

*Определение*

Пусть функции и заданы на одном интервале. Функция называется первообразной для

на этом интервале, если для любого существует производная, равная .

*Пример*

Функция является первообразной для на интервале

*Свойства первообразной*

1. Если   ̶ первообразная для функции,  то  ,  где  – константа, также является

первообразной для той же функции.

*Док-во:*

2. Если  и   – две первообразные для одной и той же функции ,  то ,

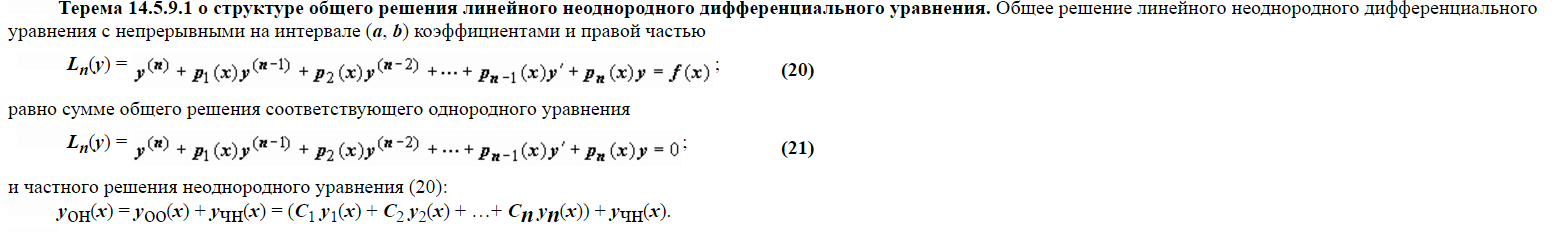
  где   – константа.  
*Док-во:*

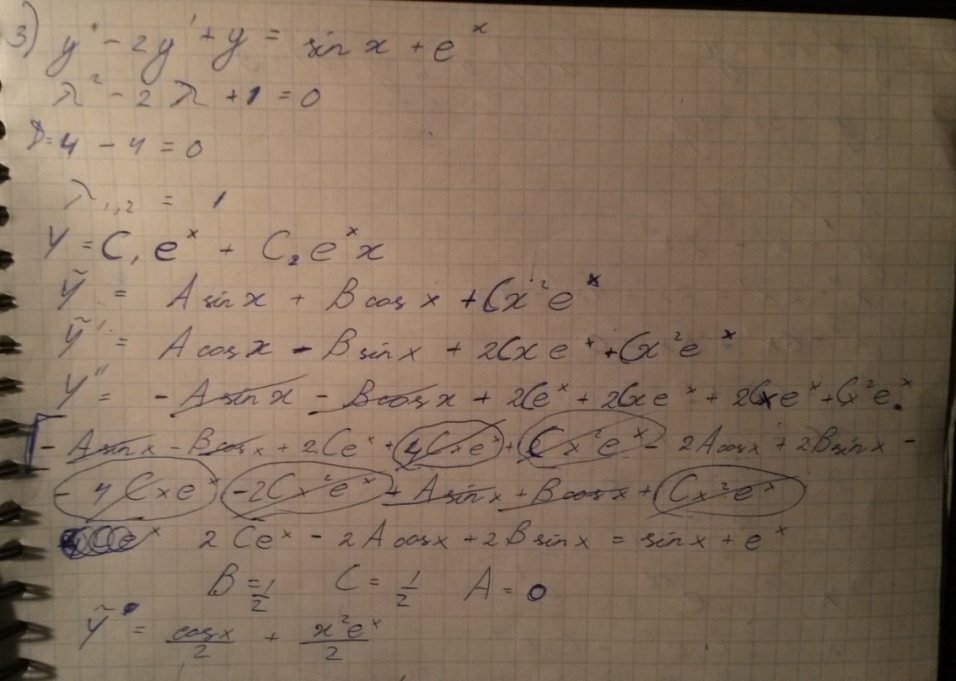
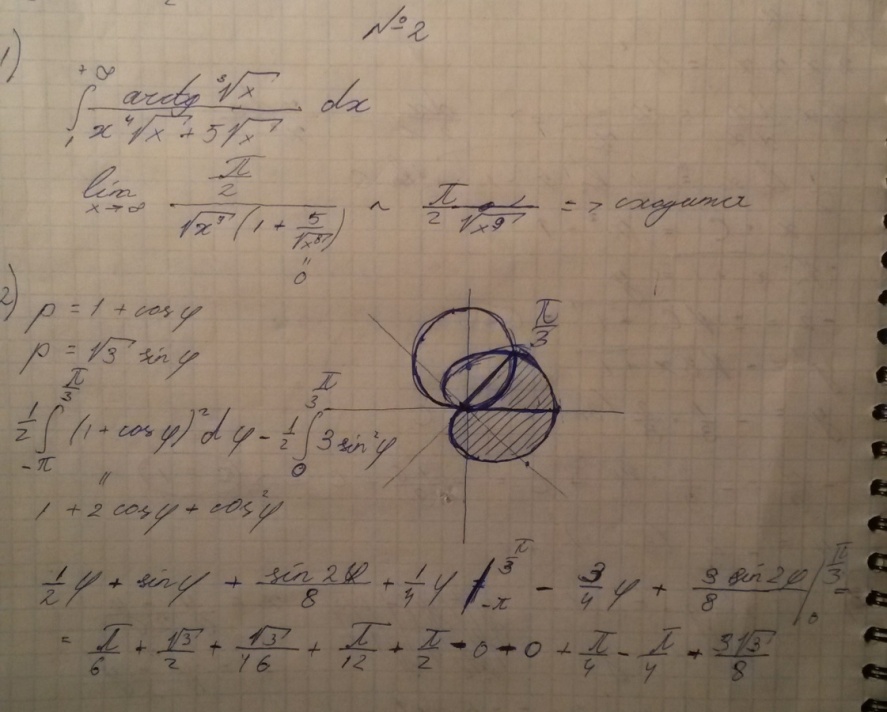
3.

*Док-во:* пусть  и   – первообразные для функций и соответственно.

Тогда   является первообразной для функции :

4., где и   – произвольные константы.





*Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси*

*Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси*

*Теорема***.**

Любую нормальную систему ДУ можно свести к дифференциальному уравнению -го порядка и наоборот.

*Док-во:*

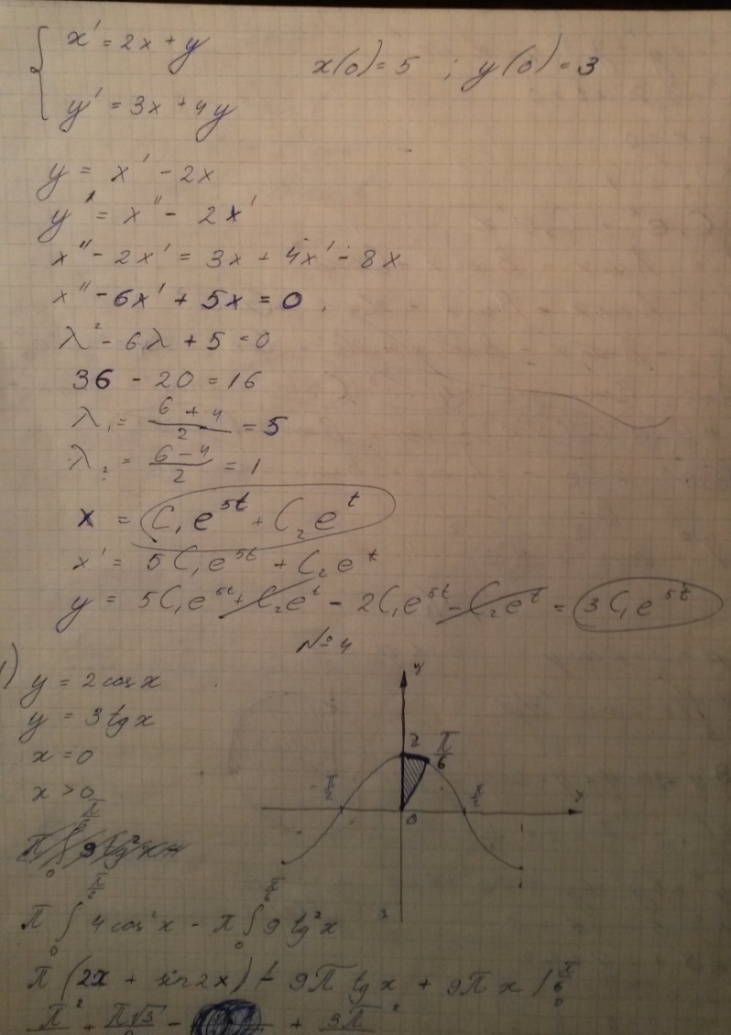
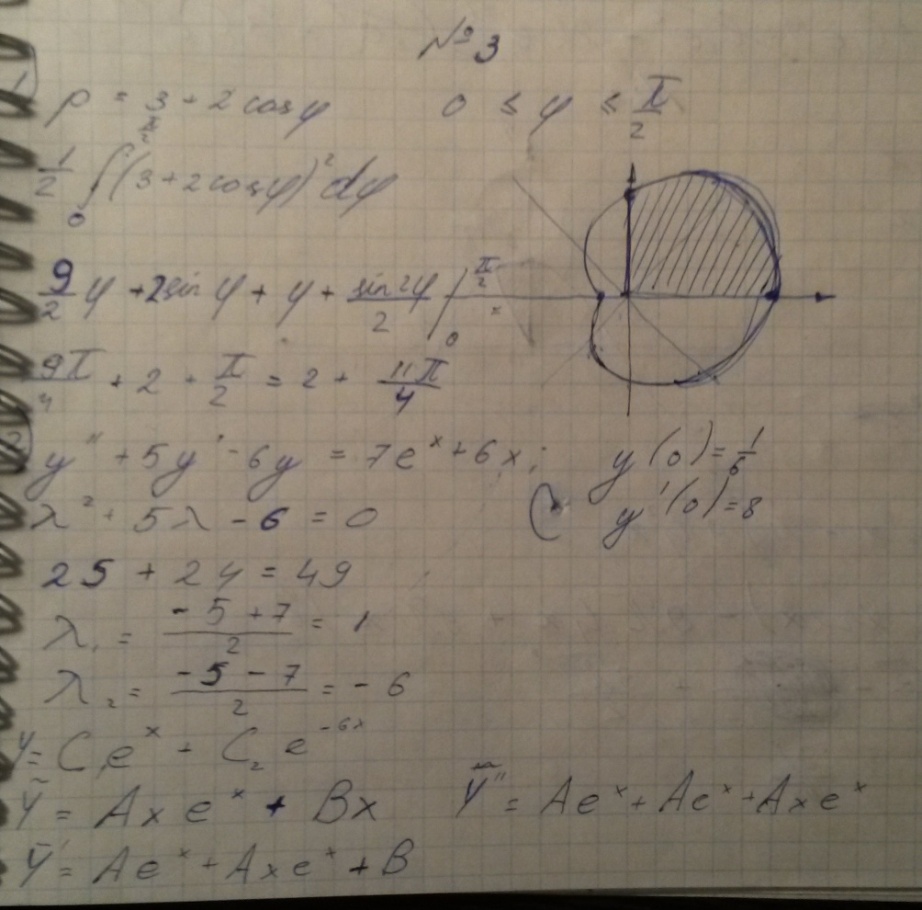
Сведение ДУ -го порядка к нормальной системе

Введём ДУ и пусть Тогда введённое уравнение равносильно системе:

Сведение нормальной системы к одному ДУ -го порядка

Рассмотрим случай Сведём к ДУ 2-го порядка, из 1-го ур-ия:

Если из 1-го уравнения системы можно выразить , то для получим уравнение 2-го порядка: =>. Тогда



*Площадь поверхности вращения. Вывод формулы для декартовой системы координат (ось вращения ).*

*Доказательство*

Пусть кривая , имеющая уравнение, вращается вокруг оси . Разобьем

на части и впишем в нее ломаную так, как это было сделано при

изучении длины дуги кривой. , где , – радиусы оснований конуса,

– длина его образующей.

Так же, как при выводе формулы длины дуги в декартовых координатах, можно получить,

что . Тогда

Площадь поверхности вращения

, - независимая переменная, - неизвестная функции.

