

EPITA

Mathématiques

Partiel (S2)

juin 2017

Nom : DAVID

Prénom : Clement

Nom de l'enseignant : M^r Chanem

Classe : B2

NOTE :

13
20

Exercice 1 (2 points)

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A^{-1} en prenant soin de vérifier (au brouillon) le résultat final.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 3 & -5 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = -x + 3y - z \\ b = 3x - 5y + 2z \\ c = -x + 2y - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a + b + c \\ y = a - c \\ z = -x + 3y - a = -(a + b + c) + 3(a - c) - a \\ \quad = a - b - 4c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = -x + 3y - z \\ b - c = y \\ a + b + c = x \end{cases}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Après vérification, $AA^{-1} = I_3$.



Exercice 2 (4,5 points)

Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F(X) = \frac{X^2 + X + 1}{(X+1)(X-1)(X-3)}$

$$\frac{X^2 + X + 1}{(X+1)(X-1)(X-3)} = \frac{P}{Q} \quad d(P) < d(Q) \quad \text{donc} \quad F(X) = \frac{A}{(X+1)} + \frac{B}{(X-1)} + \frac{C}{(X-3)}$$

Calcul de A : $\frac{X^2 + X + 1}{(X+1)(X-3)} = A + \frac{B(X-1)}{(X-1)} + \frac{C(X+1)(X-1)}{(X-3)}$ $\Rightarrow A = \frac{1}{8}$

Calcul de B : pour $x = 1$ $B = \frac{-3}{4}$

Calcul de C : pour $x = 3$ $C = \frac{13}{2}$ $F(x) = \frac{1}{8(x+1)} - \frac{3}{4(x-1)} + \frac{13}{2(x-3)}$

2. $G(X) = \frac{X^3 - X - 1}{(X+1)(X+3)}$

$$G(X) = \frac{X^3 - X - 1}{X^2 + 4X + 3} = \frac{P}{Q} \quad d(P) > d(Q)$$

$$\begin{array}{r} \overbrace{X^3 - X - 1}^P \quad \overbrace{X^2 + 4X + 3}^Q \\ -(X^3 + 4X^2 + 3X) \quad \text{---} \\ \hline -4X^2 - 4X - 1 \\ + (4X^2 + 16X + 12) \\ \hline 12X + 11 \\ \text{---} \\ R \end{array}$$

$$P = QE + R$$

$$\frac{P}{Q} = E + \frac{R}{Q}$$

$$G(X) = (X-4) + \frac{4}{(X+1)} + \frac{13}{(X+3)}$$

Calcul de A : pour $x = -1$

$$A = \frac{(-1)^3 - (-1) - 1}{(-1+3)} = \frac{-1}{2}$$

Calcul de B pour $x = -3$

$$B = \frac{(-3)^3 - (-3) - 1}{(-3+1)} = \frac{-24+3-1}{-2} = \frac{26}{2} = 13$$

$$G(X) = (X-4) - \frac{1}{2(X+1)} + \frac{13}{(X+3)}$$

3. $H(X) = \frac{X^2 - X - 1}{(X-2)(X^2+1)}$

$$H(x) = \frac{x^2 - x - 1}{(x-2)(x^2+1)} = \frac{P}{Q} \quad d(P) < d(Q)$$

$$H(x) = \frac{A}{(x-2)} + \frac{Bx+C}{(x^2+1)}$$

Calcul de A : $x = 2$

$$A = \frac{2^2 - 2 - 1}{(2^2 + 1)} = \frac{4 - 2 - 1}{4 + 1} = \frac{1}{5}$$

OK

Calcul de B et C : $x = i$

$$Bx + C = \frac{i^2 - i - 1}{i - 2} = \frac{-i - 2}{i - 2} = \frac{(-2-i)(-2+i)}{(-2)^2 + i^2} = \frac{4 - 2i + 2i - i^2}{3} = \frac{3}{3} = 1$$

donc $B = 0$ et $C = 1$

$$H(x) = \frac{1}{5(x-2)} + \frac{1}{(x^2+1)}$$

Exercice 3 (3 points)

1. Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie pour tout $P \in \mathbb{R}_2[X]$ par $f(P(X)) = (P(1), P(2))$.

