



ทฤษฎีกราฟ

สมาชิก

นายกิตติกานต์	เอียดใหญ่	รหัส 6604101306	เลขที่ 6
นายธนพัทร	บุญผัด	รหัส 6604101330	เลขที่ 27
นายธนภัทร	ตาสาย	รหัส 6604101331	เลขที่ 28
นายธนวัฒน์	ศรีลาคำ	รหัส 6604101332	เลขที่ 29
นายธนวัตร	ศิริเทศ	รหัส 6604101333	เลขที่ 30
นางสาวธมลวรรณ	ใจเป็ง	รหัส 6604101334	เลขที่ 31
นางสาวนิศารัตน์	นันติ	รหัส 6604101343	เลขที่ 40
นายพงศกร	ทนานนท์	รหัส 6604101353	เลขที่ 50
นายภริภัทร์	ขอดแก้ว	รหัส 6604101368	เลขที่ 65
นายศุภวิทย์	วงศ์สุภา	รหัส 6604101384	เลขที่ 80
นายสิรินนท์		รหัส 6604101388	เลขที่ 84
นายปราวิท	ประภาวรารัตน์	รหัส 6604101408	เลขที่ 102

อาจารย์ที่ปรึกษา

อาจารย์ ดร.พยุงค์กดี เกษมสำราญ

รายงานนี้เป็นส่วนหนึ่งของการเรียนรายวิชา 10301113 คณิตศาสตร์ดิสครีต

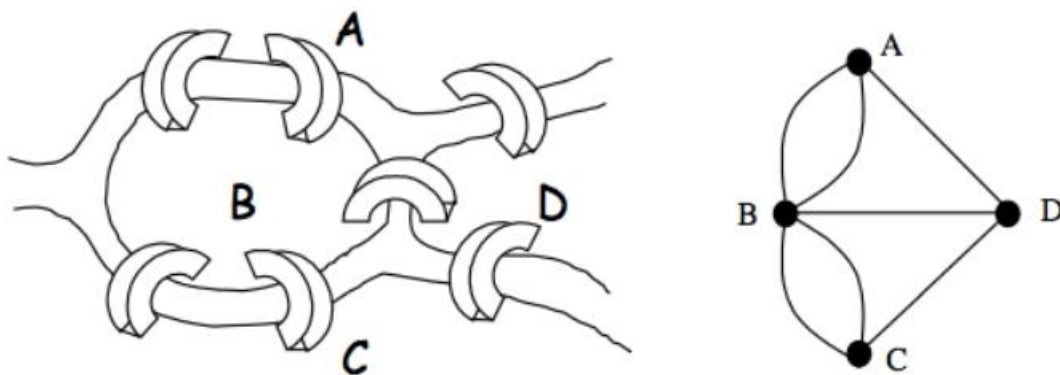
ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2565

ทฤษฎีกราฟ

วัตถุประสงค์

1. เข้าใจนิยามของกราฟประเภทต่างๆ และนิยามที่เกี่ยวข้อง
2. เข้าใจทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับกราฟและสามารถนำไปใช้ได้
3. เข้าใจวิธีการแทนกราฟด้วยเมตริกซ์ประชิด

ทฤษฎีกราฟนั้น มีจุดเริ่มจากผลงานตีพิมพ์ของ เลออนฮาร์ด ออยเลอร์ ภายใต้ชื่อ *Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis* ในปี ค.ศ. 1736 (พ.ศ. 2279) หรือที่รู้จักกันในนาม ปัญหาสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองโคนิกส์เบิร์ก (Seven Bridges of Königsberg) เขาสนใจวิธีที่จะข้ามสะพานทั้ง 7 แห่งนี้ โดยข้ามแต่ละสะพานเพียงครั้งเดียวเท่านั้น (ซึ่งออยเลอร์ได้ตีพิมพ์ผลงานที่แสดงให้เห็นว่าเป็นไปไม่ได้) ดังรูป



รูปภาพ ที่ 1.1 ปัญหาสะพานทั้งเจ็ดแห่งเมืองโคนิกส์เบิร์ก (Seven Bridges of Königsberg)

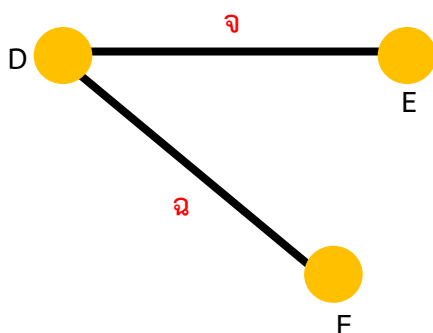
4.1 การนำกราฟไปใช้งาน

1. ใช้ในการวิเคราะห์ความสัมพันธ์ระหว่างบุคคล
2. ใช้ในการแสดงแผนที่รถไฟ
3. ใช้วิเคราะห์ข้อมูลเชิงธุรกิจ

