NOM : David PRENOM : Clément GROUPE : B2

Partiel n°1 de Physique

Les calculatrices et les documents ne sont pas autorisés
Réponses exclusivement sur le sujet

Exercice 1 *Mouvement en cycloïde* (Sur 7 points)
Partie A

06,5 / 20

On se place dans le repère cartésien (Oxyz). On s'intéresse à une roue de rayon R et de centre C qui roule sans glisser dans le plan (x0y) : on admet que l'abscisse du centre de la roue est liée à l'angle θ dont a tourné la roue.
On exprime les coordonnées du vecteur position par :

$$\begin{cases} x(t) = A(\omega.t - \sin(\omega.t)) \\ y(t) = A(1-\cos(\omega.t)) \end{cases} \quad (\theta = \omega t) \text{ ; Où } A \text{ et } \omega \text{ sont des constantes positives.}$$

1- Déterminer les composantes cartésiennes des vecteurs vitesse et accélération.

$\vec{OM} = A(\omega t - \sin(\omega t)) + A(1-\cos(\omega t))$
$= A(\omega t - \sin(\omega t) + 1 - \cos(\omega t))$
$\vec{V} = \dot{\vec{OM}} = \begin{cases} A(\omega - \omega\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\omega) \\ A\omega(1-\cos(\omega t) + \sin(\omega t)) \end{cases}$
$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = A\omega(\omega\sin(\omega t) + \omega\cos(\omega t))$
$= A\omega^2(\sin(\omega t) + \cos(\omega t))$

$\vec{V} \begin{pmatrix} V_x = \dot{x} = ? \\ V_y = \dot{y} = ? \end{pmatrix}$

2- En déduire la norme de chacun de ces vecteurs. On donne : $1-\cos(\alpha) = 2.\sin^2(\alpha/2)$.

$V = \sqrt{(A\omega(1-\cos(\omega t) + \sin(\omega t))^2}$ 95

$V = A\omega(2.\sin^2(\omega t/2) + \sin(\omega t))$

$a = A\omega^2(\sin(\omega t) + \cos(\omega t))$

3-Tracer la cycloïde ($y = f(x)$), sur un intervalle de temps de 2 périodes (2 T). Sachant que ω est relié à la période T par $\boldsymbol{\omega = 2\pi/T}$

(On prend les valeurs : $t = 0$; $t = T/4$; $t = T/2$; $t = 3T/4$; $t = T$).

Partie B

On considère le mouvement d'une spirale d'équations horaires :

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 e^{\omega . t} \\ \theta(t) = \omega . t \end{cases}$$; Où ρ_0 et ω sont des constantes positives.

1- Exprimer le vecteur vitesse de ce mouvement en coordonnées polaires. On rappelle que :

$$\vec{V} = \dot{\rho}\vec{u}_\rho + \rho\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

$V = \dot{\rho}\vec{u_\rho} + \rho\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$V = (\dot{\rho_0} e^{\omega t} + \rho_0 \dot{e^{\omega t}})\vec{u_\rho} + \rho_0 e^{\omega t}(\dot{\omega . t})\vec{u_\theta}$ $\quad \rho_0 = cst$ donc $\dot{\rho_0} = 0$

$= \omega \rho_0 e^{\omega t}\vec{u_\rho} + \omega\rho_0 e^{\omega t}\vec{u_\theta}$

1

2- Calculer la norme du vecteur vitesse.

$V = \sqrt{(\rho_0 \omega e^{\omega t})^2 + (\rho_0 \omega e^{\omega t})^2}$

$V = \sqrt{(\rho_0 \omega e^{\omega t})^2 \times 2} = \rho_0 \omega e^{\omega t} \sqrt{2}$

01

3-a) Sachant qu'en base de Frenet : $\vec{V} = V \vec{u}_T = R(t)\dot{\theta}\vec{u}_T$, exprimer le rayon $R(t)$ de cette trajectoire.

$\rho_0 \omega e^{\omega t} \sqrt{2}\, \vec{u}_T = R(t)\dot{\theta}\, \vec{u}_T$

$R(t) = \dfrac{\rho_0 \omega e^{\omega t} \sqrt{2}}{\omega} = \rho_0 e^{\omega t} \sqrt{2}$

01

b) En déduire les composantes du vecteur accélération $\vec{a}(a_T, a_N)$ dans la base de Frenet $(\vec{u}_T, \vec{u}_N)$.

$\vec{V} = R(t)\dot{\theta}\, \vec{u}_T$

$\vec{a} = \dot{\vec{V}} = \dot{R}(t)\dot{\theta}\, \vec{u}_T - R(t)(\dot{\theta})^2\, \vec{u}_\rho$

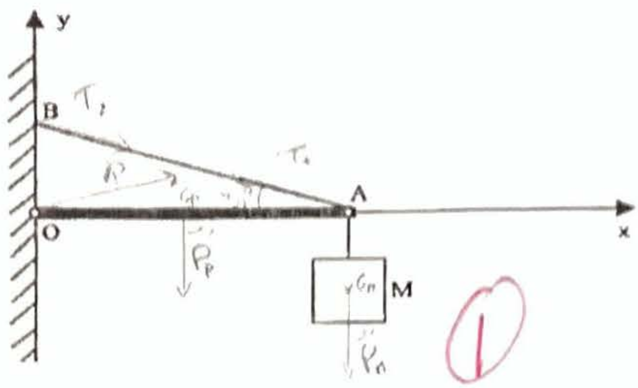
$= \rho_0 \omega e^{\omega t} \sqrt{2} \times \omega\, \vec{u}_T - \rho_0 e^{\omega t} \sqrt{2} \times \omega^2\, \vec{u}_\rho$

$= \rho_0 \omega^2 e^{\omega t} \sqrt{2}\, \vec{u}_T - \rho_0 \omega^2 e^{\omega t} \sqrt{2}\, \vec{u}_\rho$

1

Exercice 2 Système en équilibre (6 points)

Une poutre horizontale OA homogène de longueur L et de masse m = 40 kg est fixée à un mur par son extrémité O. Un câble AB de masse négligeable et inextensible relie le mur et l'extrémité A de la poutre. Une masse M = 150 kg est suspendue au point A. On donne : BAO = 30° et g = 10m.s^{-2}.



