

Contrôle 1 de Physique

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés.

Réponses exclusivement sur le sujet

Exercice 1 (4 points)On considère, dans un repère orthonormé de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$, les trois vecteurs : \vec{U} , \vec{V} et \vec{W} de composantes respectives: $\vec{U}(-4x, -2, +4)$; $\vec{V}(-1, +2, +3)$; $\vec{W}(-2, +4y, +6)$ a) Calculer la norme de chacun des vecteurs pour $x=0$ et $y=-1$.

$$U = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4+16} = 2\sqrt{5} \text{ N}$$

$$V = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14} \text{ N}$$

$$W = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 6^2} = \sqrt{4+16+36} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \text{ N}$$

15,5
20

11

b) Calculer le produit scalaire $\vec{U} \cdot \vec{V}$, donner la valeur de x pour laquelle \vec{U} est orthogonal à \vec{V} .

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = x u_x v_x + y u_y v_y + z u_z v_z = (-4x)(-1) + (-2)(2) + 4(3) = 4x + 8$$

Pour que les vecteurs \vec{U} et \vec{V} soient orthogonaux, il faut que leur produit scalaire soit nul \Rightarrow que $x = -2$

1

2- Calculer le produit vectoriel : $\vec{V} \wedge \vec{W}$, pour quelle valeur de y les vecteurs \vec{V} et \vec{W} sont colinéaires.

$$\vec{V} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{W} \begin{pmatrix} -2 \\ 4y \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{V} \wedge \vec{W} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 6 - 3 \cdot 4y \\ 3 \cdot (-2) - 6 \cdot (-1) \\ (-1) \cdot 4y - 2 \cdot (-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 12y \\ -6 + 6 \\ -4y + 4 \end{pmatrix}$$

Pour que \vec{V} et \vec{W} soient colinéaires, il faut que leur produit vectoriel soit nul \Rightarrow que $y = 1$.

11

Exercice 2

Composition de vecteurs (5 points)

Calculer la norme de la résultante \vec{R} des vecteurs forces dans les cas suivants (1) et (2) :

1) $F_1 = 4\text{ N}$

$F_2 = 3\text{ N}$

$\alpha = (\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 90^\circ$

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5\text{ N}$$

2) $F_1 = 1\text{ N}$

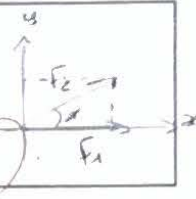
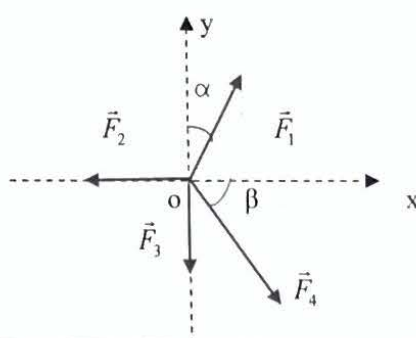
$F_2 = 2\text{ N}$

$\alpha = (\vec{F}_1, \vec{F}_2) = 60^\circ$

$$R_x = F_1 + F_2 \cos \alpha \quad R_y = F_2 \sin \alpha$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(F_1 + F_2 \cos \alpha)^2 + (F_2 \sin \alpha)^2} = \sqrt{F_1^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha + F_2^2 \cos^2 \alpha + F_2^2 \sin^2 \alpha}$$

$$= \sqrt{F_1^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha + F_2^2} = \sqrt{1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \cos \frac{\pi}{3} + 4} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3\text{ N}$$

3) a- Donner les expressions littérales des composantes R_x et R_y de la résultante \vec{R} des forces représentées sur le schéma ci-dessous, en fonction de $F_1, F_2, F_3, F_4, \alpha$ et β .b- En déduire l'expression littérale de la norme de la résultante \vec{R} en fonction des normes $F_1, F_2, F_3, F_4, \alpha$ et β .

$$R_{x12} = F_2 + F_1 \sin \alpha \quad R_{x34} = F_4 \cos \beta$$

$$R_{y12} = F_1 \cos \alpha \quad R_{y34} = F_3 + F_4 \sin \beta$$

$$R_x = F_2 + F_1 \sin \alpha + F_4 \cos \beta$$

$$R_y = F_1 \cos \alpha + F_3 + F_4 \sin \beta$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(F_2 + F_1 \sin \alpha + F_4 \cos \beta)^2 + (F_1 \cos \alpha + F_3 + F_4 \sin \beta)^2} \text{ (N)}$$

Exercice 3 Cinématique (Sur 6 points)

Dans le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$, la position d'un point M est définie à chaque instant t par les équations

horaires:
$$\begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = \sqrt{4(1-t^2)} \end{cases}$$

1- Retrouver l'équation de la trajectoire. Préciser sa nature.

$$t = \frac{x(t)}{2}$$

$$y(x) = \sqrt{4\left(1 - \left(\frac{x(t)}{2}\right)^2\right)} = \sqrt{4 - x(t)^2}$$

La trajectoire est ~~parabolique~~.

