int_0^3 (24y^2z^3-6y^2z^3)dydz = \int_0^2\int_0^3 18y^2z^3dydz\end{aligned}$$

$$= \int_0^2 \left[6y^3z^3\right]_{y=0}^{3} dz$$

$$= \int_0^2 162z^3\, dz$$

$$= 162\, \frac{z^4}{4}\Bigg|_0^2$$

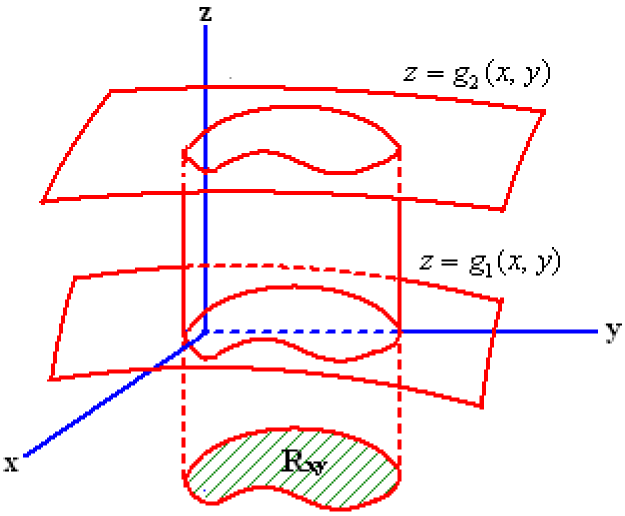
$$= \frac{162}{4}(16-0) \;=\; 648 \qquad \blacksquare$$

ในกรณีที่รูปทรง G ไม่เป็นรูปทรงสี่เหลี่ยมผืนผ้า เราหา $\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV$ ด้วยทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท ให้ G เป็นทรงสามมิติที่มีพื้นผิวบน $z = g_2(x,y)$ และมีพื้นผิวล่าง $z = g_1(x,y)$ และ R_{xy} เป็นภาพฉายของ G บนระนาบ xy

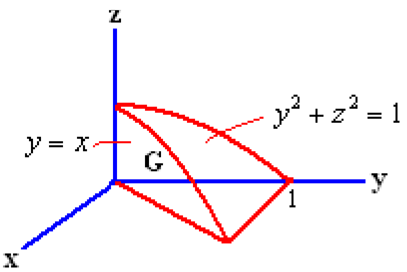
ให้ $f(x,y,z)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน G จะได้ว่า

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_{R_{xy}} \left[\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right] dA$$



ตัวอย่าง ให้ G เป็นทรงสามมิติในอัฐภาคที่หนึ่ง ซึ่งล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $y^2 + z^2 = 1$ ระนาบ $y = x$ และระนาบ $x = 0,\ z = 0$ จงหาค่าของ $\iiint\limits_G z\,dV$

วิธีทำ



(นักศึกษาสามารถกดที่ลิงก์ด้านล่างนี้หรือสแกนQR Code เพื่อดูภาพเคลื่อนไหวที่แสดงการตัดกันของพื้นผิวที่โจทย์กำหนด)

https://www.youtube.com/watch?v=cgCn8IaQ6mc&list=PLaeVrh4dXQEeazHEEIqum_JIPyPS8ueeS&index=2

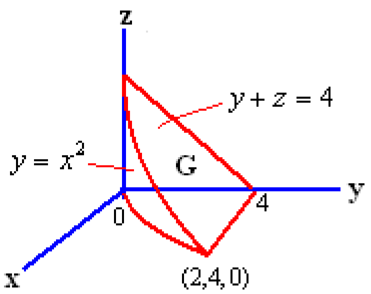
■

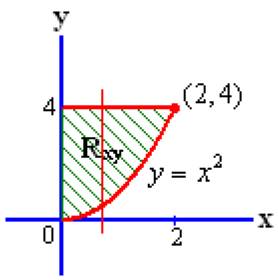
ตัวอย่าง จงหา $\iiint\limits_G dV$ เมื่อ G เป็นทรงสามมิติในอัฐภาคที่หนึ่ง ซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ $y+z=4$ ทรงกระบอก $y=x^2$ ระนาบ xy และ yz

(นักศึกษาสามารถกดที่ลิงก์ด้านล่างนี้หรือสแกน QR Code เพื่อดูภาพเคลื่อนไหวที่แสดงการตัดกันของพื้นผิวที่โจทย์กำหนด)

https://www.youtube.com/watch?v=d5bfh8KE1jE&list=PLaeVrh4dXQEeazHEEIqum_JIPyPS8ueeS&index=3

วิธีทำ





$$\iiint\limits_G z\,dV = \iint\limits_{R_{xy}} \left[\int_0^{4-y} dz \right] dA$$

$$= \iint\limits_{R_{xy}} [z]_0^{4-y}\, dA$$

$$= \iint\limits_{R_{xy}} (4-y)\,dA$$

$$= \int_0^2 \int_{x^2}^4 (4-y)\,dydx$$

$$= \int_0^2 \left[4y - \frac{y^2}{2} \right]_{x^2}^4 dx$$

$$= \int_0^2 \left[(16-8) - \left(4x^2 - \frac{x^4}{2} \right) \right] dx$$

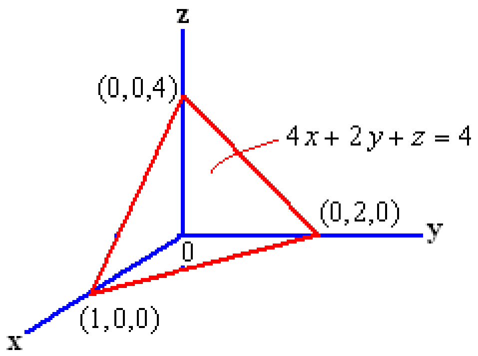
$$= \int_0^2 \left(8 - 4x^2 + \frac{x^4}{2} \right) dx$$

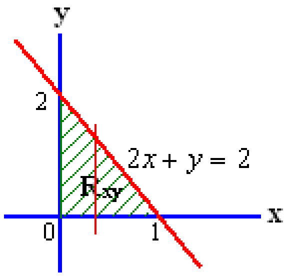
$$= 8x - \frac{4}{3}x^3 + \frac{x^5}{10} \Bigg|_0^2 = 16 - \frac{32}{3} + \frac{32}{10} = \frac{128}{15}$$

■

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติ G ซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบพิกัดทั้งสามและระนาบ $4x+2y+z=4$

