スペクトル理論講義 *

河東泰之

January 13, 2021

1 共役作用素

以下 H を Hilbert 空間とする．$x, y \in$H の内積は (x, y) と書く．(x について複素線型，y について共役線型である．) A はその線型部分空間 $D(A)$ から H への線型写像とする．このようなものを単に H 上の線型作用素という．$D(A)$ が H で稠密であるとき，A は稠密に定義されている (densely defined) という．このとき新しい線型作用素 A^* を定義したい．$y \in D(A^*)$ とは $x \in D(A) \mapsto (Ax, y) \in \mathbb{C}$ が有界線型汎関数であることと定義する．またこのとき，すべての $x \in D(A)$ に対して $(Ax, y) = (x, A^*y)$ という条件で A^*y を定める．$D(A)$ は稠密なので，Riesz の表現定理により，そのような A^*y は一意的に定まる．この時明らかに，$D(A^*)$ は線型空間であり，A^* は線型写像となる．

定義 1.1 A, B を H 上の線型作用素とし，その定義域をそれぞれ $D(A), D(B)$ とする．$D(A) \subset D(B)$ であって，任意の $x \in D(A)$ に対して $Ax = Bx$ となっているとき，$A \subset B$ と書く．

命題 1.2 A, B が H 上の稠密に定義された線型作用素であって，$A \subset B$ であるとき，$B^* \subset A^*$ である．

証明 $y \in D(B^*)$ とすると，$x \in D(B) \mapsto (Bx, y)$ が有界なので，x の範囲を制限した $x \in D(A) \mapsto (Ax, y)$ も有界である．また，$x \in D(B)$ に対して $(Bx, y) = (x, B^*y)$ なので $x \in D(A)$ についてもこれが成り立ち，$B^*y = A^*y$ である． □

例 1.3 一般に $D(A^*)$ は稠密とは限らない．

$$D(A) = \{x = (x_n) \in \ell^2 \mid \sum_n |x_n| < \infty\}$$

とし，$x \in D(A)$ のとき，$Ax = ((\sum_n x_n), 0, 0, \dots)$ とおく．明らかに $D(A)$ は稠密な部分空間であり，A は線型作用素である．

---

*本講義は大きく，新井朝雄，江沢洋「量子力学の数学的構造 I」(朝倉書店) に依存している．

$y=(y_n)$ を取る．$x \in D(A) \mapsto (Ax, y) = (\sum_n x_n)\bar{y}_1 \in \mathbb{C}$ を見ると，これが有界になる必要十分条件は $y_1 = 0$ である．すなわち

$$D(A^*) = \{y = (y_n) \in \ell^2 \mid y_1 = 0\}$$

である．また $y \in D(A^*)$ のとき，$A^* y = 0$ である．明らかに $D(A^*)$ は稠密ではない．

例 1.4 Lebesgue 測度を用いて，$H = L^2(\mathbb{R})$ とおき，$\mathbb{R}$ 上の複素数値可測関数 $F(x)$ を取る．(複素数値なので常に $|F(x)| < \infty$ である．) H 上の線型作用素 M_F を，

$$D(M_F) = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int_{\mathbb{R}} |F(x)f(x)|^2 \, dx < \infty\},$$

$f \in D(M_F)$ のとき $(M_F f)(x) = F(x)f(x)$ で定める．これは明らかに線型作用素であるが，稠密に定義されていることをまず示す．

$n \in \mathbb{N}$ に対し，

$$A_n = \{x \in \mathbb{R} \mid |F(x)| \leq n\}$$

とおく．$A_n \subset A_{n+1}$ であり，$\bigcup_n A_n = \mathbb{R}$ である．$f \in L^2(\mathbb{R})$ に対し，$\chi_{A_n} f \in D(M_F)$ であり，Lebesgue の収束定理によって $\|f - \chi_{A_n} f\|_2 \to 0$ $(n \to \infty)$ なので，確かに $D(M_F)$ は稠密である．

$g \in D(M_F^*)$ であるとする．このとき $f \in D(M_F) \mapsto (Ff, g) \in \mathbb{C}$ が有界なので，$f \in D(M_F)$ に対して $|(Ff, g)| \leq K\|f\|_2$ となる定数 K がある．この f として，$\bar{F}\chi_{A_n} g$ をとる．$F\bar{F}\chi_{A_n} g \in L^2(\mathbb{R})$ なので，これは $D(M_F)$ の元であり，したがって

$$|(F\bar{F}\chi_{A_n} g, g)| \leq K\|\bar{F}\chi_{A_n} g\|_2$$

が成り立つ．これは

$$\int_{A_n} |\overline{F(x)} g(x)|^2 \, dx \leq K \sqrt{\int_{A_n} |\overline{F(x)} g(x)|^2 \, dx}$$

ということなので，

$$\int_{A_n} |\overline{F(x)} g(x)|^2 \, dx \leq K^2$$

がわかる．$n \to \infty$ とすれば単調収束定理により

$$\int_{\mathbb{R}} |\overline{F(x)} g(x)|^2 \, dx \leq K^2$$

となるので，$\bar{F} g \in L^2(\mathbb{R})$ がわかった．さらにこのとき，一般の $f \in D(M_F)$ に対し，

$$(M_F f, g) = \int_{\mathbb{R}} F(x) f(x) \overline{g(x)} \, dx = (f, \bar{F} g)$$

であるので，$M_F^* g = M_{\bar{F}} g$ がわかった．以上より，$M_F^* \subset M_{\bar{F}}$ である．

逆に $g \in M_{\bar{F}}$ とすると，$f \in D(M_F)$ に対し，

$$(M_F f, g) = \int_{\mathbb{R}} F(x) f(x) \overline{g(x)} \, dx = (f, \bar{F} g)$$

であるので，$f \in D(M_F) \mapsto (M_F f, g)$ は有界となり，$g \in D(M_F^*)$ である．以上合わせて $M_F^* = M_{\bar{F}}$ が分かった．

このことより，$M_F^* = M_{\bar{F}}$ は稠密に定義されていることもわかった．

命題 1.5 (1) A, B を H 上の作用素とし，$D(A+B) = D(A) \cap D(B)$ も稠密とする．このとき $A^* + B^* \subset (A+B)^*$ である．B が有界であれば等号が成り立つ．

(2) A, B を H 上の作用素とし，$D(BA)$ も稠密とする．このとき $A^*B^* \subset (BA)^*$ である．B が有界であれば等号が成り立つ．

証明　(1) $y \in D(A^*) \cap D(B^*)$ とする．任意の $x \in D(A) \cap D(B)$ に対し，$(Ax, y) + (Bx, y) = (x, A^*y) + (x, B^*y)$ なので，$((A+B)x, y) = (x, (A^*+B^*)y)$ となり，$y \in D((A+B)^*)$ と $(A+B)^*y = (A^*+B^*)y$ がわかる．

もし B が有界であれば，$y \in D((A+B)^*)$ のとき，任意の $x \in D(A)$ に対し，$(Ax, y) = (Ax + Bx, y) - (Bx, y) = (x, (A+B)^*y) - (x, B^*y)$ が成り立つことより，$y \in D(A^*) = D(A^* + B^*)$ がわかる．

(2) $y \in D(A^*B^*)$ とする．任意の $x \in D(BA)$ に対し，$(BAx, y) = (Ax, B^*y) = (x, A^*B^*y)$ となるので，$y \in D((BA)^*)$ と，$(BA)^*y = A^*B^*y$ がわかる．

もし B が有界であれば，$y \in D((BA)^*)$ のとき，任意の $x \in D(A) = D(BA)$ に対し，$(Ax, B^*y) = (BAx, y) = (x, (BA)^*y)$ が成り立つことより，$B^*y \in D(A^*)$ がわかる．　$\square$

注意 1.6 上の命題で一般には等号は成立しない．(1) では，$A = A^*$ を非有界，$B = -A$ とすれば，$0 = (A+B)^* \supsetneq A^* + B^*$ が成り立つ．(2) では，$A = 0$, $B = B^*$ は非有界とすれば，$0 = (BA)^* \supsetneq A^*B^*$ である．

2　閉作用素

定義 2.1 A を H 上の作用素とする．$G(A) = \{(x, Ax) \mid x \in D(A)\} \subset H \oplus H$ を A のグラフという．これが閉部分空間であるとき，A を閉作用素という．

ただしここで (x, Ax) は $H \oplus H$ の元であり，x と Ax の内積のことではないことに注意する．明らかに次の命題が成り立つ．

命題 2.2 A が閉作用素であることと，任意の $D(A)$ 内の点列 $\{x_n\}$ が $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ を満たせば $x \in D(A)$ かつ $Ax = y$ となることは同値である．

また次の定理 (閉グラフ定理) は知っているものとする．

定理 2.3 H 上の閉作用素が $D(A) = H$ を満たせば有界である．

命題 2.4 A が H 上稠密に定義された作用素であれば，A^* は閉作用素である．

証明　$D(A^*)$ 内の点列 $\{y_n\}$ が $y_n \to y$, $A^*y_n \to z$ を満たしたとする．$x \in D(A)$ に対し，$(Ax, y_n) = (x, A^*y_n)$ であり，ここで $n \to \infty$ とすれば $(Ax, y) = (x, z)$ であるので，このとき $y \in D(A^*)$, $A^*y = z$ がわかる．　$\square$

命題 2.5 A は H 上の閉作用素，B は H 上の有界作用素とすると，$A+B$ は閉作用素である．

証明 $\{x_n\}$ を $D(A+B)=D(A)$ 内の点列で，$x_n \to x$, $(A+B)x_n \to y$ を満たすものとする．$Bx_n \to Bx$ だから，$Ax_n \to y-Bx$ であり，A が閉作用素であることより，$x \in D(A)$, $Ax = y-Bx$ である．つまり，$x \in D(A+B)$, $(A+B)x = y-Bx+Bx = y$ である． □

定義 2.6 H 上の作用素 A について，$A \subset B$ となる閉作用素 B が存在するとき，A を可閉 (closable) と言い，B を A の閉拡張 (closed extension) と言う．

命題 2.7 H 上の作用素 A について以下の *2* 条件は同値である．

(1) A は可閉である．

(2) $D(A)$ 内の点列 $\{x_n\}$ が $x_n \to 0$, $Ax_n \to y$ を満たせば $y=0$ である．

証明 (1) ならば (2) となることは明らかである．

(2) を仮定して，$\overline{G(A)}$ がある作用素のグラフであることを示す．それには $(x,y),(x,y') \in \overline{G(A)}$ として，$y=y'$ を示せばよい．($\overline{G(A)}$ が定める作用素の線型性は容易にわかる．) $(x,y),(x,y') \in \overline{G(A)}$ とすれば，$D(A)$ 内に点列 $\{x_n\}$, $\{x'_n\}$ が取れて，$x_n \to x$, $Ax_n \to y$, $x'_n \to x$, $Ax'_n \to y'$ となる．このとき，$x_n - x'_n \to 0$, $Ax_n - Ax'_n \to y-y'$ なので (2) より $y=y'$ となる．よって (1) が従う． □

定義 2.8 上の命題の (1), (2) が成り立つとき，$\overline{G(A)}$ をグラフに持つ線型作用素を $\bar{A}$ と書き，A の閉包と呼ぶ．

命題 2.9 (1) H 上の線型作用素 A,B について，$A \subset B$ が成り立つとき，$\bar{A} \subset \bar{B}$ である．

(2) H 上の線型作用素 A について $\overline{\mathrm{Im}(\bar{A})} = \overline{\mathrm{Im}(A)}$ が成り立つ．

証明 (1) 明らかである．

(2) $\overline{\mathrm{Im}(\bar{A})} \supset \overline{\mathrm{Im}(A)}$ は明らかである．$y \in \mathrm{Im}(\bar{A})$ とすると，$D(A)$ 内に点列 $\{x_n\}$ が取れて，$Ax_n \to y$ である．これより $\mathrm{Im}(\bar{A}) \supset \overline{\mathrm{Im}(A)}$ である．両辺の閉包を取って，$\overline{\mathrm{Im}(\bar{A})} \subset \overline{\mathrm{Im}(A)}$ がわかる． □

命題 2.10 H 上の線型作用素 A,B について，A が可閉，B が有界のとき，$A+B$ も可閉であり，$\overline{A+B} = \bar{A}+B$ である．

証明 $D(A+B)=D(A)$ 内の点列 $\{x_n\}$ に対し，$x_n \to 0$, $(A+B)x_n \to y$ とすると，$Bx_n \to 0$ なので，$Ax_n \to y$ となり，A が可閉であることより $y=0$ となる．

$A \subset \bar{A}$ より，$A+B \subset \bar{A}+B$ である．両辺の閉包を取り，$\overline{A+B} \subset \bar{A}+B$ である．$x \in D(\bar{A}+B) = D(\bar{A})$ とすると，$D(A)$ 内の点列 $\{x_n\}$ が取れて，$x_n \to x$, $Ax_n \to \bar{A}x$ であり，このとき $D(A+B)=D(A)$ 内の点列 $\{x_n\}$ に対して $x_n \to x$, $(A+B)x_n \to \bar{A}x+Bx$ となっている．よって $x \in D(\overline{A+B})$ である． □

補題 2.11 H 上稠密に定義された作用素 A について，$G(A)^{\perp} = \{(-A^*y, y) \mid y \in D(A^*)\}$ である．

証明 $x \in D(A), y \in D(A^*)$ に対し，(x, Ax) と $(-A^*y, y)$ の内積は $-(x, A^*y)+(Ax, y) = 0$ なので，$G(A)^{\perp} \supset \{(-A^*y, y) \mid y \in D(A^*)\}$ である．

逆に $(x', y') \perp G(A)$ とすると，$x \in D(A)$ に対して，(x, Ax) と (x', y') が直交するので，$(x, x') = -(Ax, y')$ である．すなわち $y' \in D(A^*)$ であって，$A^*y' = -x'$ となり，$G(A)^{\perp} \subset \{(-A^*y, y) \mid y \in D(A^*)\}$ である． □

定理 2.12 H 上稠密に定義された作用素 A について，A が可閉である必要十分条件は $D(A^*)$ が稠密であることである．

さらにこれらが成り立っているとき，$A^{**} = \bar{A}$，$\bar{A}^* = A^*$ が成り立つ．

証明 まず，A を可閉とする．$z \in D(A^*)^{\perp}$ とすると，$(0, z) \in \{(-A^*y, y) \mid y \in D(A^*)\}^{\perp}$ なので，上の補題より $(0, z) \in G(A)^{\perp\perp} = \overline{G(A)} = G(\bar{A})$ である．これより $z = 0$ がわかるので，$D(A^*)$ は稠密である

逆に $D(A^*)$ が稠密であると仮定する．$(0, z) \in \overline{G(A)}$ とすると，$(0, z) \in \{(-A^*y, y) \mid y \in D(A^*)\}^{\perp}$ なので，$z \in D(A^*)^{\perp} = \{0\}$ となり，A は可閉である．

これらが成り立つとき，$D(A^*)$ が稠密なので A^{**} が考えられる．上の補題を 2 回使って，$G(\bar{A}) = \overline{G(A)} = G(A)^{\perp\perp} = G(A^{**})$ がわかる．

また，$G(A)^{\perp} = G(\bar{A})^{\perp}$ に上の補題を用いると，A^* のグラフと $\bar{A}^*$ のグラフが一致することがわかる．よって，$A^* = \bar{A}^*$ である． □

例 2.13

$$D(A) = \{x = (x_n) \in \ell^2 \mid \sum_n |x_n| < \infty\},$$

$x \in D(A)$ のとき，$Ax = ((\sum_n x_n), 0, 0, \dots)$ という例について，$D(A^*)$ は稠密ではなかった．A が可閉でないことを直接確認する．

$x_n = (1/n, 1/n, \dots, 1/n, 0, 0, \dots)$ とおく．ただし $1/n$ の個数は n 個である．$\|x_n\| = 1/\sqrt{n} \to 0$ であり，$Ax_n = (1, 0, 0, 0, \dots)$ であるので，$Ax_n \to 0$ となっていない．よって，A が可閉でないことが分かった．

例 2.14 作用素 $M_F = (M_{\bar{F}})^*$ なので，M_F は閉作用素である．また確かに $D((M_F)^*) = D(M_{\bar{F}})$ は稠密であるので，上の定理の 2 条件は確かに共に満たされている．

3　レゾルベント・スペクトル

定義 3.1 A を H 上の稠密に定義された線型作用素とする．$\lambda \in \mathbb{C}$ が次の 3 条件を満たすとき，A のレゾルベント集合 (resolvent set) に属すると言う．ただし I は H 上の恒等作用素とする．

(1) $A - \lambda I$ が単射である．

(2) $A - \lambda I$ の像が稠密である．

(3) $A - \lambda I$ の逆写像が有界である．

A のレゾルベント集合を $\rho(A)$ と書く．$A - \lambda I$ の逆写像を $R_\lambda(A)$ と書き，A のレゾルベント (resolvent) と言う．$\rho(A)$ の補集合を $\sigma(A)$ と書き，A のスペクトル (spectrum) と言う．

定義 3.2 A を H 上の稠密に定義された作用素とする．

(1) $A - \lambda I$ が単射でないとき，λ は固有値である．固有値全体の集合を A の点スペクトル (point spectrum) と言う．

(2) $A - \lambda I$ が単射だが像が稠密でないような λ の全体の集合を A の剰余スペクトル (residual spectrum) と言う．

(3) $A - \lambda I$ が単射でその像が稠密だが，$(A - \lambda I)^{-1}$ が有界でないような λ の全体の集合を A の連続スペクトル (continuous spectrum) と言う．

命題 3.3 A を H 上稠密に定義された可閉作用素とする．次が成り立つ．

(1) $\lambda \in \rho(A)$ のとき，$\mathrm{Im}(\bar{A} - \lambda I) = H$ となる．

(2) $\rho(A) = \rho(\bar{A})$.

