Homework 1 Machine Learning

Ngày 17 tháng 8 năm 2022

1

The marginal distributions $p(x)$:

$$p(X = x_1) = p(X = x_1, Y = y_1)+p(X = x_1, Y = y_2)+p(X = x_1, Y = y_3) = 0.1+0.05+0.01 = 0.16$$

$$p(X = x_2) = p(X = x_2, Y = y_1)+p(X = x_2, Y = y_2)+p(X = x_2, Y = y_3) = 0.05+0.1+0.02 = 0.17$$

$$p(X = x_3) = p(X = x_3, Y = y_1)+p(X = x_3, Y = y_2)+p(X = x_3, Y = y_3) = 0.03+0.05+0.03 = 0.11$$

$$p(X = x_4) = p(X = x_4, Y = y_1)+p(X = x_4, Y = y_2)+p(X = x_4, Y = y_3) = 0.05+0.07+0.1 = 0.22$$

$$p(X = x_5) = p(X = x_5, Y = y_1)+p(X = x_5, Y = y_2)+p(X = x_5, Y = y_3) = 0.04+0.2+0.1 = 0.34$$

The marginal distributions $p(y)$:

$$p(Y = Y_1)$$

$$= p(X = x_1, Y = y_1)+p(X = x_2, Y = y_1)+p(X = x_3, Y = y_1)+p(X = x_4, Y = y_1)+p(X = x_5, Y = y_1)$$

$$= 0.01 + 0.02 + 0.03 + 0.1 + 0.1 = 0.26$$

$$p(Y = Y_2)$$

$$= p(X = x_1, Y = y_2)+p(X = x_2, Y = y_2)+p(X = x_3, Y = y_2)+p(X = x_4, Y = y_2)+p(X = x_5, Y = y_2)$$

$$= 0.05 + 0.1 + 0.05 + 0.07 + 0.2 = 0.47$$

$$p(Y = Y_3)$$

$$= p(X = x_1, Y = y_3)+p(X = x_2, Y = y_3)+p(X = x_3, Y = y_3)+p(X = x_4, Y = y_3)+p(X = x_5, Y = y_3)$$

$$= 0.1 + 0.05 + 0.03 + 0.05 + 0.04 = 0.27$$

The conditional distributions $p(x|Y = y_1)$):

$$p(X = x_1|Y = y_1) = 0.01$$

$$p(X = x_2|Y = y_1) = 0.02$$

$$p(X = x_3|Y = y_1) = 0.03$$

$$p(X = x_4|Y = y_1) = 0.1$$

$$p(X = x_5|Y = y_1) = 0.1$$

The conditional distributions $p(x|Y = y_3)$):

$$p(X = x_1|Y = y_3) = 0.1$$

$$p(X = x_2|Y = y_3) = 0.05$$

$$p(X = x_3|Y = y_3) = 0.03$$

$$p(X = x_4|Y = y_3) = 0.05$$

$$p(X = x_5|Y = y_3) = 0.04$$

2

We have:

$$E_Y[E_X(X|Y)] = \sum_x p(y)E_X[X|Y = y] = \sum_y p(y) \sum_x p(x|y)x)$$

$$= \sum_y \sum_x xp(x, y) = \sum_x x \sum_y p(x, y) = \sum_x xp(x) = E(X)$$

Therefore, it is proved.

3

20.7% dân số dùng sản phẩm X nên gọi X là biến cố "Người được phỏng vấn sử dụng sản phẩm X", ta có: $p(X) = 0.207$
50% dân số dùng sản phẩm Y nên gọi Y là biến cố "Người được phỏng vấn sử dụng sản phẩm Y", ta có: $p(Y) = 0.5$
Trong những người dùng sản phẩm Y thì 36.5% dùng sản phẩm X nên $p(X|Y) = 0.365$
Xác suất để người được phỏng vấn dùng cả hai sản phẩm X và Y là:

$$p(X, Y) = p(X|Y) \times p(Y) = 0.365 \times 0.5 = 0.1825$$

Xác suất để người được phỏng vấn dùng sản phẩm Y nhưng không dùng sản phẩm X là:

$$p(Y|\overline{X}) = \frac{p(Y, \overline{X})}{p(\overline{X})} = \frac{p(Y) \times p(\overline{X}|)}{1 - p(X)}$$

