Viện Điện Bộ môn Điều khiển tự động	**EE2000 Tín hiệu và hệ thống** **Thi cuối kỳ 20131B** Thời gian: 90 phút (28/12/2013) **Đề số 1**	Cán bộ ra đề thi Đỗ Thị Tú Anh

Lưu ý: Sinh viên được sử dụng vở ghi bài hoặc slide bài giảng. Nộp đề cùng bài làm.

Họ tên SV: ……Đáp án………………. Mã số SV: …………………………….

1. (3 điểm)

a) (1.5 điểm, mỗi tính chất trả lời đúng được 0.5 điểm)

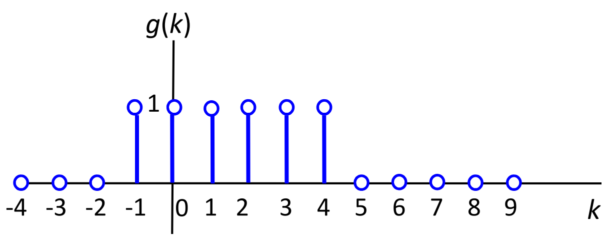
i) Do $g(-1)=1\neq 0$ nên $g(n)$ không phải là tín hiệu nhân quả. Vậy hệ không có tính nhân quả.

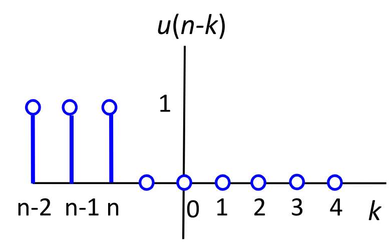
ii) Do $g(n)\neq K.\delta(n)$ với K là hằng số nên hệ không phải hệ tĩnh. Nói cách khác, hệ có tính động.

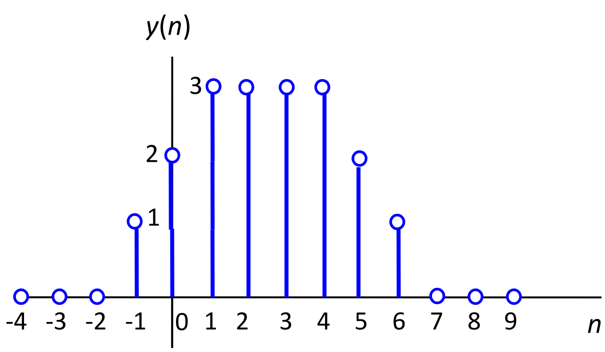
iii) Do $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|g(n)|=\sum_{n=-1}^{4}|g(n)|=6<\infty$ nên $g(n)$ khả tổng tuyệt đối. Do đó hệ ổn định.

b) (1.5 điểm, có thể làm theo một trong ba cách sau)

Cách 1: Theo công thức $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g(k)u(n-k)$, ta có đồ thị của $g(k)$, $u(n-k)$ và $y(n)$ như hình vẽ.







$n<-1,\quad y(n)=0,$

$n=-1,\quad y(-1)=1,$

$n=0,\quad y(0)=2,$

$n=1,\quad y(1)=3,$

$n=2,\quad y(2)=3,$

$n=3,\quad y(3)=3,$

$n=4,\quad y(4)=3,$

$n=5,\quad y(5)=2,$

$n=6,\quad y(6)=1,$

$n>6,\quad y(n)=0.$

Cách 2: Chuyển sang ảnh Z ta có:

$$Y(z)=U(z)G(z)=(1+z^{-1}+z^{-2})(z+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4})$$
$$=z+2+3z^{-1}+3z^{-2}+3z^{-3}+3z^{-4}+2z^{-5}+z^{-6}$$

và ta cũng có kết quả và đồ thị của $y(n)$ như trên.

Cách 3: Nhận thấy $u(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)$. Áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất dừng của hệ, ta có:

$$y(n)=g(n)+g(n-1)+g(n-2)$$

Vẽ đồ thị của $g(n), g(n-1)$ và $g(n-2)$ và cộng các đồ thị ta cũng có đồ thị của $y(n)$ như trên.

