深圳大学期末考试试卷

开/闭卷 闭卷　　　　A/B 卷 B

课程编号 1300530001 课序号 01-10 课程名称 概率论与数理统计 学分 3

命题人(签字)__________ 审题人(签字)__________ ____年____月____日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题总分	附加题
得分												
评卷人												

注意：在部分题目的计算过程中，可能需要使用标准正态分布表如下

x	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.500 0	0.504 0	0.508 0	0.512 0	0.516 0	0.519 9	0.523 9	0.527 9	0.531 9	0.535 9
0.1	0.539 8	0.543 8	0.547 8	0.551 7	0.555 7	0.559 6	0.563 6	0.567 5	0.571 4	0.575 3
0.2	0.579 3	0.583 2	0.587 1	0.591 0	0.594 8	0.598 7	0.602 6	0.606 4	0.610 3	0.614 1
0.3	0.617 9	0.621 7	0.625 5	0.629 3	0.633 1	0.636 8	0.640 4	0.644 3	0.648 0	0.651 7
0.4	0.655 4	0.659 1	0.662 8	0.666 4	0.670 0	0.673 6	0.677 2	0.680 8	0.684 4	0.687 9
0.5	0.691 5	0.695 0	0.698 5	0.701 9	0.705 4	0.708 8	0.712 3	0.715 7	0.719 0	0.722 4
0.6	0.725 7	0.729 1	0.732 4	0.735 7	0.738 9	0.742 2	0.745 4	0.748 6	0.751 7	0.754 9
0.7	0.758 0	0.761 1	0.764 2	0.767 3	0.770 3	0.773 4	0.776 4	0.779 4	0.782 3	0.785 2
0.8	0.788 1	0.791 0	0.793 9	0.796 7	0.799 5	0.802 3	0.805 1	0.807 8	0.810 6	0.813 3
0.9	0.815 9	0.818 6	0.821 2	0.823 8	0.826 4	0.828 9	0.835 5	0.834 0	0.836 5	0.838 9
1	0.841 3	0.843 8	0.846 1	0.848 5	0.850 8	0.853 1	0.855 4	0.857 7	0.859 9	0.862 1
1.1	0.864 3	0.866 5	0.868 6	0.870 8	0.872 9	0.874 9	0.877 0	0.879 0	0.881 0	0.883 0
1.2	0.884 9	0.886 9	0.888 8	0.890 7	0.892 5	0.894 4	0.896 2	0.898 0	0.899 7	0.901 5
1.3	0.903 2	0.904 9	0.906 6	0.908 2	0.909 9	0.911 5	0.913 1	0.914 7	0.916 2	0.917 7
1.4	0.919 2	0.920 7	0.922 2	0.923 6	0.925 1	0.926 5	0.927 9	0.929 2	0.930 6	0.931 9
1.5	0.933 2	0.934 5	0.935 7	0.937 0	0.938 2	0.939 4	0.940 6	0.941 8	0.943 0	0.944 1
1.6	0.945 2	0.946 3	0.947 4	0.948 4	0.949 5	0.950 5	0.951 5	0.952 5	0.953 5	0.953 5
1.7	0.955 4	0.956 4	0.957 3	0.958 2	0.959 1	0.959 9	0.960 8	0.961 6	0.962 5	0.963 3
1.8	0.964 1	0.964 8	0.965 6	0.966 4	0.967 2	0.967 8	0.968 6	0.969 3	0.970 0	0.970 6
1.9	0.971 3	0.971 9	0.972 6	0.973 2	0.973 8	0.974 4	0.975 0	0.975 6	0.976 2	0.976 7
2	0.977 2	0.977 8	0.978 3	0.978 8	0.979 3	0.979 8	0.980 3	0.980 8	0.981 2	0.981 7
2.1	0.982 1	0.982 6	0.983 0	0.983 4	0.983 8	0.984 2	0.984 6	0.985 0	0.985 4	0.985 7
2.2	0.986 1	0.986 4	0.986 8	0.987 1	0.987 4	0.987 8	0.988 1	0.988 4	0.988 7	0.989 0
2.3	0.989 3	0.989 6	0.989 8	0.990 1	0.990 4	0.990 6	0.990 9	0.991 1	0.991 3	0.991 6
2.4	0.991 8	0.992 0	0.992 2	0.992 5	0.992 7	0.992 9	0.993 1	0.993 2	0.993 4	0.993 6
2.5	0.993 8	0.994 0	0.994 1	0.994 3	0.994 5	0.994 6	0.994 8	0.994 9	0.995 1	0.995 2
2.6	0.995 3	0.995 5	0.995 6	0.995 7	0.995 9	0.996 0	0.996 1	0.996 2	0.996 3	0.996 4
2.7	0.996 5	0.996 6	0.996 7	0.996 8	0.996 9	0.997 0	0.997 1	0.997 2	0.997 3	0.997 4
2.8	0.997 4	0.997 5	0.997 6	0.997 7	0.997 7	0.997 8	0.997 9	0.997 9	0.998 0	0.998 1
2.9	0.998 1	0.998 2	0.998 2	0.998 3	0.998 4	0.998 4	0.998 5	0.998 5	0.998 6	0.998 6
x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
3	0.998 7	0.999 0	0.999 3	0.999 5	0.999 7	0.999 8	0.999 8	0.999 9	0.999 9	1.000 0

