

CENTRO ESTADUAL DE EDUCAÇÃO TECNOLÓGICA PAULA SOUZA
FACULDADE DE TECNOLOGIA DE CATANDUVA

Thales Antunes de Oliveira Barretto

**APLICAÇÃO DE SENSOR INERCIAL DE BAIXO CUSTO EM
SISTEMAS ROBÓTICOS AUTÔNOMOS: CAPTURA DE ATITUDE
E MOVIMENTO DE UM ROBÔ MÓVEL COM O SENSOR
MPU-6050 EM RASPBERRY PI**

Catanduva, SP
2022

FACULDADE DE TECNOLOGIA DE CATANDUVA

Thales Antunes de Oliveira Barretto

**APLICAÇÃO DE SENSOR INERCIAL DE BAIXO CUSTO EM
SISTEMAS ROBÓTICOS AUTÔNOMOS: CAPTURA DE ATITUDE
E MOVIMENTO DE UM ROBÔ MÓVEL COM O SENSOR
MPU-6050 EM RASPBERRY PI**

Trabalho de Graduação desenvolvido em cumprimento à exigência curricular do FACULDADE DE TECNOLOGIA DE CATANDUVA, sob orientação do(a) Prof. MSc. Tácio Luiz de Souza Barbeiro.

Área de concentração: Automação Industrial

**Catanduva, SP
2022**

B274

BARRETTO, Thales Antunes.

Aplicação de sensor inercial de baixo custo em sistemas robóticos autônomos: captura de atitude e movimento de um robô móvel utilizando o sensor MPU-6050 em uma Raspberry Pi. / Thales Antunes de Oliveira Barretto. – Catanduva: FATEC, 2022.

30f.

Orientador: Prof. Me. Tácio Luiz de Souza Barbeiro.

Trabalho de Graduação (Curso de Tecnologia em Automação Industrial) – Faculdade de Tecnologia de Catanduva, 2022

1. Robótica Industrial. 2. Sensores de Medição Inercial. 3. Sistemas Robóticos Autônomos. I. BARRETTO, Thales Antunes de Oliveira. III. BARBEIRO, Tácio Luiz de Souza. IV. Faculdade de Tecnologia de Catanduva. V. Título.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho aos meus pais e aos meus avós que me proporcionaram a oportunidade de estudar.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao professor MSc. Tácio Luiz de Souza Barbeiro, pela paciência, orientação e empenho dedicado à elaboração deste trabalho, ao Professor Dr. Diego Renan Bruno, pela contribuição na formação acadêmica, aos funcionários desta Instituição que contribuíram direta e indiretamente.

EPÍGRAFE

*"War is Peace.
Freedom is Slavery.
Ignorance is Strength."*

George Orwell, 1984

RESUMO

O objetivo deste trabalho foi desenvolver um sistema, o mais simples possível, para captura de atitude e movimento para sistemas robóticos autônomos empregando um sensor inercial de baixo custo. Empregamos a abordagem matemática mais simples disponível na literatura para desenvolver duas peças de software capazes de implementar as equações. Desenvolvemos um driver e uma aplicação de demonstração que, respectivamente, controlam o sensor MPU6050 e implementam as equações cinemáticas de Euler para capturar atitude e posição. Realizamos testes de bancada para a obtenção de dados que revelem a utilidade e adequação dos métodos e materiais empregados para a finalidade proposta. Ao final, discutimos os resultados obtidos e as limitações do materiais e métodos, indicando abordagens diversas que podem oferecer resultados melhores.

Palavras-chave: Robótica. Sensores de Medição Inercial. Sistemas robóticos autônomos.

ABSTRACT

This work main objectives were to develop the simplest possible attitude and motion capture system for autonomous robot systems using a low-cost inertial measuring unit. The most straightforward mathematical approach available in the literature were employed to develop two pieces of software that implements the equations. We developed one driver and one application that control the MPU6050 sensors and implements Euler's equations of motion, respectively, for attitude and motion capture. Benchmark tests were run to show the usefulness and suitability of the materials and methods for the aforementioned purposes. In the end, results showing the limitations of the means employed were discussed, with mention to alternative approaches which could offer better results.

Keywords:Robotics. Inertial Measurement Units. Autonomous Robotic Systems.

LISTA DE FIGURAS

| | |
|---|----|
| Figura 1 – Rotação de um vetor | 4 |
| Figura 2 – Derivada de um vetor em sistemas móveis. | 7 |
| Figura 3 – Velocidade e aceleração em quadros móveis | 8 |
| Figura 4 – Reconstrução de um sinal usando ZOH | 17 |
| Figura 5 – Sensor MPU-6050 encapsulado | 20 |
| Figura 6 – Sensor MPU-6050 eixos em relação ao encapsulamento | 20 |
| Figura 7 – Sensor MPU-6050 montado em placa módulo | 21 |
| Figura 8 – Sensor MPU-6050 anexado à Raspberry Pi | 21 |

LISTA DE TABELAS

| | |
|---|----|
| Tabela 1 – Resultados do teste estacionário | 25 |
|---|----|

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

| | |
|-----|---------------------------|
| IMU | Inertial Measurement Unit |
|-----|---------------------------|

SUMÁRIO

| | |
|---|-----------|
| INTRODUÇÃO | 1 |
| 1 – REVISÃO DE LITERATURA | 2 |
| 1.1 Notação e convenções | 2 |
| 1.2 Descrevendo a atitude de um corpo | 3 |
| 1.3 Cinemática Rotacional | 4 |
| 1.3.1 Velocidade Angular como Vetor | 4 |
| 1.4 Cinemática e Ângulos de Euler | 5 |
| 1.5 Derivada de um vetor em sistemas móveis | 7 |
| 1.6 Velocidade e Aceleração em quadros móveis | 8 |
| 1.7 Gravitação e acelerômetros | 10 |
| 1.8 Equações de Estado Vetoriais | 12 |
| 1.9 Equações de Estado para o Plano Tangente | 13 |
| 1.10 Modelo cinemático | 14 |
| 1.11 Solução Numérica | 15 |
| 2 – METODOLOGIA | 18 |
| 2.1 Seleção de Literatura | 18 |
| 2.2 Estudo do sensor, prototipagem, testes preliminares | 18 |
| 2.3 Desenvolvimento de Software | 18 |
| 2.4 Testes de bancada para coleta de dados | 18 |
| 2.5 Análise dos dados | 19 |
| 3 – DESENVOLVIMENTO | 20 |
| 3.1 Estudo do sensor, prototipagem, testes preliminares | 20 |
| 3.2 Desenvolvimento de Software | 22 |
| 3.3 Obtendo dados | 23 |
| 3.4 Fusão de sensores | 24 |
| 3.5 Testes de bancada para coleta de dados | 24 |
| 4 – RESULTADOS | 25 |
| 4.1 Resultado do teste estacionário | 25 |
| CONCLUSÃO | 26 |
| Referências | 27 |

INTRODUÇÃO

Sistemas robóticos, em geral, são empregados quando a intervenção humana revela-se muito onerosa, perigosa ou ineficaz. A capacidade de operar de forma autônoma, nestes casos, é uma característica valiosa, viabilizada através de sistemas para monitorar e controlar o movimento nos deslocamentos entre um ponto e outro.

Esses sistemas de controle e monitoramento devem apresentar respostas satisfatórias para questões que abrangem, por exemplo, as coordenadas de posicionamento global, a orientação espacial em relação ao plano tangente à terra, a velocidade e aceleração do robô no espaço, distância de obstáculos próximos, dentre outras. Embora para um ser humano essas respostas possam parecer intuitivas, num primeiro momento, o sistema robótico depende exclusivamente dos seus sensores e algoritmos para respondê-las.

Dentre os sensores mais comuns nesses sistemas, temos os hodômetros implementados através de *encoders*, que medem o deslocamento proporcionado pelas rodas ou esteiras do robô, os sensores de distância ultrassônicos, direcionados ao ambiente externo para obter eco em objetos próximos do robô, sensores de medição de distância a laser, também conhecido por *LIDAR*, que permitem obter ecos de corpos relativamente mais distantes do robô, os sensores de posição baseados em GPS, os magnetômetros que funcionam como um bússola, os sensores de medição inercial como acelerômetros e giroscópios, e hoje até mesmo sensores de imagem como câmeras. E embora sejam objeto de um sofisticado tratamento matemático, nenhum desses sensores, isoladamente, atende a demanda por precisão das respostas que se espera num sistema de controle e monitoramento.

Para elevar o nível de precisão, os sensores de medição inercial oferecem um mecanismo de retroalimentação que, aparentemente, pode ser muito útil na otimização dos sistemas de controle robóticos. O presente trabalho pretende avaliar a utilidade de um particular modelo de sensor inercial de baixo custo em sistemas robóticos dessa natureza mediante a criação de um driver para este sensor ligado a uma *Raspberry Pi*.

O presente trabalho é dividido em cinco partes: nesta *introdução* apresentamos a proposta do nosso trabalho, na *revisão de literatura* trazemos os conceitos teóricos e matemáticos aplicados, na *metodologia* apresentamos os procedimentos adotados para aplicar os conhecimentos teóricos no desempenho da nossa proposta de trabalho, na parte *desenvolvimento* relatamos concretamente a implementação da nossa proposta de trabalho, na seção *resultados* discutimos os resultados e dados coletados em relação à nossa proposta.

