- 试验不是等可能概型，应该如何计算概率呢？

  E_6在一批灯泡中任取一只，测试其寿命
- 只利用了初等数学的知识 ……

第二章　一维随机变量及其分布

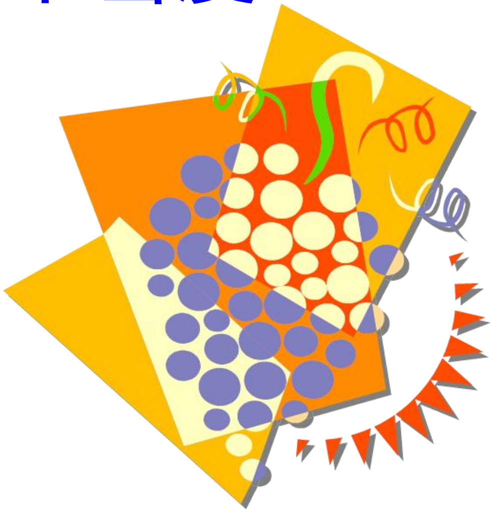
第一节　　随机变量

第二节　　离散型随机变量及其分布律

第三节　　随机变量的分布函数

第四节　　连续型随机变量及其概率密度

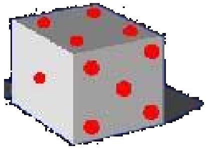
第五节　　随机变量的函数的分布



一、随机变量概念的产生

1、有些试验结果本身与数值有关（本身就是一个数）.

例如，掷一颗骰子出现的点数；



每天进入一号楼的人数；

2、在有些试验中，试验结果看来与数值无关，但我们可以引进一个变量来表示它的各种结果.也就是说，把试验结果数值化.

