

Contrôle 1

02,5/20
Inacceptable...

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Nom [] Prénom [] Classe : 2

Entourer votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Ghanem / M. Goron / Mme Trémoulet

Consignes :

- vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
- aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.
- aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
- toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/20.

Exercice 1 (2 points)

Soient f et g les fonctions définies par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln(\ln(\ln(x)))} \\ g(x) = \sqrt{\sin^{2016}(x) + 2^x} \end{cases}$$

Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ (sans se préoccuper du domaine de définition).

N.B. : n'essayez pas de simplifier les résultats.

Exercice 2 (4 points)

Soient $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 - 2i$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a}{4} + i\frac{b}{4}$.

2. Écrire sous forme exponentielle z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.

$$|z_1| = 2\sqrt{2} \quad \text{Arg}(\theta_1) = -\pi/6 \Rightarrow z_1 = 2\sqrt{2} e^{-i\pi/6}$$

$$|z_2| = 2\sqrt{2} \quad \text{Arg}(\theta_2) = -\pi/4 \Rightarrow z_2 = 2\sqrt{2} e^{-i\pi/4}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\sqrt{2} e^{-i\pi/6}}{2\sqrt{2} e^{-i\pi/4}} = \frac{e^{-i\pi/6}}{e^{-i\pi/4}} = e^{-i\pi/6 + i\pi/4} = e^{i\pi/12}$$

2

3. En déduire $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

$$\sin \pi/12 = \frac{1}{4}$$

$$\cos \pi/12 = \frac{3}{4}$$

Exercice 3 (6 points)

1. Via une intégration par parties, déterminer $I = \int_1^e \ln(x) dx$.

2. En déduire via également une intégration par parties, $J = \int_1^e \ln^2(x) dx$.

3. Via le changement de variable $t = \sqrt{1-x}$, déterminer $K = \int_0^1 x\sqrt{1-x} dx$.

4. Via le changement de variable $t = e^{-x}$, déterminer $L = \int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1}$.

Exercice 4 (3 points)

Soit l'équation (E) suivante : $z^2 - (4 + 3i)z + 1 + 5i = 0$.

1. Montrer que $\Delta = 3 + 4i$.

$$\begin{aligned} a &= 1 & b^2 &= 16 + 44i - 9 = 7 + 44i \\ b &= (4 + 3i) & 4ac &= 4 + 20i \\ c &= 1 + 5i & \Delta &= b^2 - 4ac = 7 + 44i - 4 - 20i \\ & & &= 3 + 24i \end{aligned}$$

0,8

2. Déterminer une racine carrée de Δ .

3. En déduire les solutions dans \mathbb{C} de l'équation (E).

Exercice 5 (4 points)

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x) + e^{2x}$.

$$-x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) +$$

2. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\frac{\cos(2x)}{1-x}$.

3. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Exercice 6 (2 points)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $g(a) = f(b)$ et $g(b) = f(a)$.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = f(c)$.