วิธีทำ





G

$$= \iint_{R_{xy}} \left[\int_0^{4-4x-2y} dz \right] dA$$

$$= \iint_{R_{xy}} [z]_0^{4-4x-2y}\, dA$$

$$= \iint_{R_{xy}} (4-4x-2y)\, dA$$

$$= \int_0^1 \int_0^{2-2x} (4-4x-2y)\, dy dx$$

$$= \int_0^1 \left[4y-4xy-y^2 \right]_{y=0}^{2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 \left[4(2-2x)-4x(2-2x)-(2-2x)^2 \right] dx$$

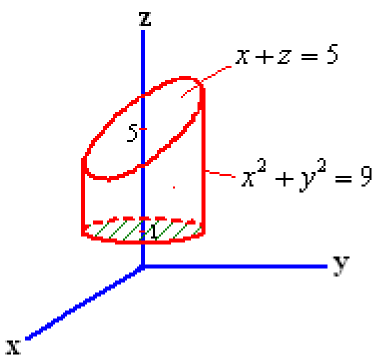
$$= \int_0^1 (4-8x+4x^2)\, dx$$

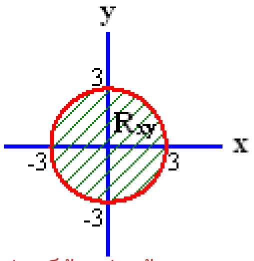
$$= 4x-4x^2+\frac{4}{3}x^3 \Big|_0^1$$

$$= 4-4+\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$$ ลูกบาศก์หน่วย ■

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติ G ที่ล้อมรอบด้วยระนาบ $z=1$ ระนาบ $x+z=5$ และทรงกระบอก $x^2+y^2=9$

วิธีทำ





(นักศึกษาสามารถกดที่ลิงก์ด้านล่างนี้ หรือสแกนQR Code
เพื่อดูภาพเคลื่อนไหวที่แสดงการตัดกันของพื้นผิวที่โจทย์กำหนด)

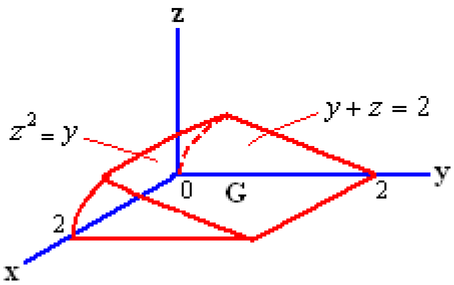
https://www.youtube.com/watch?v=5Hq_VnSBJho&list=PLaeVrh4dXQEeazHEEIqum_JIPyPS8ueeS&index=4

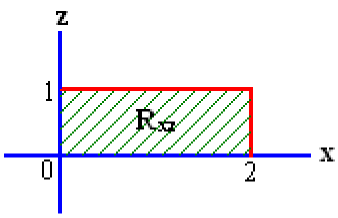
ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\iiint\limits_G 2z\,dV$ เมื่อ G เป็นทรงสามมิติที่ปิดล้อมด้วยทรงกระบอก $z^2 = y$ ระนาบ $y+z=2,\ x=0,\ z=0$ และ $x=2$

(นักศึกษาสามารถกดที่ลิงก์ด้านล่างนี้หรือสแกนQR Code เพื่อดูภาพเคลื่อนไหวที่แสดงการตัดกันของพื้นผิวที่โจทย์กำหนด)

https://www.youtube.com/watch?v=y2miytjX5og&list=PLaeVrh4dXQEeazHEEIqum_JIPyPS8ueeS&index=5

วิธีทำ





$$\iiint\limits_G 2z\,dV = \iint\limits_{R_{xz}} \left[\int_{z^2}^{2-z} 2z\,dy\right] dA$$

$$= 2\iint\limits_{R_{xz}} [zy]_{y=z^2}^{2-z}\,dA$$

$$= 2\iint\limits_{R_{xz}} \left[z(2-z-z^2)\right] dA$$

$$= 2\int_0^2\int_0^1 (2z-z^2-z^3)\,dz\,dx$$

$$= 2\int_0^2 \left[z^2 - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4}\right]_0^1 dx$$

$$= 2\int_0^2 \left(1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) dx$$

$$= \frac{5}{6}\int_0^2 dx$$

$$= \frac{5}{6}\,x\Big|_0^2$$

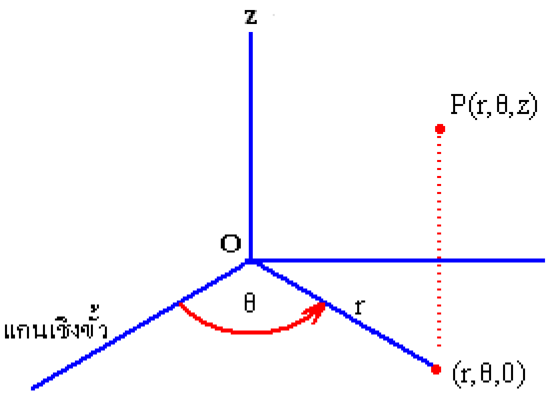
$$= \frac{5}{6}(2-0) = \frac{5}{3}$$ ■

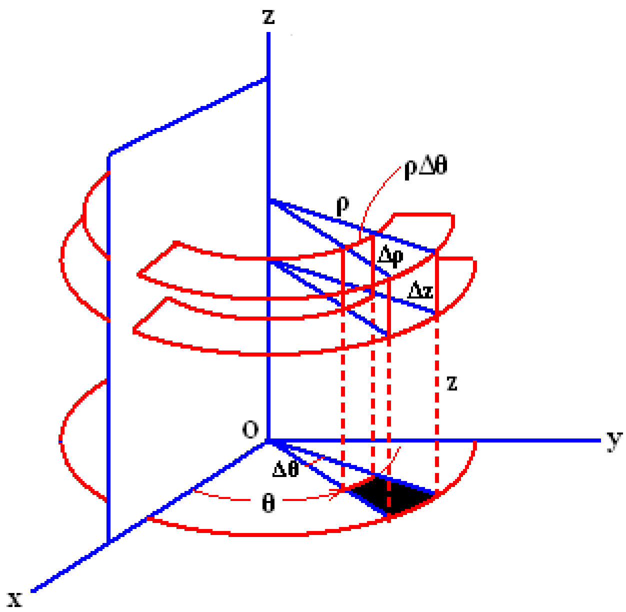
9.2.2 อินทิกรัลสามชั้นในระบบพิกัดทรงกระบอกและระบบพิกัดทรงกลม (Triple Integrals in Cylindrical and Spherical Coordinates System)