例1 将一枚硬币抛掷3次. 观察正反面出现情况。

样本点	***HHH***	***HHT***	***HTH***	***THH***	***HTT***	***THT***	***TTH***	***TTT***

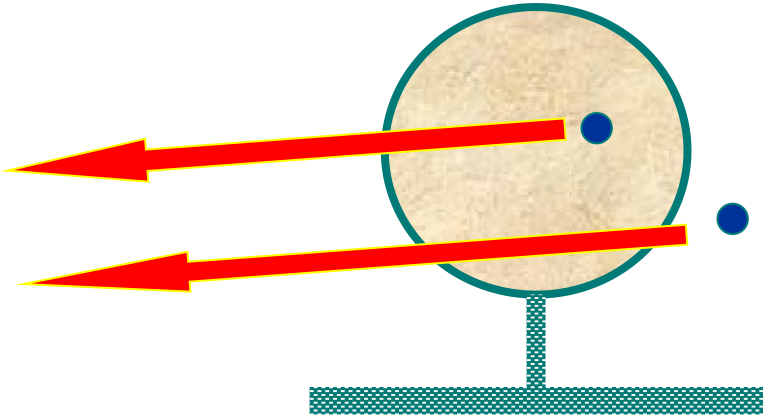
例1 将一枚硬币抛掷3次. 观察正反面出现情况。

以X记三次抛掷中出现H的总数, 则对样本空间$S=\{e\}$中的每一个样本点e, X都有一个数与之对应,

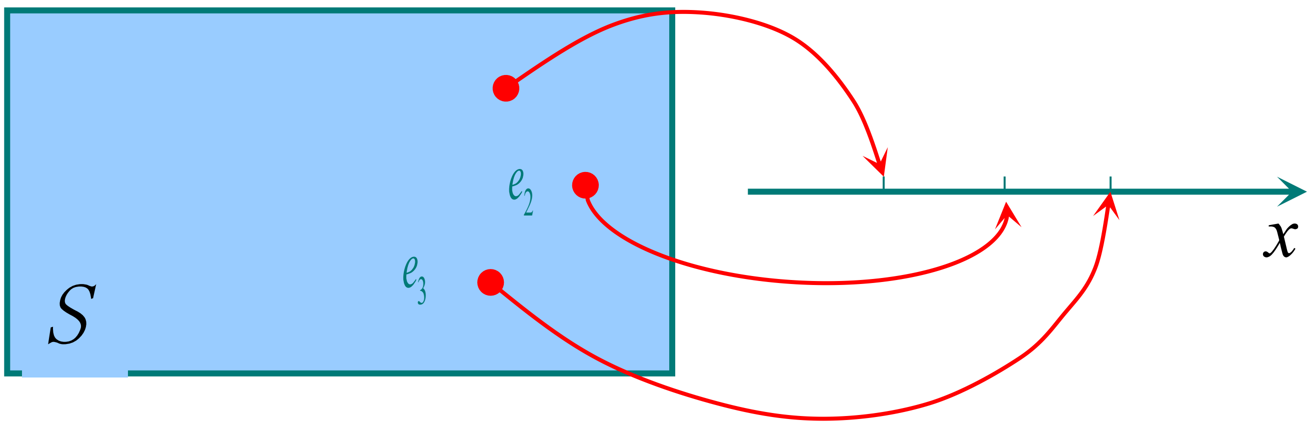
样本点	*HHH*	*HHT*	*HTH*	*THH*	*HTT*	*THT*	*TTH*	*TTT*
X的值	3	2	2	2	1	1	1	0

例2 一射手对目标进行射击，设X表示该射手在一次射击的击中次数，它是一个随机变量，可以表示为

$$X=\begin{cases}1, & \text{击中;}\\ 0, & \text{未中.}\end{cases}$$



定义 设$X=X(e)$是定义在样本空间S上的实值单值函数，称$X=X(e)$为随机变量.



随机变量通常用大写字母 X,Y,Z,W,N 等表示

而表示随机变量所取的值时，一般采用小写字母 x, y, z, w, n 等.

二、引入随机变量的意义

如：100件产品中的合格品数 用X表示，它是一个随机变量.

事件{合格品数少于95} $\Leftrightarrow$ $\{X<95\}$

{没有不合格品} $\Leftrightarrow$ $\{X=0\}$

二、引入随机变量的意义

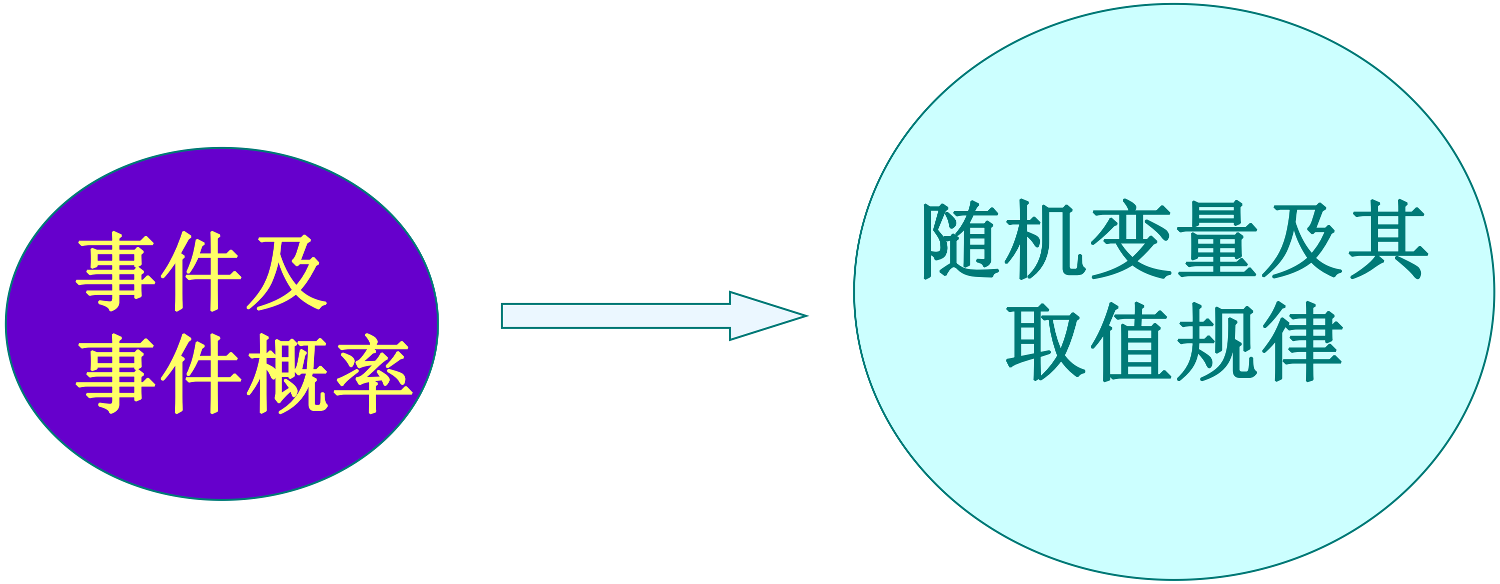
有了随机变量,随机试验中的各种事件，就可以通过随机变量的关系式表达出来.

