95

Contrôle TD 1

$\frac{6}{10}$

Nom : NAVID **Prénom :** Clément **Classe :** B2

Question de cours (1,5 points)

Soient une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$.
Donner la définition mathématique précise (avec les quantificateurs) de « f est continue en a ».

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \quad |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

1,5

Question de cours (1,5 points)

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.
Donner la définition mathématique (en utilisant les quantificateurs) de « f tend vers $-\infty$ au voisinage de $+\infty$ ».

$\forall A \in \mathbb{R} \quad \exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad |x| > \eta \Rightarrow f(x) < A$

1,5

Exercice 1 (3 points)

Déterminer le module et un argument des deux nombres complexes $z_1 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - i}$ et $z_2 = \dfrac{i - \sqrt{3}}{i - 1}$.

$z_1 = \frac{z}{z'}$ $\quad |z| = 2$ $\quad |z'| = 2$

$\cos(\theta) = -\frac{1}{2}$ $\quad \sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \theta = \frac{2\pi}{3}$

$\cos(\theta') = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin(\theta') = -\frac{1}{2}$ $\quad \theta' = -\pi/6$

$|z_1| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{2}{2} = 1$

$\theta_1 = \theta - \theta' = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$

2

$z_2 = \frac{z}{z'}$ $\quad |z| = 2$ $\quad |z'| = \sqrt{2}$

$\cos(\theta) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad \sin(\theta) = \frac{1}{2}$ $\quad \theta = \frac{5\pi}{6}$

$\cos(\theta') = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \sin(\theta') = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad \theta' = \frac{3\pi}{4}$

$|z_2| = \frac{|z|}{|z'|} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\theta_2 = \theta - \theta' = \frac{5\pi}{6} - \frac{3\pi}{4}$

$= \frac{20\pi}{12} - \frac{18\pi}{12} = \frac{2\pi}{12}$

$= \cancel{\frac{\pi}{6}}$

$\frac{\pi}{12}$

Exercice 2 (1 points)

Soit f la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(1+x^2) + x - 1$.
Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $f(c) = 0$.

$f(x)$ est une fonction composée de deux fonctions continues ~~sur~~ $[0,1]$, elle est continue sur $[0,1]$

$f(0) = -1 < 0$ $\}$ $f(0) \times f(1) < 0$ donc d'après le theoreme des valeurs intermédiaires,

$f(1) = \ln 2 + 1 > 0$ $\}$ $\exists c \in [0,1]$ $f(c) = 0$

1

Exercice 3 (3 points)

Déterminer (sans intégration par parties ni changement de variables) les intégrales $I = \int_0^{\pi/3} \tan(x)\,dx$, $J = \int_0^{\ln(3)} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$ et $K = \int_0^1 x e^{x^2}\,dx$.

$$I = \int_0^{\pi/3} \tan(x)\,dx = \cancel{[\text{Arctan}\,x]_0^{\pi/3} = \text{Arctan}\left(\frac{\pi}{3}\right) - \text{Arctan}(0)}$$

$$J = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{(e^x+1)^2} =$$

$$J = \int_0^{\ln(3)} \frac{e^x}{(e^x+1)^2}\,d(x) = \left[\frac{-1}{(e^x+1)}\right]_0^{\ln(3)} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$k = \int_0^1 x e^{x^2}\,dx = \left[\frac{e^{x^2}}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(e-1)$$

Contrôle TD 2

Nom : MAUD Prénom : Clément Classe : B2

7/10

Exercice 1

Résoudre l'équation différentielle suivante : $y' - 2xy = (1-2x)e^x$.

On pose (E) l'équation : $y' - 2xy = (1-2x)e^x$

(E_0) $y' - 2xy = 0$ $y_0 = ke^{-\int -2x} = ke^{-(-x^2)} = ke^{x^2}$

2

solution particulière :

$y_P = k(x)y_0$

donc $y'_P = k'(x)y_0 + k(x)y_0'$

On prend $k=1$ ~~dans~~ y_0 d'où : $y'_P = k'(x)e^{x^2} + k(x)2xe^{x^2}$

On remplace dans (E) :

$k'(x)e^{x^2} + k(x)2xe^{x^2} - k(x)e^{x^2} \times 2x = (1-2x)e^x$

$k'(x)e^{x^2} = (1-2x)e^x$

$k'(x) = (1-2x)e^{-x} = e^{-x} - 2xe^{-x}$

donc $k(x) = \cancel{(1-2x)} - e^{-x} + x^2e^{-x}$

d'où $y_P = (e^{-x} + x^2e^{-x})e^{x^2} = -e^x + x^2e^x = (-1+x^2)e^x$

donc

$S = \{ke^{x^2} + (-1+x^2)e^x \text{ avec } k \in \mathbb{R}\}$

Exercice 2

réciser si les fonctions suivantes sont injectives et/ou surjectives en justifiant votre réponse uniquement dans les cas défavorables :

$f : \begin{cases} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$, $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \{1\} \\ x & \longmapsto 1 \end{cases}$ et $h : \begin{cases} \{1\} & \longrightarrow \{1, 2\} \\ x & \longmapsto 1 \end{cases}$

1) (-1) n'a pas d'antécédant sur $\mathbb{R}$ par f donc f n'est pas surjective et f est injective 1

2) (1) a pour antécédant 0 et 1 donc g n'est pas injective et g est surjective 1

~~2 n'a pas d'antécédant sur~~

3) h est injective mais mais 2 n'a pas d'antécédant sur l'ensemble de départ donc h n'est pas surjective 1

Exercice 3

Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$.