(3) $\lambda \in \rho(A)$ のとき，$\overline{R_\lambda(A)} = R_\lambda(\bar{A})$ となる．

証明　(1) $\lambda \in \rho(A)$ のとき $y \in H$ を任意にとると，$D(A)$ 内の点列 $\{x_n\}$ が $(A - \lambda I)x_n \to y$ となるように取れる．$\{(A - \lambda I)x_n\}$ は Cauchy 列だから，$(A - \lambda I)^{-1}$ をほどこした $\{x_n\}$ も Cauchy 列であり，ある $x \in H$ に収束する．$A - \lambda I$ は可閉だから，$x \in D(\overline{A - \lambda I}) = D(\bar{A} - \lambda I)$ であり，$(\bar{A} - \lambda I)x = y$ である．よって，$\bar{A} - \lambda I$ は全射である．

(2) まず $\rho(A) \subset \rho(\bar{A})$ を示す．$\lambda \in \rho(A)$ とする．$x \in \mathrm{Ker}(\bar{A} - \lambda I)$ とすると，$D(A)$ 内の点列 $\{x_n\}$ が，$x_n \to x$, $(A - \lambda I)x_n \to 0$ となるように取れる．$(A - \lambda I)^{-1}$ が有界なので，$x_n \to 0 = x$ となり，$\bar{A} - \lambda I$ は単射である．また (1) より，$\bar{A} - \lambda I$ は全射である．$\bar{A} - \lambda I$ のグラフは閉なので，$(\bar{A} - \lambda I)^{-1}$ のグラフも閉である．よって，$(\bar{A} - \lambda I)^{-1}$ は H 全体で定義された閉作用素となるので，有界である．よって $\lambda \in \rho(\bar{A})$ である．

逆に $\lambda \in \rho(\bar{A})$ とする．$A - \lambda I \subset \bar{A} - \lambda I$ なので，$A - \lambda I$ の単射性と $(A - \lambda I)^{-1}$ の有界性は明らかである．また $\overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} = \overline{\mathrm{Im}(\bar{A} - \lambda I)} = H$ であるから，$\lambda \in \rho(A)$ がわかる．

(3) $\lambda \in \rho(A)$ のとき，$\overline{R_\lambda(A)}$ と $R_\lambda(\bar{A})$ のグラフは等しいので，これらの作用素は一致する．　□

命題 3.4 A を H 上の稠密に定義された閉作用素とする．$\lambda \in \rho(A)$ となるための必要十分条件は，$A - \lambda I$ が $D(A)$ から H への全単射となることである．

証明　$\lambda \in \rho(A)$ とすると，上の命題の (1) より，$\mathrm{Im}(A - \lambda I) = H$ となるので全射である．またもちろん単射でもある．

逆に $A - \lambda I$ が $D(A)$ から H への全単射とする．$(A - \lambda I)^{-1}$ は，H から $D(A)$ への線型写像である．これが有界であることを示せばよいが，閉グラフ定理より，これが閉作用素であることを示せばよい．$A - \lambda I$ のグラフの第 1, 2 成分を入れ替えれば $(A - \lambda I)^{-1}$ のグラフになるのでこれは閉集合である．□

命題 3.5 A を H 上の稠密に定義された閉作用素とする．$\lambda, \mu \in \rho(A)$ であれば，

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda - \mu) R_\lambda(A) R_\mu(A)$$

である．特に $R_\lambda(A) R_\mu(A) = R_\mu(A) R_\lambda(A)$ である．

証明

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = R_\lambda(A)((A - \mu I) - (A - \lambda I)) R_\mu(A)$$

であることから結論を得る．□

この等式をレゾルベント方程式と言う．

命題 3.6 A を H 上の稠密に定義された閉作用素とする．$\lambda_0 \in \rho(A)$ であれば，$\varepsilon = \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}$ とおいて，$B(\lambda_0, \varepsilon) \subset \rho(A)$ である．ただしここで，$B(\lambda_0, \varepsilon)$ とは，複素平面内の中心 λ_0, 半径 ε の開円板である．このことより $\rho(A)$ は開集合である．また，$\lambda \in B(\lambda_0, \varepsilon)$ のとき，$R_\lambda(A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(A)^{n+1}$ である．

証明　$\lambda_0 \in \rho(A), \lambda \in B(\lambda_0, \varepsilon)$ として，$K_\lambda = (\lambda - \lambda_0) R_{\lambda_0}(A)$ とおく．$A - \lambda I = (I - K_\lambda)(A - \lambda_0 I)$ である．(両辺の定義域は $D(A)$ であることに注意する．) $\|K_\lambda\| = |\lambda - \lambda_0| \|R_{\lambda_0}(A)\| < 1$ なので，$(I - K_\lambda)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} K_\lambda^n$ がわかる．右辺はノルム収束し，有界線型作用素となるので，$I - K_\lambda$ は H から H への全単射である．よって $A - \lambda I = (I - K_\lambda)(A - \lambda_0 I)$ は $D(A)$ から H への全単射であり，$\lambda \in \rho(A)$ がわかる．このとき，

$$(A - \lambda I)^{-1} = (A - \lambda_0 I)^{-1} (I - K_\lambda)^{-1} = R_{\lambda_0}(A) \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda - \lambda_0)^n R_{\lambda_0}(A)^n$$

より結論を得る．□

命題 3.7 A を H 上の有界線型作用素とすると，

$$\varnothing \neq \sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq \|A\|\}$$

である．

証明 $|\lambda| > \|A\|$ とすると，

$$(A-\lambda I)^{-1} = -\lambda^{-1}(I-\lambda^{-1}A)^{-1} = -\lambda^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^{-n}A^n$$

と書けて，右辺がノルム収束しているのでこの変形は確かに正しく，$\lambda \notin \sigma(A)$ となる．

$\sigma(A) = \varnothing$ であったと仮定しよう．$x, y \in H$ を任意にとる．$\lambda_0 \in \rho(A) = \mathbb{C}$ に対し，λ が λ_0 の近傍にあるとき，

$$(R_\lambda(A)x, y) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n(R_{\lambda_0}(A)^{n+1}x, y)$$

となるので，$(R_\lambda(A)x, y)$ は全平面で正則な関数となる．$|\lambda| > \|A\|$ のとき

$$|(R_\lambda(A)x, y)| \le |\sum_{n=0}^{\infty}|\lambda|^{-n-1}|(A^n x, y)| \le \sum_{n=0}^{\infty}|\lambda|^{-n-1}\|A\|^n\|x\|\|y\| = |\lambda|^{-1}(1-\|A\|/|\lambda|)$$

より，$|\lambda| \to \infty$ のとき，$|(R_\lambda(A)x, y)| \to 0$ である．このことと Liouville の定理と合わせて，$(R_\lambda(A)x, y) = 0$ すなわち $R_\lambda(A) = 0$ を得るが，$R_\lambda(A)$ は逆写像を持つのでこれは成り立たない．よって $\sigma(A) \neq \varnothing$ である． □

例 3.8 (X, μ) を σ 有限な測度空間とする．H を X 上の L^2 関数全体のなす Hilbert 空間とする．$F(x)$ を X 上で複素数値を取る可測関数とし，H 上の線型作用素 M_F を $(M_F f)(x) = F(x)f(x)$ とおく．(X, μ) が $\mathbb{R}$ と Lebesgue 測度であった場合と同じく，これは稠密に定義された閉作用素である．このとき $D_{\varepsilon,\lambda} = \{x \in X \mid |F(x)-\lambda| < \varepsilon\}$ とおいて

$$\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 任意の正の\varepsilonに対し\mu(D_{\varepsilon,\lambda}) > 0\}$$

であることが以下のようにわかる．この右辺を F の本質的値域 (essential range) と言う．

λ が本質的値域に入らないとしよう．ある $\varepsilon > 0$ に対し，$\mu(D_{\varepsilon,\lambda}) = 0$, すなわち $|F(x)-\lambda| \ge \varepsilon$ a.e. である．よって $f \in D(M_F) \mapsto (F-\lambda)f \in L^2(X)$ が全単射である．よって $\lambda \in \rho(A)$ となる．

逆に λ が本質的値域に入るとしよう．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\mu(D_{\varepsilon,\lambda}) > 0$ なので，σ 有限性を用いて $E_{\varepsilon,\lambda} \subset D_{\varepsilon,\lambda}$ となる可測集合で，$0 < \mu(E_{\varepsilon,\lambda}) < \infty$ となるものが取れる．この時 $\chi_{E_{\varepsilon,\lambda}} \in L^2(X)$ であり，$\|(M_F-\lambda I)\chi_{E_{\varepsilon,\lambda}}\|_2 \le \varepsilon\|\chi_{E_{\varepsilon,\lambda}}\|_2$ となる．左辺が 0 になることがあれば $M_F - \lambda I$ は単射ではない．左辺が常に 0 とならなければ，$M_F - \lambda I$ の逆作用素は有界でない．よっていずれにしても $\lambda \in \sigma(M_F)$ である．

4 対称作用素

定義 4.1 H 上の全単射有界線型作用素 U がすべての $x, y \in H$ に対して，$(Ux, Uy) = (x, y)$ を満たすとき，ユニタリ (unitary) 作用素と言う．この条件は $UU^* = U^*U = I$ と同値である．

命題 4.2 U が H 上のユニタリ作用素とすると，$\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| = 1\}$ である．

証明 $\|U\| = 1$ より，$\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leq 1\}$ がわかる．あとは $|\lambda| < 1$ ならば $\lambda \in \rho(A)$ を示せばよい．このとき $\|\lambda U^{-1}\| < 1$ であるので，$I - \lambda U^{-1}$ は有界線型作用素の逆元を持つ．よって $U - \lambda I = U(I - \lambda U^{-1})$ も有界線型作用素の逆元を持つ． □

定義 4.3 A を H 上稠密に定義された作用素とする．$x, y \in D(A)$ のとき $(Ax, y) = (x, Ay)$ であれば A は対称 (symmetric) またはエルミート (Hermitian) であるという．

この条件は $A \subset A^*$ と言っても同じである．エルミートと言う時には $D(A)$ が稠密でなくてもよいと言う流儀もある．

命題 4.4 A を H 上稠密に定義された作用素とする．A が対称であるための必要十分条件は，$x \in D(A)$ のとき (Ax, x) が実数となることである．

証明 A が対称であれば，(Ax, x) は実数である．

逆に，$x \in D(A)$ のとき (Ax, x) が実数であるとしよう．$x, y \in D(A)$ に対し，

$$(Ax, y) = \sum_{k=0}^{3} i^k (A(x + i^k y), x + i^k y)$$

であることから，これは

$$\sum_{k=0}^{3} i^k (x + i^k y, A(x + i^k y)) = (x, Ay)$$

に等しい． □

命題 4.5 A を H 上稠密に定義された作用素とする．A が対称であれば，A は可閉であり，$\bar{A}$ も対称である．

証明 $A \subset A^*$ であり，A^* は閉作用素なので，A は可閉である．

$\bar{A} = A^{**} \subset A^* = \bar{A}^*$ なので，$\bar{A}$ も対称である． □

定義 4.6 A を H 上の対称作用素とする．$\alpha \in \mathbb{R}$ について，すべての $x \in D(A)$ に対して $\alpha\|x\|^2 \leq (Ax, x)$ となるとき，$\alpha \leq A$ と定義する．同様に $\alpha \geq A$ も定義する．

命題 4.7 A を H 上の対称作用素とし，$D(A) = H$ であれば A は有界である．

証明　$A \subset A^*$ で $D(A) = H$ なので $A = A^*$ となり A は閉作用素である．$D(A) = H$ より閉グラフ定理によって，A は有界である． □

命題 4.8 A を H 上の対称作用素とすると，次が成り立つ．
(1) A の点スペクトルは $\mathbb{R}$ に含まれる．
(2) λ, μ が A の固有値であり，$\lambda \neq \mu$ とする．x, y を λ, μ に対応する固有ベクトルとすると，$(x, y) = 0$ である．

証明　(1) λ を A の固有値，x を対応するゼロでない固有ベクトルとすると，

$$\lambda(x, x) = (Ax, x) = (x, Ax) = \bar{\lambda}(x, x)$$

より，$\lambda = \bar{\lambda}$ である．
(2) 同様に

$$\lambda(x, y) = (Ax, y) = (x, Ay) = \mu(x, y)$$

となるので $\lambda \neq \mu$ であれば $(x, y) = 0$ である． □

定義 4.9 H 上の稠密に定義された作用素 A が $A = A^*$ を満たすとき，自己共役作用素であると言う．

対称作用素で自己共役作用素でないことはたくさんある．これについては後で詳しく調べる．

命題 4.10 A を H 上の自己共役作用素，B を H 上の対称作用素として $A \subset B$ であれば $A = B$ である．

証明　$B \subset B^* \subset A^* = A$ よりわかる． □

命題 4.11 A を H 上の閉作用素とすると次が成り立つ．
(1) $\mathrm{Ker}\, A$ は閉部分空間である．
(2) A が稠密に定義されていれば，$H = \mathrm{Ker}\, A \oplus \overline{\mathrm{Im}\, A^*}$ である．

証明　(1) $x_n \in \mathrm{Ker}\, A$, $x_n \to x$ とすると，$Ax_n = 0 \to 0$ なので，$x \in D(A)$, $Ax = 0$ を得る．
(2) $x \in \mathrm{Ker}\, A$, $y \in D(A^*)$ のとき，$0 = (Ax, y) = (x, A^*y)$ であるから，$\mathrm{Ker}\, A \perp \mathrm{Im}\, A^*$ である．$z \perp \mathrm{Im}\, A^*$ とすると，$y \in D(A^*)$ のとき $(z, A^*y) = 0$ だから，$z \in D(A^{**}) = D(A)$ であり，$Az = A^{**}z = 0$ である． □

命題 4.12 A を H 上の閉作用素とすると次の 2 条件は同値である．

(1) $\mathrm{Im}\ A$ は閉である．

(2) 定数 $C > 0$ が存在して，すべての $x \in D(A) \cap (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp}$ に対して $\|Ax\| \geq C\|x\|$ が成り立つ．

