Lecture Notes Chapter 1

Course: 05016308 Quantitative Analysis in Finance

Instructor: Big Nattaporn Chuenjarern

Book's Reference: วิชัย วิทยาเกียรติเลิศ, การวิเคราะห์เชิงปริมาณทางการเงิน, 2560.

1 มูลค่าเงินตามเวลา

- เงินต้น (Principle)
- ผลตอบแทน หรือ ดอกเบี้ย (Interest)
- เงินสะสม หรือ มูลค่าสะสม (Accumulated Value)
- อัตราผลตอบแทน หรือ อัตราดอกเบี้ย (Interest Rate)

1.1 การหาจำนวนเงินที่ทราบอัตราการเพิ่มขึ้นหรือลดลง

1.1.1 การหาจำนวนเงินที่เพิ่มขึ้นจากการลงทุน 1 ครั้ง

กำหนดให้การลงทุน 1 ครั้ง ด้วยเงินต้น P_0 บาท และเงินเพิ่มขึ้น (กำไร) ด้วยอัตราเพิ่ม x โดยที่

$$x = \frac{\text{จำนวนเงินที่เพิ่มขึ้น}}{\text{เงินลงทุนต้น}}$$

จะได้ว่า

$$\text{จำนวนเงินที่เพิ่มขึ้น} = xP_0 \tag{1}$$

และ

$$\text{จำนวนเงินรวม} = P_0 + xP_0 = (1+x)P_0 \tag{2}$$

Example 1.1 *ตู้เย็นราคา 10,000 บาท ราคานี้ไม่รวมภาษีมูลค่าเพิ่ม 7% จงหาว่าผู้ซื้อต้องจ่ายเงิน เพื่อซื้อตู้เย็นทั้งหมดกี่บาท*

Example 1.2 *เอลงทุนซื้อรองเท้ามาขาย 100 คู่ เป็นจำนวนเงิน 20,000 บาท ถ้าเขาต้องการขายให้ได้กำไร 20% เขาต้องขายคู่ละกี่บาท และเมื่อขายหมดเอจะได้เงินทั้งหมดกี่บาท*

1.1.2 การหาจำนวนเงินที่เพิ่มขึ้นจากการลงทุนหลายครั้งต่อเนื่องกัน

กำหนดให้ลงทุนด้วยเงินต้นด้วยเงิน P_0 บาท และเงินเพิ่มขึ้น (กำไร) ด้วยอัตราเพิ่ม x_1 เมื่อสิ้นการลงทุนครั้งที่ 1 และนำเงินรวมเมื่อสิ้นการลงทุนครั้งที่ 1 ไปลงทุนต่อ ด้วยอัตราเพิ่ม x_2 เมื่อสิ้นการลงทุนครั้งที่ 2 ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนครบระยะเวลาการลงทุน ถ้าสมมติว่าลงทุนด้วยวิธีนี้ เป็นจำนวน n ครั้ง โดยที่อัตรากำไรหรืออัตราเพิ่มเป็น $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ตามลำดับ จะได้

$$\text{จำนวนเงินสะสมเมื่อสิ้นการลงทุนครั้งที่ n} = (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n)P_0 \tag{3}$$

$$\text{อัตราเพิ่มสะสมเมื่อสิ้นการลงทุนครั้งที่ n} = (1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_n) - 1 \tag{4}$$

Example 1.3 *สมชายนำเงิน 1,000,000 บาท ลงทุนในธุรกิจรับเหมาก่อสร้าง โดย 2 ปีแรกยังไม่ได้รับกำไร ถ้าผลประกอบการของธุรกิจได้กำไร 15% 18% 25% และ 32% ในปีที่ 3,4,5 และ 6 ตามลำดับ แล้วเมื่อครบ 6 ปี นายสมชายมีเงินในธุรกิจนั้นเท่าไร แล้วรวมแล้วได้กำไรทั้งหมดกี่เปอร์เซ็นต์*

1.1.3 การหาจำนวนเงินที่ลดลงจากการลงทุน 1 ครั้ง

กำหนดให้การลงทุน 1 ครั้ง ด้วยเงินต้น P_0 บาท และเงินลดลง (ขาดทุน) ด้วยอัตราลด y โดยที่

$$y = \frac{\text{จำนวนเงินที่ลดลง}}{\text{เงินลงทุนต้น}}$$

จะได้ว่า

$$\text{จำนวนเงินที่ลดลง} = yP_0 \tag{5}$$

และ

$$\text{จำนวนเงินคงเหลือ} = P_0 - yP_0 = (1-y)P_0 \tag{6}$$

Example 1.4 *ตู้เย็นราคา 10,000 บาท ติดป้ายลด 20% จงหาว่าผู้ซื้อต้องจ่ายเงิน เพื่อซื้อตู้เย็นทั้งหมดกี่บาท*