Déterminer la matrice de f relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et \mathbb{R}^2 .

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f(P) \rightarrow (P_1, P_2) \end{cases}$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}_2[X]} = \{1, X, X^2\}$$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} = \{(0, 1), (1, 0)\}$$

$$P(x) = 1 \Rightarrow f(P(x)) = (P(1), P(2)) = (1, 1) = 1(0, 1) + 1(1, 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x) = x \Rightarrow f(P(x)) = (P(1), P(2)) = (1, 2) = 2(0, 1) + 1(1, 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P(x) = x^2 \Rightarrow f(P(x)) = (P(1), P(2)) = (1, 4) = 4(0, 1) + 1(1, 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_2[X]}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

~~16~~

2. Soit $u : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} x+y & y+z \\ x+z & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

Déterminer la matrice de u relativement aux bases canoniques de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$B_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ $B_{\mathbb{R}^3} = \{(0,0,1), (0,1,0), (1,0,0)\}$

$u(0,0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u(1,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$M_{B_{\mathcal{M}_2(\mathbb{R})}, B_{\mathbb{R}^3}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

~~111~~

Exercice 4 (3 points)

Soient E un \mathbb{R} -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. On note comme d'habitude $f^2 = f \circ f$.

1. Montrer que $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$.

$\text{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0\}$

$\text{Ker}(f^2) = \{x \in E, f(f(x)) = 0\}$

donc $f(x) \in \text{Ker}(f)$ donc $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$

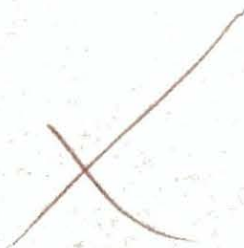
2. Montrer que $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$.

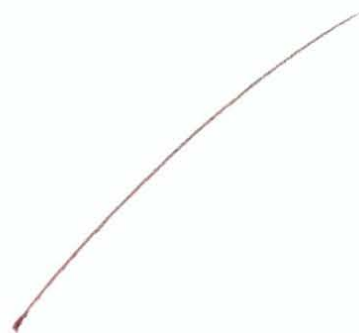
$\text{Im}(f) = \{y \in E, \exists x \in E, f(x) = y\}$

$\text{Im}(f^2) = \{y \in E, \exists x \in E, f(f(x)) = y\}$

donc $f(f(x)) \in \text{Im}(f)$ donc $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$

3. Montrer que : $\text{Im}(f) \cap \text{Ker}(f) = \{0\} \iff \text{Ker}(f) = \text{Ker}(f^2)$.





Exercice 5 (2 points)

On se place dans $\mathbb{R}_2[X]$. Dans les trois questions suivantes, vos réponses doivent être justifiées.

1. $\mathcal{B}_1 = \{X^2 + X; X + 3\}$ engendre-t-elle $\mathbb{R}_2[X]$?

Soit $P = X^2 + X + 1 \in \mathbb{R}_2[X]$

On cherche $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda_1(X^2 + X) + \lambda_2(X + 3) = X^2 + X + 1$

$\lambda_1 X^2 + (\lambda_1 + \lambda_2)X + 3\lambda_2$. Il n'existe pas de λ_1, λ_2 possible donc cette base n'engendre pas $\mathbb{R}_2[X]$ oui

2. $\mathcal{B}_2 = \{2; X + 1; 2X^2; X^2 + 3\}$ est-elle une famille libre de $\mathbb{R}_2[X]$?

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$

On cherche $2\lambda_1 + (\lambda_1 + 1)\lambda_2 + (2X^2)\lambda_3 + X^2 + 3\lambda_4 = 0$

Pour qu'un polynôme soit nul, il faut que tous ces coefficients soient nuls

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_4 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = -\lambda_4 \\ \lambda_1 = \frac{3}{2}\lambda_4 \end{cases}$$

ou $\lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4 \neq \lambda_1 \neq 0$ donc cette famille n'est pas libre.

3. $\mathcal{B}_3 = \{1; X + 1; X^2 + 2X\}$ est-elle une base de $\mathbb{R}_2[X]$?