証明 (1) を仮定する．A を $D(A) \cap (\mathrm{Ker}\ A)^{\perp}$ に制限したものは，この空間から Hilbert 空間 $\mathrm{Im}\ A$ への全単射閉作用素である．この逆写像は Hilbert 空間 $\mathrm{Im}\ A$ 全体で定義された閉作用素となるため閉グラフ定理より有界である．これを式で書くと (2) となる．

(2) を仮定する．$x_n \in D(A)$, $Ax_n \to y$ とする．$x_n = x'_n + x''_n$, $x'_n \in D(A) \cap (\mathrm{Ker}\ A) \perp$, $x''_n \in \mathrm{Ker}\ A$ とできる．このとき $Ax'_n \to y$ だが，(2) の仮定より $\{x'_n\}$ は Cauchy 列となり，$x \in H$ に収束する．よって $x \in D(A)$, $Ax = y$ となって $y \in \mathrm{Im}\ A$ である． $\square$

命題 4.13 A を H 上の対称作用素とすると次のことが成り立つ．

(1) 実数でない複素数 λ と $x \in D(A)$ に対し，$\|(A - \lambda I)x\| \geq |\mathrm{Im}\ \lambda| \|x\|$ が成り立つ．

(2) $A \geq 0$, $\lambda > 0$ に対し，$\|(A + \lambda I)x\| \geq \lambda\|x\|$ が成り立つ．

(3) A が閉作用素であれば，実数でない複素数 λ に対し，$\mathrm{Im}(A - \lambda I)$ は閉である．

(4) A が閉作用素で $A \geq 0$ であれば，任意の $\lambda > 0$ に対して $\mathrm{Im}(A + \lambda I)$ は閉である．

証明 (1) $\lambda = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ とすると，

$$((A - \lambda I)x, (A - \lambda I)x) = \|(A - \alpha I)x\|^2 + \beta^2\|x\|^2 \geq \beta^2\|x\|^2$$

である．

(2)

$$((A + \lambda I)x, (A + \lambda I)x) = \|Ax\|^2 + 2\lambda(Ax, x) + \lambda^2\|x\|^2 \geq \lambda^2\|x\|^2$$

である．

(3) $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = 0$ なので (1) と上の命題より結論が出る．

(4) $\mathrm{Ker}(A + \lambda I) = 0$ なので (2) と上の命題より結論が出る． $\square$

定理 4.14 A を H 上の自己共役作用素とすると次が成り立つ．

(1) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

(2) $\gamma \in \mathbb{R}$, $A \geq \gamma$ であれば $\sigma(A) \subset [\gamma, \infty)$.

(3) A の剰余スペクトルは空である．

(4) $\lambda \in \sigma(A)$ であるための必要十分条件は，$x_n \in D(A)$, $\|x_n\| = 1$, $(A - \lambda I)x_n \to 0$ となる点列 $\{x_n\}$ が存在することである．

証明 (1) $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ とすると，まず上の命題の (1) より，$A - \lambda I$ は単射であり，逆写像は有界である．また $H = \mathrm{Ker}(A - \bar{\lambda} I) \oplus \overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)}$ を使うと $A - \lambda I$ の像が稠密であることもわかる．

(2) $\lambda < \gamma$ のとき，上の命題の (2) より，$A - \lambda I$ は単射であり，逆写像は有界である．(1) と同様にして，$A - \lambda I$ の像が稠密であることもわかる．

(3) $\lambda \in \mathbb{R}$ のとき，$H = \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \oplus \overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)}$ なので $A - \lambda I$ が単射であれば，その像は稠密である．

(4) まず前者を仮定して後者を否定すれば，$C > 0$ が存在して，$x \in D(A)$ のとき $\|(A - \lambda I)x\| \geq C\|x\|$ となる．これより $A - \lambda I$ は単射であり，逆写像は有界である．λ は実数なので，(3) と同様にして，$A - \lambda I$ の像が稠密であることもわかる．

また，後者を仮定すれば $\lambda \notin \rho(A)$ は容易にわかる． □

定理 4.15 A を H 上の対称作用素とすると次の 3 条件は互いに同値である．

(1) A は自己共役である．

(2) A は閉であり，$\mathrm{Ker}(A^* \pm iI) = 0$ である．

(3) $\mathrm{Im}(A \pm iI) = H$ である．

証明 (1) を仮定すると，もちろん A は閉である．$x \in \mathrm{Ker}(A^* + iI)$ とすると，$Ax = A^*x = -ix$ であるが，A の固有値は実数なので $x = 0$ である．$\mathrm{Ker}(A^* - iI)$ についても同様であり，(2) がわかった．

次に (2) を仮定する．A^* は稠密に定義された閉作用素なので，$H = \mathrm{Ker}(A^* \pm iI) + \overline{\mathrm{Im}(A^{**} \mp iI)}$ より，$A = \bar{A} = A^{**}$ とあわせて $\mathrm{Im}(A \pm iI)$ は稠密である．$\mathrm{Im}(A \pm iI)$ は上の命題の (3) より閉なので (3) がわかる．

次に (3) を仮定する．$D(A^*) \subset D(A)$ を示せばよい．$x \in D(A^*)$ とし，$(A^* - iI)x = (A - iI)y$ となる $y \in D(A)$ を取る．$A \subset A^*$ なので $(A^* - iI)(x - y) = 0$ である．$\mathrm{Im}(A + iI) = H$ より，$\mathrm{Ker}(A^* - iI) \perp \mathrm{Im}(A + iI)$ と合わせて $\mathrm{Ker}(A^* - iI) = 0$ がわかるので，$x = y \in D(A)$ である． □

命題 4.16 A を H 上の閉対称作用素とすると次の *2* 条件は同値である．

(1) A は自己共役である．

(2) $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$.

証明 (1) ならば (2) であることはすでに示したので，(2) を仮定する．$\pm i \in \rho(A)$ なので，$\mathrm{Im}(A \pm iI) = H$ となり，上の命題より A は自己共役である． □

定義 4.17 A を H 上の対称作用素とする．$\bar{A}$ が自己共役であるとき，A は本質的自己共役であると言う．

命題 4.18 A を H 上の本質的自己共役作用素とする．$A \subset B$ かつ B が閉対称作用素であれば，$B = \bar{A}$ である．

証明 $A \subset B$ の閉包を取って，$\bar{A} \subset B$ となる．これは自己共役作用素の対称作用素への拡張なので，$\bar{A} = B$ である． □

命題 4.19 A を H 上の対称作用素とすると次の 3 条件は互いに同値である．

(1) A は本質的自己共役である．

(2) $\mathrm{Ker}(A^* \pm iI) = 0$ である．

(3) $\overline{\mathrm{Im}(A \pm iI)} = H$ である．

証明 $\bar{A}$ について二つ上の命題を適用する．

(1) を仮定する．二つ上の命題より，$\mathrm{Ker}(\bar{A}^* \pm iI) = 0$ なので (2) を得る．

次に (2) を仮定する．二つ上の命題より，$\mathrm{Im}(\bar{A} \pm iI) = H$ なので，$\overline{\mathrm{Im}(\bar{A} \pm iI)} = H$ であり，$\overline{\mathrm{Im}(A \pm iI)} = H$ がわかる．

次に (3) を仮定する．$\bar{A}$ も閉対称作用素なので，$\mathrm{Im}(\bar{A} \pm iI)$ は閉である．よって

$$\mathrm{Im}(\bar{A} \pm iI) = \overline{\mathrm{Im}(\bar{A} \pm iI)} = \overline{\mathrm{Im}(A \pm iI)} = H$$

となり，二つ上の命題が使える． □

例 4.20 $H = L^2([0,1])$, $D(A) = C_0^\infty((0,1))$, $f \in D(A)$ のとき $(Af)(x) = -i\dfrac{df}{dx}(x)$ とおく．A が対称であることは部分積分により容易にわかる．これが本質的自己共役であるかどうかを考える．$f(x) = e^x$ とおくと，これは H の元で，任意の $g \in D(A)$ に対し，$(f, Ag) = (-if, g)$ を満たす．よって $f \in D(A^*)$ かつ $(A^* + iI)f = 0$ である．すなわち $\mathrm{Ker}(A^* + iI) \neq 0$ となり，A は本質的自己共役ではない．

定義 4.21 A を H 上の閉作用素，$D \subset D(A)$ を部分空間とする．$\overline{A\,|_D} = A$ であるとき D は A の芯 (core) であるという．A が H 上の対称作用素，$D \subset D(A)$ が H の稠密な部分空間であるとき，$A \mid D$ も対称作用素であるが，これが本質的自己共役であるとき，A は D 上本質的自己共役であると言う．

5 直交射影

定義 5.1 K を H の閉部分空間とするとき，H から K への射影を直交射影と言う．

命題 5.2 H 上の有界線型作用素 P が直交射影であるための必要十分条件は $P = P^* = P^2$ である．さらにこのとき $0 \leq P \leq 1$ が成り立つ．

証明 直交射影 P に対して $P = P^* = P^2$ が成り立つことは容易にわかる．

逆に $P = P^* = P^2$ であったとしよう．$x_n \in H$, $Px_n \to y$ とすると P をほどこして $Px_n \to Py$ なので $y = Py \in \mathrm{Im}\, P$ となり，$\mathrm{Im}\, P$ は閉である．

任意の $x \in H$ に対し，$x = Px + (I - P)x$, $Px \in \mathrm{Im}\, P$, $(I - P)x \perp \mathrm{Im}\, P$ であるので，P は $\mathrm{Im}\, P$ への直交射影である．

任意の $x \in H$ に対し，$0 \leq (Px, Px) = (Px, x) \leq \|Px\|^2 + \|(I - P)x\|^2 = (x, x)$ であるので，$0 \leq P \leq 1$ である． □

命題 5.3 K_1, K_2 を H の閉部分空間，P_1, P_2 をそれぞれ K_1, K_2 への直交射影とするとき，次が成り立つ．

(1) $K_1 \perp K_2$ となるための必要十分条件は $P_1P_2 = 0$ である．

(2) $K_1 \subset K_2$ となるための必要十分条件は $P_1P_2 = P_1$ であり，また $P_1 \leq P_2$ である．

証明 (1) 明らかである．

(2) $K_1 \subset K_2$ ならば $P_2P_1 = P_1$ となることは明らかである．$P_2P_1 = P_1$ とすれば両辺の $*$ を取って $P_1P_2 = P_1$ でもあるので，$(P_1(P_2x), P_2x) \leq (P_2x, P_2x)$ より，$P_1 \leq P_2$ を得る．$P_1 \leq P_2$ とすると，$x \in K_1$ のとき，$\|x\|^2 = (P_1x, x) \leq (P_2x, x) = \|P^2x\|^2$ より $x = P_2x \in K_2$ を得る． □

定義 5.4 H 上の有界線型作用素の列 $\{A_n\}$ ともう一つの有界線型作用素 A について次のように定める．

(1) A_n が A に作用素の強位相 (strong operator topology) で収束しているとは，任意の $x \in H$ に対し，$\|A_nx - Ax\| \to 0$ となることと定義する．

(2) A_n が A に作用素の弱位相 (weak operator topology) で収束しているとは，任意の $x, y \in H$ に対し，$(A_nx, y) - (Ax, y) \to 0$ となることと定義する．

注意 5.5 H 上の有界線型作用素全体のなす *Banach* 空間上の強位相，弱位相とは違うものである．

命題 5.6 $\{A_n\}, \{B_n\}$ をそれぞれ H 上の有界線型作用素の列とし，A, B を H 上の有界線型作用素とすると，次が成り立つ．

(1) A_n が A に作用素の強位相で収束し，B_n が B に作用素の強位相で収束すれば，A_nB_n が AB に作用素の強位相で収束する．

(2) A_n が A に作用素の弱位相で収束すれば，A_n^* が A^* に作用素の弱位相で収束する．

証明 (1) $x \in H$ を取る．$\{A_nx\}$ は収束しているので有界である．よって一様有界性原理より $\{\|A_n\|\}$ も有界である．また $x \in H$ を取ると，

$$\begin{aligned}\|A_nB_nx - ABx\| &\leq \|A_nB_nx - A_nBx\| + \|A_nBx - ABx\| \\ &\leq (\sup_n \|A_n\|)\|B_nx - Bx\| + \|A_nBx - ABx\| \to 0\end{aligned}$$

である．

(2) $x, y \in H$ を取ると，

$$(A_n^*x, y) = (x, A_ny) = \overline{(A_ny, x)} \to \overline{(Ay, x)} = (x, Ay) = (A^*x, y)$$

となるので結論を得る． □

注意 5.7 上の命題の (1) は，作用素の弱位相では成り立たず，(2) は作用素の強位相では成り立たない．

$$H = \ell^2(\mathbb{Z}) = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid \sum_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|^2 < \infty\}$$

とし，$(A_n x)_k = x_{k-n}$ とおく．$(A_n^* x)_k = x_{k+n}$ であり，$B_n = A_n^*$ とおくと，作用素の弱位相で A_n, B_n は 0 に収束している．しかし $A_n B_n = I$ であり，これは 0 に収束しない．

次に

$$H = \ell^2 = \{x = (x_n)_{n\geq 1} \mid \sum_{n\geq 1} |x_n|^2 < \infty\}$$

とし，$(A_n x)_k = x_{k+n}$ とおく．$x \in \ell^2$ に対し，$\|A_n x\| \to 0$ が容易にわかる．一方

$$(A_n^* x)_k = \begin{cases} x_{k-n}, & k-n \geq 1 \text{ のとき}, \\ 0, & k-n < 1 \text{ のとき}, \end{cases}$$

であるので，$x \neq 0$ であれば $\|A_n x\| = \|x\|$ は 0 に収束しない．

命題 5.8 $\{P_n\}$ を H 上の直交射影の列とし，P を H 上の有界線型作用素とするとき，次が成り立つ．

(1) P_n が P に作用素の強位相で収束していれば P も直交射影である．

(2) P_n が P に作用素の弱位相で収束していて，$P^2 = P$ であれば，P も直交射影であり，P_n は P に作用素の強位相で収束している．

証明 (1) $P_n = P_n^*$ は作用素の弱位相で P^* に収束しているので，$P = P^*$ である．P_n が作用素の強位相で P に収束しているので，P_n^2 が作用素の強位相で P^2 に収束している．すなわち $P^2 = P$ である．

(2) (1) と同様に $P^2 = P$ となるので P は直交射影である．$x \in H$ に対し，

$$\|P_n x - Px\|^2 = (P_n x, x) - 2\mathrm{Re}(P_n x, Px) + (Px, x) \to (Px, x) - 2\mathrm{Re}(Px, Px) + (Px, x) = 0$$

なので結論を得る． □

例 5.9 上の (2) で，P_n が P に作用素の弱位相で収束しているだけでは不十分である．

$H = L^2([0,1])$ とし，$K_n = \bigcup_{j=0}^{2^{n-1}-1} [2j/2^n, (2j+1)/2^n]$, $F_n = \chi_{K_n}$ として $P_n = M_{F_n}$ (掛け算作用素) とおけばこれは直交射影である．P_n は $I/2$ に作用素の弱位相で収束していることを示す．それには $f \in L^1([0,1])$ に対して $\displaystyle\int_0^1 F_n(x) f(x)\,dx \to \int_0^1 \frac{f(x)}{2}\,dx$ を示せばよい．

$$(U_n f)(x) = \begin{cases} f(x - \frac{1}{2^n}), & \frac{1}{2^n} \leq x \leq 1 \text{ のとき}, \\ f(x - \frac{1}{2^n} + 1), & 0 \leq x < \frac{1}{2^n} \text{ のとき}, \end{cases}$$

とおく．

$$\int_0^1 F_n(x) f(x)\,dx + \int_0^1 F_n(x)(U_n f)(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx$$