Уравнение первого порядка записывается так:   
*Интегральная кривая*- график решения геометрически неопределённого интеграла,

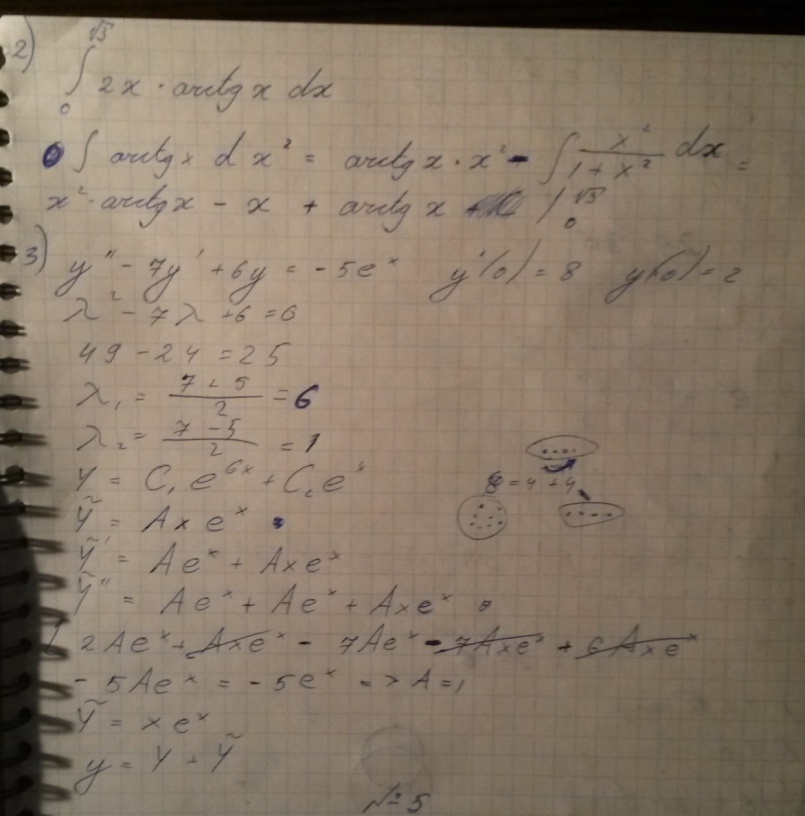
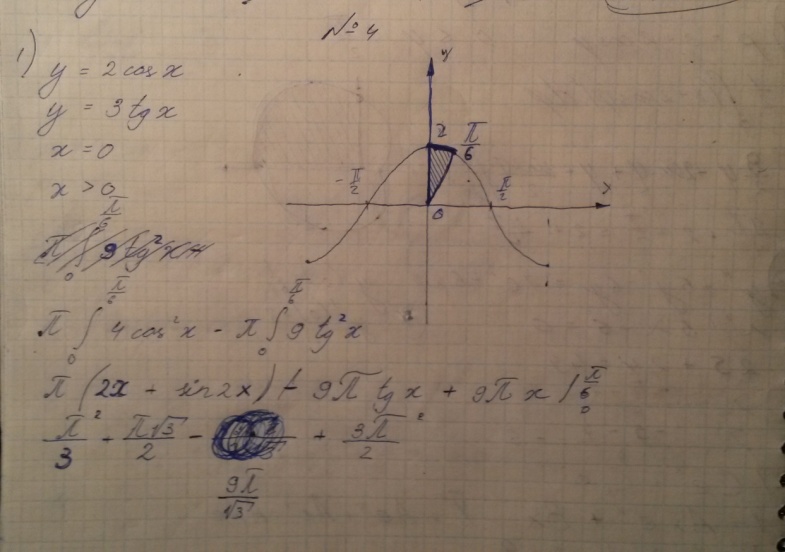
представляющего собой семейство «параллельных» кривых .

График каждой кривой и называется интегральной кривой.  
*Частное решение* **-** любая раз дифференцируемая функция ,

удовлетворяющая этому уравнению, т.е. обращающая уравнение на этом интервале в тождество.  
*Теорема Коши*.в области непрерывна и имеет непрерывную

частную производную→ для любой точки в окрестноститочки ***x***0

существует единственное решение задачи



*Определения*

Пусть функция  определена при и инт. на любом отрезке [a, b] . Тогда на промежутке [a, +∞) определена функция . Если существует (конечный) предел то этот предел называется *несобственным интегралом 1-го рода* от функции  по промежутку [a, +∞) и обозначается

В случае существования предела (\*) интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся.

*Свойства несобств. интеграла 1-го рода:*

*1) Аддитивность*

Пусть . Тогда несобственные интегралы и сходятся или расходятся одновременно и в случае сходимости =

Переходя к пределу , получаем требуемое

*2) Линейность*

Пусть существуют интегралы и

Тогда для Ɐα,β *ϵ R*справедливо

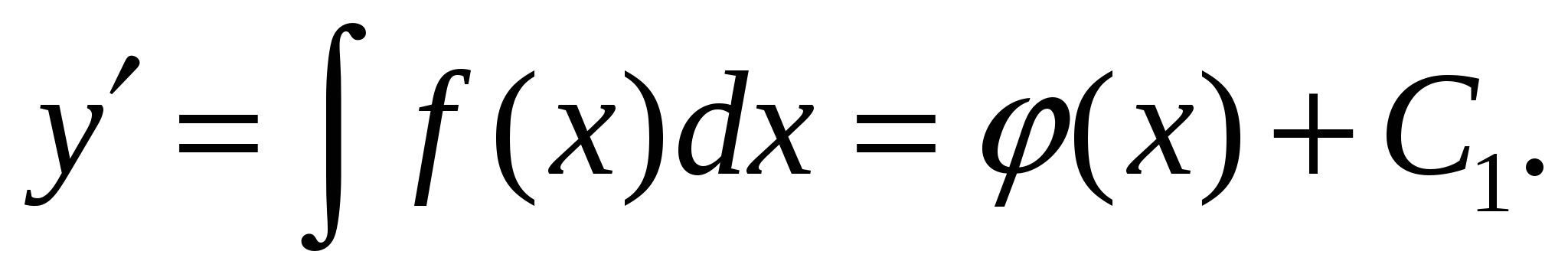
*3)* Пусть и инт. на промежутке , и пусть для справедливо неравенство

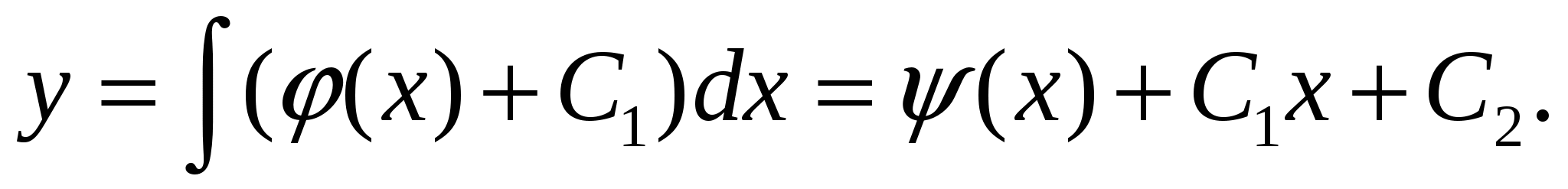
 . Тогда

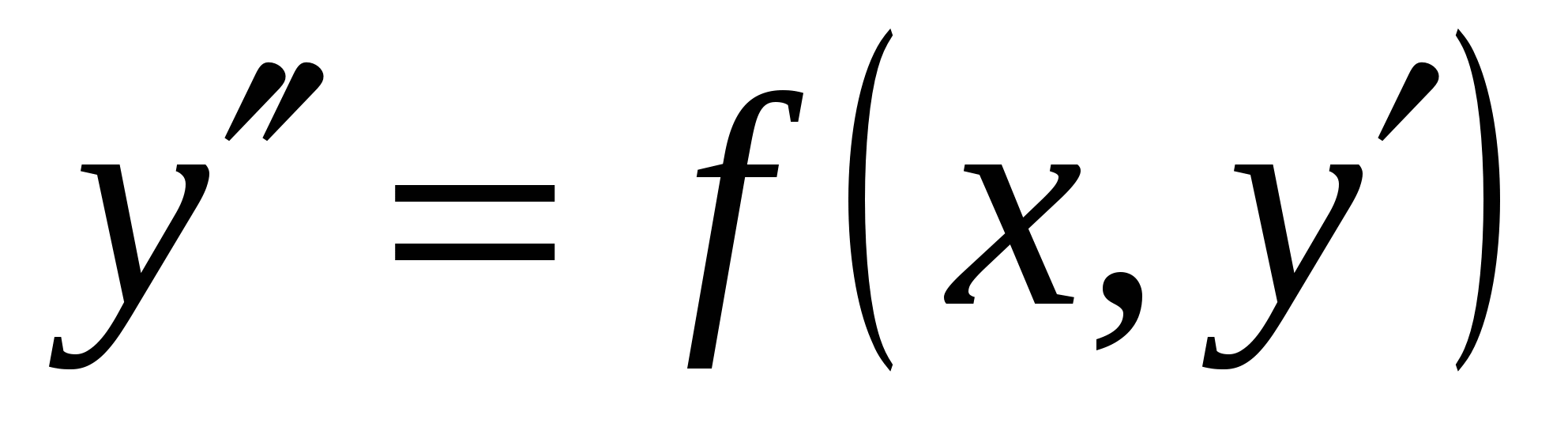
Доказательство очевидно.

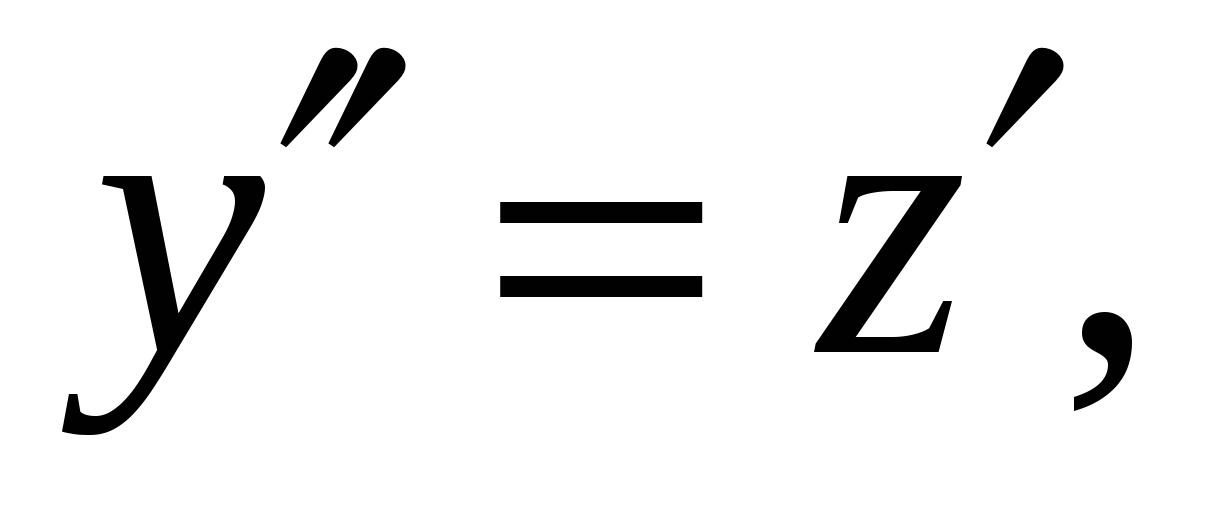
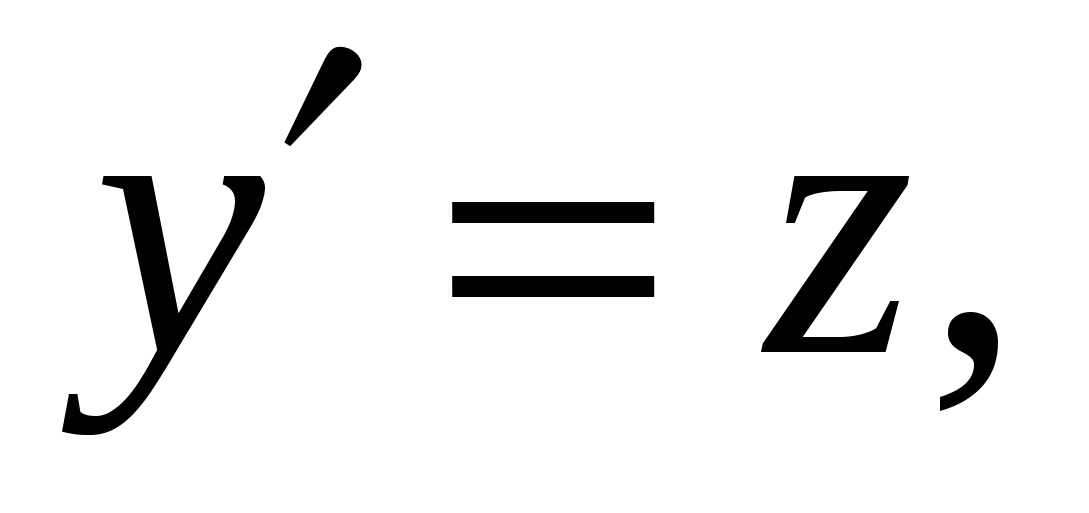
Исследуем сходимость интеграла в зависимости от α. При α≠1 имеем:

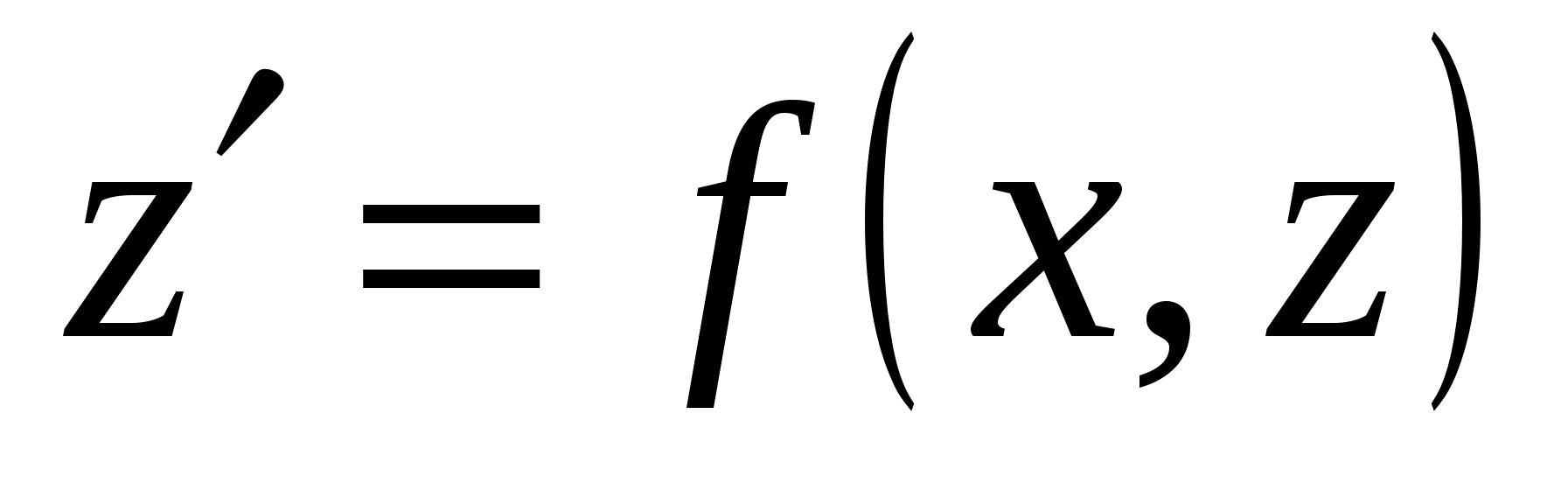
При α=1 получаем Значит интеграл сходится при и расходится при

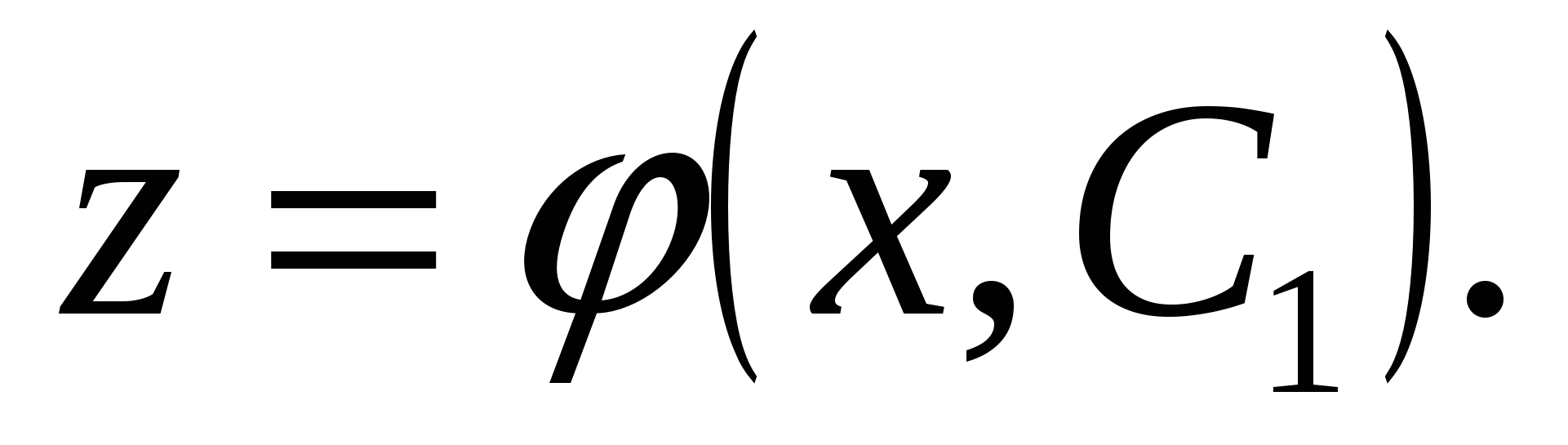
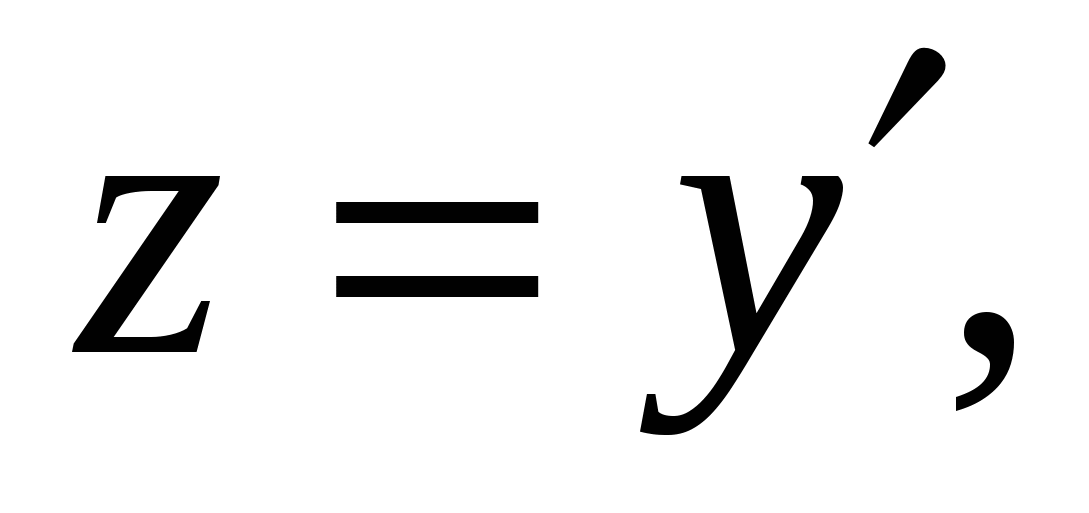
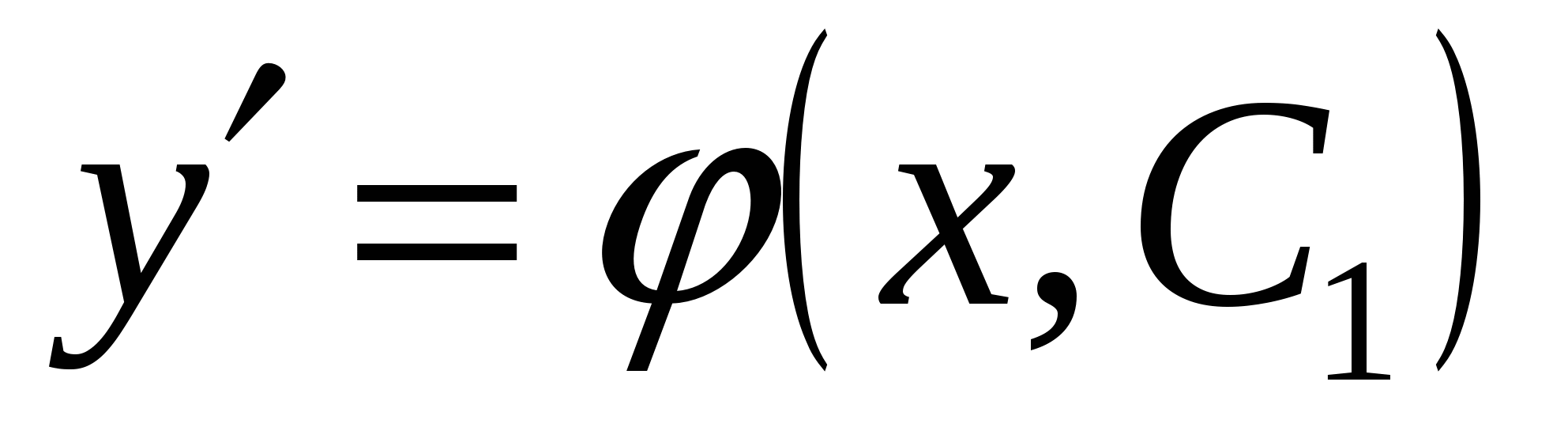
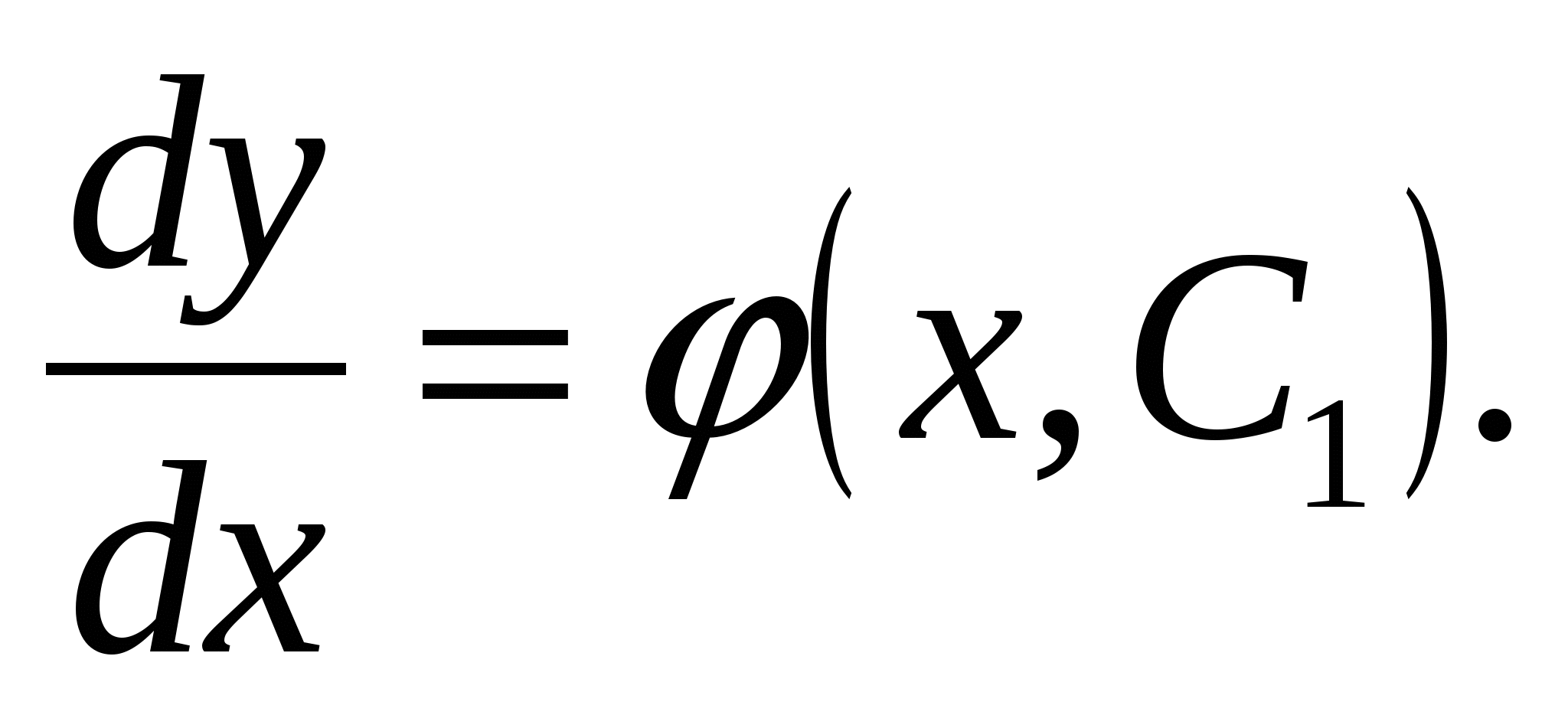


