101

Contrôle 1

Inacceptable.

Durée : trois heures

Documents et calculatrices non autorisés

Nom

Prénom



Classe: 4

Entourer votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa / M. Ghanem / M. Goron Mme Trémoulet

Consignes:

- vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
- aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.
- aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
- toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note $00/\sqrt{20}$.

Exercice 1 (2 points)

Soient f et g les fonctions définies par $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln\left(\ln\left(\ln(x)\right)\right)} \\ g(x) = \sqrt{\sin^{2016}(x) + 2^x} \end{cases}$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln(\ln(\ln(x)))} \\ g(x) = \sqrt{\sin^{2016}(x) + 2^{2}} \end{cases}$$

Calculer f'(x) et g'(x) (sans se préoccuper du domaine de définition).

N.B.: n'essayez pas de simplifier les résultats.

Exercice 2 (4 points)

Soient $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 - 2i$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a}{4} + i\frac{b}{4}$.

2. Écrire sous forme exponentielle z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.

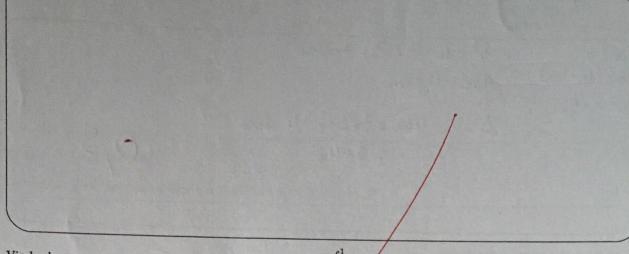
$$\begin{aligned} & |z_1| = L\sqrt{L} \quad \text{Avg}(\theta_1) = -T/6 \quad \Longrightarrow \quad z_1 = L\sqrt{L} e^{-iT/6} \\ & |z_2| = L\sqrt{L} \quad \text{Avg}(\theta_2) = -T/4 \quad \Longrightarrow \quad z_2 = L\sqrt{L} e^{-iT/4} \\ & \frac{z_1}{z_2} \frac{U Z e^{-iT/6}}{U Z e^{-iT/4}} = e^{-iT/6} + iT/4 = e^{-iT/4} \\ & \frac{z_2}{z_2} \frac{U Z e^{-iT/4}}{U Z e^{-iT/4}} = e^{-iT/4} \end{aligned}$$

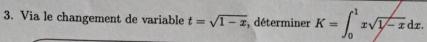
3. En déduire $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

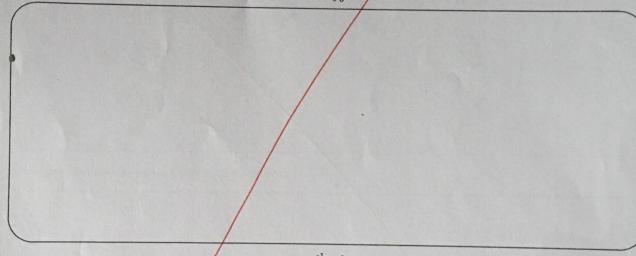
Exercice 3 (6 points)

1. Via une intégration par parties, déterminer $I = \int_1^e \ln(x) dx$.

2. En déduire via également une intégration par parties, $J=\int_1^\epsilon \ln^2(x)\,\mathrm{d}x.$







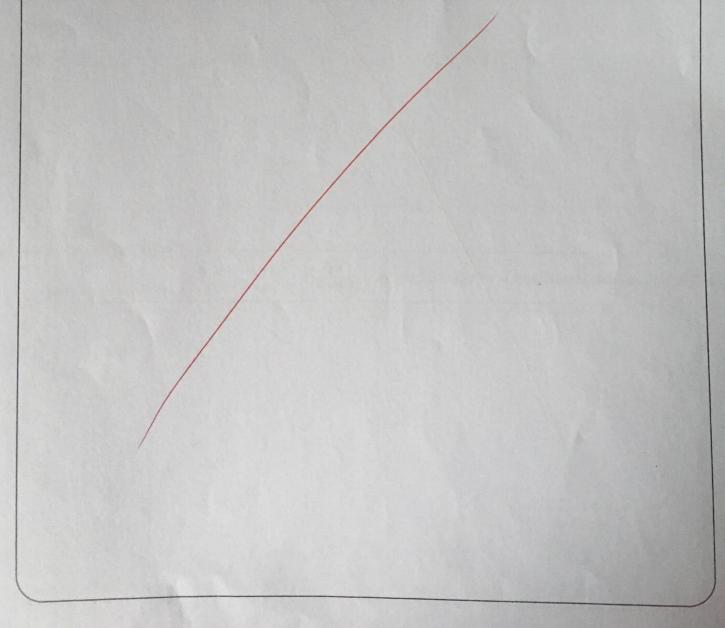
4. Via le changement de variable $t=e^{-x}$, déterminer $L=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$.

Exercice 4 (3 points)

Soit l'équation (E) suivante : $z^2 - (4+3i)z + 1 + 5i = 0$.

1. Montrer que $\Delta = 3 + 4i$.

2. Déterminer une racine carrée de $\Delta.$



3. En déduire les solutions dans $\mathbb C$ de l'équation (E).

Exercice 5 (4 points)

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x) + e^{2x}$.

2. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\frac{\cos(2x)}{1-x}$.

3. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$

Exercice 6 (2 points)

Soient f et g deux fonctions continues sur [a,b] telles que g(a)=f(b) et g(b)=f(a). Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que g(c)=f(c).