NGUYÊN LÝ CƠ BẢN CỦA TOÁN HỌC:

VI TÍCH PHÂN.

(Quyển 2 trong Toán Thường Thức).

A diagram of a curve

Description automatically generated

Mục lục.

[Một vài bài chứng minh mở đầu. 2](#_Toc167222201)

[Bài 1: Giới hạn dãy số và hàm số. 12](#_Toc167222202)

[Bài tập tự luyện bài 1. 19](#_Toc167222203)

[Bài 2: Đạo hàm và vi phân. 21](#_Toc167222204)

[Bài tập tự luyện bài 2. 32](#_Toc167222205)

[Bài 3: Các định lý khả vi của hàm số. 36](#_Toc167222206)

[Bài tập tự luyện bài 3. 43](#_Toc167222207)

[Bài 4: Nguyên hàm và tích phân xác định. 45](#_Toc167222208)

[Bài tập tự luyện bài 4. 55](#_Toc167222209)

[Bài 5: Ứng dụng của tích phân. 57](#_Toc167222210)

[Bài tập tự luyện bài 5. 61](#_Toc167222211)

[Bài 6: Phương trình vi phân. 63](#_Toc167222212)

[Bài tập tự luyện bài 6. 65](#_Toc167222213)

[Bài đọc thêm. 68](#_Toc167222214)

[Đáp án bài tập tự luyện. 70](#_Toc167222215)

Một vài bài chứng minh mở đầu.

1. **Hàm số:**

**Hàm số:** Một ánh xạ đi từ tập vào tập là một quy tắc cho tương ứng mỗi phần tử với một và chỉ một phần tử .

Tập xác định: là tập các phần tử sao cho hàm số có nghĩa.

Tập giá trị: là tập các phần tử sao cho .

**Hàm hợp:** Cho hàm số cho quy tắc tương ứng phần tử và hàm số cho quy tắc tương ứng phần tử . Khi đó hàm số được gọi là hàm hợp của hàm số và , khi đó hàm hợp được ký hiệu là:

A black and white image of a triangle with black lines and letters

Description automatically generated

**Hàm ngược:** Cho hàm số cho quy tắc tương ứng phần tử , nghịch đảo được mô tả như sau: với mỗi phần tử sẽ cho duy nhất một phần tử , kí hiệu là .

Từ định nghĩa hàm ngược, ta có tính chất sau:

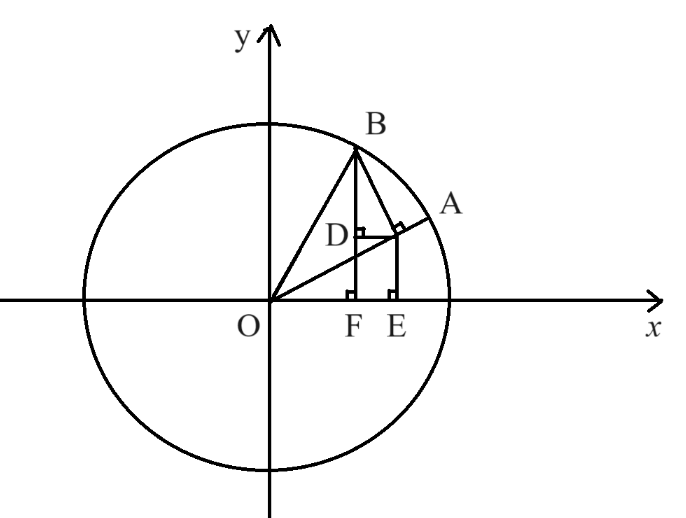
Tập xác định của là tập giá trị của .

Tập giá trị của là tập xác định của .

1. **Các công thức lượng giác:**

**Công thức số 1:**

Chứng minh: Xét đường tròn tâm có bán kính . Ta gọi và là hai điểm thuộc đường tròn ; kẻ và , kẻ và . Đặt và , khi đó:



Xét tam giác vuông tại , ta có:

Xét tam giác vuông tại , ta có:

Gọi là giao điểm của và , xét và , ta có:

Xét vuông tại , ta có:

Chú thích, xét tứ giác , ta có , nên tứ giác là hình chữ nhật nên . Khi đó:

**Công thức số 2:**

Chứng minh: Dễ thấy:

**Công thức số 3:**

Chứng minh: Ta có:

**Công thức số 4:**

Chứng minh: Xuất phát từ công thức số 3, thực hiện phép biến đổi:

Khi đó, ta được:

1. **Các công thức Loragit:**

**Định nghĩa:**

**Công thức số 1:**

Chứng minh: Đặt , khi đó:

**Công thức số 2:**

Chứng minh: Đặt , khi đó:

**Công thức số 3:**

Chứng minh: Ta có:

**Công thức số 4:**

Chứng minh: Ta có:

**Công thức số 5:**

Chứng minh: Ta có:

**Công thức số 6:**

Chứng minh: Ta có:

**Công thức số 7:**

Chứng minh: Ta có:

1. **Lượng giác ngược:**

**Công thức số 1:**

Chứng minh: Dễ thấy đây là tính chất của hàm ngược. Xét hàm số có hàm ngược là , khi đó:

**Công thức số 2:**

Chứng minh: Xét , đặt , ta có:

Xét , đặt , ta có:

Từ (1) và (2), ta dễ dàng suy ra được điều phải chứng minh.

**Công thức số 3:**

Chứng minh: Đặt , ta có:

**Công thức số 4:**

Chứng minh: Đặt , ta có:

**Công thức số 5:**

Chứng minh: Đặt , ta có:

**Công thức số 6:**

Chứng minh: Đặt , ta có:

**Công thức số 7:**

Chứng minh: Đặt , ta có:

**Công thức số 8:**

Chứng minh: Đặt và , ta có:

Từ (1) và (2), ta suy ra được điều phải chứng minh.