ในหัวข้อที่ผ่านมา การหาค่าอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดฉาก x และ y เมื่อมีความยุ่งยาก เราจะเปลี่ยนเป็นระบบพิกัดเชิงขั้ว หรือเปลี่ยนเป็นระบบตัวแปร u และ v ดังกล่าวไว้แล้ว ในทำนองเดียวกัน สำหรับอินทิกรัลสามชั้น ถ้าการหาค่าอินทิกรัลในระบบตัวแปรพิกัดฉาก x, y และ z ยุ่งยาก ก็จะเปลี่ยนมาอินทิเกรตในระบบพิกัดทรงกระบอก หรือพิกัดทรงกลมแทน

9.2.2.1 ระบบพิกัดทรงกระบอก (Cylindrical Coordinates System)

เป็นระบบที่บอกพิกัดของจุด P ในปริภูมิเป็น (r,θ,z) เมื่อ (r,θ) เป็นภาพฉายของจุด P บนระนาบเชิงขั้ว $r\theta$ และ z เป็นระยะจากจุด P ถึงระนาบ $r\theta$ ดังรูป





$$\boxed{dV = r\,dz\,dr\,d\theta}$$

จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดทรงกระบอก ดังนี้

$$\boxed{x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad \text{และ} \qquad z = z}$$

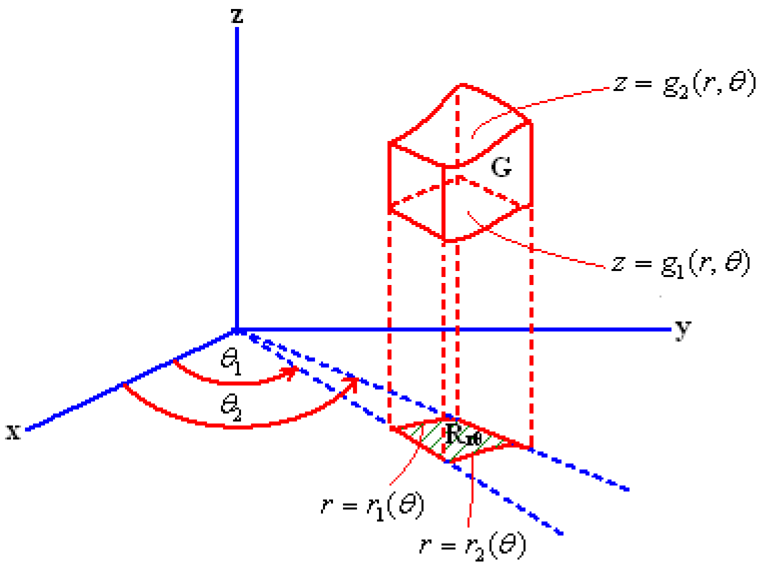
$$\boxed{r^2 = x^2 + y^2 \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad \text{และ} \qquad z = z}$$

ทฤษฎีบท ให้ G เป็นทรงสามมิติเชิงเดี่ยว

พื้นผิวบนมีสมการเป็น $z = g_2(r,\theta)$ และพื้นผิวล่างมีสมการเป็น $z = g_1(r,\theta)$ ในระบบพิกัดทรงกระบอก ถ้า $R_{r\theta}$ เป็นภาพฉายของ G บนระนาบ $r\theta$ โดยที่ g_1, g_2 มีความต่อเนื่องบน $R_{r\theta}$ และ $f(r,\theta,z)$ มีความต่อเนื่องบน G แล้ว

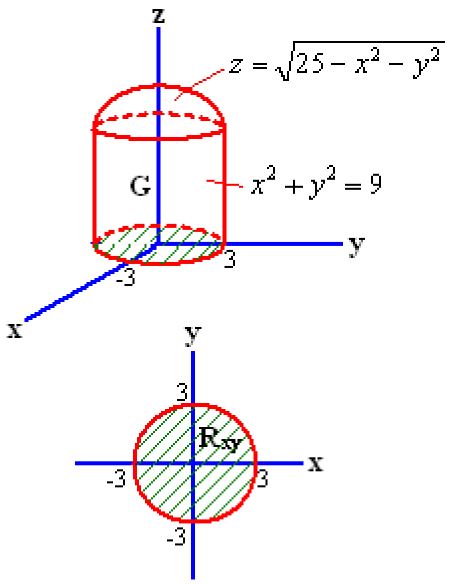
$$\iiint\limits_G f(r,\theta,z)\,dV = \iint\limits_{R_{r\theta}} \left[\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\,dz \right] dA$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} \left[\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\,dz \right] r\,dr\,d\theta$$



ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติ G ในระบบพิกัดทรงกระบอก เมื่อ G ประกอบด้วยพื้นผิว $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, $z = 0$ และ $x^2 + y^2 = 9$

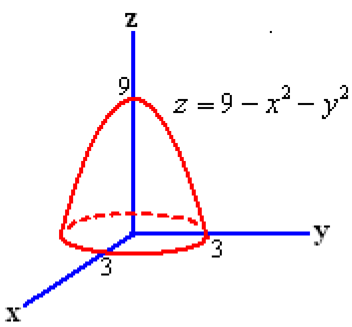
วิธีทำ



ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2 dV$ โดยใช้ระบบพิกัดทรงกระบอก

วิธีทำ

$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2 dV = \int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2 dzdydx$$



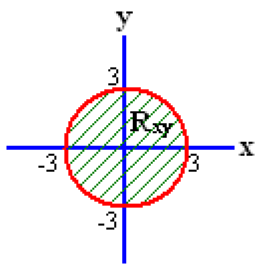
$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3}\int_{0}^{9-r^2} r^2\cos^2\theta\; rdzdrd\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3} r^3\cos^2\theta\,[z]_0^{9-r^2}\,drd\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3} r^3\cos^2\theta\left[9-r^2\right]drd\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{3} \cos^2\theta(9r^3-r^5)\,drd\theta$$

$$= \int_{0}^{2\pi} \cos^2\theta\left[\frac{9}{4}r^4-\frac{r^6}{6}\right]_0^3 d\theta$$



$$= \int_{0}^{2\pi} \cos^2\theta\left[\frac{9}{4}(81)-\frac{729}{6}\right]d\theta$$

$$= \frac{243}{4}\int_{0}^{2\pi}\cos^2\theta d\theta \;=\; \frac{243}{4}\int_{0}^{2\pi}\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{243}{4}\left[\frac{\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi}$$

$$= \frac{243}{4}\left[\pi+0-(0+0)\right] \;=\; \frac{243\pi}{4} \qquad \blacksquare$$

