第三章　多维随机变量及其分布

第一节　二维随机变量

第二节　边缘分布

第三节　条件分布

第四节　随机变量的独立性

第五节　两个随机变量的函数的分布

有些随机现象只用一个随机变量来描述是不够的，需要用几个随机变量来同时描述.

有些随机现象只用一个随机变量来描述是不够的，需要用几个随机变量来同时描述.

实例1　炮弹的弹着点的位置 (X, Y) 就是一个二维随机变量.

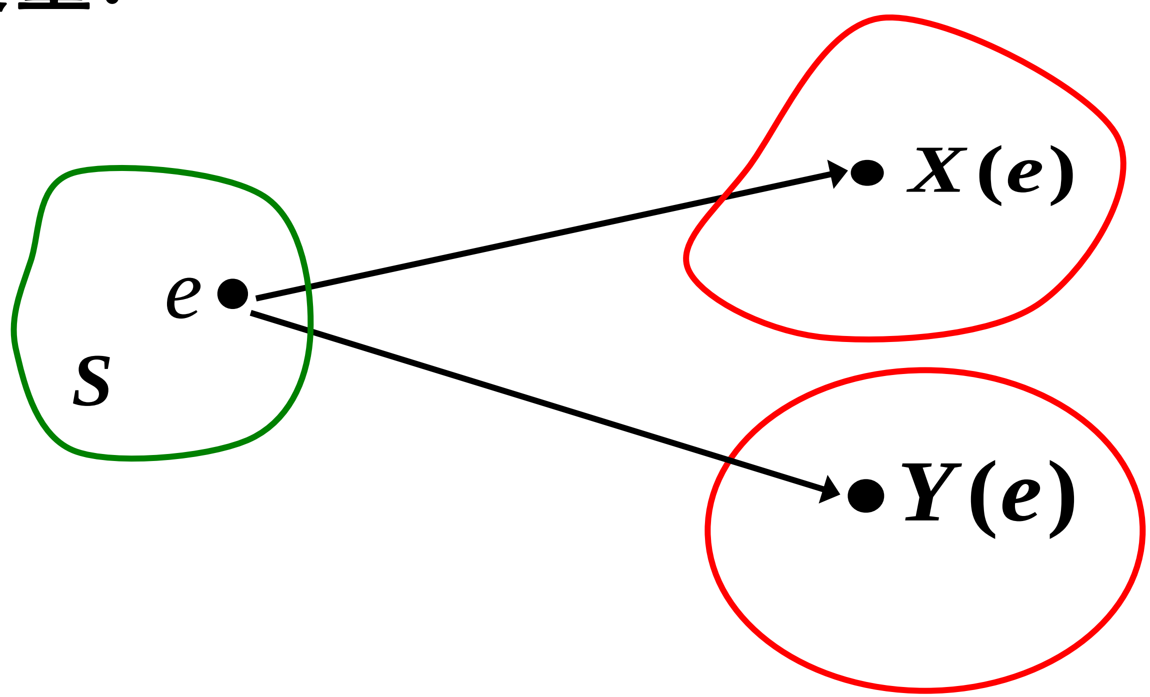
有些随机现象只用一个随机变量来描述是不够的，需要用几个随机变量来同时描述.

实例1 炮弹的弹着点的位置 (X, Y) 就是一个二维随机变量.

实例2 考查某一地 区学龄前儿童的发育情况，则儿童的身高 H 和体重 W 就构成二维随机变量 (H, W).

二维随机变量定义

设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X=X(e)$ 和 $Y=Y(e)$ 是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个向量 (X,Y)，叫作二维随机向量或二维随机变量.



二维随机变量的分布函数

(1)分布函数的定义

设 (X,Y) 是二维随机变量,对于任意实数 $x,y,$

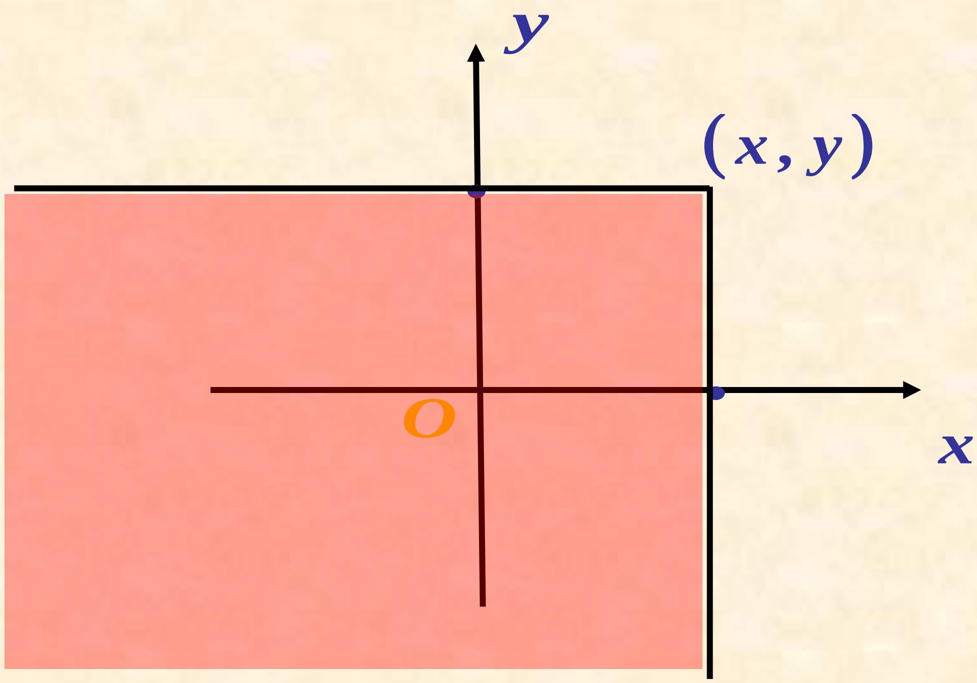
二元函数:

$$F(x,y)=P\{(X\le x)\bigcap(Y\le y)\}=P\{X\le x,Y\le y\}$$

称为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数,或称为随机变量 X 和 Y 的联合分布函数.

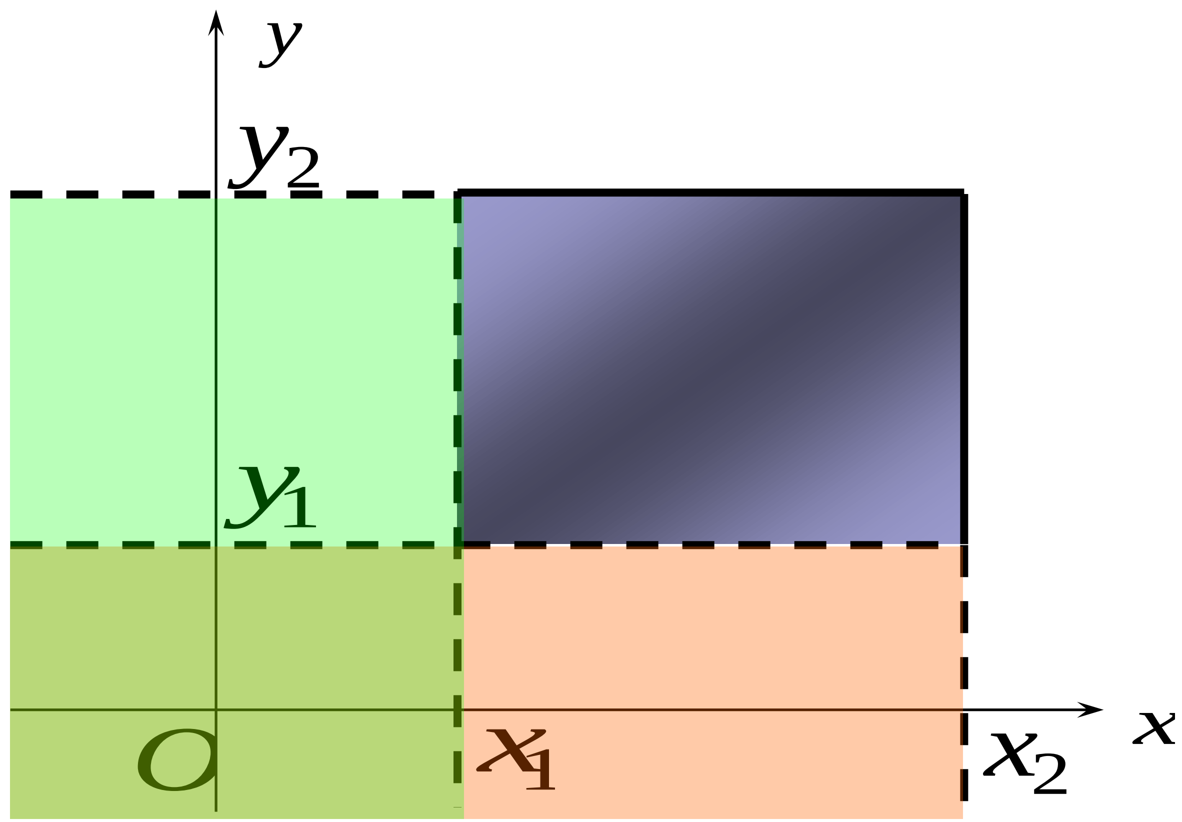
分布函数的函数值的几何解释

将二维随机变量 (X,Y) 看成是平面上随机点的坐标，那么，分布函数 $F(x,y)$ 在点 (x,y) 处的函数值就是随机点 (X,Y) 落在下面左图所示的，以点 (x,y) 为顶点而位于该点左下方的无穷矩形域内的概率.