1 REVISÃO DE LITERATURA

Para o presente trabalho, em decorrência dos instrumentos e sensores escolhidos, devemos colher na literatura as equações e formalismos que descrevem o movimento e a orientação dos corpos no espaço, bem como as relações com as forças envolvidas. Além da literatura básica sobre mecânica (GOLDSTEIN, 1980), robótica (CRAIG, 2014) e controle (OGATA, 2010), os temas são mais bem explorados na literatura sobre controle de aeronaves e mísseis (HENDERSON, 1977), (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016), (BLAKELOCK, 1991) ou sobre navegação inercial (STOVALL, 1997), (TITTERTON, 2004), (WANG, 2021) e (WEN, 2019).

No particular, empregaremos em grande parte as convenções e equações utilizadas em (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016), que acreditamos dar um tratamento mais direto e acessível a esses temas.

1.1 Notação e convenções

Neste trabalho utilizamos um modelo de mundo tridimensional e mecânica clássica. Nosso espaço é estruturado por três eixos ortogonais x, y, z (1, 2, 3) onde uma posição é dada por um vetor tridimensional. Descreveremos a atitude e o movimento de um corpo rígido sobre a superfície oblata e girante da Terra. Não obstante, serão empregadas aproximações sobre uma pequena área para um plano tangente à Terra estacionária e constante, que basta¹ para os nossos propósitos. Para simbologia, acompanhamos (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016):

$\mathbf{p}_{A/B} \equiv$ vetor posição do ponto A em relação ao ponto B

$\mathbf{v}_{A/i} \equiv$ vetor velocidade do ponto A tomada no sistema F_i

${}^b\dot{\mathbf{v}}_{A/i} \equiv$ vetor derivada de $\mathbf{v}_{A/i}$ tomada no sistema F_b

$\mathbf{v}_{A/i}^c \equiv (\mathbf{v}_{A/i})^c \equiv$ conjunto dos componentes de $\mathbf{v}_{A/i}$ expressos no sistema c

Componentes de vetores terão índices para indicar o sistema de coordenadas ou serão denotados pelo símbolo de vetor com índices x, y , e z para indicar as coordenadas, exceto quando indicado pelo símbolo transposto, e todos vetores são do tipo vetor coluna. Acompanhando (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016), por exemplo:

$$\mathbf{p}_{A/B}^b = \begin{bmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \mathbf{v}_{A/i}^b = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T$$

1.2 Descrevendo a atitude de um corpo

Descrevemos a atitude de um robô em ângulos de Euler na sequência z, y, x (3, 2, 1) que leva de um sistema de referência fixo na Terra até um sistema fixo no corpo do robô. Escolhemos o sistema (ned) - “North-East-Down” (Norte, Leste, Abaixo) com o eixo x apontando para o Norte, o eixo z Abaixo, o eixo y completando o sistema de coordenadas, e o sistema (frd) - “Front-Right-Down” (Avante, Direita, Abaixo), fixo no robô, com eixos, respectivamente, (x, y, z) , sendo o Avante alinhado à *linha de referência longitudinal* do robô, com “Avante” e “Abaixo” situados no plano de simetria, e o eixo Direito completando o sistema. Adotamos, ainda a convenção de rotações anti-horárias (regra da mão direita).

Desse a modo, a sequência de rotações que leva do sistema de referência ned para o sistema frd no corpo é dada por:

1. Rotação anti-horária sobre eixo z , ou ψ positivo (“*compass heading*”)
2. Rotação anti-horária sobre novo eixo y' , ou θ positivo (*pitch*)
3. Rotação anti-horária sobre novo eixo x'' , ou ϕ positivo (*roll*)

Esta sequência de rotações é normalmente denominada “*yaw, pitch, roll*” (guinada, arfada e rolagem), partindo do sistema de referência.

Podemos escrever as matrizes de rotação abreviando co-seno por c e seno por s . Esta matriz representa uma transformação padrão que será utilizada ao longo do texto, acompanhando (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016):

$$C_{frd/ned} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C_{frd/ned} = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ (-c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi) & (c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi) & s\phi c\theta \\ (s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi) & (-s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi) & c\phi c\theta \end{bmatrix} \quad (1)$$

O intervalo de validade para o qual os ângulos de rotação são bem definidos² é:

$$\begin{aligned} -\pi &< \phi \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -\pi &< \psi \leq \pi \end{aligned}$$

¹A título de advertência, o assunto não é simples, com diversos formalismos possíveis, um campo fértil para confusão. Por exemplo, a atitude de um corpo pode ser descrita em três dimensões com ângulos de Euler ao menos em doze sequências de rotações anti-horárias distintas, não intercambiáveis, ou ainda pode ser descrita em quatro dimensões com o uso do quaternion, conforme observamos em (HENDERSON, 1977). Além disso, é importante separar a orientação relativa do nosso espaço tridimensional em abstrato, do eixo de referência em relação ao nosso espaço abstrato, e do sistema móvel que pretendemos descrever em relação ao sistema de referência. No presente trabalho adotaremos um único formalismo que atende aos nossos propósitos limitados, e remetemos o leitor às fontes para aprofundamento do assunto.

1.3 Cinemática Rotacional

Aqui definiremos a derivada de um vetor, mostraremos como ela depende do sistema de referência do observador, e relacionamos as derivadas de um vetor, tomadas em dois sistemas de referência distintos, através do vetor velocidade angular relativa entre esses dois sistemas.

Genericamente a derivada de um vetor é similar à de um escalar (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{p}_{A/B} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{p}_{A/B}(t + \delta t) - \mathbf{p}_{A/B}(t)}{\delta t} \right]$$

Este novo vetor decorre das mudanças de módulo e orientação de $\mathbf{p}_{A/B}$. Sendo \mathbf{p} um vetor livre (por exemplo, a velocidade) sua derivada independe de sua posição, e as mudanças de comprimento e direção decorram do movimento da ponta de \mathbf{p} em relação à própria cauda. Seja \mathbf{p} seja um vetor vinculado a algum sistema (por exemplo, o vetor posição) sua derivada naquele sistema é um vetor livre que corresponde à ponta de \mathbf{p} .

1.3.1 Velocidade Angular como Vetor

Um vetor pode apontar em qualquer direção por meio de uma simples rotação ao longo de um eixo apropriado. A fórmula para essa rotação é descrita em (GOLDSTEIN, 1980):

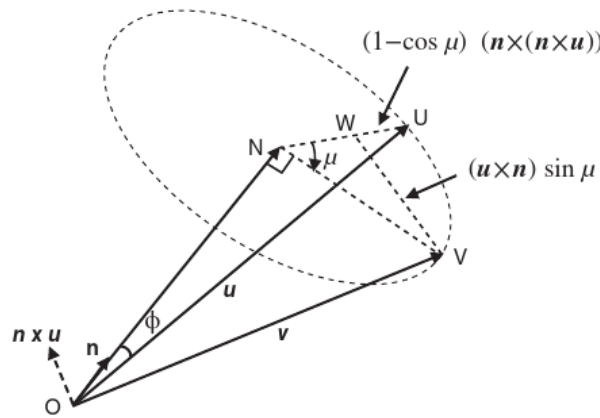


Figura 1 – Rotação de um vetor

Fonte: (GOLDSTEIN, 1980)

Na figura acima, o vetor \mathbf{u} foi rotacionado para formar o vetor \mathbf{v} ao definirmos um eixo de rotação ao longo do vetor \mathbf{n} e realizarmos uma rotação pelo ângulo μ ao redor de \mathbf{n} . Estes dois vetores se somam a \mathbf{u} para obtermos \mathbf{v} , e obtemos:

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + (1 - \cos \mu) (\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{u})) - (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \sin \mu \quad (2)$$

$$\mathbf{v} = (1 - \cos \mu) \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) + \mathbf{u} \cos \mu - (\mathbf{n} \times \mathbf{u}) \sin \mu \quad (3)$$

²A título de exemplo, ponderamos que caso o ângulo θ fosse definido no intervalo de $\pm 180^\circ$ o veículo estaria apontando para o Sul com os ângulos ϕ e ψ em 0° o que é indesejável pois pode confundir a interpretação.

As equações acima (2 e 3), às vezes chamadas de *fórmula de rotação*, nos mostram que definindo \mathbf{n} e μ podemos operar sobre \mathbf{u} com produtos escalares e vetoriais para obter a rotação desejada, independente de sistemas de coordenadas ou magnitude do ângulo.

Partindo da figura acima, fazemos uma rotação muito pequena $\delta\mu \ll 1\text{rad}$, definindo $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \delta\mathbf{u}$, e, aplicando a equação (2) obtemos:

$$\delta\mathbf{u} \approx -\sin(-\delta\mu)\mathbf{n} \times \mathbf{u} \approx (\mathbf{n} \times \mathbf{u})\delta\mu$$

Dividindo por δt , no limite onde $\delta t \rightarrow 0$, definindo $\boldsymbol{\omega} \equiv \dot{\mu}\mathbf{n}$, obtemos:

$$\dot{\mathbf{u}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} \quad (4)$$

Esta equação relaciona a velocidade translacional da ponta do vetor \mathbf{u} ao vetor $\boldsymbol{\omega}$. Este vetor $\boldsymbol{\omega}$, que denominados *vetor velocidade angular*, constitui-se de um vetor unitário que define o eixo de rotação, multiplicado pela taxa de rotação. Este é um vetor livre, pode ser transladado paralelo a si mesmo, e axial, que mudaria de direção caso houvésssemos escolhido uma convenção de sentido horário para a rotação.

Dessa forma podemos associar $\boldsymbol{\omega}$ ao sistema de coordenadas fixado no corpo, atribuindo índices, para representar a velocidade angular do corpo em relação a outro determinado sistema.

