Corrigé du partiel 1

Exercice 1 (2 points)

1. « il existe un entier pair dont la racine carrée n'est pas un entier pair ».
2. « il existe un triangle dont la somme des angles ne vaut pas 180° en géométrie euclidienne ».
3. « Tous les étudiants auront vécu l'expérience internationale dès le S4 ».
4. « Aucun étudiant n'aura vécu l'expérience internationale dès le S4 ».

Exercice 2 (2 points)

Pour $n = 4$ la propriété est vérifiée puisque $4! = 24 > 16$.

Supposons la propriété vérifiée pour un certain entier $n \geqslant 4$ et montrons-la au rang $n+1$.

Via cette hypothèse de récurrence et vu que $n \geqslant 4 > 1$, on a immédiatement $(n+1)! = n!(n+1) \geqslant 2^n(n+1) > 2^n \cdot 2$ c'est-à-dire $(n+1)! > 2^{n+1}$.

Donc si la propriété est vérifiée au rang n, elle est vérifiée au rang $n+1$.

Ainsi, pour tout $n \geqslant 4$, $n! > 2^n$.

Exercice 3 (2 points)

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$.
2. $\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
4. $\exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant f(a)$.

Exercice 4 (2 points)

1. Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $(f \circ g)(x) = (f \circ g)(y)$.

   Alors $f(g(x)) = f(g(y))$. Or f est injective donc $g(x) = g(y)$ et via l'injectivité de g, on a finalement $x = y$.

   Ainsi $f \circ g$ est injective.

2. Soit $y \in E$. Comme f est surjective, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$ et via la surjectivité de g, il existe $z \in E$ tel que $x = g(z)$.

   Finalement $y = f(g(z))$ donc $f \circ g$ est surjective.

3. Supposons $g \circ f$ injective et montrons que f est injective.

   Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $f(x) = f(y)$. Alors $g(f(x)) = g(f(y))$ donc via l'injectivité de $g \circ f$, $x = y$.

   Ainsi f est injective.

4. Supposons $g \circ f$ surjective et montrons que g est surjective.

   Soit $y \in E$. Via la surjectivité de $g \circ f$, il existe $x \in E$ tel que $y = g(f(x))$.

   Comme $f(x) \in E$, g est surjective.

Exercice 5 (3 points)

1. Notons $(*)$ l'équation $732x + 124y = 4$. Commençons par déterminer $732 \wedge 124$.

a	b	quotients	restes
732	124	5	112
124	112	1	12
112	12	9	4
12	4	3	0

Donc $732 \wedge 124 = 4$.

Déterminons une solution particulière de $732x + 124y = 4$ en remontant l'algorithme d'Euclide.

$4 = 112 - 9 \times 12 = 112 - 9 \times (124 - 112) = 10 \times 112 - 9 \times 124 = 10 \times (732 - 5 \times 124) - 9 \times 124 = 732 \times 10 - 124 \times 59.$

Ainsi $(10, -59)$ est donc une solution particulière de l'équation $(*)$.

2. Soit à présent (x, y) solution de l'équation $(*)$. On a donc les deux équations suivantes :

$$\begin{cases} 732x + 124y = 4 \\ 732 \times 10 - 124 \times 59 = 4 \end{cases}$$

En soustrayant ces deux équations on a $732(10 - x) = 124(59 + y)$ soit en divisant par le pgcd de 732 et 124 égal à 4, on a

$$183(10 - x) = 31(59 + y) \qquad (**)$$

Ainsi $183 \mid 31(59 + y)$ et $183 \wedge 31 = 1$ donc, via le théorème de Gauss, $183 \mid 59 + y$ d'où il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $59 + y = 183k$ soit encore $y = 183k - 59$.

En reportant y dans l'équation $(**)$ on a $183(10 - x) = 31 \times 183k$ soit encore $x = 10 - 31k$.

Réciproquement, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $(10 - 31k, 183k - 59)$ est solution de $(*)$.

Finalement l'ensemble des solutions de l'équation $732x + 124y = 4$ est $S = \{(10 - 31k, 183k - 59); k \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 6 (3 points)

Supposons que $(a + b)$ et ab sont premiers entre eux.

Alors, via le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $(a + b)u + abv = 1$.

Ainsi $au + b(u + av) = 1$. Ainsi, via à nouveau le théorème de Bézout, a et b sont premiers entre eux.

Réciproquement, supposons que a et b sont premiers entre eux.

Via le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que : $au + bv = 1$.

Donc $(au + bv)^2 = 1$ donc $a^2u^2 + b^2v^2 + 2abuv = 1$ soit $(a + b)(au^2 + bv^2) - ab(u^2 + v^2) + 2abuv = 1$ soit encore

$$(a + b)(au^2 + bv^2) + ab(2uv - u^2 - v^2) = 1$$

Via à nouveau le théorème de Bézout $(au^2 + bv^2$ et $2uv - u^2 - v^2$ étant deux entiers$)$, on en conclut que $a + b$ et ab sont premiers entre eux.

Exercice 7 (2 points)

$12 \equiv 2[5]$ donc $12^{1527} \equiv 2^{1527}[5]$

Or $2 \equiv 2[5]$, $2^2 \equiv 4[5]$, $2^3 \equiv 3[5]$ et $2^4 \equiv 1[5]$

En effectuant la division euclidienne de 1527 par 4, on a $1527 = 381 \times 4 + 3$

donc $2^{1527} = 2^{381 \times 4 + 3} = \left(2^4\right)^{381} \times 2^3 \equiv 1 \times 2^3[5]$ donc $2^{1527} \equiv 3[5]$.

Ainsi le reste de la division euclidienne de 12^{1527} par 5 est 3.

Exercice 8 (2 points)

$P(1) = 0$.

$P'(X) = 4X^3 - 6X^2 + 2$ donc $P'(1) = 0$.

$P''(X) = 12X^2 - 12X$ donc $P''(1) = 0$.

$P'''(X) = 24X - 12$ donc $P'''(1) \neq 0$.

Ainsi, 1 est une racine d'ordre 3 de P.

Exercice 9 (3 points)

1. Notons $P(X) = (X+1)^{2n} - 1$.

   On a $X^2 + 2X = X(X+2)$. Or $P(0) = 0$ et $P(-2) = (-1)^{2n} - 1 = 0$ donc $X^2 + 2X$ divise $(X+1)^{2n} - 1$.

2. Notons $Q(X) = (X+1)^n - nX - 1$. On a $Q(0) = 0$.

   De plus $Q'(X) = n(X+1)^{n-1} - n$. Donc $Q'(0) = n - n = 0$.

   D'où X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$.

3. Notons $R(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$. On a $R(1) = n - (n+1) + 1 = 0$.

   De plus $R'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n-1}$. Donc $R'(1) = n(n+1) - n(n+1) = 0$.

   Donc $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.