4.2 บทนิยามกราฟ

กราฟใดๆ ประกอบด้วย เซตของ จุดยอด (Vertex; Vertices) ที่ไม่เป็นเซตว่างและเซตของเส้นเชื่อม (Edge) ที่เชื่อมต่อระหว่างจุดยอดเหล่านั้น เขียน แทนด้วย $G = (V, E)$

ตัวอย่าง



$G_1 = (V, E)$ โดยที่ $V = \{D, E, F\}$ $E = \{จ, ฉ\}$

หมายเหตุ V คือจุดยอด และ E คือ เส้นเชื่อม

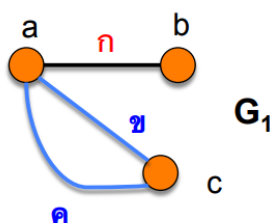
นิยาม : เส้นเชื่อมขนาน

ระหว่างจุดยอดสองจุดใดๆ บนกราฟ G เรียกได้ว่ามีเส้นเชื่อม ขนานก็ต่อเมื่อระหว่างจุดยอดสองจุดนั้นมีเส้นเชื่อมมากกว่า 1 เส้นเส้นเชื่อม $ข$ และ $ค$ คือเส้นเชื่อมที่ขนานกัน

$G_1 = (V, E)$ โดยที่

$V = \{a, b, c\}$

$E = \{ก, ข, ค\}$



รูปภาพ ที่ 2.1 กราฟเส้นเชื่อมขนาน

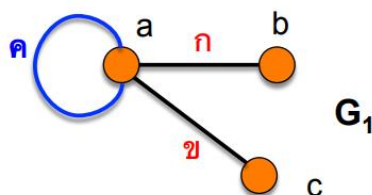
นิยาม : วงวน

เส้นเชื่อมที่มีจุดยอดเป็นจุดเดียวกันเรียกว่า วงวน หรือ ลูปเส้นเชื่อม $ค$ คือเส้นเชื่อมที่เรียกว่า วงวน หรือ ลูป โดยเชื่อมระหว่างจุด ยอด a กับจุดยอด a

$G_1 = (V, E)$ โดยที่

$V = \{a, b, c\}$

$E = \{ก, ข, ค\}$



รูปภาพ ที่ 2.2 กราฟวงวน

นิยาม : ดีกรี

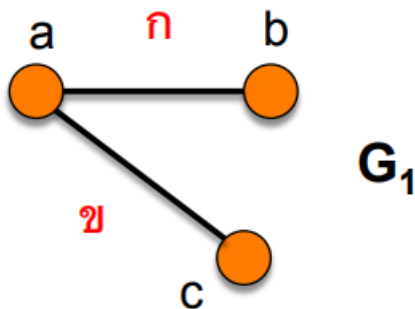
ดีกรีของจุดยอดใดๆ คือ จำนวนเส้นเชื่อม ที่เชื่อมต่ออยู่กับจุดยอดนั้นๆ ดีกรีของจุดยอด a ใดๆ เขียนแทนด้วย $\deg(a)$ $G_1 = (V, E)$

โดยที่ดีกรีของแต่ละจุดยอดคือ

$$\deg(a) = 2$$

$$\deg(b) = 1$$

$$\deg(c) = 1$$



รูปภาพ ที่ 2.3 กราฟแสดงเส้นดีกรี

ประเภทของกราฟ

แบ่งตามลักษณะของเส้นเชื่อม

กราฟไม่ระบุทิศทาง (Undirected Graph)

กราฟระบุทิศทาง (Directed Graph : Digraph)

แบ่งตามลักษณะโดยรวมของกราฟ

นิยาม : กราฟเชิงเดียว (Simple Graph)

นิยาม : กราฟหลายทาง (Multi Graph)

นิยาม : กราฟเทียม (Pseudo Graph)

นิยาม : กราฟสมบูรณ์ (Complete Graph)

แบ่งตามลักษณะของเส้นเชื่อม

กราฟไม่ระบุทิศทาง (Undirected Graph) ลำดับของจุดยอดภายในคู่อันดับที่แสดงแทนเส้นเชื่อมไม่มีความสำคัญ หมายถึง เส้นเชื่อม (a, b) มีค่าเท่ากับ (b, a)

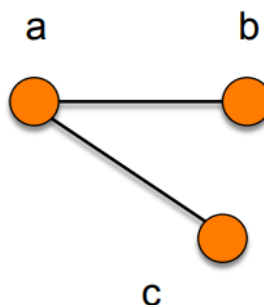
ในรูปจะแทนเส้นเชื่อมด้วยเส้นที่ไม่มีลูกศร

$G = (V, E)$ โดยที่

$V = \{a, b, c\}$

$E = \{(a, b), (a, c)\}$ หรือ

$E = \{(b, a), (c, a)\}$ เป็นต้น



รูปภาพ ที่ 2.4 กราฟไม่ระบุทิศทาง

ทฤษฎีบทสำหรับกราฟไม่ระบุทิศทาง

$G = (V, E)$ ใดๆ ผลรวมของดีกรีทุกๆ จุดยอดในกราฟ จะเป็น 2 เท่าของ จำนวนเส้นเชื่อม นั่นคือ