2. (3 điểm)

a) (1 điểm, mỗi tính chất nêu đúng được 0.3 điểm)

i) Hệ số khuếch đại tĩnh $k = \lim_{t\to\infty} h(t) = 1$.

ii) Bậc của hệ bằng 2 vì có 2 điểm cực.

iii) Hệ ổn định vì tất cả các điểm cực đều nằm hoàn toàn bên trái trục ảo.

b) (1 điểm) Do hệ có một điểm không là $s = -1$ và hai điểm cực là $s_{1,2} = -2 \pm j$ nên hàm truyền của hệ có dạng:

$$G(s) = \alpha \frac{s+1}{(s+2-j)(s+2+j)} = \alpha \frac{s+1}{s^2+4s+5}$$

Mặt khác vì $k = \lim_{s\to 0} G(s) = 1$ nên suy ra $\alpha = 5$. Vậy ta có $G(s) = \dfrac{5(s+1)}{s^2+4s+5}$.

c) (1 điểm) Ta phân tích $G(s) = 5\left(\dfrac{s+2}{(s+2)^2+1^2} - \dfrac{1}{(s+2)^2+1^2}\right)$.

Vậy $g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = 5(e^{-2t}\cos t - e^{-2t}\sin t).1(t) = 5\sqrt{2}e^{-2t}\cos(t+\frac{\pi}{4}).1(t)$.

3. (4 điểm)

a) (1.5 điểm) Để tìm đáp ứng tần số của hệ thống A, ta lấy ảnh Fourier của hai vế của phương trình vi phân của hệ, sẽ được:

$$j\omega X(j\omega) + X(j\omega) = j\omega U(j\omega) + 5U(j\omega)$$
$$(j\omega+1)X(j\omega) = (j\omega+5)U(j\omega)$$

Do đó $G_A(j\omega) = \dfrac{X(j\omega)}{U(j\omega)} = \dfrac{j\omega+5}{j\omega+1}$. Mặt khác đáp ứng tần số của hệ thống B là:

$G_B(j\omega) = F\{g_B(t)\} = \dfrac{1}{j\omega+10}$ (sử dụng định nghĩa của phép biến đổi Fourier hoặc tra bảng).

Vậy $G(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}.\dfrac{X(j\omega)}{U(j\omega)} = G_B(j\omega)G_A(j\omega) = \dfrac{j\omega+5}{(j\omega+1)(j\omega+10)} = \dfrac{j\omega+5}{(j\omega)^2+11j\omega+10}$ (1)

b) (1.5 điểm) Với $\omega = 10$ rad/s, ta có $G(j10) = \dfrac{5+j10}{(j10)^2+11(j10)+10} = \dfrac{5+j10}{-90+j110}$. Do đó:

$|G(j10)| = \dfrac{\sqrt{5^2+10^2}}{\sqrt{90^2+110^2}} \approx 0.0787$ và $\angle G(j10) = \arctan\left(\dfrac{10}{5}\right) - \arctan\left(\dfrac{110}{-90}\right) \approx 2$ rad = 114°

Vậy $y(t) = 3.|G(j10)|\cos(10t+30^\circ+\angle G(j10)) = 0.24\cos(10t+144^\circ)$.

c) (1 điểm) Từ (1) ta có phương trình vi phân của cả hệ thống là:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 11\frac{dy}{dt} + 10y(t) = \frac{du}{dt} + 5u(t)$$

Vậy mô hình trạng thái dạng chuẩn của cả hệ là:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix}5 & 1\end{bmatrix}x$$

Viện Điện Bộ môn Điều khiển tự động	**EE2000 Tín hiệu và hệ thống** **Thi cuối kỳ 20131B** Thời gian: 90 phút (28/12/2013) **Đề số 2**	Cán bộ ra đề thi Đỗ Thị Tú Anh

Lưu ý: Sinh viên được sử dụng vở ghi bài hoặc slide bài giảng. Nộp đề cùng bài làm.