1.1.4 การหาจำนวนเงินที่ลดลงจากการลงทุนหลายครั้งต่อเนื่องกัน

กำหนดให้ลงทุนด้วยเงินต้นด้วยเงิน P_0 บาท และเงินลดลง (ขาดทุน) ด้วยอัตราลด y_1 เมื่อสิ้นการลงทุนครั้งที่ 1 และนำเงินคงเหลือเมื่อสิ้นการลงทุนครั้งที่ 1 ไปลงทุนต่อโดยไม่มีการถอนหรือเพิ่มเงินลงทุน และขาดทุนอีกด้วยอัตรา y_2 เมื่อสิ้นการลงทุนครั้งที่ 2 ทำเช่นนี้ไปเรื่อยๆ จนครบระยะเวลาการลงทุน ถ้าสมมติว่าลงทุนด้วยวิธีนี้ เป็นจำนวน n ครั้ง โดยที่อัตรากำไรหรืออัตราลดเป็น $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ตามลำดับ จะได้

$$\text{จำนวนเงินสะสมเมื่อสิ้นการลงทุนครั้งที่ n} = (1-y_1)(1-y_2)\cdots(1-y_n)P_0 \tag{7}$$

$$\text{อัตราลดสะสมเมื่อสิ้นการลงทุนครั้งที่ n} = 1-(1-y_1)(1-y_2)\cdots(1-y_n) \tag{8}$$

Example 1.5 *บริษัทผลิตเครื่องกรองน้ำแห่งหนึ่งผลิตเครื่องกรองน้ำรุ่นใหม่ โดยตั้งราคาขายพร้อม ติดตั้งเครื่องละ 10,000 บาท และกำหนดส่วนลดให้แก่ลูกค้าที่เป็นตัวแทนจำหน่าย 15% และลดให้ อีก 5% สำหรับผู้ที่ซื้อมากกว่า 5 เครื่อง และถ้าจ่ายเป็นเงินสด จะลดให้เป็นพิเศษอีก 3% ถ้านาย ฟิล์มเป็นตัวแทนจำหน่ายและสั่งจองเครื่องกรองน้ำรุ่นนี้ 10 เครื่อง และชำระด้วยเงินสด นายฟิล์ม จะต้องจ่ายเงินเป็นจำนวนเงินเท่าไรและรวมแล้วบริษัทลดราคาให้ทั้งหมดกี่เปอร์เซนต์*

1.1.5 การหาจำนวนเงินที่มีทั้งอัตราการลดลงและอัตราการเพิ่มขึ้น

สมมติให้ เงินลงทุนด้วยทุนเริ่มต้น P_0 บาท และลงทุนต่อเนื่อง $m+n$ ครั้ง โดยมี
อัตราเพิ่มเป็น $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (ลงทุนได้กำไร m ครั้ง) และ
อัตราลดเป็น $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (ลงทุนได้ขาดทุน n ครั้ง)

จำนวนเงินสะสมเมื่อสิ้นการลงทุนครั้งที่ $m+n$ คือ

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_m)(1-y_1)(1-y_2)\cdots(1-y_n)P_0 \tag{9}$$

อัตราเพิ่ม(ลด)สะสมเมื่อสิ้นการลงทุนครั้งที่ $m+n$

$$(1+x_1)(1+x_2)\cdots(1+x_m)(1-y_1)(1-y_2)\cdots(1-y_n)-1 \tag{10}$$

Example 1.6 *สมศักดิ์ลงทุนเปิดร้านขายเครื่องประดับด้วยเงินจำนวน 100,000 บาท ถ้าในช่วงแรก ร้านขาดทุน 11% และ 7% ในเดือนแรกและเดือนที่สอง จากนั้นเริ่มมีกำไร 15%, 18% และ 22% ในเดือนที่ 3, 4 และ 5 ตามลำดับ จงหาว่าเมื่อครบ 5 เดือน นายสมศักดิ์ได้รับเงินจากการขาย เครื่องประดับนั้นเท่าไร และรวมแล้วได้กำไรหรือขาดทุนคิดเป็นร้อยละเท่าไร*

1.2 อัตราดอกเบี้ย

อัตราดอกเบี้ย คือ ผลตอบแทนจากการลงทุนด้วยเงินต้น 1 บาท ที่นักลงทนได้รับเป็น ผลตอบแทนจากการสูญเสียโอกาสจากการใช้เงินหรือสินทรัพยลงทุนในการลงทุนอื่นๆ นั่นคือ

$$\text{อัตราดอกเบี้ย} = \frac{\text{ผลตอบแทนที่ได้รับ}}{\text{เงินต้น}} \tag{11}$$