Como vimos, a atitude de um corpo rígido pode ser descrita por uma matriz rotacional variante no tempo, e, pelo teorema de Euler³, esse corpo possui um único *eixo instantâneo de rotação* ao qual o vetor velocidade angular é paralelo, também único.

1.4 Cinemática e Ângulos de Euler

Um corpo em movimento pode mudar sua atitude, descrita em ângulos de Euler, ao longo do tempo, e, neste sentido, podemos falar de uma taxa de mudança de cada um desses ângulos de Euler ao longo do tempo. Essas taxas são coisa distintas, é preciso dizer, do vetor velocidade angular do corpo.

Para vincular as taxas de ângulos de Euler, que descrevem a mudança de atitude de um corpo, à sua velocidade angular, procedemos do seguinte modo. Definimos um quadro de referência F_r e um quadro do corpo F_b com vetor velocidade angular relativa $\omega_{b/r}$ e uma sequência de ângulos de Euler que define a atitude do corpo, ou seja, a orientação do sistema de coordenadas preso ao corpo em relação ao sistema de referência. Cada taxa de ângulos de Euler informa a direção e magnitude para um determinado vetor velocidade angular sobre um eixo de coordenadas em particular. Esses três vetores somados formam o vetor velocidade angular resultante do veículo cujas taxas de ângulos de Euler estamos tratando. Desse modo podemos encontrar os componentes do vetor velocidade angular resultante (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016).

³“Euler’s Theorem: The general displacement of a rigid body with one point fixed is a rotation about some axis.” Para uma explicação a respeito, vide (GOLDSTEIN, 1980), Capítulo 4.

Em outras palavras, movemos sobre a Terra um sistema de coordenada *frd* (“front”, “right”, “down” - frente, direita, abaixo) preso no corpo, com o sistema *ned* (“north”, “east”, “down” - norte, leste abaixo) fixo no quadro de referência, usando uma sequência “yaw-pitch-roll” de ângulos de Euler do sistema *ned* para o sistema *frd*. No caso das equações de plano tangente o sistema *ned* é fixado na Terra, e a velocidade angular relativa é aquela do corpo em relação à Terra. Não trataremos aqui do caso mais geral das equações com seis graus de liberdade onde sistema *ned* se move sobre a Terra.

As transformações de coordenadas são (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016):

$$\omega_{b/r}^{frd} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + C_{\phi} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + C_{\theta} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right)$$

...sendo C_{ϕ} e C_{θ} as rotações (anti-horárias) dos planos por cada ângulo de Euler em particular, conforme equação (1). Multiplicando as matrizes, teremos:

$$\omega_{b/r}^{frd} \equiv \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (5)$$

...sendo P , Q , R , os componentes do vetor velocidade angular do corpo expressos no sistema *frd*, respectivamente, rolagem (“roll”), arfada (“pitch”) e guinada (“yaw”). A transformação inversa é dada por:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \sin \phi \tan \theta & \cos \phi \tan \theta \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \frac{\sin \phi}{\cos \theta} & \frac{\cos \phi}{\cos \theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \quad (6)$$

Para simplificar, definimos $\Phi \equiv [\phi \theta \psi]^T$ e reescrevemos (6) assim:

$$\dot{\Phi} = H(\Phi) \omega_{b/r}^{frd} \quad (7)$$

As equações (5) e (6) serão referidas como as equações cinemáticas de Euler, como faz (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016). Note que as matrizes de coeficientes *não* são matrizes ortogonais representando rotações ordinárias de coordenadas. Note ainda que as Equações (6) e (7) possuem uma singularidade quando $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. Ainda, se essas equações forem utilizadas em uma simulação, as taxas de ângulos de Euler podem integrar para ângulos fora do intervalos de ângulos de Euler, e portanto, seria necessário incluir uma lógica para lidar com essa situação no programa simulador. Não obstante, as equações cinemáticas de Euler são bastante empregadas em simulações.

1.5 Derivada de um vetor em sistemas móveis

Nesta seção deveremos obter as equações gerais para o movimento de um corpo no espaço tridimensional. Para generalizar a derivada de um vetor em relação em sistemas móveis obteremos ${}^a\dot{\mathbf{p}}$ a partir da figura abaixo:

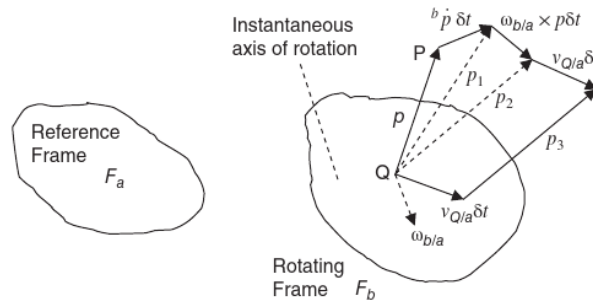


Figura 2 – Derivada de um vetor em sistemas móveis.

Fonte: (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016)

Os sistemas F_b e F_a têm velocidade angular relativa $\omega_{b/a}$. O ponto Q , fixo em F_b , traslada em relação a F_a a uma velocidade $\mathbf{v}_{Q/a}$. Partindo de Q nasce o vetor \mathbf{p} . Observando a partir de F_b estabelecemos \mathbf{p}_1 ao acrescentar o efeito ${}^b\dot{\mathbf{p}}$. Olhando a partir de F_a estabelecemos o vetor \mathbf{p}_2 ao somar, ainda, o efeito de $\omega_{b/a}$. A partir de F_a , estabelecemos \mathbf{p}_3 somando o efeito de $\mathbf{v}_{Q/a}$, que, entretanto, não muda o comprimento ou direção de \mathbf{p}_2 . Portanto, para obtermos ${}^a\dot{\mathbf{p}}$ devemos comparar \mathbf{p}_2 a \mathbf{p} quando $\delta t \rightarrow 0$. Desse modo, no instante δt , $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}$ temos:

$$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p} = {}^b\dot{\mathbf{p}}\delta t + (\omega_{b/a} \times \mathbf{p}) \delta t$$

Dividindo por δt no limite em que $\delta t \rightarrow 0$ resulta na equação⁴:

$${}^a\dot{\mathbf{p}} = {}^b\dot{\mathbf{p}} + \omega_{b/a} \times \mathbf{p} \quad (8)$$

Dentre as propriedades do vetor velocidade angular destacamos⁵:

- É único e relaciona as derivadas de um vetor tomadas em dois sistemas.
- Satisfaz a condição de movimento relativo $\omega_{b/a} = -\omega_{a/b}$.
- É aditivo entre sistemas, ou seja, $\omega_{c/a} = \omega_{c/b} + \omega_{b/a}$ (não vale para aceleração angular).
- A derivada é equivalente em ambos os sistemas: ${}^a\dot{\omega}_{b/a} = {}^b\dot{\omega}_{a/b}$.

Ainda, derivada de um vetor em um quadro pode ser encontrada a partir das derivadas dos seus componentes expressas em um sistema fixo no mesmo quadro, por exemplo:

$$\mathbf{v}^{af} = \begin{bmatrix} v_x & v_y & v_z \end{bmatrix}^T$$

⁴Conhecida por “Equação de Coriolis” (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016), (BLAKELOCK, 1991).

⁵Seguindo (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016)

1.6 Velocidade e Aceleração em quadros móveis

Encontraremos velocidade e aceleração do ponto P , situado em \mathbf{p} , que se move em relação a F_a e F_b , onde fixamos O e Q , respectivamente, os quais também se movem em relação um ao outro. Na figura abaixo, relacionamos os vetores posição, tomamos suas derivadas no quadro de referência⁶ F_a , determinando a velocidade. Usando \mathbf{v} para um vetor velocidade, aplicamos a equação de Coriolis obtendo (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016):

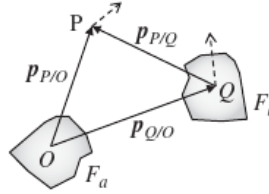


Figura 3 – Velocidade e aceleração em quadros móveis

Fonte: (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016)

$$\mathbf{p}_{P/O} = \mathbf{p}_{Q/O} + \mathbf{p}_{P/Q} \quad (9)$$

$${}^a\dot{\mathbf{p}}_{P/O} = {}^a\dot{\mathbf{p}}_{Q/O} + {}^a\dot{\mathbf{p}}_{P/Q} \quad (10)$$

$$\mathbf{v}_{P/a} = \mathbf{v}_{Q/a} + (\mathbf{v}_{P/b} + \omega_{b/a} \times \mathbf{p}_{P/Q}) \quad (11)$$

Rearranjando para destacar os termos em parênteses⁷:

$$\mathbf{v}_{P/a} = \mathbf{v}_{P/b} + (\mathbf{v}_{Q/a} + \omega_{b/a} \times \mathbf{p}_{P/Q}),$$

Para a aceleração derivamos (11) em F_a . Velocidades em F_a se tornam acelerações em F_a ; A velocidade em F_b é derivada pela Equação de Coriolis; A produto vetorial é derivado pela “regra do produto vetorial”; A derivada da velocidade angular é um vetor aceleração angular designado α . Seja \mathbf{a} a aceleração translacional em (11), obtemos:

$$\mathbf{a}_{P/a} = \mathbf{a}_{Q/a} + (\mathbf{a}_{P/b} + \omega_{b/a} \times \mathbf{v}_{P/b}) + \alpha_{b/a} \times \mathbf{p}_{P/Q} + \omega_{b/a} \times (\mathbf{v}_{P/b} + \omega_{b/a} \times \mathbf{p}_{P/Q})$$

Reorganizando, destacamos aceleração “de transporte”, “centrípetas” e “de Coriolis”:

$$\mathbf{a}_{P/a} = \mathbf{a}_{P/b} + \overbrace{\mathbf{a}_{Q/a} + \alpha_{b/a} \times \mathbf{p}_{P/Q} + \omega_{b/a} \times (\omega_{b/a} \times \mathbf{p}_{P/Q})}^{\text{aceleração de transporte}} + \underbrace{2\omega_{b/a} \times \mathbf{v}_{P/b}}_{\text{aceleração de Coriolis}} \quad (12)$$

⁶A escolha do quadro F_a como referência é arbitrária.