Интегрируя еще раз, получим общее решение: 

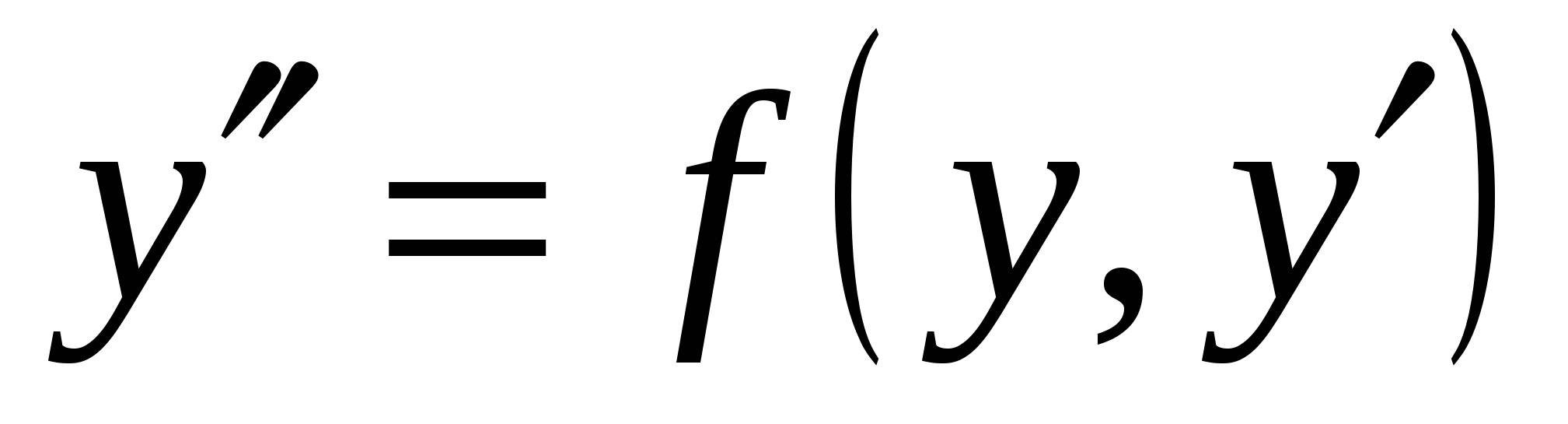
****

Правая часть уравнения не содержит искомой функции *у*. Уравнение решается с помощью подстановки: 

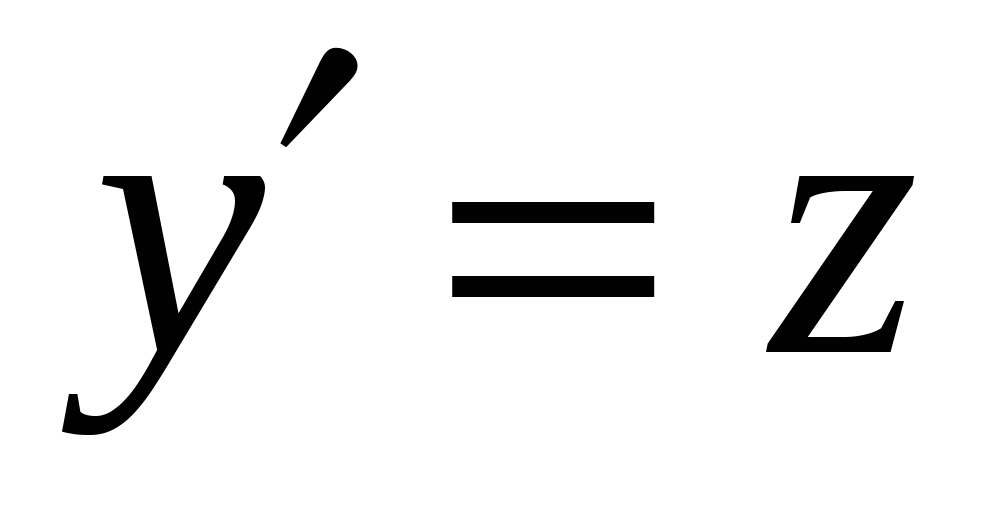
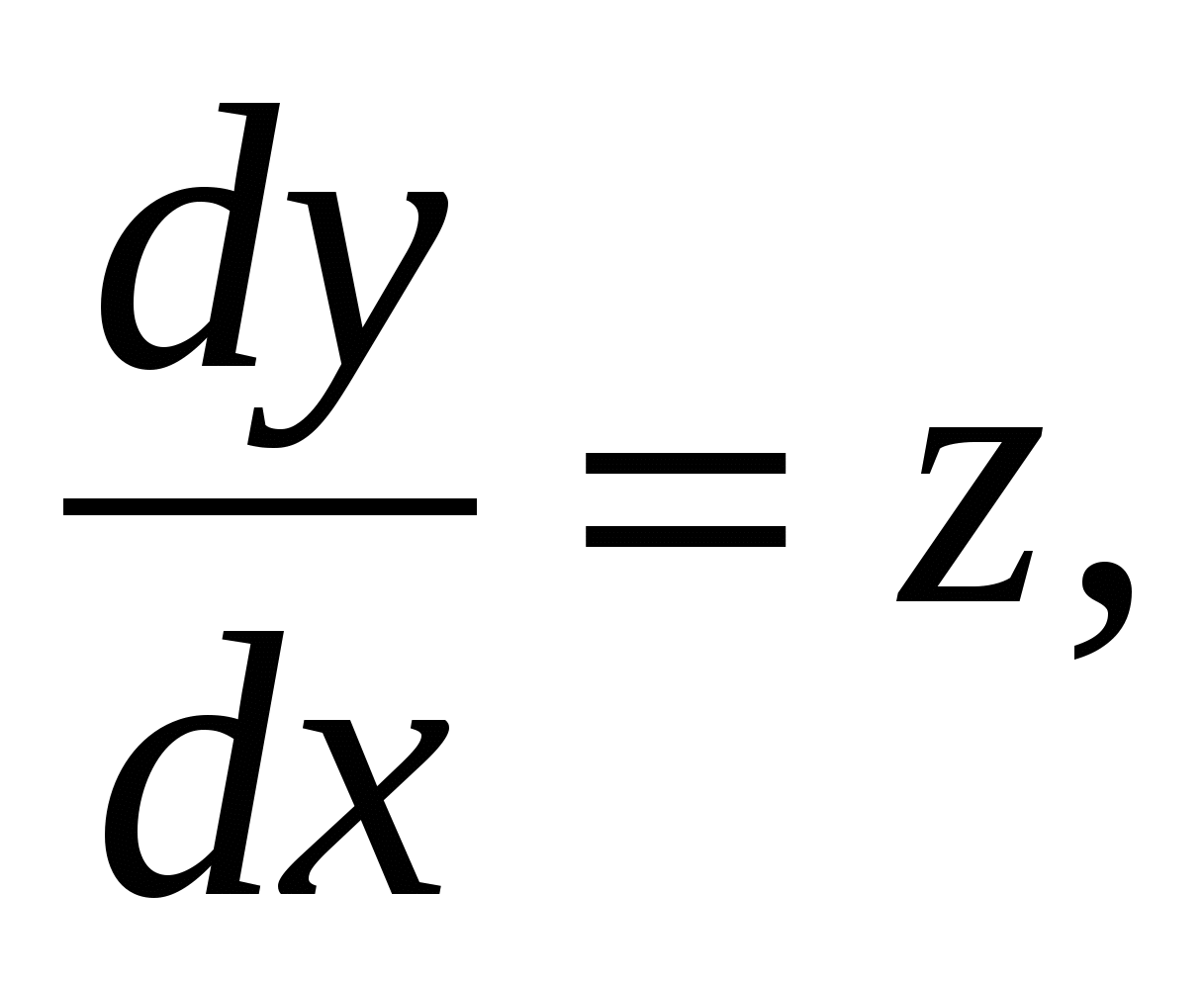
где *z*– функция от*х*. Тогда исходное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка: .

Решая это уравнение, найдем общее решение в видеДелая обратную замену**** получим еще одно дифференциальное уравнение первого порядка: или

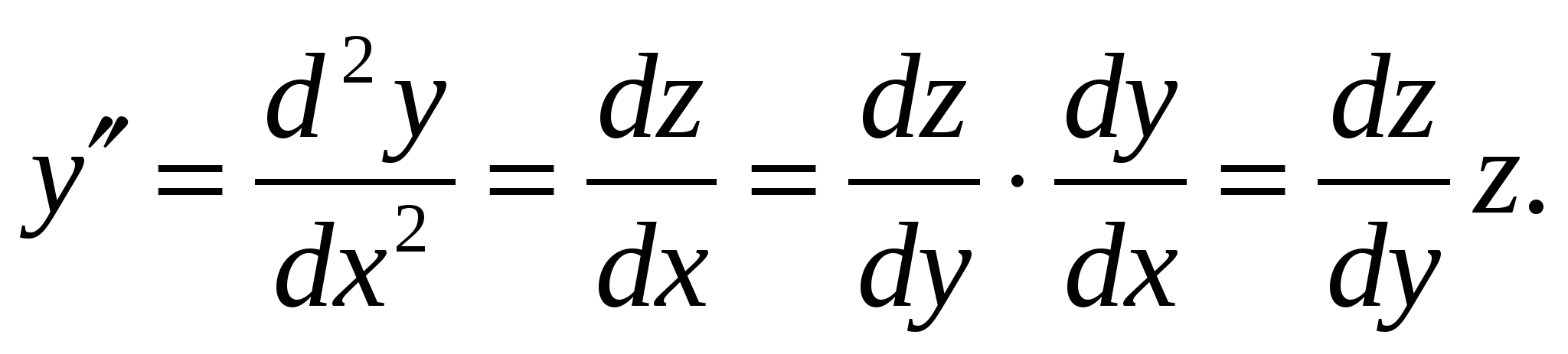
Разделяя переменные и интегрируя, получим общее решение

