

1 局部耦合中跨边界坐标的调整

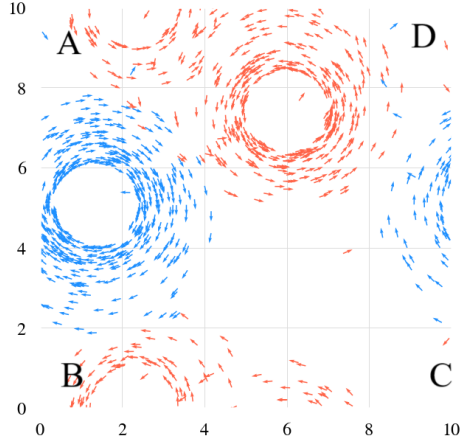


Figure 1: 跨边界坐标的调整

给定 (x_i, y_i) , 对于任意的 (x_j, y_j) , 做如下变换

$$\bar{x}_j = \begin{cases} x_j, & |x_i - x_j| \leq L/2 \\ x_j + L, & x_i - x_j > L/2 \\ x_j - L, & x_j - x_i > L/2 \end{cases}$$

$$\bar{y}_j = \begin{cases} y_j, & |y_i - y_j| \leq L/2 \\ y_j + L, & y_i - y_j > L/2 \\ y_j - L, & y_j - y_i > L/2 \end{cases}$$

其中, L 为边界长度. 例如, 对于1中的情况, 以 A 为 (x_i, y_i) 时, B 需调整纵坐标, D 需调整横坐标, C 需同时调整横纵坐标.

原始距离为

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

变换后的距离为

$$\bar{d}_{ij} = \sqrt{(x_i - \bar{x}_j)^2 + (y_i - \bar{y}_j)^2}$$

下证 $\bar{d}_{ij} \leq d_{ij}$, 即调整后的距离不会大于原始距离.

对于 $(x_i - x_j)^2, (x_i - \bar{x}_j)^2$, 若 $x_i \neq \bar{x}_j$, 有

$$\begin{aligned}
& (x_i - \bar{x}_j)^2 - (x_i - x_j)^2 \\
&= (x_j \pm L - x_i)^2 - (x_i - x_j)^2 \\
&= L^2 \pm 2L(x_j - x_i) \\
&= \begin{cases} L^2 + 2L(x_j - x_i), & x_i - x_j > 5 \\ L^2 - 2L(x_j - x_i), & x_j - x_i > 5 \end{cases} \\
&< L^2 - 10L \\
&= 0, (L = 10)
\end{aligned}$$

即

$$(x_i - \bar{x}_j)^2 < (x_i - x_j)^2, (L = 10, x_i \neq \bar{x}_j)$$

同理可证

$$(y_i - \bar{y}_j)^2 < (y_i - y_j)^2, (L = 10, x_i \neq \bar{x}_j)$$

综上有

$$\bar{d}_{ij} = \sqrt{(x_i - \bar{x}_j)^2 + (y_i - \bar{y}_j)^2} \leq \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} = d_{ij}$$

当且仅当 $x_i = \bar{x}_j$ 且 $y_i = \bar{y}_j$ 时，取等号.

因此

$$\begin{aligned}
D_{ij} &= \min \left\{ \sqrt{(x_i - \bar{x}_j)^2 + (y_i - \bar{y}_j)^2}, \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \right\} \\
&= \sqrt{(x_i - \bar{x}_j)^2 + (y_i - \bar{y}_j)^2}
\end{aligned}$$

2 相位-取向关联的集群振子系统的动力学研究

△ 聚焦点

1. 环态及其相变
2. 环态的解域与相位同步的关系
3. 数值结果的细致讨论, 分类
4. 必要的理论分析与估计

分析点

2.1 单个粒子的运动问题 (无相互作用)

$$\begin{cases} \Delta x(t) = v \cos \theta \Delta t & \rightarrow \dot{x} = v \cos \theta \\ \Delta y(t) = v \sin \theta \Delta t & \dot{y} = v \sin \theta \\ \dot{\theta}_i = \omega_i \rightarrow \theta_i(t) = \omega_i t \\ v = \sqrt{\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2} = v(\text{constant}) \end{cases}$$

运动半径 = ?

$$\begin{cases} x_i(t) = x_i(0) - \frac{v}{\omega_i} \sin \omega_i t \\ y_i(t) = y_i(0) - \frac{v}{\omega_i} \cos \omega_i t \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x_i - x_i^0)^2 + (y_i - y_i^0)^2 = \left(\frac{v}{\omega_i}\right)^2$$