⁷O termo em parênteses corresponde à chamada *velocidade de transporte de P no quadro F_a* (a velocidade em F_a de um ponto fixo em F_b coincidente com P).

Os termos ${}^a\mathbf{a}$ e ${}^b\mathbf{a}$, denominados *aceleração total* e *aceleração relativa*, são expressos nos quadros de referência e secundário, respectivamente. Notamos o surgimento do termo *aceleração de Coriolis*, a ser examinado mais adiante. Se fixamos P no quadro F_b , nos resta apenas *aceleração de transporte*, definida como a aceleração expressa em F_a de um ponto fixo em F_b instantaneamente coincidente com P . A aceleração de transporte expressa os efeitos do movimento de F_b , em termos de aceleração do ponto Q , da velocidade angular e da aceleração angular do quadro (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016).

Por exemplo, um acelerômetro fixo num robô móvel, de corpo rígido, não se move em relação ao quadro do corpo do robô, restando apenas os termos relativos à velocidade e aceleração de transporte nas equações (11) e (12), respectivamente. A aceleração para o sensor no ponto P , de posição $\mathbf{p}_{P/Q}$ em relação ao ponto Q fixo no quadro do robô, denotando a e b os quadros de referência e do robô, respectivamente, é dada por (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016):

$$\mathbf{a}_{P/a} = \mathbf{a}_{Q/a} + \alpha_{b/a} \times \mathbf{p}_{P/Q} + \omega_{b/a} \times (\omega_{b/a} \times \mathbf{p}_{P/Q})$$

Aplicando para um corpo sobre a Terra, sejam F_i e F_e quadros de referência inercial e fixo na Terra, respectivamente, e pontos Q e O coincidentes no centro de massa da Terra (sem aceleração translacional), o $\mathbf{p}_{P/Q}$ é um vetor posição geocêntrico, e $\mathbf{a}_{Q/a} = 0$. Considerando que a Terra gira a uma velocidade angular constante, a derivada de $\omega_{b/a}$ também desaparece. Restam a aceleração relativa, a centrípeta e a de Coriolis na equação que relaciona a aceleração verdadeira (inercial) à aceleração relativa, para aplicar as leis de Newton no movimento de um ponto P sobre a Terra (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016):

$$\mathbf{a}_{P/i} = \mathbf{a}_{P/e} + \omega_{e/i} \times (\omega_{e/i} \times \mathbf{p}_{P/O}) + 2\omega_{e/i} \times \mathbf{v}_{P/e} \quad (13)$$

Neste sentido, para uma partícula de massa m situada em P , a aceleração relativa $\mathbf{a}_{P/e}$ corresponde a uma “força aparente” sobre a partícula que produz a trajetória vista por um observador estacionário na Terra. A aceleração verdadeira $\mathbf{a}_{P/i}$ corresponde às “forças verdadeiras” (como gravitação e arraste). Escrevendo (13) em termos de forças, onde destacamos a *força centrífuga* normal ao vetor velocidade angular, e a *força de Coriolis*⁸ que fará uma trajetória balística sobre a Terra curvar-se à esquerda ou à direita (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016):

$$\text{Força aparente} = \text{força verdadeira} - \underbrace{m [\omega_{e/i} \times (\omega_{e/i} \times \mathbf{p}_{P/O})]}_{\text{força centrífuga}} - \underbrace{m (2\omega_{e/i} \times \mathbf{v}_{P/e})}_{\text{força de Coriolis}}$$

Força verdadeira (F) é a soma das *forças de contato*. A força do *campo gravitacional da Terra* corresponde a $m\mathbf{G}$. O vetor gravidade da Terra (g) é dado por $\mathbf{g} = \mathbf{G}$ – aceleração centrípeta. Desse modo, reescrevendo a equação (13) para um corpo rígido de massa m , obtemos (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016):

$$\mathbf{a}_{P/e} = \frac{F}{m} + \mathbf{g} - 2\omega_{e/i} \times \mathbf{v}_{P/e} \quad (14)$$

1.7 Gravitação e acelerômetros

Um acelerômetro mede, indiretamente⁹, a força \mathbf{F} que equilibra uma *massa de prova* com o encapsulamento. Com o campo gravitacional atuando na massa de prova m , seja \mathbf{F}/m a força por unidade de massa aplicada à massa de prova, chamada de força específica, \mathbf{f} determinamos a aceleração \mathbf{a} da massa de prova (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016):

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{G} \equiv \mathbf{f} + \mathbf{G}.$$

Com a calibração determinamos o *fator de escala*, entre quantidade de saída do sinal e força específica (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016):

$$\text{Sinal de saída do acelerômetro} = s\mathbf{f} = s(\mathbf{a} - \mathbf{G}) \quad (15)$$

Quando um acelerômetro, com vetor de posição geocêntrico¹⁰ \mathbf{p} , está estacionário em relação à Terra, a leitura de aceleração corresponde a (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016):

$$\mathbf{a} = \omega_{e/i} \times (\omega_{e/i} \times \mathbf{p}) \quad (16)$$

$$\mathbf{f} = \mathbf{a} - \mathbf{G} = -\mathbf{g} \quad (17)$$

Para um acelerômetro com três eixos ortogonais x , y e z , situado num ponto P fixado no quadro F_{frd} do corpo de um robô, com vetor de posição geocêntrico \mathbf{p} , designamos \mathbf{G}_p o vetor projeção da força nos elementos sensores, \mathbf{g} o vetor aceleração da gravidade expresso em múltiplos da *gravidade padrão*, \mathbf{a} a aceleração do corpo tomada no quadro de referência da Terra, e $C_{frd/ned}$ a matriz de rotação do quadro frd em relação ao ned , obtendo a equação:

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} G_{px} \\ G_{py} \\ G_{pz} \end{bmatrix} = C_{frd/ned} (\mathbf{g} - \mathbf{a})$$

⁸A aceleração de Coriolis será significativa para deslocamento em altas velocidades. Para ilustrar, para que a aceleração de Coriolis tenha a mesma magnitude da aceleração centrípeta, a 45° de latitude, um veículo deve mover-se a 2365.2 km/h. Nessa velocidade, embora a aceleração de Coriolis ainda seja pequena comparada a \mathbf{g} , causa uma diferença de posição que cresce com o tempo (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016).

$$2|\omega_{e/i}| |\mathbf{v}_{cm/e}| \sin(45^\circ) = |\mathbf{v}_{cm/e}|^2 / r_E$$

$$|\mathbf{v}_{cm/e}| = \sqrt{2} r_E |\omega_{e/i}| \approx 657 \text{ m/s (2365.2 km/h)}$$

⁹Para detalhes sobre acelerômetros, (TITTERTON, 2004), (WANG, 2021) e (WEN, 2019).

¹⁰A navegação inercial exige um modelo para \mathbf{G} em função da posição. Numa posição diferente, o acelerômetro deve ser corrigido para a gravidade local e pela aceleração centrípeta. Para um acelerômetro fixado em um veículo que se move em relação à Terra, devemos ainda calcular a aceleração de transporte para relacionar a leitura do acelerômetro com a aceleração do veículo (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016).

Assumindo que o robô não acelera ($a \cong 0$) e que na orientação inicial os eixos “abaixo” no sistemas *frd* e *ned* estão alinhados, com o vetor g projetando apenas no eixo z do acelerômetro, então a equação acima se transforma em (PEDLEY, 2013):

$$\mathbf{G}_p = \begin{bmatrix} c\theta c\psi & c\theta s\psi & -s\theta \\ (-c\phi s\psi + s\phi s\theta c\psi) & (c\phi c\psi + s\phi s\theta s\psi) & s\phi c\theta \\ (s\phi s\psi + c\phi s\theta c\psi) & (-s\phi c\psi + c\phi s\theta s\psi) & c\phi c\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (18)$$

A equação acima depende apenas de θ e ϕ , pois na primeira rotação por ψ sobre o eixo *abaixo* o vetor g permanece alinhado ao eixo z do sensor. Um acelerômetro, portanto, é insensível a essa rotação por ψ , e não serve para determinar o ângulo de guinada¹¹. Normalizando as leituras, isolamos θ e ϕ por identidades trigonométricas sobre a projeção da gravidade (g) nos eixos do sensor (PEDLEY, 2013):

$$\frac{\mathbf{G}_p}{\|\mathbf{G}_p\|} = \frac{1}{\sqrt{G_{px}^2 + G_{py}^2 + G_{pz}^2}} \begin{bmatrix} G_{px} \\ G_{py} \\ G_{pz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \sin \phi \\ \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$\tan \phi_{xyz} = \frac{G_{py}}{G_{pz}} \quad (20)$$

$$(21)$$

$$\tan \theta_{xyz} = \frac{-G_{px}}{G_{py} \sin \phi + G_{pz} \cos \phi} = \frac{-G_{px}}{\sqrt{G_{py}^2 + G_{pz}^2}} \quad (22)$$

Empregando funções trigonométricas inversas, obtemos θ e ϕ :

$$\phi_{xyz} = \tan^{-1} \left(\frac{G_{py}}{G_{pz}} \right) \quad (23)$$

$$\theta_{xyz} = \tan^{-1} \left(\frac{-G_{px}}{\sqrt{G_{py}^2 + G_{pz}^2}} \right) \quad (24)$$

$$(25)$$

... e definimos o intervalo de validade¹² como fizemos para a matriz rotacional:

$$\begin{aligned} -\pi &< \phi \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

¹¹Para ψ poderíamos empregar um magnetômetro (OZYAGCILAR, 2015).

