1 相位-取向关联的集群振子系统的动力学研究

Δ 聚焦点

1. 环态及其相变
2. 环态的解域与相位同步的关系
3. 数值结果的细致讨论, 分类
4. 必要的理论分析与估计

分析点

1.1 单个粒子的运动问题（无相互作用）

$$\begin{cases} \begin{matrix} \Delta x\left(t\right)=v\cos\theta\Delta t \\ \Delta y\left(t\right)=v\sin\theta\Delta t \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} \dot{x}=v\cos\theta \\ \dot{y}=v\sin\theta \end{matrix} \\ \dot{\theta}_i=\omega_i\rightarrow\theta_i\left(t\right)=\omega_i t \\ v=\sqrt{\dot{x}_i^2+\dot{y}_i^2}=v\left(constant\right) \end{cases}$$

运动半径 = ?

$$\begin{cases} x_i\left(t\right)=x_i\left(0\right)-\frac{v}{\omega_i}\sin\omega_i t \\ y_i\left(t\right)=y_i\left(0\right)-\frac{v}{\omega_i}\cos\omega_i t \end{cases}$$

$$\Rightarrow\left(x_i-x_i^0\right)^2+\left(y_i-y_i^0\right)^2=\left(\frac{v}{\omega_i}\right)^2$$

每个粒子的运动轨迹是一个圆，圆心为 $\left(x_i^0, y_i^0\right)$，半径为 $\frac{v}{\omega_i}$

1.2 考虑相互作用 λ，耦合距离 d_0（$\{A_i j\}$，注意是时变的）

- 看空间聚集过程
- 空间尺度也考虑进去

粒子数 N，$L\times L\sim\sqrt{\frac{L\times L}{N}}\sim\frac{L}{\sqrt{N}}$

1. 每个单粒子的运动空间尺度, $\dfrac{v}{\omega_i}$
2. 耦合距离 d_0
3. 粒子平均间距 $\dfrac{L}{\sqrt{N}}$

$$d_0\sim\frac{L}{\sqrt{N}}\rightarrow d_0\ll\frac{L}{\sqrt{N}}, d_0\gg\frac{L}{\sqrt{N}}$$

低频粒子：$d_0\ll\frac{v}{\omega_i}$ 高频粒子：$d_0\gg\frac{v}{\omega_i}$
在计算空间 pattern 同时，还要跟踪每个粒子的相速度 $\dot{\theta}_i(t)$

2 局部耦合中跨边界坐标的调整

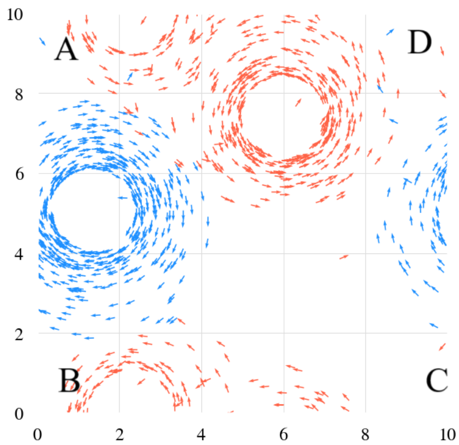

Figure 1: 跨边界坐标的调整

给定 (x_i, y_i), 对于任意的 (x_j, y_j), 做如下变换

$$\bar{x}_j = \begin{cases} x_j, & |x_i - x_j| \le L/2 \\ x_j + L, & x_i - x_j > L/2 \\ x_j - L, & x_j - x_i > L/2 \end{cases}$$

$$\bar{y}_j = \begin{cases} y_j, & |y_i - y_j| \le L/2 \\ y_j + L, & y_i - y_j > L/2 \\ y_j - L, & y_j - y_i > L/2 \end{cases}$$

其中，L 为边界长度. 例如，对于 1中的情况，以 A 为 (x_i, y_i) 时，B 需调整纵坐标，D 需调整横坐标，C 需同时调整横纵坐标.

原始距离为

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

变换后的距离为

$$\bar{d}_{ij} = \sqrt{(x_i - \bar{x}_j)^2 + (y_i - \bar{y}_j)^2}$$

下证 $\bar{d} \le d_{ij}$:

对于 $(x_i - x_j)^2, (x_i - \bar{x}_j)^2$, 若 $x_i \ne \bar{x}_j$, 有

$$\begin{aligned} & (x_i - \bar{x}_j)^2 - (x_i - x_j)^2 \\ & = (x_j \pm L - x_i)^2 - (x_i - x_j)^2 \\ & = L^2 \pm 2L\,(x_j - x_i) \\ & = \begin{cases} L^2 + 2L\,(x_j - x_i)\,, & x_i - x_j > 5 \\ L^2 - 2L\,(x_j - x_i)\,, & x_j - x_i > 5 \end{cases} \\ & < L^2 - 10L \\ & = 0, (L = 10) \end{aligned}$$

即

$$(x_i - \bar{x}_j)^2 < (x_i - x_j)^2, (L = 10, x_i \ne \bar{x}_j)$$

同理可证

$$(y_i - \bar{y}_j)^2 < (y_i - y_j)^2, (L = 10, x_i \neq \bar{x}_j)$$

综上有

$$\bar{d}_{ij} = \sqrt{(x_i - \bar{x}_j)^2 + (y_i - \bar{y}_j)^2} \leq \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} = d_{ij}$$

当且仅当 $x_i = \bar{x}_j$ 且 $y_i = \bar{y}_j$ 时，取等号.
因此

$$\begin{aligned} D_{ij} &= \min\left\{\sqrt{(x_i - \bar{x}_j)^2 + (y_i - \bar{y}_j)^2}, \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}\right\} \\ &= \sqrt{(x_i - \bar{x}_j)^2 + (y_i - \bar{y}_j)^2} \end{aligned}$$