であって，
$$\left|\int_0^1 F_n(x)(U_nf(x)-f(x))\,dx\right| \le \|U_nf-f\|_1 \to 0$$
なので結論を得る．

命題 5.10 $\{P_n\}$ を H 上の直交射影の列とし，$P_n \le P_{n+1}$ とする．このとき P_n の作用素の強位相での収束先が存在して直交射影となる．$P_n \ge P_{n+1}$ の時も同様である．

証明 $x \in H$ に対し，(P_nx, x) は上に有界な単調増大数列なので極限を持つ．$m > n$ のとき，$\|P_mx - P_nx\|^2 = (P_mx, x) - (P_nx, x) \to 0$ となるので $\lim_n P_nx$ を Px とおけば，P は有界線型作用素となり，さらに直交射影となる．

$P_n \ge P_{n+1}$ の時も同様である． □

6 単位の分解

定義 6.1 $\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ を H 上の直交射影の族とする．次の条件が満たされるとき，これを単位の分解 (resolution of the identity) と言う．

(1) $\lambda \le \mu$ の時 $E(\lambda) \le E(\mu)$ である．

(2) $\lambda \to \infty$ のとき $E(\lambda)$ は作用素の強位相で I に収束し，$\lambda \to -\infty$ のとき $E(\lambda)$ は作用素の強位相で 0 に収束する．

(3) $\varepsilon \to 0+$ のとき，$E(\lambda+\varepsilon)$ は作用素の強位相で $E(\lambda)$ に収束する．(これを $\{E(\lambda)\}$ の右連続性という．)

注意 6.2 $\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ が単位の分解であれば，$\varepsilon \to 0+$ のとき，$E(\lambda-\varepsilon)$ も作用素の強位相である直交射影に収束する．

例 6.3 $H = L^2(\mathbb{R})$ で，$E(\lambda)$ を $L^2((-\infty, \lambda))$ への直交射影とすれば，単位の分解の例である．

単位の分解 $\{E(\lambda)\}$ と $x \in H$ に対し，λ の関数 $(E(\lambda)x, x)$ を考えるとこれは右連続な増加関数なので，これによる Lebesgue-Stieltjes 積分 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \cdot\, d(E(\lambda)x, x)$ を考えることができる．これによる $\mathbb{R}$ の測度は $\|x\|^2$ で有界であることに注意する．さらに $4(E(\lambda)x, y) = \sum_{k=0}^3 i^k(E(\lambda)(x+i^ky), x+i^ky)$ より，$(E(\lambda)x, y)$ による Lebesgue-Stieltjes 積分 $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \cdot\, d(E(\lambda)x, y)$ も考えることができる．

$\mathbb{R}$ 上の複素数値連続関数 $f(x)$ に対して H 上の作用素 $A(f)$ を定義したい．まず $D(A(f))$ を次のように定める．
$$D(A(f)) = \{x \in H \mid \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2\, d(E(\lambda)x, x) < \infty\}$$
とおく．

定理 6.4 上の設定の下で次が成り立つ．

(1) $D(A(f))$ は H の稠密な部分空間である．

(2) $x \in D(A(f))$, $y \in H$ に対し，

$$(A(f)x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\ d(E(\lambda)x, y)$$

となるように作用素 $A(f)$ が定まる．

(3) $x \in D(A(f))$ のとき，

$$\|A(f)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2\ d(E(\lambda)x, x)$$

である．

(4) $E(\lambda)A(f) \subset A(f)E(\lambda)$ である．

(5) $A(f)^* = A(\bar{f})$ である．

(6) $A(f)$ は閉作用素である．

(7) f が実数値であれば $A(f) = A(f)^*$ である．

(8) f が有界であれば，$A(f)$ も有界であり，$\|A(f)\| \leq \|f\|_\infty$ である．

(9) $|f(x)|$ の値が常に 1 であれば，$A(f)$ はユニタリである．

証明 (1) まず，$D(A(f))$ が線型空間であることを示す．スカラー倍で閉じていることは明らかなので，和で閉じていることを示す．$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x, y \in H$ に対し，

$$((E(\lambda) - E(\mu))(x + y), x + y) \leq 2((E(\lambda) - E(\mu))x, x) + 2((E(\lambda) - E(\mu))y, y)$$

であるので，$x, y \in D(A(f))$ であれば，$x + y \in D(A(f))$ がわかる．次に $D(A(f))$ が稠密であることを示す．$n \in \mathbb{N}$, $x \in H$ に対し，$x_n = (E(n) - E(-n))x$ とおくと，$x_n \in D(A(f))$, $x_n \to x$ なので，$D(A(f))$ が稠密であることが分かった．

(2) $x \in D(A(f))$ を取る．$a, b \in \mathbb{R}$, $y \in H$ に対し，$a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = b$ と分割すると，

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=1}^{n} \overline{f(\lambda_j)}((E(\lambda_j) - E(\lambda_{j-1}))y, x)\right| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |f(\lambda_j)|\,|((E(\lambda_j) - E(\lambda_{j-1}))y, x)| \\
&\leq \sum_{j=1}^{n} |f(\lambda_j)|\|(E(\lambda_j) - E(\lambda_{j-1}))y\|\|(E(\lambda_j) - E(\lambda_{j-1}))x\| \\
&\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |f(\lambda_j)|^2\|(E(\lambda_j) - E(\lambda_{j-1}))x\|^2}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \|(E(\lambda_j) - E(\lambda_{j-1}))y\|^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |f(\lambda_j)|^2(E(\lambda_j) - E(\lambda_{j-1}))x, x)}\|y\|
\end{aligned}$$

であるので，分割を細かくして極限を取ると，

$$\left|\int_a^b \overline{f(\lambda)}\, d(E(\lambda)y,x)\right| \le \sqrt{\int_a^b |f(\lambda)|^2\, d(E(\lambda)x,x)}\|y\|$$

となる．よって $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\lambda)y,x)$ が収束する．このとき上の評価より，$y \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\lambda)y,x)$ は有界線型汎関数となる．よって，これは $(y, A(f)x)$ の形に書けて $A(f)x$ が定まる．$A(f)$ が線型であることは容易にわかり，(2) が示された．

(3) $x \in D(A(f))$ として，(2) の式で $y = A(f)x$ とおくと，$\|A(f)x\|^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x, A(f)x)$ であるが，

$$(E(\lambda)x, A(f)x) = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\mu)}\, d(E(\lambda)x, E(\mu)x) = \int_{-\infty}^{\lambda} \overline{f(\mu)}\, d(E(\mu)x, x)$$

より，$\|A(f)x\|^2 = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2\, d(E(\lambda)x,x)$ を得る．

(4) $x \in D(A(f))$ のとき，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |f(\mu)|^2\, d(E(\mu)E(\lambda)x, E(\lambda)x) &= \int_{-\infty}^{\lambda} |f(\mu)|^2\, d(E(\mu)x,x) \\ &\le \int_{\mathbb{R}} |f(\mu)|^2\, d(E(\mu)x,x) < \infty\end{aligned}$$

より，$E(\lambda)x \in D(A(f))$ で，この時 $y \in H$ に対して，

$$(E(\lambda)A(f)x, y) = \int_{\mathbb{R}} f(\mu)\, d(E(\mu)x, E(\lambda)y) = (A(f)E(\lambda)x, y)$$

なので，$E(\lambda)A(f) \subset A(f)E(\lambda)$ となる．

(5) まず $D(A(f)) = D(A(\bar{f}))$ であることに注意する．$x, y \in D(A(f))$ のとき

$$\overline{(A(f)x,y)} = \overline{\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x,y)} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\lambda)y,x) = (A(\bar{f})y, x)$$

なので $A(\bar{f}) \subset A(f)^*$ である．次に $x \in D(A(f)^*)$ とすると，$y \in H$, $n \in \mathbb{N}$ に対して

$x_n = (E(n) - E(-n))x$, $y_n = (E(n) - E(-n))y$ とおいて

$$
\begin{aligned}
\|A(f)^* x\| &= \lim_{n\to\infty} \|(E(n) - E(-n))A(f)^* x\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|y\|\le 1} |((E(n) - E(-n))A(f)^* x, y)| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|y\|\le 1} |(A(f)^* x, y_n)| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|y\|\le 1} |(x, A(f) y_n)| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|y\|\le 1} |(x_n, A(f) y_n)| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|y\|\le 1} |(A(\bar{f}) x_n, y)| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|A(\bar{f}) x_n\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d(x_n, E(\lambda) x_n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \sqrt{\int_{-n}^{n} |f(\lambda)|^2 d(x, E(\lambda) x)}
\end{aligned}
$$

であり，これが有限なことから $x \in D(A(\bar{f}))$ である．

(6) $A(f) = A(\bar{f})^*$ よりわかる．

(7) 明らかである．

(8) (3) の等式よりわかる．

(9) $A(f)$ は有界であり，(3) より $\|A(f)x\|^2 = \|x\|^2$ となるので，$A(f)^* A(f) = I$ である．f のかわりに $\bar{f}$ を使うと $A(\bar{f})^* A(\bar{f}) = I$ となるので，$A(f)A(f)^* = I$ もわかる． □

この $A(f)$ を $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\, dE(\lambda)$ と書く．

定義 6.5 $\{E(\lambda)\}$ を単位の分解とする．$E(\lambda_1) = 0$, $E(\lambda_2) = I$ となる λ_1, λ_2 が存在するとき，$\{E(\lambda)\}$ は有界であると言う．

命題 6.6 $A = \displaystyle\int \lambda\, dE(\lambda)$ が有界であるための必要十分条件は $\{E(\lambda)\}$ が有界であることである．

証明 A が有界であるとする．任意の $x \in H$ について

$$
\int \lambda^2\, d(E(\lambda)x, x) = \|Ax\|^2 \le \|A\|^2 \|x\|^2
$$

であることに注意する．$\lambda_n < 0,\ \lambda_n \to -\infty,\ E(\lambda_n) \neq 0$ となる λ_n があったとすると，$\|x_n\| = 1$ となる $x_n \in E(\lambda_n)H$ を取り，

$$\begin{aligned}\int \lambda^2\, d(E(\lambda)x_n, x_n) &= \int \lambda^2\, d(E(\lambda)E(\lambda_n)x_n, x_n)\\ &= \int_{-\infty}^{\lambda_n} \lambda^2\, d(E(\lambda)x_n, x_n)\\ &\geq \lambda_n^2 (E(\lambda_n)x_n, x_n) = \lambda_n^2\end{aligned}$$

となる．これは矛盾である．$\lambda \to \infty$ となる場合も同様である．

逆に $E(\lambda_1) = 0,\ E(\lambda_2) = I$ となる λ_1, λ_2 が存在したとする．

$$\int \lambda^2\, d(E(\lambda)x, x) \leq \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \lambda^2\, d(E(\lambda)x, x) \leq \max(\lambda_1^2, \lambda_2^2)\|x\|^2$$

となるので $D(A) = H,\ \|A\| \leq \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|)$ である． □

定義 6.7 $\{E(\lambda)\}$ を単位の分解とする．$E(\{\lambda\}) = E(\lambda) - E(\lambda - 0)$ とおく．これが 0 でないとき，$E(\lambda)$ は λ で不連続であると言う．

命題 6.8 $\{E(\lambda)\}$ を単位の分解とし，$A = \displaystyle\int \lambda\, dE(\lambda)$ とおく．

(1) $x \in \mathrm{Ker}(A - \mu I)$ となるための必要十分条件は，関数 $\lambda \mapsto \|E(\lambda)x\|^2$ が，$\lambda = \mu$ 以外で定数となることである．

(2) $\mathrm{Ker}(A - \mu I)$ への直交射影は $E(\{\mu\})$ に等しい．

証明 (1) $x \in D(A)$ に対し，

$$\|(A - \mu I)x\|^2 = \int (\lambda - \mu)^2 d(E(\lambda)x, x)$$

よりわかる．

(2) $x \in \mathrm{Ker}(A - \mu I)$ とする．(1) より，$\lambda < \mu$ のとき，

$$\|E(\lambda)x\| = \lim_{\lambda \to -\infty} \|E(\lambda)x\| = 0$$

である．同様に，$\lambda > \mu$ のとき，

$$\|E(\lambda)x\| = \lim_{\lambda \to \infty} \|E(\lambda)x\| = \|x\|^2$$

である．これより，$E(\mu - 0)x = 0,\ E(\mu)x = x$ である．

逆に $x \in \mathrm{Im}(E(\{\mu\}))$ ならば，

$$E(\lambda)x = \begin{cases} x, & \lambda > \mu \text{ のとき，} \\ 0, & \lambda < \mu \text{ のとき，} \end{cases}$$

である．よって (1) より，$x \in \mathrm{Ker}(A - \mu I)$ である． □

補題 6.9 H 上の有界線型作用素 A について，$0 \leq A \leq 1$ であれば $\|A\| \leq 1$ である．

証明 $x, y \mapsto (Ax, y)$ について，$y = Ax$ として Cauchy-Schwarz 不等式を使うことにより，

$$|(Ax, Ax)\| \leq |(Ax, x)|^{1/2}|(A^2x, Ax)|^{1/2} \leq |(x, x)|^{1/2}|(Ax, Ax)|^{1/2}$$

となるので，$\|Ax\| \leq \|x\|$ となる． □

補題 6.10 H 上の有界線型作用素の列 $\{A_n\}_n$ と有界線型作用素 A について，$0 \leq A_1 \leq A_2 \leq \cdots \leq A$ であれば，作用素の強位相での A_n の収束先が存在する．

証明 $(Ax, x) \leq \|A\|\|x\|^2$ なので，最初から A は I のスカラー倍と仮定してよく，さらに I と仮定して一般性を失わない．

$x \in H$ について，$\{(A_nx, x)\}$ は上に有界な単調増大数列なので極限が存在する．すると $m \geq n$ について，Cauchy-Schwarz 不等式を用いて，

$$\begin{aligned}((A_m - A_n)x, (A_m - A_n)x) &\leq ((A_m - A_n)x, x)^{1/2}((A_m - A_n)^2x, (A_m - A_n)x)^{1/2} \\ &\leq ((A_m - A_n)x, x)^{1/2}((A_m - A_n)x, (A_m - A_n)x)^{1/2}\end{aligned}$$

となるので，

$$\|(A_m - A_n)x\| \leq ((A_m - A_n)x, x)^{1/2} \to 0$$

であり，$\lim_{n\to\infty} A_nx$ が存在する．これを Ax とおけば，上の補題より $\|A_nx\| \leq \|x\|$ なので $\|Ax\| \leq \|x\|$ で，$\{A_n\}$ の作用素の強位相での収束先が A となる． □

命題 6.11 A を H 上の有界線型作用素とし，$A \geq 0$ とする．H 上の有界線型作用素 X で，$X^2 = A$, $X \geq 0$ となるものが一意的に存在する．この X は，A と可換な有界線型作用素すべてと可換である．