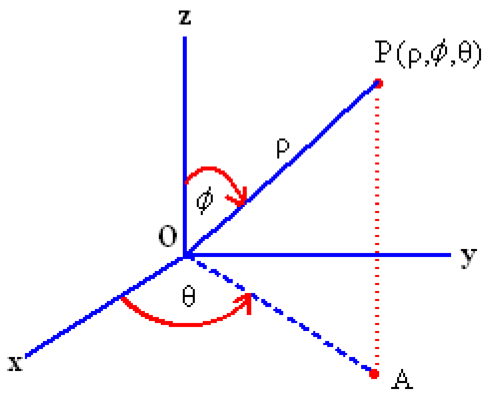
9.2.2.2 ระบบพิกัดทรงกลม (Spherical Coordinates System)

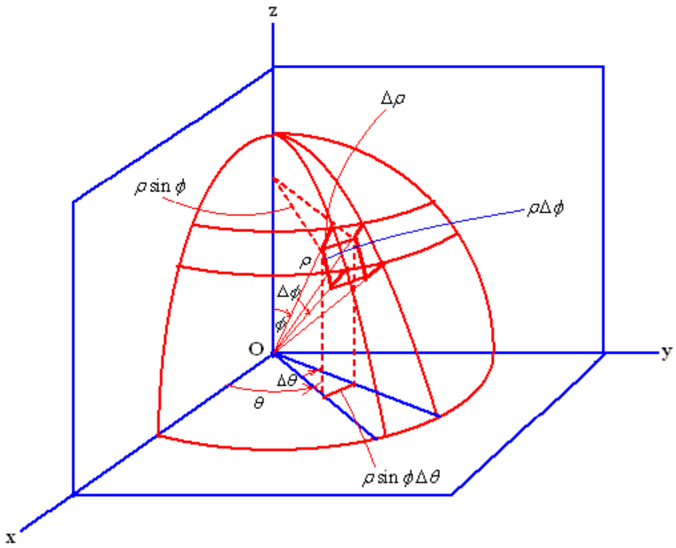
เป็นระบบที่บอกพิกัดของจุด P ในปริภูมิเป็น (ρ,ϕ,θ)

เมื่อ ρ เป็นระยะจากจุด P ไปยังจุดกำเนิด O

ϕ เป็นมุมที่ OP ทำกับแกน z โดยที่ $0 \le \phi \le \pi$

และ θ เป็นมุมที่เส้นตรง OA ทำกับแกน x เมื่อ A เป็นภาพฉายของ P บนระนาบ xy โดยที่ $0 \le \theta < 2\pi$





$$\boxed{dV = \rho^2 \sin\phi \, d\rho d\phi d\theta}$$

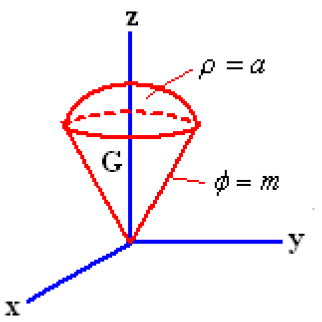
จะได้ความสัมพันธ์ระหว่างระบบพิกัดฉากและระบบพิกัดทรงกลม ดังนี้

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \phi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$x = \rho\sin\phi\cos\theta \qquad y = \rho\sin\phi\sin\theta \qquad z = \rho\cos\phi$$

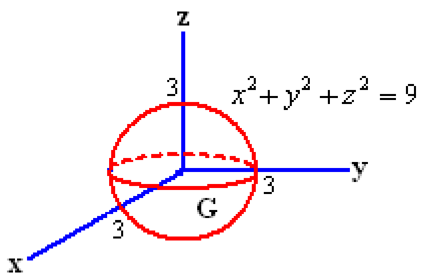
ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของ G เมื่อ G เป็นทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยพื้นผิวบนซึ่งเป็นทรงกลม $\rho = a \quad (a > 0)$ และพื้นผิวล่างเป็นกรวยกลม $\phi = m \quad (0 < m < \pi/2)$

วิธีทำ



ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงกลมที่มีสมการ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ โดยใช้ระบบพิกัดทรงกลม

วิธีทำ



$$V = \iiint_G dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{3} \rho^2 \sin\phi \; d\rho d\phi d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\phi \left[\rho^3\right]_0^3 \; d\phi d\theta$$

$$= \frac{3^3}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin\phi \, d\phi d\theta$$

$$= -\frac{3^3}{3}\int_0^{2\pi} \left[\cos\phi\right]_0^{\pi} d\theta$$

$$= -\frac{3^3}{3}\int_0^{2\pi}(-1-1)\,d\theta$$

$$= \frac{2(3^3)}{3}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{2(3^3)\theta}{3}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$= \frac{2(3^3)}{3}\left[2\pi - 0\right]$$

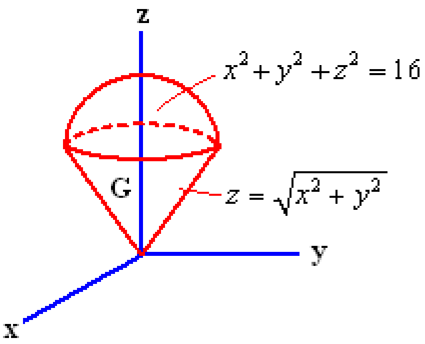
$$= \frac{4}{3}\pi 3^3$$ ลูกบาศก์หน่วย ■

ตัวอย่าง จงหาปริมาตรของทรงสามมิติ G ที่มีพื้นผิวบนซึ่งเป็นทรงกลม $x^2+y^2+z^2=16$ และพื้นผิวล่างเป็นกรวยกลม $z=\sqrt{x^2+y^2}$ โดยใช้ระบบพิกัดทรงกลม

(นักศึกษาสามารถกดที่ลิงก์ด้านล่างนี้หรือสแกนQR Code เพื่อดูภาพเคลื่อนไหวที่แสดงการตัดกันของพื้นผิวที่โจทย์กำหนด)

https://www.youtube.com/watch?v=WZPebN2D6sQ&list=PLaeVrh4dXQEeazHEEIqum_JIPyPS8ueeS&index=6

วิธีทำ



$$V = \iiint_G dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{4} \rho^2 \sin\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \sin\phi \left[\rho^3\right]_0^4 d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \sin\phi \, d\phi\, d\theta$$

$$= -\frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\left[\cos\phi\right]_0^{\pi/4} d\theta$$

$$= -\frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right) d\theta$$

$$= \frac{64}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\theta\Bigg|_0^{2\pi}$$