如：100件产品中的合格品数 用X表示，它是一个随机变量.

事件{合格品数少于95} $\Leftrightarrow$ $\{X<95\}$

{没有不合格品} $\Leftrightarrow$ $\{X=100\}$

随机变量概念的产生是概率论发展史上的重大事件．引入随机变量后，对随机现象统计规律的研究，就由对事件及事件概率的研究扩大为对随机变量及其取值规律的研究．



§2 离散型随机变量及其分布律

有些随机变量，它全部可能取到的值是有限个或可列无限多个，这种随机变量称为离散型随机变量.

记X为掷骰子出现的点数;

要掌握一个离散型随机变量X的统计规律，必须且只需知道X的所有可能取的值及取每一个可能值的概率.

设X所有可能取的值为$x_k(k=1,2,\ldots)$, 而

$$P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,2,\ldots. \qquad (2.1)$$

称(2.1)式为离散型随机变量X的分布律.

设X所有可能取的值为$x_k(k=1,2,\ldots)$，而

$$P\{X=x_k\}=p_k,\ k=1,2,\ldots. \qquad (2.1)$$

称(2.1)式为离散型随机变量X的分布律.
分布律也可用表格的形式来表示:

$$\begin{array}{c|ccccc} X & x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ \hline p_k & p_1 & p_2 & \cdots & p_n & \cdots \end{array} \qquad (2.4)$$

- 掷一颗均匀的骰子出现的点数X为一个离散型随机变量，其分布律为

- $P(X=k)=1/6 \quad k=1,2,\ldots,6$

X	1	2	3	4	5	6
p_k	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

- 课堂练习　*P*55第2题（1）

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	$\cdots$

$$1,\ p_k \geq 0, k = 1,2,\cdots; \quad (2.2)$$

$$2,\ \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1. \qquad (2.3)$$

三种常用的离散型随机变量

(一) (0-1)分布 设随机变量X只可能取0与1 两个值, 它的分布律是

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1 \qquad (0<p<1),$$

则称X服从(0-1)分布或两点分布.

X	0	1
p_k	$1-p$	p

三种常用的离散型随机变量

(一) (0-1)分布 设随机变量X只可能取0与1 两个值, 它的分布律是

$$P(X=k)=p^k(1-p)^{1-k},\ k=0,1 \qquad (0<p<1),$$

则称X服从(0-1)分布或两点分布.

X	0	1
p_k	$1-p$	p

S={e_1,e_2}

$$X = X(e) = \begin{cases} 0, & 当 e = e_1 \\ 1, & 当 e = e_2 \end{cases}$$

从而得到定义在*S*上服从（0-1）分布的随机变量.

S={e$_1$,e$_2$}

$$X = X(e) = \begin{cases} 0, & \text{当} e = e_1 \\ 1, & \text{当} e = e_2 \end{cases}$$

从而得到定义在*S*上服从（**0-1**）分布的随机变量.

对性别进行登记,检查产品的质量是否合格,某车间的电力消耗是否超过负荷以及前面多次讨论过的“抛硬币”试验，都可以用**(0-1)**分布的随机变量来描述.

(二) 伯努利试验，二项分布

设试验 E 只有两个可能结果：A 及 $\overline{A}$,则称 E 为伯努利试验.

设 $P(A) = p\ (0 < p < 1)$,此时$P(\overline{A}) = 1 - p$.

