Partiel 1

13,5/20

Durée : trois heures
Documents et calculatrices non autorisés

Nom : DAVID **Prénom :** Clement **Classe :** B2

Entourer votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadan / M. Ghanem / M. Goron / Mme Trémoulet

Consignes :

– *aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.*

– aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.

Exercice 1 (2 points)

Écrire la négation des phrases suivantes :

1. « La racine carrée d'un entier pair est paire ».

La racine carrée d'un entier pair n'est pas paire ✗

2. « Dans n'importe quel triangle du plan, la somme des angles vaut 180° en géométrie euclidienne ».

Dans certains triangles du plan, la somme des angles ne vaut pas 180° en géométrie euclidienne ✓

3. « Certains étudiants n'auront pas vécu l'expérience internationale dès le S4 ».

Tous les étudiants auront vécu l'expérience internationale dès le S4 ✓

4. « Certains étudiants auront vécu l'expérience internationale dès le S4 ».

Aucun étudiant n'aura vécu l'expérience internationale dès le S4 ✓ 1,5

Exercice 2 (2 points)

Montrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 4$, $n! > 2^n$.

Init P_4 : $4! = 1\times2\times3\times4 = 24$ et $24 > 16$ ✓

$2^4 = 16$

Hérédité : On suppose la propriété vraie au rang n, montrons que la propriété est vraie au rang $n+1$.

$n! > 2^n$ ✓

$n! \times (n+1) > 2^n \times (n+1)$

$n+1! > 2^n \times (n+1)$ de plus, $n \geqslant 4$ donc $n+1 \geqslant 5$

[suite du cadre page suivante]

$2^{n+1} = 2^n \times 2$ ~~et~~ $n+1 > 2$
donc $n+1! > 2^n \times (n+1) > 2^{n+1}$
Conclusion
$n! > 2^n$ quelque soit $n \geq 4$ car
la proposition est vraie au rang 4 et ~~est~~ au rang $n+1$ la propriété est héréditaire

Exercice 3 (2 points)

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Écrire en langage mathématique (avec les quantificateurs) les phrases suivantes :

1. « la fonction f s'annule au moins une fois ».

$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

2. « f n'est pas la fonction nulle ».

$\exists x \in \mathbb{R},\ f(x) \neq 0$

3. « f est la fonction nulle ».

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$

4. « f présente un minimum sur $\mathbb{R}$ ».

$\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R},\ f(y) > x$

Exercice 4 (2 points)

Soient E un ensemble, $f : E \longrightarrow E$ et $g : E \longrightarrow E$.

1. On suppose que f et g sont injectives. Montrer que $f \circ g$ est injective.

2. On suppose que f et g sont surjectives. Montrer que $f \circ g$ est surjective.

3. Montrer que $g \circ f$ injective $\Longrightarrow f$ injective.

4. Montrer que $g \circ f$ surjective $\Longrightarrow g$ surjective.

Exercice 5 (3 points)

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation $732x + 124y = 4$.

$732x + 124y = 4$
$183x + 31y = 1$

D'après l'algorithme d'Euclide :

$183 = 31 \times 5 + 28$
$31 = 28 \times 1 + 3$
$28 = 3 \times 9 + 1$

On pose $183 = a$ et $31 = b$

$28 = a - b \times 5$
$3 = b - 28 \times 1 = b - a + b \times 5 = b \times 6 - a$
$1 = 28 - 3 \times 9 = a - b \times 5 - (b \times 6 - a)9$
$= a - b \times 5 - b \times 54 + a \times 9$
$= a \times 10 - b \times 59$

Une solution particulière de $732x + 124y = 4$ est le couple $(10, -59)$

[suite du cadre page suivante]

2. En utilisant obligatoirement le théorème de Gauss, déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $732x + 124y = 4$.

[suite du cadre page suivante]

Exercice 6 (3 points)

Soit $(a,b) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que : $(a+b)$ et ab premiers entre eux $\iff$ a et b premiers entre eux.

① $(a+b) \wedge ab = 1 \Rightarrow \exists (u,v) \in \mathbb{Z}, (a+b)u + abv = 1$

$au + bu + abv = 1$

$a(u+bv) + bu = 1$ et $u + bv \in \mathbb{Z}$

$av' + bu = 1$ donc $a \wedge b = 1$

1/1

② $a \wedge b = 1$

$\exists k \in \mathbb{N}, a = k \times 1$, $a + b = (k + k') \times 1$, $a + b = K \times 1$

$\exists k' \in \mathbb{N}, b = k' \times 1$, $a \times b = kk' \times 1$, $a \times b = K' \times 1$

donc $a + b \wedge a \times b = 1$

[suite du cadre page suivante]

Exercice 7 (2 points)

Quel est le reste de la division euclidienne de 12^{1527} par 5 ?

$12 \equiv 2 [5]$

$1527 \equiv 2 [5]$

$12^n \equiv 2^n [5]$

$12^{1527} \equiv 2^{1527} [5]$

$12^{1527} \equiv 2^2 [5]$

$12^{1527} \equiv \cancel{4} [5]$ le reste de la division euclidienne de 12^{1527} par 5 est 4

$\equiv 3$

Exercice 8 (2 points)

Déterminer l'ordre de multiplicité de la racine 1 du polynôme $P(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1$.

$P(1) = 1^4 - 2 \times 1^3 + 2 \times 1 - 1 = 0$

$P'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2$

$P'(1) = 4 - 6 + 2 = 0$

$P''(x) = 12x^2 - 12x$

$P''(1) = 12 - 12 = 0$

$P'''(x) = 24x - 12$

$P'''(1) = 12 \neq 0$

1 est une racine d'ordre 3 du polynome $x^4 - 2x^3 + 2x - 1$

2

[E]xercice 9 (3 points)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $X^2 + 2X$ divise $(X+1)^{2n} - 1$.

$X^2+2X = X(X+2)$ donc X^2+2X divise $(X+1)^{2n}-1$ ssi 0 et -2 sont des racines de ce polynome

$(0+1)^{2n} - 1 = 1^{2n} - 1 = 0$

$(-2+1)^{2n} - 1 = (-1)^{2n} - 1 = 1^n - 1 = 0$

donc X^2+2X divise $(X+1)^{2n}-1$

1

2. Montrer que X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$.

X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$ ssi 0 est une racine d'ordre 2 de ce polynome

$P(X) = (X+1)^n - nX - 1$

$(0+1)^n - n \times 0 - 1 = 1^n - 1 = 0$

$P'(X) = n(X+1)^{n-1} - n$

$P'(0) = n \times 1^{n-1} - n = 0$

donc X^2 divise $(X+1)^n - nX - 1$

1

3. Montrer que $(X-1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$.

$(X-1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$ ssi 1 est une racine d'ordre 2 de ce polynome

$P(X) = nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$

$P(1) = n \times 1^{n+1} - (n+1)1^n + 1 = n - n - 1 + 1 = 0$

$P'(X) = n(n+1)X^n - n(n+1)X^{n+1}$

$P'(1) = n(n+1) \times 1^n - n(n+1) \times 1^{n+1}$
$= n(n+1) - n(n+1) = 0$

$(X-1)^2$ divise $nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1$

1