Contrôle 1

Durée : trois heures

Documents et calculatrices non autorisés

Nom: DAVID Prénom : Clement

Classe: B2

Entourer votre professeur de TD : Mme Boudin / Mme Daadaa M. Ghanem M. Goron / Mme Trémoulet

Consignes:

- vous devez répondre directement sur les feuilles jointes.
- aucune autre feuille, que celles agrafées fournies pour répondre, ne sera corrigée.
- aucune réponse au crayon de papier ne sera corrigée.
- toute personne ne respectant pas ces consignes se verra attribuer la note 00/20.

rercice 1 (2 points)

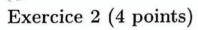
Soient f et g les fonctions définies par $\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln\left(\ln\left(\ln(x)\right)\right)} \\ g(x) = \sqrt{\sin^{2016}(x) + 2^x} \end{cases}$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{\ln\left(\ln\left(\ln(x)\right)\right)} \\ g(x) = \sqrt{\sin^{2016}(x) + 2^x} \end{cases}$$

Calculer f'(x) et g'(x) (sans se préoccuper du domaine de définition).

N.B.: n'essayez pas de simplifier les résultats.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\int_{-\infty$$



Soient $z_1 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ et $z_2 = 2 - 2i$.

1. Déterminer les réels
$$a$$
 et b tels que $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a}{4} + i\frac{b}{4}$.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{56 - i\sqrt{z}}{2 - 2i} = \frac{(t \cdot z_i)(56 - i\sqrt{z})}{4 + 4} = \frac{t\sqrt{6} - t\sqrt{z} + t\sqrt{5} + t\sqrt{z}}{2} = \frac{56 + \sqrt{z}}{4} + i\frac{56 - \sqrt{z}}{4}$$



2. Écrire sous forme exponentielle z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$.

$$|z_{2}| = \sqrt{56^{2} \cdot 52^{2}} = \sqrt{8} \cdot 2 \cdot 2$$

$$|z_{2}| = \sqrt{27 \cdot 2^{2}} = \sqrt{8} \cdot 2 \cdot 2$$

$$|z_{1}| = \sqrt{27 \cdot 2^{2}} = \sqrt{8} \cdot 2 \cdot 2$$

$$|z_{1}| = \sqrt{27 \cdot 2^{2}} = \sqrt{8} \cdot 2 \cdot 2$$

$$|z_{1}| = \sqrt{27 \cdot 2^{2}} = \sqrt{27 \cdot 2^$$

3. En déduire $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\alpha}{\frac{|z|}{|z|}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{b}{\frac{|z|}{|z|}} = \sqrt{6} + \sqrt{2}$$

Exercice 3 (6 points)

1. Via une intégration par parties, déterminer $I = \int_1^e \ln(x) dx$.

I.
$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln \alpha x \, d\alpha$$

On post: $V = \ln \alpha x \, V' = 1$
 $V' = -\frac{1}{2} \, V = \infty$

$$I = \left[\alpha x \ln \alpha x \right]_{1}^{0} - \int_{1}^{\infty} x 1 \, d\alpha$$

$$= e^{\ln e} - \ln 1 + 1 = e - \ln 1 + 1$$

_

En déduire via également une intégration par parties, $J = \int_1^e \ln^2(x) dx$.

Gen pose
$$U = \ln \alpha$$
 $V' = \ln \alpha$

$$U' = -\frac{1}{\alpha} \qquad V = \int_{1}^{\alpha} \ln \alpha x d\alpha x = I$$

$$J = \left[\ln \alpha \times I \right]_{1}^{\alpha} - \int_{1}^{\alpha} \ln \alpha x d\alpha x = I$$

on pose $U = \ln \alpha \qquad V' = -\frac{1}{\alpha}$

$$U' = -\frac{1}{\alpha} \qquad V = \ln \alpha$$

$$J = \left[\ln \alpha \times I \right]_{1}^{\alpha} - \left[\ln^{2}(\alpha) \right] + \int_{1}^{\alpha} -\frac{1}{\alpha} x = \ln \alpha x \left[\ln \alpha - \ln \alpha \right] - \ln \alpha \left[\ln \alpha \right] + \ln \alpha \left[\ln \alpha \right]$$

$$I = \left[\ln \alpha \times I \right]_{1}^{\alpha} - \left[\ln^{2}(\alpha) \right] + \int_{1}^{\alpha} -\frac{1}{\alpha} x = -\ln \alpha x \left[\ln \alpha - \ln \alpha \right] - \ln \alpha \left[\ln \alpha \right] + \ln \alpha x \left[\ln \alpha \right]$$

$$I = \left[\ln \alpha \times I \right]_{1}^{\alpha} - \left[\ln^{2}(\alpha) \right] + \int_{1}^{\alpha} -\frac{1}{\alpha} x = -\ln \alpha x \left[\ln \alpha - \ln \alpha \right] + \ln \alpha x \left[\ln \alpha \right]$$