On cherche à montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

Init pour $n = 1 \Rightarrow \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{2}$ et $1 - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 0,5

donc P_1 est vraie

Heredité

On suppose que (P_n) $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$ est vraie

Montrons que P_{n+1} est vraie

$(P_{n+1}) = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(n+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)(n+1)}$??? 1,5

Calcul pas clair

$= \frac{1 - (n+2) + 1}{(n+2)(n+1)} = 1 - \frac{n+1}{(n+2)(n+1)}$

$= 1 - \frac{1}{n+2}$ $P(n+1)$ est vraie

donc P_n est vrai $\forall n \in \mathbb{N}^*$ car P_0 est vraie et $P(n+1)$ est vraie

il ne suffit pas de marquer le bon résultat

20

7,5/10

Contrôle TD 3

Nom : DAVID **Prénom :** Clément **Classe :** B2

Question de cours

Soient (u_n) une suite réelle. Donner la défintion précise avec les quantificateurs de « (u_n) n'est pas minorée » et « (u_n) tend vers $-\infty$ ».

$\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, (n \geqslant n_0 \Rightarrow U_n \leqslant A)$ X

Question de cours

Calculer (puis simplifier au maximum) les expressions suivantes : $A = 5 + 8 + 11 + \cdots + 95$ et $B = \sum_{k=0}^{n-1} 3 \times 2^k$.

$A = 5 + 8 + 11 + \dots + 95$

$U_0 = 5,\ U_1 = 8,\ U_2 = 11$

$U_1 - U_0 = 3$

$U_2 - U_1 = 3$

$U_n = U_0 + 3 \times n$

$S = \text{nbtermes}\left(\frac{U_0 + U_n}{2}\right) = 31\left(\frac{5+95}{2}\right) = 31 \times 50 = 1550$ ✓

$U_n = 95$

$95 = 5 + 3n$

$n = 30$

2,5

$B = \sum_{k=0}^{n-1} 3 \times 2^k$

$U_0 = 3$

$U_1 = 3 \times 2 = 6$

$U_2 = 3 \times 4 = 12$

$U_n = 3 \times 2^n$

$S = U_0\left(\frac{1 - q^{\text{nbtermes}}}{1-q}\right) = 3\left(\frac{1-2^n}{1-2}\right)$

$= -3(1 - 2^n) = 3(2^n - 1)$ ✓

Exercice 1

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n - 8$. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n en fonction de n.

$U_0 = 1$ et $U_{n+1} = 2U_n - 8$

On pose $U_{n+1} = f(U_n)$ où $f(x) = 2x - 8$

On cherche le point fixe de $f(x)$: ✓

$f(x) = x$

$l = 2l - 8 \Leftrightarrow l = 8$

(suite du cadre page suivante)

On pose $W_n = U_n - \ell$

$W_n = U_n - 8$

Montrons que W_n est géométrique

$W_{n+1} = U_{n+1} - 8$

$W_{n+1} = 2U_n - 8 - 8$

$W_{n+1} = 2(U_n - 8)$

$W_{n+1} = 2W_n$

et $W_0 = U_0 - 8 = -7$

donc $W_n = -7 \times 2^n$

$U_n = W_n + 8$

$U_n = -7 \times 2^n + 8$

2

Exercice 2

Soit (u_n) une suite à termes strictement positifs vérifiant : $\exists (k,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N},\ k > 1, \quad \forall n \geqslant p, \quad \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant k.$
Montrer rigoureusement que (u_n) tend vers $+\infty$.

$\dfrac{U_{n+1}}{U_n} \geqslant k$

$\underline{n=p}$ $\dfrac{U_{p+1}}{U_p} \geqslant k \Rightarrow U_{p+1} \geqslant kU_p$

$\underline{n=p+1}$ $\dfrac{U_{p+2}}{U_{p+1}} \geqslant k \Rightarrow U_{p+2} \geqslant kU_{p+1} \geqslant kkU_p$
$\geqslant k^2 U_p$

Montrons que $U_{p+n} \geqslant k^n U_p$

3

Initialisation

$U_{p+1} \geqslant kU_p$ donc P_1 est vraie

Heredite

Supposons que $U_{p+n} \geqslant k^n U_p$,
Montrons que $U_{p+n+1} \geqslant k^{n+1} U_p$.