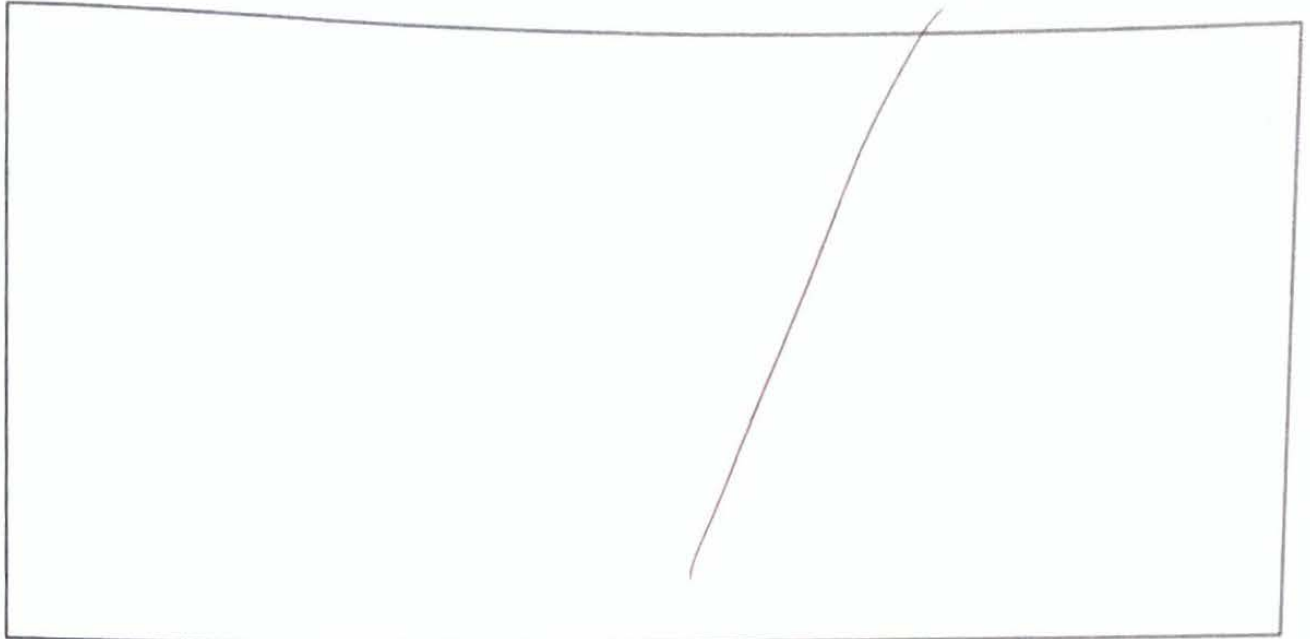
2- a) Déterminer les composantes cartésiennes du vecteur vitesse. Exprimer sa norme.

$$\vec{v} = \begin{cases} \dot{x}(t) = v_x = 2 \\ \dot{y}(t) = v_y = \frac{-4t}{\sqrt{4-t^2}} \end{cases}$$

$$v = \sqrt{2^2 + \left(\frac{-4t}{\sqrt{4-t^2}}\right)^2}$$

$$v = \sqrt{4 + \frac{16t^2}{4-t^2}} = \sqrt{4 - \frac{16}{4-t^2}} \quad \text{m.s}^{-1}$$

b) En déduire les composantes a_T et a_N du vecteur accélération dans la base de Frenet

