确定旋转物体的转动中心坐标 ($\vec{R}=(X,Y)$)

设转动物体的运动速度 $\vec{v}=\dot{\vec{r}}=(\dot{x},\dot{y})$，考虑 t 与 $t+dt$ $(dt\to 0)$ 时刻，在每一时刻，物体所在位置 $\vec{r}=(x,y)$ 与转动中心 $\vec{R}=(X,Y)$ 的连线~~均垂直~~垂直于速度方向，于是有

t 时刻： $\vec{v}(t)\cdot(\vec{r}(t)-\vec{R})=0.\Rightarrow \vec{v}(t)\cdot\vec{r}(t)-\vec{v}(t)\cdot\vec{0}=0.$

$t+dt$ 时刻： $\vec{v}(t+dt)\cdot(\vec{r}(t+dt)-\vec{R})=0.$

$\longrightarrow \vec{v}(t+dt)\cdot\vec{r}(t+dt)-\vec{v}(t+dt)\cdot\vec{0}=0$

$$\vec{v}(t+dt)\cdot\vec{r}(t+dt)=\dot{x}(t+dt)X+\dot{y}(t+dt)Y$$

$\vec{v}(t)+\dot{\vec{v}}dt$, $\vec{r}(t)+\dot{\vec{r}}dt$, $\dot{x}(t)+\ddot{x}dt$, $\dot{y}(t)+\ddot{y}dt$

$dt\to 0.$

$$\cancel{\vec{v}\cdot\vec{r}}+(\dot{\vec{v}}\cdot\vec{r}+\vec{v}\cdot\dot{\vec{r}})dt+\dot{\vec{v}}\cdot\dot{\vec{r}}(dt)^2 \quad \text{高阶项}$$

$$=\frac{d(\vec{v}\cdot\vec{r})}{dt}dt \qquad \cancel{\dot{x}X+\dot{y}Y}+(\ddot{x}X+\ddot{y}Y)dt$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{(\vec{v}\cdot\vec{r})}=\ddot{x}X+\ddot{y}Y$$

因此可以得到：

$$\left.\begin{aligned}\vec{v}(t)\cdot\vec{r}(t)&=\dot{x}(t)X+\dot{y}(t)Y\\ \frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{r})&=\ddot{x}X+\ddot{y}Y\end{aligned}\right\}$$

令 $\vec{v}\cdot\vec{r}=P$，则有：

$$P=\dot{x}X+\dot{y}Y$$
$$\dot{P}=\ddot{x}X+\ddot{y}Y$$

令 $A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dot{x}&\dot{y}\\\ddot{x}&\ddot{y}\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P\\\dot{P}\end{pmatrix}$

$$\Downarrow$$

线性方程组： $A\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}=B$

求解

$$\boxed{X=\frac{B_1A_{22}-B_2A_{12}}{\det A}\qquad Y=\frac{B_2A_{11}-B_1A_{21}}{\det A}}$$

代入坐标表达式，

$$\left.\begin{aligned} \det A &= \dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}, \\ B_1A_{22} - B_2A_{12} &= p\ddot{y} - \dot{p}\dot{y} \\ B_2A_{11} - B_1A_{21} &= \dot{p}\dot{x} - p\ddot{x} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow$$

$$\boxed{X = \frac{p\ddot{y} - \dot{p}\dot{y}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}, \quad Y = \frac{\dot{p}\dot{x} - p\ddot{x}}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}}$$

其中 $p = \vec{v}\cdot\vec{r} = \dot{x}x + \dot{y}y = \frac{1}{2}\left(\frac{d(r^2)}{dt}\right)$

$$\dot{p} = \ddot{x}x + (\dot{x})^2 + \ddot{y}y + (\dot{y})^2$$