$2|E| = \sum \deg(a)$ โดยที่ a เป็นสมาชิกของ V

$G_1 = (V, E)$ โดยที่ $|E| = 2$

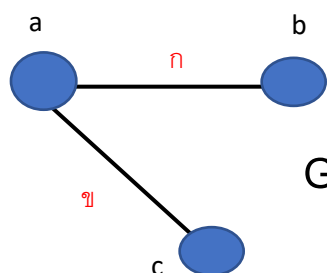
$\deg(a) = 2$

$\deg(b) = 1$

$\deg(c) = 1$

ผลรวมของดีกรีทั้งหมด = $2+1+1 = 4$

ได้ว่า $2*|E| = 4$ เท่ากับ ผลรวมของดีกรีทั้งหมด



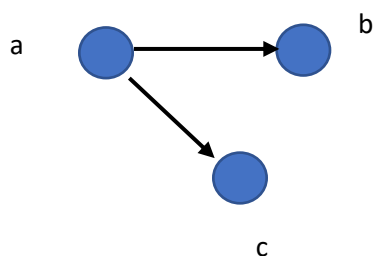
รูปภาพ ที่ 2.5 กราฟไม่ระบุทิศทาง

กราฟระบุทิศทาง (Directed Graph :Digraph)

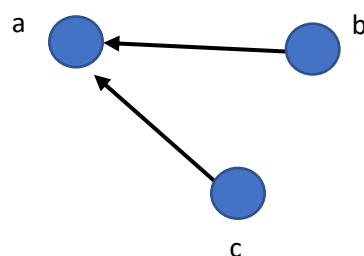
ลำดับของจุดยอดภายในคู่อันดับที่แสดงแทนเส้นเชื่อมมีความสำคัญหมายถึง เส้นเชื่อม (a, b) มีค่าไม่เท่ากับ (b, a) โดย (a, b) แทน เส้นเชื่อมที่มีทิศทางจาก จุดยอด a ไปยังจุดยอด b (b, a) แทน เส้นเชื่อมที่มีทิศทางจาก จุดยอด b ไปยังจุดยอด a

$G_1 = (V_1, E_1)$ โดยที่ $V_1 = \{a, b, c\}$ $E_1 = \{(a, b), (a, c)\}$

$G_2 = (V_2, E_2)$ โดยที่ $V_2 = \{a, b, c\}$ $E_2 = \{(b, a), (c, a)\}$



G

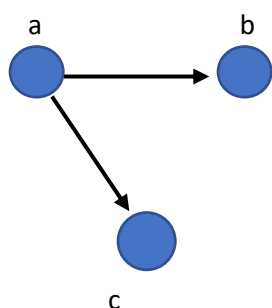


G

นิยาม

ดีกรีเข้า (In-Degree) ของจุดยอด a ใดๆ ในกราฟระบุทิศทาง หมายถึง จำนวนเส้นเชื่อม ที่มี a เป็นสมาชิกตัวหลังของคู่อันดับ

ดีกรีออก (Out-Degree) ของจุดยอด a ใดๆ ในกราฟระบุทิศทาง หมายถึง จำนวนเส้นเชื่อม ที่มี a เป็นสมาชิกตัวหน้าของคู่อันดับ



G

$G1 = (V1, E1)$ โดยที่

โดยที่ $V1 = \{a, b, c\}$

และ $E1 = \{(a, b), (a, c)\}$

แบ่งตามลักษณะโดยรวมของกราฟ

นิยาม : กราฟเชิงเดียว (Simple Graph)

นิยาม : กราฟหลายทาง (Multi Graph)

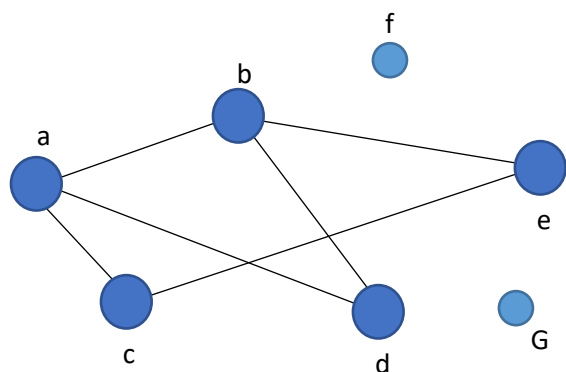
นิยาม : กราฟเทียม (Pseudo Graph)

นิยาม : กราฟสมบูรณ์ (Complete Graph)

นิยาม : กราฟเชิงเดียว (Simple Graph)

นิยาม : กราฟเชิงเดียว (กราฟอย่างง่าย : Simple Graph) เรียกกราฟ $G = (V, E)$ ว่ากราฟเชิงเดียว หรือ กราฟอย่างง่าย ก็ต่อเมื่อ G เป็นกราฟที่ไม่มีเส้นเชื่อมขนาน และไม่มีวงวน