1. **Số phức:**

**Định nghĩa:** Số phức có dạng là , với và là các số thực và là đơn vị ảo hay ta có . Tập số phức là .

**Các phép toán của số phức:** Cho và là hai số phức.

Phép cộng:

Phép trừ:

Phép nhân:

Phép chia:

Số phức liên hợp: số phức là số phức liên hợp của . Khi đó:

Module của số phức: Module của số phức là độ dài của vector (được biểu diễn bởi vector như hình vẽ) trên mặt phẳng phức (mặt phẳng phức là mặt phẳng tọa độ dùng để biểu diễn số phức). Vậy khi đó:

A diagram of a line with letters and numbers

Description automatically generated with medium confidence

Đặt là góc giữa và trục hoành, gọi là hình chiếu của lên trục hoành, gọi là hình chiếu của lên trục tung, khi đó tứ giác là hình chữ nhật (do tứ giác có 3 góc vuông là ), vậy và , ta có:

**Dạng mũ của số phức:** Với , ta có:

Chứng minh: Xét thì:

Giả sử biểu thức luôn đúng với , khi đó xét , ta có:

Xét , ta có:

Xét , ta có:

Lấy , ta có:

Thế vào biểu thức ban đầu, ta được:

Theo phương pháp quy nạp, ta suy ra được biểu thức luôn đúng với .

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài 1: Giới hạn dãy số và hàm số.

1. **Cơ sở lý thuyết:**

**Định nghĩa (dãy số):** Một hàm số xác định trên tập số nguyên dương được gọi là một dãy số vô hạn (gọi tắt là dãy số). Kí hiệu:

Một dãy số thường được viết dưới dạng khai triển là , ,…, . Khi đó là số hạng thứ và gọi nó là số hạng tổng quát.

**Tính đơn điệu của dãy số:** Cho dãy số , khi đó:

Dãy số tăng: dãy số là dãy số tăng nếu , .

Dãy số giảm: dãy số là dãy số giảm nếu , .

**Dãy số bị chặn:** Cho dãy số , khi đó:

Dãy số được gọi bị chặn trên nếu tồn tại số sao cho:

Dãy số được gọi là bị chặn dưới nếu tồn tại số sao cho:

Dãy số được gọi bị chặn nếu nó vừa bị chặn trên và vừa bị chặn dưới, nghĩa là tồn tại hai số và sao cho:

**Giới hạn hàm số, dãy số:** Cho hàm số và khoảng có chứa điểm . Hàm số xác định trên hoặc và có giới hạn là khi và thỏa mãn:

**Tính duy nhất của giới hạn:** Nếu tồn tại thì với mọi dãy ở điểm , khi và thì luôn thỏa mãn . Ngược lại, nếu tìm được một dãy điểm khác là , khi và sao cho , thì không tồn tại giới hạn .

**Các phép toán của giới hạn:** Cho và , khi đó:

Phép cộng hai giới hạn:

Phép trừ hai giới hạn:

Phép nhân hai giới hạn:

Phép chia hai giới hạn:

Một số quy ước trong giới hạn hàm số:

**Giới hạn một phía:** Cho hàm số và khoảng chứa điểm .

Giới hạn phải:

Giới hạn trái:

**Định lý:** Nếu hàm số có giới hạn trái tại và giới hạn phải tại bằng nhau thì hàm số cũng sẽ tồn tại giới hạn tại điểm .

Chứng minh: Định lý trên được suy ra từ sự liên tục của hàm số tại .

**Định lý (Tiêu chuẩn Weierstrass):**

(1): Một dãy đơn điệu mà bị chặn thì hội tụ.

(2): Một dãy số tăng và bị chặn trên thì hội tụ.

(3): Một dãy số giảm và bị chặn dưới thì hội tụ.

Chứng minh: Ta thừa nhận định lý này.

**Sự liên tục của hàm số:** Hàm số được gọi là liên tục tại điểm nếu:

Hàm số được gọi là liên tục trên khoảng nếu hàm số liên tục tại mọi điểm của khoảng . Cụ thể hơn, ta có:

A graph of a line and a line

Description automatically generated with medium confidence

Sự liên tục phải của hàm số:

Sự liên tục trái của hàm số:

**Sự gián gián đoan của hàm số:** Hàm số được gọi là bị gián đoạn tại điểm , nếu xảy ra một trong ba trường hợp sau:

Trường hợp 1: Không tồn tại .

Trường hợp 2: .

Trường hợp 3: .

**Dạng vô định:** Là một dạng biểu thức hay phép tính không tính được bằng một giá trị cụ thể; thực thể vô cùng cũng là một dạng vô định vì là một thực thể vô cùng lớn, không phải là một giá trị cụ thể. Các dạng vô định bao gồm:

Giải thích các dạng vô định: Dễ thấy, các biểu thức , và là các dạng vô định. Đối với dạng vô định , ta có:

Đối với các dạng vô định , và thì:

**Định nghĩa (Vô cùng bé):** Hàm số được gọi là một vô cùng bé khi nếu tồn tại giới hạn:

Cho hai hàm số và là hai vô cùng bé khi , ta nói rằng và là hai vô cùng bé tương đương, ký hiệu là , nếu thỏa mãn:

Quy tắc khử vô cùng bé: nếu là một vô cùng bé khi và là một vô cùng bé bậc cao hơn thì:

\*Lưu ý: Đối với phép toán hiệu của hai vô cùng bé, thì ta không thể sử dụng quy tắc ngắt bỏ vô cùng bé vì sự xấp xỉ vô cùng bé có thể dẫn đến các sự sai lệch khác trong phép toán (xem thêm khai triển Taylor – Maclaurin của bài 2: đạo hàm và vi phân).

**Định nghĩa (Vô cùng lớn):** Hàm số được gọi là vô cùng lớn khi nếu tồn tại giới hạn:

Quy tắc khử vô cùng lớn: nếu là một vô cùng lớn khi và là một vô cùng lớn bậc thấp hơn thì:

**Quy tắc L’Hospital:** cho hai hàm số là và có , đồng thời hai hàm số và có đạo hàm tại và (xem thêm ở bài 2: đạo hàm và vi phân). Khi đó ta có:

Quy tắc L’Hospital vẫn sẽ đúng nếu . Xem thêm bài chứng minh của quy tắc L’Hospital ở bài 3: các định lý khả vi của hàm số.

**Nguyên lý kẹp:** Cho các hàm số , và thỏa mãn . Nếu , thì khi đó .

**Các cách xử lý dạng vô định:** Biến đổi hàm số để triệt tiêu dạng vô định, sử dụng quy tắc ngắt bỏ vô cùng bé, sử dụng quy tắc ngắt bỏ vô cùng lớn, sử dụng quy tắc thay thế vô cùng bé tương đương, sử dụng quy tắc L’Hospital.