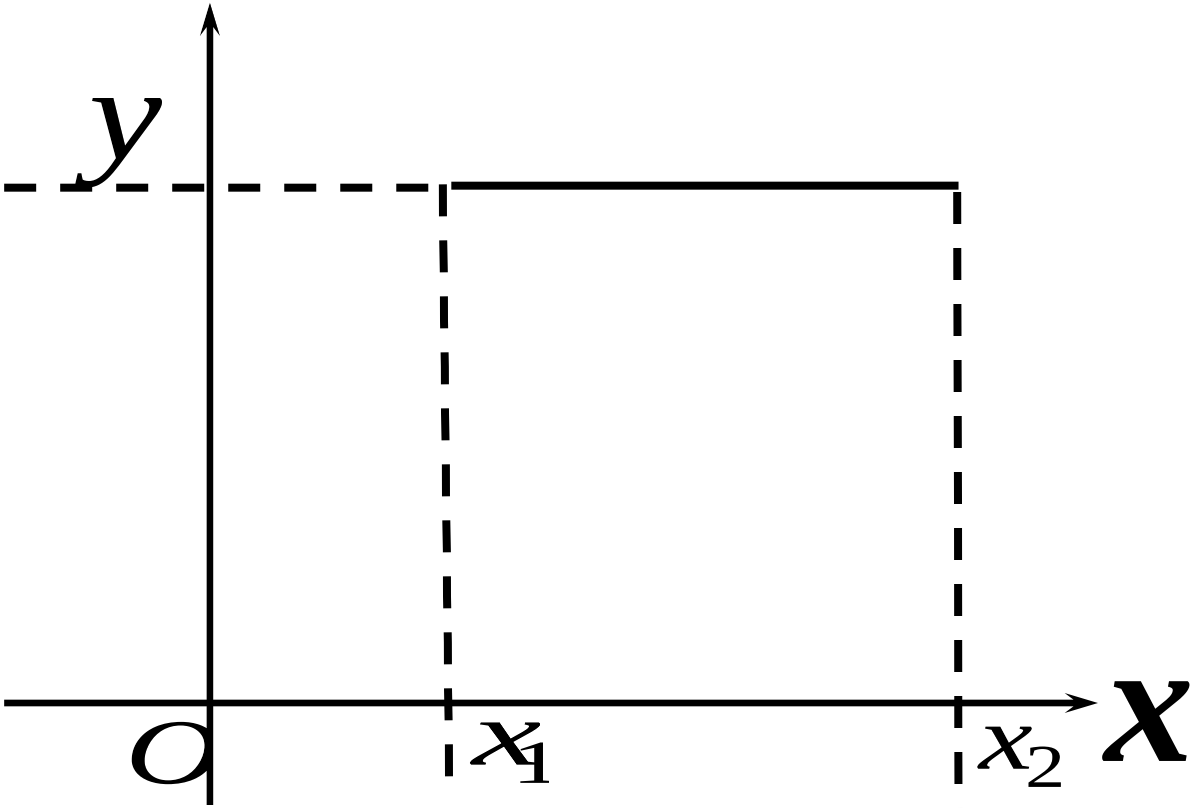
$$P\{x_1<X\le x_2,\ y_1<Y\le y_2\}$$

$$=F(x_2, y_2)-F(x_2, y_1)-F(x_1, y_2)+F(x_1, y_1).$$



(2) 分布函数的性质

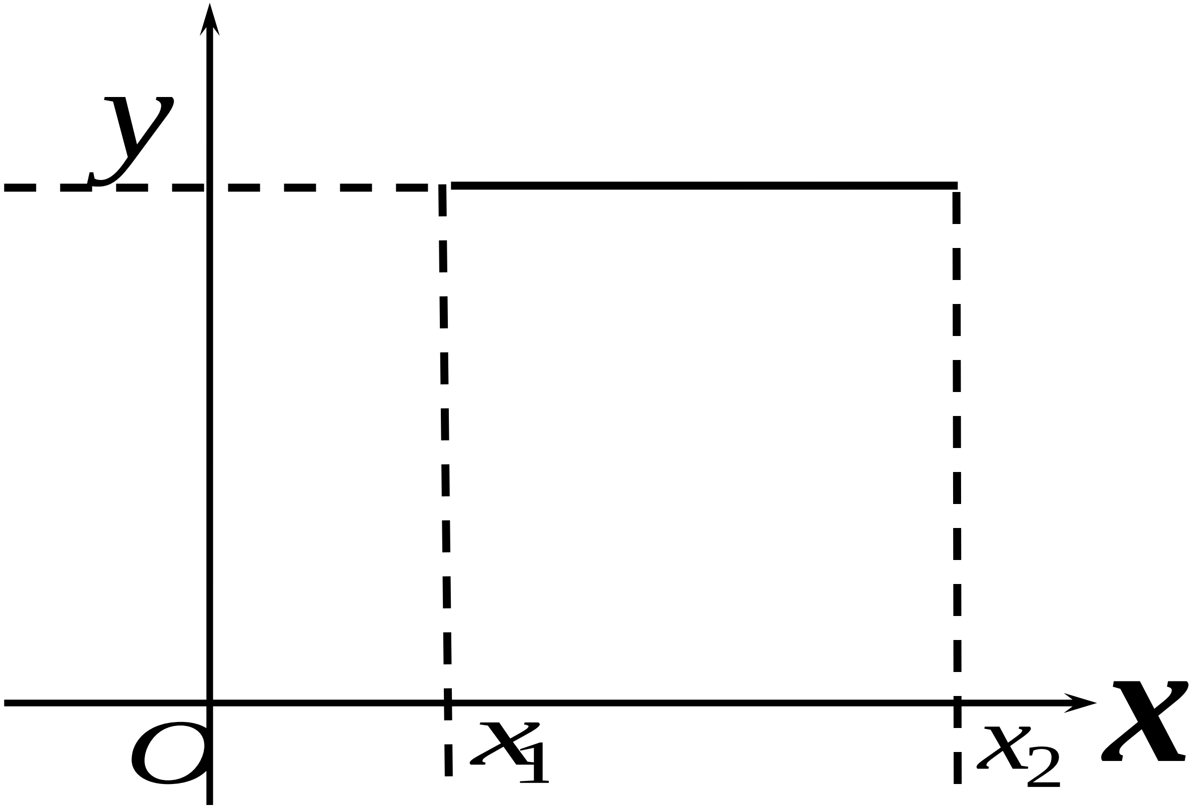
1° $F(x,y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数,即对于任意固定的 y, 当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2, y) \geq F(x_1, y)$,



(2) 分布函数的性质

1° $F(x,y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数,即对于任意固定的 y, 当 $x_2 > x_1$ 时 $F(x_2,y) \geq F(x_1,y)$,

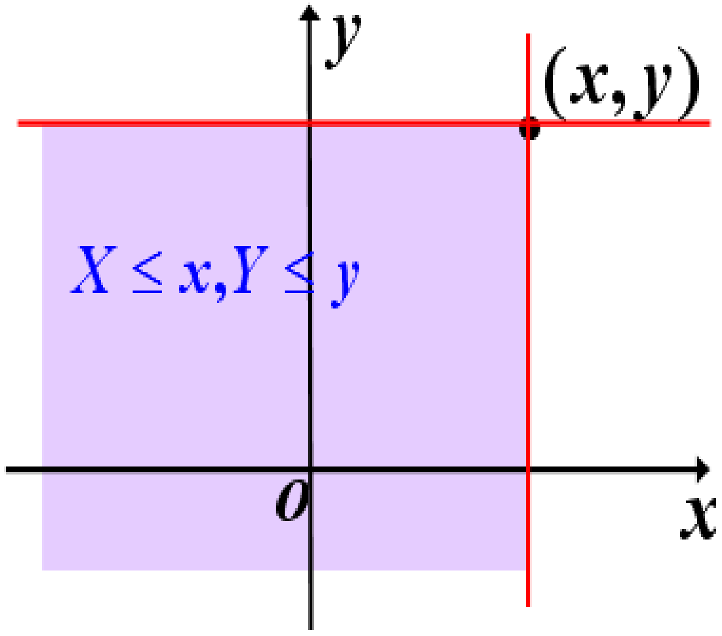
对于任意固定的x,当$y_2 > y_1$时$F(x,y_2) \geq F(x,y_1)$.



$2^{o}\ 0 \le F(x,y) \le 1,$

对于任意固定的y, $F(-\infty, y) = \lim\limits_{x \to -\infty} F(x,y) = 0,$

对于任意固定的x, $F(x, -\infty) = \lim\limits_{y \to -\infty} F(x,y) = 0,$



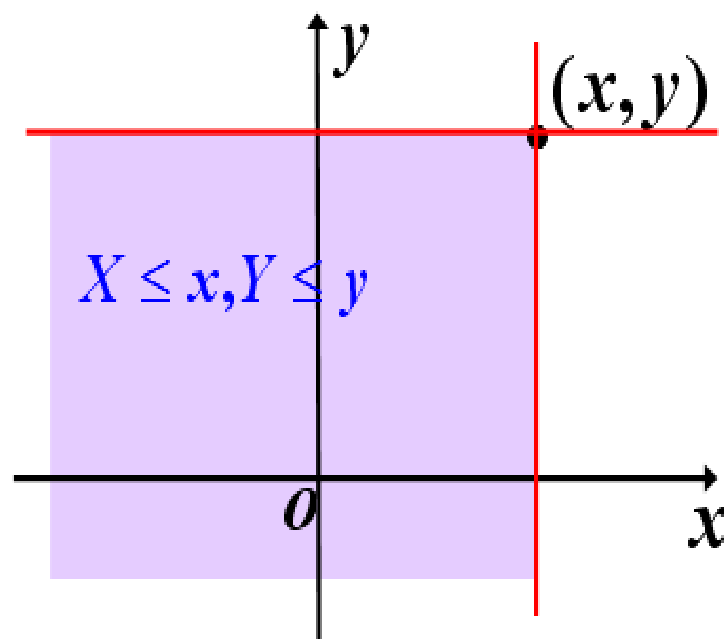
2° $0 \le F(x,y) \le 1,$

对于任意固定的y, $F(-\infty,y)=\lim_{x\to-\infty}F(x,y)=0,$

对于任意固定的x, $F(x,-\infty)=\lim_{y\to-\infty}F(x,y)=0,$

$$F(-\infty,-\infty)=\lim_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}}F(x,y)=0,$$

$$F(+\infty,+\infty)=\lim_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}}F(x,y)=1.$$



3° $F(x,y)=F(x+0,y), F(x,y)=F(x,y+0)$,

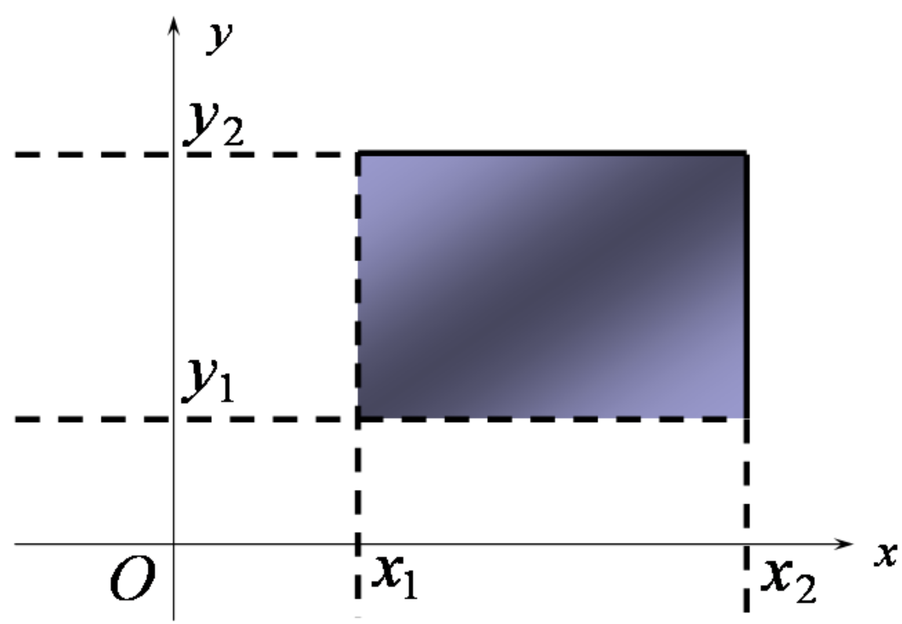
即 $F(x,y)$ 关于 x 右连续,关于 y 也右连续.

3° $F(x,y)=F(x+0,y), F(x,y)=F(x,y+0)$,

即 $F(x,y)$ 关于 x 右连续,关于 y 也右连续.

4° 对于任意 $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$, $x_1<x_2$, $y_1<y_2$,

有 $F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)+F(x_1,y_1)-F(x_1,y_2)\geq 0$.



第一节　二维随机变量

一、二维随机变量及其分布函数

二、二维离散型随机变量

三、二维连续型随机变量

二维离散型随机变量

1. 定义

若二维随机变量 (X, Y) 所取的可能值是有限对或无限可列多对,则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量.

2. 二维离散型随机变量的分布律

设二维离散型随机变量(X,Y)所有可能取的值为$(x_i,y_j), i,j=1,2,\cdots,$记

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,$$

称此为二维离散型随机变量 (X,Y) 的分布律, 或随机变量 X 和 Y 的联合分布律.

二维随机变量 (X,Y) 的分布律也可表示为

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

例　有两枚均匀的硬币，设X为抛掷第一枚硬币时正面出现的次数，Y为抛掷第二枚硬币时正面出现的次数, 求 (X, Y) 的分布律 .

联合分布律的性质

随机变量 X 和 Y 的联合分布律

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \cdots,$$

其中 $p_{ij} \geq 0, \ \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1.$

确定联合分布律的方法

(1)　确定随机变量 (X, Y) 的所有取值数对.

(2)　计算取每个数值对的概率.

例1 设随机变量 X 在 1,2,3,4 四个整数中等可能地取值，另一个随机变量 Y 在 $1 \sim X$ 中等可能地取一整数值.试求 (X,Y) 的分布律.

例1 设随机变量 X 在 $1,2,3,4$ 四个整数中等可能地取值，另一个随机变量 Y 在 $1\sim X$ 中等可能地取一整数值.试求 (X,Y) 的分布律.