$\dfrac{U_{p+n+1}}{U_{p+n}} \geqslant k$

$U_{p+n+1} \geqslant k\, U_{p+n}$

or $U_{p+n} \geqslant k^n U_p$

donc

$U_{p+n+1} \geqslant k\ (k^n U_p)$

$U_{p+n+1} \geqslant k^{n+1} U_p$

CCl la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, on sait que $k > 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} k^n = +\infty$

et $U_p > 0$ donc

$\lim\limits_{n \to +\infty} k^n U_p = +\infty$

$\Rightarrow \lim u_n = +\infty$

lundi 27 mars 2017

Contrôle TD 4

7,5 / 10

Nom : DAVID Prénom : Clément Classe : B2

Question de cours

Soient E un $\mathbb{R}$-ev, $x \in E$ et $L = (e_1, \cdots, e_n)$ une famille de vecteurs de E.
Donner la définition mathématique précise (avec les quantificateurs adéquats) de « $x \in \mathrm{Vect}(L)$ ».

$x \in \mathrm{Vect}(L) \iff$

$\exists (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n, \ x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$

écrire un énoncé complet

1

Exercice 1

Soient $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n\}$ et $F = \{f \in C^0([a,b],\mathbb{R}),\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0\}$. E et F sont-ils des $\mathbb{R}$-ev ? Justifier votre réponse.

$E = \{U_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, U_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n\}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$ev

car

* $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \Rightarrow U_n = 0 \Rightarrow 0 = 2 \cdot 0 - 0$ donc $0_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} \in E$

* Stabilité sur + : Soit $(u,v) \in E^2$, $w = u + v$

$W_{n+2} = U_{n+2} + V_{n+2} = 2U_{n+1} - U_n + 2V_{n+1} - V_n = 2(U_{n+1} + V_{n+1}) - (U_n + V_n)$

$= 2(W_{n+1}) - W_n$

donc $w \in E$

* Stabilité sur . : Soit $u \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $w = \lambda u$

$W_{n+2} = 2(\lambda U_{n+1}) - \lambda U_n = 2W_{n+1} - W_n$

donc $w_n \in E$. E est stable sur + et . donc E est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ donc un $\mathbb{R}$ev

1,5

$F = \{f \in C([a,b],\mathbb{R}), \int_a^b f(t)dt = 0\}$ $C^0([a,b],\mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ev

* $\int_a^b 0_{C([a,b],\mathbb{R})} = 0$ donc $0_{C^0([a,b],\mathbb{R})} \in F$

* Stabilité pour +, Soit $(f,g) \in F^2$, $h = f + g$

$\int_a^b h(t)dt = \int_a^b (f+g)(t)\,dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt = 0 + 0 = 0$ donc $h \in F$

1,5

* Stabilité pour . : Soit $f \in F$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$\int_a^b (\lambda f)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)dt = 0$ donc $\lambda f \in F$. F est stable pour + et . donc F est un sev de $C^0_{[a,b],\mathbb{R}}$ donc F est un $\mathbb{R}$ev.

Exercice 2

Soient $F = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $f(0) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions constantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire que $G = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ telle que $\exists k \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\quad f(x) = k\}$. Montrer que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F \oplus G$.

Montrons que $F \cap G = \{0\}$

* Mq $\{0\} \supset F \cap G$, Soit $f \in F$ et $f \in G$ $(f \in F \cap G)$

$f \in F \Rightarrow f(0) = 0$

$f \in G \Rightarrow f(x) = k$ et en particulier $f(0) = 0$ donc $k = 0$
donc $f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

1,5

donc $f \in \{0\}$ donc $F \cap G \subset \{0\}$

* F et G sont des $\mathbb{R}$ev donc $\{0\} \in F$ et $\{0\} \in G$ donc $\{0\} \in F \cap G$

donc $F \cap G = \{0\}$

Montrons que $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = F + G$

* F et G sont des sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc $F \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et $G \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc $F + G \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

* Mq $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \subset F + G$, Soit $f \in F$ et $g \in G$

Non prouvé

$h = f + g$

$h(0) = f(0) + g(0) = k$, $k \in G$ donc $k \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$h(x) = f(x) + g(x) = f(x) + k$ et $f(x) \in F$ donc $f(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ est un $\mathbb{R}$ev donc $f(x) + k \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc $h(x) \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$

CCL : $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ donc $F \oplus G = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Exercice 3

Soit $E = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que : } x + y = 0 \text{ et } x - y = 0 \right\}$. Écrire E sous forme de sev engendré en utilisant la notation Vect.

$u = (x, y, z) \in E \iff x + y = 0$ et $x - y = 0$

$\iff x = y = 0$

$\iff u = (0, 0, z)$

$u = z(0,0,1) = zu_1$ avec $u_1 = (0,0,1)$

2

$E = \mathrm{Vect}(u_1)$