หากพิจารณาเป็นคาบเวลา เช่น งวด เดือน ปี

$$\text{อัตราดอกเบี้ยต่องวด} = \frac{\text{ผลตอบสะสมใน 1 งวด}}{\text{เงินต้น ณ ต้นงวด}} \tag{12}$$

Definition 1.1

*กำหนดให้ $i > 0$ เป็นอัตราดอกเบี้ยใดๆ เราจะเรียก $a(t)$ สำหรับ $t \geq 0$ ว่า **ฟังก์ชันสะสม** ถ้า $a(t)$ สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้*

1. $a(0) = 1$
2. $a(t) > 0$ *สำหรับทุกๆ* $t > 0$ *และ*
3. $a(t)$ *เป็นฟังก์ชันเพิ่มในตัวแปร* t

เราสามารถพิจารณา $a(t)$ เป็นเงินสะสมของการลงทุนด้วยเงินต้น 1 บาท ณ เวลา t ใดๆ สะสมด้วยอัตราดอกเบี้ย i

1.2.1 ประเภทของดอกเบี้ย

ดอกเบี้ยแบ่งได้ 2 ประเภท คือ

1. **ดอกเบี้ยเชิงเดียว หรือ ดอกเบี้ยอย่างง่าย (Simple Interest)** คือ การคิดดอกเบี้ยหรือผลตอบแทนจากเงินต้นเท่านั้นในแต่ละงวด ซึ่งดอกเบี้ยคงค้างที่เกิดขึ้นจะไม่ถูกนำไปลงทุนต่อเพื่อที่จะได้รับดอกเบี้ย

   เงินสะสมจากการลงทุนด้วยเงินต้น 1 บาท เท่ากับ

   $$1 + it \quad \text{เมื่อ } t \text{ คือ จำนวนงวดที่ลงทุน} \tag{13}$$

   Definition 1.2

   *กำหนดให้ $i > 0$ เป็นอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว เราจะเรียก $a(t) = 1 + it$ สำหรับ $t \geq 0$ ว่า **ฟังก์ชันสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว***

   เงินสะสม หรือ มูลค่าสะสมด้วยการลงทุน P_0 เป็นเวลา t งวด คือ

   $$S_t = (1 + it)P_0 \tag{14}$$

Theorem 1.1

ฟังก์ชันสะสม $a(t) = 1 + it$ สำหรับ $t > 0$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในตัวแปร i และ t เมื่อกำหนดให้ตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งคงที่ และ มูลค่าสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว $S_t = (1 + it)P_0$ สำหรับ $t > 0$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในตัวแปร i, t และ P_0 เมื่อกำหนดให้ตัวแปรที่เหลือคงที่

2. **ดอกเบี้ยทบต้น (Compound Interest)** คือ การคิดดอกเบี้ย โดยดอกเบี้ยในงวดแรกจะ คิดจากเงินต้นในงวดแรก และดอกเบี้ยในงวดถัดมาจะคิดจากเงินต้นต้นงวดนั้นซึ่งเป็นผลรวมของ ดอกเบี้ยและเงินต้นของงวดก่อนหน้านี้ 1 งวด เป็นเช่นนี้เรื่อยๆไปตลอดระยะเวลาลงทุน

เงินสะสมจากการลงทุนด้วยเงินต้น 1 บาทด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น เท่ากับ

$$1 + i + i(1+i) + \ldots + i(1+i)^{t-1} = (1+i)^t \quad \text{เมื่อ } t \text{ คือ จำนวนงวดที่ลงทุน} \tag{15}$$

Definition 1.3

กำหนดให้ $i > 0$ เป็นอัตราดอกเบี้ยทบต้น เราจะเรียก $a(t) = (1+i)^t$ สำหรับ $t \geq 0$ ว่า ***ฟังก์ชันสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น***

เงินสะสม หรือ มูลค่าสะสมด้วยการลงทุน P_0 เป็นเวลา t งวด คือ

$$S_t = P_0(1+i)^t \tag{16}$$

Theorem 1.2

ฟังก์ชันสะสม $a(t) = (1+i)^t$ สำหรับ $t > 0$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในตัวแปร i และ t เมื่อกำหนดให้ตัวแปรใดตัวแปรหนึ่งคงที่ และ มูลค่าสะสมด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น $S_t = P_0(1+i)^t$ สำหรับ $t > 0$ เป็นฟังก์ชันเพิ่มในตัวแปร i, t และ P_0 เมื่อกำหนดให้ตัวแปรที่เหลือคงที่

Example 1.7 *จงหาเงินสะสมของเงินต้น 10,000 บาท ณ ปลายปีที่ 4 จากการลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว 10% ต่อปี*

Example 1.8 *จงหาเงินสะสมของเงินต้น 10,000 บาท ณ ปลายปีที่ 4 จากการลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 10% ต่อปี*