ตัวอย่างกราฟเชิงเดียว

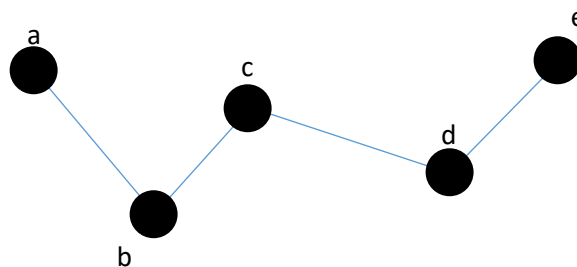


$$V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$$

$$|V(G)| = 7$$

$$E(G) = \{ab, ac, ad, bd, be, ce\}$$

$$|E(G)| = 6$$



$$V(G) = \{a, b, c, d, e\}$$

$$|V(G)| = 5$$

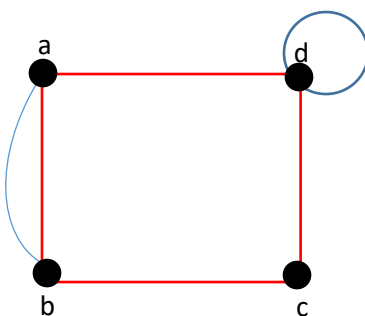
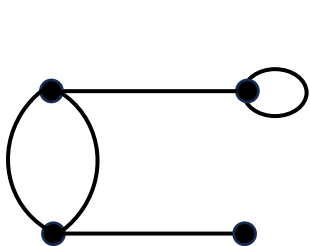
$$E(G) = \{ab, bc, cd, de\}$$

$$|E(G)| = 4$$

กราฟหลายทาง (Multi Graph)

คือ กราฟที่มีวงวน หรือมีเส้นเชื่อมขนาน

นิยาม : กราฟหลายทาง (Multi Graph) เรียกกราฟ $G = (V, E)$ ว่ากราฟหลายทางก็ต่อเมื่อ G เป็นกราฟที่มีเส้นเชื่อมขนานสำหรับบางคู่ของจุดยอด



$$V(G) = \{a, b, c, d\}$$

$$|V(G)| = 4$$

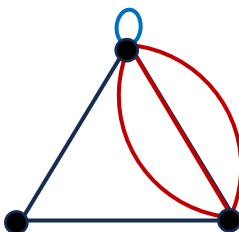
$$E(G) = \{ab, ab, ad, bc, cd, dd\}$$

$$|E(G)| = 6$$

กราฟเทียม (Pseudo Graph)

คือ กราฟที่ไม่ระบุทิศทาง, มีเส้นเชื่อมพหุ, มีการวนซ้ำ



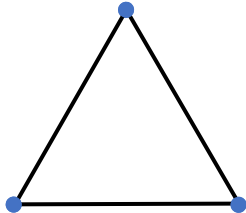
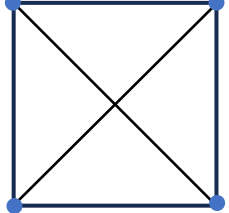
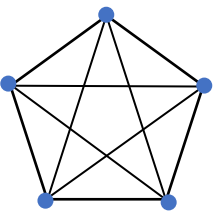
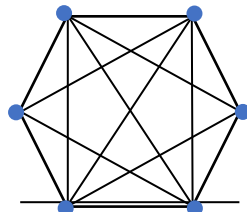
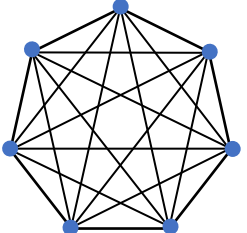
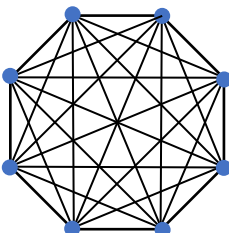
นิยาม : กราฟเทียม (Pseudo Graph) เรียกกราฟ $G = (V, E)$ ว่ากราฟเทียมก็ต่อเมื่อ G เป็นกราฟที่มีเส้นเชื่อมขนานสำหรับบางคู่ของจุดยอด หรือมีวงวนสำหรับบางจุดยอด (ดังนั้น กราฟหลายทางทกกราฟเป็นกราฟเทียม)



กราฟสมบูรณ์ (Complete graph)

คือ กราฟที่ทุกคู่ของจุดยอดถูกเชื่อมต่อด้วยเส้น เป็นกราฟสม่ำเสมอที่มีระดับชั้น $n - 1$ กราฟสมบูรณ์บนจุดยอด n จุดใช้สัญลักษณ์ K_n มี n จุดยอด, และ $\frac{n(n-1)}{2}$ เส้นเชื่อม