3. Via le changement de variable $t = \sqrt{1-x}$, déterminer $K = \int_0^1 x\sqrt{1-x} \, dx$.

$$\frac{dt}{dR} = \frac{-1}{2\sqrt{1-2c}} = 3 dz = -2\sqrt{1-2c} dt$$

$$= -2t dt$$

$$\frac{1}{11}$$

4. Via le changement de variable $t=e^{-x}$, déterminer $L=\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{e^x+1}$

$$\frac{dt}{dz} = -e^{-x} = \int_{e^{-x}}^{\infty} dt = \int$$

Exercice 4 (3 points)

Soit l'équation (E) suivante : $z^2 - (4+3i)z + 1 + 5i = 0$.

1. Montrer que $\Delta = 3 + 4i$.

$$\Delta = (h.3i)^{2} - h.y.(1.5i) = h^{2} + 2.h.3i + (3i)^{2} - h.x.6i$$

$$= 16 + 2hi - 9 - h - 20i$$

$$= 3 + hi$$

011

2. Déterminer une racine carrée de $\Delta.$

on a:
$$\begin{cases} a^{2} - b^{2} = 3 \\ a^{2} + b^{4} = \sqrt{3} + 4^{2} = 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2ab = 4 \end{cases}$$



En déduire les solutions dans C de l'équation (E).

$$\alpha_{1} = \frac{h+3i-\delta}{z} = \frac{h+3i-(2+i)}{z} = \frac{z+2i}{z} = 1+i$$

$$\alpha_{2} = \frac{h+3i+\delta}{z} = \frac{h+3i+2+i}{z} = \frac{6+hi}{z} = 3+2i$$

Exercice 5 (4 points)

1. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x) + e^{2x}$

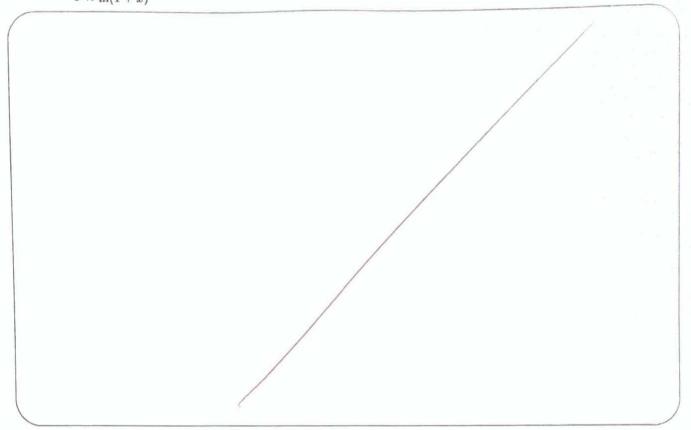
$$\ln (\Lambda - \alpha) = \ln (-(\Lambda + \alpha)) = \left(-(\alpha - \frac{\alpha^2}{2}, o(\alpha))\right) \left(-\alpha + \frac{\alpha L}{2}, o(\alpha)\right)$$

$$e^{2\alpha} = 1 + 2\alpha + \frac{4\alpha^2}{2} + o(\alpha^2)$$

$$\ln (1 - \alpha) + e^{2\alpha} = 1 + \alpha + \frac{4\alpha^2}{2} + o(\alpha^2)$$

2. Déterminer le développement limité en 0 à l'ordre 3 de $\frac{\cos(2x)}{1-x}$

3. Déterminer $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$.



Exercice 6 (2 points)

Soient f et g deux fonctions continues sur [a,b] telles que g(a)=f(b) et g(b)=f(a).

Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que g(c) = f(c).

(the pose Pr(se) = g(x) - f(x) h(a) = g(x) - f(x) = g(x) - g(x) -

@ supposous g(e)>g(b) douca ha)>0 et h(b) co

D'après le Théoremeds valeurs du temedianes, de éta, of tolque fictes et donne que get fero => get fe)

@ Supposons mantenant glas gb donc has so et bbs.0

Daprès le théorème du salens intermediaires, Je e [o, b] telque h(c)=0 et donc que q(c)- /2/=0 => g(c)= /2)