証明 $P_0(t) = 0$, $P_{n+1}(t) = (t + P_n(t)^2)/2$ とおく．これらは正係数の多項式である．さらに $P_{n+1}(t) - P_n(t)$ も正係数を持つことを示す．まず $P_1(t) - P_0(t) = t/2$ である．次に

$$P_{n+1}(t) - P_n(t) = (P_n(t) - P_{n-1}(t))(P_n(t) + P_{n-1}(t))/2$$

より帰納的にわかる．

次に $0 \leq A \leq 1$ としてよい．$B = I - A$ とおく．$0 \leq B \leq 1$ であり，$B^{2k} \geq 0$, $B^{2k+1} \geq 0$ がわかる．$B_n = P_n(B)$ とおくと $B_n \geq 0$ であり，$B_{n+1} - B_n = P_{n+1}(B) - P_n(B) \geq 0$ でもある．

$$(B_{n+1}x, x) = \frac{1}{2}(Bx, x) + \frac{1}{2}(B_nx, B_nx) \leq (x, x)$$

より，補題を用いて帰納的に $B_n \leq 1,\ \|B_n\| \leq 1$ である．よって，$0 \leq B_1 \leq B_2 \leq B_3 \leq \cdots \leq I$ となり，補題より作用素の強位相で B_n の収束先 B_∞ が存在する．$0 \leq B_\infty \leq 1$ である．$X = I - B_\infty$ とおくと，$B_\infty = (B + B_\infty^2)/2$ なので，

$$X^2 = (I - B_\infty)^2 = I - 2B_\infty + B_\infty^2 = I - B = A$$

を得る．$TA = AT$ であれば，$TB_n = B_nT, TB_\infty = B_\infty T$ より，$XT = TX$ となる．

ほかに $Y \geq 0, Y^2 = A$ となるものがあったとすると，$YA = AY$ なので，$XY = YX$ である．$(X+Y)(X-Y) = X^2 - Y^2 = 0$ なので，$X = X_1^2, Y = Y_1^2, X_1 \geq 0, Y_1 \geq 0$ となる X_1, Y_1 を取り，$x \in H$ に対して $y = (X-Y)x$ とおくと，

$$\|X_1y\|^2 + \|Y_1y\|^2 = ((X_1^2 + Y_1^2)y, y) = ((X+Y)(X-Y)x, y) = 0$$

となるので，$X_1y = Y_1y = 0$ である．よって $Xy = Yy = 0$ となり，

$$\|Xx - Yx\|^2 = (y, (X-Y)x) = ((X-Y)y, x) = 0$$

なので，$X = Y$ を得る． □

定義 6.12 上の命題の X を $A^{1/2}$ と書く．H 上の任意の有界線型作用素 A について，$(A^*A)^{1/2}$ を $|A|$ と書く．

定義 6.13 H 上の有界線型作用素 U が，$(\mathrm{Ker}\, U)^\perp$ から $\mathrm{Im}\, U$ への内積を保つ全射のとき，U を部分的等長作用素 (partial isometry) という．

命題 6.14 (1) U が部分的等長作用素ならば，U^* も部分的等長作用素であり，UU^* と U^*U は直交射影である．

(2) U^*U が直交射影であれば，U は部分的等長作用素である．

証明 (1) 容易にわかる．

(2) $P = U^*U$ とおく．$Px = 0$ であれば，$(Ux, Ux) = (Px, x) = 0$ より，$Ux = 0$ であり，また $Ux = 0$ であればもちろん $Px = U^*Ux = 0$ である．つまり $(\mathrm{Ker}\, U)^\perp = \mathrm{Im}\ P$ である．$x, y \in \mathrm{Im}\ P$ とすると，$(Ux, Uy) = (U^*Ux, y) = (x, y)$ なので結論を得る． □

命題 6.15 A を H 上の有界線型作用素とする．$\mathrm{Ker}\, U = \mathrm{Ker}\ A,\ A = U|A|$ となる部分的等長作用素 U が一意的に存在し，このとき $\mathrm{Im}\, U = \overline{\mathrm{Im}\ A}$ となる．(これを A の極分解と言う．)

証明 $x, y \in H$ に対して $(Ax, Ay) = (|A|x, |A|y)$ なので，$\mathrm{Ker}\ A = \mathrm{Ker}\ |A|$ である．$\mathrm{Im}\ |A|$ から $\mathrm{Im}\ A$ への写像 U_0 を $U_0|A|x = Ax$ と定める．これは well-defined であり，ノルムを保つので，$\overline{\mathrm{Im}\ |A|}$ から $\overline{\mathrm{Im}\ A}$ への等長作用素に拡張できる．これを $\overline{\mathrm{Im}\ |A|}^\perp$ 上では 0 として H 全体に拡張した作用素を U とする．定義より，U は部分的等長作用素であり，$\overline{\mathrm{Im}\ |A|}^\perp = \mathrm{Ker}\ |A| = \mathrm{Ker}\ A$ なので $\mathrm{Ker}\ U = \mathrm{Ker}\ A,\ A = U|A|, \mathrm{Im}\ U = \overline{\mathrm{Im}\ A}$ が成り立っている．一意性は明らかである． □

定義 6.16 A を H 上の線型作用素とし，P を H から閉部分空間 K への直交射影とする．$PD(A) \subset D(A)$ かつ $x \in D(A)$ について $PAx = APx$ であるとき，つまり $PA \subset AP$ であるとき，P は (あるいは K は) A を約すると言う．

このとき $(I-P)A \subset A(I-P)$ なので，K が A を約することと，$K^{\perp}$ が A を約することは同値である．このとき $D(A_K) = D(A) \cap K$ とおいて A_K を A の K への制限とする．これは K 上の線型作用素である．

命題 6.17 A を H 上の線型作用素，K を H の閉部分空間，P を K への直交射影，K は A を約するとする．この時以下が成り立つ．

(1) A が閉作用素であれば，A_K も閉作用素である．

(2) A が H 上稠密に定義されていれば，A_K は K 上稠密に定義されている．このとき K は A^* を約し，$(A^*)_K = (A_K)^*$ である．

(3) A がユニタリであれば，A_K もユニタリである．

(4) A が自己共役であれば，A_K も自己共役である．

(5) $\sigma(A) = \sigma(A_K) \cup \sigma(A_{K^{\perp}})$ である．

証明 (1) $x_n \in K \cap D(A)$, $x_n \to x$, $Ax_n \to y$ とすると，$x, y \in K$ であり，A は閉なので，$x \in D(A)$, $y = Ax$ である．

(2) $x \in K$ とすると，$x_n \in D(A)$ が存在して，$x_n \to x$ となっている．この時 $Px_n \to x$, $Px_n \in D(A) \cap K = D(A_K)$ なので，A_K は K 上稠密に定義されている．

$PA \subset AP$ より，$PA^* \subset (AP)^* \subset (PA)^* = A^*P$ である．

また，$x \in D((A_K)^*) \subset K$ とすると，$y \in D(A)$ に対し，

$$((A_K)^*x, y) = ((A_K)^*x, Py) = (x, A_KPy) = (x, APy) = (x, PAy) = (x, Ay)$$

なので，$x \in D(A^*) \cap K$ で，$(A_K)^* \subset (A^*)_K$ である．

逆に $x \in D(A^*) \cap K$ とすると，任意の $y \in D(A_K) = D(A) \cap K$ に対し，

$$((A^*)_K x, y) = (A^*x, y) = (x, Ay) = (x, A_K y)$$

より，$x \in D((A_K)^*)$ である．

(3) (2) よりわかる．

(4) (2) よりわかる．

(5) $\lambda \in \rho(A)$ とすると，$A_K - \lambda I_K$ と $A_{K^{\perp}} - \lambda I_{K^{\perp}}$ は単射である．任意の $y \in H$ に対し，$x_n \in D(A)$, $(A - \lambda I)x_n \to y$ とできるので，$y \in K$ であれば，$(A - \lambda I)Px_n \to Py = y$ となり，$\overline{\mathrm{Im}(A_K - \lambda I_K)} = K$ である．同様に $\overline{\mathrm{Im}(A_{K^{\perp}} - \lambda I_{K^{\perp}})} = K^{\perp}$ である．また $\|(A - \lambda I)^{-1}\| = C$ とおけば，$x \in D(A_K)$ に対して $\|(A_K - \lambda I_K)x\| \geq C\|x\|$, $x \in D(A_{K^{\perp}})$ に対して $\|(A_{K^{\perp}} - \lambda I_{K^{\perp}})x\| \geq C\|x\|$ である．以上より，$\rho(A) \subset \rho(A_K) \cap \rho(A_{K^{\perp}})$ である．

逆に $\lambda \in \rho(A_K) \cap \rho(A_{K^{\perp}})$ とする．$A_K - \lambda I_K$ と $A_{K^{\perp}} - \lambda I_{K^{\perp}}$ は単射であるので，$A - \lambda I$ も単射である．任意の $y \in H$ に対し，$x'_n \in K \cap D(A)$, $(A - \lambda I)x'_n \to Py$, $x''_n \in K^{\perp} \cap D(A)$, $(A - \lambda I)x''_n \to (I - P)y$ とできるので，$x'_n + x''_n \in D(A)$, $(A - \lambda I)(x'_n + x''_n) \to y$ となって，$\overline{\mathrm{Im}(A - \lambda I)} = H$ である．また，$\|(A_K - \lambda I_K)^{-1}\| = C_1$, $\|(A_{K^{\perp}} - \lambda I_{K^{\perp}})^{-1}\| = C_2$ とすれば，

$$\|(A - \lambda I)x\|^2 \geq C_1^2\|Px\|^2 + C_2^2\|(I - P)x\|^2$$

なので，$(A - \lambda I)^{-1}$ も有界である． $\square$

7 有界自己共役作用素のスペクトル分解

定理 7.1 A を H 上の有界な自己共役作用素とする．$A = U|A|$ と極分解すると以下のことが成り立つ．

(1) $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Im}\, |A|$ で，$U = U^*$ である．

(2) A と可換なすべての有界線型作用素と，U は可換である．

(3) A を約する H の部分空間 H_+, H_- が存在して $H = H_+ \oplus H_- \oplus \mathrm{Ker}\, A$ であり，$A_\pm = A|_{H_\pm}$ とおくと，$A_+ \geq 0$, $A_- \leq 0$ である．

(4) K が A を約し，$A_K \geq 0$ であれば $K \subset H_+ \oplus \mathrm{Ker}\, A$ である．H_- についても同様である．

証明 (1) $A = A^* = |A|U^*$ なので，$\mathrm{Im}\ A \subset \mathrm{Im}\ |A|$ である．また，$A^2 = AA^* = U|A||A|U^* = (U|A|U^*)^2$ より，平方根の一意性から $|A| = U|A|U^* = AU^*$ である．よって，$\mathrm{Im}\, |A| \subset \mathrm{Im}\, A$ である．

また $U^*|A| = U^*U|A|U^* = |A|U^* = A$ と $\mathrm{Ker}\, U^* = (\mathrm{Im}\, U)^\perp = (\mathrm{Im}\, A)^\perp = \mathrm{Ker}\, A$ に極分解の一意性を用いて $U = U^*$ である．

(2) $AB = BA$ であるとすると，$|A|B = B|A|$ である．よって $BU|A| = BA = AB = U|A|B = UB|A|$ であり，$\mathrm{Im}\, |A|$ 上で $BU = UB$ である．一方 $x \in \mathrm{Ker}\, |A| = (\mathrm{Im}\, |A|)^\perp$ とすると，$\mathrm{Ker}\ |A| = \mathrm{Ker}\ U$ より $BUx = 0$ であり，また $ABx = BAx = 0$ なので $Bx \in \mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, U$ より $UBx = 0$ でもある．よって H 全体で $UB = BU$ である．

(3) $H = \mathrm{Ker}\, A \oplus \overline{\mathrm{Im}\, A}$ である．$\overline{\mathrm{Im}\, A}$ 上では $U^2 = U^*U$ は恒等作用素だから $\overline{\mathrm{Im}\, A}$ 上で $(I \pm U)/2$ の像を $H_\pm$ とおけば $H = \mathrm{Ker}\, A \oplus H_+ \oplus H_-$ と分解でき，$(I \pm U)/2$ が A と交換するので，いずれの閉部分空間も A を約している．$x \in H_+$ に対して $Ax = U|A|x = |A|Ux = |A|x$ だから $A_+ \geq 0$ である．A_- についても同様である．

(4) $K, H_\pm$ への直交射影をそれぞれ $Q, P_\pm$ とおく．$AQ = QA$ より，$P_\pm$ は Q と可換である．よって QP_- も直交射影である．これが 0 であることを示せばよい．$x \in \mathrm{Im}\, QP_-$ に対し，$(Ax, x) \geq 0$, $(Ax, x) \leq 0$ より $(Ax, x) = 0$ である．K 上の Cauchy-Schwarz 不等式より $(Ax, Ax) \leq (Ax, x)^{1/2}(A^2x, Ax)^{1/2} = 0$ となって $Ax = 0$ である．よって $x \in H_- \cap \mathrm{Ker}\, A = 0$ である． □

定理 7.2 A を H 上の自己共役有界線型作用素とする．$A = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dE(\lambda)$ となる単位の分解 $\{E(\lambda)\}$ が一意的に存在し，$\lambda < -\|A\|$ のとき，$E(\lambda) = 0$, $\lambda > \|A\|$ のとき，$E(\lambda) = I$ である．

証明 $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し，$A - \lambda I = U(\lambda)|A - \lambda I|$ と極分解する．$H = H_+(\lambda) \oplus H_-(\lambda) \oplus \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$, $H_\pm(\lambda)$ 上への A の制限を $A_\pm(\lambda)$ と書くと，$A_+(\lambda) \geq \lambda$, $A_-(\lambda) \leq \lambda$ である．$H_\pm(\lambda)$, $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ への直交射影をそれぞれ $P_\pm(\lambda)$, $P_0(\lambda)$ とし，$E(\lambda) = P_-(\lambda) + P_0(\lambda)$ とおく．また $H(\lambda) = E(\lambda)H = H_-(\lambda) \oplus \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ とおく．$H(\lambda)$ は A を約し，$x \in H(\lambda)$, $\lambda < \mu$ ならば，$((A - \lambda I)x, x) \leq 0$ より，$((A - \mu I)x, x) \leq 0$ であり，上の定理の (4) より，$E(\lambda) \leq E(\mu)$ を得る．

$\lambda < -\|A\|$ とすると，$x \in H$, $x \neq 0$ に対して

$$((A - \lambda I)x, x) > (Ax, x) + \|A\|\|x\|^2 \geq (Ax, x) + |(Ax, x)| \geq 0$$

である．このことから $E(\lambda)=0$ である．同様にして，$\lambda > \|A\|$ とすると $E(\lambda)=I$ である．これからもちろん $\lambda \to \pm\infty$ の時の極限の存在もわかる．

次に $E(\lambda)$ の右連続性を示す．$\lambda < \mu$ のとき，$(A-\mu I)E(\mu) \le 0, (A-\lambda I)(I-E(\lambda)) \ge 0$ より，

$$\begin{aligned}(A-\mu I)(E(\mu)-E(\lambda)) &\le 0,\\ (A-\lambda I)(E(\mu)-E(\lambda)) &\ge 0,\end{aligned}$$

である．よって

$$\lambda(E(\mu)-E(\lambda)) \le A(E(\mu)-E(\lambda)) \le \mu(E(\mu)-E(\lambda))$$

である．$\mu \to \lambda+0$ とすると．$(A-\lambda I)(E(\lambda+0)-E(\lambda))=0$ である．これより

$$(E(\lambda+0)-E(\lambda))H \subset \mathrm{Ker}(A-\lambda U) \subset E(\lambda)H$$

となり，$E(\lambda+0)-E(\lambda)=0$ を得る．

次に $A=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda)$ を示す．$\lambda_0 < -\|A\|, \lambda_n > \|A\|, \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$ とする．上の議論より，

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_{k-1}(E(\lambda_k)-E(\lambda_{k-1})) \le \sum_{k=1}^{n}A(E(\lambda_k)-E(\lambda_{k-1})) = A \le \sum_{k=1}^{n}\lambda_k(E(\lambda_k)-E(\lambda_{k-1}))$$

となる．これより，$\lambda'_k \in (\lambda_{k-1},\lambda_k], k=1,2,\ldots,n$ と $x \in H$ に対し，

$$\begin{aligned}-\sum_{k=1}^{n}(\lambda'_k-\lambda_{k-1})((E(\lambda_k)-E(\lambda_{k-1}))x,x) &\le ((A-\sum_{k=1}^{n}\lambda'_k(E(\lambda_k)-E(\lambda_{k-1})))x,x)\\ &\le \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k-\lambda'_k)((E(\lambda_k)-E(\lambda_{k-1}))x,x)\end{aligned}$$

となるので，$\Delta=\max_{1\le k\le n}|\lambda_k-\lambda_{k-1}|$ とおいて，

$$-\Delta\|x\|^2 \le ((A-\sum_{k=1}^{n}\lambda'_k(E(\lambda_k)-E(\lambda_{k-1}))x,x) \le \Delta\|x\|^2$$