1. **Bài tập mẫu:**

**Câu 1:** Giải các giới hạn sau đây:

Lời giải.

* Xét , ta có:
* Xét , ta có:

Áp dụng cho giới hạn , ta có:

Do và là hai vô cùng bé tương đương khi , nên khi đó:

**Câu 2:** Cho hàm số như sau:

Hàm số có liên tục trên tập xác định của nó hay không? Giải thích?

Lời giải.

Xét hàm số có tập xác định là và có tập xác định là . Khi đó, tập xác định của hàm số là . Xét sự liên tục của hàm số tại , ta có:

Suy ra, không tồn tại nên không liên tục tại và có tập xác định là , do đó không liên tục trên tập xác định của nó.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài tập tự luyện bài 1.

**Đề bài chung cho các câu 1, 2, 3, 4, 5:** Cho các giới hạn sau:

**Câu 1:** Giá trị của là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 2:** Giá trị của là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 3:** Giá trị của là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 4:** Giá trị của là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 5:** Giá trị của là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 6:** Cho hàm số có tập xác định và tập giá trị . Chọn phát biểu đúng nhất về hàm số .

|  |
| --- |
| 1. Tập hợp các phần tử là tập xác định của hàm số . |
| 1. Tập hợp các phần tử là tập giá trị của hàm số . |
| 1. Nếu thì . |
| 1. Hàm số luôn liên tục trên . |
| 1. Tất cả đáp án đều đúng. |

**Câu 7:** Cho hàm số liên tục trên và:

Với và là các số thực, khi đó giá trị của là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 8:** Cho các giới hạn sau:

Chọn phát biểu đúng về các giới hạn , và :

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Đề bài chung cho các câu 9 và 10:** Cho các giới hạn sau:

**Câu 9:** Giá trị của giới hạn là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 10:** Giá trị của giới hạn là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài 2: Đạo hàm và vi phân.

1. **Cơ sở lý thuyết:**

**Định nghĩa (Đạo hàm):** Xét hàm số , như hình vẽ:

A diagram of a function

Description automatically generated

Xét hàm số tại điểm và điểm , khi đó xét tỉ số:

Khi điểm tiến gần sát về điểm , tức là , thì khi đó tỉ số được gọi đạo hàm của hàm số , kí hiệu đạo hàm là hoặc :

Kí hiệu được gọi là vi phân của hàm số . Ngoài ra, nếu đặt thì khi đó, giới hạn của tỉ số được viết lại là:

Khi đó được gọi là đạo hàm của hàm số tại và ta nói rằng khả vi tại . Nếu trong quá trình , ta thay bằng thì khi đó được gọi là đạo hàm phải của và nếu được thay bằng thì được gọi là đạo hàm trái của .

**Định lý:** Cho hàm số xác định trên và . Khi đó:

**Ý nghĩa của đạo hàm:** Hàm số có hai điểm và . Khi đó đường thẳng được gọi là cát tuyến của hàm số . Khi điểm tiến gần sát về điểm , nghĩa là , thì và cát tuyến trở thành tiếp tuyến của .

A graph of a function

Description automatically generated

Vậy, khi đó ta có phương trình tiếp tuyến của tại là:

Với , khi đó được gọi là phương trình tiếp tuyến của hàm số tại , và được gọi là hệ số góc của đường thẳng tiếp tuyến .

Nếu thì đường thẳng tiếp tuyến sẽ hướng lên, tức là hàm số đồng biến tại điểm .

Nếu thì đường thẳng tiếp tuyến sẽ hướng xuống, tức là hàm số nghịch biến tại điểm .

Một cách tổng quát; với là một đoạn, khoảng hay nửa khoảng; ta có:

Hàm số đồng biến trên nếu , .

Hàm số nghịch biến trên nếu , .

**Tính đơn điệu của hàm số và các bước khảo sát để hàm số:** Cho hàm số và là một đoạn, khoảng hay nửa khoảng, khi đó:

Đồng biến: và , .

Nghịch biến: và , .

Các bước để khảo sát hàm số:

Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số .

Bước 2: Tìm và tìm tập xác định của (nếu có), cho để tìm cực trị của .

Bước 3: Lập bảng xét dấu cho (bảng biến thiên của hàm số ).

Bước 4: Tìm , giả sử là một cực trị của ; nếu thì là điểm cực tiểu của , nếu thì là điểm cực đại của .

Bước 5: Kết luận và vẽ đồ thị hàm số.

\*Chú ý 1: Ở bước 4, ta có thể lược bỏ và xác định trực tiếp cực đại và cực tiểu của thông qua bảng biến thiên bằng ví dụ sau: cực tiểu (hình 1), cực đại (hình 2).

A two lines with arrows and a line in the middle

Description automatically generated with medium confidence

\*Chú ý 2: Nếu là một nghiệm kép (nghiệm bội chẵn) của phương trình thì không là điểm cực trị của hàm số, Ngược lại nếu là một nghiệm đơn (nghiệm bội lẻ) của phương trình thì là một cực trị của hàm số .

**Các phép toán của đạo hàm:** Cho và có đạo hàm trên ; với có thể là một khoảng, nửa khoảng hoặc một đoạn; một số thực , khi đó:

* Đạo hàm hằng số:

Chứng minh:

* Đạo hàm tổng:

Chứng minh:

* Đạo hàm tích:

Chứng minh:

* Đạo hàm tích với một số thực:

* Đạo hàm thương:

Chứng minh: Ta có hai hướng cách tiếp cận bài chứng, một là sử dụng định nghĩa, hai là ta sử dụng công thức có sẵn.

**Đạo hàm của hàm số sơ cấp:** Cho hàm số là một hàm số sơ cấp, vậy:

* Đạo hàm của , ta có:

Chứng minh:

* Đạo hàm của , ta có:

Chứng minh:

* Đạo hàm của , ta có:

Chứng minh:

* Đạo hàm của , với , ta có:

Chứng minh:

Do và là hai vô cùng bé tương đương khi , nên ta có:

* Đạo hàm của , với và , ta có:

Chứng minh:

* Đạo hàm , với , ta có:

Chứng minh: Ta không thể chứng minh trực tiếp thông qua định nghĩa, nhưng ta có thể chứng minh bằng cách sử dụng tính chất hàm ngược.