将伯努利试验E独立地重复地进行n次，则称这一串重复的独立试验为n重伯努利试验．

“重复”是指这 n 次试验中$P(A)=p$ 保持不变.

“独立”是指各 次试验的结果互不影响．

将伯努利试验E独立地重复地进行n次 ，则称这一串重复的独立试验为n重伯努利试验 .

“重复”是指这 n 次试验中$P(A)=p$ 保持不变.

“独立”是指各 次试验的结果互不影响 .

用X表示n重伯努利试验中事件A发生的次数，则

当 $X = k\ (0 \le k \le n)$ 时,

即 A 在 n 次试验中发生了 k 次.

$$\underbrace{A_1\ A_2 \cdots A_k}_{k\text{次}} \quad \underbrace{\overline{A_{k+1}}\ \overline{A_{k+2}} \cdots \overline{A_n}}_{n-k\text{ 次}}$$

$$\underbrace{A_1\ A_2 \cdots A_{k-1}}_{k-1\text{ 次}} \quad \overline{A}_k \quad A_{k+1} \quad \underbrace{\overline{A_{k+2}}\ \overline{A_{k+3}} \cdots \overline{A_n}}_{n-k-1\text{ 次}}$$

……

得 A 在 n 次试验中发生 k 次的方式共有 $\binom{n}{k}$ 种,

且两两互不相容.

记$q=1-p$, 即有

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\ldots,n. \quad (2.6)$$

称随机变量X服从参数为n,p的二项分布,记为$X\sim b(n,p)$.

记$q=1-p$, 即有

$$P\{X=k\}=\binom{n}{k}p^k q^{n-k}, k=0,1,2,\ldots,n. \quad (2.6)$$

称随机变量X服从参数为n,p的二项分布, 记为$X\sim b(n,p)$.

二项分布 $\xrightarrow{n=1}$ 两点分布

例5 计算机硬件公司制造某种特殊型号的微型芯片,次品率达0.1%,各芯片成为次品相互独立.求在1000只产品中至少有2只次品的概率.

以X记产品中的次品数,

$$X \sim b(1000, 0.001).$$

泊松定理 设$\lambda>0$是一个常数, n是任意正整数, 设$np_n=\lambda$, 则对于任一固定的非负整数k, 有

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

泊松定理 设$\lambda>0$是一个常数, n是任意正整数, 设$np_n=\lambda$, 则对于任一固定的非负整数k, 有

$$\lim_{n\to\infty}\binom{n}{k}p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

表明当n很大, p很小($np=\lambda$)时有以下近似式

$$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\quad(\text{其中}\lambda=np)$$

(三)泊松分布

设随机变量X所有可能取的值为0,1,2,...,而取各个值的概率为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\cdots$$

其中$\lambda>0$是常数. 则称X服从参数为λ的泊松分布, 记为$X\sim\pi(\lambda)$.

例1. 将函数 $f(x)=e^x$ 展开成 x 的幂级数.

解: $\because f^{(n)}(x)=e^x, f^{(n)}(0)=1\ (n=0,1,\cdots)$, 故得级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

其收敛半径为 $\quad R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n!}\Big/\frac{1}{(n+1)!}=+\infty$

对任何有限数 x, 其余项满足

$$\left|R_n(x)\right|=\left|\frac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}\right|<e^{|x|}\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

(ξ 在0与 x 之间)

故 $e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,\quad x\in(-\infty,+\infty)$

泊松分布的应用

二十世纪初卢瑟福和盖克两位科学家在观察与分析放射性物质放出的粒子个数的情况时，他们做了2608次观察（每次时间为7.5秒）发现放射性物质在规定的一段时间内，其放射的粒子数X服从泊松分布.

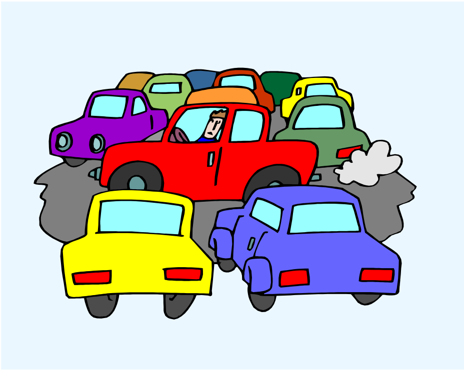
地震

火山爆发

特大洪水

商场接待的顾客数

交通事故次数



例5 计算机硬件公司制造某种特殊型号的微型芯片,次品率达1%, 各芯片成为次品相互独立. 求在1000只产品中至少有2只次品的概率.