を得る．これより $A=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dE(\lambda)$ がわかる．

別に $A=\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\,dF(\lambda)$ と書けたとする．まず $F(\lambda)$ は有界でなくてはならない．$A_\lambda = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}|\mu-\lambda|\,dF(\mu)$ とおくと，

$$\begin{aligned}(A_\lambda^2x,x)=(A_\lambda x,A_\lambda x)&=\int_{-\infty}^{\infty}|\mu-\lambda|^2\,d(F(\mu)x,x)\\ &=((A-\lambda I)x,(A-\lambda I)x)=((A-\lambda I)^2x,x)\end{aligned}$$

より $A_\lambda^2 = (A-\lambda I)^2$ がわかる．$A_\lambda \geq 0$ と合わせて $A_\lambda = |A-\lambda I|$ である．また $V(\lambda) = I - F(\lambda) - F(\lambda - 0)$ とおくと，$x, y \in H$ に対し，

$$\begin{aligned}(V(\lambda)A_\lambda x, y) =& \int_{\mu<\lambda} |\mu - \lambda|\, d(F(\mu)x, (I - F(\lambda) - F(\lambda-0))y) \\ &+ \int_{\mu>\lambda} |\mu - \lambda|\, d(F(\mu)x, (I - F(\lambda) - F(\lambda-0))y) \\ =& - \int_{\mu<\lambda} (\lambda - \mu)\, d(F(\mu)x, y) + \int_{\mu>\lambda} (\mu - \lambda)\, d(F(\mu)x, y) \\ =&((A - \lambda I)x, y)\end{aligned}$$

である．(2 つ目の等号は Stieltjes 積分として書いてみればわかる．) よって $A - \lambda I = V(\lambda)A_\lambda$ を得る．また $V(\lambda)^2 = I - F(\lambda) + F(\lambda - 0) = I - F(\{\lambda\})$ だから $\mathrm{Ker}(A - \lambda I) = F(\{\lambda\}) = \mathrm{Ker}\, V(\lambda)$ である．よって $A - \lambda I = V(\lambda)|A - \lambda I|$ は極分解であり，その一意性から $V(\lambda) = U(\lambda)$ となる．これより $E(\lambda) = F(\lambda)$ がわかる． □

8 スペクトル測度

定義 8.1 H を Hilbert 空間，$\mathcal{B}^d$ を $\mathbb{R}^d$ 内の Borel 集合全体とする．$\mathcal{B}^d$ から H 上の直交射影全体の集合への写像 E が次の条件を満たすとき，d 次元スペクトル測度という．

(1) $E(\varnothing) = 0$, $E(\mathbb{R}^d) = I$.

(2) $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^d$ に対し，$E(B_1)E(B_2) = E(B_1 \cap B_2)$ である．

(3) B_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ を $\mathcal{B}^d$ の互いに交わらない集合たちとするとき，$E(\bigcup_{n=1}^\infty B_n)$ は $\sum_{n=1}^N E(B_n)$ の作用素の強位相における $N \to \infty$ の極限である．

注意 8.2 (2) より，(3) に現れる $E(B_n)$ の和は互いに直交する直交射影の和であることに注意する．また $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^d$, $B_1 \subset B_2$ のとき，$E(B_2) = E(B_1) + E(B_2 \setminus B_1)$ なので，$E(B_1) \leq E(B_2)$ であることに注意する．

定義 8.3 d 次元スペクトル測度 E について，$E(B) = 0$ となるような開集合 B すべての和を U と書く．$\mathbb{R}^d$ は第二可算なので，これは $E(B) = 0$ となるような開集合 B たちの可算和で書けて，$E(U) = 0$ がわかる．この E の補集合を E の台 (support) と呼んで，$\mathrm{supp}\, E$ と書く．

命題 8.4 E を 1 次元スペクトル測度とする．$E(\lambda) = E((-\infty, \lambda])$ とおくとこれは単位の分解である．また $x \in H$ と $\mathbb{R}$ 上の連続関数 f に対して，右連続増加関数 $(E(\lambda)x, x)$ から生じる f の *Lebesgue-Stieltjes* 積分と，測度 $(E(B)x, x)$ による f の積分は等しい．

証明　前半は $E(\lambda)$ の右連続性を示せば十分である．実数列 $\{\lambda_n\}$ が単調減少で λ に収束しているとする．

$$(-\infty, \lambda] \cup \bigcup_{n=1}^\infty (\lambda_{n+1}, \lambda_n] = (-\infty, \lambda_1]$$

に注意すれば右連続性が分かる．

また後半は，Riemann-Stieltjes 和による近似からわかる． □

命題 8.5 F を *Hilbert* 空間 H から $\mathbb{R}$ への写像で，次の条件を満たすものとする．

(1) 定数 C が存在して，$|F(x)| \le C\|x\|^2$.

(2) $F(x+y)+F(x-y)=2F(x)+2F(y)$.

(3) $\alpha \in \mathbb{C}$, $x \in H$ に対して，$F(\alpha x)=|\alpha|^2F(x)$.

このとき，H 上の有界自己共役作用素 A が存在して，$F(x)=(Ax,x)$ となる．

証明 $x,y \in H$ に対して $B(x,y)=\dfrac{1}{4}\displaystyle\sum_{k=0}^{3} i^kF(x+i^ky)$ とおく．まず $B(y,x)=\overline{B(x,y)}$, $B(x,0)=0$ であることがわかる．次に $\alpha \in \mathbb{C}$, $x,y,z \in H$ に対して

$$F(x+\alpha y)+F(x+\alpha z)=\frac{1}{2}(F(2x+\alpha(y+z))+F(\alpha(y-z)))$$

であるのでこれを $\alpha=\pm1,\pm i$ に対して適用して $\alpha=\pm1,\pm i$ を掛けてから足すと，

$$4B(x,y)+4B(x,z)=2(B(2x,y+z)+B(0,y-z))=2B(2x,y+z)$$

を得る．ここで $z=0$ とすれば $2B(x,y)=B(2x,y)$ なので，結局上式より $B(x,y)+B(x,z)=B(x,y+z)$ となる．

これより任意の自然数 n に対して $B(x,ny)=nB(x,y)$ であり，任意の正の有理数 r に対して $B(x,ry)=rB(x,y)$ である．さらに

$$|B(x,y)| \le \frac{C}{4}(\|x+y\|^2+\|x+iy\|^2+\|x-y\|^2+\|x-iy\|^2) \le C(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

もわかる．

また

$$\begin{aligned}4B(ix,y)&=F(ix+y)+iF(ix+iy)-F(ix-y)-iF(ix-iy)\\&=i(F(x+y)+iF(x+iy)-F(x-y)-iF(x-iy))=4iB(x,y)\end{aligned}$$

が定義よりわかる．

さらに正の有理数 r に対して $|B(x,y)| \le |B(rx,y/r)| \le C(r^2\|x\|^2+\|y\|^2/r^2)$ であるので r を動かして右辺を最小化することにより，$|B(x,y)| \le 2C\|x\|\|y\|$ である．

$\alpha \in \mathbb{C}$ に対して $B(\alpha x,y)$ は α の連続関数であることが上の評価より分かるので，結局すべての $\alpha \in \mathbb{C}$ で $B(\alpha x,y)=\alpha B(x,y)$ がわかる．

以上すべて合わせると，Riesz の表現定理より，x に対して Ax が存在して，$B(x,y)=(Ax,y)$ となる．写像 A が線型であることは容易に分かり，$|B(x,y)| \le 2C\|x\|\|y\|$ より A が有界であることも分かる．$B(x,x)=F(2x)/4=F(x)$ である．また $(Ax,x) \in \mathbb{R}$ なので $A=A^*$ である． □

定理 8.6 $\prod_{j=1}^{d}(a_j,b_j]$ の形の集合の有限直和全体のなす集合族を $\mathcal{B}_0^d$ とおく．*(*$a_j=-\infty$, $b_j=\infty$ でもよい．$b_j=\infty$ の場合は $(a_j,b_j]=(a_j,b_j)$ とみなす．*)* $\mathcal{B}_0^d$ から H 上の直交射影全体の集合への写像 E_0 が上の定義の 3 条件を満たしているとする．ただし (3) では $B_n \in \mathcal{B}_0^d$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{B}_0^d$ と仮定する．この時 E_0 は d 次元スペクトル測度 E に一意的に拡張できる．

証明　$x \in H$ と $B \in \mathcal{B}_0^d$ に対し，$\mu_x(B) = \|E_0(B)x\|^2$ とおくと，E. Hopf の拡張定理により，これは $\mathcal{B}^d$ 上の測度 (同じ記号で μ_x と書く) に一意的に拡張される．拡張の一意性より，$B \in \mathcal{B}^d$ を一つ決めるごとに

$$\begin{aligned}
&\mu_x(B) \le \|x\|^2, \\
&\mu_{x+y}(B) + \mu_{x-y}(B) = 2\mu_x(B) + 2\mu_y(B), \\
&\mu_{\alpha x}(B) = |\alpha|^2 \mu_x(B),
\end{aligned}$$

が成り立っていることがわかるので，上の命題により $\mu_x(B) = (E(B)x, x)$ となる有界自己共役作用素 $E(B) \ge 0$ が存在する．この E がスペクトル測度であることを示せばよい．$x, y \in H$ を固定した時 $B \mapsto (E(B)x, y)$ は $\mathcal{B}^d$ 上の複素測度であることに注意する．

$B_1, B_2 \in \mathcal{B}_0^d$ に対し，$(E_0(B_1)x, E_0(B_2)x) = (E_0(B_1 \cap B_2)x, x)$ が成り立っている．B_2 を固定して両辺で B_1 の範囲を $\mathcal{B}_0^d$ から $\mathcal{B}^d$ に拡張すれば，複素測度の拡張の一意性により，$(E(B_1)E_0(B_2)x, x) = (E(B_1 \cap B_2)x, x)$ が $B_1 \in \mathcal{B}^d$ で成り立つ．次に B_2 の範囲を同様に拡張すれば，$(E(B_1)E(B_2)x, x) = (E(B_1 \cap B_2)x, x)$ が $B_2 \in \mathcal{B}^d$ でも成り立つ．よって $E(B_1)E(B_2) = E(B_1 \cap B_2)$ が $B_1, B_2 \in \mathcal{B}^d$ で成り立つ．特に $B_1 = B_2$ として，$E(B_1)$ が直交射影であることが分かる．

B_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ を $\mathcal{B}^d$ の互いに交わらない集合たちとするとき，$(E(\bigcup_{n=1}^\infty B_n)x, x) = \sum_{n=1}^\infty (E(B_n)x, x)$ なので，作用素の弱位相における収束がまず分かり，収束先が直交射影なので，作用素の強位相における収束も分かる．　□

定理 8.7　$E(\lambda)$ を単位の分解とすると，対応する 1 次元スペクトル測度が一意的に存在する．

証明　$E_0((a, b]) = E(b) - E(a)$ とおき，$(a, b]$ の形の集合の有限和についてもこれを拡張して E_0 を定義する．($a = -\infty$ または $B = \infty$ の場合も許す．) 測度論のときと同じように，$E(\lambda)$ の右連続性から $\mathcal{B}_0^1$ 上の完全加法性が出る．よって上のようにスペクトル測度が一意的に対応する．　□

命題 8.8　$\{E_j(\lambda)\}_{j=1,2,\dots,d}$ を互いに可換な単位の分解とする．このとき各 E_j を 1 次元スペクトル測度に延長したものを再び E_j と書くと，d 次元スペクトル測度 E で，$B_1, B_2, \dots, B_d \in \mathcal{B}_0^1$ に対して

$$E(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_d) = E_1(B_1)E_2(B_2)\cdots E_d(B_d)$$

となるものが一意的に存在する．

証明　まず仮定の可換性より $E_j(B_j)E_k(B_k) = E_k(B_k)E_j(B_j)$ である．

$B_j \in \mathcal{B}_0^1$ $(j = 1, 2, \dots, d)$ に対し，

$$E_0(B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_d) = E_1(B_1)E_2(B_2)\cdots E_d(B_d)$$

と定める．これを拡張して E_0 を $\mathcal{B}_0^d$ 上で定義できる．通常の直積測度の構成の時と同様にして，$\mathcal{B}_0^d$ 上での完全加法性が示せるので，上の拡張定理により E の存在と一意性が分かる．　□

これを E_j の直積スペクトル測度という．

次に E を $\mathbb{R}^d$ 上のスペクトル測度とする．$f(x)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の複素数値 Borel 可測関数としたとき，$A(f) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, dE(\lambda)$ という作用素を定義したい．そのためまず

$$D(A(f)) = \{x \in H \mid \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2\, d(E(\lambda)x, x) < \infty\}$$

とおく．

命題 8.9 $D(A(f))$ は H の稠密な部分空間である．

証明 $x, y \in D(A(f))$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $B \in \mathcal{B}^d$ とする．

$$\|E(B)(\alpha x + \beta y)\|^2 \le 2|\alpha|^2\|E(B)x\|^2 + 2|\beta|^2\|E(B)y\|^2$$

より $\alpha x + \beta y \in D(A(f))$ である．

$n \in \mathbb{N}$ に対し，$B_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^d \mid |f(\lambda)| \le n\}$ とおくと，$E(B_n)H \subset D(A(f))$ である．$E(B_n) \to I$ (作用素の強位相) なので $D(A(f))$ は稠密である． □

次に $x \in D(A(f))$, $y \in H$ に対し，$\varphi(y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) d(E(\lambda)x, y)$ とおきたい．f が最初から単関数 $\sum_n \alpha_n \chi_{B_n}$ $(B_n \in \mathcal{B}^d)$ のときは

$$|\sum_n \alpha_n (E(B_n)x, y)| \le \sum_n |\alpha_n| \|E(B_n)x\| \|E(B_n)y\| \le \sqrt{\sum_n |\alpha_n|^2 \|E(B_n)x\|^2}\|y\|$$

であることから，一般の f についても $|f_n(x)| \le |f(x)|$ となる単関数 f_n で近似することにより，$\varphi(y)$ は存在して

$$|\varphi(y)| \le \sqrt{\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2\, d(E(\lambda)x, x)}\|y\|$$

となっていることがわかる．この φ が反線型であることもすぐにわかるので，Riesz の表現定理より，$A(f)x$ が一意的に取れて $\varphi(y) = (A(f)x, y)$ となる．$A(f)$ が線型であることは容易にわかる．

定理 8.10 この作用素 $A(f)$ について次が成り立つ．

(1) $x \in D(A(f))$, $y \in H$ のとき，$(A(f)x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x, y)$ である．

(2) $x \in D(A(f))$ のとき，$\|A(f)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2\, d(E(\lambda)x, x)$ である．

(3) $B \in \mathcal{B}^d$ に対し，$E(B)A(f) \subset A(f)E(B)$.