1.8 Equações de Estado Vetoriais

Considere um corpo rígido (sistema F_b), seu centro de massa como ponto de referência para separar a dinâmica rotacional da translacional, e um sistema de coordenadas, bf , que corresponde ao sistema frd , fixo no corpo e com origem no centro de massa. A aceleração do centro de massa do corpo resulta da soma vetorial das forças, cujas linhas de ação não precisam passar pelo centro de massa (separamos o efeito de qualquer torção para as equações do momento, das quais que não trataremos). As equações são expressas em termos de movimento relativo à Terra (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016).

O vetor posição pode partir de um ponto fixo na Terra, F_e . Se a variação da gravidade for significativa ao longo da trajetória, o vetor posição deve ser tomado a partir do centro de massa da Terra, mas para um curto alcance podemos partir de um ponto na superfície da Terra (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016).

O vetor velocidade será obtido usando a velocidade do centro de massa do veículo em F_e e o vetor posição a partir do centro de massa da Terra. Como o centro de massa da Terra é um ponto fixo comum nos quadros inercial, F_i , e da Terra, F_e , então a derivada de um vetor posição a partir do centro de massa fornece a velocidade inercial ou a velocidade terrestre, conforme o quadro em que derivamos. Derivadas em F_i e F_e são relacionadas ao vetor velocidade angular da Terra, $\omega_{e/i}$, de acordo com a equação de Coriolis. Também precisamos do quadro do corpo rígido, F_b (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016).

Definimos os seguintes escalares e vetores:

- $m \equiv$ massa (constante) do veículo
- $O \equiv$ centro de massa da Terra
- $\mathbf{p}_{cm/O} \equiv$ posição do veículo em relação a O
- $\mathbf{v}_{cm/i} \equiv {}^i\dot{\mathbf{p}}_{cm/O} =$ velocidade do centro de massa no sistema F_i
- $\mathbf{v}_{cm/e} \equiv {}^e\dot{\mathbf{p}}_{cm/O} =$ velocidade do centro de massa no sistema F_e
- $\omega_{x/y} \equiv$ velocidade angular do sistema x em relação ao sistema y
- $\mathbf{F} \equiv$ soma vetorial das forças no centro de massa
- $\mathbf{g} \equiv$ vetor gravitação da Terra
- $\mathbf{g} \equiv$ vetor gravidade da Terra, $\mathbf{g} = \mathbf{G} = \omega_{e/i} \times (\omega_{e/i} \times \mathbf{p}_{cm/O})$

¹²Nas equações há uma região de instabilidade onde \mathbf{G}_{py} e \mathbf{G}_{pz} tendem a zero, quando o eixo x do acelerômetro encontra-se alinhado verticalmente para cima ou para baixo. Nas proximidades dessa região o cálculo da tangente inversa é dominado pelo ruído do sensor, produzindo uma estimativa de ângulo praticamente aleatória. Fisicamente, quando o eixo x do acelerômetro está na vertical, o ângulo de rotação ϕ corresponde a uma rotação sobre o vetor do campo gravitacional, para a qual o acelerômetro é insensível. Alguns artifícios podem minimizar a instabilidade (PEDLEY, 2013).

Então as equações de estado são (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016):

$${}^e\dot{\mathbf{p}}_{cm/O} = \mathbf{v}_{cm/e} \quad (26)$$

$${}^e\dot{\mathbf{v}}_{cm/e} = \mathbf{a}_{cm/e} \quad (27)$$

$$(28)$$

Aplicando a segunda lei de Newton, partimos da Equação (13), substituímos $(\frac{1}{m}\mathbf{F} + \mathbf{G})$ pela aceleração inercial, e isolamos a aceleração relativa (ou seja, a derivada do estado velocidade em F_e) (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016):

$${}^e\dot{\mathbf{v}}_{cm/e} = \frac{1}{m}\mathbf{F} + \mathbf{G} - \omega_{e/i} \times (\omega_{e/i} \times \mathbf{p}_{cm/O}) - 2\omega_{e/i} \times \mathbf{v}_{cm/e} \quad (29)$$

Esta equação de estado da velocidade combinada à equação de estado da posição são adequadas para a Terra oblata e girante. Latitude, longitude e \mathbf{G} podem ser calculadas a partir do vetor de posição geocêntrico. Já a força de Coriolis normalmente é desprezada para velocidades inferiores a 609m/s (2000 pés/s) (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016).

1.9 Equações de Estado para o Plano Tangente

Equações de plano tangente não determinam com precisão a posição sobre a Terra, mas são amplamente utilizadas. Nelas pressupomos que a Terra é um referencial inercial, a posição é obtida no sistema do plano tangente tp , o vetor gravidade, \mathbf{g} , é normal ao plano tangente e constante em magnitude, e a atitude do veículo no plano tangente é uma boa aproximação à verdadeira atitude geográfica na posição do veículo. Simplificando (26) e (29), com o vetor \mathbf{g} constante, e o vetor posição a partir de Q na superfície, na origem de um plano tangente, obtemos (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016):

$${}^e\dot{\mathbf{p}}_{cm/Q} = \mathbf{v}_{cm/e} \quad (30)$$

A velocidade também pode ser obtida de um sistema fixo no corpo. Mudando as derivadas na equação (29), com $\mathbf{G} \equiv \mathbf{g}$, temos (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016):

$${}^b\dot{\mathbf{v}}_{cm/e} + \omega_{b/e} \times \mathbf{v}_{cm/e} = {}^e\dot{\mathbf{v}}_{cm/e} = \frac{1}{m}\mathbf{F} + \mathbf{g} - 2\omega_{e/i} \times \mathbf{v}_{cm/e} \quad (31)$$

$${}^b\dot{\mathbf{v}}_{cm/e} = \frac{1}{m}\mathbf{F} + \mathbf{g} - (\omega_{b/e} + 2\omega_{e/i}) \times \mathbf{v}_{cm/e} \quad (32)$$

que, pela a propriedade aditiva dos vetores velocidade angular, resulta em

$${}^b\dot{\mathbf{v}}_{cm/e} = \frac{1}{m}\mathbf{F} + \mathbf{g} - (\omega_{b/i} + \omega_{e/i}) \times \mathbf{v}_{cm/e} \quad (33)$$

e, tomando a Terra por referencial inercial ($\omega_{e/i} \equiv 0, \omega_{b/i} \equiv \omega_{b/e}$):

$${}^b\dot{\mathbf{v}}_{cm/e} = \frac{1}{m}\mathbf{F} + \mathbf{g} - \omega_{b/e} \times \mathbf{v}_{cm/e} \quad (34)$$

Para completar, o vetor \mathbf{g} em coordenadas do plano tangente será¹³

$$\mathbf{g}^{tp} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & g_D \end{bmatrix}^T \quad (35)$$

Agora devemos escolher sistemas de coordenadas para as variáveis, usando a matriz de rotação para converter de um sistema para outro. O sistema frd , fixo em F_b , convém para o vetor velocidade em F_b e para o vetor velocidade angular do veículo (que utiliza os eixos do componentes em eixos do corpo nas equações de movimento angular), mas o vetor \mathbf{g} deve ser rotacionado para o sistema do corpo, usando uma matriz rotacional que é obtida a partir das equações de estado. Para a mudança de atitude do veículo empregamos as equações cinemáticas de Euler (6), relacionando o sistema frd fixo no corpo ao sistema ned (o qual corresponde ao plano tangente tp). Com os ângulos de Euler obtemos $C_{frd/ned}$, para então calcular as equações de posição e velocidade (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016).

Para os nossos propósitos, o nosso vetor de estado fica assim:

$$\mathbf{X}^T = \left[\left(\mathbf{p}_{cm/o}^{tp} \right)^T \quad \Phi^T \right] \quad (36)$$

Derivando as variáveis de estado¹⁴, temos (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016):

$$C_{frd/tp} = fn(\Phi) \quad (37)$$

$$\dot{\Phi} = H(\Phi) \omega_{b/e}^{frd} \quad (38)$$

$${}^e\dot{\mathbf{p}}_{cm/Q}^{tp} = C_{tp/frd} \mathbf{v}_{cm/e}^{frd} \quad (39)$$

$${}^b\dot{\mathbf{v}}_{cm/e}^{frd} = \frac{1}{m}\mathbf{F}^{frd} + C_{frd/tp}\mathbf{g}^{tp} - \tilde{\omega}_{b/e}^{frd} \mathbf{v}_{cm/e}^{frd} \quad (40)$$

1.10 Modelo cinemático

Para os elementos das equações de estado, estabelecemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{cm/Q}^{tp} &\equiv \begin{bmatrix} p_N & p_E & p_D \end{bmatrix}^T, & \Phi &\equiv \begin{bmatrix} \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T \\ \mathbf{v}_{cm/e}^{frd} &\equiv \begin{bmatrix} U & V & W \end{bmatrix}^T, & \dot{\Phi} &\equiv \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T \\ {}^b\dot{\mathbf{v}}_{cm/e}^{frd} &\equiv \begin{bmatrix} \dot{U} & \dot{V} & \dot{W} \end{bmatrix}^T, & \omega_{b/e}^{frd} &\equiv \begin{bmatrix} P & Q & R \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

... para expressar vetor de estado desse modo:

$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} p_N & p_E & p_D & \phi & \theta & \psi \end{bmatrix}^T$$

¹³O componente g_D corresponde à gravidade padrão (9.80665m/s^2) ou seu valor local.