以X记产品中的次品数,

$X \sim b(1000, 0.001)$.

小结

第二节 离散型随机变量及其分布律

一、离散型随机变量的定义
二、离散型随机变量表示方法
三、几种常见分布

作业

- 56页　　9(1)(2);　16

- 分布律用来描述离散型随机变量的统计规律，那么对于非离散型随机变量呢？

- 分布律用来描述离散型随机变量的统计规律，那么对于非离散型随机变量呢？
- 关注随机变量落在某个区间的概率，如何更方便地求出？

§3 随机变量的分布函数

定义 设X是一个随机变量, x是任意实数. 函数$F(x)=P\{X\leq x\}$,称为X的分布函数.

分布函数$F(x)$具有以下的基本性质:

1. $F(x)$是一个不减函数.

3. $F(x+0)=F(x)$, .

分布函数$F(x)$具有以下的基本性质:

1. $F(x)$是一个不减函数.

2. $0 \le F(x) \le 1$, 且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} F(x)=0,$$

$$F(\infty)=\lim_{x\to\infty} F(x)=1.$$

分布函数$F(x)$具有以下的基本性质:

1. $F(x)$是一个不减函数.

2. $0 \leq F(x) \leq 1$, 且

$$F(-\infty)=\lim_{x \to -\infty} F(x)=0,$$

$$F(\infty)=\lim_{x \to \infty} F(x)=1.$$

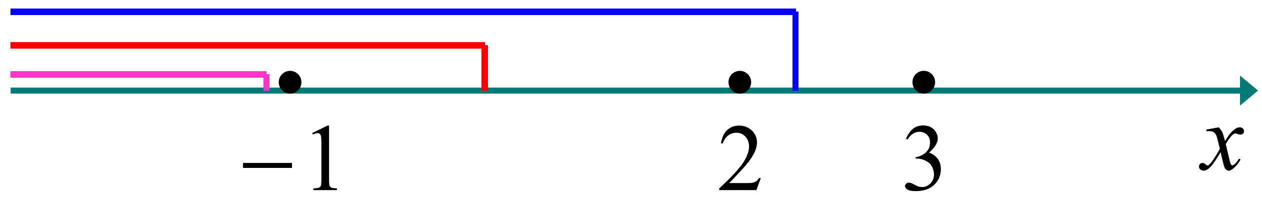
3. $F(x+0)=F(x)$, 即$F(x)$是右连续的.

例1 设随机变量X的分布律为

X	-1	2	3
p_k	1/4	1/2	1/4

求X的分布函数。

结果



当 $x < -1$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = 0;$$

当 $-1 \le x < 2$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1\} = \sum_{x_i \le x} p_i = \frac{1}{4};$$

当 $2 \le x < 3$时,

$$F(x) = P\{X \le x\} = P\{X = -1\} + P\{X = 2\}$$

$$= \sum_{x_i \le x} p_i = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

当 $x \geq 3$ 时,

$$F(x) = P\{X \leq x\}$$

$$= P\{X = -1\} + P\{X = 2\} + P\{X = 3\}$$

$$= \sum_{x_i \leq x} p_i$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 1/4, & -1\le x<2,\\ 3/4, & 2\le x<3\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$$

一般, 设离散型随机变量X的分布律为

$P\{X=x_k\}=p_k$, $k=1,2,\ldots$.

则X的分布函数为

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_k\le x}P\{X=x_k\},$$

即 $$F(x)=\sum_{x_k\le x}p_k, \qquad (3.2)$$

一般，设离散型随机变量X的分布律为

$P\{X=x_k\}=p_k$，$k=1,2,\ldots.$

则X的分布函数为

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_k\le x}P\{X=x_k\},$$

即 $$F(x)=\sum_{x_k\le x}p_k, \qquad (3.2)$$

分布函数$F(x)$在$x=x_k(k=1,2,\ldots)$处有跳跃，其跳跃值为$p_k=P\{X=x_k\}$.