Mặt khác:

$$p(\overline{X}|Y) = \frac{p(\overline{X}, Y)}{p(Y)} = \frac{p(Y) - p(X, Y)}{p(Y)} = 1 - p(X|Y)$$

Do đó:

$$p(Y|\overline{X}) = \frac{p(Y) \times [1 - p(X|Y)]}{1 - p(X)} = \frac{0.5 \times (1 - 0.365)}{1 - 0.207} = 0.4004$$

4

We have:

$$V(x) = \sum_x ((x-\mu)^2) \rightarrow 1 => E(x) = \sum (x \times f(x)) => E(x) = \sum (x^2 \times f(x))$$

From 1 we have:

$$V_X[x] = E_X(x-\mu)^2 = E_X(x^2 - 2\mu x + \mu^2) = E_X(x^2) - 2\mu E_X(x) + \mu^2$$

By definition: Mean (μ) is Expected value $E(x)$

$$V_X[x] = E_X(x^2) - 2E_X(x)E_X(x) + [E(x)]^2 = E_X(x^2) - [E_X(x)]^2$$

Therefore, it is proved.

5

Giả sử bạn đứng trước ba ô cửa mà đằng sau nó là một trong hai thứ:con dê hoặc một chiếc xe hơi giá trị. Bạn mong muốn mở trúng ô cửa có chiếc xe để được nhận nó (nếu mở trúng ô cửa có dê thì bạn phải rinh nó về nhà).
Monty yêu cầu bạn chọn một trong các ô cửa. Dĩ nhiên bạn chọn một cách "hú họa" tại xác suất lúc này để nhận xe hơi ở mỗi ô cửa đều là $\frac{1}{3}$.
Giả sử bạn chọn ô cửa số 1. Monty sẽ giúp bạn LOẠI TRỪ 1 ĐÁP ÁN SAI bằng cách mở một ô cửa có dê trong hai ô cửa còn lại (dĩ nhiên ông ta đã biết mỗi ô cửa có gì). Sau đó bạn được lựa chọn LẦN HAI: Giữ nguyên ô cửa ban đầu hay đổi sang ô cửa còn lại chưa được lật mở?
Thoạt nhìn bài toán, chúng ta sẽ dễ nhầm lẫn rằng xác suất chọn trúng chiếc xe sau khi chọn ô cửa đầu tiên là $\frac{1}{2}$, và xác suất này không bị ảnh hưởng bởi ô cửa đầu tiên được chọn. Tuy nhiên, căn cứ theo định lý Bayes thì xác suất chọn trúng chiếc xe sẽ bị ảnh hưởng bởi việc ô của nào được chọn đầu tiên.
Giả sử ban đầu ta chọn ô cửa số 1. Gọi A là biến cố "Chiếc xe ở ô cửa số 1". Khi đó, $p(A) = \frac{1}{3}$.
Gọi B là biến cố "Monty mở ô cửa số 2" thì $p(B) = \frac{1}{2}$ và xác suất Monty mở ô cửa số 2 khi chiếc xe ở ô cửa số 1 là $p(B|A) = \frac{1}{2}$ do lúc này ông sẽ chỉ mở một trong 2 ô cửa 2 và 3 còn lại.
Do đó: xác suất chiếc xe nằm ở ô cửa số 1 khi Monty đã mở ô cửa số 2 là $p(A|B) = \frac{p(B|A) \times p(A)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$
Gọi C là biến cố "Chiếc xe nằm ở ô cửa số 3". Ta thấy 2 biến cố A và C xung khắc nên $p(C) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
Từ đó có thể thấy, xác suất chọn trúng xe đã tăng lên gấp đôi, từ $\frac{1}{3}$ lên $\frac{2}{3}$. khi thay đổi ô cửa được chọn đầu tiên.