¹⁴A matriz de rotação é calculada antes da equações de estado da posição e velocidade como referido acima.

Por falta de um nome melhor, definimos o vetor \mathbf{u}

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} {}^b\mathbf{v}_{cm/e}^{frd} & \omega_{b/e}^{frd} \end{bmatrix}^T$$

... com componentes:

$$\mathbf{u}^T = \begin{bmatrix} \dot{U} & \dot{V} & \dot{W} & P & Q & R \end{bmatrix}^T$$

Partindo de (37), obtemos as equações (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016):

$$\dot{\phi} = P + \tan \theta (Q \sin \phi + R \cos \phi) \quad (41)$$

$$\dot{\theta} = Q \cos \phi - R \sin \phi \quad (42)$$

$$\dot{\psi} = (Q \sin \phi + R \cos \phi) / \cos \theta \quad (43)$$

$$\dot{p}_N = U c \theta c \psi + V (-c \phi s \psi + s \phi s \theta c \psi) + W (s \phi s \psi + c \phi s \theta c \psi) \quad (44)$$

$$\dot{p}_E = U c \theta s \psi + V (c \phi s \psi + s \phi s \theta s \psi) + W (-s \phi c \psi + c \phi s \theta c \psi) \quad (45)$$

$$\dot{h} = U s \theta - V s \phi c \theta - W c \phi c \theta \quad (46)$$

No nosso caso, um sensor com acelerômetros e giroscópios de três eixos xyz em frd , fixo no centro de massa do robô, o giroscópio apresenta diretamente uma leitura de P, Q, R , o acelerômetro permite uma leitura indireta de $\dot{U}, \dot{V}, \dot{W}$. Esses valores compõem o vetor \mathbf{u} .

Desse modo chegamos a equações não lineares, dependentes, e com parâmetros que são determinados externamente, pela leitura dos sensores. Uma solução analítica, portanto está fora do alcance. Para obtermos uma solução no domínio do tempo e obter a trajetória do veículo só nos resta a solução numérica dessas equações (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016).

1.11 Solução Numérica

A solução numérica da trajetória do estado exige que, dada uma condição inicial $X(t_0)$ e o termo de entrada $\mathbf{u}(t)$, calculamos o estado em intervalos de tempo constante T pequenos o bastante para considerar o termo \mathbf{u} constante entre kT e $(k+1)T$ sem modificar significativamente os resultados, na forma a seguir (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016):

$$X(t_0 + kT), \quad k = 1, 2, \dots \quad (47)$$

$$\dot{X}(t) = f(X(t), \mathbf{u}(t)) \quad (48)$$

A questão acima, conhecida como *problema do valor inicial*, será enfrentada aqui pelos métodos *Runge-Kutta* (RK). Considere o problema do valor inicial na sua forma mais simples: uma equação diferencial autônoma de primeira ordem com uma condição de limite específica (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016)

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (49)$$

Podemos estabelecer uma relação entre o problema de encontrar valores determinados para (49) e a série de Taylor (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016):

$$x(t_0 + T) = x(t_0) + T\dot{x}(t_0) + \frac{T^2}{2!}\ddot{x}(t_0) + \dots \quad (50)$$

O método mais simples, pouco preciso e que exige um período T muito pequeno, consiste em truncar a série após a primeira derivada, conhecido por método de Euler ou de *primeira ordem*, pode ser expresso na forma (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016):

$$x_E(t_0 + T) \approx x(t_0) + Tf(x(t_0), t_0) \quad (51)$$

O *método trapezoidal*, por exemplo, ou de *segunda ordem*, é um pouco mais preciso, e consiste em primeiro estimar a integral pelo método de Euler, então usar a média das derivadas no início e no fim do período para uma estimativa mais precisa. Pode ser expresso empregando índices E e T para os passos obtidos pelos métodos de *Euler* e *trapezoidal*, respectivamente, com (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016)

$$x_E(t + T) = x(t) + Tf(x(t), t) \quad (52)$$

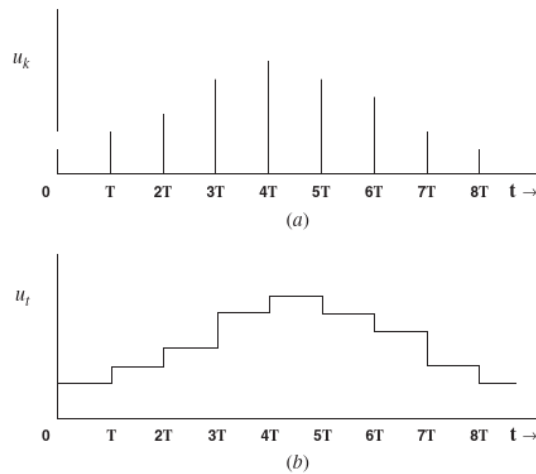
$$\dot{x}_E(t + T) = f(x_E(t + T), t + T) \quad (53)$$

$$x_T(t + T) = x(t) + \frac{T}{2} [\dot{x}(t) + \dot{x}_E(t + T)], \quad (54)$$

Os métodos Runge-Kutta¹⁵ resolvem o problema do valor inicial diretamente, o que atende à formulação em espaço de estados onde um vetor de estado descreve completamente um sistema num determinado instante. Essa característica é ainda mais importante quando passamos de sistemas em tempo contínuo para sistemas em tempo discreto, o que é muito comum na prática (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016).

Geralmente processamos eventos em tempo discreto a partir de sinais definidos a cada amostra, supondo que esses sinais permanecem constantes entre uma amostra e outra. Desse modo as integrações numéricas impõem essa suposição que chamamos de “zero-order-data-hold” (ZOH) em relação aos sinais amostrados (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016), conforme ilustrado na figura:

Figura 4 – Reconstrução de um sinal usando ZOH



Fonte: (STEVENS FRANK L. LEWIS, 2016)

Evidentemente, as técnicas numéricas introduzem problemas de tratamento bastante complexos, como a questão da estabilidade do método numérico empregado, a estimativa dos erros, bem como os erros introduzidos pela amostragem, quantificação dos sinais, imperfeições dos sensores, ruídos, entre outras. Não obstante, para nosso propósito utilizamos o modelo mais simples possível, ignorando esses problemas até a discussão sobre os resultados, ao final.

2 METODOLOGIA

O presente trabalho é de natureza aplicada. Para atingir nossos objetivos precisamos construir um sistema capaz de estimar a atitude e a posição de um corpo a partir de dados obtidos de um modelo específico de sensor inercial. Nesse desiderato planejamos estabelecer o sistema mais simples possível mas que seja flexível o bastante para avaliar os resultados ao final.

Para atender ao tema proposto, dividimos o trabalho em etapas:

- Seleção de literatura com abordagens viáveis.
- Estudo dos manuais do produto, prototipagem e testes preliminares.
- Desenvolvimento de software.
- Testes de bancada para coleta de dados.
- Análise dos dados.

2.1 Seleção de Literatura

Após revisão abrangente, nos deparamos com métodos e abordagens bastante diversos para descrever a orientação de objetos e seus movimentos. Selecionamos as abordagens mais intuitivas e simples, que atendem ao objetivo de testar a viabilidade da aplicação desejada para os sensores.

2.2 Estudo do sensor, prototipagem, testes preliminares

Partimos dos manuais de produto e folhas de dados para compreender o comportamento do sensor. Em seguida montamos um protótipo para estudos e programação de um driver para controle. Para a programação Utilizamos programação linguagem C para sistema Linux, com metodologia ágil e desenvolvimento em código aberto.

2.3 Desenvolvimento de Software

Após revisão da literatura científica e técnica, estabelecemos os requisitos do software para obtenção de dados úteis dos sensores e os cuidados necessários. Com os requisitos, partimos para codificação em ciclos iterativos com testes, até a satisfação dos requisitos. O produto do desenvolvimento ficará disponível para colaboração e análise.

2.4 Testes de bancada para coleta de dados

Após ciclos de desenvolvimento do código, formulamos testes simples sob condições controladas para obter os dados dos sensores. Os testes são estáticos, onde o sensor fica parado

numa pose determinada por um período fixo de tempo, e cinemáticos, onde o corpo dos sensores será movimentado em um percurso muito simples cujos dados esperados podemos calcular. Os testes cinemáticos consistem em provocar o movimento do corpo do sensor mediante um movimento controlado, por uma distância predeterminada.

2.5 Análise dos dados

Para analisar a viabilidade e a resposta do sistemas e métodos, propomos a realização de testes de bancada em condições controladas para comparar os resultados obtidos com resultados esperados. Pretendemos realizar teste estáticos e testes cinemáticos, com os sensores em posição estacionária ou em movimento, respectivamente. Por último, iremos apresentar os resultados e analisaremos os dados obtidos, especialmente na relação entre os resultados esperados e os resultados obtidos. No encerramento ponderamos as causas e eventuais tratamentos posteriores dos resultados.