Soit $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ On cherche $\lambda_1 + (\lambda_1 + 1)\lambda_2 + (\lambda_1^2 + 2X)\lambda_3 = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_2 = -2\lambda_3 \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \text{ cette famille est libre.}$$

De plus, $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X + 1, X^2 + 2X)$ donc \mathcal{B}_3 est génératrice

\mathcal{B}_3 est libre et génératrice, c'est donc une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 6 (3 points)

Soient a et b deux réels, $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer J^2 puis J^k pour $k \geq 3$.

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$J^3 = J^2 \cdot J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\text{Donc } J^k \text{ pour } k \geq 3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Exprimer A en fonction de I , J et J^2 où $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$A = I + aJ + bJ^2$$

3. En déduire A^n pour tout entier naturel n non nul.

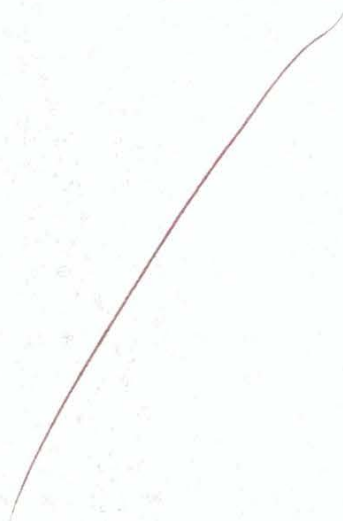
$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a & 2b+a^2 \\ 0 & 1 & 2a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 3b+3a^2 \\ 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 4a & 4b+6a^2 \\ 0 & 1 & 4a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = (I + aJ + bJ^2)^2 = I + 2aJ + 2bJ^2 + a^2J^2$$

$$A^3 = (I + aJ + bJ^2)^3 = I + 3aJ + 3bJ^2 + 3a^2J^2$$

$$A^n = (I + aJ + bJ^2)^n = I + naJ + nbJ^2 + \sum_{k=1}^{n-1} k a^2 J^2$$



Exercice 7 (4 points)

Soit $f: \begin{cases} \mathbb{R}^4 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z, t) & \mapsto (x+y, 2x+y+z, x+t) \end{cases}$

1. Montrer que f est linéaire.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$

$$f(\lambda x, \lambda y, \lambda z, \lambda t) = (\lambda x + \lambda y, 2\lambda x + \lambda y + \lambda z, \lambda x + \lambda t) = \lambda(x, y, 2x+y+z, x+t) = \lambda f(x, y, z, t)$$

Soit $u = (x_1, y_1, z_1, t_1) \in \mathbb{R}^4$ et $v = (x_2, y_2, z_2, t_2) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned} f(u+v) &= f(x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2, t_1+t_2) \\ &= ((x_1+x_2) + (y_1+y_2), 2(x_1+x_2) + (y_1+y_2) + (z_1+z_2), (x_1+x_2) + (t_1+t_2)) \\ &= (x_1+y_1, 2x_1+y_1+z_1, x_1+t_1) + (x_2+y_2, 2x_2+y_2+z_2, x_2+t_2) \\ &= f(u) + f(v) \end{aligned}$$

$$0_{\mathbb{R}^4} = (0, 0, 0, 0)$$

$$f(0_{\mathbb{R}^4}) = 0_{\mathbb{R}^3}$$

f est stable pour l'addition et la multiplication et l'élément neutre existe dans les deux ensembles donc f est linéaire.

2. Déterminer $\text{Ker}(f)$ et donner sa dimension.

$$\text{Ker}(f) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, f(x, y, z, t) = 0\}$$

$$f(x, y, z, t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+t=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=-y=-t \\ z=-2x-y=2y-y=y \end{cases}$$

$$\text{Ker}(f) = \text{Vect}((1, -1, -1, -1))$$

$\text{Ker}(f)$ a donc une dimension égale à 1

3. En déduire $\text{Im}(f)$.

On sait que

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{R}^4)$$

$$\dim(\text{Im}(f)) = 4 - 1 = 3 = \dim(\mathbb{R}^3) \text{ donc } \text{Im}(f) = \mathbb{R}^3$$