Example 1.9 *นายเอ ต้องการลงทุนด้วยเงิน 100,000 บาท ในโครงการใดโครงการหนึ่ง โดยมี โครงการให้เลือกลงทุน ดังนี้*

โครงการ	*การลงทุน*
A	*ลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว 10% ต่อปี เป็นเวลา 10 ปี*
B	*ลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 10% ต่อปี เป็นเวลา 10 ปี*
C	*5 ปี แรก ลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 10% ต่อปี* *5 ปี หลัง ลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว 10% ต่อปี*
D	*5 ปี แรก ลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว 10% ต่อปี* *5 ปี หลัง ลงทุนด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 10% ต่อปี*

Example 1.10 *นายบี ต้องการลงทุนด้วยเงิน 100,000 บาท ในโครงการหนึ่ง ซึ่งให้ผลตอบแทน ด้วยอัตราดอกเบี้ยเชิงเดียว 10 % ต่อปี ในช่วง x ปี แรก และ ให้ผลตอบแทนด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้น 10 % ต่อปี ในช่วง y ปีหลัง ถ้าเขาลงทุนเป็นระยะเวลา 10 ปี แล้วค่าของ x และ y ที่ทำให้การลงทุนของเขาได้รับผลตอบแทนสูงสุด คือเท่าไร และ เขาได้ผลตอบแทนสะสมจากการลงทุนคิดเป็นร้อยละเท่าไร*

1.3 มูลค่าปัจจุบันและมูลค่าอนาคต

มูลค่าปัจจุบัน (Present Value : PV) เป็นมูลค่า ณ ปัจจุบัน หรือมูลค่าของเงินลงทุน ณ วันใดวันหนึ่งที่เราพิจารณา และ มูลค่าอนาคต (Future Value : FV) เป็นเงินสะสม ณ เวลาที่ t ในอนาคตหลังวันดังกล่าว สมมติว่า ลงทุนในปัจจุบันทันที (เวลา $t = 0$) ด้วยเงินจำนวน PV บาท ในที่นี้จะเรียกว่า มูลค่าปัจจุบัน หลังจากนั้นพิจารณาเงินสะสมที่เวลาอนาคต FV (เวลา $t > 0$)ในที่นี้จะเรียกว่า มูลค่าอนาคต ซึ่งถูกสะสมด้วยฟังก์ชันสะสม $a(t)$ นั่นคือ

$$FV = PV \cdot a(t) \tag{17}$$

หรือกล่าวได้ว่า

$$\text{มูลค่าอนาคต} = \text{มูลค่าปัจจุบัน} \times \text{ฟังก์ชันสะสม} \tag{18}$$

หรือสามารถจัดรูปใหม่ได้เป็น

$$PV = FV \cdot a(t)^{-1} \tag{19}$$

โดยที่ $a^{-1}(t)$ จะถูกเรียกว่า **ฟังก์ชันส่วนลด (Discount Function)** โดยถ้าพิจารณาดอกเบี้ยเชิงเดี่ยว ฟังก์ชันส่วนลด คือ $a(t)^{-1} = (1+it)^{-1}$ และ ดอกเบี้ยทบต้นมี ฟังก์ชันส่วนลด คือ $a(t)^{-1} = (1+i)^{-1} = \nu^i$ โดยเราจะเรียก ν^i ว่า **ตัวประกอบส่วนลด (Discount Factor)**

Example 1.11 *การลงทุนโครงการหนึ่งมีระยะเวลาทั้งสิ้น 10 ปี โดยลงทุนทันทีต้นปีที่ 1 จำนวน 50,000 บาท หลังจากนั้นลงทุนทุกๆต้นปีที่ 3, 5, 7 และ 9 ลงทุนปีละ 10,000 บาท โดยได้อัตรา ผลตอบแทน 20 % ต่อปี หากนักลงทุนต้องการลงทุนครั้งเดียว ด้วยจำนวนเงินลงทุนที่เท่ากับเงิน ลงทุนทั้งหมดในโครงการอีกโครงการหนึ่ง โดยได้อัตราผลตอบแทนเท่ากัน คือ 20% ต่อปี เขา จะต้องลงทุนที่เวลาใดจึงจะได้มูลค่าเงินสะสมเท่ากัน ณ ปลายปีที่ 10 และ มูลค่าเงินสะสมนั้นเท่ากับเท่าไร*

Example 1.12 *จากตัวอย่างที่ 1.11 หากนักลงทุนต้องการลงทุนทันทีที่เวลาเริ่มต้นด้วยจำนวนเงิน ลงทุนที่เท่ากับเงินลงทุนทั้งหมดในโครงการแรกเพื่อให้ได้รับเงินจำนวนเท่ากับเงิน สะสมที่ได้รับใน โครงการแรกที่ปลายปีที่ 10 โดยได้อัตราผลตอบแทนเท่ากัน คือ 20% ต่อปี เขาจะต้องลงทุนใน โครงการนี้นานเท่าไร และได้รับเงินสะสมจำนวนเท่าใด*