解 $\{X=i,Y=j\}$ 的取值情况是： $i=1,2,3,4,$

j 取不大于 i 的正整数. 且由乘法公式得

$$P\{X=i,Y=j\}=P\{Y=j\mid X=i\}P\{X=i\}=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4},$$

$$i=1,2,3,4,\quad j\le i.$$

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

$Y \backslash X$	1	2	3	4
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
2	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
3	0	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{16}$
4	0	0	0	$\frac{1}{16}$

$$F(2,1) =$$

离散型随机变量 (X,Y) 的分布函数归纳为

$$F(x,y)=\sum_{x_i\le x}\sum_{y_j\le y}p_{ij},$$

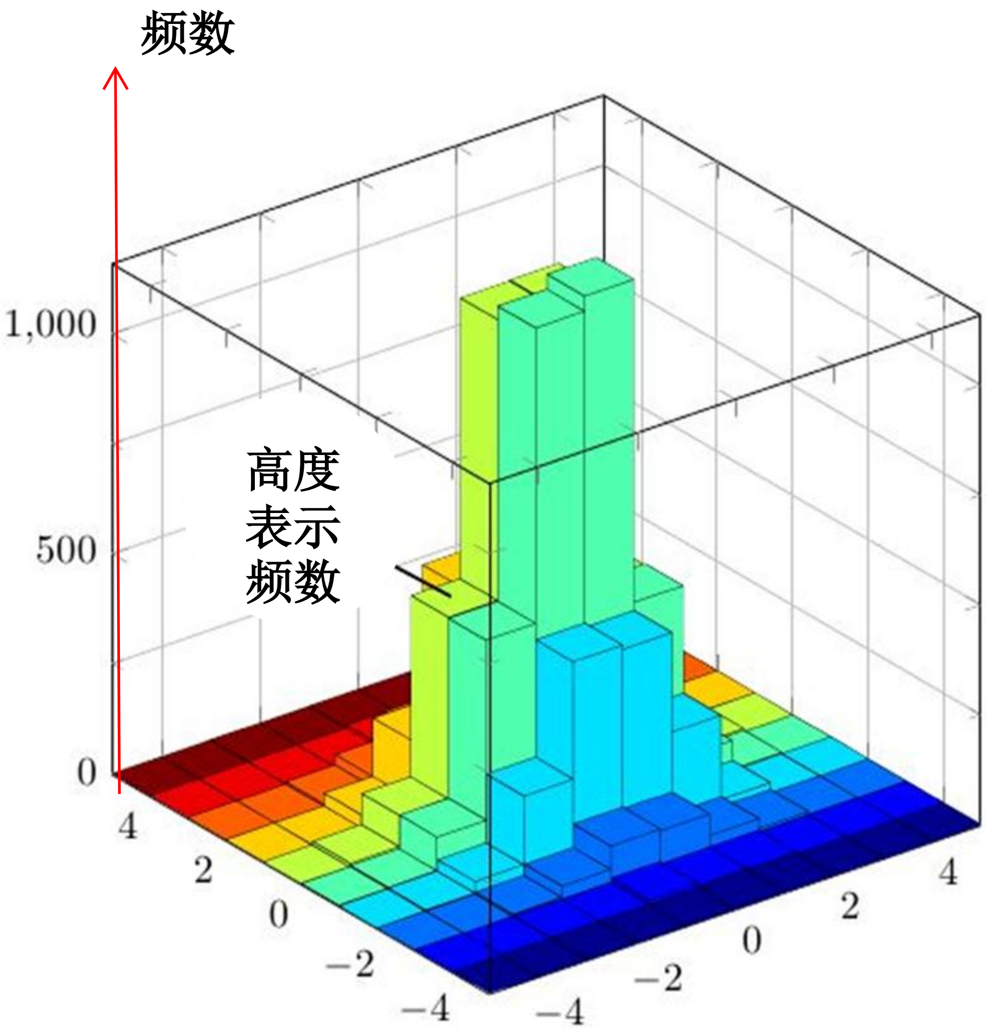
其中和式是对一切满足 $x_i\le x, y_j\le y$ 的 i,j 求和.

