10h41

95

Contrôle 1

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : DAVID **Prénom :** Clément **Classe :** B2

Entourer votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Ghanem / M. Goron / Mme Trémoulet

Consignes :

- vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
- ***aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.***
- aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
- toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/ 20.

Exercice 1 (2 points)

Soient f et g les fonctions définies par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\ln\Big(\ln\big(\ln(x)\big)\Big)} \\ g(x) = \sqrt{\sin^{2016}(x) + 2^x} \end{cases}$

Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$ (sans se préoccuper du domaine de définition).

N.B. : n'essayez pas de simplifier les résultats.

$f'(x) = -\dfrac{1}{\frac{1}{\ln(\ln(x))}} \times -\dfrac{1}{\frac{1}{\ln(x)}} \times -\dfrac{1}{\frac{1}{x}} = \ln(\ln(x)) \times \ln(x) \times x$

X

$g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\sin^{2016}(x) + 2^x}} \times \left(2016 \sin^{2015}(x) \cos^{2015}(x) + \ln 2\, e^{x\ln 2}\right)$

Non

$\cos^{2015}$ pas $\cos x$

Exercice 2 (4 points)

Soient $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 - 2i$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a}{4} + i\dfrac{b}{4}$.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2 - 2i} = \dfrac{(2+2i)(\sqrt{6} - i\sqrt{2})}{4+4} = \dfrac{2\sqrt{6} - 2i\sqrt{2} + 2i\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{8} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + i\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

d'où $a = \sqrt{6} + \sqrt{2}$
et $b = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

1

2. Écrire sous forme exponentielle z_1, z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.

$|z_1| = \sqrt{\sqrt{6}^2 + \sqrt{2}^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$|z_2| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$z_1 \begin{cases} \cos\theta_1 = \frac{a_1}{|z_1|} = \frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta_1 = \frac{b_1}{|z_1|} = \frac{-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 = -\frac{\pi}{6}$ d'où $z_1 = 2\sqrt{2}e^{-i\pi/6}$

$z_2 \begin{cases} \cos\theta_2 = \frac{a_2}{|z_2|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta_2 = \frac{b_2}{|z_2|} = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = -\frac{\pi}{4}$ d'où $z_2 = 2\sqrt{2}e^{i\pi/4}$

2

$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = 1$ $\quad \theta_3 = \theta_1 - \theta_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = -\frac{2\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12} \Rightarrow \frac{z_1}{z_2} = e^{i\pi/12}$

3. En déduire $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{a}{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ 0,1

$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{b}{\left|\frac{z_1}{z_2}\right|} = \sqrt{6} - \sqrt{2}$

Exercice 3 (6 points)

1. Via une intégration par parties, déterminer $I = \int_1^e \ln(x)\,dx$.

$I = \int_1^e \ln(x)\,dx$

on pose : $u = \ln x$ $\quad v' = 1$
$u' = -\frac{1}{x}$ $\quad v = x$

Non

$I = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e \cancel{1}\,dx$

$= e^{\ln e} - \ln 1 + 1 = e - \ln 1 + 1$

2. En déduire via également une intégration par parties, $J = \int_1^e \ln^2(x)\,\mathrm{d}x$.

On pose $u = \ln(x)$ $v' = \ln x$

$u' = -\frac{1}{x}$ $v = \int_1^e \ln(x)\,dx = I$

$J = \left[\ln x \times \cancel{I}\right]_1^e - \cancel{\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx}$ Non

on pose $u = \ln x$ $v' = -\frac{1}{x}$

$u' = -\frac{1}{x}$ $v = \ln x$

$J = \left[\ln x \times I\right]_1^e - \left[\ln^2(x)\right] + \int_1^e -\frac{1}{x^2} = \ln e \times (e\ln e - \ln 1 + 1) - \ln 1(\ln 1 - \ln 1 + 1) + \left[\frac{1}{x}\right]_1^e$

$= \cancel{e - \ln 1 + \frac{1}{e} - 1}$ Non

3. Via le changement de variable $t = \sqrt{1-x}$, déterminer $K = \int_0^1 x\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x$.