1.4 อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม และ กำลังดอกเบี้ย

อัตราดอกเบี้ยที่คิดทบต้นเพียง 1 ครั้งในช่วงคาบเวลาหนึ่ง เรียกว่า **อัตราดอกเบี้ยแท้จริง** หรือ **อัตราดอกเบี้ยที่เป็นนผล(Effective Interest Rate : EIR)** แต่ในบางครั้งการคิดดอกเบี้ย ใน 1 ช่วงเวลา หรือ 1 คาบเวลาอาจจะคิดดอกเบี้ยทบต้นมากกว่า 1 ครั้ง เช่น อัตราดอกเบี้ย 10 % ต่อปี คิดทบต้นทุก 6 เดือน นั่นแสดงว่า ทุกๆ 1 ปี จะมีการคิดดอกเบี้ยทบต้น 2 ครั้ง โดยที่อัตราดอกเบี้ย ต่อครั้ง(งวด) เท่ากับ 5% เรียก อัตราดอกเบี้ยในลักษณะนี้ว่า**อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม (Nominal Interest Rate : NIR)**

Definition 1.4

*อัตราดอกเบี้ย i ต่องวดซึ่งคิดทบต้น m ครั้ง ต่องวดจะถูกเรียกว่า **อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม** เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $i^{(m)}$ และเรียก $\frac{i^m}{m}$ ว่า **อัตราดอกเบี้ยต่องวด***

Definition 1.5

*กำหนด อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม $i^{(m)}$ จะได้ว่า ดอกเบี้ยต่อปี i เป็น **อัตราดอกเบี้ยที่แท้จริง** เทียบเท่ากับอัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม $i^{(m)}$ ถ้า*

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

Example 1.13 *จงคำนวณอัตราดอกเบี้ยแท้จริงต่อปี เทียบเท่ากับ อัตราดอกเบี้ย 8 % ต่อปี คิดทบต้นทุก 3 เดือน*

Theorem 1.3

อัตราดอกเบี้ยที่แท้จริง $i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$ *เป็นฟังก์ชันเพิ่มในตัวแปร* $m \in \mathbb{N}$ *เมื่อ กำหนดให้* $i^{(m)}$ *คงที่*

Theorem 1.4

อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม $i^{(m)} = m\left[(1+i)^{1/m} - 1\right]$ *เป็นฟังก์ชันลดในตัวแปร* $m > 0$ *เมื่อ กำหนดให้* i *คงที่*

Example 1.14 *นาย ก ต้องการกู้เงินระยะยาวจำนวน 1,000,000 บาท กำหนดเวลาใช้คืนปลายปี ที่ 5 จาก สถาบันการเงิน 3 แห่ง เขาควรกู้เงินจากสถาบันการเงินใดจึงจะสามารถกู้ได้ที่ต้นทุนต่ำที่สุด(พิจารณาดอกเบี้ยเป็นต้นทุน) โดยแต่ละสถาบันการเงินเสนออัตราดอกเบี้ย ดังนี้*

ธนาคาร	*ข้อเสนอ*
A	*อัตราดอกเบี้ย 10% ต่อปี ทบต้นทุกปี*
B	*อัตราดอกเบี้ย 10% ต่อปี ทบต้นทุก 3 เดือน*
C	*อัตราดอกเบี้ย 10% ต่อปี ทบต้นทุกเดือน*

Example 1.15 *จงหามูลค่าอนาคต ณ ปลายปีที่ 5 ของการลงทุนด้วยเงินต้น 100,000 บาท โดยได้ ผลตอบแทนใน 2 ปีแรกเป็นอัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี ทบต้นทุก 3 เดือน ช่วง 2 ปี ถัดมา ได้อัตรา ดอกเบี้ย 6 % ต่อปีคิดทบต้น ทุกเดือน และในปีสุดท้ายให้ผลตอบแทนด้วยอัตราดอกเบี้ย 8% ต่อปี คิดทบต้นทุก 6 เดือน*

Theorem 1.5

ให้ $i^{(m)}$ เป็น อัตราดอกเบี้ยเพียงในนาม และ i เป็นอัตราดอกเบี้ยที่แท้จริงเทียบเท่า $i^{(m)}$ จะได้ว่า

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \ln(1+i)$$

Definition 1.6

ให้ $a(t)$ เป็นฟังก์ชันสะสมใดๆ ซึ่งหาอนุพันธ์ได้ ***กำลังดอกเบี้ย*** *ณ ขณะ t ใดๆ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\delta(t)$ นิยามโดย*

$$\delta(t) = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{d\ln a(t)}{dt}$$