* Đạo hàm của , ta có:

Chứng minh: Ta có:

**Quy tắc dây chuyền (đạo hàm hàm hợp):** Cho hàm số và , khi đó đạo hàm của hàm hợp được tính bởi công thức:

**Đạo hàm hàm ngược:** Cho hàm số là song ánh có đạo hàm và . Khi đó, đạo hàm của hàm ngược là:

**Đạo hàm cấp cao:** Cho hàm số có đạo hàm cấp một trên khoảng là . Đạo hàm của (nếu có) trên khoảng thì được gọi là đạo hàm cấp hai của hàm số , và được ký hiệu là . Đạo hàm của (nếu có) trên khoảng thì được gọi là đạo hàm cấp ba của hàm số , và được ký ký hiệu là hoặc là . Tương tự, đạo hàm của hàm số (nếu có) trên khoảng được gọi là đạo hàm cấp của hàm số và được ký hiệu là .

**Khai triển Taylor – Maclaurin:** Cho hàm số là một hàm khả vi và liên tục đến cấp trong khoảng đóng , đồng thời cũng tồn tại đạo hàm cấp trong khoảng mở . Chọn và , ta sẽ tính xấp xỉ hàm số bởi một đa thức tại điểm , ta định nghĩa:

Gọi đa thức có dạng là:

Khi đó:

Khi đó, hàm số sẽ có dạng là:

Ở đó, phần dư là sai số trong phép toán xấp xỉ.

Nếu thay , thì ta được khai triển Maclaurin:

Một số khai triển Maclaurin cơ bản:

\*Lưu ý: Nếu và là hai vô cùng bé tương đương khi . Thì các khai triển trên vẫn đúng khi thay bằng .

**Tính khả vi và khả tích của khai triển Maclaurin:** Cho hàm số khả vi hoặc khả tích trên khoảng . Giả sử là khai triển maclaurin của hàm số trên khoảng ; khi đó sẽ khả vi hoặc khả tích trên :

**Định nghĩa (Vi phân):** Từ định nghĩa đạo hàm, cho hàm số có hai điểm là và . Hai điểm và cách nhau một đoạn và , khi tiến dần sát về thì và trở thành vi phân và , khi đó:

A graph of a function

Description automatically generated

**Tính khả vi của hàm số:** Hàm số được goị là khả vi trên khoảng nếu nó khả vi tại mọi điểm trong khoảng . Để hàm số khả vi thì nó phải có đạo hàm và liên tục trên khoảng .

1. **Bài tập mẫu:**

**Câu 1:** Tính các giới hạn sau:

Lời giải.

* Xét , ta có:

Xét giới hạn , ta có:

* Xét , ta có:
* Xét , ta có:

**Câu 2:** Cho hàm số , tìm của biểu thức sau:

Lời giải.

Đạo hàm cả hai vế theo , ta có:

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

Bài tập tự luyện bài 2.

**Câu 1:** Cho hàm số . Tính giới hạn sau:

Phần đáp án:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Đề bài chung cho các câu 2 và 3:** Cho một số thực và hàm số xác định và khả vi trên .

**Câu 2:** Biết rằng . Tính .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 3:** Biết rằng . Tính .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 4:** Cho hàm số có đạo hàm liên tục trên và đồ thị của hàm số như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây đúng?

A graph of a function

Description automatically generated

|  |  |
| --- | --- |
| 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |
| 1. . |  |

**Câu 5:** Cho đồ thị của ba hàm số , , được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số , và theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A graph of a function

Description automatically generated

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. , , . | 1. , , . |  |
| 1. , , . | 1. , , | 1. , , |

**Câu 6:** Cho đồ thị của ba hàm số , , được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số , và theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A graph of a function

Description automatically generated

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. , , . | 1. , , . |  |
| 1. , , . | 1. , , | 1. , , |

**Câu 7:** Cho đồ thị của ba hàm số , , được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số , và theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A graph of a function

Description automatically generated

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. , , . | 1. , , . |  |
| 1. , , . | 1. , , | 1. , , |

**Câu 8:** Cho đồ thị của ba hàm số , , được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số , và theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào?

A graph of a function

Description automatically generated

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. , , . | 1. , , . |  |
| 1. , , . | 1. , , | 1. , , |

**Câu 9:** Cho đồ thị của ba hàm số , , được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số , và theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?

A graph of a function

Description automatically generated

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. , , . | 1. , , . |  |
| 1. , , . | 1. , , | 1. , , |

**Câu 10:** Cho đồ thị của ba hàm số , , được vẽ mô tả ở hình dưới đây. Hỏi đồ thị các hàm số , và theo thứ tự, lần lượt tương ứng với đường cong nào ?

A graph of a function

Description automatically generated

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. , , . | 1. , , . |  |
| 1. , , . | 1. , , | 1. , , |

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

Bài 3: Các định lý khả vi của hàm số.

1. **Cơ sở lý thuyết:**

**Định lý giá trị trung gian:** Cho hàm số liên tục trên đoạn và thỏa mãn , khi đó tồn tại sao cho .

A graph of a function

Description automatically generated

Chứng minh: Ta thừa nhận định lý này.

**Hệ quả 1:** Hàm số liên tục trên đoạn và , , khi đó hàm số sẽ xác định dấu trên đoạn .

Chứng minh: Giả sử và trái dấu với nhau, nên , theo định lý giá trị trung gian thì tồn tại sao cho (trái với giả thiết). Suy ra điều phải chứng minh.

**Hệ quả 2:** Cho hàm số liên tục trên đoạn , gọi là một giá trị tùy ý sao cho , khi đó tồn tại để .

**Cực trị của hàm số:** Cho hàm số liên tục trên , ta nói rằng hàm số đạt cực trị tại nếu tồn tại lận cận sao cho hiệu của xác định dấu trên .

Nếu , , thì ta nói hàm số đạt cực tiểu tại .

Nếu , , thì ta nói hàm số đạt cực đại tại .

**Định lý:** Cho hàm số có đạo hàm cấp hai tại và đạt cực trị tại , khi đó:

Nếu , thì đạt cực tiểu tại .