Họ tên SV: …………Đáp án……………………. Mã số SV: ……………………………….

1. (3 điểm)

a) (1.5 điểm, mỗi tính chất trả lời đúng được 0.5 điểm)

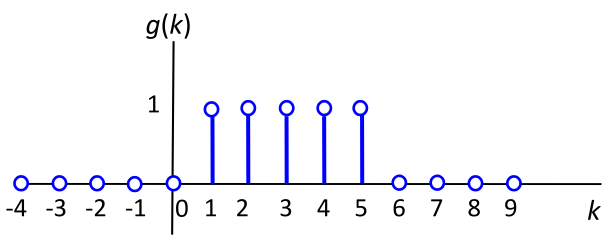
i) Do $g(n)=0$ với $\forall n<0$ nên $g(n)$ là tín hiệu nhân quả. Vậy hệ có tính nhân quả.

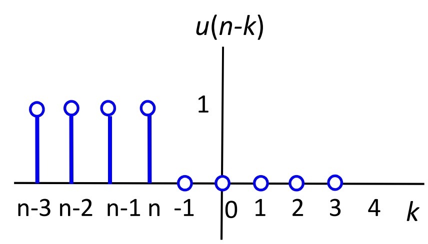
ii) Do $g(n)\neq K.\delta(n)$ với K là hằng số nên hệ không phải hệ tĩnh. Nói cách khác, hệ có tính động.

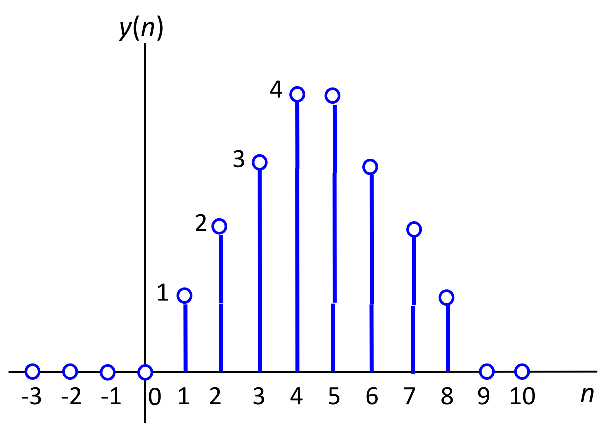
iii) Do $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|g(n)|=\sum_{n=1}^{5}|g(n)|=5<\infty$ nên $g(n)$ khả tổng tuyệt đối. Do đó hệ ổn định.

b) (1.5 điểm, có thể làm theo một trong ba cách sau)

<u>Cách 1</u>: Theo công thức $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g(k)u(n-k)$, ta có đồ thị của $g(k)$ và $u(n-k)$ và $y(n)$ như hình vẽ







$n<1,\quad y(n)=0,$
$n=1,\quad y(1)=1,$
$n=2,\quad y(2)=2,$
$n=3,\quad y(3)=3,$
$n=4,\quad y(4)=4,$
$n=5,\quad y(5)=4,$
$n=6,\quad y(6)=3,$
$n=7,\quad y(7)=2,$
$n=8,\quad y(8)=1,$
$n>8,\quad y(n)=0.$

<u>Cách 2</u>: Chuyển sang ảnh Z ta có:

$$Y(z)=U(z)G(z)=(1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3})(z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+z^{-5})$$
$$=z^{-1}+2z^{-2}+3z^{-3}+4z^{-4}+4z^{-5}+3z^{-6}+2z^{-7}+z^{-8}$$

và ta cũng có kết quả và đồ thị của $y(n)$ như trên.

<u>Cách 3</u>: Nhận thấy $u(n)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\delta(n-3)$. Áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất dừng của hệ, ta có:

$$y(n)=g(n)+g(n-1)+g(n-2)+g(n-3)$$

Vẽ đồ thị của $g(n), g(n-1), g(n-2)$ và $g(n-3)$ và cộng các đồ thị ta cũng có đồ thị của $y(n)$ như trên.