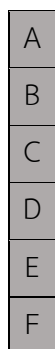
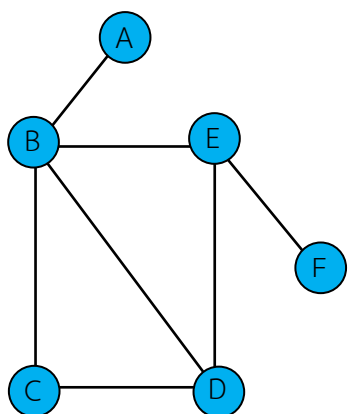
นิยาม : กราฟสมบูรณ์ก็เป็นลักษณะเดียวกับกราฟ ต่างกันที่เส้นเชื่อมแต่ละเส้นจะถูกแทนด้วยเส้นเชื่อมระบุทิศทาง 2 เส้น ในทิศทางตรงกันข้าม

$k_1: 0$	$k_2: 1$	$k_3: 3$	$k_4: 6$
			
$k_5: 10$	$k_6: 15$	$k_7: 21$	$k_8: 28$
			

เมตริกซ์ประชิด (Adjacency matrix)

คือ โครงสร้างของกราฟเป็นโครงสร้างที่ประกอบไปด้วยโหนด และเส้นเชื่อมต่อบอกถึงเส้นทางของการเดินทาง หรือความสัมพันธ์ในทิศทางซึ่งสามารถนำมาแทนความสัมพันธ์นั้นด้วยเมตริกซ์ได้ด้วยการกำหนดเมตริกซ์

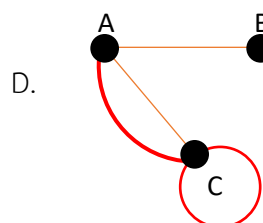
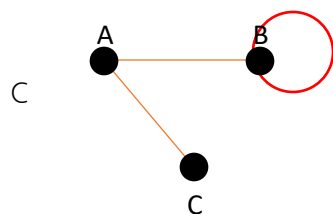
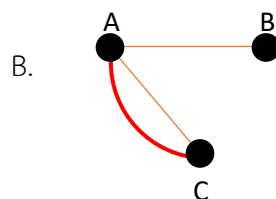
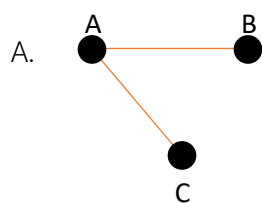
นิยาม : เมตริกซ์ประชิดจะใช้เวกเตอร์ (อาร์เรย์หนึ่งมิติ) เพื่อจัดเก็บเวอร์เท็กซ์และใช้เมตริกซ์(อาร์เรย์สองมิติ) เพื่อจัดเก็บเอดจ์ ถ้าหากเวอร์เท็กซ์คู่หนึ่งอยู่ประชิดกันและมีเอดจ์เชื่อมโยงระหว่างเวอร์เท็กซ์คู่นั้น เมตริกซ์คู่นั้นจะมีค่าเป็น 1 ในขณะที่หากไม่มีเอดจ์เชื่อมโยงนั้นหมายถึงไม่มีเส้นทางระหว่างกัน เมตริกซ์คู่นั้นก็จะถูกกำหนดให้ มีค่าเท่ากับ 0 ในกรณีเป็นกราฟแบบมีทิศทางหรือไดกราฟ เมตริกซ์ประชิดจะมีลูกศรเป็นตัวกำหนดทิศทาง



	A	B	C	D	E	F
A	0	1	0	0	0	0
B	0	0	1	0	1	0
C	0	0	0	1	1	0
D	0	0	0	0	0	0
E	0	0	0	1	0	1
F	0	0	0	0	0	0

โจทย์ข้อสอบคณิตศาสตร์ดีสคริต 10 ข้อ เรื่อง ทฤษฎีกราฟ

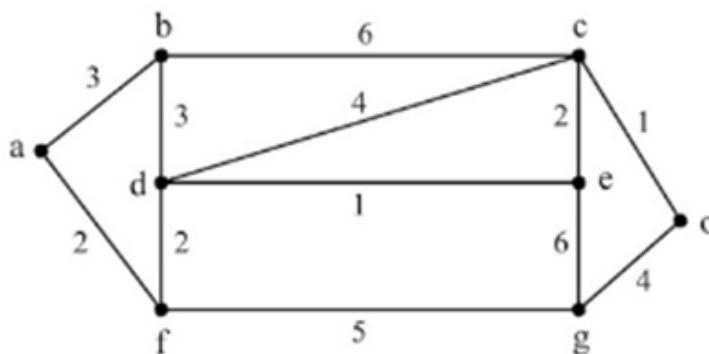
1. ข้อใดต่อไปนี้เป็นกราฟเชิงเดียว



2. จงหาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่กราฟจะมีดีกรีของจุดต่างๆดังนี้ 1, 1, 4, 4 และ 6 ถ้าเป็นไปได้จงหาจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟนี้