Nếu , thì đạt cực tiểu tại .

**Bổ đề Fermat:** Cho hàm số liên tục trên khoảng , có đạo hàm tại và đạt cực trị tại thì khi đó

Chứng minh: Giả sử hàm số đạt cực đại tại , theo định nghĩa tồn tại một lân cận sao cho , . Do đó, với đủ nhỏ sao cho thì .

Do giả thiết tồn tại nên . Điều này chỉ xảy ra khi:

**Định lý Rolle:** Cho hàm số liên tục trên đoạn và có đạo hàm trên khoảng . Nếu thì tồn tại sao cho .

A graph of a function

Description automatically generated

Chứng minh: Giả sử hàm số không có cực trị trên , nghĩa là sao cho . Khi đó ta có hai trường hợp:

Trường hợp 1: , , khi đó ta nói rằng hàm số đồng biến trên khoảng nên (trái với giả thiết). (1)

Trường hợp 2: , , khi đó ta nói rằng hàm số nghịch biến trên khoảng nên (trái với giả thiết). (2)

Từ (1) và (2), ta suy ra được điều phải chứng minh.

**Định lý giá trị trung bình Larange:** Cho hàm số liên tục trên đoạn và có đạo hàm trên khoảng . Khi đó, tồn tại sao cho:

A diagram of a function

Description automatically generated

Chứng minh: Đặt , . Do hàm số liên tục và khả vi trên khoảng nên cũng liên tục và khả vi trên khoảng . Xét hàm số , ta chọn số thực sao cho , khi đó:

Áp dụng định lý Rolle, do hàm số liên tục và khả vi trên khoảng đồng thời thỏa mãn , nên sao cho:

**Định lý giá trị trung bình Cauchy:** Cho hai hàm số và liên tục trên đoạn và có đạo hàm trong khoảng đồng thời không bị triệt tiêu trên khoảng , khi đó để:

A diagram of a circle with a red line between them

Description automatically generated

Chứng minh: Đặt , . Do hàm số và liên tục và khả vi trên khoảng nên cũng liên tục và khả vi trên khoảng . Xét hàm số , ta chọn số thực sao cho , khi đó:

Áp dụng định lý Rolle, do hàm số liên tục và khả vi trong khoảng đồng thời thỏa mãn , nên sao cho:

**Các đường tiệm cận của hàm số:** Cho hàm số có tập xác định , khi đó:

Đường thẳng được gọi là tiệm cận ngang của hàm số , nếu:

Đường thẳng được gọi là tiệm cận đứng của hàm số , nếu:

Đường thẳng , được gọi là tiệm cận xiên của hàm số , nếu:

1. **Bài tập mẫu:**

**Câu 1:** Cho hàm số liên tục trên , có đạo hàm trên và thỏa mãn . Chứng minh rằng tồn tại sao cho .

Lời giải.

Trường hợp 1: là hàm hằng trên , suy ra , .

Trường hợp 2: không là hàm hằng, khi đó sao cho .

Giả sử , khi đó tồn tại và để (định lý giá trị trung gian). Tương tự , chọn và khi đó tồn tại và để (định lý giá trị trung gian):

Có thể chứng minh tương tự với trường hợp .

**Câu 2:** Chứng minh Quy tắc L’Hospital.

Lời giải.

Cho , đồng thời và khả vi tại điểm . Áp dụng định lý giá trị trung bình Cauchy, tồn tại điểm sao cho:

Do nằm giữa và , nên khi thì cũng sẽ kéo theo :

1. **Chú thích về các phương pháp tính giới hạn:**

Cùng với việc chứng minh quy tắc L’Hospital, từ giờ ta đã có các quy tắc hoàn chỉnh sau đây để tính giới hạn (tạm bỏ qua các quy tắc thông thường khác):

Phương pháp thay thế VCB – VCL tương đương.

Phương pháp quy tắc L’Hospital.

Phương pháp khai triển Maclaurin.

A diagram of a diagram

Description automatically generated

Mỗi phương pháp đều có ưu và nhược nhiểm khác nhau, có thể tùy vào tính đặc thù của từng bài toán để giải. Để trực quan, ta sẽ thông qua 6 ví dụ sau đây.

**Ví dụ 1:** (Cả ba phương pháp đều áp dụng được).

**Ví dụ 2:** (Sử dụng VCB hoặc khai triển Maclaurin. Không nên dùng L’Hospital).

**Ví dụ 3:** (Sử dụng khai triển Maclaurin hoặc L’Hospital. Không thay tương đương).

**Ví dụ 4:** (Khai triển Maclaurin. Không thay tương đương (tử số) và L’Hospital).

**Ví dụ 5:** (Sử dụng L’Hospital. Không dùng VCB, Maclaurin).

**Ví dụ 6:** (Không dùng cả ba phương pháp trên).

[Lời giải]: chia cả tử và mẫu cho , ta có:

\*Chú ý: Trong quá trình tìm giới hạn của các dạng vô định, nên linh hoạt trong cách xử lý, có thể kết hợp nhiều phương pháp với nhau để đạt hiệu quả tốt nhất.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài tập tự luyện bài 3.

**Câu 1:** Phương trình có nghiệm dương khi nào?

|  |  |
| --- | --- |
| 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |
| 1. . |  |

**Câu 2:** Cho hàm số Hàm số có nghiệm trên khoảng nào dưới đây?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |  |

**Đề bài chung cho các câu 3 và 4:** Cho ba số thực , , thỏa mãn .

**Câu 3:** Phương trình có một nghiệm thuộc khoảng nào?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |  |

**Câu 4:** Phương trình có một nghiệm thuộc khoảng nào?

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |  |

**Câu 5:** Cho hàm số . Phương trình có bao nhiêu nghiệm thực?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 6:** Cho hàm số . Phương trình có bao nhiêu nghiệm thực?

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 7:** Cho liên tục trên khoảng đóng và có đạo hàm trên khoảng mở . Khi đó , và . Tính giá trị lớn nhất của .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 8:** Cho liên tục trên đoạn và có đạo hàm trên khoảng . Biết rằng , và . Tính giá trị nhỏ nhất của .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 9:** Cho và là hai hàm số liên tục trên và khả vi trên sao cho thỏa mãn . Gọi khi đó hãy tính biểu thức sau .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 10:** Cho . Tìm số nghiệm của phương trình .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài 4: Nguyên hàm và tích phân xác định.