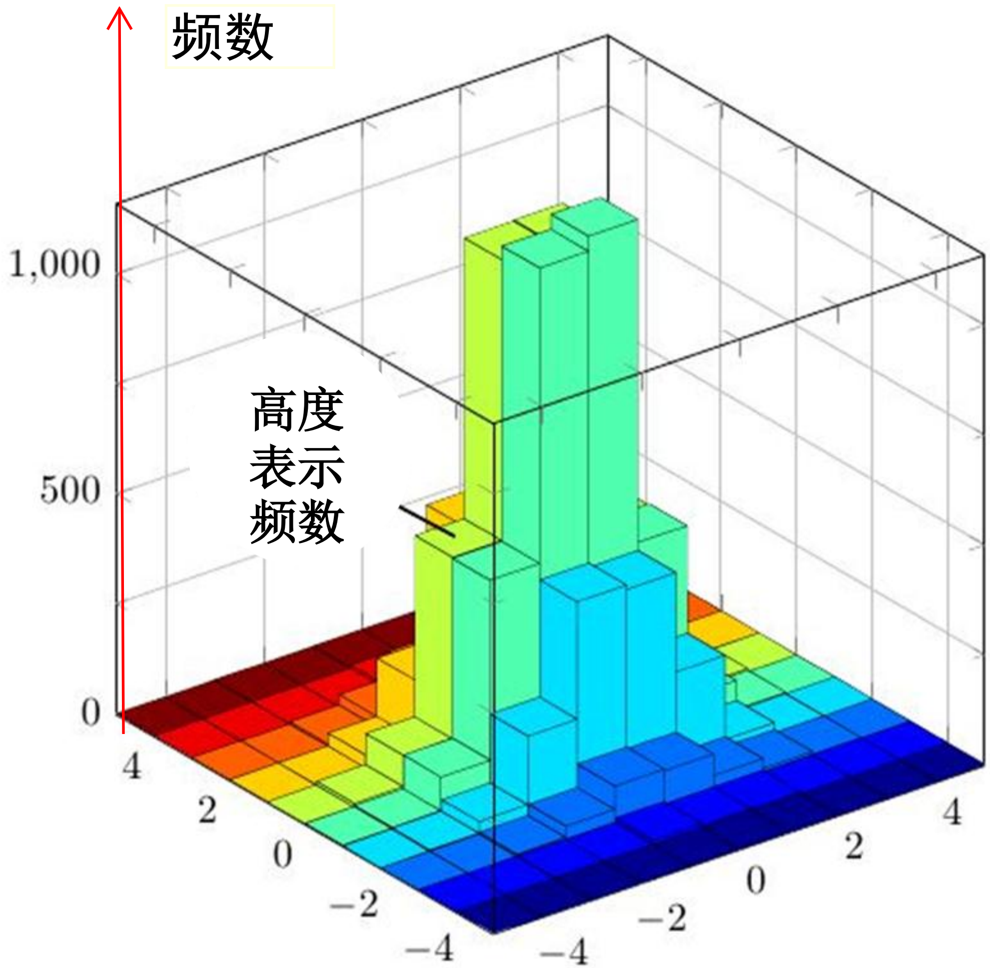
第一节　　二维随机变量

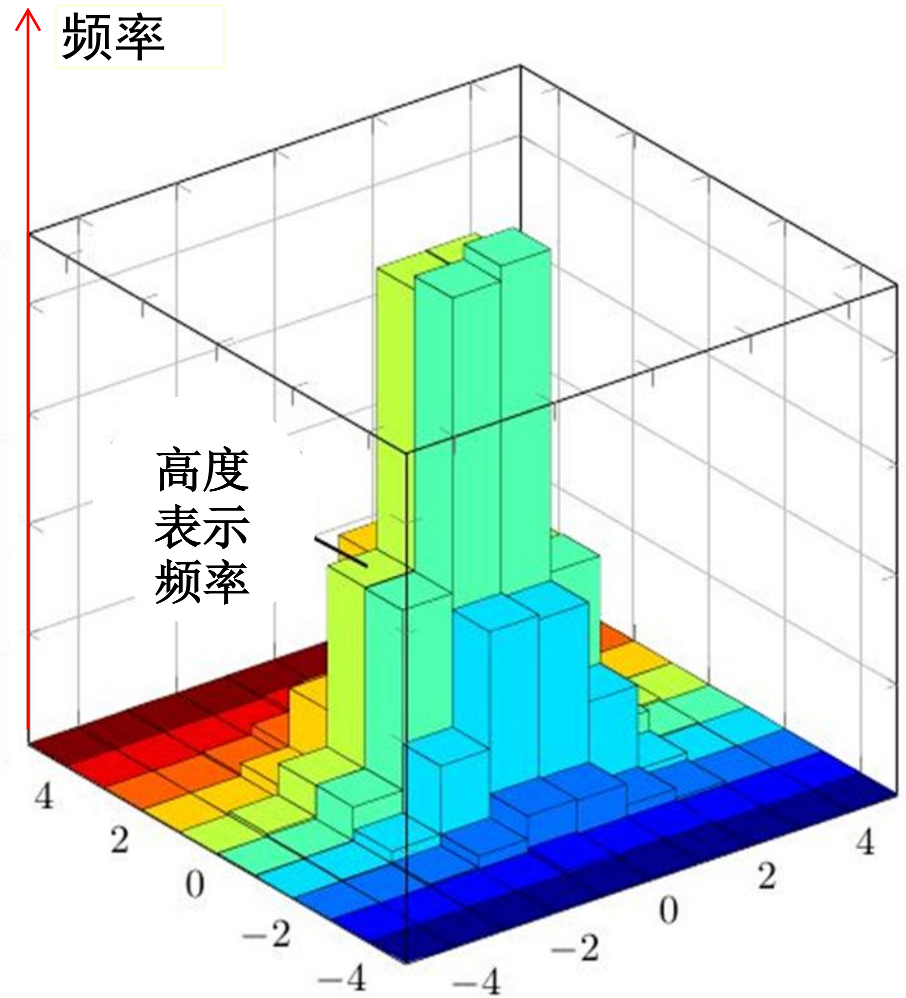
一、二维随机变量及其分布函数

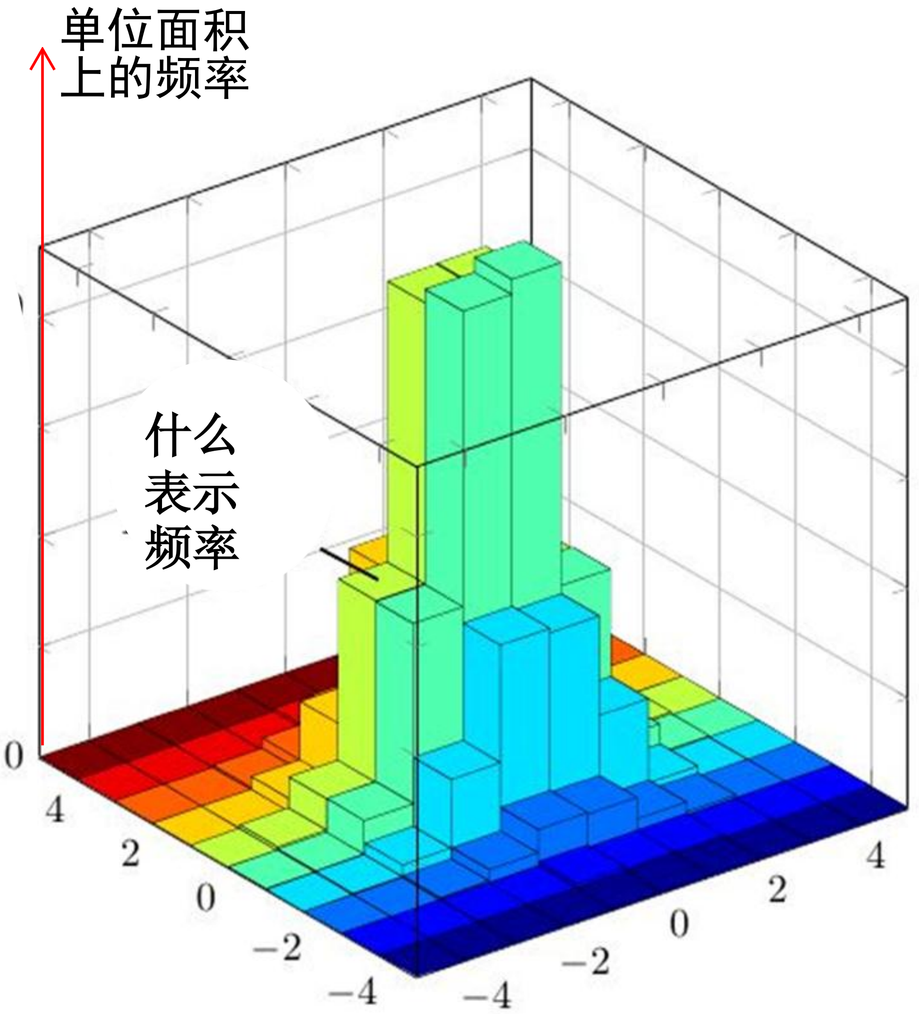
二、二维离散型随机变量

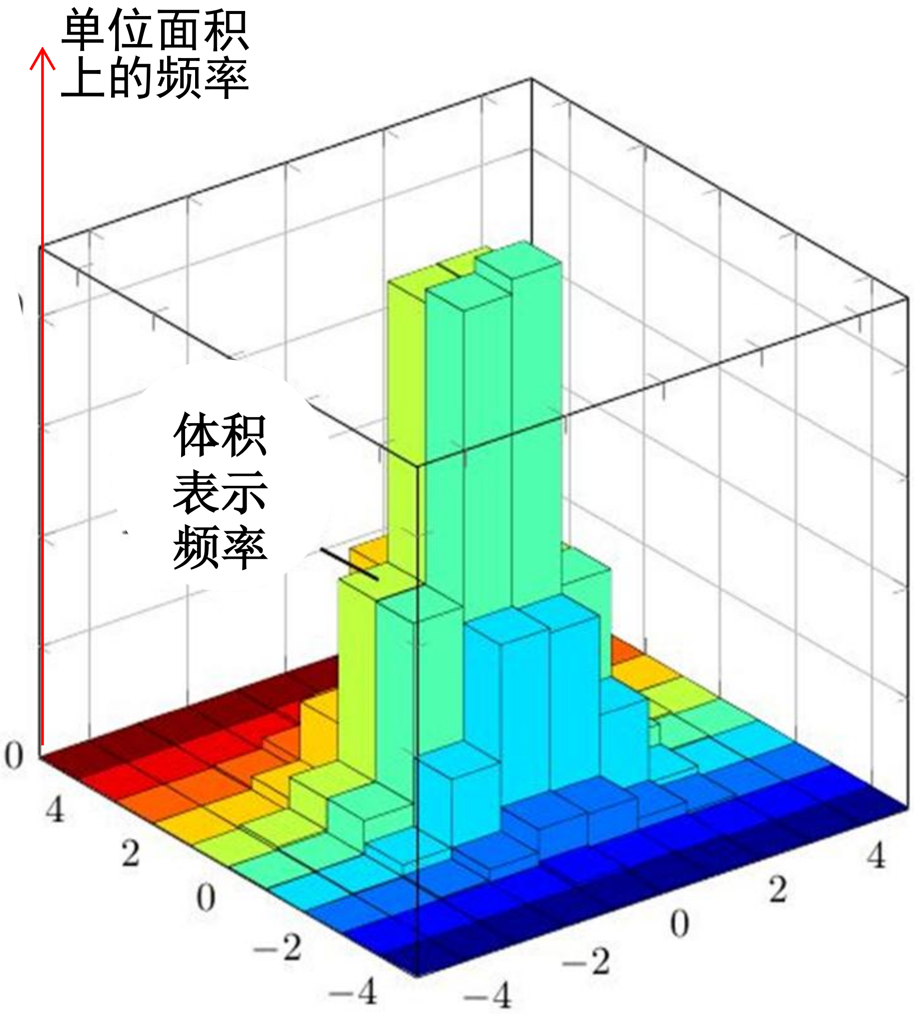
三、二维连续型随机变量

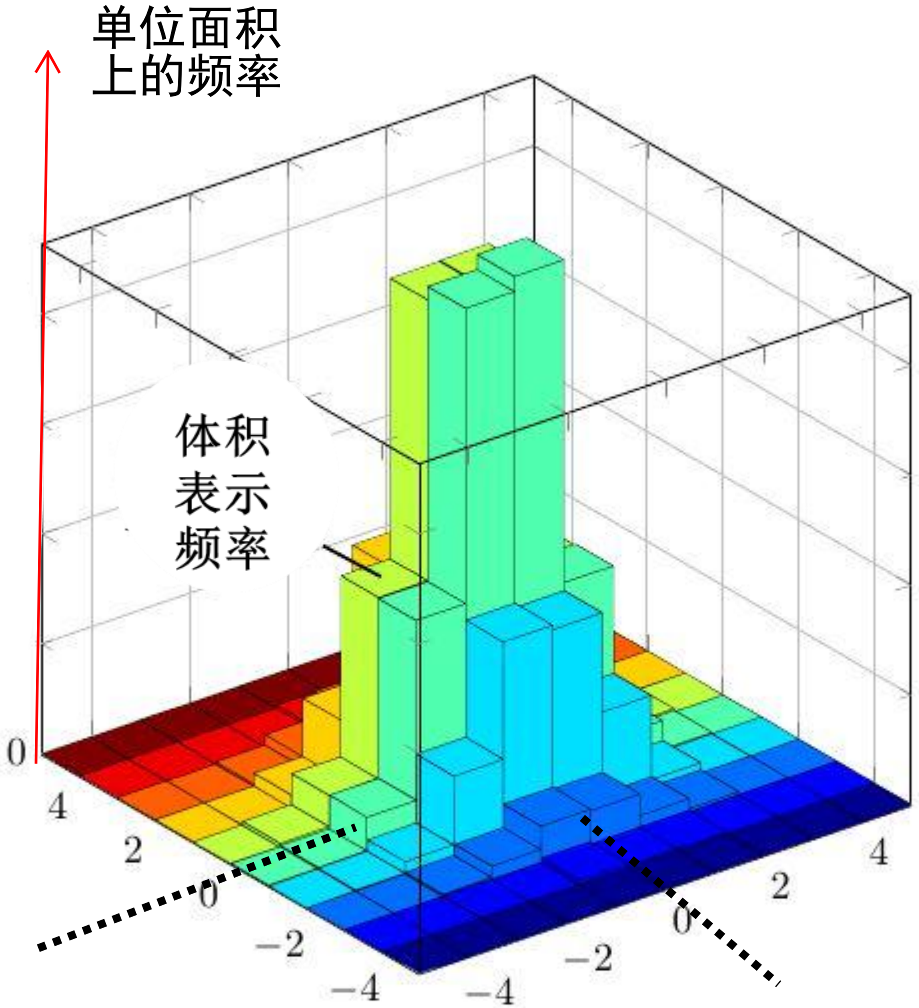

频数
1,000
500
0
高度
表示
频数
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4

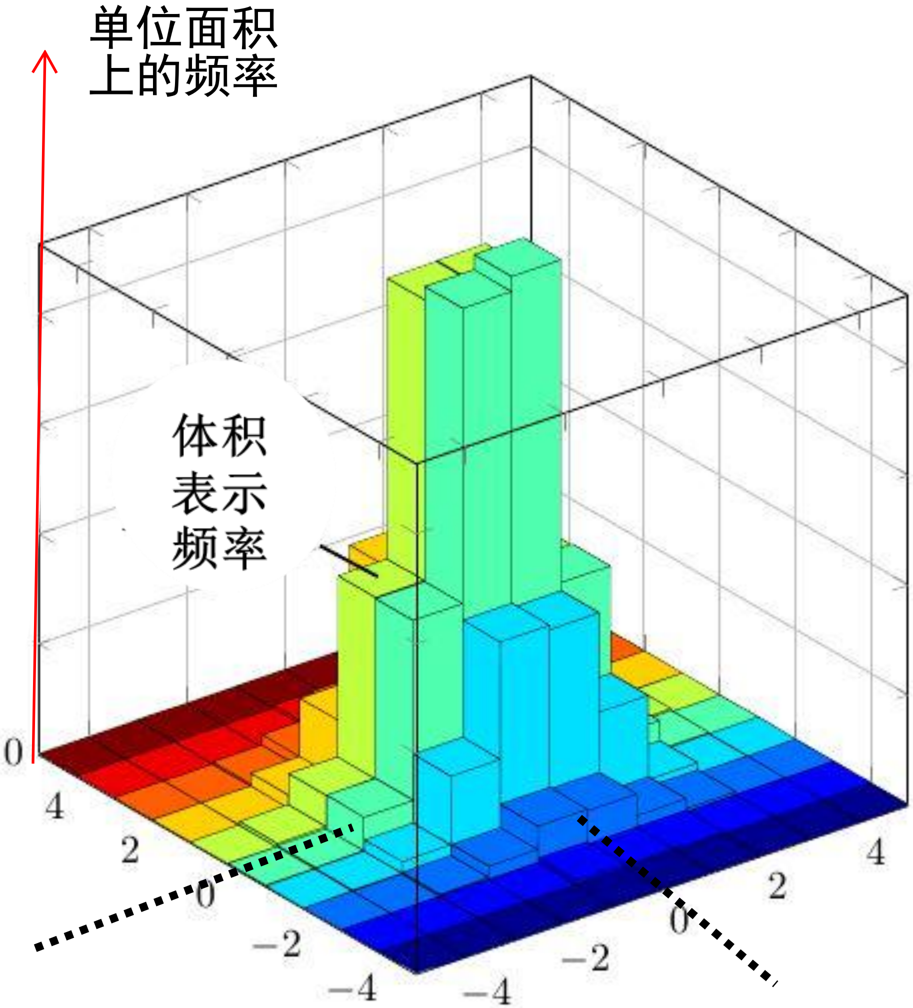

频数
1,000
500
0
高度
表示
频数
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4


频率
高度
表示
频率
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4

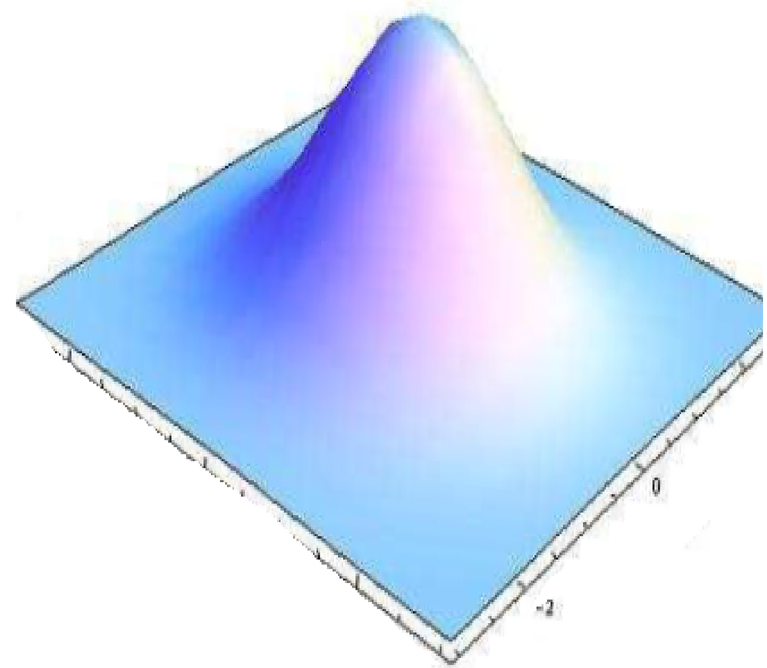

单位面积
上的频率
什么
表示
频率
0
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4


单位面积
上的频率
体积
表示
频率
0
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4


单位面积
上的频率
体积
表示
频率
0
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4



单位面积
上的频率
体积
表示
频率
0
4
2
0
−2
−4
−4
−2
0
2
4



0
-2

二维连续型随机变量

1.定义

对于二维随机变量(X,Y)的分布函数$F(x,y)$，如果存在非负可积函数$f(x,y)$使对于任意x,y有

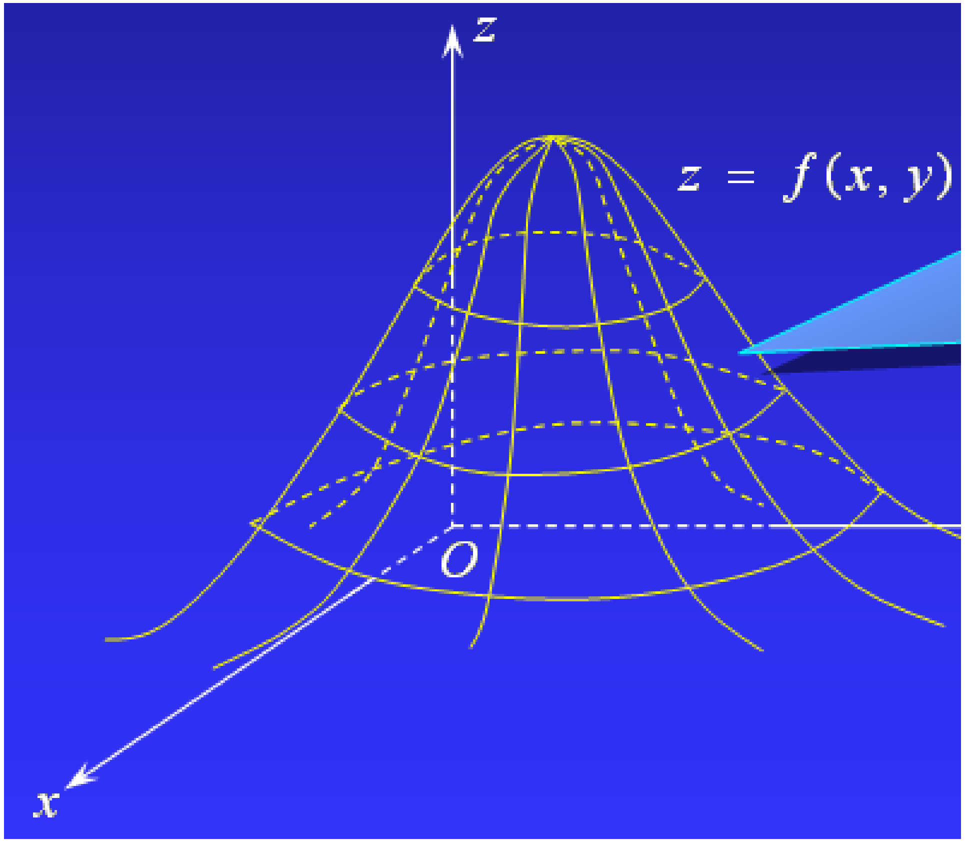
$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

则称(X,Y)是连续型的二维随机变量，函数$f(x,y)$称为二维随机变量(X,Y)的概率密度，或称为随机变量X和Y的联合概率密度.