小结

第三节　随机变量的分布函数

一、分布函数的定义

二、分布函数的性质

三、离散型随机变量的分布函数

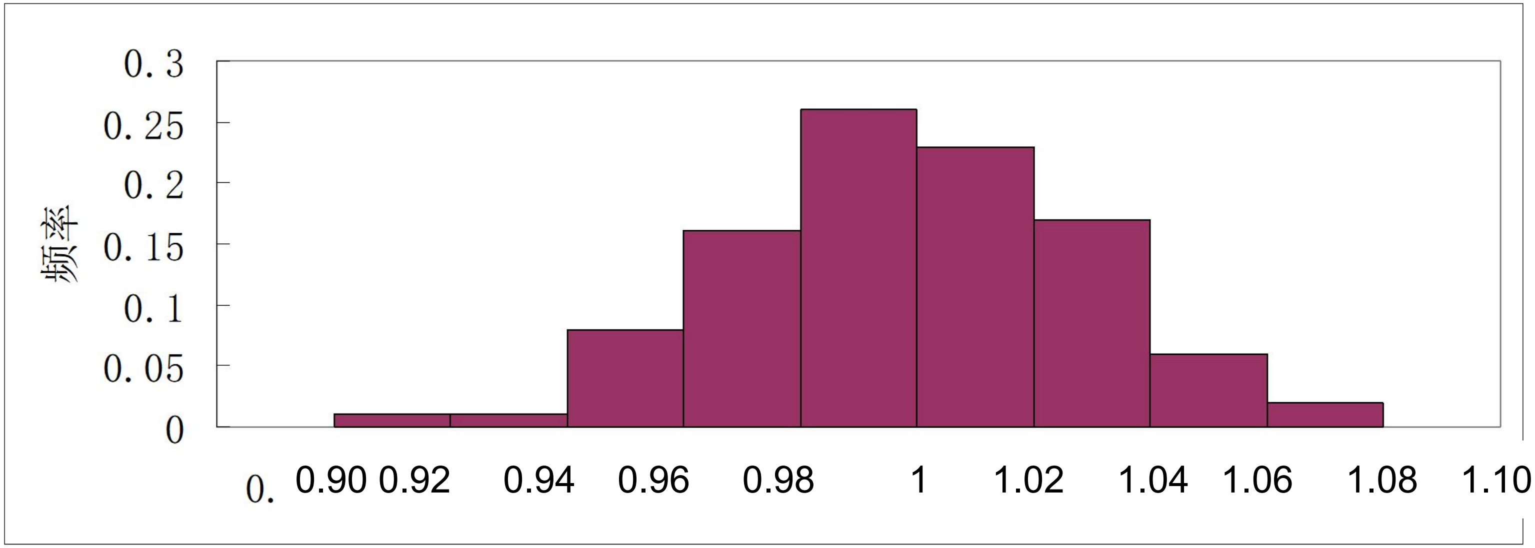
作业：