****

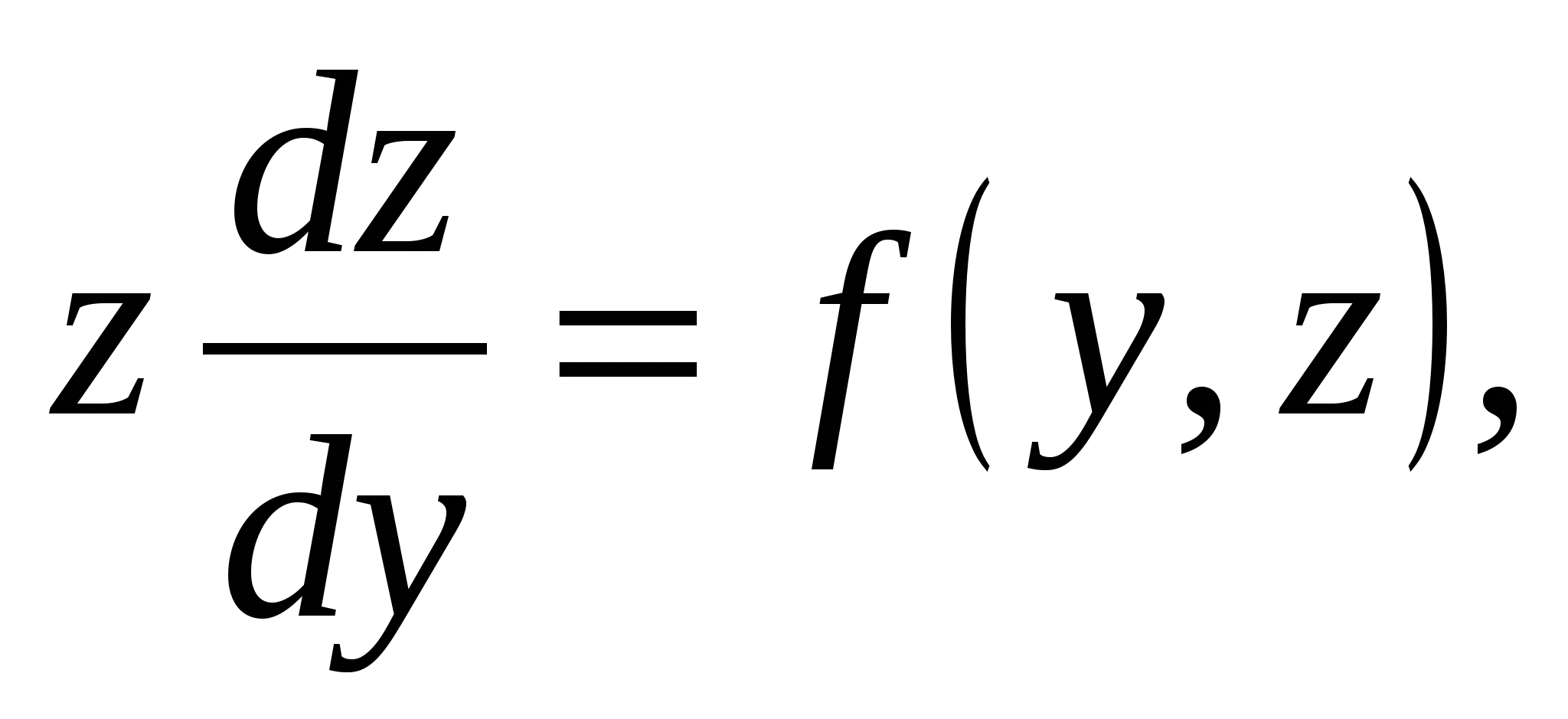
Правая часть уравнения не содержит независимой переменной *х*. Уравнение решается с помощью подстановки:

или ****

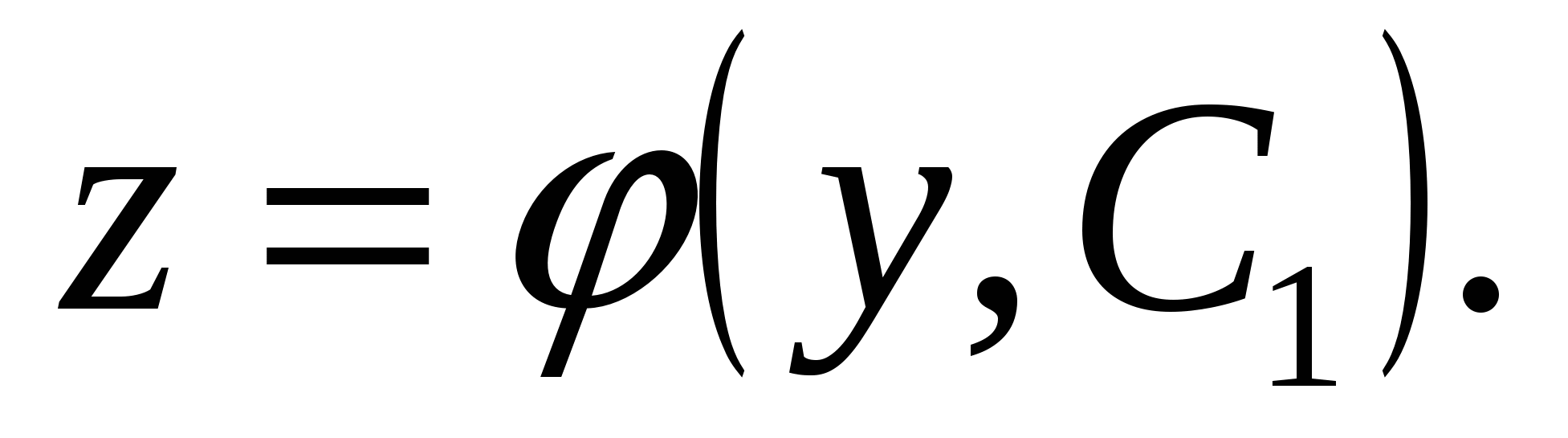
где *z*– функция от*у*, т.е.*z*=*z*[*y*(*x*)] – сложная функция от*х*. Тогда:

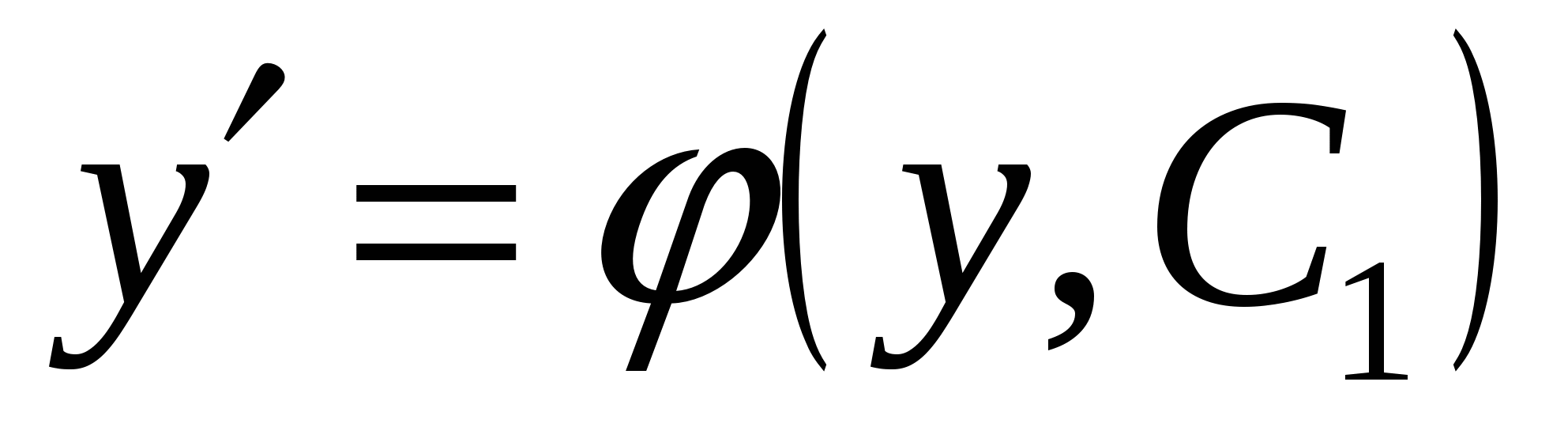
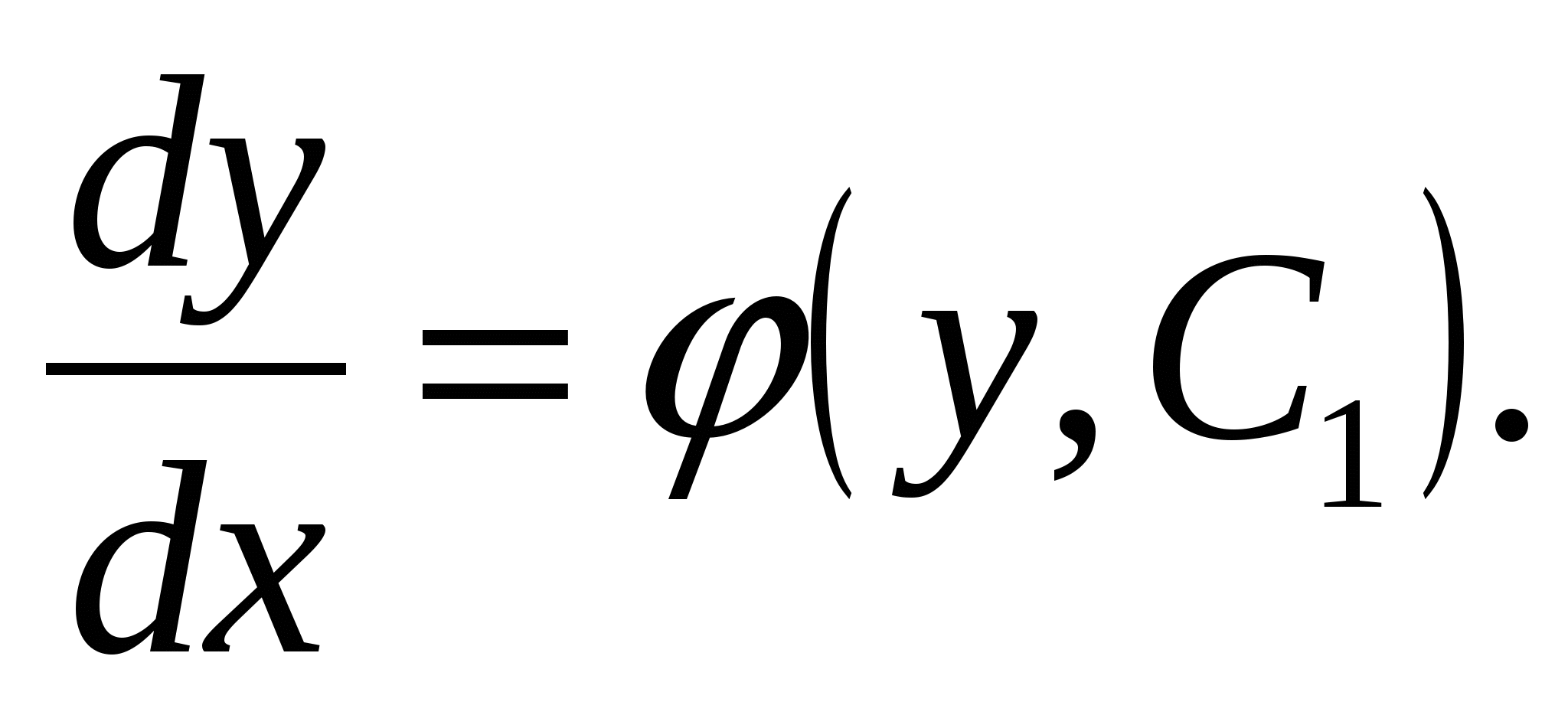


Исходное уравнение преобразуется в дифференциальное уравнение первого порядка:

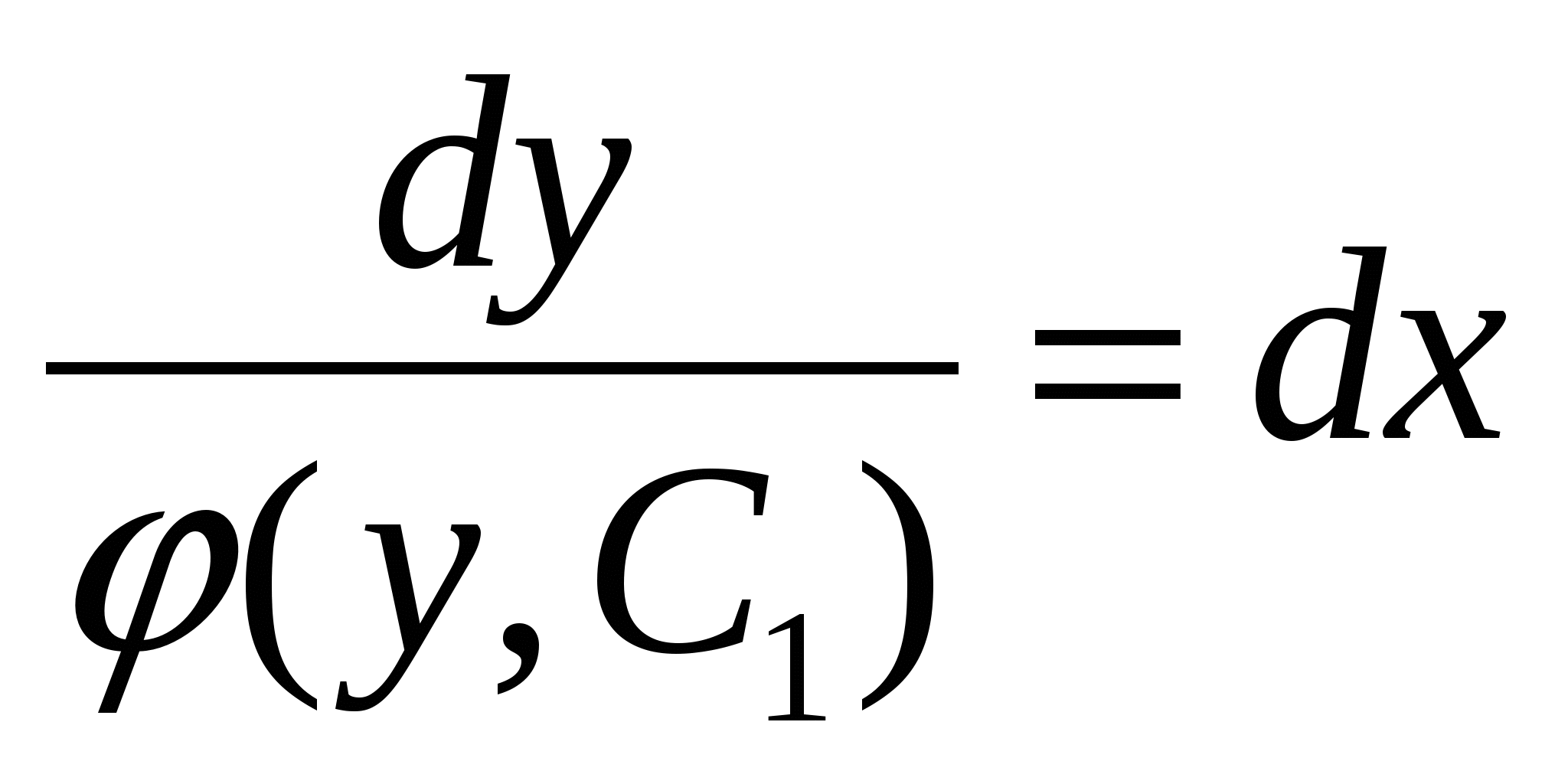


где *z –*искомая функция,*у*– независимая переменная.

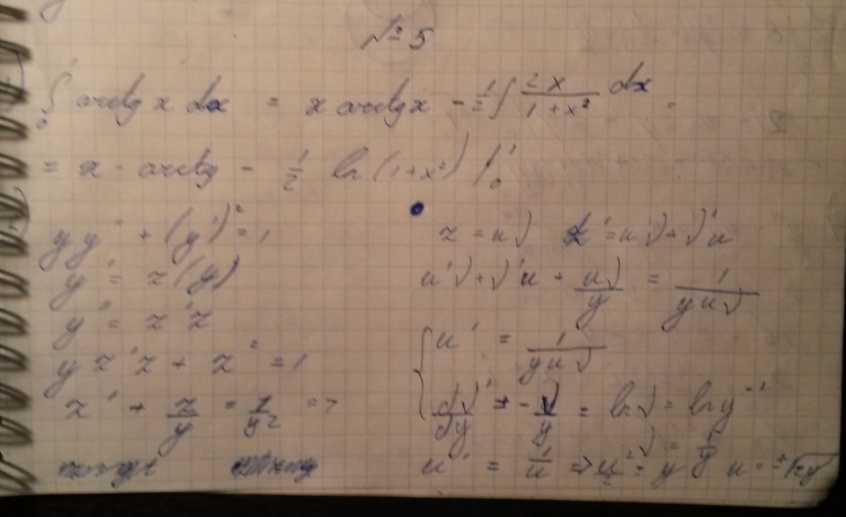
Решая это уравнение, найдем общее решение в видеДелая обратную заменуполучим еще одно дифференциальное уравнение первого порядка:

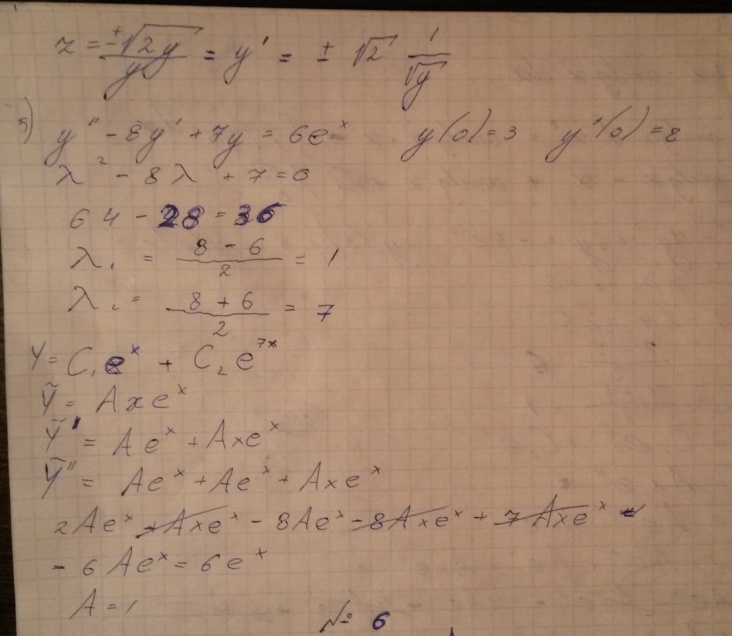
или 

Разделяя переменные



и интегрируя, получим общее решение





*Длина дуги. Вычисление длин дуг кривых, заданных в декартовых координатах*

*Доказательство*

Длина 1-го звена будет равняться . Применяем к формуле т. Лагранжа конечных приращений и получаем: . Bся длина ломаной будет равняться . Т.к. ф-ция непрерывна, то существует конечный предел суммы.

*Теорема***.**

Пусть в системе (2) правые части непрерывно дифференцируемы в области по всем переменным. Для того, чтобы непрерывно дифференцируемая функция была первым интегралом этой системы необходимо и достаточно, чтобы производная этой функции, составленная в силу системы, равнялась нулю всюду в области .

*Доказательство*. *Необходимость.*

Пусть первый интеграл системы (2),и пусть - произвольная точка области . По теореме существования и единственности найдется решение системы (2), заданное на некотором интервале , содержащем точку ,

удовлетворяющее начальным условиям Далее , т.к. Ф- первый интеграл системы (2), то функция x, постоянна на интервале

Для любого . Подставляя в последнее равенство получим ,что производная в силу системы

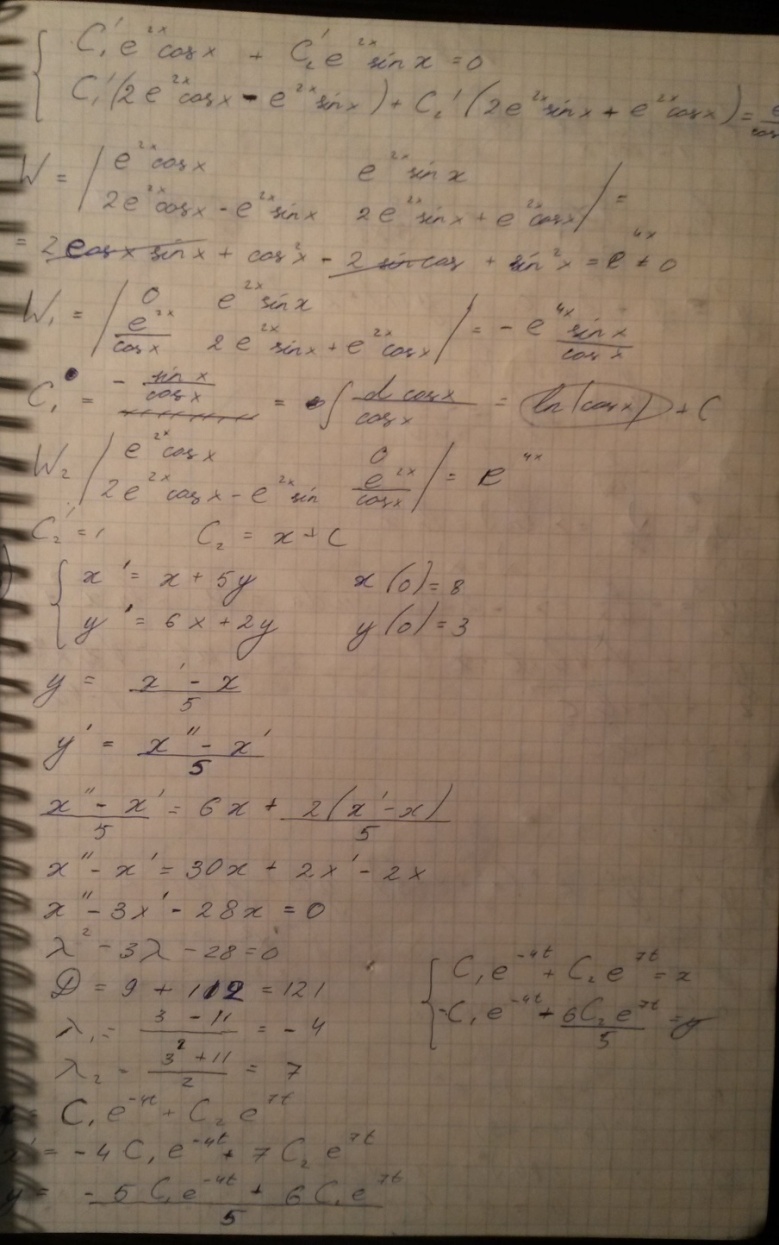
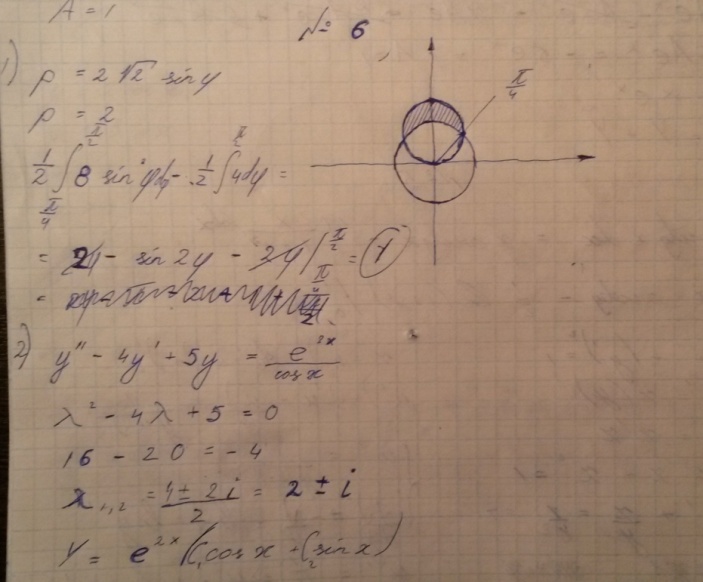
0 в точке области

*Достаточность .*

Пусть для функции производная в силу системы (2) равна нулю всюду в области .

Рассмотрим произвольное решение этой системы заданное на некотором интервале . Продифференцируем эту функцию пона указанном интервале:

Т.к. x,,и производная функция в силу системы равна нулю в каждой точке этой области. Мы видим что производная функции x, равна нулю в каждой точке интервала . Поэтому постоянна на этом интервале. Ч.т.д.