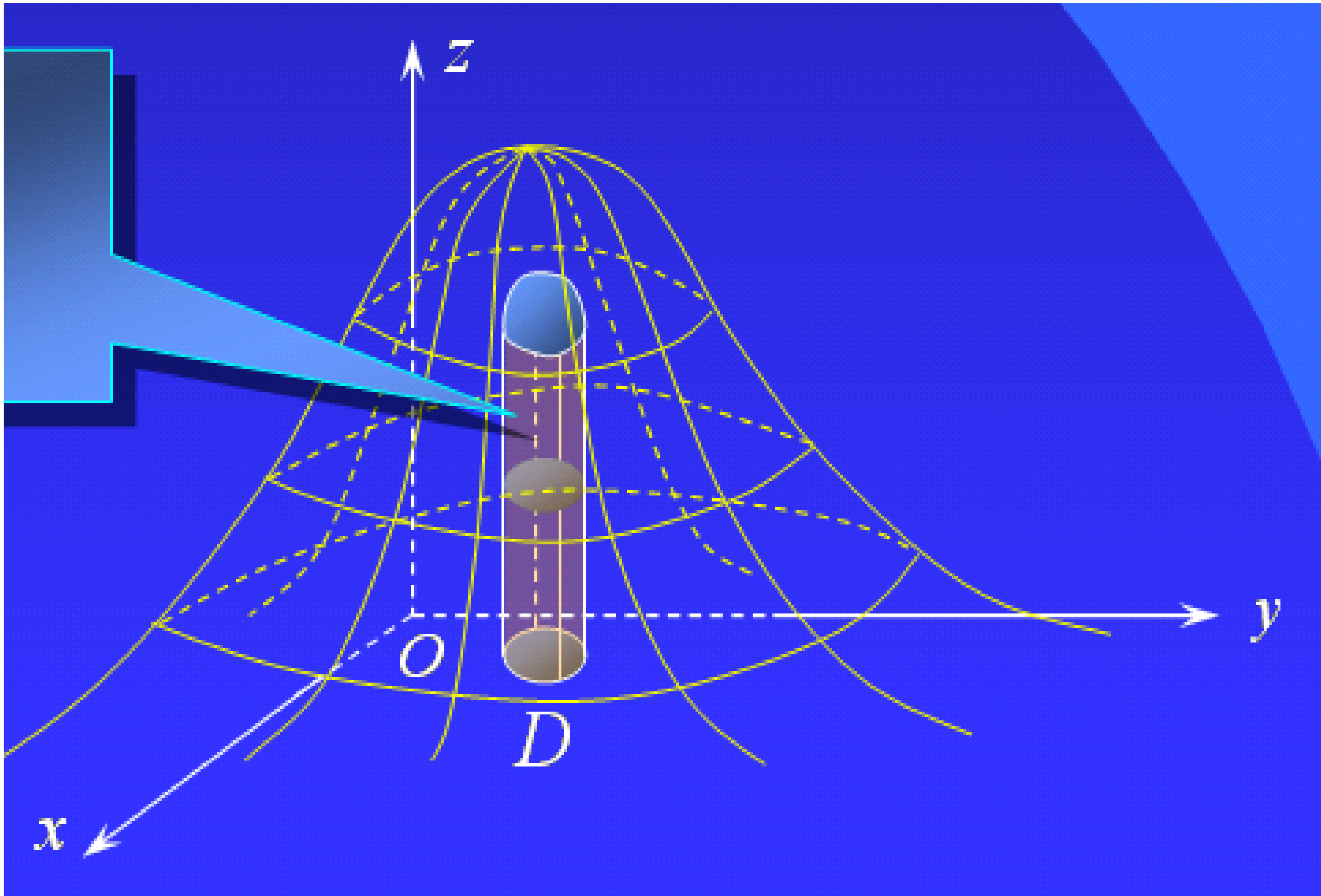
2.性质

(1) $f(x,y) \geq 0.$

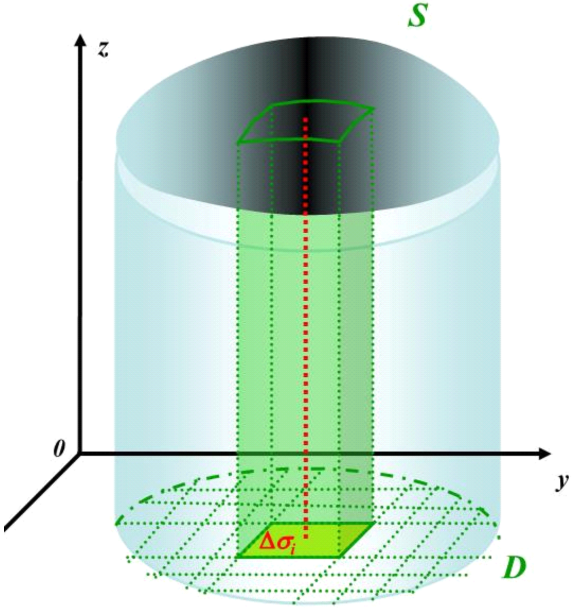
(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = F(\infty,\infty) = 1.$



(3) 设 G 是 xoy 平面上的一个区域, 点 (X,Y) 落在 G 内的概率为 $P\{(X,Y)\in G\}=\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.



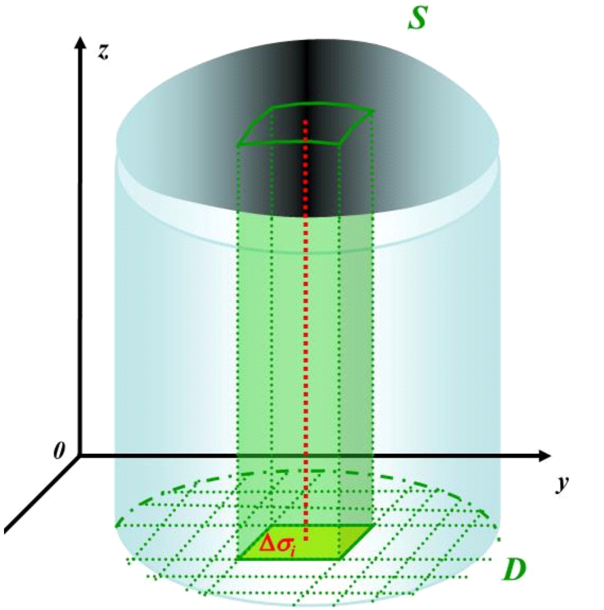
(4)若 $f(x,y)$ 在 (x,y) 连续,则有 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$.



(4)若 $f(x,y)$在(x,y)连续,则有$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$.

故当 $\Delta x \Delta y$充分小时，有

$$P\{x < X \le x + \Delta x, y < Y \le y + \Delta y\} \approx f(x,y)\Delta x \Delta y$$



例 设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x, y)=\begin{cases} Ae^{-(2x+y)}, & x>0, y>0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求常数A.

例2 设二维随机变量(X, Y)具有概率密度

$$f(x, y)=\begin{cases}2\mathrm{e}^{-(2x+y)}, & x>0,\ y>0, \\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(1) 求分布函数$F(x, y)$; (2) 求概率$P\{Y \leq X\}$.

解 (1) $F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

解 (1) $$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\begin{cases}\int_{0}^{y}\int_{0}^{x} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

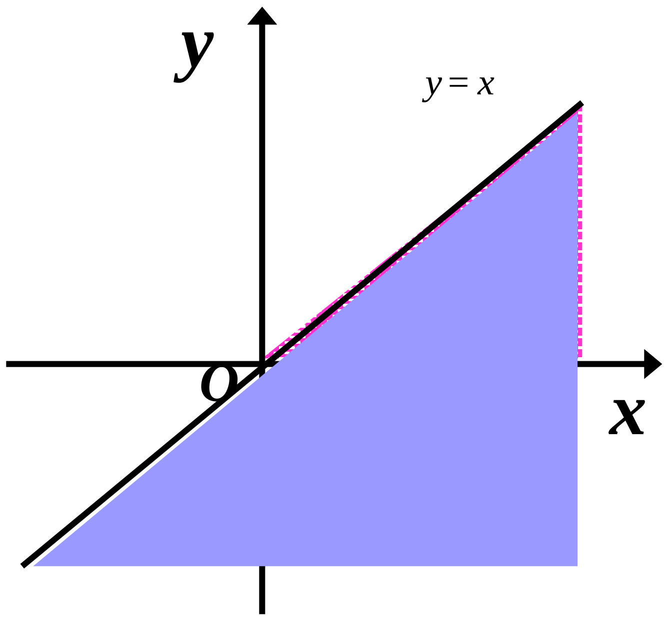
得 $$F(x,y)=\begin{cases}(1-\mathrm{e}^{-2x})(1-\mathrm{e}^{y}), & x>0, y>0.\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 将 (X,Y)看作是平面上随机点的坐标,

即有 $\{Y \le X\} = \{(X,Y) \in G\}$,

$$P\{Y \le X\} = P\{(X,Y) \in G\}$$

$$= \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



(2) 将 (X,Y)看作是平面上随机点的坐标,

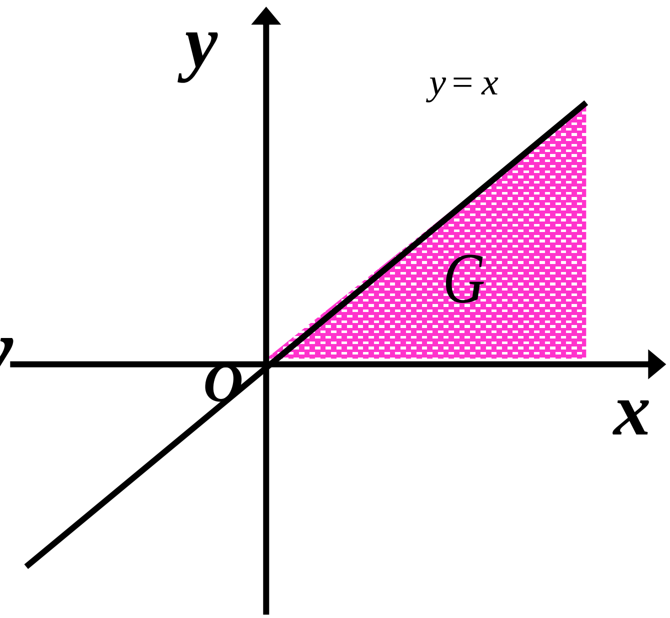
即有 $\{Y \le X\} = \{(X,Y) \in G\}$,

$$P\{Y \le X\} = P\{(X,Y) \in G\}$$

$$= \iint_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{+\infty}\int_y^{+\infty} 2\mathrm{e}^{-(2x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{3}.$$



推广　n 维随机变量的概念

定义　设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \cdots, X_n=X_n(e)$，是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 叫做 n 维随机向量或 n 维随机变量.