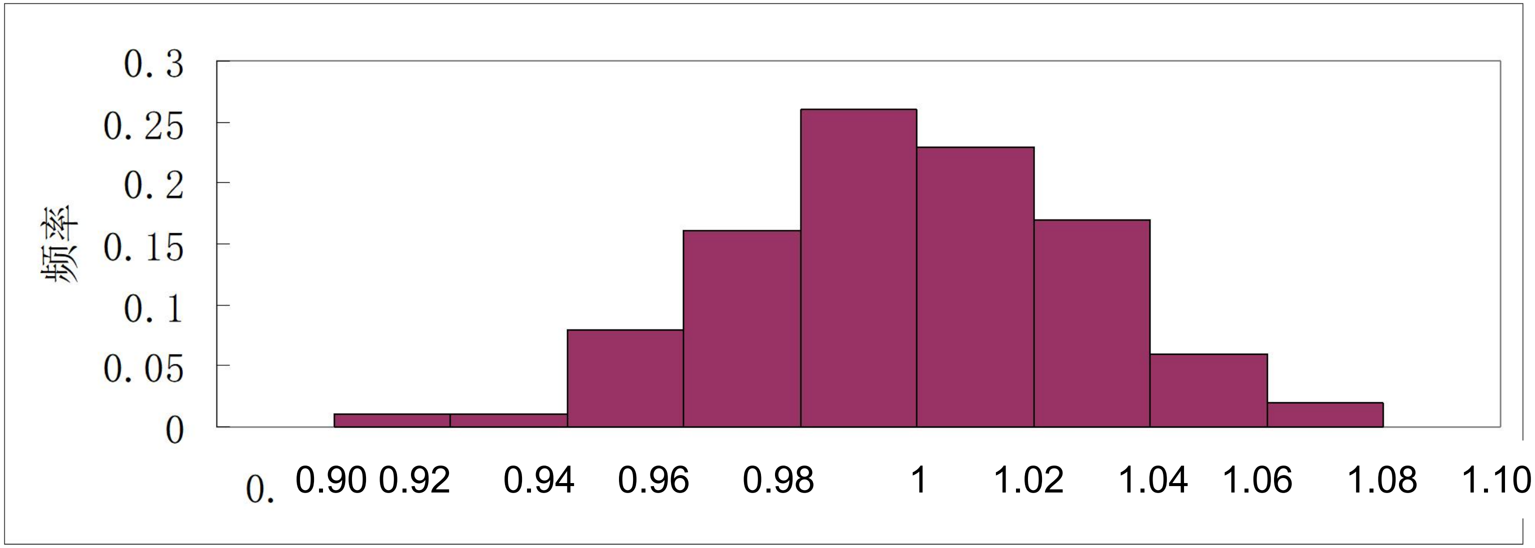
第57页

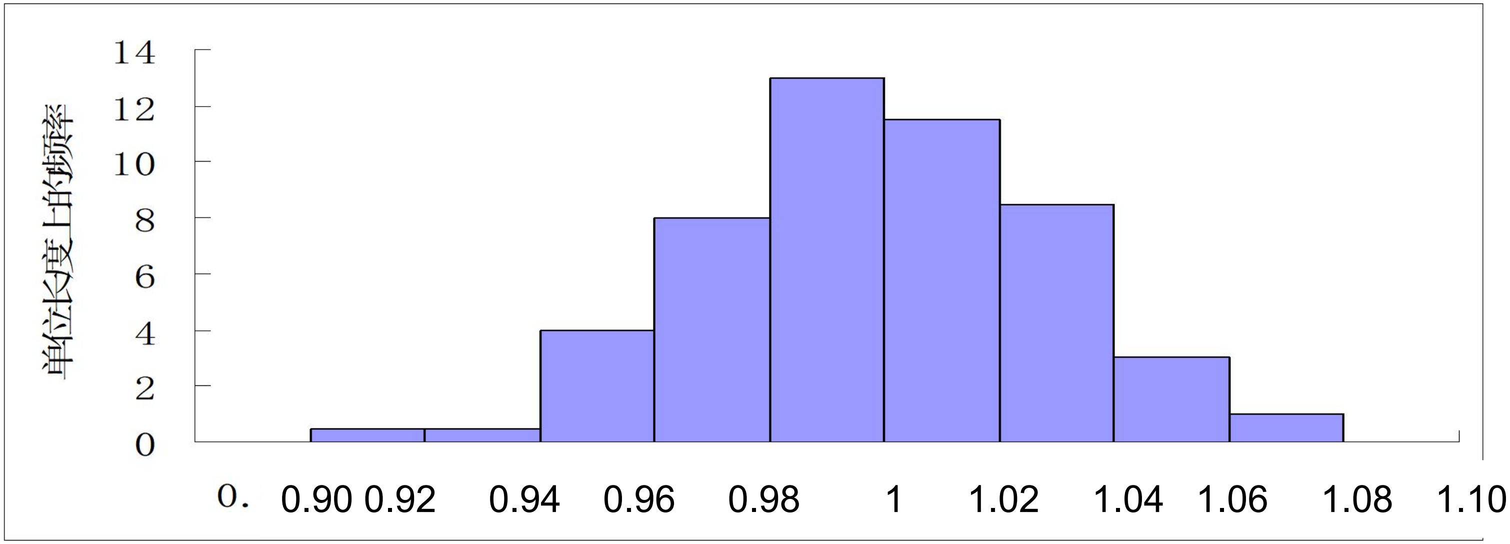
17题

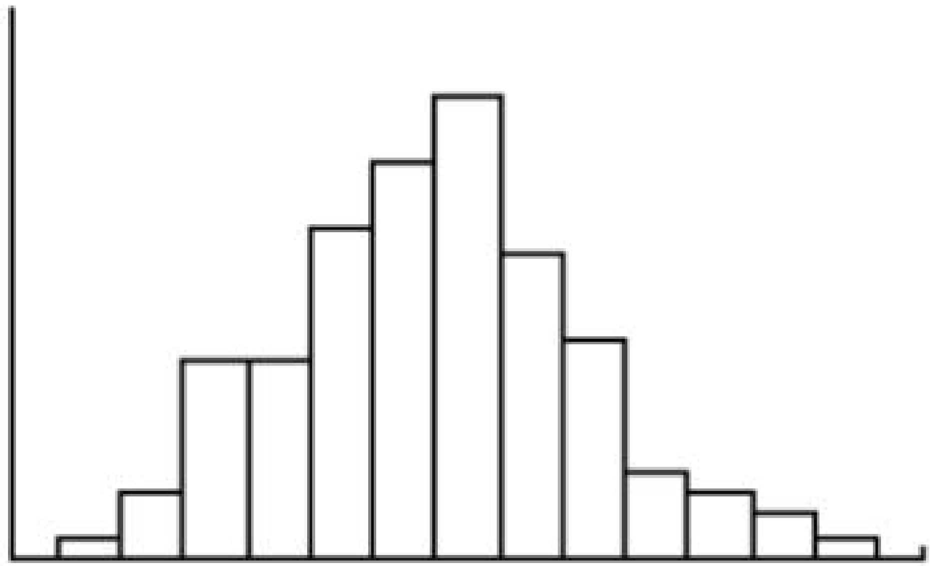