(4) f が有界なら $\|A(f)\| \le \sup_\lambda |f(\lambda)|$ である．

(5) $A(f)^* = A(\bar{f})$ である．

(6) $A(f)$ は閉作用素である．

(7) f が実数値なら $A(f)$ は自己共役である．

(8) $D(A(f)+A(g)) = D(A(f+g)) \cap D(A(g))$ であり，$A(f)+A(g) \subset A(f+g)$ である．

(9) $D(A(f)A(g)) = D(A(fg)) \cap D(A(g))$ であり，$A(f)A(g) \subset A(fg)$ である．

(10) 常に $|f(\lambda)| = 1$ であれば $A(f)$ はユニタリである．

(11) f が連続ならば，$\sigma(A(f)) = \overline{f(\mathrm{supp}\, E)}$ である．

証明　(1) 作り方よりわかる．

(2) (1) で，$y = A(f)x$ とおけば，

$$\|A(f)x\|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x, A(f)x) = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2\, d(E(\lambda)x, x)$$

を得る．

(3) $E(B)D(A(f)) \subset D(A(f))$ は容易にわかる．$x \in D(A(f)), y \in H$ のとき，

$$\begin{aligned}(A(f)E(B)x, y) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d(E(\lambda)E(B)x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)\, d(E(\lambda)x, E(B)y) \\ &= (E(B)A(f)x, y)\end{aligned}$$

なので，$E(B)A(f) \subset A(f)E(B)$ である．

(4)

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2\, d(E(\lambda)x, x) \leq \sup_{\lambda} |f(\lambda)|^2 \|x\|^2$$

である．

(5) $D(A(f)) = D(A(\bar{f}))$ は容易にわかる．$x \in D(A(f)), y \in D(A(\bar{f}))$ に対し，

$$(A(f)x, y) = \overline{\int_{\mathbb{R}^d} \overline{f(\lambda)}\, d(E(\lambda)y, x)} = \overline{(A(\bar{f})y, x)} = (x, A(\bar{f})y)$$

なので，$A(\bar{f}) \subset A(f)^*$ である．

$B_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^d \mid |f(\lambda)| \leq n\}$ とおけば $E(B_n)$ は作用素の強位相で I に収束している．あとは f が連続の時と同じ議論で $D(A(f)^*) \subset D(A(\bar{f}))$ が示せる．

(6) (5) より明らかである．

(7) (5) より明らかである．

(8) 定義に戻って考えれば

$$D(A(f) + A(g)) = D(A(f)) \cap D(A(g)) = D(A(f+g)) \cap D(A(g)) \subset D(A(f+g))$$

である．$x \in D(A(f) + A(g))$ の場合に考えれば $(A(f) + A(g))x = A(f+g)x$ がわかる．

(9) $x \in D(A(f)A(g))$ は，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(\lambda)|^2\, d(E(\lambda)x, x) < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2\, d(E(\lambda)A(g)x, A(g)x) < \infty$$

と同値である．これは

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(\lambda)|^2 \, d(E(\lambda)x, x) < \infty, \quad \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 |g(\lambda)|^2 \, d(E(\lambda)x, x) < \infty$$

と同値であり，$x \in D(A(f)A(g)) \cap D(A(g))$ と同値である．

$x \in D(A(f)A(g))$, $y \in H$ に対し

$$\begin{aligned}(A(f)A(g)x, y) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)(E(\lambda)A(g)x, y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)g(\lambda) \, d(E(\lambda)x, y) \\ &= (A(fg)x, y)\end{aligned}$$

を得る．

(10) f が連続の時と同様である．

(11) まず $\overline{f(\text{supp } E)} \subset \sigma(A(f))$ を示す．このため $\alpha \in f(\text{supp } E)$ と仮定すると $\mu \in \text{supp } E$, $f(\mu) = \alpha$ とできる．このとき 任意の正整数 n に対し，$E(B(\mu, 1/n)) \neq 0$ である．(ここで $B(\mu, 1/n)$ は $\mathbb{R}^d$ 内の中心 μ, 半径 $1/n$ の開球である．) そこで $x_n \in E(B(\mu, 1/n))H$, $\|x_n\| = 1$ となるものを取る．このとき f の連続性により

$$\|(A(f) - \alpha I)x_n\|^2 = \int_{B(\mu,1/n)} |f(\lambda) - \alpha|^2 \, d(E(\lambda)x_n, x_n) \leq \max_{\lambda \in B(\mu,1/n)} |f(\lambda) - f(\mu)|^2 \to 0$$

であるが，$\|x_n\| = 1$ なのでこれは $(A(f) - \alpha I)^{-1}$ が有界でないことを示す．つまり $f(\text{supp } E) \subset \sigma(A(f))$ である．両辺の閉包を取って，$\overline{f(\text{supp } E)} \subset \sigma(A(f))$ がわかる．

次に $\alpha \notin \overline{f(\text{supp } E)}$ とする．$\varepsilon > 0$ が存在して，$\lambda \in \text{supp } E$ ならば $|f(\lambda) - \alpha| \geq \varepsilon$ である．

$$T = \int_{\mathbb{R}^d} (f(\lambda) - \alpha)^{-1} \, dE(\lambda) = \int_{\text{supp } E} (f(\lambda) - \alpha)^{-1} \, dE(\lambda)$$

とおくと $\|T\| \leq 1/\varepsilon$ である．$(A(f) - \alpha I)T = I$, $T(A(f) - \alpha I) \subset I$ とあわせて $\alpha \in \rho(A(f))$ である．これで逆向きの包含関係が示せた． □

9　正規作用素，ユニタリ作用素のスペクトル分解

定義 9.1 A を H 上の稠密に定義された閉作用素とする．$AA^* = A^*A$ のとき，A は正規 (normal) であるという．

命題 9.2 有界線型作用素 A が正規となるための必要十分条件は，互いに交換する *2* つの自己共役作用素 B, C によって $A = B + iC$ と書けることである．

証明　直接計算によってわかる． □

命題 9.3 A, B を H 上の有界線型作用素とする．A, B をスペクトル分解して得られる単位の分解をそれぞれ，$E_A(\lambda)$, $E_B(\lambda)$ とする．この時 $AB = BA$ の必要十分条件はすべての λ, μ に対し $E_A(\lambda)E_B(\mu) = E_B(\mu)E_A(\lambda)$ となることである．このとき

$$
\begin{aligned}
A &= \int_{\mathbb{R}^2} \lambda \, d(E_A \otimes E_B)(\lambda, \mu), \\
B &= \int_{\mathbb{R}^2} \mu \, d(E_A \otimes E_B)(\lambda, \mu)
\end{aligned}
$$

となる．ただしここで $E_A \otimes E_B$ は E_A と E_B の直積スペクトル測度である．

証明 $AB = BA$ とする．$A - \lambda I = U_A(\lambda)|A - \lambda I|$, $B - \mu I = U_B(\mu)|B - \mu I|$ と極分解すると，$U_A(\lambda)$ は $B - \mu I$ と可換であるので，$U_A(\lambda)$ は $U_B(\mu)$ と可換である．よって $E_A(\lambda)E_B(\mu)$ と $E_B(\mu)E_A(\lambda)$ は可換である．

逆に $E_A(\lambda)E_B(\mu) = E_B(\mu)E_A(\lambda)$ と仮定する．$(AE_B(\mu)x, y) = (E_B(\mu)Ax, y)$ がまずわかり，次に $(ABx, y) = (BAx, y)$ がわかる．

残りは容易にわかる． □

定理 9.4 A を H 上の有界正規作用素とする．*2* 次元スペクトル測度 E で

$$
A = \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda + i\mu) \, dE(\lambda, \mu)
$$

となるものが一意的に存在する．

証明 有界自己共役作用素 B, C を用いて $A = B + iC$ と書く．B, C をスペクトル分解して得られる単位の分解をそれぞれ，$E_B(\lambda)$, $E_C(\lambda)$ とし，直積スペクトル測度 $E = E_B \otimes E_C$ を用いて，$B = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda \, dE(\lambda, \mu)$, $C = \int_{\mathbb{R}^2} \mu \, dE(\lambda, \mu)$ と書けば結論が出る．

逆に A が上のように書かれていれば，$B = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda \, dE(\lambda, \mu)$, $C = \int_{\mathbb{R}^2} \mu \, dE(\lambda, \mu)$ でなくてはならない．$E_1(J) = E(J \times \mathbb{R})$, $E_2(K) = E(\mathbb{R} \times K)$ とおけば $B = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_1(\lambda)$, $C = \int_{\mathbb{R}} \mu \, dE_2(\mu)$ なので，E_1, E_2 は一意的である．$E(J \times K) = E(J_1)E_2(K)$ より E も一意的である． □

定理 9.5 U を H 上のユニタリ作用素とする．単位の分解 $F(\theta)$ で $\theta < 0$ で $F(\theta) = 0$, $\theta > 2\pi$ で $F(\theta) = I$,

$$
U = \int_0^{2\pi} e^{i\theta} \, dF(\theta)
$$

となるものが一意的に存在する．

証明　U は有界正規なので，

$$U = \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda + i\mu)\, dE(\lambda, \mu)$$

と書ける．$\sigma(U) \subset \{z \mid |z| = 1\}$ なので，supp $E \subset \{\lambda + i\mu \mid \lambda^2 + \mu^2 = 1\}$ である．$0 < \theta \leq 2\pi$ に対し，$S_\theta = \{\cos\alpha + i\sin\alpha \mid 0 < \alpha \leq \theta\}$ とおき，$F(\theta) = E(S_\theta)$ とおく．$F(2\pi) = I$ である．$\theta \leq 0$ で $F(\theta) = 0$, $\theta > 2\pi$ で $F(\theta) = I$ とおくとこれが単位の分解であることが分かる．あとは Lebesgue-Stieltjes 積分としての表示から結論の式を得る．

E の一意性より F も一意的である．□

10　Cayley 変換と自己共役作用素のスペクトル分解

定義 10.1 A を H 上の対称作用素とする．$x \in D(A)$ について

$$\|(A+iI)x\|^2 = (Ax, Ax) - i(Ax, x) + i(x, Ax) + (x, x) = (Ax, Ax) + (x, x) = \|(A - iI)x\|^2$$

であるので，$U(Ax+ix) = Ax-ix$ で作用素 U を定める．上記の等式よりこれは well-defined である．この U を A の Cayley 変換という．

A が自己共役であれば，$\mathrm{Im}(A+iI) = \mathrm{Im}(A-iI) = H$ なので上の U はユニタリであり，$U = (A-iI)(A+iI)^{-1}$ と書ける．$I - U = 2i(A+iI)^{-1}$ なので，$\mathrm{Im}(I-U) = D(A)$, $\mathrm{Ker}(I-U) = 0$ である．$U(A+iI) = A - iI$ の両辺の $*$ を取って $(A-iI)U^* = A + iI$ より $A - iI = (A+iI)U$ である．これより $x \in D(A)$ のとき，$Ux \in D(A)$ であり，$Ax - AUx = i(I+U)x$ である．$x \in H$ に対し，$x_n \in D(A)$, $x_n \to x$ となるものを選ぶと，$(I-U)x_n \to (I-U)x$, $A(I-U)x_n = i(I+U)x_n \to i(I+U)x$ なので $(I-U)x \in D(A)$, $A(I-U)x = i(I+U)x$ となり，結局 H 上で $A(I-U) = i(I+U)$ となる．これより，$A = i(I+U)(I-U)^{-1}$ である．

定理 10.2 A を H 上の自己共役作用素とする．単位の分解 $E(\lambda)$ で $A = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE(\lambda)$ となるものが一意的に存在する．

証明　上のように A の Cayley 変換 U を取り，$U = \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{i\theta}\, dF(\theta)$ とスペクトル分解する．$\mathrm{Ker}(I-U) = 0$ なので $F(\{0\}) = 0$, $F(\{2\pi\}) = 0$ であり，$F(0-0) = 0$, $F(2\pi - 0) = I$ である．

$$B = \int_0^{2\pi} (1 - e^{i\theta})^{-1}\, dF(\theta)$$

とおくと，$B(I-U) = I$, $(I-U)B \subset I$ となり，$B = (I-U)^{-1}$ である．また

$$C = i\int_0^{2\pi} (1+e^{i\theta})(1-e^{i\theta})^{-1}\, dF(\theta) = -\int_0^{2\pi} \cot\frac{\theta}{2}\, dF(\theta)$$

とおけば，$A = i(I+U)(I-U)^{-1} \subset C$ となり，A, C が共に自己共役であることより $A = C$ である．すなわち $A = \int_0^{2\pi} -\cot\frac{\theta}{2}\,dF(\theta)$ となるが，$(0, 2\pi)$ で $-\cot\frac{\theta}{2}$ は $-\infty$ から ∞ まで単調に増加する．これより $-\cot(\theta/2) = \lambda$ と変数変換すれば $F(\theta) = E(\lambda)$ とおくことにより，$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda\,dE(\lambda)$ が Stieltjes 積分と比べることによりわかる．

他に $E'(\lambda)$ が存在したとする．$F'(\theta) = E'(-\cot(\theta/2))$ として，$\theta \geq 2\pi$ で $F'(\theta) = I$，$\theta \leq 0$ で $F'(\theta) = 0$ とおくと単位の分解ができる．これを用いて上のように U' を決めるとこれはユニタリ作用素で，$F'(\{2\pi\}) = 0$ より $\mathrm{Ker}(I - U') = 0$ である．これより $A = i(I+U')(I-U')^{-1}$ で $U' = (A-iI)(A+iI)^{-1}$ となる．よって $U = U'$ であり $F' = F$，$E' = E$ である． $\square$

例 10.3 $H = L^2((0,1))$, $D(A_0) = C_0^\infty((0,1))$, $A_0 f = -if'$ とおく．A_0 は対称作用素であり，したがって可閉である．その閉包を A とおく．前に見たように，$f(x) = e^x$ とおくと $f \in D(A_0^*)$, $A_0^* f = -if$ であり，$\mathrm{Ker}(A_0^* + iI) \neq 0$ なので A は自己共役ではない．

次に A の拡張で自己共役になるものを考える．$g \in L^1((a,b))$ を用いて $x \in [a,b]$ で $f(x) = \int_a^x g(t)\,dt$ と書けるとき f を絶対連続というのであった．このとき f はほとんどいたるところ微分可能であり $f'(x) = g(x)$ a.e. である．また f, g が絶対連続であれば部分積分が可能であり，

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

となる．(f, g は特に連続なので 1 点での値には意味がある．)

$$AC^2([a,b]) = \{f : [a,b] \text{ 上絶対連続}, f' \in L^2((a,b))\}$$

とおく．(微分はほとんどいたるところ定義されている．) $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ に対し，

$$D(A_\alpha) = \{f \in AC^2([0,1]), f(0) = \alpha f(1)\} \subset H,$$

$A_\alpha f = -if'$ とおくと，$A_0 \subset A_\alpha$ である．A_α は A_0 の自己共役な拡張であることを示す．

まず $C_0^\infty((0,1)) \subset D(A_\alpha)$ より，A_α は稠密に定義されている．$f, g \in D(A_\alpha)$ に対し，

$$(A_\alpha f, g) = -i(f(1)\overline{g(1)} - f(0)\overline{g(0)}) + i\int_{-}^{1} f(x)\overline{g'(x)}\,dx = (f, A_\alpha g)$$

より A_α は対称作用素である．

次に A_α は閉作用素であることを示す．$f_n \in D(A_\alpha)$, H で $f_n \to f$, $A_\alpha f_n \to g$ とすると，$f_n(x) = i(A_\alpha f_n, \chi_{[0,x]}) + f_n(0)$ と書けるので $x \in [0,1]$ に対し

$$\lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(0)) = i(g, \chi_{[0,x]})$$

である．さらに

$$\int_0^1 |(A_\alpha f_n, \chi_{[0,x]}) - (g, \chi_{[0,x]})|^2\, dx \le \int_0^1 \|A_\alpha f_n - g\|^2 \|\chi_{[0,x]}\|^2\, dx$$
$$= \frac{1}{2}\|A_\alpha f_n - g\|^2 \to 0$$

なので，上の極限

$$\lim_{n\to\infty}(f_n(x) - f_n(0)) = i(g, \chi_{[0,x]})$$

は L^2 における収束としても成り立っている．すなわち L^2 収束の意味で，$f_n(0) \to f(x) - i(g, \chi_{[0,x]})$ である．部分列 $\{f_{n_k}\}$ を取るとこれはほとんどいたるところ収束するので，

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(0) = f(x) - i(g, \chi_{[0,x]}) \quad \text{a.e.}$$