กำลังดอกเบี้ยเป็นความหนาแน่นของดอกเบี้ย หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ กำลังดอกเบี้ยเป็นอัตราดอกเบี้ยอย่างต่อเนื่องในทุกจุดของเวลา ตัวอย่างกำลังดอกเบี้ย สำหรับดอกเบี้ยเชิงเดียว คือ $\delta(t) = \dfrac{i}{1+it}$ และสำหรับดอกเบี้ยทบต้น คือ $\delta(t) = \ln(1+i)$

เราสามารถพิจารณากำลงดอกเบี้ยเป็นการคิดดอกเบี้ยทบต้นอนันต์ครั้งต่องวดซึ่ง เปรียบเสมือนการคิดดอกเบี้ยทบตนต่อเนื่องในทุกจุดของเวลาและเพื่อความสะดวกจะเรียกว่า **อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง (Continuous Compounding Rate)** เขียนแทนด้วย

$$\delta = \ln(1+i) \quad \text{หรือ} \quad e^{\delta} = 1+i$$

ดังนั้นเงินสะสมของการลงทุนด้วยเงินต้น P_0 เป็นระยะเวลา t ใดๆ ด้วยอัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ จึง

เท่ากับ

$$S_t = P_0(1+i)^t = P_0 e^{\delta t} \tag{20}$$

เมื่อ i เป็นอัตราดอกเบี้ยแท้จริงเทียบเท่า อัตราดอกเบี้ยทบต้นต่อเนื่อง δ

Example 1.16 *จงหามูลค่าสะสม ณ ปลายปีที่ 10 ของเงินลงทุนจำนวน 100,000 บาท ที่ให้อัตรา ดอกเบี้ยเท่ากับ 3% ต่อปคิดทบต้นทุกวัน*

Example 1.17 *กำหนดกำลังดอกเบี้ย* $\delta(t) = \dfrac{2}{(t+1)(t+2)}$ *จงหาเงินสะสมของเงินลงทุน 1 บาท ณ ปลายปีที่ n*

1.5 อัตราเงินเฟ้อและเงินฝืด

อัตราเงินเฟ้อและเงินฝืด (Inflation and Deflation Rate) เป็นเครื่องมือชี้วัดสถานะทาง เศรษฐกิจตัวหนึ่งที่บ่งบอกถึง อำนาจซื้อ (Purchasing Power) ว่าเงินจำนวนหนึ่งที่เคยซื้อสินค้า ชนิดหนึ่งได้จำนวนหนึ่งได้ในอดีต ณ ปัจจุบันเงินจำนวนเดิมนั้นจะสามารถซื้อสินค้าชิ้นเดียวกันนั้น ได้จำนวนเพิ่มขึ้นหรือลดลง นั่นคือ ราคาสินค้าแพงขึ้นหรือถูกลง นอกจากนี้ ภาวะเงินเฟ้อและเงินฝืด ยังส่งผลกระทบต่อมูลค่าที่แท้จริงของเงินที่เรามีอยู่อีกด้วย

1.5.1 ภาวะเงินเฟ้อ

ภาวะเงินเฟ้อ (Inflation) คือ ภาวะที่ระดับราคาสินค้าโดยรวมในทองตลาดสูงขึ้นเรื่อย ๆ หรือกล่าวว่าราคาสินค้าส่วนใหญ่แพงขึ้น สาเหตุหลักๆ เกิดจากต้นทุนในการผลิตสินค้าที่สูงขึ้น (Cost-push Inflation) และเกิดจากความต้องการสินค้าและบริการที่เพิ่มสูงขึ้น (Demand-pull Inflation) เครื่องมือที่ใช้วัดภาวะเงินเฟ้อมีอยู่หลายชนิดแต่ที่นิยมใช้กัน ได้แก่ **ดัชนีราคาผู้บริโภค (Consumption Price Index : CPI)** ซึ่งคือ ตัวเลขที่แสดงถึงการเปลี่ยนแปลงของระดับราคาสินค้า และบริการที่จำเป็นในชีวตประจำวันในระยะเวลาหนึ่ง ๆ เมื่อเทียบกับปีฐาน โดยที่ปีฐาน คือ ปีที่กำหนดขึ้นเพื่อใช้เป็นปีเปรียบเทียบโดยมักจะกำหนดให้ เป็นปีที่บ้านเมืองอยู่ในสภาวการณ์ปกติ คือ ไม่ได้อยู่ในสภาวะสงคราม ภัยธรรมชาติ ปฏิวัติทางการเมือง เป็นต้น เราสามารถคำนวณดัชนีราคาผู้บริโภค ได้จาก

$$CPI = \sum_{i=1}^{k} \frac{P_{ni}Q_{oi}}{P_{oi}Q_{oi}} \times 100 \tag{21}$$

เมื่อ $P_{ni}Q_{oi}$ คือ มูลค่าของสินค้าหรือบริการที่บริโภคในปีที่ต้องการคำนวณค่าดัชนีของสินค้าชนิดที่ i
$P_{oi}Q_{oi}$ คือ มูลค่าของสินค้าหรือบริการที่บริโภคในปีฐานของสินค้าชนิดที่ i
k คือ จำนวนสินค้าและบริการที่ใช้ในหารคำนวณ