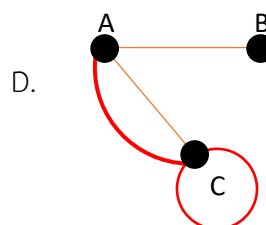
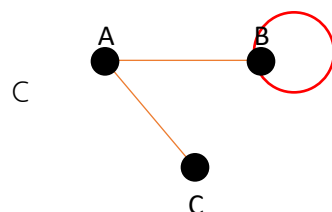
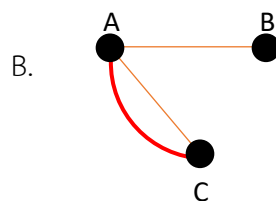
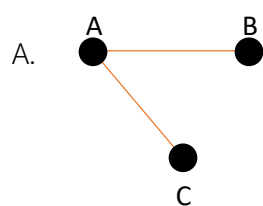
3. กราฟ G มี 14 จุดยอดและมี 27 เส้นเชื่อม โดยดีกรีของจุดยอดของกราฟ G ได้แก่ 3, 4, 5 ซึ่งมี 6 จุดยอด ที่ดีกรีเท่ากับ 4 จงหาว่าจุดที่มีดีกรีเท่ากับ 3 และ ดีกรีเท่ากับ 5 มีอย่างละกี่จุด

4. กำหนดกราฟแสดงเส้นทางที่นายศรธรรม ขับรถออกจากบ้าน (a) ไปยังที่ทำงาน (o) โดย ให้จุดยอดแทนแยกของถนน เส้นเชื่อมแทนระยะทาง ระหว่างทางแยกเป็นกิโลเมตร นายศรธรรมต้องการหาเส้นทางที่ทำให้เขาไปทำงานโดยเสียค่าใช้จ่ายให้น้อยที่สุด (ระยะทางสั้นที่สุด) จงหาเส้นทางที่เขาจะขับผ่าน



รูปภาพที่ 4.1 รูปแสดงเส้นทางและจุดยอดแต่ละจุดของโจทย์ข้อ 4

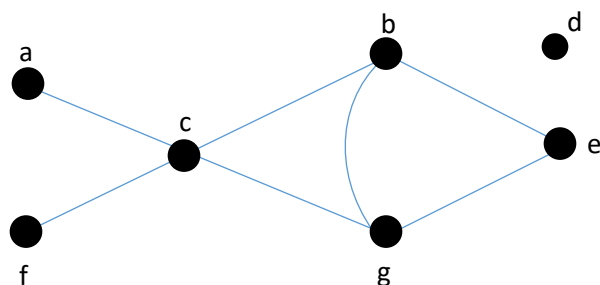
5. ข้อใดต่อไปนี้เป็นกราฟวงวน



6. ให้ G เป็นกราฟ ซึ่งประกอบด้วยเซตของจุดยอด V และเซตของเส้นเชื่อม E ดังนี้

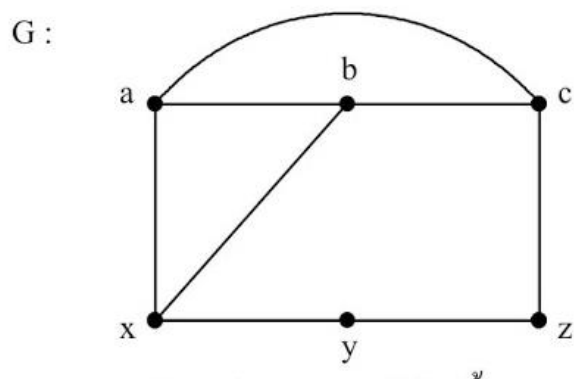
$V = \{A, B, C, D, E\}$, $E = \{AB, AC, AD, BC, DE\}$ จงเขียนกราฟ G

7. จงเขียน จำนวนจุดยอด และ เส้นเชื่อมทั้งหมดของรูปภาพนี้



8. กราฟ H มีจุดยอด 12 จุด และมีเส้นเชื่อม 31 เส้น โดยดีกรีของจุดยอดของกราฟ H มี 2 แบบ คือ 4, 6 จงหาว่าจำนวนของจุดยอดใดที่มีดีกรีเท่ากับ 4

9. จากกราฟ G ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาว่าข้อใดคือวิธีจาก a ไป z



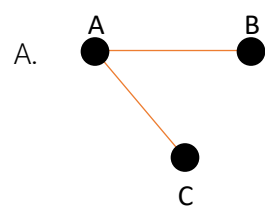
A. b, c, z, a

B. z, y, a, x

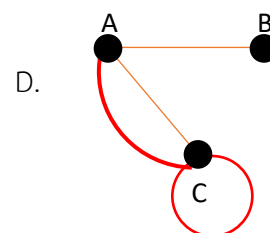
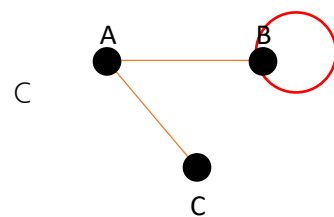
C. $a, b, x,$