推广　n 维随机变量的概念

定义　设 E 是一个随机试验，它的样本空间是 $S=\{e\}$，设 $X_1=X_1(e), X_2=X_2(e), \cdots, X_n=X_n(e)$，是定义在 S 上的随机变量，由它们构成的一个 n 维向量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 叫做 n 维随机向量或 n 维随机变量。

对于任意 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = P\{X_1 \le x_1, X_2 \le x_2, \cdots, X_n \le x_n\}$$

称为随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的联合分布函数。

小结

第一节　二维随机变量

一、二维随机变量及其分布函数

二、二维离散型随机变量

三、二维连续型随机变量

作业

- **P86　　1　；3(1)(4)**

第三章　多维随机变量及其分布

第一节　二维随机变量

第二节　边缘分布

第三节　条件分布

第四节　随机变量的独立性

第五节　两个随机变量的函数的分布

问题1:已知(X,Y)的分布,能否确定X,Y的分布?

问题1:已知(X,Y)的分布,能否确定X,Y的分布?

问题2:已知(X,Y)的分布,如何确定X,Y的分布?

第二节　边缘分布

一、边缘分布函数

二、离散型随机变量的边缘分布律

三、连续型随机变量的边缘概率密度

一、边缘分布函数

二维随机变量 (*X*,*Y*)作为一个整体, 具有分布函数 $F(x,y)$,而 X 和 Y 都是随机变量 ,也有各自的分布函数,分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$, 依次称为二维随机变量 (*X*,*Y*) 关于 *X* 和 *Y*的边缘分布函数.

一、边缘分布函数

二维随机变量 (X,Y)作为一个整体, 具有分布函数 $F(x,y)$,而 X 和 Y 都是随机变量 ,也有各自的分布函数, 分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$, 依次称为二维随机变量 (X,Y) 关于 X 和 Y的边缘分布函数.

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty)$$

一、边缘分布函数

二维随机变量 (X,Y)作为一个整体, 具有分布函数 $F(x,y)$,而 X 和 Y 都是随机变量 ,也有各自的分布函数, 分别记为 $F_X(x), F_Y(y)$, 依次称为二维随机变量 (X,Y) 关于 X 和 Y的边缘分布函数.

$$F_X(x) = P\{X \le x\} = P\{X \le x, Y < +\infty\} = F(x, +\infty)$$

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{X < +\infty, Y \le y\} = F(+\infty, y)$$

例 已知联合分布律求其边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

例 已知联合分布律求其边缘分布律.

$Y \backslash X$	0	1	
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{6}{9}$
	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$Y \backslash X$	x_1	x_2	$\cdots$	x_i	$\cdots$
y_1	p_{11}	p_{21}	$\cdots$	p_{i1}	$\cdots$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\cdots$	p_{i2}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
y_j	p_{1j}	p_{2j}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	

$$P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij},\ i = 1,2,\cdots;$$

$$P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij},\ j = 1,2,\cdots.$$

离散型随机变量的边缘分布律

定义 设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots.$$

记

$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty}p_{ij}=P\{X=x_i\},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty}p_{ij}=P\{Y=y_j\},\quad j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}\ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}\ (j=1,2,\cdots)$ 为(X,Y)关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

例2 一整数 N 等可能地在$1,2,3,\cdots,10$ 十个值中取一个值. 设 $D=D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数, $F=F(N)$是能整除N的素数的个数.试写出D和F的联合分布律, 并求边缘分布律.

例2 一整数 N 等可能地在$1,2,3,\cdots,10$ 十个值中取一个值. 设 $D=D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数, $F=F(N)$是能整除N的素数的个数.试写出D和F的联合分布律, 并求边缘分布律.

解

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

例2 一整数 N 等可能地在$1,2,3,\cdots,10$ 十个值中取一个值. 设 $D=D(N)$ 是能整除 N 的正整数的个数, $F=F(N)$是能整除N的素数的个数.试写出D和F的联合分布律, 并求边缘分布律.

解

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4
F	0	1	1	1	1	2	1	1	1	2
p	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

由此得 D 和 F 的联合分布律与边缘分布律 :

$F \backslash D$	1	2	3	4	$P\{F=j\}$
0	$1/10$	0	0	0	$1/10$
1	0	$4/10$	$2/10$	$1/10$	$7/10$
2	0	0	0	$2/10$	$2/10$
$P\{D=i\}$	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$	1

或将边缘分布律表示为

D	1	2	3	4
p_k	$1/10$	$4/10$	$2/10$	$3/10$

F	0	1	2
p_k	$1/10$	$7/10$	$2/10$

离散型随机变量的边缘分布律

定义 设二维离散型随机变量(X,Y)的联合分布律为

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=p_{ij}, i,j=1,2,\cdots.$$

记

$$p_{i\bullet}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}=P\{X=x_i\},\quad i=1,2,\cdots,$$

$$p_{\bullet j}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}=P\{Y=y_j\},\quad j=1,2,\cdots,$$

分别称 $p_{i\bullet}\ (i=1,2,\cdots)$ 和 $p_{\bullet j}\ (j=1,2,\cdots)$ 为 (X,Y) 关于 X 和关于 Y 的边缘分布律.

连续型随机变量的边缘概率密度

定义 对于连续型随机变量(X,Y)，设它的概率密度为$f(x,y)$，由于

$$F_X(x)=F(x,\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x,$$

记

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

称其为随机变量(X,Y)关于X的边缘概率密度.

$$F_Y(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^{y} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y,$$

记 $$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x,$$

称其为随机变量(X, Y)关于Y的边缘概率密度.

例2 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

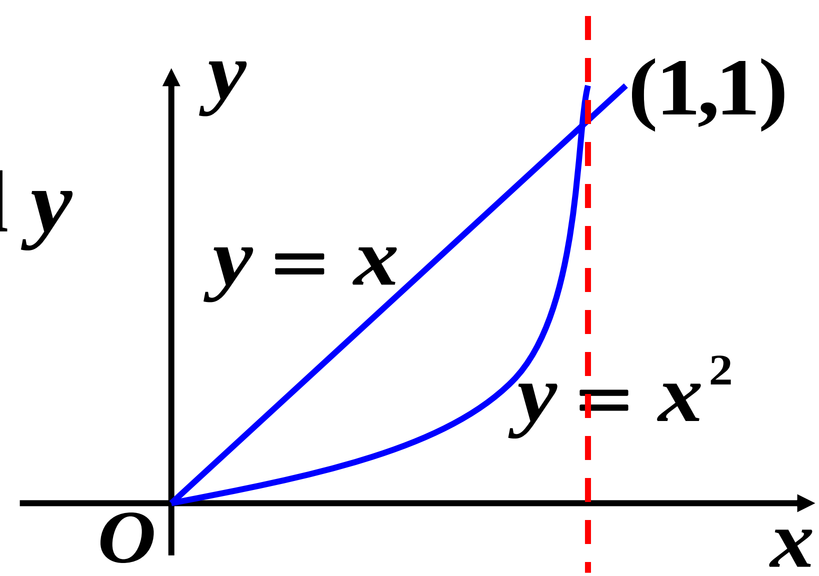
求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

例2 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x),\ f_Y(y)$.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y$



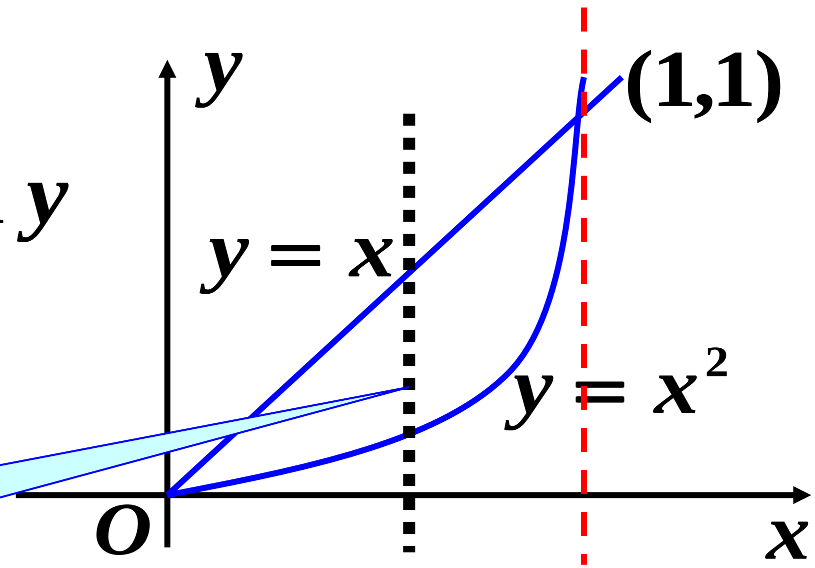
例2 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$

暂时固定

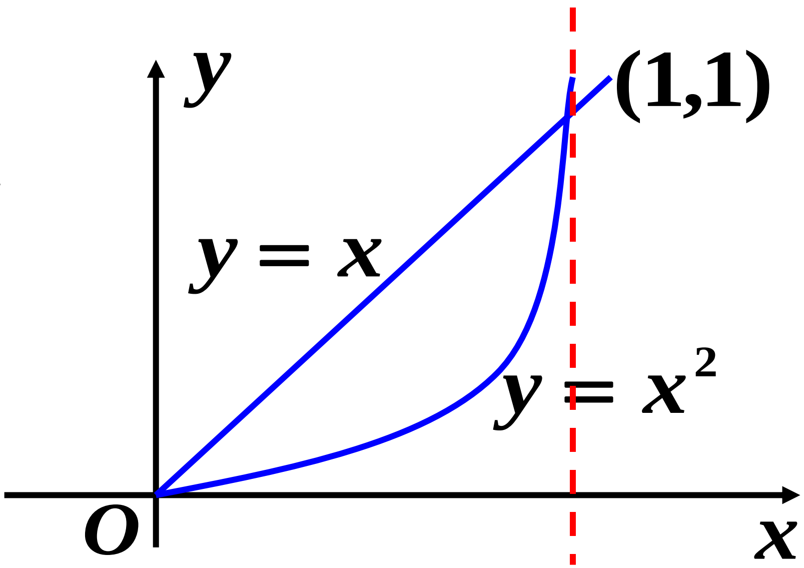


例2 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x)$, $f_Y(y)$.

解 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$



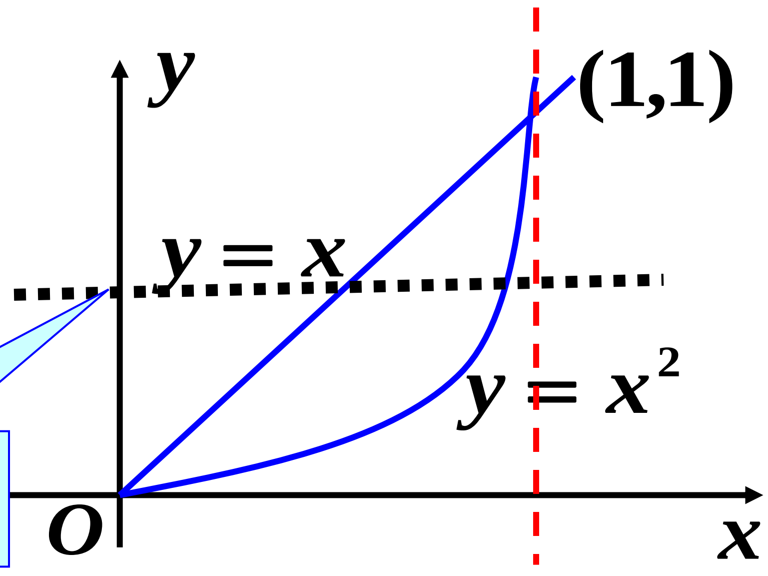
例2 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求边缘概率密度 $f_X(x),\ f_Y(y)$.

解 $f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}\,x$

暂时固定



(P72) 二维均匀分布

设G是平面上的有界区域，其面积为A.若二维随机变量（ X,Y）具有概率密度

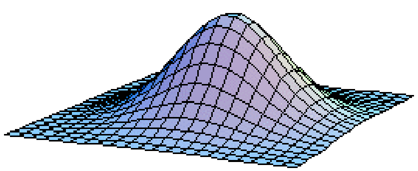
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

则称（X,Y）在G上服从均匀分布.

二维正态分布

若二维随机变量（*X*,*Y*）具有概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$



$$-\infty<x<\infty,\quad -\infty<y<\infty,$$

其中 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 均为常数，且 $\sigma_1>0,\sigma_2>0,$ $|\rho|<1.$ 则称（*X*,*Y*）服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$ 的二维正态分布.记作（*X*,*Y*）～ $N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$.

