

0.1 Swarmalator dynamics under global interaction

在全局作用下的 Swarmalator 动力学

α 被设置为 1，相当于对空间距离做了单位化。而 β 设置为 2，这满足上面提到的条件，在相同的距离下，空间斥力应该比吸引力更大，否则会发生碰撞。另外在相位上，相似空间距离的相互作用函数 G 被设置为了空间绝对距离的倒数，也就是距离越小，相互作用越大。

相似相位的空间吸引力又由 F_{att} 来决定，并且不考虑相似相位对空间上斥力的影响 F_{rep} ，也就是说 F_{rep} 恒等于 1。在 $F_{att}=1+J\cos(\theta)$ 中，如果 J 为正，那么相近相位的个体就会相互吸引，反之如果是负，相反相位的才会相互吸引，

把 J 的取值范围设置为 $(-1, 1)$ 这样 F_{att} 的取值是严格正的。相位之间的相互作用遵循 Kuramoto 模型，也就是相位差的正弦函数，相位差越大，相互作用力越小，相位差越小，相互作用力越大。

在这里 swarmalators 设置相同的速度与振动频率，且全部为 0。得到的模型如图 (7) 和 (8)

在这里，swarmalators 之间在空间和相位上的相互作用是全连接的，也就是说每个个体都会受到其他个体的影响。

可变参数 J 和 K 的取值决定了模型在长期动力学上的状态，分别是图 1 所示的 5 个，分别是“静态同步”，“静态异步”，“静态相位波”，“分裂相位波”，“活跃相位波”

在稳定状态下，swarmalators 的空间运动和相位都静止。在 $K>0$ 时，都是“静态同步”状态。相位的耦合强度 K 的值取值为正，使得个体的相位差越来越小，最终同步。

在 $K<0$ 时，有“静态异步”，“分裂相位波”，“活跃相位波”三种状态，在后两种状态下，swarmalators 表现出在空间中持续运动，并且他们的相位也在保持变化，所以他们被称为活跃状态。

在没有相位耦合的情况下，也就是 $K=0$ 时，swarmalators 的相位被锁定在初值上，对于 $J>0$ ，swarmalators 会在 2 维平面内跑列成环形。

swarmalators 的初始位置从 $[-1, 1] \times [-1, 1]$ 的范围内随机选取，初始相位从 $[0, 2\pi]$ 的范围内随机选取。

0.1.1 序参量

序参量是一个复数，它的模长代表了群体的同步程度，而它的辐角代表了群体的相位。这里 Φ 被是 swarmalators 的平均相位， $R \in [0, 1]$ 衡量了单元之间的相位相干性。

在稳定同步状态中，所有的 swarmalators 的相位都是相同的， R 的值为 1。在另外四种状态中， R 严格小于 1，因为相位没有同步。

相位 θ_i 和空间角度 ϕ_i 的相关性由另一个序参量衡量

根据定义，如果 S 的值非零，那么相位和空间角度是相关的。在静态相位波状态下，相位与空间角度完全相关，我的理解是因为相位和空间角度都是周期性的，此时 S 的值为 1。当 K 值从 0 减小到负值时，相关性减小，最终在静态异步状态下达到最小值 0，swarmalators 的相位均匀分布在 0 到 2π 之间。

静态异步在超过临界相耦合强度 $K_c = -1.2J$ 后失去了稳定性。 S 值非零，但严格小于 1

在分裂相波状态下，振荡器分裂成簇，在每个簇内，波动器移动，相位在其平均值附近振荡。Swarmalators 不会从一个集群移动到另一个集群，也不会形成不相交的集群。这类集群的数量和每个集群内的数量取决于初始条件。

在活跃相位波状态下，团簇的形成消失，并在相位和空间角度上执行有规律的圆周运动。

0.1.2 相位相似性对空间吸引和排斥力的影响

在静态相位波状态下，相位与空间角度完全相关。因此，这种状态被称为环相波。

0.1.3 在外力作用下的 swarmalators

和同步中队外力感染研究类似，swarmalators 在外力干扰的情况下也会表现出一些性质，当刺激器振幅增加时，靠近中心的 swarmalators 开始与外部频率 Ω 同步。随着 F 的增加，经历了从部分同步到完全同步的相变（5 个状态）。在静态同步状态下，刺激位置附近的振荡器与刺激位置同步，在刺激位置周围形成小簇。

0.2 Dynamics under local interaction

在局部作用下的动力学

在前一节中，我们研究了它们之间的空间和相位相互作用是全局的波动器。但是，在现实中，大多数现实世界的多代理系统都表现出代理之间的局部邻居交互。

现在 *swarmalators* 只在一个有限的范围 r 内和它们的邻居相互作用。当 r 趋于无穷时，局部相互作用变成全局相互作用，表现出和之前相似的 5 种状态。当考虑 r 的有限值时，系统显示出有趣的结果。当 $r > D_\infty$ 时，观察到许多稳定状态的复制。这种出现多个副本的原因是：

一旦一组 *swarmalators* 聚集在半径为 r 的圆形区域，在那里它们与其他物体相距最小距离 r ，它们就独立地进化为一个独立的群体。遵循和 r 趋向于无穷，即全局相互作用的情况相同的动力学

因此，两组之间的最小分离是 D_∞ 。对于 $r < D_\infty$ ，发现了静态同步和静态异步状态的异常版本。在 r 的一定时间间隔内 ($1 < r < 1.8$)，在静态相位波状态下出现了条状模式。如果我们考虑 *swarmalators* 之间的局部吸引相位耦合，可以观察到出现多个不相同的静态簇。

0.3 Competitive phase interaction 竞争性质的相位相互作用

到目前为止，我们已经讨论了振荡器的长期状态的结果，其中单元之间的相位耦合要么是正的（吸引的），要么是负的（排斥的）。但许多系统的各单元间的耦合特性往往更为复杂。

在这篇文献种，第 i 个和第 j 个 *swarmalators* 之间的相位耦合强度 K_{ij} 从双峰分布中随机选择。其中 K_a 和 K_r 分别为吸引耦合强度和排斥耦合强度， p 为吸引耦合的概率。