1. **Cơ sở lý thuyết:**

**Định nghĩa (Nguyên hàm):** Cho là một khoảng, một đoạn hoặc nửa khoảng; khi đó hàm số được gọi là một nguyên hàm của hàm số trên nếu liên tục và có đạo hàm trên sao cho , . Họ nguyên hàm của hàm số là tập hợp các hàm số , với là một số thực. Khi đó, ta ký hiệu là:

Trường hợp nếu là hợp của các khoảng, các đoạn hoặc các nửa khoảng, thì trên mỗi khoảng (đoạn, nửa khoảng) xác định ta sẽ có một hằng số tương ứng, , khi đó nguyên hàm của hàm số là tập hợp các hàm số:

**Tính chất của nguyên hàm:**

Tính chất 1: Đạo hàm của một nguyên hàm:

Tính chất 2: Nhân với một hằng số thực khác không:

Tính chất 3: Tổng của hai nguyên hàm:

**Các nguyên hàm cơ bản:**

Nguyên hàm số 1:

Nguyên hàm số 2:

Nguyên hàm số 3:

Nguyên hàm số 4:

Nguyên hàm số 5:

Nguyên hàm số 6:

Nguyên hàm số 7:

Nguyên hàm số 8:

**Các phương pháp tính nguyên hàm:**

Đặt ẩn phụ: Xét tích phân dưới đây, thực hiện phép đổi biến và vi phân cả hai vế, ta được , khi đó:

Vì sao phải vi phân hai vế? Xuất phát từ phép đạo hàm của hàm hợp, ta có:

Thực hiện phép nguyên hàm hai vế, ta có:

Vậy, việc vi phân hai vế là nhằm giúp cho nguyên hàm của hàm hợp dễ tính hơn.

Nguyên hàm từng phần: Gọi và là hai hàm số khác loại, khi đó:

Vì sao có công thức trên? Xuất phát từ đạo hàm của tích hai hàm số, ta có:

Nguyên hàm hai vế, ta có:

Thứ tự ưu tiên đặt : “Nhất hàm logarit”, “nhì lượng giác ngược”, “tam đa thức”, “tứ lượng giác”, “cuối cùng là hàm mũ”, và ưu tiên những hàm số không có sẵn công thức nguyên hàm.

**Định nghĩa (Tích phân xác định):** Cho hàm số xác định và bị chặn trên khoảng đóng . Chia thành đoạn nhỏ bởi phân hoạch:

Trong mỗi đoạn , chọn , ta lập thành biểu thức:

Biểu thức được gọi là tổng tích phân (tổng Riemann). Khi đó, được gọi là tích phân xác định của hàm số nếu tồn tại giới hạn:

Khi đó, ta nói rằng hàm số khả tích trên .

**Công thức Newton – Leibniz:** Cho hàm số khả tích trên , khi đó:

Chứng minh: Hàm số liên tục trên đoạn và khả vi trong khoảng , khi đó tồn tại sao cho (định lý giá trị trung bình Larange):

Ta có hàm số liên tục trên , giả sử gọi:

Áp dụng định lý giá trị trung gian, do , khi đó:

**Tiêu chuẩn khả tích:** Hàm số liên tục trên thì khả tích trên .

**Tính chất của tích phân xác định:**

Tính chất tuyến tính: Với và là các số thực khác không, ta có:

Tính chất 2: Cho khả tích trên , gọi khi đó cũng sẽ khả tích trên hai đoạn và .

Tính chất đảo cận: giả thiết cho , khi đó:

Tính chất 4: Cho là một số thực và xác định tại , ta có:

Tính chất 5: Với , nếu , thì:

Chứng minh: Do hàm số , , nên đồng biến trên , do đó:

Tính chất 6: Với , nếu , , thì ta có:

Chứng minh: Xét hàm số , , nên đồng biến trên , ta có:

**Định lý giá trị trung bình tích phân:** Cho khả tích trên đoạn , khi đó tồn tại một số thực sao cho:

Chứng minh: Áp dụng định lý giá trị trung bình Larange, ta có:

**Phương pháp tính tích phân:**

Phương pháp đổi biến. Xét tích phân dưới đây:

Thực hiện phép đổi biến và vi phân , thực hiện đổi cận, ta có:

Tích phân từng phần. Ta có:

**Bổ đề:** Cho hàm số khả tích trên đoạn , ta có:

Chứng minh: Xét vế phải, thực hiện phép đổi biến , ta có:

**Hệ quả 1:** Nếu là hàm số chẵn, nghĩa là , thì:

**Hệ quả 2:** Nếu là hàm số lẻ, nghĩa là , thì:

**Tích phân chứa trị tuyệt đối:** Xét tích phân dưới đây, khi đó:

**Đạo hàm của tích phân:** Xét một tích phân có chứa tham số như sau:

Đạo hàm hàm số , ta có:

Vậy, đạo hàm của nguyên hàm hàm số có thể viết dưới dạng tích phân như sau:

1. **Bài tập mẫu:**

**Câu 1:** Tính các tích phân sau đây:

Lời giải.

* Xét tích phân :

Dễ thấy, biểu thức dưới dấu tích phân có tập xác định là , do đó hàm số không liên tục tại điểm và không khả tích trên đoạn . Khi đó, tích phân không tồn tại.

* Xét tích phân :

Bằng phương pháp quy nạp, ta có:

* Xét tích phân , ta có:
* Xét tích phân :

Xét hàm số . Dễ thấy, hàm số có các nghiệm là , , do đó hàm số sẽ có nghiệm.

A graph of a function

Description automatically generated

Kẻ đường thẳng , hàm số sẽ nhận đường thẳng làm trục đối xứng, do đó dùng phép biến đổi tịnh tiến, đặt , ta có:

**Câu 2:** Cho hàm số thỏa mãn:

Giá trị của là:

Lời giải.

Đạo hàm cả hai vế, ta có:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài tập tự luyện bài 4.

