

Logique

(une semaine)

(du lundi 23 octobre 2017 au vendredi 27 octobre 2017)

Exercice 1

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Traduire en termes de quantificateurs les assertions suivantes :

1. f est bornée.
2. f ne s'annule jamais.
3. f est périodique.
4. f est croissante.
5. f n'est pas la fonction nulle.

Exercice 2

1. Écrire la négation des assertions suivantes :

- a. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad [a < b \implies (\exists x \in \mathbb{Q} \quad a < x < b)]$.
- b. $\exists \ell \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies |u_n - \ell| < \varepsilon)$.
- c. $\forall (x, y, a) \in \mathbb{R}^3 \quad [(x < a \text{ et } y < a) \implies \exists z \in \mathbb{R} \quad (z < a \text{ et } x \neq z \text{ et } y \neq z)]$.

2. Écrire la négation des phrases suivantes, sachant que le terme « certains » signifie ici « au moins un ».

- a. « Si l'hiver n'est pas trop rude, je ferai des économies d'énergie ».
- b. « Théo se joint à nous si et seulement si je sors de chez moi ».
- c. « Certains étudiants s'endorment en cours de maths ! »
- d. « Certains étudiants n'auront pas la moyenne au contrôle de maths ».
- e. « Aucune piste criminelle n'est écartée ».
- f. « Tous les étudiants de province devront suivre le cycle ingénieur à Paris Sud ».

Exercice 3

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$1^3 + 3^3 + \dots + (2n-1)^3 = 2n^4 - n^2$$

2. Montrer que pour tout $n \geq 4$,

$$n! > 2^n$$

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^n k.k! = (n+1)! - 1$$

Exercice 4

Préciser (via un graphe dans les cas favorables et via un contre-exemple dans les cas défavorables)

si l'application $f : \begin{cases} E & \longrightarrow F \\ x & \longmapsto x^2 \end{cases}$ est injective et/ou surjective dans les cas suivants :

1. $E = F = \mathbb{N}$.
2. $E = \mathbb{Z}$ et $F = \mathbb{N}$.
3. $E = \mathbb{R}$ et $F = \mathbb{R}_+$.
4. $E = F = \mathbb{R}_+$.

Exercice 5

Soient E, F, G trois ensembles, $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$.

1. On suppose que f et g sont injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.
2. On suppose que f et g sont surjectives. Montrer que $g \circ f$ est surjective.
3. Montrer que $g \circ f$ injective $\implies f$ injective.
4. Montrer que $g \circ f$ surjective $\implies g$ surjective.