2. **(3 điểm)**

a) (1 điểm, mỗi tính chất nêu đúng được 0.3 điểm)

i) Hệ số khuếch đại tĩnh $k = \lim_{t\to\infty} h(t) = 1$.

ii) Bậc của hệ bằng 3 vì có 3 điểm cực.

iii) Hệ ổn định vì tất cả các điểm cực đều nằm hoàn toàn bên trái trục ảo.

b) (1 điểm) Do hệ có ba điểm cực là $s_2 = -2$ và $s_{2,3} = -1 \pm j$ nên hàm truyền của hệ có dạng:

$$G(s) = \frac{\alpha}{(s+2)(s+1-j)(s+1+j)} = \frac{\alpha}{(s+2)(s^2+2s+2)} = \frac{\alpha}{s^3+4s^2+6s+4}$$

Mặt khác vì $k = \lim_{s\to 0} G(s) = 1$ nên suy ra $\alpha = 4$. Vậy ta có $G(s) = \dfrac{4}{s^3+4s^2+6s+4}$.

c) (1 điểm) Ta phân tích $G(s) = \dfrac{2}{s+2} - \dfrac{2s}{s^2+2s+2} = \dfrac{2}{s+2} - \dfrac{2(s+1)}{(s+1)^2+1} + \dfrac{2}{(s+1)^2+1}$.

Vậy $g(t) = L^{-1}\{G(s)\} = 2(e^{-2t} - e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t).1(t) = 2e^{-2t}.1(t) + 2\sqrt{2}e^{-t}\sin(t - \frac{\pi}{4}).1(t)$.

3. **(4 điểm)**

a) (1.5 điểm) Để tìm đáp ứng tần số của hệ thống A, ta lấy ảnh Fourier của hai vế của phương trình vi phân của hệ, sẽ được:

$$j\omega X(j\omega) + 5X(j\omega) = j\omega U(j\omega) + U(j\omega)$$
$$(j\omega+5)X(j\omega) = (j\omega+1)U(j\omega)$$

Do đó $G_A(j\omega) = \dfrac{X(j\omega)}{U(j\omega)} = \dfrac{j\omega+1}{j\omega+5}$. Mặt khác đáp ứng tần số của hệ thống B là:

$G_B(j\omega) = F\{g_B(t)\} = \dfrac{1}{j\omega+10}$ (sử dụng định nghĩa của phép biến đổi Fourier hoặc tra bảng).

Vậy $G(j\omega) = \dfrac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \dfrac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}.\dfrac{X(j\omega)}{U(j\omega)} = G_B(j\omega)G_A(j\omega) = \dfrac{j\omega+1}{(j\omega+5)(j\omega+10)} = \dfrac{j\omega+1}{(j\omega)^2+15j\omega+50}$ (1)

b) (1.5 điểm) Với $\omega = 10$ rad/s, ta có $G(j10) = \dfrac{1+j10}{(j10)^2+15(j10)+50} = \dfrac{1+j10}{-50+j150}$. Do đó:

$|G(j10)| = \dfrac{\sqrt{1^2+10^2}}{\sqrt{50^2+150^2}} \approx 0.0636$ và $\angle G(j10) = \arctan\left(\dfrac{10}{1}\right) - \arctan\left(\dfrac{150}{-50}\right) \approx 2,72$ rad $\approx 156^\circ$.

Vậy $y(t) = 4.|G(j10)|\sin(10t + 15^\circ + \angle G(j10)) = 0.25\sin(10t + 171^\circ)$.

c) (1 điểm) Từ (1) ta có phương trình vi phân của cả hệ thống là:

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 15\frac{dy}{dt} + 50y(t) = \frac{du}{dt} + u(t)$$

Vậy mô hình trạng thái dạng chuẩn của cả hệ là:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -50 & -15 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}u$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}x$$