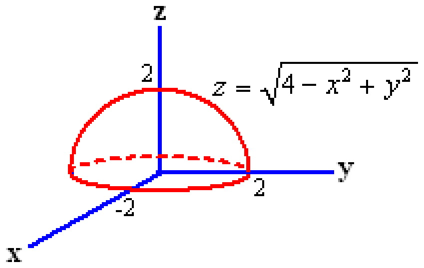
$$= \frac{64}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(2\pi - 0)$$

$$= \frac{128\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$ ลูกบาศก์หน่วย ■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dzdydx$ โดยใช้ระบบพิกัดทรงกลม

วิธีทำ

$$\int\limits_{-2}^{2}\int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int\limits_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dzdydx = \iiint\limits_{G} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\ dV$$



$$= \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{2} (\rho\cos\phi)^2\,\rho\,\rho^2\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta$$

$$= \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{2} \rho^5\cos^2\phi\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^2\phi\sin\phi\left[\rho^6\right]_0^2\ d\phi d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{\pi/4} \cos^2\phi\sin\phi\, d\phi d\theta$$

$$= \frac{32}{3}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[-\frac{1}{3}\cos^3\phi\right]_0^{\pi/2} d\theta$$

$$= -\frac{32}{9}\int\limits_{0}^{2\pi}(0-1)\, d\theta = \frac{32}{9}\int\limits_{0}^{2\pi} d\theta$$

$$= \frac{32}{9}\theta\Big|_0^{2\pi}$$

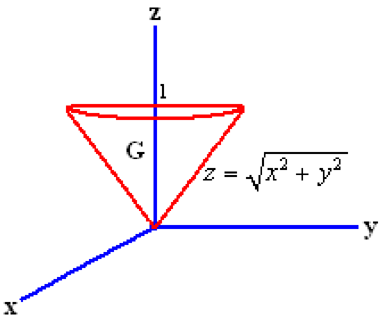
$$= \frac{32}{9}(2\pi - 0) = \frac{64\pi}{9}$$

■

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dzdydx$ ในระบบพิกัดทรงกลม

วิธีทำ

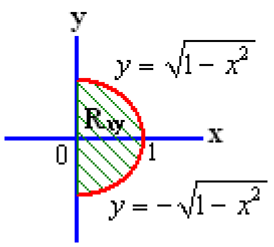
$$\int\limits_{0}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int\limits_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} dzdydx = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{\pi/4}\int\limits_{0}^{\sec\phi} \rho^2\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta$$



$$= \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin\phi\left[\rho^3\right]_0^{\sec\phi}\ d\phi d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\int\limits_{0}^{\pi/4} \sec^3\phi\sin\phi\, d\phi d\theta$$

$$= -\frac{1}{3}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{-1}{2\cos^2\phi}\right]_0^{\pi/4} d\theta$$



$$= \frac{1}{6}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}(2-1)\, d\theta = \frac{1}{6}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta$$

$$= \frac{\theta}{6}\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$$

9.2.3 การเปลี่ยนตัวแปรในอินทิกรัลสามชั้น

ทฤษฎีบท ให้ $x = g_1(u,v,w)$, $y = g_2(u,v,w)$ และ $z = g_3(u,v,w)$ โดยที่ g_1, g_2 และ g_3 สามารถหาอนุพันธ์ย่อยได้ จะได้ว่า

$$\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{G_{uvw}} F(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| dudvdw$$

โดยที่ $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0$

ตัวอย่าง กำหนดให้ $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ และ $z = z$ จงแปลง $\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,y,z)\,dxdydz$ ให้อยู่ในระบบพิกัด (r,θ,z)

วิธีทำ
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_z \\ y_r & y_\theta & y_z \\ z_r & z_\theta & z_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,y,z)\,dxdydz &= \iiint\limits_{G_{r\theta z}} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,z)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| drd\theta dz \\ &= \iiint\limits_{G_{r\theta z}} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,z)\left| r \right| drd\theta dz \\ &= \iiint\limits_{G_{r\theta z}} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta,z)\, rdzdrd\theta \end{aligned}$$

■

ตัวอย่าง กำหนดให้ $x=\rho\sin\phi\cos\theta$, $y=\rho\sin\phi\sin\theta$ และ $z=\rho\cos\phi$

จงแปลง $\iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,y,z)\,dxdydz$ ให้อยู่ในระบบพิกัด (ρ,ϕ,θ)

วิธีทำ $$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)} = \begin{vmatrix} x_\rho & x_\phi & x_\theta \\ y_\rho & y_\phi & y_\theta \\ z_\rho & z_\phi & z_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\phi\cos\theta & \rho\cos\phi\cos\theta & -\rho\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi\sin\theta & \rho\cos\phi\sin\theta & \rho\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2\sin\phi$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{G_{xyz}} f(x,y,z)\,dxdydz &= \iiint\limits_{G_{\rho\phi\theta}} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\cos\phi)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\phi,\theta)}\right| d\rho d\phi d\theta \\ &= \iiint\limits_{G_{r\theta z}} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\cos\phi)\left|\rho^2\sin\phi\right| d\rho d\phi d\theta \\ &= \iiint\limits_{G_{r\theta z}} f(\rho\sin\phi\cos\theta,\ \rho\sin\phi\sin\theta,\ \rho\cos\phi)\,\rho^2\sin\phi\, d\rho d\phi d\theta \end{aligned}$$ ■

แบบฝึกหัดที่ 1

1 จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น

1.1 $\int_0^1\int_0^2 (x+3)\,dydx$

1.2 $\int_2^4\int_0^1 x^2y\,dxdy$

1.3 $\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\,dydx$

1.4 $\int_0^3\int_0^1 x(x^2+y)^{1/2}\,dxdy$

1.5 $\int_{-1}^0\int_2^5 dxdy$

1.6 $\int_0^1\int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2}\,dydx$

1.7 $\int_0^{\ln 2}\int_0^1 xye^{y^2x}\,dydx$

1.8 $\iint_R 4xy^3dA$ เมื่อ $R=\{(x,y)\,|\,-1\le x\le 1$ และ $-2\le y\le 2\}$

1.9 $\iint_R x\sqrt{1-x^2}dA$ เมื่อ $R=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1$ และ $2\le y\le 3\}$

1.10 $\iint_R \cos(x+y)\,dA$ เมื่อ $R=\left\{(x,y)\,\middle|\,\frac{-\pi}{4}\le x\le\frac{\pi}{4}\text{ และ } 0\le y\le\frac{\pi}{4}\right\}$