$t = \sqrt{1-x} \iff x = 1 - t^2$

$\frac{dt}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} \iff dx = -2\sqrt{1-x}\,dt$

$= -2t\,dt$ ✓

1,5

$K = \int_{\sqrt{1-0}}^{\sqrt{1-1}} (1-t^2) \times t \times -2t\,dt = -\int_0^1 (1-t^2) \times -2t^2\,dt = \int_0^1 2t^2 - t^4\,dt$ ✓

$K = \left[\frac{2}{3}t^3 - \frac{t^5}{5}\right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \cancel{\frac{7}{15}}$ $\frac{4}{15}$

4. Via le changement de variable $t = e^{-x}$, déterminer $L = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x + 1}$.

$t = e^{-x} \iff x = -\ln t$ ✓

$\frac{dt}{dx} = -e^{-x} \iff dx = \frac{dt}{-e^{-x}} = \frac{dt}{-t}$ ✓

1

$L = \int_{e^0}^{e^{-1}} \frac{dt}{-t} \times \frac{1}{e^{-\ln(t)} + 1} = \int_{e^0}^{e^{-1}} \frac{dt}{-t\left(\frac{1}{t} + 1\right)} = +\int_{e^{-1}}^{e^0} \frac{-dt}{1+t} = \int_{e^{-1}}^{1} \frac{-1}{t+1}\,dt$

$L = \left[+\ln(1+t)\right]_{e^{-1}}^{e^0} = \ln(1+e^{-1}) + \ln 2$

Exercice 4 (3 points)

Soit l'équation (E) suivante : $z^2 - (4+3i)z + 1 + 5i = 0$.

1. Montrer que $\Delta = 3 + 4i$.

$\Delta = (4+3i)^2 - 4\times(1+5i) = 4^2 + 2\times4\times3i + (3i)^2 - 4 - 20i$

$= 16 + 24i - 9 - 4 - 20i$

$= 3 + 4i$

0|1

2. Déterminer une racine carrée de Δ.

On cherche $\delta = a + ib$ tel que $\delta^2 = \Delta = 3 + 4i$

On a : $\begin{cases} a^2 - b^2 = 3 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \\ 2ab = 4 \end{cases}$

$* \ a^2 - b^2 + a^2 + b^2 = 3 + 5$

$2a^2 = 8$

$a = 2$

$* \ 2 \times 2 \times b = 4$

$b = 1$

1|1

$\delta = 2 + i$ est une racine carrée de Δ.

3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation (E).

$$x_1 = \frac{4+3i-\delta}{2} = \frac{4+3i-(2+i)}{2} = \frac{2+2i}{2} = 1+i$$

$$x_2 = \frac{4+3i+\delta}{2} = \frac{4+3i+2+i}{2} = \frac{6+4i}{2} = 3+2i$$

1

Exercice 5 (4 points)

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x) + e^{2x}$.

$$\ln(1-x) = \ln(-1+x) = -\left(x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) = -x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\ln(1-x) + e^{2x} = 1 + x + \cancel{\frac{5x^2}{2}} + o(x^2)$$

2. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\dfrac{\cos(2x)}{1-x}$.

3. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.

Exercice 6 (2 points)

Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ telles que $g(a) = f(b)$ et $g(b) = f(a)$.

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $g(c) = f(c)$.

On pose $h(x) = g(x) - f(x)$ pour $x \in [a, b]$ $h(a) = g(a) - f(a) = g(a) - g(b)$
$h(b) = gb - fa = g(b) - g(a)$

aucune allusion à la continuité de h !!!

(1) supposons $g(a) > g(b)$ donc a $h(a) > 0$ et $h(b) < 0$

D'après le Théorème des valeurs intermediaires, $\exists c \in [a, b]$ tel que $h(c) = 0$
et donc que $g(c) - f(c) = 0 \Rightarrow g(c) = f(c)$

(2) Supposons maintenant $ga \leq gb$ donc $h(a) \leq 0$ et $hb \geq 0$

D'après le théorème des valeurs intermediaires, $\exists c \in [a, b]$ telque $h(c) = 0$
et donc que $g(c) - f(c) = 0 \Rightarrow g(c) = f(c)$