一．选择题（每题 4 分，共 24 分）

学院______ 专业______ 姓名______ 学号______ 座号______

（密封线内不答题）

密　封　线

1、设随机事件 A 与 B 互不相容，且$P(A) > 0, P(B) > 0$，则（　　B　　）。

A. $\mathrm{P(AB) = P(A)P(B)}$　　B. $\mathrm{P(\overline{AB}) = 1}$

C. $\mathrm{P(A) = 1 - P(B)}$　　D. $\mathrm{P(A \cup B) = 1}$

2、假设从数字 1，2，3，4，5 中任取 3 个，组成没有重复数字的三位数，则组成的这个三位数是奇数的概率为（　　C　　）。

A. 0.2　　B. 0.4　　C. 0.6　　D. 0.8

3、设$X \sim N(0,1)$，又常数 c 满足$P\{X \geq c\} = P\{X < C\}$，则 c 等于（　　A.　　）。

A．0　　B. 1　　C. $\frac{1}{2}$　　D. -1

4、设随机变量 X 与 Y 相互独立，其概率分布分别为：

X	0	1
p	0.3	0.7

Y	0	1
p	0.3	0.7

则有（　　D.　　）。

A. $P(X = Y) = 0$　　B. $P(X = Y) = 1$

C. $P(X = Y) = 0.5$　　D. $P(X = Y) = 0.58$

5、已知$E(X) = -2, D(X) = 3$,则$E[2(X^2 - 3)] =$ (　　B.　　)。

A．6　　B. 8　　C. 30　　D. 64

6、设随机变量$X \sim U[0,6]$，$Y \sim B(12, \frac{1}{4})$，且$X, Y$相互独立，根据切比雪夫不等式

$P(X - 3 < Y < X + 3)$（　　C.　　）。

A. $\leq \frac{5}{12}$　　B. ≤ 0.25　　C. $\geq \frac{5}{12}$　　D. ≥ 0.75

二、甲、乙袋中各有 20 个球，甲袋中有 3 只白球、7 只红球、10 只黑球, 乙袋中有 10

只白球、6 只红球、4 只黑球，现从两袋中各取一球，求两球颜色相同的概率。

（10 分）

答：

$$P\{两球颜色相同\}=P\{两球均为白色\}+P\{两球均为红色\}+P\{两球均为黑色\}$$
$$=\frac{3\times 10}{20\times 20}+\frac{7\times 6}{20\times 20}+\frac{10\times 4}{20\times 20}=\frac{30+42+40}{400}=\frac{112}{400}=0.28$$

三、假如一个人口袋里有 10 枚硬币，其中 9 个是普通的正反面的硬币，另一个硬币是一个特殊的双正面的硬币。请问：

（1）如果随机从口袋里拿出一个硬币，该硬币恰好是双正面硬币的概率？

（2）如果抛一枚硬币，结果是正面，则该硬币是双正面硬币的概率是？

（12 分）

答：（1）假设事件 A 是双正面的硬币，则 P(A) = 1/10.