2 จงหาค่าอินทิกรัล

2.1 $\int_1^2\int_{1-x}^{\sqrt{x}} x^2y\,dydx$

2.2 $\int_0^2\int_{y^2}^{2y} (4x-y)\,dxdy$

2.3 $\int_1^2\int_{x^3}^{x} e^{y/x}\,dydx$

2.4 $\int_1^e\int_0^x \ln x\,dydx$

2.5 $\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_{\tan x}^{\sec x} (y+\sin x)dydx$

2.6 $\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dydx$

2.7 $\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-y^2}} y\,dxdy$

2.8 $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right)dydx$

2.9 $\int_{\pi/2}^{\pi}\int_0^{x^2} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)dydx$

2.10 $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} (x+y)\,dydx$

2.11 $\int_0^1\int_0^x y\sqrt{x^2-y^2}\,dydx$

3 จงวาดรูปบริเวณ R ที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้งของสมการในแต่ละข้อต่อไปนี้ แล้วเขียน $\iint_R f(x,y)\,dA$ ในรูปอินทิกรัลซ้ำ โดยที่ f มีความต่อเนื่องบน R (ไม่ต้องอินทิเกรตออกมา)

3.1 $y=\sqrt{x}$, $x=4$, $y=0$

3.2 $y=x^3$, $x=0$, $y=8$

3.3 $y=\sqrt{x}$, $y=x^3$

3.4 $8y=x^3$, $y-x=4$, $4x+y=9$

3.5 $x=\sqrt{3-y}$, $y=2x$, $x+y+3=0$

3.6 $y=e^x$, $y=\ln x$, $x+y=1$

4 จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้นบนบริเวณ R ที่กำหนดให้

4.1 $\iint_R 6xy\,dA$ เมื่อ R ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y=0,\ x=2$ และเส้นโค้ง $y=x^2$

4.2 $\iint_R x\cos xy\,dA$ เมื่อ R ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $x=1,\ x=2$ และ $y=\pi/2$ และเส้นโค้ง $y=2\pi/x$

4.3 $\iint_R x^2\,dA$ เมื่อ R ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y=x,\ x=8$ และเส้นโค้ง $y=16/x$

4.4 $\iint_R x(1+y^2)^{-1/2}\,dA$ เมื่อ R ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y=4,\ x=0$ และเส้นโค้ง $y=x^2$ ในจตุภาคที่ 1

4.5 $\iint_R (3x-2y)\,dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณภายในวงกลม $x^2+y^2=1$

4.6 $\iint_R \frac{1}{1+x^2}\,dA$ เมื่อ R เป็นบริเวณภายในสามเหลี่ยมซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(0,0),\ (1,1)$ และ $(0,1)$

4.7 $\iint_R xy\,dA$ เมื่อ R ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $y=\sqrt{x}$, $y=6-x$ และ $y=0$

4.8 $\iint_R (x-1)\,dA$ เมื่อ R ล้อมรอบด้วยเส้นตรง $y=x$ และเส้นโค้ง $y=x^3$

5 จงสลับลำดับสำหรับการอินทิเกรตของ f

5.1 $\int_0^2\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dydx$

5.2 $\int_0^2\int_1^{e^y} f(x,y)\,dxdy$

5.3 $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{1-x^2/4}}^{\sqrt{1-x^2/4}} f(x,y)dydx$

5.4 $\int_0^1\int_{\sin^{-1}y}^{\pi/2} f(x,y)\,dxdy$

6 จงหาค่าอินทิกรัลที่กำหนดให้โดยการสลับลำดับสำหรับการอินทิเกรต

6.1 $\int_0^1 \int_{2x}^2 e^{y^2}\, dydx$ 6.2 $\int_0^2 \int_{y^2}^4 y\cos x^2\, dxdy$

6.3 $\int_0^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^2 \frac{y}{\sqrt{16-x^7}}\, dxdy$ 6.4 $\int_1^9 \int_{\sqrt{y}}^3 \sin x^3\, dxdy$

6.5 $\int_1^e \int_0^{\ln x} y\, dydx$ 6.6 $\int_0^1 \int_x^1 \frac{1}{y}\sin y\cos\frac{x}{y}\, dydx$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 1

1

1.1 7 **1.2** 2 **1.3** 2 **1.4** $\frac{2}{15}(31-9\sqrt{3})$ **1.5** 3

1.6 $1-\ln 2$ **1.7** $\frac{1}{2}(1-\ln 2)$ **1.8** 0 **1.9** $1/3$ **1.10** 1

2

2.1 $\frac{163}{120}$ **2.2** $\frac{36}{5}$ **2.3** $\frac{1}{2}(4e-e^4)$ **2.4** $\frac{1}{4}(e^2+1)$ **2.5** 0.2087

2.6 $\frac{1}{40}$ **2.7** 9 **2.8** $\pi/2$ **2.9** 1 **2.10** $\frac{2a^2}{3}$

2.11 $1/12$

3

3.1 $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dydx$ หรือ $\int_0^2 \int_{y^2}^4 f(x,y)\, dxdy$

3.2 $\int_0^2 \int_{x^3}^8 f(x,y)\, dydx$ หรือ $\int_0^8 \int_0^{y^{1/3}} f(x,y)\, dxdy$

3.3 $\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x,y)\, dydx$ หรือ $\int_0^1 \int_{y^2}^{y^{1/3}} f(x,y)\, dxdy$

3.4 $\int_1^2 \int_{9-4x}^{4+x} f(x,y)\, dydx + \int_2^4 \int_{x^3/8}^{4+x} f(x,y)\, dydx$ หรือ $\int_1^5 \int_{\frac{9-y}{4}}^{2y^{1/3}} f(x,y)\, dxdy + \int_5^8 \int_{y-4}^{2y^{1/3}} f(x,y)\, dxdy$

3.5 $\int_{-1}^1 \int_{-x-3}^{2x} f(x,y)\, dydx + \int_1^3 \int_{-x-3}^{3-x^2} f(x,y)\, dydx$ หรือ $\int_{-6}^2 \int_{-y-3}^{\sqrt{3-y}} f(x,y)\, dxdy + \int_{-2}^2 \int_{y/2}^{\sqrt{3-y}} f(x,y)\, dxdy$

3.6 $\int_0^1 \int_{1-x}^{e^x} f(x,y)\,dydx + \int_1^e \int_{\ln x}^{1+e-x} f(x,y)\,dydx$ หรือ $\int_0^1 \int_{1-y}^{e^y} f(x,y)\,dxdy + \int_1^e \int_{\ln y}^{1+e-y} f(x,y)\,dxdy$