1

1- Faire le bilan des forces extérieurs appliquées sur la poutre. Représenter ces forces.

La masse M applique une force $\vec{P_M}$ en G_M
La poutre a un poid donc une force $\vec{P_P}$ en G_P
Le cable est tendu donc on retrouve deux tension $\vec{T_1}$ et $\vec{T_2}$ appliquées respectivement aux points A et B. Le mur exerce une reaction sur la poutre : $\vec{R}$

2- a) Ecrire la condition d'équilibre de rotation par rapport au point O, en déduire la norme de la tension du câble.

$P_M = M \times g = 150 \times 10 = 1500\,N$

$P_P = m \times g = 40 \times 10 = 400\,N$

$\sum M_{F_{ext}/O} = 0$

$M_{P_P/O} + M_{P_M/O} + M_{R/O} + M_{T_1/O} = 0$

$\frac{1}{2} L \times P_P + L \times P_M + 0 + L \times \cancel{\cos(30°)} \sin(30°) \times T_1 = 0$

$L\left(\frac{1}{2} P_P + P_M\right) = L \times \cos(30°) T_1$

$T_1 = \frac{\frac{1}{2} P_P + P_M}{\cos(30°)} = \frac{\frac{1500}{2} + 400}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1150 \times 2}{\sqrt{3}} = \cancel{\frac{2300\sqrt{3}}{3}\,N}$

b) Utiliser la condition d'équilibre de translation pour calculer les composantes (R_x, R_y) de $\vec{R}_{mur}$.

Sur $O\vec{x}$

$R_x - T_{1x} = 0$

$R_x = T_{1x}$

$R_x = T_1 \times \cancel{\sin(30°)}\ \cos(30°)$

$= \frac{2300\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{2} = \cancel{\frac{1150\sqrt{3}}{3}\,N}$

$= \cancel{\frac{1150}{\sqrt{3}}}\,N$

Sur $O\vec{y}$

$R_y + T_{1y} - P_P - P_M = 0$

$R_y = P_P + P_M - T_{1y}$

$= 1500 + 400 - \frac{2300}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \cancel{1900 - 1150}$

$= \cancel{750}\,N$

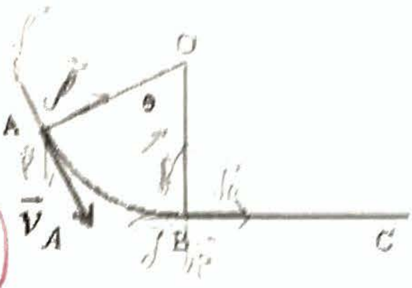
c) Calculer la norme de la réaction $\vec{R}_{mur}$.

$R_{mur} = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{\left(\frac{11{,}[illegible]}{\sqrt{3}}\right)^2 + 1{,}5[illegible]^2} = \cancel{\sqrt{(11{,}5)^2}} + 11{,}[illegible]^2$

NR

Exercice 3 (7 points)

Un solide ponctuel de masse m se déplace sur la piste schématisée ci-dessous. La portion AB est un arc de cercle de rayon R, d'angle θ, de centre O ; la portion BC est un segment horizontal. On lance le solide du point A avec une vitesse V_A tangente au cercle.



1

1-a) Faire le bilan des forces extérieures exercées sur le solide entre A et B, sachant que les frottements sur la partie AB sont assimilables à une force constante f. Représenter ces forces.

le poid $\vec{P}$ du solide est toujours le même et toujours perpendiculaire à l'horizontale, vers le bas,
les la réaction ~~est~~ constante et perpendiculaire a la piste, vers le haut
les vitesses V_A et V_B sont tangentes à la piste, les frottements sont opposé a la vitesse

b) Utiliser le théorème d'énergie cinétique entre A et B pour exprimer la force de frottement f, en fonction de R, g, V_A, V_B, m et θ. Faire le calcul avec : m = 0,1kg, g = $10ms^{-2}$, R = 1,5m, $V_A = 2ms^{-1}$, $V_B = 3ms^{-1}$; θ = 60° ≈ 1 rad.

$E_{cA} + E_{mA} - E_{cB} - E_{mB} = ma$? mélange de la 2^{e} loi de Newton avec th d'Ec !

$\frac{1}{2} m V_A^2 + mgz_A - \frac{1}{2} m V_B^2 - mgz_B = ma$

$\frac{1}{2}(V_A^2 - V_B^2) + gz_A - gz_B = a$?

$\frac{1}{2}(2^2 - 3^2) + 10 \times \sin(60) \times 1{,}5 = a$?

$-\frac{5}{2} + 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = a$

$a = \frac{10}{2}\sqrt{3} = \cancel{5\sqrt{3}\, m.s^{-2}}$

2- a) Les frottements sur le trajet BC sont assimilables à une force f = 0,1 N. Calculer la vitesse au point C, sachant que BC = 2m.

b) Calculer la norme de la réaction totale $\vec{R}$ qui s'exerce sur le solide pendant le trajet BC.