（2）假设事件 B 是抛一个硬币其结果是正面，则所求为 P(A| B)。根据贝叶斯公式：

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

由题 P(B|A)=1，P(A)=1/10,

$$P(B)=P(A\cap B)+P(\bar{A}\cap B)=P(B|A)P(A)+P(B|\bar{A})P(\bar{A})$$
$$=1\times 1/10+(1/2)\times(9/10)=11/20，因此：$$

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}=\frac{1\times 1/10}{11/20}=\frac{2}{11}$$

四、某电子元器件的寿命 X 是一个随机变量，其概率密度为：$f(x)=\begin{cases}\frac{C}{x^2}, & x\geq 150\\ 0, & x<150\end{cases}$。

求：

（1）常数 C；

（2）若将 3 个该元器件串联组成一条电子线路，求该线路在使用 200 小时后仍然能正常工作的概率。（12 分）

答：（1）由$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,d(x) = 1$得：$\int_{150}^{+\infty} \frac{C}{x^2} d(x) = -\frac{C}{x}|_{150}^{+\infty} = \frac{C}{150} = 1$，因此 C=150。

（2）串联电路正常工作的充要条件是每个元件都能正常工作。设 A 表示线路正常工作，则$\mathrm{P(A)} = [\mathrm{P}\{\mathrm{X} > 200\}]^3$。

$$\mathrm{P}\{\mathrm{X} > 200\} = \int_{200}^{+\infty} \frac{150}{x^2} d(x) = \frac{150}{200} = \frac{3}{4}$$

则$\mathrm{P(A)} = [\mathrm{P}\{\mathrm{X} > 200\}]^3 = (\frac{3}{4})^3 = \frac{27}{64}$.

五、已知离散型随机变量(X, Y)的联合概率分布为：

Y \ X	−1	0	1
1	1/6	0	1/3
2	0	1/2	0

求：（1）$\mathrm{E(X)}$，$\mathrm{E(Y)}$；（2）$\mathrm{D(X)}$，$\mathrm{D(Y)}$；（3）$\mathrm{cov(X, Y)}$；（4）$\mathrm{D(X + Y)}$。（12 分）

答：分别求出 X，Y 的边缘分布：

Y \ X	−1	0	1	$\mathrm{P}\{\mathrm{Y} = \mathrm{y_i}\} = p_{gj}$
1	1/6	0	1/3	1/2
2	0	1/2	0	1/2
$\mathrm{P}\{\mathrm{X} = x_i\} = p_{ig}$	1/6	1/2	1/3	1

（1）$E(X) = \sum_i x_i p_{ig} = (-1) \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ ； $E(Y) = \sum_j y_j p_{gj} = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

（2）$E(X^2) = \sum_i {x_i}^2 p_{ig} = (-1)^2 \times \frac{1}{6} + 1^2 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ ；

$$E(Y^2) = \sum_j {y_j}^2 p_{gj} = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

---> $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{17}{36}$ ； $D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{5}{2} - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

（3）$E(XY)=\sum_i\sum_j x_iy_jp_{ij}=(-1)\times1\times\frac{1}{6}+(-1)\times2\times0+0\times1\times0+0\times2\times\frac{1}{2}+1\times1\times\frac{1}{3}+1\times2\times0=\frac{1}{6}$ $\rightarrow cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}\times\frac{3}{2}=-\frac{1}{12}$

（4）$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2cov(X,Y)=\frac{17}{36}+\frac{1}{4}+2\left(-\frac{1}{12}\right)=\frac{5}{18}$

六、某超市每天接待 1000 名顾客，设每位顾客的消费额(元)服从[100,400]上的均匀分布，且顾客的消费额是相互独立的。求：

（1）该超市的销售额均值（数学期望）；

（2）该超市的销售额在销售额均值上下浮动不超过 3000 元的概率。（15 分）

答：设顾客i的消费额为V_i元，则商场的一天的销售额为$V=\sum_{i=1}^{1000}V_i$。由于V_i独立同分布于均匀分布$U[100,400]$，则：

$E(V_i)=\frac{100+400}{2}=250$，$D(V_i)=\frac{(400-100)^2}{12}=7500$， 该超市的平均销售额为 $E(V)=E(\sum_{i=1}^{1000}V_i)=\sum_{i=1}^{1000}E(V_i)=1000\times250=250000$。

（1）由中心极限定理，随机变量$Z=\frac{\sum_{i=1}^{1000}V_i-1000\times250}{\sqrt{1000}\sqrt{7500}}=\frac{V-250000}{\sqrt{1000}\sqrt{7500}}$近似服从正态分布$N(0,1)$，于是，$P\{|V-250000|\le3000\}=P\left\{\frac{|V-250000|}{\sqrt{1000}\sqrt{7500}}\le\frac{3000}{\sqrt{1000}\sqrt{7500}}\right\}=2\emptyset\left(\frac{3000}{\sqrt{1000}\sqrt{7500}}\right)-1=2\emptyset(1.10)-1=2\times0.8643-1=0.7286$