3 DESENVOLVIMENTO

3.1 Estudo do sensor, prototipagem, testes preliminares

A revisão de literatura nos levou à escolha do modelo matemático mais simples que utiliza ângulos de Euler, embora possuindo diversas restrições no intervalo de validade, que também é o mais intuitivo (STEVENSON FRANK L. LEWIS, 2016). Para integração dos sinais na série temporal escolhemos o método trapezoidal pela relativa simplicidade de implementação.

Em relação ao equipamento, utilizamos, inicialmente, um sensor inercial modelo MPU-6050 (Figura 5) anexado a uma Raspberry Pi 3B (Figuras 7 e 8):

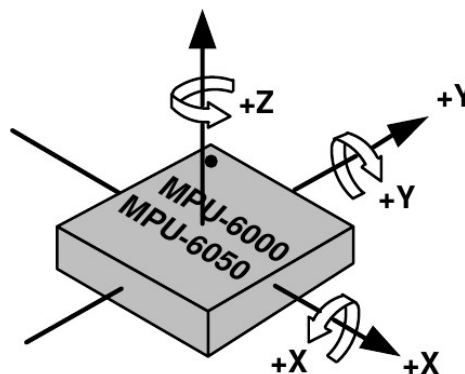
Figura 5 – Sensor MPU-6050 encapsulado



Fonte: autoria própria

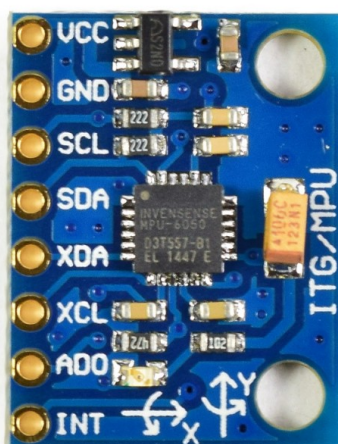
A orientação dos sensores em relação ao encapsulamento obedece a regra da mão direita, conforme descrito na Figura 6:

Figura 6 – Sensor MPU-6050 eixos em relação ao encapsulamento



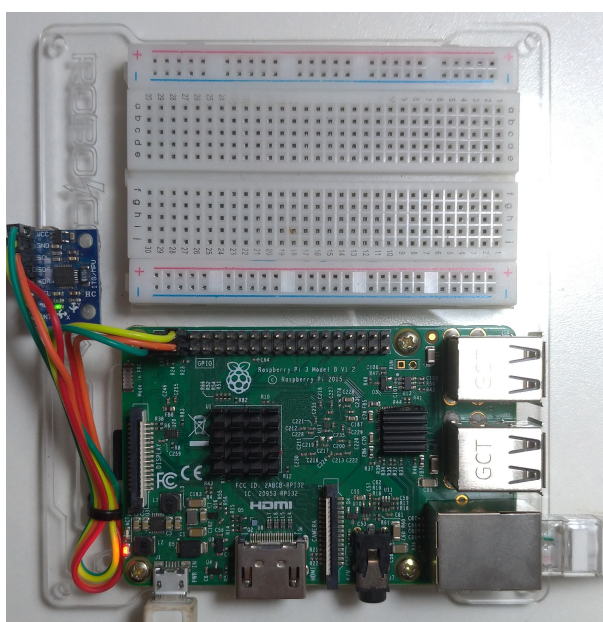
Fonte: (INVENSENSE, 2013a)

Figura 7 – Sensor MPU-6050 montado em placa módulo



Fonte: autoria própria

Figura 8 – Sensor MPU-6050 anexado à Raspberry Pi



Fonte: autoria própria

Para a programação, utilizamos programação linguagem C para sistema Linux, com metodologia ágil e desenvolvimento em código aberto. Nosso código consiste em duas peças distintas, um driver e uma aplicação de console para demonstração.

3.2 Desenvolvimento de Software

Para operar os sensores inerciais, consultamos extensamente a documentação do fabricante: Especificação do Produto ([INVENSENSE, 2013a](#)) e Descrição e Mapa de Registradores ([INVENSENSE, 2013b](#)).

Destacamos que módulo MPU6050 possui três acelerômetros e três giroscópios, além de um sensor de temperatura, permite a coleta de dados de forma individual ou simultânea de todos os sensores, bem como oferece controle sobre a sensibilidade e o alcance das leituras dos acelerômetros e giroscópios, da taxa de amostragem, além de um filtro digital opcional.

A partir deles, estabelecemos como requisitos do sistema:

1. obter dados simultâneos de todos os sensores em cada amostra,
2. obter dados em intervalos regulares de tempo,
3. obter dados em grandezas com significado físico,
4. permitir o controle da sensibilidade dos sensores,
5. permitir o controle da taxa de amostragem,
6. permitir o controle das funções de filtro,
7. seja utilizável com sistemas operacionais livres e amplamente disponíveis,
8. possa ser instalado como um programa sem modificar o sistema operacional,
9. possa ser livremente distribuído com licença de código aberto,
10. possa ser operado pela linha de comando.

Entretanto, não encontramos nenhuma solução pronta capaz de atender aos nossos requisitos. Nos restou, então, a partir dos manuais, desenvolver programas para controlar o sensor e obter os dados.

Os programas de nossa autoria foram escritos em linguagem C para sistemas Linux, rodam em uma *Raspberry Pi 3B*, estão disponíveis¹² sob licença permissiva de código aberto³, e acreditamos atender aos requisitos.

O driver em forma de biblioteca proporciona o controle das funções básicas dos sensores. Apenas as funções principais estão implementadas, como a coleta de dados simultânea em todos os eixos, o controle da taxa de amostragem, controle do filtro digital, inicialização, calibração e parada. O driver não inclui algumas funcionalidades específicas descritas pelo fabricante, como o controle de sensores secundários anexos, captura por disparo de interrupção, detecção de movimento e economia de energia. Entendemos que as funcionalidades ausentes não atendem diretamente aos propósitos do presente trabalho.

Por outro lado, o programa que demonstra a utilização das funções do driver e do controle dos sensores. A aplicação permite obter os dados na tela com escolha da taxa de amostragem e da sensibilidade dos sensores, bem como realizar calibração e inicialização, ou seja, as principais funções do nosso driver. A interface é do tipo linha de comando.

¹O driver em <https://www.github.com/ThalesBarretto/libmpu6050>

²A aplicação em <https://www.github.com/ThalesBarretto/mpu6050>

³Sob a “MIT License” disponível em <https://mit-license.org/> e <https://opensource.org/licenses/MIT>

3.3 Obtendo dados

Na prática, os giroscópios oferecem leituras de $\omega_{b/e}^{xyz}$, e os acelerômetros oferecem \mathbf{f}^{xyz} , com eixos dos sensores, xyz , alinhados aos sistemas frd e $b f$, todos no quadro F^b do robô e situados no centro de massa. Fixamos um plano tangente à Terra no ponto Q de interesse, em que colocamos um sistema ned alinhado com o eixo “abaixo” alinhado ao vetor constante \mathbf{g} , e um sistema tp , e consideramos a Terra um referencial inercial ($F^i \equiv F^e \equiv F^{tp}$). Empregamos $\Phi \equiv [\phi \theta \psi]^T$ para descrever a atitude do corpo do robô utilizados ângulos de Euler na sequência anti-horária “yaw”, “pitch”, “roll” que levam do sistema ned ao sistema frd .

A orientação do eixo dos sensores em relação ao corpo é fixa de tal modo que:

$$C_{frd/xyz} = C_{xyz/frd} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Estabelecemos como condições iniciais, para o instante $t_0 = 0$:

$$\begin{aligned} \Phi[0] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{veículo nivelado}) \\ {}^e \mathbf{p}_{cm/Q}^{tp}[0] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{situado na origem do plano tangente}) \\ {}^e \dot{\mathbf{p}}_{cm/Q}^{tp}[0] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (\text{em repouso}) \end{aligned}$$

Utilizamos os giroscópios para obter:

$$\omega_{b/e}^{frd}[k] = C_{frd/xyz} \omega_{b/e}^{xyz}[k] \equiv \begin{bmatrix} P[k] & Q[k] & R[k] \end{bmatrix}^T$$

Podemos obter a atitude integrando numericamente:

$$\begin{aligned} \Phi[k] &\approx \Phi[k-1] + T \dot{\Phi}[k-1] \\ &\approx \Phi[k-1] + T \left(H(\Phi[k-1]) \omega_{b/e}^{frd}[k-1] \right) \end{aligned}$$

Quando ($\mathbf{a} \approx 0$), ($|\mathbf{f}| \approx |\mathbf{g}|$), podemos obter θ e ϕ dos acelerômetros:

$$\begin{aligned} \phi[k] &= \text{atan2} \left(\frac{-\mathbf{f}_y}{-\mathbf{f}_z} \right), \quad -\pi < \phi \leq \pi \\ \theta[k] &= \text{atan2} \left(\frac{-\mathbf{f}_x[k]}{\sqrt{(-\mathbf{f}_y^2[k]) + (-\mathbf{f}_z^2[k])}} \right), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Os acelerômetros fornecem diretamente \mathbf{f}^{bf} , e, indiretamente, \mathbf{a} :

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} + \mathbf{G} \equiv \mathbf{f} - \mathbf{g}$$

$${}^i \mathbf{a}_{cm/Q}^{tp}[k] = C_{tp/frd}[k] {}^i \mathbf{f}_{cm/Q}^{frd}[k] - \mathbf{g}^{tp}$$