例3　试求二维正态随机变量的边缘概率密度.

解 $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y,$

由于 $$\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}$$

$$=\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]^2-\rho^2\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2},$$

于是

$$f_X(x)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{\frac{-1}{2(1-\rho_0)}\left[\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right]}\mathrm{d}y,$$

令 $$t=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}-\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right),$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},\quad -\infty<x<+\infty.$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},\quad -\infty<y<+\infty.$$

二维正态分布的两个边缘分布都是一维正态分布，并且都不依赖于参数 ρ.

联合分布 $\longrightarrow$ **边缘分布**

联合分布 $\begin{array}{c}\longrightarrow \\ \not\longleftarrow\end{array}$ 边缘分布

找出一个联合分布律，使其边缘分布律如下：

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$
0			$\frac{3}{9}$
1			$\frac{6}{9}$
$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

找出一个联合分布律，使其边缘分布律如下：

$Y \backslash X$	0	1	$p_{\bullet j}=P\{Y=y_j\}$
0	$\frac{1}{9}$ $\boxed{\frac{2}{9}}$	$\frac{2}{9}$ $\boxed{\frac{1}{9}}$	$\frac{3}{9}$
1	$\frac{4}{9}$ $\boxed{\frac{3}{9}}$	$\frac{2}{9}$ $\boxed{\frac{3}{9}}$	$\frac{6}{9}$
$p_{i\bullet}=P\{X=x_i\}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{4}{9}$	1

小结

第二节　边缘分布

一、边缘分布函数

二、离散型随机变量的边缘分布律

三、连续型随机变量的边缘概率密度

作业

- P86 9

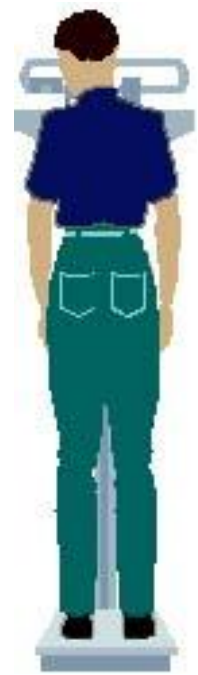
【引例】 在许多破案的影片中，通常会有这样的场景：侦查员在犯罪现场发现了犯罪嫌疑人的脚印，都会采样，量一量长度。这有什么作用呢？

【引例】 在许多破案的影片中，通常会有这样的场景：侦查员在犯罪现场发现了犯罪嫌疑人的脚印，都会采样，量一量长度。这有什么作用呢？

可以推断身高，体重，行走方式等．

考虑成年男性，从其中随机抽取一个，分别以X和Y表示其身高和足长. 则X和Y都是随机变量，它们都有一定的概率分布.

身高X



足长Y

第三节 条件分布

现在若限制 Y=25(厘米), 在这个条件下去求 X的分布，这就意味着要从所有的男性中将足长为25厘米的那些人都挑出来，然后在挑出的人中求其身高的分布.

容易想象，这个分布与不加条件时的分布会不一样.

在第一章中，我们介绍了条件概率的概念.

在事件B发生的条件下事件A发生的条件概率

$$P(A \mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}$$

推广到随机变量

设有两个随机变量X,Y，在给定Y取某个或某些值的条件下，求X的概率分布.

第三节　　条件分布

一、离散型随机变量的条件分布律

二、连续型随机变量的条件概率密度

例1 在一汽车工厂中,一辆汽车有两道工序是由机器人完成的.其一是紧固3只螺栓,其二是焊接2处焊点.以 X 表示螺栓紧固得不良的数目,以 Y 表示焊点焊接得不良的数目.据积累的资料知 (X,Y) 具有分布律:

Y \ X	0	1	2	3
0	0.840	0.030	0.020	0.010
1	0.060	0.010	0.008	0.002
2	0.010	0.005	0.004	0.001

(2) 求在 $Y=0$ 的条件下, X 的条件分布律.

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0.840	0.030	0.020	0.010
1	0.060	0.010	0.008	0.002
2	0.010	0.005	0.004	0.001

(1) 求在 $X=1$ 的条件下, Y 的条件分布律;

(2) 求在 $Y=0$ 的条件下, X 的条件分布律.

$Y \backslash X$	0	1	2	3
0	0.840	0.030	0.020	0.010
1	0.060	0.010	0.008	0.002
2	0.010	0.005	0.004	0.001

一、离散型随机变量的条件分布律

定义 设 (X,Y) 是二维离散型随机变量，对于固定的 j，若 $P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}，\quad i=1,2,\dots$$

为在 $Y=y_j$ 条件下随机变量 X 的条件分布律.

对于固定的 i, 若 $P\{X=x_i\}>0$, 则称

$$P\{Y=y_j \mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}, \ j=1,2,\cdots.$$

为在$X=x_i$条件下随机变量 Y 的条件分布律.

条件分布是一种概率分布，它具有概率分布的一切性质．正如条件概率是一种概率，具有概率的一切性质一样.

例如：

$$P\left\{X=x_i \mid Y=y_j\right\} \geq 0 \quad i=1,2, \ldots$$

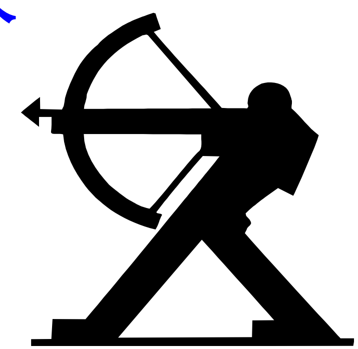
$$\sum_{i=1}^{\infty} P\left\{X=x_i \mid Y=y_j\right\}=1$$

例2 一射手进行射击,击中目标的概率为$p(0<p<1)$,射击到击中目标两次为止.设以X表示首次击中目标所进行的射击次数,以Y表示总共进行的的射击次数.试求X和Y的联合分布律及条件分布律.

解 由题意知X取m且Y取n时,有

$$P\{X=m,Y=n\}=p\cdot p\cdot\underbrace{(1-p)\cdot(1-p)\cdots(1-p)}_{(n-2)\text{个}}$$

即得X和Y的联合分布律为



$$P\{X=m,Y=n\}=p^2q^{n-2},$$

其中$q=1-p$, $n=2,3,\cdots;$ $m=1,2,\cdots,n-1.$

二维连续型随机变量的条件分布

二维连续型随机变量的条件分布

定义 设二维随机变量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$,(X,Y)关于Y的边缘概率密度为$f_Y(y)$.若对于固定的y, $f_Y(y)>0$,则称$\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$为在$Y=y$的条件下X的条件概率密度,记为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}.$$

称$\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\,\mathrm{d}x$为在$Y=y$的条件下, X 的条件分布函数, 记为

$$P\{X \le x | Y = y\} \text{或} F_{X|Y}(x|y),$$

例3 设 G 是平面上的有界区域,其面积为 A. 若二维随机变量 (X,Y) 具有概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

则称 (X,Y) 在 G 上服从均匀分布.

设 (X,Y) 在圆域 $x^2+y^2\le 1$ 上服从均匀分布,求条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

y已知

即 当 $-1<y<1$ 时,有

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & -\sqrt{1-y^2}\le x\le\sqrt{1-y^2}\\ 0, & x\text{ 取其它值}\end{cases}$$

Y取值已知的条件下
X 的条件概率密度

这里是x的取值范围

例4 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机地取值,当观察到 $X = x\ (0 < x < 1)$ 时,数 Y 在区间 $(x, 1)$ 上随机地取值.求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

例4 设数 X 在区间 $(0,1)$ 上随机地取值,当观察到 $X=x\ (0<x<1)$ 时,数 Y 在区间 $(x,1)$ 上随机地取值.求 Y 的概率密度 $f_Y(y)$.

解 由题意知 X 具有概率密度

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

对于任意给定的值 $x(0<x<1)$, 在$X=x$的条件下, Y 的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}, & 0<x<y<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因此 X 和 Y 的联合概率密度为

$$f(x,y) = f_{Y|X}(y|x) f_X(x)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{1}{1-x}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

故得 Y 的边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int_0^y \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-y), & 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

[回到引例] 一般认为，身高和足长（X,Y）可以当做一个二维正态变量来处理，即

$$(X,Y)\sim N\left(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho\right),$$

在 $Y=y$ 条件下，X服从一维正态分布.

由此求得 $E\left(X\middle|Y=y\right)$.

小结

第三节　条件分布

一、离散型随机变量的条件分布律

二、连续型随机变量的条件概率密度

作业P87

- 12；13（1）；14

第四节　相互独立的随机变量

第四节　相互独立的随机变量

定义

设$F(x,y)$及$F_X(x),F_Y(y)$分别是二维随机变量(X,Y)的分布函数及边缘分布函数.若对于所有x,y有

$$P\{X \le x, Y \le y\} = P\{X \le x\}P\{Y \le y\},$$

即

$$F(x,y) = F_X(x)F_Y(y),$$

则称随机变量 X 和 Y 是相互独立的.

可以证明如下结论：

（2）若 (X,Y)是离散型随机变量，则上述独立性定义的条件等价于：

对(X,Y)的所有可能取值(x_i, y_j),有

$$P(X=x_i,Y=y_j)=P(X=x_i)P(Y=y_j)$$

例　判断随机变量X和Y是否相互独立。

Y \ X	0	1
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

例 判断随机变量X和Y是否相互独立。

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{9}$

练习已知(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
1	0.1	0.1	0.3
2	0.1	α	β

若 X 与 Y 相互独立,求 α 与 β 的值.

$Y \backslash X$	1	2	3	$p_{\bullet j} = P\{Y = y_j\}$
1	0.1	0.1	0.3	0.5
2	0.1	α	β	$0.1+\alpha+\beta=0.5$
$p_{i\bullet} = P\{X = x_i\}$	0.2	$0.1+\alpha$	$0.3+\beta$	$0.6+\alpha+\beta=1$

解　因为 X 与 Y 相互独立, 所以有

$$p_{ij} = p_{i\bullet} \cdot p_{\bullet j}, \quad (i = 1,2;\ j = 1,2,3)$$

$$\Rightarrow 0.1 = 0.5(0.1 + \alpha) \qquad \Rightarrow \alpha = 0.1,$$

又　$\alpha + \beta = 0.4,$　得 $\beta = 0.3$

可以证明如下结论：

（1）若 (X,Y)是连续型随机变量，则上述独立性定义的条件等价于：

对任意的 x, y，有

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

在平面上几乎处处成立.

这里"在平面上几乎处处成立"的含义是：在平面上除去"面积为 0"的集合外，处处成立.

例　　§1例2中的随机变量X和Y,

$$f(x,y)=\begin{cases}2e^{-(2x+y)}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

判断X和Y是否相互独立.

例 设随机变量 X 和 Y 具有联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6, & x^2\le y\le x,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

判断X和Y是否相互独立.

设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，求证：

X与Y独立的充要条件为 $\rho=0$.

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}},$$

例5 一负责人到达办公室的时间均匀分布在8~12时,他的秘书到达办公室的时间均匀分布在7~9时,设他们两人到达的时间相互独立, 求他们到达办公室的时间相差不超过 5 分钟的概率.

解 设X和Y分别是负责人和他的秘书到达办公室的时间.

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}, & 8<x<12,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 7<y<9,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

因为 X,Y 相互独立，故 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{8}, & 8<x<12,7<y<9,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

按题意需要求概率 $P\{|X-Y|\leqslant 1/12\}$. 画出区域：$|x-y|\leqslant 1/12$，以及长方形 $[8<x<12;\ 7<y<9]$，它们的公共部分是四边形 $BCC'B'$，记为 G（如图 3-8）. 显然仅当 (X,Y) 取值于 G 内，他们两人到达的时间相差才不超过 1/12 h. 因此，所求的概率为

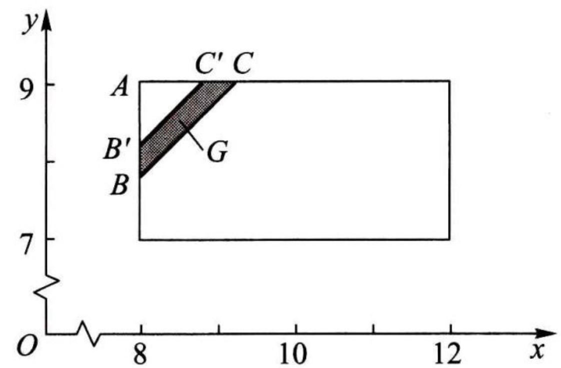


图 3-8

$$P\left\{|X-Y|\leqslant\frac{1}{12}\right\}=\iint\limits_G f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{8}\times(G\text{ 的面积}).$$

而 $$G\text{ 的面积}=\text{三角形 }ABC\text{ 的面积}-\text{三角形 }AB'C'\text{ 的面积}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{13}{12}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right)^2=\frac{1}{6}.$$

于是 $$P\left\{|X-Y|\leqslant\frac{1}{12}\right\}=\frac{1}{48}.$$

即负责人和他的秘书到达办公室的时间相差不超过 5 min 的概率为 1/48. □

类似地， 可以定义n个随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的相互独立性. 及随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 的相互独立性.

