287/ 10h35

EPITA

Mathématiques

Contrôle (S1)

novembre 2017

Nom : Para

287

Prénom : Albin

Entourer le nom de votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Ghanem / M. Goron / Mme Trémoulet

Classe : C2

NOTE : 14/20

Contrôle 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Consignes :

- vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
- ***aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.***
- aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
- toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/20.

Exercice 1 (2 points)

Soient f et g les fonctions définies par $\begin{cases} f(x) = \sqrt{\ln^{10}(\sin(x)) + 1} \\ \\ g(x) = \sin\left(\arctan(\sqrt{x})\right) \end{cases}$

Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ (sans se préoccuper du domaine de définition).

N.B. : n'essayez pas de simplifier les résultats.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln^{10}(\sin x) + 1}} \times 10 \ln^9(\sin x) \times \frac{1}{\sin x} \times \cos x$$

$$g'(x) = \cos(\arctan\sqrt{x}) \times \frac{1}{1+x} \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2

Exercice 2 (3 points)

Soit $z = 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$.

1. Déterminer z^2 sous forme exponentielle.

$$z^2 = ((1+\sqrt{3}) + i(1-\sqrt{3}))^2$$
$$= (1+\sqrt{3})^2 + 2i(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3}) - (1-\sqrt{3})^2$$
$$= 1 - 2\sqrt{3} + 9 + 2i - 6i - 1 + 2\sqrt{3} - 9$$
$$= 4\sqrt{3} - 4i$$
$$= 8\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$$
$$= 8e^{-\pi/6\, i}$$

0,5

2. En déduire le module et un argument de z.

$|z^2| = |z|^2 \Leftrightarrow |z| = \sqrt{|z^2|}$
$= \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$\text{Arg}(z^2) = 2\,\text{Arg}(z)$
$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} = 2\,\text{Arg}(z)$
$\Leftrightarrow \text{Arg}(z) = -\frac{\pi}{12}.$

Modulo ?

1,5

Exercice 3 (6 points)

1. Déterminer, sans intégration par parties ni changement de variable, $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

$I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\,dx = \int_0^1 u' \times u \; dx = \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \left[\frac{\arctan^2(x)}{2}\right]_0^1$

$I = \dfrac{\arctan^2 1}{2} - \dfrac{\arctan^2 0}{2}$
$= \cancel{\dfrac{\pi^2}{2}} - 0 = \cancel{\dfrac{\frac{\pi^2}{4}}{2}}$

0,5

2. Via une intégration par parties, déterminer $J = \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$.

3. Via le changement de variable $u = \ln(t)$, déterminer $K = \int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln^2(t))}$.

$u = \ln t \iff t = e^u$

$dt = du \times t = e^u du$

$K = \int_1^e \frac{dt}{t(1+\ln^2(t))} \dots = \int_0^1 \frac{e^u}{e^u(1+u^2)} du = \int_0^1 \frac{1}{1+u^2} du$

$= [\arctan x]_0^1 = \cancel{\frac{\pi}{4}}$

1,5

4. Via le changement de variable $u = \sqrt{x}$, déterminer $L = \int_0^1 \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx$.

$u = \sqrt{x} \iff x = u^2$

$dx = (u^2)' \times du = 2u\, du$

$L = \int_0^1 \frac{1-x}{1+\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{1-u^2}{1+u} 2u\, du = \int_0^1 \frac{2u - u^3}{1+u} du$

1

Exercice 4 (4 points)

Soit l'équation (E) suivante : $z^2 - (5+3i)z + 2 + 9i = 0$.

1. Montrer que $\Delta = 8 - 6i$.

$\Delta = (-(5+3i))^2 - 4 \times (1) \times (2+9i)$

$= 25 + 30i - 9 - 8 - 36i$

$= 8 - 6i.$

0,5

2. Déterminer une racine carrée de Δ.

On pose $\delta = \sqrt{\Delta}$.
Nous cherchons donc $\delta = a + ib$

$a + ib = \sqrt{\Delta}$
$\Leftrightarrow a^2 + 2iab - b^2 = \Delta = 8 - 6i$

On obtient donc que : $\begin{cases} 2ab = -6 \\ a^2 - b^2 = 8 \\ a^2 + b^2 = 10 \end{cases}$

$|\delta| = |\sqrt{\Delta}|$
$\Leftrightarrow |\delta|^2 = |\Delta|$
$\Leftrightarrow (a^2 + b^2)^2 = 8^2 + 6^2$
$= 64 + 36$
$= 100$
$\Leftrightarrow a^2 + b^2 = 10$

$\Leftrightarrow a^2 = 10 - b^2$
$\Leftrightarrow a^2 - b^2 = 8 \Rightarrow 10 - b^2 - b^2 = 8$
$\Leftrightarrow 10 - 2b^2 = 8$
$\Leftrightarrow 2 = 2b^2$
$\Leftrightarrow b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$
$a^2 - b^2 = 8$
$\Leftrightarrow a^2 - 1^2 = 8$
$\Leftrightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$

Donc, d'après l'équation $2ab = -6$, on peut déduire que

$\delta = 3 - i$ ou $\delta = -3 + i$

1,5

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

On prend $\delta = 3 - i$:

$S_1 = \dfrac{-(-(5+3i)) + 3 - i}{2}$
$= \dfrac{5 + 3i + 3 - i}{2}$
$= 4 + i$

$S_2 = \dfrac{-(-(5+3i)) - (3 - i)}{2}$
$= \dfrac{5 + 3i - 3 + i}{2}$
$= 1 + 2i$

2

Les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ sont donc : $4 + i$ et $1 + 2i$

Exercice 5 (4 points)

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $e^x \ln(e + ex)$.

$$e^x \ln(e+ex) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)\left(\ln e + \left(x - \frac{x^2}{2!} + o(x^2)\right)\right)$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2) + x - \frac{x^2}{2!} + o(x^2) + x^2 + o(x^2)$$

$$= 1 + 2x + x^2 + o(x^2) \quad \text{au } \mathcal{V}(0)$$

1,5

2. Déterminer $\lim_{x\to 0} (1 + \sin(x))^{1/x}$.

$$\lim_{x\to 0} (1+\sin(x))^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+\sin x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x + o(x))}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\left(\frac{x}{1+x} + o(x)\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{1+x} + o(1)} = e^{\frac{1}{1+0}} = e^1 = e$$

??

0

chance

rédaction bof !

3. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x - \sin x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2!} - 1 + \frac{x^2}{2!} - x + o(x^2)}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

1,5

Exercice 6 (2 points)

Soit $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Montrer qu'il existe $c \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ tel que $f(c) = f\left(c + \frac{1}{2}\right)$.