4

4.1 32 **4.2** $-2/\pi$ **4.3** 576 **4.4** $\frac{1}{2}(\sqrt{17}-1)$ **4.5** 0

4.6 $\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln 2$ **4.7** $50/3$ **4.8** $-1/2$

5

5.1 $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^{2} f(x,y)\,dxdy$

5.2 $\int_1^{e^2} \int_{\ln x}^{2} f(x,y)\,dydx$

5.3 $\int_{-1}^{1} \int_{-2\sqrt{1-y^2}}^{2\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$

5.4 $\int_0^{\pi/2} \int_0^{\sin x} f(x,y)\,dydx$

6

6.1 $\int_0^2 \int_0^{y/2} e^{y^2}\,dxdy = \frac{e^4-1}{4}$

6.2 $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} y\cos x^2\,dydx = \frac{1}{4}\sin 16$

6.3 $\int_0^2 \int_0^{x^3} \frac{y}{\sqrt{16+x^7}}\,dydx = \frac{8}{7}$

6.4 $\int_0^3 \int_0^{x^2} \sin x^3\,dydx = -\frac{1}{3}\cos 27$

6.5 $\int_0^1 \int_{e^y}^{e} y\,dxdy = \frac{e}{2}-1$

6.6 $\int_0^1 \int_0^{y} \frac{1}{y}\sin y\cos\frac{x}{y}\,dxdy = -(\sin 1)(\cos 1-1)$

แบบฝึกหัดที่ 2

1 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยกราฟที่กำหนดให้ โดยใช้อินทิกรัลสองชั้น

1.1 $y=1/x^2$, $y=-x^2$, $x=1$, $x=2$

1.2 $y=\sqrt{x}$, $y=-x$, $x=1$, $x=4$

1.3 $y^2=-x$, $x-y=4$, $y=-1$, $y=2$

1.4 $x=y^2$, $y-x=2$, $y=-2$, $y=3$

1.5 $y=x$, $y=3x$, $x+y=4$

1.6 $x-y+1=0$, $7x-y-17=0$, $2x+y+2=0$

1.7 $y=e^x$, $y=\sin x$, $x=-\pi$, $x=\pi$

1.8 $y=\ln|x|$, $y=0$, $y=1$

1.9 $y^2=9-x$, $y^2=9-9x$

1.10 $y=\cosh x$, $y=\sinh x$, $x=-1$, $x=1$

1.11 $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x=0$, $x=\pi/4$

1.12 $y=x^2$, $y=\dfrac{1}{1+x^2}$

2 จงหาปริมาตรของทรงสามมิติในแต่ละข้อต่อไปนี้ โดยใช้อินทิกรัลสองชั้น

2.1 ทรงสามมิติที่อยู่ใต้ผิว $z=4x^2+y^2$ และเหนือบริเวณสี่เหลี่ยมผืนผ้า R ในระนาบ xy ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(2,0,0)$ และ $(2,1,0)$

2.2 ทรงสามมิติที่อยู่ใต้ผิว $z=x^2+4y^2$ และเหนือบริเวณสามเหลี่ยม R ในระนาบ xy ที่มีจุดยอดอยู่ที่จุด $(0,0,0)$, $(1,0,0)$ และ $(1,2,0)$

2.3 ทรงสี่หน้าในอัฐภาคที่หนึ่งปิดล้อมรอบด้วยระนาบพิกัด และระนาบ $z=5-2x-y$

2.4 ทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $x^2+y^2=9$ และระนาบ $z=0$, $z=3-x$

2.5 ทรงสามมิติที่มีผิวบนเป็นพาราโบลอยด์ $z=9x^2+y^2$ และด้านล่างอยู่บนระนาบ $z=0$ และด้านข้างล้อมรอบด้วยระนาบ $x=0,\ y=0,\ x=3$ และ $y=2$

2.6 ทรงสามมิติที่มีผิวบนเป็นพาราโบลอยด์ $z=x^2+y^2$ ด้านข้างเป็นทรงกระบอก $x^2+(y-1)^2=1$ และและด้านล่างอยู่บนระนาบ xy

2.7 ทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วยพื้นผิว $x=0,\ y=0,\ z=0,\ z=x^2+y^2$ และ $x+y=2$

2.8 ทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วยพื้นผิว $z=0,\ z=x$ และ $y^2=2-x$

2.9 ทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วยพื้นผิว $z=x^2-y^2$, $z=0,\ x=1$ และ $x=3$

2.10 ทรงสามมิติในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งล้อมรอบด้วยพื้นผิว $z=x^2+y^2$, $x+3y=6$

2.11 ทรงสามมิติที่ล้อมรอบด้วยทรงกระบอก $x^2+y^2=25$ และ $x^2+z^2=25$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 2

1.1 $17/6$ **1.3** $33/2$ **1.5** 2 **1.7** $e^{\pi}-e^{-\pi}$ **1.9** 32

1.11 $\sqrt{2}-1$ **1.12** $2(\tan^{-1}\sqrt{a}-\sqrt{a^3}/3)$ เมื่อ $a=(-1+\sqrt{5})/2$

2.1 $34/3$ **2.3** $125/12$ **2.5** 170 **2.7** $8/3$ **2.8** $32\sqrt{2}/15$

2.9 $80/3$ **2.10** $13/2$ **2.11** $2000/3$

แบบฝึกหัดที่ 3

1 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่กำหนดให้โดยใช้อินทิกรัลเชิงขั้วสองชั้น

1.1 รูปบ่วงหนึ่งบ่วงของ $r^2=9\sin 2\theta$

1.2 ภายใน $r=2-2\cos\theta$ และภายนอก $r=3$

1.3 ภายในเส้นโค้งเลมนิสเคต $r^2=8\cos 2\theta$ และภายนอกวงกลม $r=2$

1.4 ภายในบ่วงใหญ่ แต่อยู่ภายนอกบ่วงเล็กของเส้นโค้งลีมาซอง $r=2-4\cos\theta$

1.5 บริเวณทางซ้ายมือคือเส้นตรง $\theta=3\pi/4$ ทางขวามือคือเส้นโค้งคาร์ดิออยด์ $r=3(1-\cos\theta)$

2 จงแปลงอินทิกรัลต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอินทิกรัลเชิงขั้ว พร้อมทั้งหาค่าด้วย

2.1 $\displaystyle\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\int_{-\sqrt{\pi-y^2}}^{\sqrt{\pi-y^2}}\sin(x^2+y^2)\,dxdy$ **2.2** $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{(1-y^2)^{1/2}}e^{-(x^2+y^2)}\,dxdy$

2.3 $\displaystyle\int_{0}^{2a}\int_{0}^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2+y^2)\,dydx \quad (a>0)$ **2.4** $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x^2}^{x}(x^2+y^2)^{1/2}\,dydx$