D. a, b, x, y, z

10. ข้อใดต่อไปนี้คือกราฟหลายเชิง

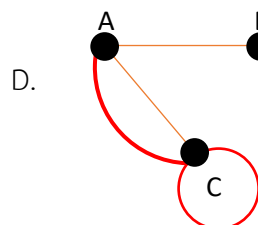
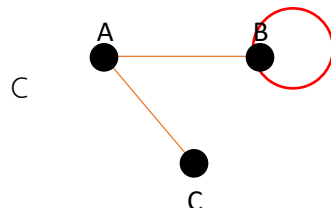
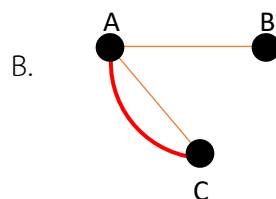
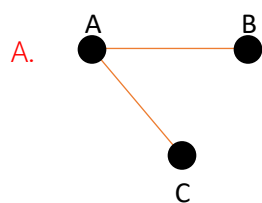


B. ข้อ C และ D ถูก



เฉลย โจทย์ข้อสอบคณิตศาสตร์ดีสคริต 10 ข้อ เรื่อง ทฤษฎีกราฟ

1. ข้อใดต่อไปนี้เป็นกราฟเชิงเดียว



2. จงหาว่าเป็นไปได้หรือไม่ที่กราฟจะมีดีกรีของจุดต่างๆดังนี้ 1, 1, 4, 4 และ 6 ถ้าเป็นไปได้จงหาจำนวนเส้นเชื่อมของกราฟนี้

ตอบ เป็นไปได้ เพราะ กราฟมีจุดคือจำนวนคู่จุด (2 จุด)

และจากผลรวมของดีกรีของทุกจุดในกราฟ = 2 จำนวนเส้นเชื่อม

$$1+1+4+4+6 = 2n$$

$$N = 8$$

3. กราฟ G มี 14 จุดยอดและมี 27 เส้นเชื่อม โดยดีกรีของจุดยอดของกราฟ G ได้แก่ 3, 4, 5 ซึ่งมี 6 จุดยอด ที่ดีกรีเท่ากับ 4 จงหาว่าจุดที่มีดีกรีเท่ากับ 3 และ ดีกรีเท่ากับ 5 มีอย่างละกี่จุด

เฉลย วิธีทำ ให้ x เป็นจำนวนจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 3

จาก ผลรวมของดีกรีของทุกจุดบนกราฟ G = สองเท่าของจำนวนเส้นในกราฟ G

$$3 \cdot x + 4 \cdot 6 + 5 \cdot (8 - x) = 2 \times 27$$

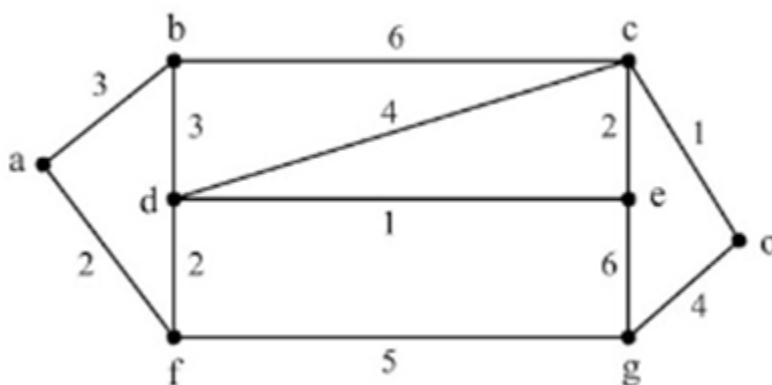
$$3x + 24 + 40 - 5x = 54$$

$$-2x = -10$$

$$x = 5$$

ดังนั้น จำนวนจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 3 คือ 5 และ จำนวนจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 5 คือ 3

4. กำหนดกราฟแสดงเส้นทางที่นายศรธรรม ขับรถออกจากบ้าน (a) ไปยังที่ทำงาน (o) โดยให้จุดยอดแทนแยกของถนน เส้นเชื่อมแทนระยะทาง ระหว่างทางแยกเป็นกิโลเมตร นายศรธรรมต้องการหาเส้นทางที่ทำให้เขาไปทำงานโดยเสียค่าใช้จ่ายให้น้อยที่สุด (ระยะทางสั้นที่สุด) จงหาเส้นทางที่เขาจะขับผ่าน



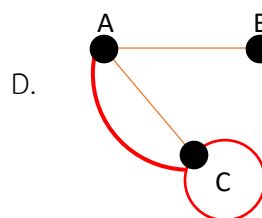
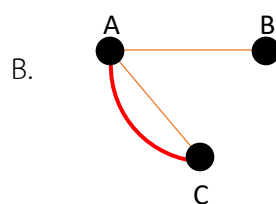
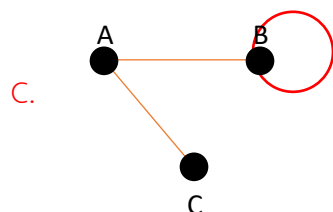
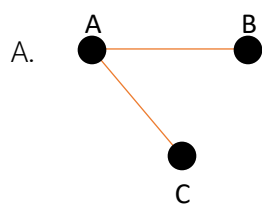
รูปภาพที่ 4.1 รูปแสดงเส้นทางและจุดยอดแต่ละจุดของโจทย์ข้อ 4