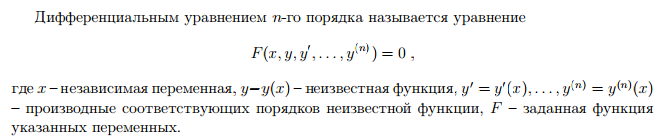
*Длина дуги. Вычисление длин дуг кривых, заданных в полярных координатах и параметрически.*

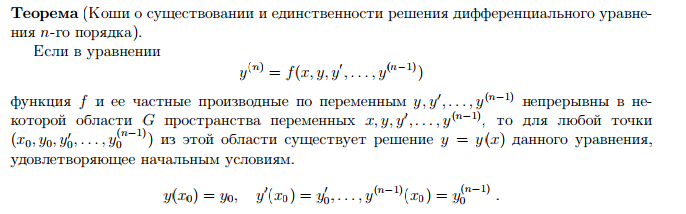
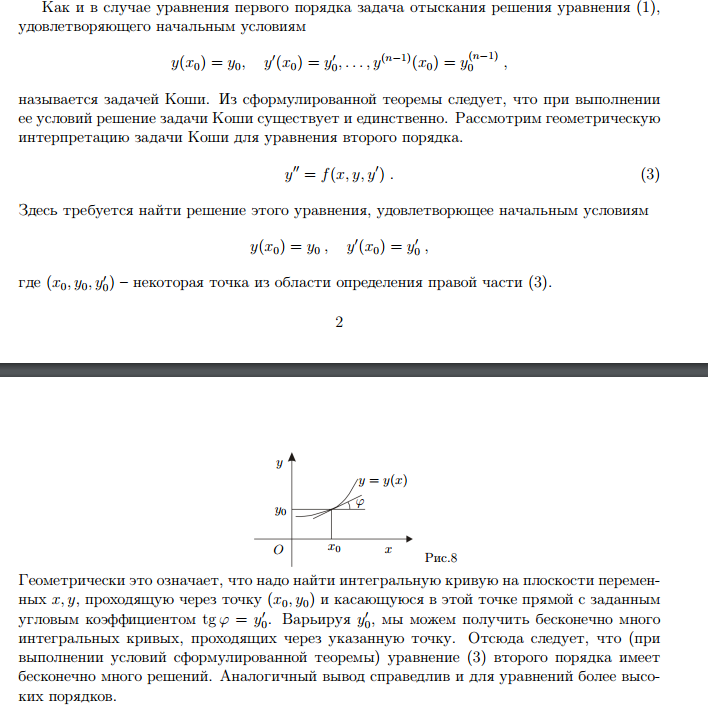
*Доказательство*

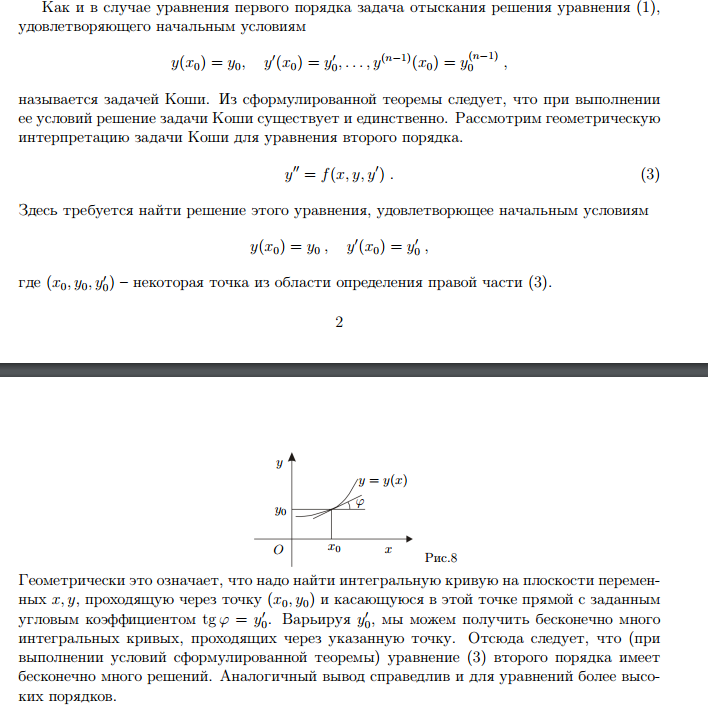
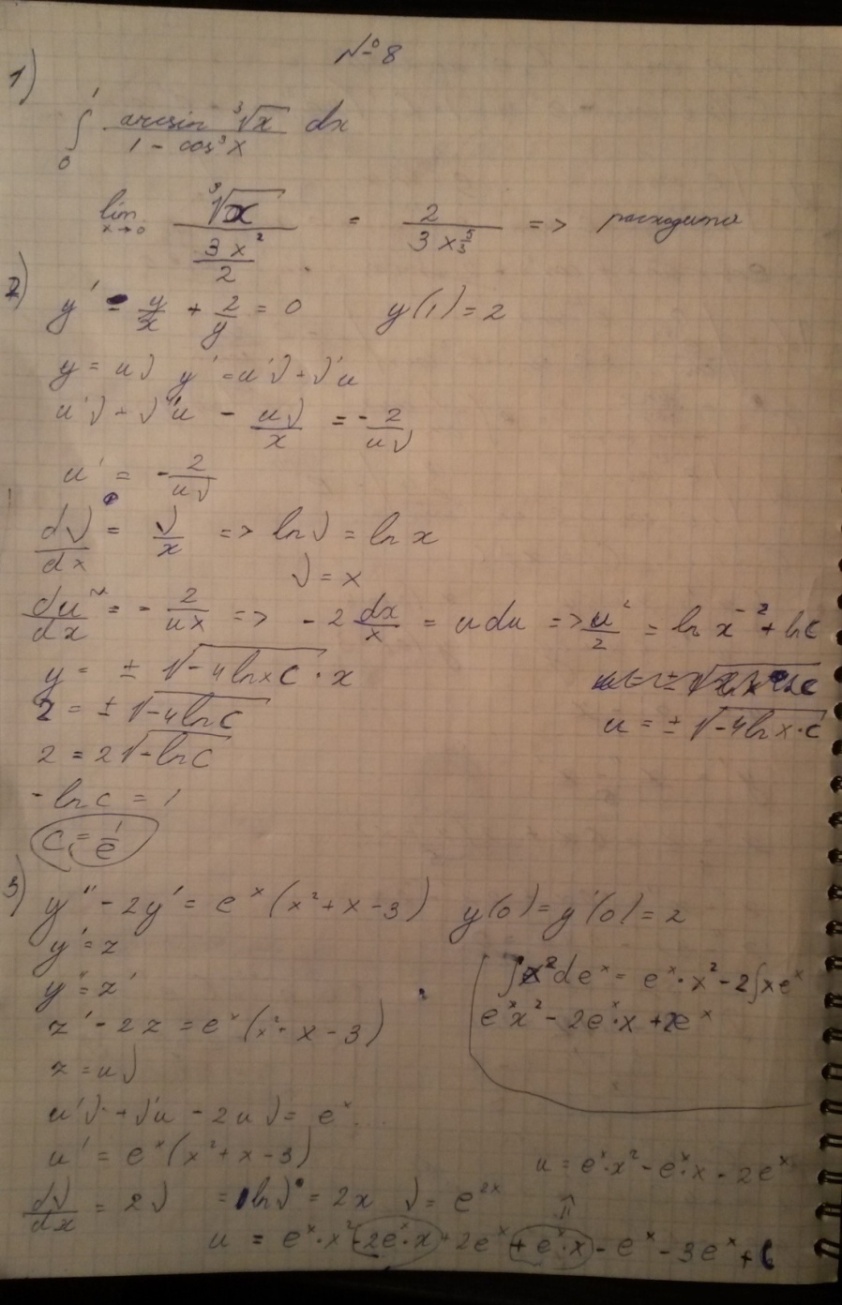
*Кривая задана в полярных координатах*

*Доказательство*

Легко сводится к предыдущему. Так как , , то, рассматривая полярный угол φ как параметр, получим; Теорема доказана.



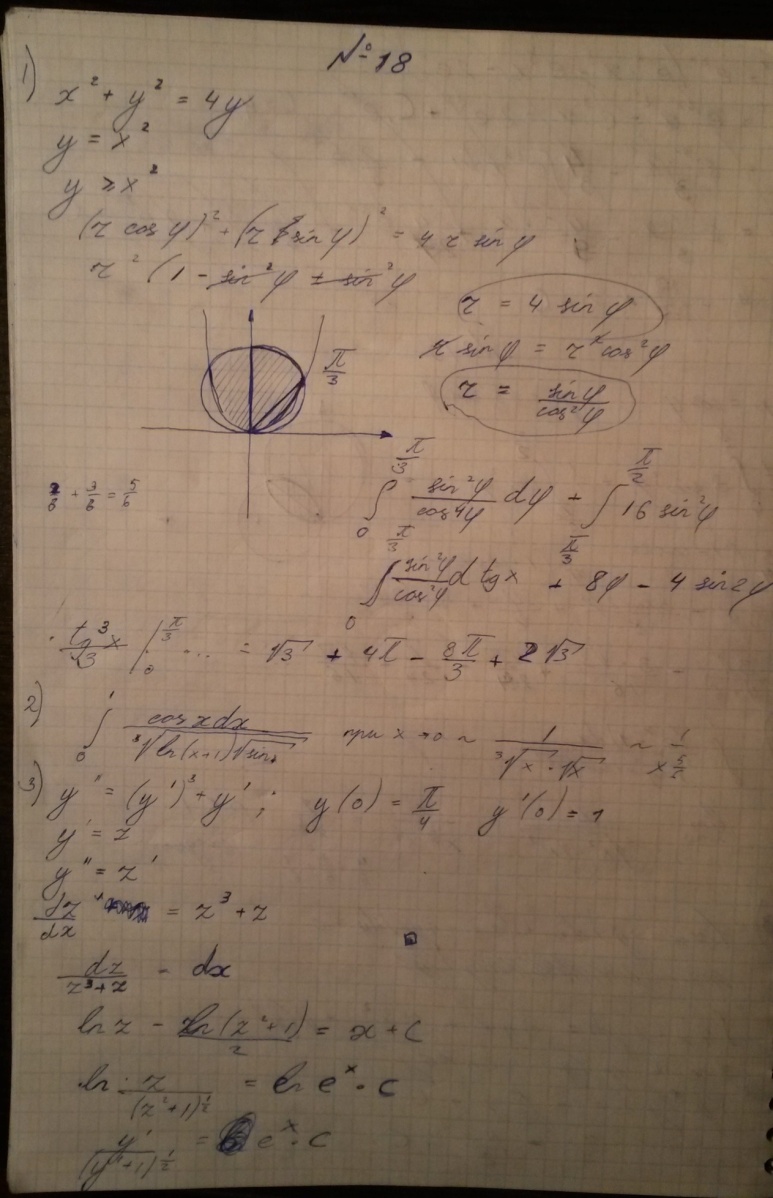


*Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси*

*Объем тела, образованного вращением криволинейной трапеции вокруг оси*

*Доказательство*

Пусть тело образовано вращением вокруг оси криволин. трапеции с основанием на оси и огранич. графиком непрерывной неотриц. функции. Элементами объема такого тела, образованными вращ. вокруг оси будем считать цилиндрическую оболочку радиуса х, толщины высотой .



*Теорема об интеграле периодической функции*

Если периодическая с периодом функция интегрируема на каком-либо отрезке длины , то она интегрируема на любом отрезке, и интегралне зависит от.

*Доказательство*

Теорема доказана.

Пусть функцияинтегрируема на отрезке . Тогда

Предположив, что функциянепрерывна, сделаем в первом интеграле замену ; получим:

Поэтому в случае четной функцииа в случае нечетной

Теорема(О понижении порядка ОЛДУ при известном частном решении).

Если известно одно частное решение линейного однородного уравнения второго порядка, то нахождение общего решения сводится к интегрированию функций.

Доказательство.