每个粒子的运动轨迹是一个圆, 圆心为 (x_i^0, y_i^0) , 半径为 $\frac{v}{\omega_i}$

2.2 考虑相互作用 λ , 耦合距离 d_0 ($\{A_{ij}\}$, 注意是时变的)

- 看空间聚集过程
- 空间尺度也考虑进去

$$\text{粒子数 } N, L \times L \sim \sqrt{\frac{L \times L}{N}} \sim \frac{L}{\sqrt{N}}$$

1. 每个单粒子的运动空间尺度, $\frac{v}{\omega_i}$
2. 耦合距离 d_0
3. 粒子平均间距 $\frac{L}{\sqrt{N}}$

$$d_0 \sim \frac{L}{\sqrt{N}} \rightarrow d_0 \ll \frac{L}{\sqrt{N}}, d_0 \gg \frac{L}{\sqrt{N}}$$

低频粒子: $d_0 \ll \frac{v}{\omega_i}$ 高频粒子: $d_0 \gg \frac{v}{\omega_i}$

在计算空间 pattern 同时, 还要跟踪每个粒子的相速度 $\dot{\theta}_i(t)$

2.3 序参量 Order Parameter

2.3.1 相位单位圆

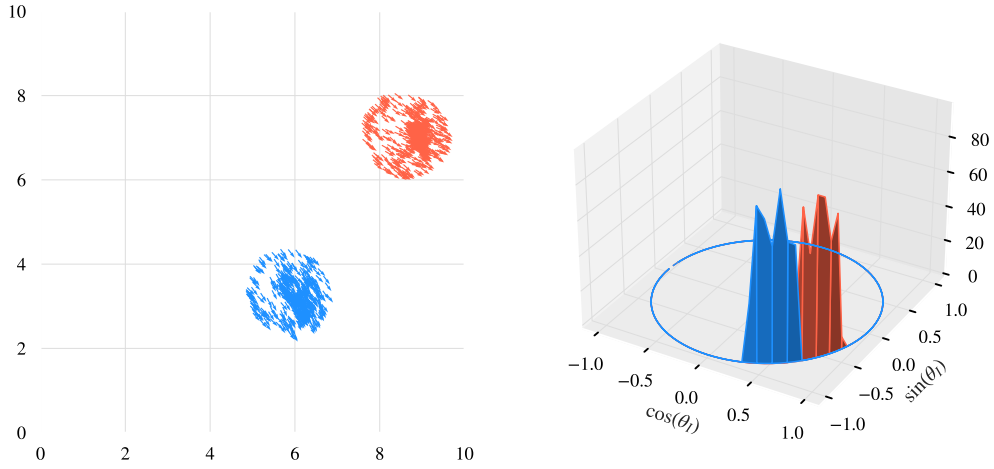


Figure 2: 相位单位圆

z 轴表示单位圆上相位处于该区间的粒子数, 类似于分布.

2.3.2 每个粒子旋转质心的坐标

对于任意的粒子 i , 其当前坐标为 (x_i, y_i) , 相速度为 $\dot{\theta}_i$, 假设从当前时刻开始, 其相速度不变, 即 $\dot{\theta}_i$ 为常数, 记录该粒子在一个周期 (2π) 内的运动轨迹, 即 $2\pi/\dot{\theta}_i$ 时间内, 以当前坐标 (x_i, y_i) 为起点, 以 $\{v \cos \theta_i, v \sin \theta_i\}$ 为速度, 运动得到的轨迹, 以轨迹上点坐标的算数平均作为该粒子的旋转质心坐标, 即

$$\begin{cases} \bar{x}_i = \frac{1}{2\pi/\dot{\theta}_i} \int_0^{2\pi/\dot{\theta}_i} (x_i + v \cos \theta_i t) dt \\ \bar{y}_i = \frac{1}{2\pi/\dot{\theta}_i} \int_0^{2\pi/\dot{\theta}_i} (y_i + v \sin \theta_i t) dt \end{cases}$$

由上式计算得到的每个状态的旋转质心坐标, 见附录3, 图

以轨迹上点距离旋转质心的距离的算数平均作为该粒子的旋转半径, 即

$$\bar{r}_i = \frac{1}{2\pi/\dot{\theta}_i} \int_0^{2\pi/\dot{\theta}_i} \sqrt{(x_i + v \cos \theta_i t - \bar{x}_i)^2 + (y_i + v \sin \theta_i t - \bar{y}_i)^2} dt$$