ที่มารูป <https://shorturl.asia/UKY8P>

ตอบ เส้นทางที่สั้นที่สุดคือ a, f, d, e, c, o

ระยะทางเท่ากับ 8 ($2+2+1+2+1$) กิโลเมตร

5. ข้อใดต่อไปนี้เป็นกราฟวงวน

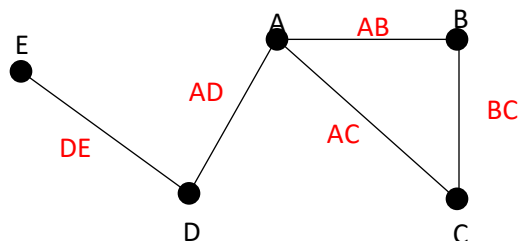


6. ให้ G เป็นกราฟ ซึ่งประกอบด้วยเซตของจุดยอด V และเซตของเส้นเชื่อม E ดังนี้

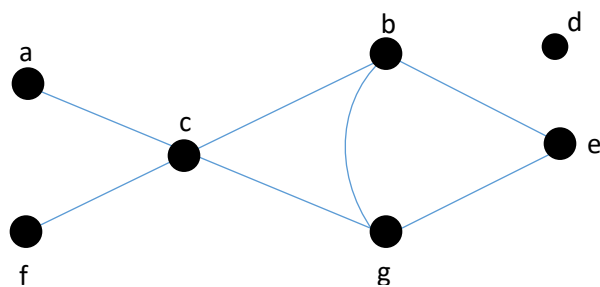
$$V = \{A, B, C, D, E\}$$

$$E = \{AB, AC, AD, BC, DE\}$$

วิธีทำ กราฟ G มีจุดยอด 5 จุด และเส้นเชื่อม 5 เส้น และมีลักษณะดังนี้



7. จงเขียน จำนวนจุดยอด และ เส้นเชื่อมทั้งหมดของรูปภาพนี้



วิธีทำ $V(G) = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

$$|V(G)| = 7$$

$$E(G) = \{ac, bc, be, bg, cf, ce, eg\}$$

$$|E(G)| = 7$$

8. กราฟ H มีจุดยอด 12 จุด และมีเส้นเชื่อม 31 เส้น โดยดีกรีของจุดยอดของกราฟ H มี 2 แบบ คือ 4, 6 จงหาว่าจำนวนของจุดยอดใดที่มีดีกรีเท่ากับ 4

A. 5

B. 6

C. 7

D. 8

ข้อ A เฉลย : ให้ x เป็นจำนวนจุดยอดที่มีดีกรีเท่ากับ 4

จาก ผลรวมของดีกรีของทุกจุดบนกราฟ G = สองเท่าของจำนวนเส้นในกราฟ G

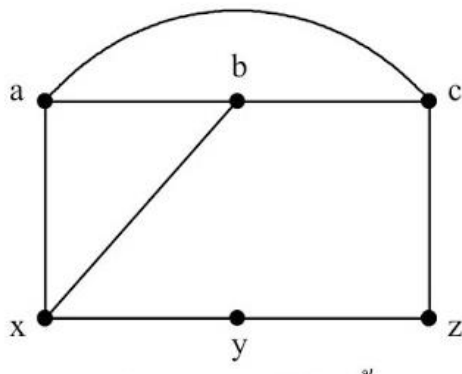
$$6 \cdot (2 - x) \cdot 4 + x = 2 \cdot 31$$

$$72 - 2x = 62$$

$$x = 5$$

9. จากกราฟ G ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ จงหาว่าข้อใดคือวิถีจาก a ไป z

G :



ที่มารูปภาพ <https://shorturl.asia/ZtcLY>

A. b, c, z, a

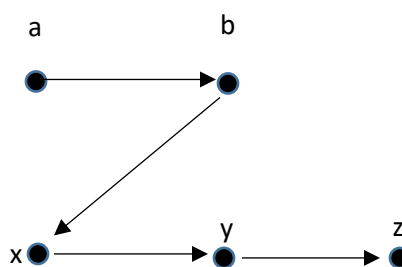
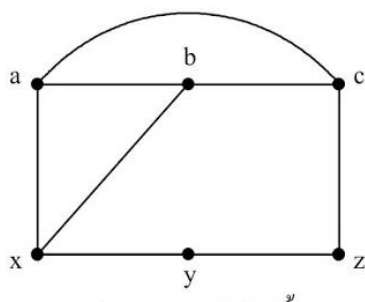
B. z, y, a, x

C. a, b, x,

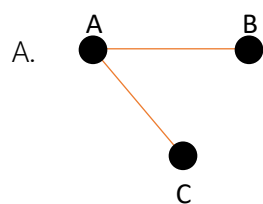
D. a, b, x, y, z

เฉลย: ตอบข้อ D คือวิถีที่ลากจากจุด a ไป z

G :



10. ข้อใดต่อไปนี้เป็นกราฟหลายเชิง



B. ข้อ C และ D ถูก