อัตราเงินเฟ้อ คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของดัชนีราคาของปีปัจจุบันเปรียบเทียบกับดัชนีราคาของปีก่อนหรืออัตราการเปลี่ยนแปลงที่เปรียบเทียบระหว่างช่วงเวลาที่ต่อเนื่องกัน โดยที่อัตราเงินเฟ้อปีที่ n ใดๆ สามารถหาได้จาก

$$i_{inf}(n) = \frac{CPI_n - CPI_{n-1}}{CPI_{n-1}} \tag{22}$$

เมื่อ CPI_n คือดัชนีราคาผู้บริโภคของปีที่ n และ CPI_{n-1} คือดัชนีราคาผู้บริโภคของปีที่ $n-1$

Example 1.18 *ถ้า ปี 2553 มี CPI เท่ากับ 127 และ ปี 2554 ม CPI เท่ากับ 130 แล้วอัตราเงิน เฟ้อของปี 2554 เท่ากับเท่าใด*

1.5.2 ภาวะเงินฝืด

ภาวะเงินฝืด (Deflation) เป็นภาวะที่ตรงกันข้ามกับภาวะเงินเฟ้อ คือ ปริมาณเงินในระบบ มีน้อยกว่าความต้องการ หรือสรุปได้ง่ายๆ คือ ภาวะที่สินค้าโดยทั่วไปมีระดับราคาลดลงเรื่อยๆ ซึ่ง ไม่ได้หมายความว่าสินค้าทุกชนิดจะต้องมีราคาลดลง เป็นภาวะที่ระดับราคาสินค้าและบริการ โดยทั่วไปลดลงเรื่อยๆอย่างต่อเนื่องเป็นเวลานาน การที่ราคาสินค้าลดลงนั้นเกิดจากอุปสงค์รวมน้อย กว่าอุปทานรวมในขณะนั้น ทำให้ผู้ผลิตจำเป็นต้องลดราคาสินค้า ลดจำนวนผลิต และทำให้เกิดการ ว่างงานขึ้น รายได้ตกต่ำลง ธุรกิจไม่สามารถชำระคืนหนี้สิน ทำใหสถาบันการเงินได้รับการ กระทบกระเทือนอย่างมาก เพราะเรียกเก็บหนี้ไม่ได้ หรือมีหนี้สูญ การปล่อยสินเชื่อถูกจำกัดเข้มงวด ดอกเบี้ยจึงสูงขึ้นสูงผลให้ไม่มีการกู้ยืมไปลงทุน เศรษฐกิจจึงตกต่ำเป็นอันตรายอย่างยิ่งต่อระบบเศรษฐกิจ ภาวะเงินฝืด มีสาเหตุมาจาก การขาดแคลนเงินทุนหรือเงินออม เงินในประเทศไหลออกไปยังต่างประเทศมากเกินไป ความผิดพลาดในการดำเนินนโยบายการเงินและการคลัง และการลดลงของราคาต้นทุนจากปัจจัยต่างๆ

อัตราเงินฝืด คือ การคำนวณอัตราเงินเฟ้อ แล้วมีค่าเป็นลบ

Example 1.19 *ถ้า ปี 2549 มี CPI เท่ากับ 130 และ ปี 2550 ม CPI เท่ากับ 125 แล้วอัตราเงิน ฝืดของปี 2554 เท่ากับเท่าใด*

1.5.3 การวัดค่าของเงิน

การวัดค่าของเงิน ทำได้โดยการเปรียบเทียบดัชนีราคาผู้บริโภคสินค้าและบริการในเวลาต่างๆ โดยกำหนดให้ปีใดปีหนึ่งเป็นปีฐานสำหรับการเปรียบเทียบ ค่าของเงินปีที่ t คือมูลค่าของเงิน 1 บาท ในปีที่ t เทียบกับเงินในปีฐาน สามารถคำนวณได้จาก

$$u_t = \frac{CPI_0}{CPI_t} \tag{23}$$

เมื่อ CPI_0 คือ ดัชนีราคาผู้บริโภคของปีฐาน และ CPI_t คือ ดัชนีราคาผู้บริโภคของปีที่ t

Example 1.20 *สมมติ ปี 2529 เป็นปีฐานที่มี CPI เท่ากับ 100 ถ้าในปี 2530 ค่า CPI เท่ากับ 125 จงหาค่าของเงินในปี 2530*