此外，还可以计算每个旋转质心距离原点的距离，即

$$d_i = \sqrt{\bar{x}_i^2 + \bar{y}_i^2}$$

2.3.3 序参量的定义

旋转质心距离原点的距离标准差

$$\sigma_d = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (d_i - \bar{d})^2}$$

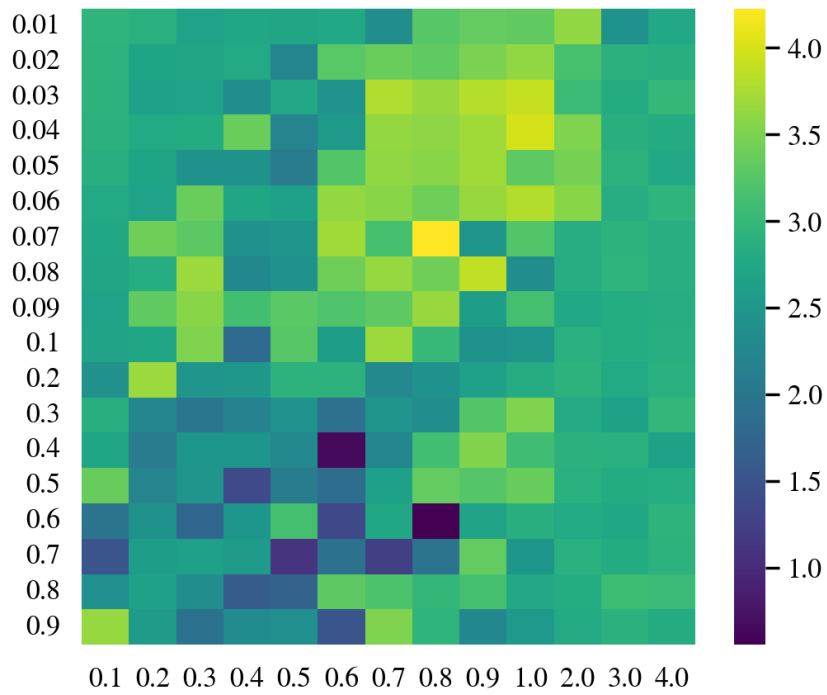


Figure 3: 旋转质心原点距离标准差

旋转质心邻域内的其余质点数

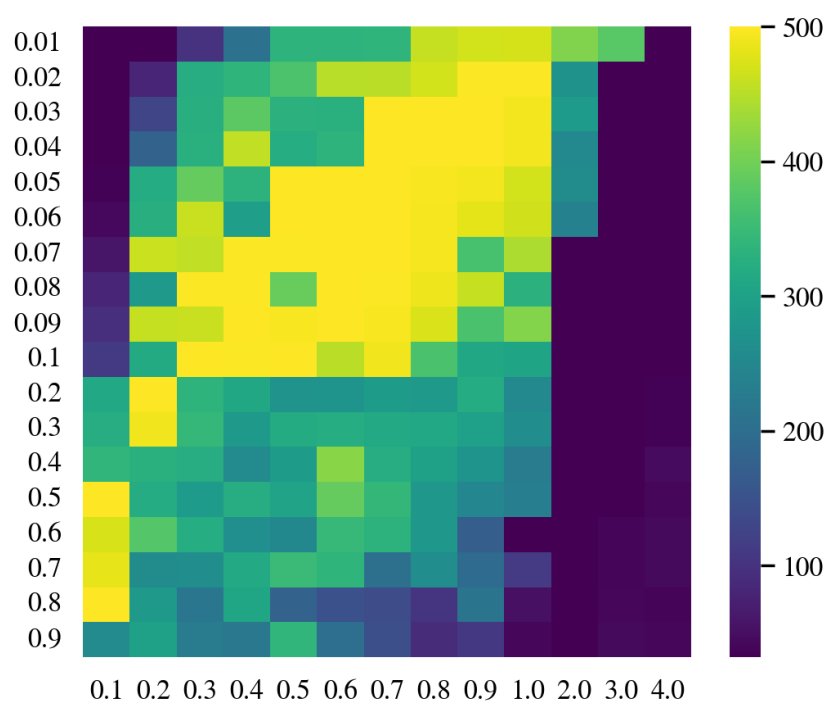


Figure 4: 旋转质心原点距离标准差

3 附录