因此，该超市的销售额在销售额均值上下浮动不超过 3000 元的概率为 0.7282。

七、设总体 X 的概率密度函数为：$f(x)=\begin{cases}\theta^2xe^{-\theta x}, & x\ge0\\0, & x<0\end{cases}$，现从 X 中取出 10 个个体，得数据如下：105，110，108，120，130，125，134，106，115，117。

求：θ的最大似然估计量$\hat{\theta}$和最大似然估计值。（15 分）

答：设$X_1,X_2,X_3,\dots\dots X_n$是从总体中抽出的一组观察值，则似然函数为：

$$L(X_1,X_2,X_3,\dots\dots X_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta^2xe^{-\theta x}\qquad(x_i\ge0,i=1,2,3,\dots,n)$$

$$=\theta^{2n}(\prod_{i=1}^{n}x_i)\,e^{-\theta\sum_{i=1}^{n}x_i}$$

$$\ln(L) = 2nln\theta + \sum_{i=1}^{n} ln(x_i) - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{dln(L)}{d\theta} = \frac{2n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0$$

则：$\hat{\theta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{2}{\bar{X}}$ 。

由题，当$n = 10$时，由已知数据知：

$$\bar{X} = \frac{105 + 110 + 108 + 120 + 130 + 125 + 134 + 106 + 115 + 117}{10} = 117$$

$$\theta = \frac{2}{117} = 0.0171$$

附加题（每小题 15 分，共 30 分）

1、设随机变量ξ和η独立，并服从相同的分布$N(a, \sigma^2)$。

证明：$E[\max(\xi,\eta)]=a+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}$。

证明：令$X=\frac{\xi-a}{\sigma},Y=\frac{\eta-a}{\sigma}$

则$\max(\xi,\eta)=a+\sigma\max(X,Y)$

$$E[\max(X,Y)=\iint\limits_{R^2}\max(x,y)\,\varphi(x,y)dxdy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{y}^{+\infty}x\varphi(x,y)dxdy+\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{x}^{+\infty}y\varphi(x,y)dxdy$$

$$=2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{y}^{+\infty}x\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}dxdy=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-y^2}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

因此，

$$E[\max(\xi,\eta)]=E[a+\sigma\max(X,Y)]=a+\sigma E[\max(X,Y)]=a+\frac{\sigma}{\sqrt{\pi}}.$$

2、设随机变量X和Y相互独立，并且同服从$(-b,b)$上的均匀分布，求：

（1）方程$t^2+tX+y=0$有实根的概率；

（2）当$b\to\infty$时，方程$t^2+tX+y=0$有实根的概率的极限。

答：

（1）要使方程$t^2+tX+y=0$有实根，必须满足：$X^2-4Y\geq 0$

而$$P(X^2-4Y\geq 0)=\begin{cases}\int_{-b}^{b}dx\int_{-b}^{\frac{x^2}{4}}\frac{dy}{4b^2}, & \text{当 } 0<b\leq 4\\ \int_{-b}^{-2\sqrt{b}}2dx\int_{-b}^{b}\frac{dy}{4b^2}+\int_{-2\sqrt{b}}^{2\sqrt{b}}dx\int_{-b}^{\frac{x^2}{4}}\frac{dy}{4b^2}, & \text{当} b>4\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{4b^2}\int_{-b}^{b}(\frac{x^2}{4}+b)dx\,, & \text{当 } 0<b\leq 4\\ 1-\frac{2}{\sqrt{b}}+\int_{-2\sqrt{b}}^{2\sqrt{b}}\frac{1}{4b^2}(\frac{x^2}{4}+b)dx\,, & \text{当} b>4\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}+\frac{b}{24}, & \text{当 } 0<b\leq 4\\ 1-\frac{2}{3\sqrt{b}}, & \text{当} b>4\end{cases}$$

（2）$\lim\limits_{b\to\infty}P(X^2-4Y\geq 0)=\lim\limits_{b\to\infty}P(X^2\geq 4Y)=\lim\limits_{b\to\infty}\left(1-\frac{2}{3\sqrt{b}}\right)=1$