3 จงแปลงอินทิกรัลที่กำหนดให้ ให้อยู่ในรูปอินทิกรัลเชิงขั้วสองชั้น

3.1 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}f(x,y)\,dxdy$ **3.2** $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)\,dydx$

3.3 $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}}f(\sqrt{x^2+y^2})\,dxdy$

4 จงหาค่าต่อไปนี้โดยใช้อินทิกรัลเชิงขั้วสองชั้น

4.1 จงหาพื้นที่ที่อยู่นอกวงกลม $x^2+y^2=a^2$ และอยู่ภายในวงกลม $x^2+y^2=2ax$ $(a>0)$

4.2 จงหาปริมาตรของทรงสามมิติในอัฐภาคที่หนึ่ง ซึ่งล้อมรอบด้วยพื้นผิว $z=x^2$ และ $x^2+y^2=4$

5 จงใช้การแปลงเชิงเส้นที่เหมาะสม หาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\iint_R (x-y)^2 \sin(x+y)dxdy$ เมื่อ R คือรูปสี่เหลี่ยมด้านขนานซึ่งมีจุดยอดอยู่ที่ $(\pi,0)$, $(2\pi,\pi)$, $(\pi,2\pi)$ และ $(0,\pi)$

6 จงหาพื้นที่ของบริเวณที่ล้อมรอบด้วยเส้นโค้ง $xy=4,\ xy=8,\ xy^3=5$ และ $xy^3=15$

7 จงใช้การแปลง $x+y=u$ และ $y=uv$ แสดงว่า

$$\int_0^1 \int_0^{1-x} e^{y/x+y}\, dydx = \frac{e-1}{2}$$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 3

1

1.1 $9/4$ **1.2** $\frac{9\sqrt{3}}{2}-\pi$ **1.3** $4\sqrt{3}-\frac{4\pi}{3}$ **1.4** $4\pi+12\sqrt{3}$ **1.5** $\frac{9}{8}\left(\frac{9}{2}\pi-4\sqrt{2}-1\right)$

2

2.6 2π **2.7** $\frac{\pi}{4}\left(1-\frac{1}{e}\right)$ **2.8** $\frac{3}{4}\pi a^4$ **2.9** $\sqrt{2}-1$

3

3.1 $\int_0^{\pi/4}\int_0^{\sec\theta} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)rdrd\theta + \int_{\pi/4}^{\pi/2}\int_{\operatorname{cosec}\theta}^{0} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)rdrd\theta$

3.2 $\int_0^{\pi/2}\int_{1/(\cos\theta+\sin\theta)}^{1} f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)rdrd\theta$

3.3 $\int_0^{\pi}\int_0^{2\sin\theta} f(r)rdrd\theta$

4

4.1 $\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2$ **4.2** π

5 $\frac{\pi^4}{3}$

6 $2\ln 3$

แบบฝึกหัดที่ 4

ข้อ 1-5 จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นต่อไปนี้

1 $\iiint\limits_G (1+x+y+z)^{-3}\,dxdydz$ เมื่อ G คือรูปทรงสามมิติในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ $x+y+z=1$ และระนาบพิกัดทั้งสาม

2 $\iiint\limits_G x\,dxdydz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ $y=0,\ z=0,\ y=x,\ x+y=2$ และ $x+y+z=3$

3 $\iiint\limits_G \left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)dxdydz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบทรงรี $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ โดยที่ $a,\,b$ และ c เป็นค่าคงตัวบวก

4 $\iiint\limits_G \sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วยส่วนบนของกรวยเชิงวงรี $z^2=x^2+y^2$ และระนาบ $z=1$

5 $\iiint\limits_G dV$ เมื่อ G คือรูปทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วย $y=x^2$ และ $z^2=4-y$

ข้อ 6-8 จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นต่อไปนี้ โดยแปลงให้อยู่ในรูปพิกัดทรงกระบอก

6 $\iiint\limits_G (x^2+y^2)\,dxdydz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติที่ล้อมรอบพื้นผิว $x^2+y^2=2z$ และระนาบ $z=2$

7 $\iiint\limits_G dxdydz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติที่ล้อมรอบพื้นผิว $z=x^2+y^2$ และ $z=27-2x^2-2y^2$

8 $\iiint\limits_G z\,dxdydz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติซึ่งล้อมรอบด้วยระนาบ $x=0,\ y=0,\ z=0$ และพื้นผิว $x^2+y^2=1,\ x^2+y^2=4-z$

ข้อ 9-11 จงหาค่าอินทิกรัลสามชั้นต่อไปนี้ โดยแปลงให้อยู่ในรูปพิกัดทรงกลม

9 $\iiint\limits_G k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dxdydz$ เมื่อ G คือทรงสามมิติซึ่งอยู่ระหว่างทรงกลม $x^2+y^2+z^2=a^2$ และ $x^2+y^2+z^2=b^2$ เมื่อ $0<a<b$

10 $\iiint\limits_G xyz\,dxdydz$ เมื่อ $G=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\le 1,\ x\ge 0,\ y\ge 0$ และ $z\ge 0$

11 $\iiint\limits_G \left[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2\right]^{-1/2}dxdydz$ เมื่อ G คือทรงกลมซึ่งมีรัศมี R และจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด และจุด (a,b,c) เป็นจุดคงที่ซึ่งอยู่นอกทรงกลม

12 จงหาปริมาตรซึ่งอยู่ภายในทรงกระบอก $x^2+y^2=2x$ และล้อมรอบด้านบนด้วยกรวยกลม $z=\sqrt{x^2+y^2}$ และด้านล่างด้วยระนาบ $z=0$

13 จงหาปริมาตรซึ่งอยู่ภายในทรงกระบอก $x^2+y^2=4x$ และล้อมรอบด้านบนด้วยทรงกลม $x^2+y^2+z^2=16$ และด้านล่างด้วยระนาบ $z=0$

คำตอบแบบฝึกหัดที่ 4

1	$\log\sqrt{2}-\dfrac{5}{16}$	**2**	$3/2$
3	$\dfrac{4}{5}\pi abc$	**4**	$\pi/6$
5	8π	**6**	$16\pi/3$
7	$243\pi/2$	**8**	$37\pi/24$
9	$\pi k(b^4-a^4)$	**10**	$1/48$
11	$\dfrac{4}{3}\pi R^3(a^2+b^2+c^2)^{-1/2}$	**12**	$32/9$
13	$\dfrac{64}{9}(3\pi-4)$		