である．すなわち右辺はほとんどいたるところ定数 C となり，ほとんどいたるところ $f(x) = i\int_0^x g(t)\, dt + C$ である．すなわち f は絶対連続で，ほとんどいたるところ $f' = ig$ であり，すべての x について $f(x) = i\int_0^x g(t)\, dt + C$ である．また

$$\lim_{n\to\infty}(f_n(1) - f_n(0)) = i\int_0^1 g(t)\, dt$$

となり，したがって $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(1) = i\int_0^1 g(t)\, dt + C$ である．これと $f_{n_k}(0) = \alpha f_{n_k}(1)$ で $k\to\infty$ としたものより，$C = \alpha(i\int_0^1 g(t)\, dt + C)$ である．すなわち $f(0) = \alpha f(1)$ となり，$f \in D(A_\alpha)$, $A_\alpha f = -if' = g$ である．これは $\overline{A_\alpha} = A_\alpha$ を意味している．これより，$A = \bar{A}_0 \subset A_\alpha$ もわかる．

次に A_α の固有値を求める．$A_\alpha f = \lambda f$, $f \in D(A_\alpha)$, $\lambda \in \mathbb{C}$ とする．$f'(x) = i\lambda f(x)$ なので $f(x) = ce^{i\lambda x}$ の形しかない．$f(0) = \alpha f(1)$ より定数 0 以外の解があれば $1 = \alpha e^{i\lambda}$ である．$\alpha = e^{i\theta}$ とおくと，$\lambda = 2\pi n - \theta$, $n \in \mathbb{Z}$ である．よって A_α の固有値は $\{2\pi n - \theta \mid n \in \mathbb{Z}\}$ に含まれる．また $f_n(x) = e^{2\pi inx - i\theta x}$ とおくと，$f_n \in D(A_\alpha)$, $A_\alpha f_n = (2\pi n - \theta)f_n$ であるので，結局 A_α の固有値全体の集合は $\{2\pi n - \theta \mid n \in \mathbb{Z}\}$ に等しい．また $\{f_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ が H の完全正規直交系であることは容易にわかる．

さて $g \in \mathrm{Im}(A_\alpha + iI)^\perp$ としよう．すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対し，

$$0 = ((A_\alpha + iI)f_n, g) = (2\pi n - \theta + i)(f_n, g)$$

より $g = 0$, すなわち $\overline{\mathrm{Im}(A_\alpha + iI)} = H$ である．同様に $\overline{\mathrm{Im}(A_\alpha - iI)} = H$ もわかるので A_α は本質的自己共役である．A_α が閉であったことと合わせて A_α は自己共役である．

11 対称作用素の不足指数と自己共役拡張

H 上の次の作用素の集合を考える．H 上の閉対称作用素全体のなす集合を X, H 上の閉部分空間を定義域とする等長作用素 U で $\mathrm{Im}(I - U)$ が稠密であるようなもの全体の集合を Y

とする．Cayley 変換は $A \in X$ に対し $U=(A-iI)(A+iI)^{-1} \in Y$ を対応させるものであった．$U \in Y$ に対して $A=i(I+U)(I-U)^{-1} \in X$ を対応させる写像がこの逆写像であることを示す．

まず $A \in X$ とすると，$U:(A+iI)x \mapsto (A-iI)x$ は well-defined かつ等長なのであった．また A は閉対称で $-i \notin \mathbb{R}$ なので $\mathrm{Im}(A+iI)$ は閉である．$I-U:(A+iI)x \mapsto 2ix$ なのでこの像は $D(A)$ となり，稠密である．また $(I-U)^{-1}: 2ix \mapsto (A+iI)x$, $x \in D(A)$ なので

$$Ax = 2i(I-U)^{-1}x - ix = i(2(I-U)^{-1}x-(I-U)(I-U)^{-1}x) = i(I+U)(I-U)^{-1}x$$

である．

逆に $U \in Y$ とする．まず $\mathrm{Ker}(I-U)=0$ を示す．$x \in D(U)$, $x=Ux$ とすると，$y \in D(U)$ について $0=((I-U)x,y)=(Ux,-y+Uy)$ と $\overline{\mathrm{Im}(I-U)}=H$ より $Ux=0$ すなわち $x=0$ である．次に $A=i(I+U)(I-U)^{-1}$ とおくと $D(A)=\mathrm{Im}(I-U)$ は稠密である．また $x,y \in D(U)$ について

$$\begin{aligned}(A(I-U)x,(I-U)y) &= i((I+U)x,(I-U)y) = i((Ux,y)-(x,Uy)),\\ ((I-U)x,A(I-U)y) &= ((I-U)x,i(I+U)y) = -i(-(Ux,y)+(x,Uy))\end{aligned}$$

なのでこれらは等しく A は対称である．$(I-U)x_n \to y$, $i(I+U)x_n \to z$ とすると，$2x_n \to y-iz$, $2Ux_n \to -y-iz$ となるので，$y-iz \in D(U)$, $U(y-iz)=-y-iz$ である．これより $(I-U)(y-iz)=2y$, $(I+U)(y-iz)=-2iz$ となるので $y \in D(A)$, $Ay=z$ を得る．すなわち A は閉である．さらに $x \in D(U)$ のとき，$(A+iI)(I-U)x=2ix$, $(A-iI)(I-U)x=2iUx$ だから $(A-iI)(A+iI)^{-1}=U$ である．よって A と U の一対一対応が示された．

さらに上の対応で A が自己共役ならば U はユニタリになるのであった．逆に U がユニタリとする．$x \in D(A^*)$, $A^*x=y$ とする．$z \in D(U)=H$ の時に $((I-U)z,y)=(i(I+U)z,x)$ である．これより，$(Uz,Uy-y+iUx+ix)=0$ となる．つまり $ix+iUx-y+Uy=0$ である．これより $(I-U)(-ix-y)=-2ix$ となり，$x \in D(A)$ がわかるので $A=A^*$ となる．すなわち A は自己共役である．

定義 11.1 $(\dim \mathrm{Im}(A+iI)^{\perp}, \dim \mathrm{Im}(A-iI)^{\perp})$ を A の不足指数という．

上の考察より，A が自己共役となるため必要十分条件は不足指数が $(0,0)$ となることである．また $A,B \in X$ と $U,V \in Y$ がそれぞれ対応しているとき，$A \subset B$ となるための必要十分条件は $U \subset V$ である．このことより次の定理を得る．

定理 11.2 H を可分とすると，A が自己共役な拡張を持つための必要十分条件は U がユニタリな拡張を持つことであり，そのための必要十分条件は A の不足指数が (n,n) の形 $(n=1,2,3,\ldots,\infty)$ をしていることがわかる．

例 11.3 $H=\ell^2$, $U((a_1,a_2,a_3,\ldots))=(0,a_1,a_2,a_3,\ldots)$ とする．$(\mathrm{Im}(I-U))^{\perp}=\mathrm{Ker}(I-U^*)=0$ よりこの U に対応する A がある．その不足指数は $(0,1)$ である．また $-A$ の不足指数は $(1,0)$ である．$H \oplus H \oplus \cdots \oplus H$ $(n+m$ 個$)$ 上の作用素 $A \oplus \cdots \oplus A \oplus (-A) \oplus \cdots \oplus (-A)$ $(A$ が n 個，$-A$ が m 個$)$ を考えると，これは閉対称作用素であって，不足指数は (m,n) である．

12　一径数ユニタリ群

定義 12.1 $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ が下記の 3 条件を満たすとき，一径数ユニタリ群という．

(1) $U(t)$ はユニタリ作用素である．

(2) $U(t)$ は t について，作用素の強位相で連続である．

(3) $U(s+t) = U(s)U(t)$ が成り立つ．

命題 12.2 A を自己共役作用素，$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE(\lambda)$ とするとき $U(t) = \exp(itA) = \int_{\mathbb{R}} \exp(it\lambda) \, dE(\lambda)$ とおくと一径数ユニタリ群になる．

証明　(1) はすでにわかっている．

(2) については $x \in H$ に対し，

$$\|(U(t+\varepsilon) - U(t))x\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\exp(i\varepsilon\lambda) - 1|^2 d(E(\lambda)x, x)$$

なので，Lebesgue の収束定理により，$\varepsilon \to 0$ のとき，上式は 0 に収束する．

(3) は

$$U(s+t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(i(s+t)\lambda) \, dE(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} \exp(is\lambda)\exp(it\lambda) \, dE(\lambda) = U(s)U(t)$$

よりわかる．　□

命題 12.3 上の命題の設定の下で，次が成り立つ．

(1) $x \in D(A)$ ならば $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{U(t)x - x}{t} = iAx$ である．

(2) $x \in H$ に対し (1) の極限が存在すれば $x \in D(A)$ である．

(3) $x \in D(A)$, $t \in \mathbb{R}$ ならば $U(t)x \in D(A)$ であり，$\dfrac{dU(t)x}{dt} = iAU(t)x = iU(t)Ax$ が成り立つ．

証明　(1) $x \in D(A)$ のとき，

$$\left\| \frac{U(t) - I}{t} x - iAx \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\exp(it\lambda) - 1}{t} - i\lambda \right|^2 \, d(E(\lambda)x, x)$$

である．$\dfrac{d\exp(it\lambda)}{dt} = i\lambda\exp(it\lambda)$ を用いて評価して $\left|\dfrac{\exp(it\lambda) - 1}{t}\right| \le |\lambda|$ であるので $\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 \, d(E(\lambda)x, x) < \infty$ と合わせて Lebesgue の収束定理が使えて，$t \to 0$ のとき上の積分は 0 に収束する．

(2)

$$\left\| \frac{U(t) - I}{t} x \right\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\exp(it\lambda) - 1}{t} \right|^2 \, d(E(\lambda)x, x)$$

であるが，$t \to 0$ で右辺の極限が存在することから Fatou の補題によって，

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 \, d(E(\lambda)x, x) &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{t\to 0} \left| \frac{\exp(it\lambda) - 1}{t} \right|^2 \, d(E(\lambda)x, x) \\
&\leq \lim_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\exp(it\lambda) - 1}{t} \right|^2 \, d(E(\lambda)x, x) \\
&= \lim_{t\to 0} \left\| \frac{U(t) - I}{t} x \right\|^2 < \infty
\end{aligned}$$

となり，$x \in D(A)$ である．

(3) $x \in D(A)$ のとき，

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \, d(E(\lambda)U(t)x, U(t)x) = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \, d(E(\lambda)x, x) < \infty$$

だから $U(t)x \in D(A)$ である．次に

$$\frac{U(t+\varepsilon) - U(t)}{\varepsilon} = \frac{U(\varepsilon) - I}{\varepsilon} U(t) = U(t) \frac{U(\varepsilon) - I}{\varepsilon}$$

から結論が出る． □

定理 12.4 $\{U(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ が一径数ユニタリ群であれば，$U(t) = \exp(itA)$ となる自己共役作用素 A が一意的に存在する．

証明 $x \in H$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ に対し，$x_f = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(t)U(t) \, dt$ とおく．(積分の意味は Riemann 積分である．) $D = \mathrm{span}\{x_f \mid x \in H, f \in C_0^\infty(\mathbb{R})\}$ とおく．

まず $\bar{D} = H$ であることを示す．$g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $g(t) \geq 0$, $\mathrm{supp}\, g \subset [-1, 1]$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} g(t) \, dt = 1$ となるものを取る．$\varepsilon > 0$ に対して $g_\varepsilon(t) = g(t/\varepsilon)/\varepsilon$ とおく．$\mathrm{supp}\, g_\varepsilon \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$ なので，

$$\begin{aligned}
\|x_{g_\varepsilon} - x\| &= \left\| \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(t)(U(t)x - x) \, dt \right\| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}} g_\varepsilon(t) \, dt \sup_{|t|\leq\varepsilon} \|U(t)x - x\| \\
&= \sup_{|t|\leq\varepsilon} \|U(t)x - x\| \to 0
\end{aligned}$$

である．

次に $x_f \in D$ に対して

$$U(s)x_f = \int_{\mathbb{R}} f(t)U(s)U(t)x \, dt = \int_{\mathbb{R}} f(t)U(s+t)x \, dt$$

より，

$$\begin{aligned}\frac{U(s)x_f - x_f}{s} &= \int_{\mathbb{R}} f(t)\frac{U(s+t)-U(t)}{s}x\,dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t-s)-f(t)}{s}U(t)x\,dt\end{aligned}$$

である．$s \to 0$ のとき $\dfrac{f(t-s)-f(t)}{s} \to -f'(t)$ と，$\dfrac{|f(t-s)-f(t)|}{|s|} \leq \sup|f'(t)|$ を用いて

$$\lim_{s\to 0}\frac{U(s)-I}{s}x_f = -\int_{\mathbb{R}} f'(t)U(t)x\,dt = x_{-f'}$$

となる．そこで D を定義域とする作用素 A_0 を $A_0x_f = -ix_{-f'}$ と定める．これは well-defined である．$U(t)D \subset D$, $A_0D \subset D$ であり，また $U(t)A_0x_f = A_0U(t)x_f$ が成り立つ．さらに $x_f, y_g \in D$ に対し，

$$\begin{aligned}(A_0x_f, y_g) &= \lim_{s\to 0}\left(\frac{U(s)-I}{is}x_f, y_g\right) \\ &= \lim_{s\to 0}\left(x_f, \frac{I-U(-s)}{is}y_g\right) \\ &= (x_f, -iy_{-g'}) = (x_f, A_0g)\end{aligned}$$

となるので A_0 は対称である．

次に $\mathrm{Ker}(A_0^*\pm iI) = 0$ を示せば，$\bar{A}_0$ は自己共役であることがわかる．このため $y \in D(A_0^*)$ が $A_0^*y = iy$ を満たしたとする．このとき任意の $x \in D$ に対して

$$\frac{d}{dt}(U(t)x, y) = (iA_0U(t)x, y) = i(U(t)x, A_0^*y) = (U(t)x, y)$$

となる．つまり $u(t) = (U(t)x, y)$ は $u'(t) = u(t)$ を満たすので，$u(t) = u(0)e^t$ であるが，$u(t)$ は有界なので恒等的に $u(t) = 0$ である．つまり $(x, y) = 0$ となり，$x \in D$ は任意であったことから $y = 0$ を得る．つまり $\mathrm{Ker}(A_0^* - iI) = 0$ であり，同様にして $\mathrm{Ker}(A_0^* + iI) = 0$ もわかる．

そこで $A = \overline{A_0}$ とおくと，これは自己共役作用素なので，$V(t) = \exp(itA)$ によって一径数ユニタリ群が定まる．以下 $U(t) = V(t)$ を示す．$x \in D \subset D(A)$ のとき，$\dfrac{dV(t)x}{dt} = iAV(t)x$ である．これより $U(t)x - V(t)x \in D(A)$ であり，

$$\frac{d}{dt}(U(t)x - V(t)x) = iA_0U(t)x - iAV(t)x = iA(U(t)x - V(t)x)$$

である．$\|U(t)x - V(t)x\|^2$ は微分可能であり，微分したものは

$$(iA(U(t)x - V(t)x), U(t)x - V(t)x) + (U(t)x - V(t)x, iA(U(t)x - V(t)x)) = 0$$

となるので $U(t)x - V(t)x = U(0)x - V(0)x = 0$ である．D の稠密性より $U(t) = V(t)$ である．一意性はすぐにわかる．　□

例 12.5 $\{e_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を H の完全正規直交系とし，$Ae_n = ne_n$ と定める．$\exp(itA)$ は作用素の強位相で連続であるが，ノルムでは連続ではない．どんなに $\delta > 0$ を小さく取っても，$[-\delta, \delta]$ を $\exp(itn)$ で写すと単位円全体になるような n が存在するからである．

例 12.6 $H = L^2(\mathbb{R})$, $A = -i\dfrac{d}{dx}$ とおく．この意味は Fourier 変換によって ξ による掛け算にうつる作用素のことである．これは自己共役である．$\exp(itA)$ は Fourier 変換により $\exp(it\xi)$ による掛け算にうつる．これは Fourier 逆変換すれば，$(\exp(itA)f)(x) = f(x+t)$ ということである．形式的には

$$\exp\left(t\frac{d}{dx}\right) f(x) = f(x) + tf'(x) + \frac{t^2}{2}f''(x) + \cdots = f(x+t)$$

ということである．