定理： 设 $(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立，则 $X_i, i = 1, 2, \cdots, m$ 和 $Y_j, j = 1, 2, \cdots, n$ 相互独立。又若h, g是连续函数，则 $h(X_1, X_2, \cdots, X_m)$ 和 $g(Y_1, Y_2, \cdots, Y_n)$ 相互独立.

结论：X 和 Y 相互独立, 则

$\boldsymbol{f(X)}$ 和 $\boldsymbol{g(Y)}$ 也相互独立.

作业

- **P88　　16**

第三章　多维随机变量及其分布

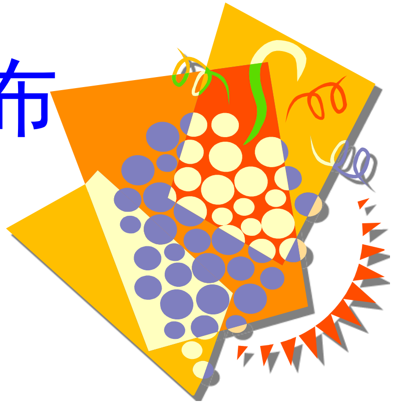
第一节　二维随机变量

第二节　边缘分布

第三节　条件分布

第四节　随机变量的独立性

第五节　两个随机变量的函数的分布



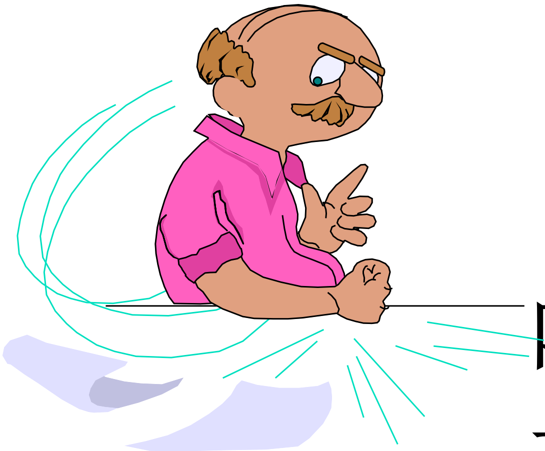
- 同时掷两个色子，

以X表示第一个色子出现的点数，

以Y表示第二个色子出现的点数，

关注点数之和$Z_1=X+Y$

关注点数之最大值$Z_2=\max(X, Y)$



在第二章中，我们讨论了一维随机变量函数的分布，现在我们进一步讨论:

当随机变量 X, Y 的联合分布已知时，如何求出它们的函数$Z = g(X, Y)$ 的分布?

一、离散型随机变量函数的分布（教材未涉及）

二、连续型随机变量函数的分布

第五节 两个随机变量的函数的分布

- $Z=X+Y$的分布
- $Z=Y\backslash X$及$Z=XY$的分布
- $M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

例1 设二维随机变量(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.1
1	0.3	0.1	0.2

试求$Z=X+Y$的分布律

设二维随机变量(X,Y)的分布律为

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\qquad i=1,2,\cdots\qquad j=1,2,\cdots$$

若$Z=X+Y$

$$P\{Z=z_k\}=\sum_i P\{X=x_i,Y=z_k-x_i\}$$

或者 $$P\{Z=z_k\}=\sum_j P\{X=z_k-y_j,Y=y_j\}$$

1. $Z=X+Y$ 的分布

设（X,Y）是二维连续型随机变量，具有概率密度为 $f(x, y)$, 求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y,y)\,\mathrm{d}y.$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,\mathrm{d}x.$$

当 X, Y 独立时,

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)\,\mathrm{d}y,$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x.$$

例1 设两个独立的随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

例1 设两个独立的随机变量 X 与 Y 都服从标准正态分布,求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

解 由于 $$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\quad -\infty<x<+\infty,$$

$$f_Y(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}},\quad -\infty<y<+\infty,$$

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\,\mathrm{d}x,$$

暂时固定

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{(z-x)^2}{2}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left(x-\frac{z}{2}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\overset{t=x-\frac{z}{2}}{=\!=\!=\!=}\ \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{z^2}{4}}.$$

一般，设X,Y相互独立且$X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$。则$Z=X+Y$仍然服从正态分布，且有$Z\sim N(\mu_1+\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$.

一般，设X,Y相互独立且$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.则$Z = X + Y$仍然服从正态分布，且有$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

两个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

一般，设X,Y相互独立且$X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2),Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.则$Z = X + Y$仍然服从正态分布，且有$Z \sim N(\mu_1 + \mu_2,\sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.

有限个相互独立的正态随机变量的线性组合仍然服从正态分布.

例2 若 R_1 和 R_2 独立, 具有共同的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 $R=R_1+R_2$ 的概率密度 .

解 由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

例2　若 R_1 和R_2 独立, 具有共同的概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{50}, & 0\le x\le 10\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求 $R=R_1+R_2$ 的概率密度 .

解　由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx$$

为确定积分限,先找出使被积函数不为 0 的区域

$$\begin{cases}0\le x\le 10\\ 0\le z-x\le 10\end{cases} \quad \text{也即} \quad \begin{cases}0\le x\le 10\\ z-10\le x\le z\end{cases}$$

暂时固定

解　由(5.4)式，R 的概率密度为

$$f_R(z)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)f(z-x)\mathrm{d}x.$$

易知仅当

$$\begin{cases}0<x<10,\\0<z-x<10,\end{cases}\text{即}\begin{cases}0<x<10,\\z-10<x<z\end{cases}$$

时上述积分的被积函数不等于零. 参考图 3—10，即得

$$f_R(z)=\begin{cases}\int_0^z f(x)f(z-x)\mathrm{d}x, & 0\leqslant z<10,\\ \int_{z-10}^{10}f(x)f(z-x)\mathrm{d}x, & 10\leqslant z\leqslant 20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

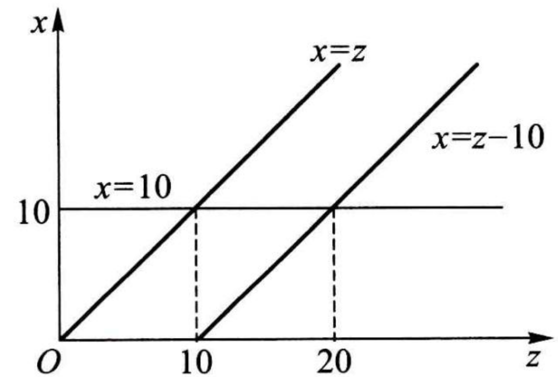


图 3—10

将 $f(x)$ 的表达式代入上式得

$$f_R(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{15\ 000}(600z-60z^2+z^3), & 0\leqslant z<10,\\ \dfrac{1}{15\ 000}(20-z)^3, & 10\leqslant z<20,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

□

二、Z=Y\X，Z=XY的分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，则$Z=Y\backslash X$的密度函数为

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\ f(x,xz)dx.$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}\ f(x,\frac{z}{x})dx.$$

当 *X*，*Y* 独立时,

$$f_{Y/X}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}|x|\ f_X(x)f_Y(xz)dx.$$

$$f_{XY}(z)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|x|}\ f_X(x)f_Y(\frac{z}{x})dx.$$

三、$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

例 设二维随机变量(X,Y)的分布律为

$Y \backslash X$	-1	0	1
0	0.1	0.2	0.1
1	0.3	0.1	0.2

三、$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$,

三、$M=\max(X,Y)$及$N=\min(X,Y)$的分布

设 X,Y 是两个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为$F_X(x)$和 $F_Y(y)$,

$$F_{\max}(z)=F_X(z)F_Y(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)].$$

设 $X_1,\ldots,X_n$ 是 n 个相互独立的随机变量,它们的分布函数分别为

$$F_{X_i}(z) \quad (i=1,\ldots,n)$$

用与二维时完全类似的方法，可得

$M=\max(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数为:

$$F_M(z)=F_{X_1}(z)F_{X_2}(z)\cdots F_{X_n}(z)$$

$N=\min(X_1,\ldots,X_n)$的分布函数是

$$F_N(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)]\cdots[1-F_{X_n}(z)]$$

特别地，当$X_1,\ldots,X_n$相互独立且具有相同分布函数$F(x)$时，有

$$F_M(z) = [F(z)]^n$$

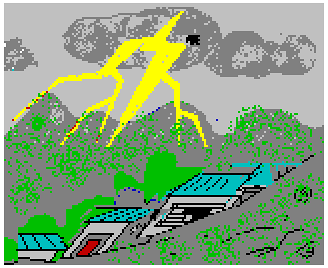
$$F_N(z) = 1 - [1 - F(z)]^n$$

需要指出的是，当$X_1,\ldots,X_n$相互独立且具有相同分布函数$F(x)$时, 常称

$$M=\max(X_1,\ldots,X_n)，N=\min(X_1,\ldots,X_n)$$

为极值 .

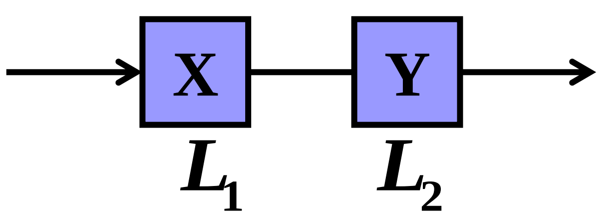
由于一些灾害性的自然现象，如地震、洪水等等都是极值，研究极值分布具有重要的意义和实用价值.

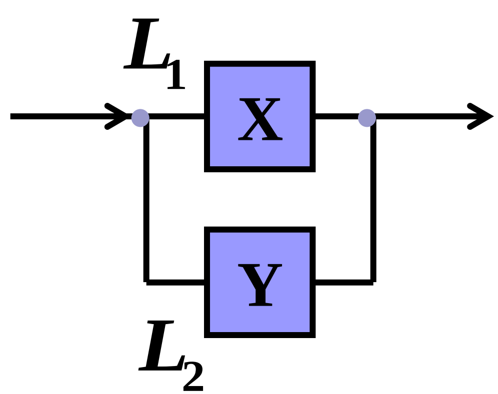



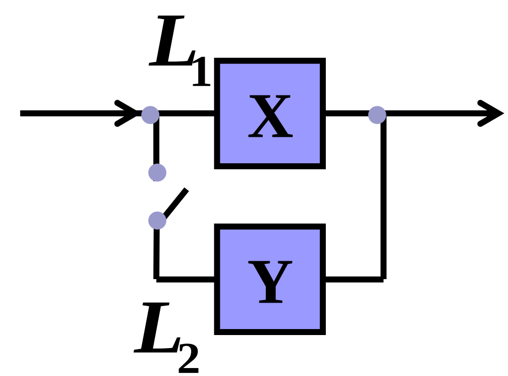

例5 设系统 L 由两个相互独立的子系统 L_1, L_2 连接而成,连接的方式分别为 (i) 串联, (ii) 并联, (iii) 备用 (当系统 L_1 损坏时, 系统 L_2 开始工作) , 如下图所示.设 L_1, L_2 的寿命分别为 X, Y, 已知它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0,\end{cases}\qquad f_Y(y)=\begin{cases}\beta e^{-\beta y}, & y>0,\\ 0, & y\le 0,\end{cases}$$

其中 $\alpha>0, \beta>0$ 且 $\alpha\ne\beta$. 试分别就以上三种连接方式写出 L 的寿命 Z 的概率密度.







作业

- **P87　　　22；　25**
- **P83　　　例5**

第三章　多维随机变量及其分布

第一节　二维随机变量

第二节　边缘分布

第三节　条件分布

第四节　随机变量的独立性

第五节　两个随机变量的函数的分布