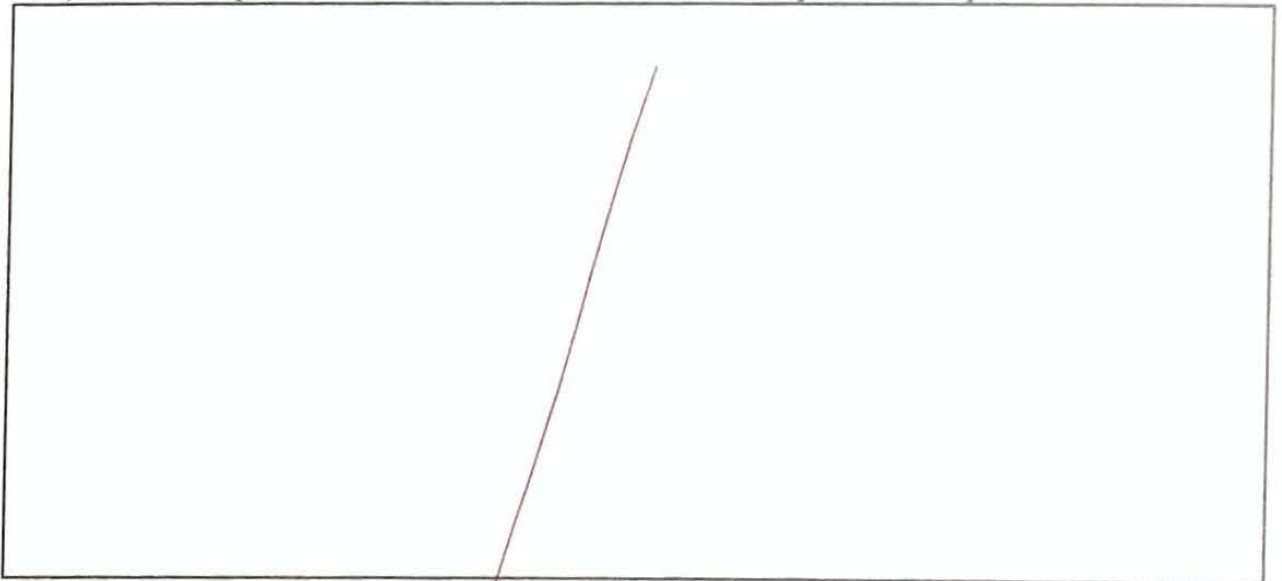


3- a) Déterminer les composantes cartésiennes du vecteur accélération. Exprimer sa norme.

$$\vec{a} \begin{cases} \dot{v}_x = 0 \\ \dot{v}_y = \sqrt{h-4}t^2 \end{cases}$$

$$a = \sqrt{h-4}t^2 \text{ m.s}^{-2}$$

b) En déduire que le module du vecteur accélération est indépendant du repère d'étude.



Exercice 4 Cinématique (5 points)

On considère le mouvement d'un point matériel sur une spirale tracée sur un cône. Les équations horaires du mouvement en coordonnées cylindriques sont données par :

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 \exp(\omega t) \\ z(t) = a\rho_0 \exp(\omega t) \end{cases} \quad (a, \rho_0, \omega \text{ sont des constantes positives et } \dot{\theta} = \omega)$$

1- Donner le vecteur position \vec{OM} en coordonnées cylindriques.

$$\vec{OM} = \rho(t) \vec{U}_\rho + z(t) \vec{U}_z = \rho_0 \exp(\omega t) \vec{U}_\rho + a\rho_0 \exp(\omega t) \vec{U}_z$$

1

2- Exprimer le vecteur vitesse en coordonnées cylindriques. En déduire sa norme.

$$\begin{aligned} \vec{v} = \dot{\vec{OM}} &= \dot{\rho} \vec{U}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{z} \vec{U}_z \\ &= \rho_0 \omega \exp(\omega t) \vec{U}_\rho + \rho_0 \omega \exp(\omega t) \vec{U}_\theta + a\rho_0 \omega \exp(\omega t) \vec{U}_z \end{aligned}$$

$$v = \sqrt{(\rho_0 \omega \exp(\omega t))^2 + (\rho_0 \omega \exp(\omega t))^2 + (a\rho_0 \omega \exp(\omega t))^2}$$

$$v = \sqrt{(\rho_0 \omega \exp(\omega t))^2 (2 + a^2)} = \rho_0 \omega \exp(\omega t) \sqrt{2 + a^2} \text{ rad.s}^{-1}$$

2

3- Exprimer les composantes du vecteur accélération dans les mêmes coordonnées. En déduire sa norme.

$$\begin{aligned} \vec{a} = \dot{\vec{v}} &= \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{U}_\rho + \rho \dot{\theta}^2 \vec{U}_\rho + \rho \dot{\theta} \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{\rho} \dot{\theta} \vec{U}_\theta + \dot{z} \dot{\theta} \vec{U}_z \\ &\quad + a\rho \dot{\theta}^2 \vec{U}_z \end{aligned}$$

$$\vec{a} = \rho_0 \omega^2 \exp(\omega t) \vec{U}_\rho + a\rho_0 \omega^2 \exp(\omega t) \vec{U}_z$$

$$a = \rho_0 \omega^2 \exp(\omega t) \sqrt{1 + a^2} \text{ rad.s}^{-2}$$

3