Example 1.21 *สมมติ ปี 2542 เป็นปีฐานที่มี CPI เท่ากับ 125 ถ้าในปี 2545 ค่า CPI เท่ากับ 140 จงหาค่าของเงินในปี 2530*

การคำนวณราคาสินค้าและบริการในปีที่ t ใดๆ แทนด้วย A_t เป็นไปตามค่าดัชนีราคาผู้บริโภค (CPI) สามารถคำนวณได้จาก

$$A_t = A_0 \frac{CPI_t}{CPI_0} \tag{24}$$

เมื่อ A_0 คือ ราคาสินค้าของปีฐาน

CPI_0 คือ ดัชนีราคาผู้บริโภคของปีฐาน และ CPI_t คือ ดัชนีราคาผู้บริโภคของปีที่ t

Example 1.22 *กำหนดค่าดัชนีราคาผู้บริโภคของประเทศไทยในปีต่างๆ เป็นดังนี้*

ปี พ.ศ.	*2545*	*2546*	*2547*	*2548*	*2549*	*2550*
ค่า CPI	*100*	*101.6*	*104.1*	*107.8*	*114.3*	*116.4*

1. *ในปี พ.ศ. 2545 อาหารมื้อหนึ่งมีราคา 25 บาท จงหาราคาอาหารมื้อหนึ่ง (อาหาร ประเภทเดียวกัน) ในปี พ.ศ. 2550*
2. *รถยนต์ยี่ห้อหนึ่งในปี พ.ศ. 2546 มีราคาคันละ 500,000 บาท จงหาราคารถยนต์ยี่ห้อนี้ ในปี พ.ศ. 2549 (สมมตว่าราคาเป็นไปตามดัชนีราคาผู้บริโภค)*
3. *ค่าแรงขั้นต่ำในปี พ.ศ. 2547 เท่ากับ 150 บาทต่อวัน ถ้าต้องการให้สภาพการดำรงชีวิต ของผู้ใช้แรงงานดีเช่นเดิม ค่าแรงขั้นต่ำในปี 2550 ควรเป็นวันละเท่าใด*

1.5.4 อัตราจริงของดอกเบี้ย

อัตราจริงของดอกเบี้ย เป็นอัตราดอกเบี้ยที่ปรับลดด้วยอัตราเงินเฟ้อ เพื่อความสะดวกจะกำหนดสัญลักษณ์ดังนี้

i แทน อัตราดอกเบี้ยปกติหรืออัตราดอกเบี้ยที่เป็นตัวเงินยังไม่ได้ปรับลดด้วยอัตราเงินเฟ้อ

i_{inf} แทน อัตราเงินเฟ้อ

i_r แทน อัตราดอกเบี้ยจริง(Real Interest Rate) ซึ่งป็นอัตราดอกเบี้ยจริงจากการพิจารณา ปรับลดอัตราดอกเบี้ยปกติด้วยอัตราเงินเฟ้อแล้ว

เราสามารถหาอัตราดอกเบี้ยจริง ได้โดยพิจารณาการลงทุนด้วยเงินต้น 1 บาท มีอัตราดอกเบี้ยปกติ i อัตราเงินเฟ้อ i_{inf}

$$i_r = \frac{\text{ดอกเบี้ยจริง}}{\text{ต้นทุนจริง}} = \frac{1 - i_{inf}}{1 + i_{inf}} \tag{25}$$

มูลค่าสะสมของเงิน 1 บาท ณ ปลายงวด คือ

$$a_r(1) = 1 + i_r = 1 + \frac{1 - i_{inf}}{1 + i_{inf}} = \frac{1 + i}{1 + i_{inf}} \tag{26}$$

ดังนั้นฟังก์ชันสะสมที่ปรับลดด้วยอัตราเงินเฟ้อแล้ว คือ

$$a_r(t) = (1 + i_r)^t = \left(\frac{1 + i}{1 + i_{inf}}\right)^t \tag{27}$$

Example 1.23 *นายเอลงทุนได้ผลตอบแทน 10 % ต่อปี ถ้าในปีนั้นมีอัตราเงินเฟ้อ 4% เขาลงทุน ได้รับอัตราผลตอบแทนหรืออตราดอกเบี้ยจริงเท่าไร*

Example 1.24 *จงหามูลค่าปัจจุบันของการจ่ายเงินบำนาญของนายเอกวิทย์หลังปรับลดด้วยอัตรา เงินเฟ้อ ซึ่งจ่ายทุกสิ้นปีเป็นเวลานาน 10 ปี ปีละ 200,000 บาท ด้วยอัตราดอกเบี้ย 6 % ต่อปี และ แต่ละปีมีอัตราเงินเฟ้อเฉลี่ย 2 %*