Пусть у1 есть известное частное решение уравнения . Найдем другое частное решение данного уравнения так, чтобы у1 и у2 были линейно независимы. Тогда общее решение выразится формулой, где С1 и С2—произвольные постоянные. На основании формулы Остроградского-Лиувилля можно написать:

Таким образом, для определения у2 мы получаем линейное уравнение первого порядка. Проинтегрируем его следующим образом. Разделим все члены на

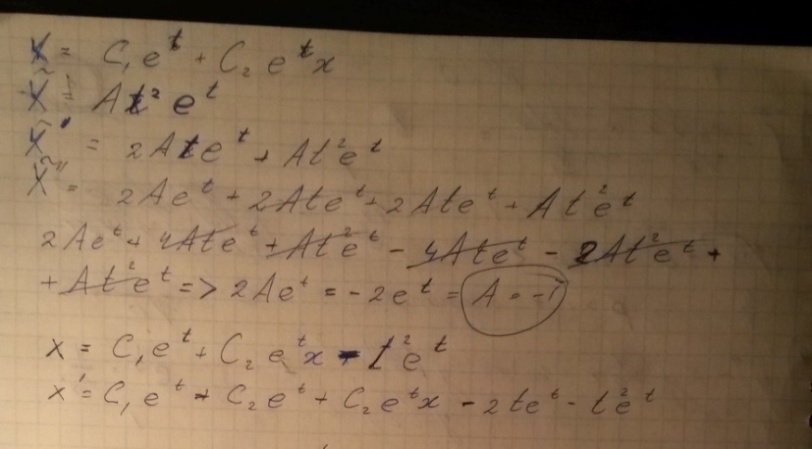
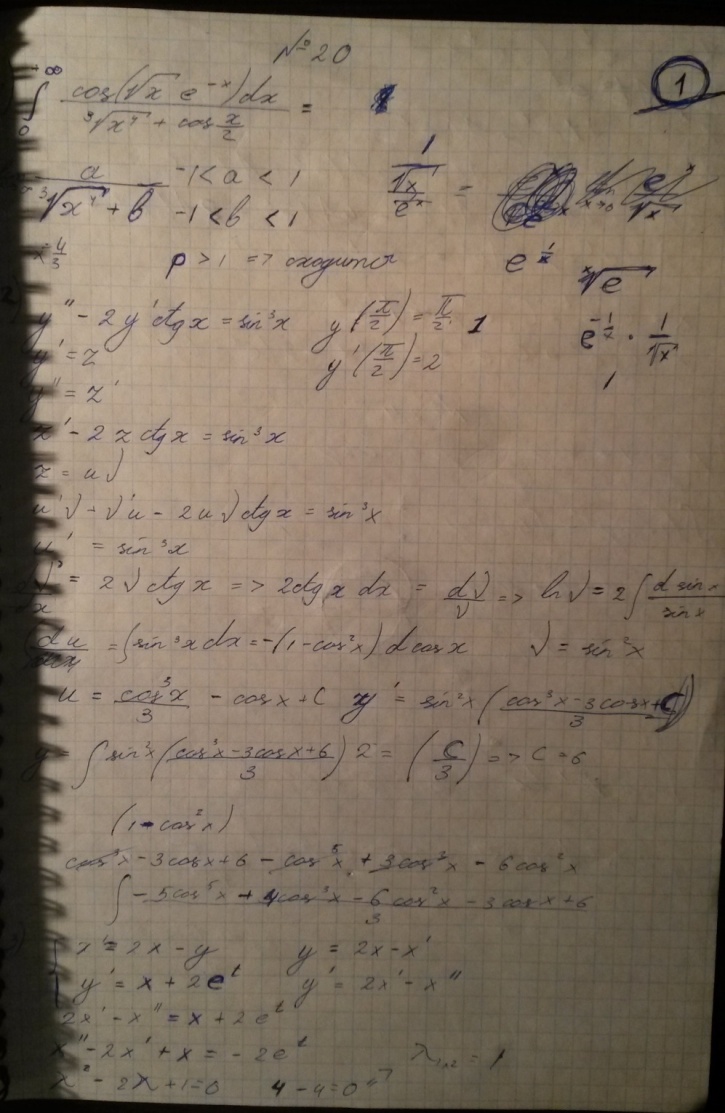
или=

Отсюда

Так как мы ищем частное решение, то, положив С2=0, С=1, получаем

Очевидно, что у1 и у2—линейно независимые решения, так как

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид



*Определенный интеграл с переменным верхним пределом*

Если функция интегрируема на отрезке , то для любого , , существует интеграл

который называется интегралом с переменным верхним пределом.

*Теорема о производной интеграла с переменным верхним пределом*

Пусть функция интегрируема на отрезке и непрерывна в некоторой точке этого отрезка. Тогда функция дифференцируема в точке , и.

*Доказательство*

Достаточно доказать, что

Т.к. функция непрерывна в точке , то для любого существует число такое, что при любом , , выполняется неравенство . Поэтому для указанных

если . Это означает справедливость . Теорема доказана.

*Формула Ньютона-Лейбница*

Если функциянепрерывна на отрезке , и — какая-либо первообразная этой функции на указанном отрезке, то

*Доказательство*

Одной из первообразных функцииявляется

Подставим сюда и получим, что. Поэтому

При получаем требуемую формулу. Теорема доказана.

, - независимая переменная, - неизвестная функции.

Уравнение первого порядка записывается так:y’=f(x,y)  
*Интегральная кривая* - график решения геометрически неопределённого интеграла,

представляющего собой семейство «параллельных» кривых y = F(x)+ C. График каждой кривой и называется интегральной кривой.  
*Общее решение уравнения* - такое соотношение

что любое решение относительно - частное решение уравнения;  
*Частное решение* **-** любая ***n*** раз дифференцируемая функция,обращающая

уравнение на этом интервале в тождество.  
*Особые точки и особые решения уравнения первого порядка***.** В окрестности т-ки нарушается

сущ. и единственность решения задачи Коши → точку называют *особой точкой*

дифференциального уравнения. Решение уравнения, в каждой точке которого нарушается его единственность - *особое решение.*

***24***

*Площадь криволинейной трапеции*

*Доказательство*

*Утверждение*

Пусть функции и заданы и непрерывны на .Площадь фигуры,

ограниченной графиками и , а также прямыми и , вычисляется по формуле :

*Доказательство*

Обозначим искомую площадь между графиками через , площадь под графиком функции через ,

а площадь под графиком функции через .

Очевидно, что . C другой стороны, , aОтсюда получаем:

*Площадь фигур в ПСК*

*Доказательство*

*Площадь фигуры, заданной параметрически*

*Доказательство*

Эта формула получается из формулы площади криволинейной трапеции

 подстановкой  :

Рассмотрим линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

,

где a1, . . . , an – вещественные числа. Уравнение называется *характеристическим уравнением* дифференциального уравнения.

Характеристическое уравнение есть квадратное уравнение, имеющее два корня; обозначим их через λ1 и λ2. При этом возможны следующие случаи:

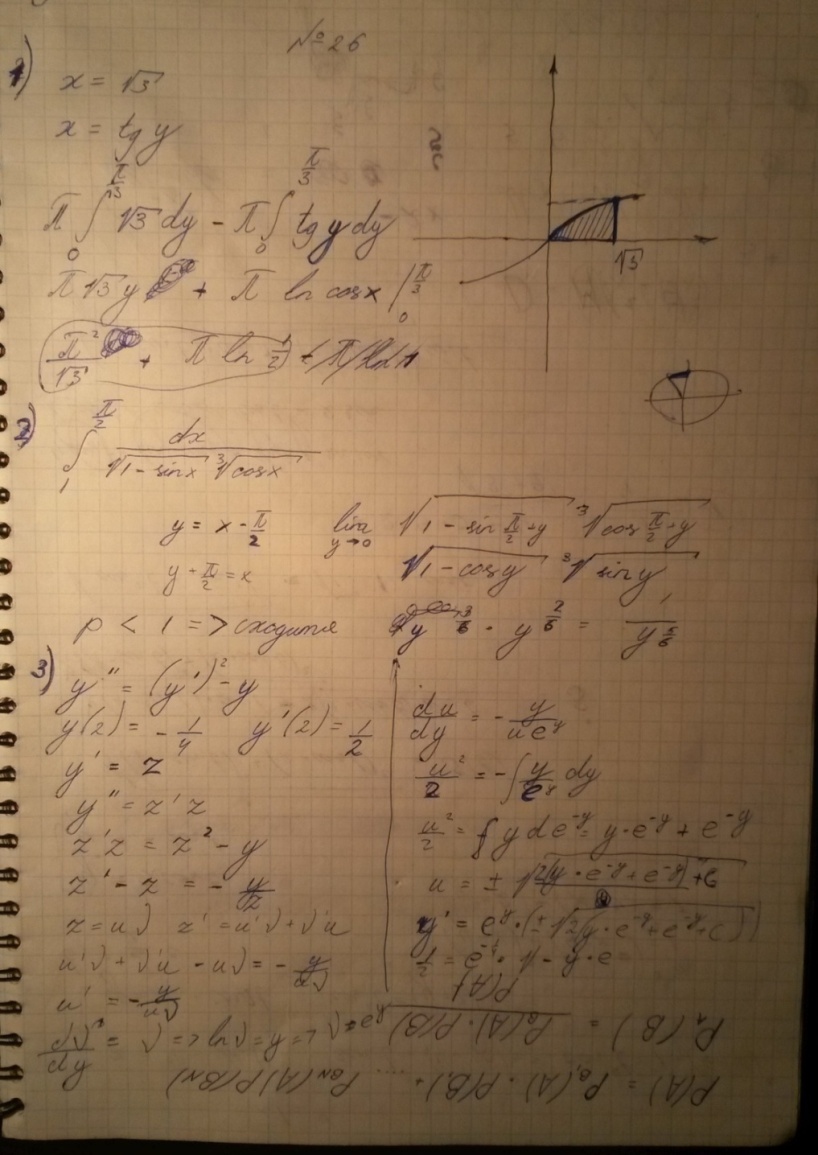
1)λ1 и λ2—действительные и притом не равные между собой числа. Тогда  
Вронскиан этих функций не равен нулю, следовательно, они линейно независимы и образуют фундаментальную систему решений.

Теорема

Если корни характеристического уравнения λ1 и λ2 удовлетворяют , то являются решениями ДУ.

Доказательство

Непосредственно проверка. Подставляем и убеждаемся, что корни характеристического уравнения совпадают со значениями λ1 и λ2.



*Линейность*

Пусть и интегрируемы на отрезке , и пусть и — произвольные вещественные числа. Тогда функция также интегрируема на, и

*Доказательство*

После перехода к пределу получим требуемое.

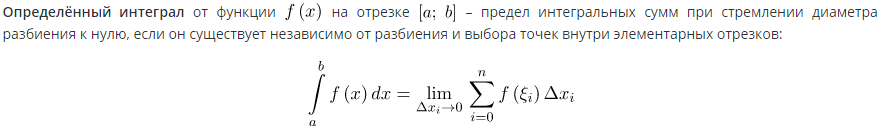
*Аддитивность*

Пусть функция интегрируема на отрезках и . Тогда она интегрируема и на отрезке , причем

*Доказательство*

Поскольку интегрируема на , то при составлении интегральной суммы для интеграла из левой части доказываемого равенства можно считать, что соответствующее разбиение содержит точку . Тогда сумма

будет интегральной суммой для интегралаи одновременно для и . После перехода к пределу получим требуемое.



***27***

*Теорема об интегрировании по частям*

Пусть функции и дифференцируемы на промежутке , и функция имеет на этом промежутке первообразную. Тогда

*Доказательство*

*Пример*

Теорема (о наложении частных решений).

Пусть имеются два линейных неоднородных уравнения ; где, и пусть y1 = y1(x) и y2 = y2(x) – решения этих уравнений. Тогда y1(x) + y2(x) будет решением уравнения

Доказательство.

Имеем , т.е. y1 +y2 – решение уравнения . Теорема доказана.

Пусть правая часть уравненияс постоянными коэффициентами имеет вид . В частности, если λ=α+βi - комплексное число, то наиболее общей правой частью указанного типа является функция у которой P(x)и Q(x)- некоторые полиномы. Справедлив следующий результат.

 Линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами и правой частью данного специального вида имеет частное решение , где k - кратность корня α+βi характеристического полинома соответствующего однородного уравнения, R(x) , S(x) - полиномы, подлежащие определению, степень которых равна максимальной степени полиномов P(x) , Q(x).

29

*Определение*

Пусть функции и заданы на одном интервале. Функция называется первообразной для на этом интервале, если для любого существует производная, равная .

*Пример*

Функция является первообразной для на интервале

*Свойства первообразной*

1. Если   ̶ первообразная для функции,  то  ,  где  – константа, также является первообразной для той же функции.

*Док-во:*

2. Если  и   – две первообразные для одной и той же функции ,  то ,  где   – константа.  
*Док-во:*

3.

*Док-во:* пусть  и   – первообразные для функций и соответственно.

Тогда   является первообразной для функции :

4., где и   – произвольные константы.