**Câu 1:** Cho các hàm số sau đây:

Hàm số nào có nguyên hàm trên tập số thực :

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. Hàm số . | 1. Hàm số . | 1. Hàm số . |
| 1. Cả ba hàm số trên. | 1. Không có hàm số nào. |  |

**Câu 2:** Cho hàm số liên tục trên , với và . Biết rằng . Tính tích phân

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 3:** Cho liên tục và có đạo hàm trên và đồng thời thỏa mãn biểu thức sau: Biết rằng . Tính

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 4:** Cho các tích phân , và khả tích trên và:

Với , hãy chọn khẳng định đúng:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |  |

**Câu 5:** Cho hàm số thỏa mãn , và . Tính:

Giá trị của tích phân là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Đề bài chung cho các câu 6, 7, 8 và 9:** Cho các tích phân sau:

**Câu 6:** Giá trị của tích phân là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 7:** Giá trị của tích phân là:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |  |

**Câu 8:** Đặt . Khi đó, giá trị của tích phân là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 9:** Giá trị của tích phân là:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 10:** Sử dụng xấp xỉ hình chữ nhật phải (tổng Rieman trái) để tính xấp xỉ của tích phân bởi 4 khoảng phân hoặch:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài 5: Ứng dụng của tích phân.

1. **Cơ sở lý thuyết:**

**Diện tích hình thang cong:** Xét một hình thang cong có dạng:

A graph of a function

Description automatically generated

Diện tích được giới hạn bởi:

Khi đó, để tính diện tích ta sẽ tính xấp xỉ bởi các hình chữ nhật có diện tích , với . Chia đoạn thành đoạn nhỏ , ta có diện tích hình chữ nhật là , với . Khi , ta có:

Trường hợp diện tích được giới hạn bởi , , và . Khi đó diện tích sẽ được tính bởi công thức:

A diagram of a function

Description automatically generated

**Tính chiều dài cung:** Xét hàm số và cung bị giới hạn bởi và , như hình vẽ:

A graph of a function

Description automatically generated with medium confidence

Gọi và , khi đó ta có:

**Thể tích vật tròn xoay:** Cho khối tròn xoay bị giới hạn bởi và , và có diện tích thiết diện là , khi đó:

A drawing of a vase

Description automatically generated

Gọi là diện tích thiết diện của khối tròn xoay tại điểm , khi , thì hai mặt phẳng thiết diện và sẽ tạo thành một khối trụ nhỏ có thể tích là , do đó thể tích tổng của khối tròn xoay là:

Ngoài ra, nếu khối tròn xoay được tạo bởi giới hạn , , và quay quanh trục (hình 1) hoặc , , và quay quanh trục (hình 2), thì khi đó:

A two lines with text

Description automatically generated with low confidence

Chứng minh: Xét trường hợp của hình 1 (hình 2 có thể chứng minh tương tự), ta có thiết diện của khối tròn xoay là một hình tròn có bán kính là , khi đó diện tích của thiết diện khối tròn xoay là , do đó:

Trường hợp tổng quát, khối tròn xoay được tạo bởi hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng , và , quay quanh trục , ta có:

1. **Bài tập mẫu:**

**Câu 1:** Tính tích phân sau đây:

Lời giải.

* Cách 1: Ta có:
* Cách 2: Ta có:

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài tập tự luyện bài 5.

**Câu 1:** Đường cong thỏa đi qua điểm . Độ dài thỏa , được tính bằng tích phân:

Tìm hàm số .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. Một đáp án khác. |  |

**Câu 2:** Tính diện tích hình phẳng được tạo bởi đường cong và trục với .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 3:** Tìm giá trị trung bình của hàm số trên .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |  |

**Câu 4:** Tính thể tích vật tròn xoay sinh ra khi hình phẳng xoay quanh trục , biết rằng mặt phẳng giới hạn bởi , , và .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 5:** Tính độ dài đường cong thỏa , với .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 6:** Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đường cong và đường thẳng , với .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 7:** Tính diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành và hai đường thẳng và .

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 8:** Tính diện tích được sinh ra bởi đường cong kín như hình vẽ:

A black and white symbol

Description automatically generated

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 9:** Tính diện tích của hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị hàm số , trục hoành, trục tung và đường thẳng .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. Một đáp án khác. |  |

**Câu 10:** Thể tích của vật thể được tạo bởi khi quay hình thang cong quanh trục , biết rằng hình thang cong được giới hạn bởi , , và .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |  |

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài 6: Phương trình vi phân.

1. **Cơ sở lý thuyết:**

**Định nghĩa (PTVP cấp 1):** Cho hàm số có đạo hàm cấp một trên miền , khi đó phương trình vi phân (viết tắt là PTVP) cấp 1 là phương trình có dạng:

Với và là hai hàm số đã được xác định.

**Các dạng khác của phương trình vi phân:** Ngoài ra, ta còn có một số cách viết khác của phương trình vi phân cấp một như sau:

**Cách giải phương trình vi phân tổng quát:**

Xét phương trình vi phân , đặt , ta có:

**Nghiệm của phương trình vi phân:** Dễ thấy, tập hợp các hàm số là nghiệm của phương trình vi phân . Với là một số thực, ta có thể biểu diễn tập hợp các hàm số thành dạng , khi đó ta nói rằng là nghiệm tổng quát của phương trình vi phân; với mỗi giá trị cụ thể thì được gọi là nghiệm riêng của phương trình vi phân.

Nghiệm kỳ dị: Là những nghiệm của phương trình mà nó không nhận được từ nghiệm tổng quát.

1. **Bài tập mẫu:**

**Câu 1:** Giải phương trình vi phân cấp hai sau đây:

Biết rằng là một giá trị nguyên dương, tìm nghiệm tổng quát của .

Lời giải.

Xét hàm số , với là một hằng số bất kỳ và là một hằng số dương, thực hiện phép đạo hàm của hàm số , ta có:

Thế biểu thức và vào đề bài, ta có:

Suy ra, nghiệm của của PTVP. Có thể chứng minh tương tự với hai hàm số và cũng là nghiệm của PTVP trên.

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Bài tập tự luyện bài 6.

