

Corrigé du contrôle 1

Exercice 1 (2 points)

$$\begin{cases} f'(x) = -\frac{1}{\left(\ln(\ln(\ln(x)))\right)^2} \cdot \frac{1}{\ln(\ln(x))} \cdot \frac{1}{\ln(x)} \cdot \frac{1}{x} \\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\sin^{2016}(x) + 2^x}} (2016 \sin^{2015}(x) \cos(x) + \ln(2)2^x) \end{cases}$$

Exercice 2 (4 points)

$$1. \frac{z_1}{z_2} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(2 + 2i)}{8} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

$$2. z_1 = \sqrt{2}(\sqrt{3} - i) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/6}.$$

$$z_2 = 2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}.$$

$$\text{Ainsi } \frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2}e^{-i\pi/6}}{2\sqrt{2}e^{-i\pi/4}} = e^{-i\pi/6+i\pi/4} = e^{i\pi/12}.$$

$$3. \text{ Via les questions précédentes, } e^{i\pi/12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\text{donc } \cos(\pi/12) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \text{ et } \sin(\pi/12) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Exercice 3 (6 points)

1. Via une intégration par parties en posant $u(x) = \ln(x)$ et $v'(x) = 1$:

$$\begin{aligned} I &= [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e dx \\ &= e - [x]_1^e \\ &= 1 \end{aligned}$$

2. Intégrons à présent J par parties en posant $u(x) = \ln^2(x)$ et $v'(x) = 1$:

$$\begin{aligned} J &= [x \ln^2(x)]_1^e - 2 \int_1^e \ln(x) dx \\ &= e - 2 \quad \text{car via le calcul précédent } \int_1^e \ln(x) dx = 1 \end{aligned}$$

3. En posant $t = \sqrt{1-x}$, on a $x = 1 - t^2$ donc $dx = -2t dt$.

$$\text{Ainsi } K = \int_1^0 t(1-t^2)(-2t) dt = 2 \int_0^1 t^2(1-t^2) dt = 2 \int_0^1 (t^2 - t^4) dt$$

$$\text{Donc } K = \frac{2}{3} - \frac{2}{5} = \frac{4}{15}.$$

4. En posant $t = e^{-x}$, on a $x = -\ln(t)$ donc $dx = -\frac{1}{t} dt$.

$$\text{Ainsi } L = \int_1^{1/e} \frac{1}{\frac{1}{t} + 1} \times \left(-\frac{1}{t}\right) dt = \int_{1/e}^1 \frac{dt}{1+t}$$

$$\text{Donc } L = [\ln(1+t)]_{1/e}^1 = \ln(2) - \ln(1+1/e).$$

Exercice 4 (3 points)

1. $\Delta = (4 + 3i)^2 - 4(1 + 5i) = 3 + 4i$.

2. Déterminons une racine de Δ .

On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = 3 + 4i$. Ainsi
$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} \\ 2ab = 4 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = 5 \\ ab > 0 \end{cases}$$

Donc $\delta = 2 + i$ est une racine carrée de $3 + 4i$.

3. Ainsi $z = \frac{1}{2}(4 + 3i + 2 + i)$ ou $z = \frac{1}{2}(4 + 3i - 2 - i)$.

Donc $z = 3 + 2i$ ou $z = 1 + i$.

Exercice 5 (4 points)

1. $\ln(1 - x) + e^{2x} = -x - \frac{x^2}{2} + 1 + 2x + \frac{1}{2!}(2x)^2 + o(x^2) = 1 + x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$.

2. $\frac{\cos(2x)}{1 - x} = \cos(2x)(1 - x)^{-1} = \left(1 - \frac{(2x)^2}{2!} + o(x^3)\right)(1 + x + x^2 + x^3 + o(x^3))$

Donc $\frac{\cos(2x)}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 - 2x^2 - 2x^3 + o(x^3)$

soit encore $\frac{\cos(2x)}{1 - x} = 1 + x - x^2 - x^3 + o(x^3)$.

3. $\frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1 + x)} = \frac{1 + x - (1 - x) + o(x)}{x + o(x)} \underset{0}{\sim} \frac{2x}{x} \underset{0}{\sim} 2$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1 + x)} = 2$.

Exercice 6 (2 points)

Soit $h = f - g$. La fonction h est continue sur $[a, b]$ car f et g le sont.

D'autre part, $h(a) = f(a) - g(a) = g(b) - g(a)$ et $h(b) = f(b) - g(b) = g(a) - g(b) = -h(a)$.

Donc $h(a)$ et $h(b)$ sont de signe contraire.

Ainsi, via le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [a, b]$ tel que $h(c) = 0$ i.e. tel que $g(c) = f(c)$.