Empregando as transformações de coordenadas, chegamos em:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x c\psi c\theta + \mathbf{f}_y (-s\phi s\theta c\psi + s\psi c\phi) + \mathbf{f}_z (-s\phi s\psi - s\theta c\phi c\psi) \\ \mathbf{f}_x s\psi c\theta + \mathbf{f}_y (-s\phi s\psi s\theta - c\phi c\psi) + \mathbf{f}_z (s\phi c\psi - s\psi s\theta c\phi) \\ -\mathbf{f}_x s\theta - \mathbf{f}_y s\phi c\theta - \mathbf{f}_z c\phi c\theta - \mathbf{g}_d \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{f}^{frd} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x \\ -\mathbf{f}_y \\ -\mathbf{f}_z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}^{frd} = \begin{bmatrix} -\mathbf{g}_d s\theta \\ \mathbf{g}_d s\phi c\theta \\ \mathbf{g}_d c\phi c\theta \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{frd} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x + \mathbf{g}_d s\theta \\ -\mathbf{f}_y - \mathbf{g}_d s\phi c\theta \\ -\mathbf{f}_z - \mathbf{g}_d c\phi c\theta \end{bmatrix}$$

Por último, utilizamos os resultados para integrar a posição:

$${}^e \dot{\mathbf{v}}_{cm/e}^{tp}[k] \approx {}^a \dot{\mathbf{v}}_{cm/e}^{tp}[k-1] + T \left(C_{tp/frd}(\Phi[k-1]) \mathbf{f}^{frd}[k-1] - \mathbf{g}^{tp} \right)$$

$${}^e \mathbf{p}_{cm/Q}^{tp}[k] \approx {}^e \mathbf{p}_{cm/Q}^{tp}[k-1] + T \left({}^e \mathbf{v}_{cm/Q}^{tp}[k-1] \right)$$

3.4 Fusão de sensores

No nosso caso, podemos utilizar um filtro complementar, bastante simples, para calcular a atitude. O filtro consiste em utilizar simultaneamente dois métodos para obter a estimativa de atitude: a integração das taxas angulares e o cálculo da atitude a partir dos acelerômetros. Ao resultado de cada método é atribuído um peso que representa sua confiabilidade naquele instante, ambos são somados e o resultado final é normalizado. Em sendo detectado um movimento de aceleração, utilizamos apenas os giroscópios para determinar a atitude.

Desse modo podemos evitar os resultados divergentes da simples integração de giroscópios e ao mesmo tempo reduzir as oscilações da estimativa pelo ruído dos acelerômetros, o que acaba funcionando como um mecanismo de estabilização das estimativas de atitude.

3.5 Testes de bancada para coleta de dados

Para analisar a viabilidade e a resposta do sistemas e métodos, propomos a realização de testes de bancada em condições controladas para comparar os resultados obtidos com resultados esperados. Pretendemos realizar teste estáticos e testes cinemáticos, com os sensores em posição estacionária ou em movimento, respectivamente.

4 RESULTADOS

A seguir são apresentados os resultados obtidos a partir dos testes de bancada realizados. Os resultados serão apresentados contrapondo os dados obtidos contra os dados esperados.

4.1 Resultado do teste estacionário

Inicialmente realizamos o teste mais simples possível: deixamos o sensor estacionário em uma bancada nivelada e estável, sem vibrações significativas ou perturbações. O teste foi realizado três vezes consecutivas, partindo da inicialização do sensor, calibração, e capturas com duração de cinco minutos cada. O resultado esperado, portanto, é uma indicação de zero para todos os valores de atitude e posição ao final do teste. As condições do teste são ilustradas na Figura 8.

Nestas condições configuramos o sensor para capturar a 250 amostras por segundo, integrando em 200 passos, configurando um fator de escala para a aceleração da gravidade no valor padrão de 9.8m/s^2 , ajustando a sensibilidade dos sensores para $\pm 4\text{m/s}^2$ e $\pm 500\text{dps}$, sem filtro digital.

Ao final obtivemos estimativas de atitude (ϕ, θ, ψ) e posição (p_n, p_e, p_u) a seguir:

Tabela 1 – Resultados do teste estacionário

| teste | $\phi(^{\circ})$ | $\theta(^{\circ})$ | $\psi(^{\circ})$ | $p_n(\text{m})$ | $p_e(\text{m})$ | $p_u(\text{m})$ |
|-------|------------------|--------------------|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| 1 | +0.09 | +0.05 | +135.67 | -0.308 | -1.174 | +127.510 |
| 2 | +0.09 | -0.01 | +156.83 | +0.396 | -1.458 | +100.242 |
| 3 | +0.06 | -0.02 | +170.01 | -0.647 | -0.636 | +105.201 |

Como podemos observar, nos três testes nossa estimativa de posição p_u ficou mais de cem metros distante do ponto inicial, e o ângulo ψ acumulou um erro de orientação quase reverso da inicial, embora as demais estimativas estivessem razoavelmente próximas dos resultados esperados.

Em razão da significativa divergência entre os resultados obtidos e os esperados, decidimos não realizar os testes cinemáticos, por considerá-los dispensáveis neste particular.

CONCLUSÃO

Os resultados obtidos demonstram a insuficiência dos métodos empregados para estimar com precisão a posição a partir dos dados do sensor empregado. Nossa estimativa de posição para a direção acima obteve uma divergência de mais de cem metros em menos de cinco minutos de testes, revelando problemas nos métodos e materiais empregados.

Em parte podemos atribuir as divergências à instabilidade numérica do método de integração utilizado. Nossa análise empregou o método trapezoidal de integração, que nos pareceu mais acessível. Não obstante, esse método não foi suficientemente preciso para garantir a estabilidade numérica da integração.

Neste sentido, a literatura mais especializada ([SAVAGE, 2009a](#)) indica que a nossa frequência de amostragem pode ser muito baixa para o emprego do método trapezoidal de integração na estimativa de posição. Nesse particular é sugerido o emprego de métodos Runge-Kutta de quarta ou quinta ordem, bem como taxas de amostragem superiores a 6 kHz.

Olhando pelo aspecto da instrumentação, dentre os instrumentos do sensor MPU6050, observamos que os giroscópios apresentam um ruído com média que oscila no tempo. Este fenômeno é conhecido na literatura como “*bias instability*” e sua quantificação oferece uma métrica de performance dos giroscópios. A consequência prática é instabilidade numérica da integração dos dados de giroscópio, ainda que o método empregado seja estável.

Os resultados apontam para a exploração de sensores melhores e métodos matemáticos e estatísticos mais sofisticados ([SAVAGE, 2009b](#)), por exemplo, o emprego de física na formulação de Hamilton para superar as limitações de validade quanto aos ângulos, integração por métodos de Runge-Kutta de quarta e quinta ordem para melhor estabilidade e precisão da integração numérica, fusão de dados com sensores magnéticos e de posição absoluta por filtro de Kalman, uso de inteligência artificial e aprendizado de máquina para correção dos dados, entre outros.

Acreditamos que os problemas aqui discutidos seriam melhor explorados em trabalhos mais profundos sobre o tema em razão da complexidade envolvida.

Referências

- BLAKELOCK, J. **Automatic Control of Aircraft and Missiles**. 2. ed. New York: Wiley Interscience, 1991. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 7.
- CRAIG, J. J. **Introduction to Robotics: Mechanics and Control**. 3. ed. Edimburgh Gate, Harlow, Essex: Pearson Education Limited, 2014. Citado na página 2.
- GOLDSTEIN, H. **Classical Mechanics**. 2. ed. Reading, Massachussets: Addison Wesley, 1980. Citado 3 vezes nas páginas 2, 4 e 5.
- HENDERSON, D. M. **Design Note 1.4-8-020 Euler Angles, Quaternions, and Transformation Matrices for Space Shuttle Analysis**. [S.l.]: McDonnell Douglas Techninal Services CO., 1977. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 3.
- INVENSENSE. **MPU-6000 and MPU-6050 Product Specification Revision 3.4**. [S.l.], 2013. 52 p. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 22.
- INVENSENSE. **MPU-6000 and MPU-6050 Register Map and Descriptions Revision 4.2**. [S.l.], 2013. 46 p. Citado na página 22.
- OGATA, K. **Modern Control Engineering**. 5. ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2010. Citado na página 2.
- OZYAGCILAR, T. **Implementing a Tilt-Compensated eCompass using Acelerometer and Magnetometer Sensors, rev. 4.0**. [S.l.], 2015. Citado na página 11.
- PEDLEY, M. **Tilt Sensing Using a Three-Axis Accelerometer, rev. 6**. [S.l.], 2013. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 12.
- SAVAGE, P. G. Computational elements for strapdown systems. NATO Research and Technology Organization, Maple Plain, Minnesota, 2009. Citado na página 26.
- SAVAGE, P. G. Performance analysis of strapdown systems. NATO Research and Technology Organization, Maple Plain, Minnesota, 2009. Citado na página 26.
- STEVENS FRANK L. LEWIS, E. N. J. B. L. **Aircraft Control and Simulation: Dynamics, controls design and autonomous systems**. 3. ed. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc, 2016. Citado 16 vezes nas páginas 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16, 17 e 20.
- STOVALL, S. H. Basic inertial navigation. Naval Air Warfare Center Weapons Division, 1997. Citado na página 2.
- TITTERTON, J. L. W. D. H. **Strapdown Inertial Navigation Technology**. 2. ed. Herts, United Kingdon: IEE, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 10.
- WANG, A. M. S. Y. **Pedestrian Inertial Navigation with Self-Contaning Aiding**. 1. ed. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2021. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 10.
- WEN, H. **Toward Inertial-Navigation-on-Chip: The physics and perforance scaling of multi-degree-of-freedom resonant mems gyroscopes**. 1. ed. Cham, Switzerland: Springer, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 2 e 10.