**Câu 1:** (Định luật Biot – Savart) Phương trình vi phân để tính từ trường trong không gian là:

Với là vector từ trường; độ từ thẩm , là các hằng số; là khoảng cách của điểm đo tới điểm sinh từ trường và là chiều dài dây. Giả sử, ta có một vòng dây dẫn điện với cường độ dòng điện đang chạy theo chiều kim đồng hồ, bán kính vòng dây là , tính từ trường gây ra tại tâm của vòng dây đó. Biết rẳng , , lần lượt là các vector đơn vị của các trục , , .

A diagram of a circle with arrows and a line

Description automatically generated

|  |
| --- |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |

**Câu 2:** Cho phương trình vi phân tuyến tính như sau: Nghiệm tổng quát của phương trình là:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |  |

**Câu 3:** Theo quan sát, vào khoảng sáng đến 8:30 sáng, lượng xe đi vào hầm chui Thủ Thiêm, hướng từ Quận 2 vào Quận 1, ở mức xe mỗi phút, trong đó tính theo phút và là lúc 7:30 giờ. Tính giá trị trung bình của trong khoảng từ 7:30 đến 8:00.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . | 1. . | 1. . | 1. . |

**Câu 4:** Giải phương trình: .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. Một đáp án khác. | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |  |

**Câu 5:** Giải phương trình , thỏa và .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |
| 1. Một đáp án khác. |  |

**Câu 6:** Giải phương trình .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. Một đáp án khác. | 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |  |

**Câu 7:** Một chất điểm chuyển động có vận tốc , với , , là các hằng số dương và , lần lượt là các vector đơn vị của hai trục tọa độ và . Hãy tìm quỹ đạo của chất điểm trên.

|  |
| --- |
| 1. Quỹ đạo của chất điểm là đường tròn. |
| 1. Quỹ đạo của chất điểm là đường thẳng. |
| 1. Quỹ đạo của chất điểm là đường Parabol. |
| 1. Không xác định được. |
| 1. Quỹ đạo của chất điểm là đường Elip. |

**Câu 8:** Giải phương trình .

|  |  |
| --- | --- |
| 1. . | 1. . |
| 1. . | 1. . |
| 1. Một đáp án khác. |  |

**Câu 9:** Giải phương trình .

|  |
| --- |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. . |
| 1. Một đáp án khác. |

**Câu 10:** Với là một số thực, giải phương trình sau: .

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. . | 1. . |  |
| 1. . | 1. . | 1. Một đáp án khác. |

**\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_**

Bài đọc thêm.

1. **Định lý cơ bản của giải tích:**

**Tính liên tục của hàm số:** Xét hàm số trên . Hàm số được gọi là liên tục trên nếu:

**Sự tồn tại đạo hàm của hàm số:** Cho hàm số liên tục trên , hàm số được gọi là có đạo hàm trên , nếu thỏa mãn:

**Tiêu chuẩn khả vi của hàm số:** Cho hàm số thực liên tục và có đạo hàm trên . Khi đó, hàm số được gọi là khả vi trên .

**Sự tồn tại nguyên hàm của hàm số:** Cho hàm số liên tục trên , gọi là nguyên hàm của số trên . Khi đó, hàm số được gọi là có nguyên hàm trên , nếu hàm số liên tục và có đạo hàm trên .

**Tiêu chuẩn khả tích của hàm số:** Cho hàm số thực liên tục và có nguyên hàm trên đoạn . Khi đó, hàm số được gọi là khả tích trên .

1. **Nghịch lý Garbiel:**

Cho một vật thể tròn xoay tạo bởi khi xoay miền giới hạn bởi , và quanh trục . Tính thể tích và diện tích bề mặt của nó.



Lời giải.

Thể tích của vật thể tròn xoay là:

Diện tích bề mặt của nó là:

Như vậy, đây là một vật thể có diện tích bề mặt bằng , trong khi đó lại có thể tích hữu hạn. Giả sử bạn có một vật thể như vậy và cần sơn nó.

+) Một mặt, vì diện tích bề mặt là , bạn cần một lượng vô hạn sơn để sơn nó.

+) Mặt khác, vì miền giới hạn bởi vật đó có thể tích hữu hạn, bạn có thể đổ đầy nó bằng một lượng hữu hạn sơn (ở đây là đơn vị thể tích), và khi đó toàn bộ mặt trong của nó sẽ được sơn.

Một nghịch lý phải không?

\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_

Đáp án bài tập tự luyện.

Đáp án bài 1: Giới hạn dãy số và hàm số.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1:** A. | **Câu 2:** C. | **Câu 3:** A. | **Câu 4:** B. | **Câu 5:** A. |
| **Câu 6:** E. | **Câu 7:** D. | **Câu 8:** A. | **Câu 9:** E. | **Câu 10:** B. |

Đáp án bài 2: Đạo hàm và vi phân.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1:** C. | **Câu 2:** A. | **Câu 3:** B. | **Câu 4:** A. | **Câu 5:** A. |
| **Câu 6:** D. | **Câu 7:** A. | **Câu 8:** A. | **Câu 9:** D. | **Câu 10:** C. |

Đáp án bài 3: Các định lý khả vi của hàm số.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1:** A. | **Câu 2:** B. | **Câu 3:** E. | **Câu 4:** A. | **Câu 5:** D. |
| **Câu 6:** C. | **Câu 7:** E. | **Câu 8:** D. | **Câu 9:** B. | **Câu 10:** B. |

Đáp án bài 4: Nguyên hàm và tích phân xác định.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1:** C. | **Câu 2:** A. | **Câu 3:** C. | **Câu 4:** C. | **Câu 5:** B. |
| **Câu 6:** A. | **Câu 7:** A. | **Câu 8:** E. | **Câu 9:** B. | **Câu 10:** E. |

Đáp án bài 5: Ứng dụng của tích phân.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1:** E. | **Câu 2:** A. | **Câu 3:** A. | **Câu 4:** D. | **Câu 5:** D. |
| **Câu 6:** C. | **Câu 7:** B. | **Câu 8:** B. | **Câu 9:** B. | **Câu 10:** E. |

Đáp án bài 6: Phương trình vi phân.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1:** A. | **Câu 2:** D. | **Câu 3:** C. | **Câu 4:** E. | **Câu 5:** B. |
| **Câu 6:** E. | **Câu 7:** E. | **Câu 8:** D. | **Câu 9:** B. | **Câu 10:** A. |