§ 4 连续型随机变量及其概率密度

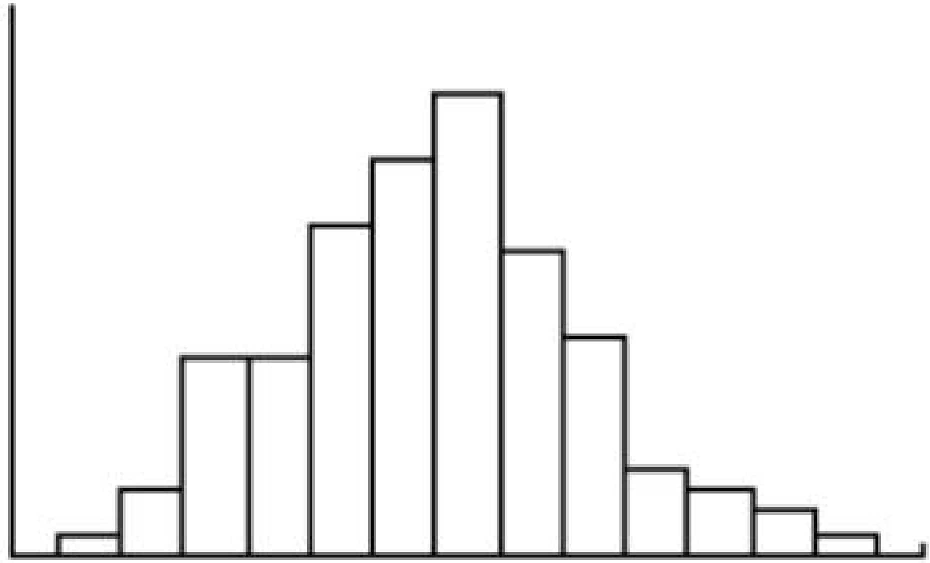
- 某些随机变量X的可能取值充满某个区间 (a, b).

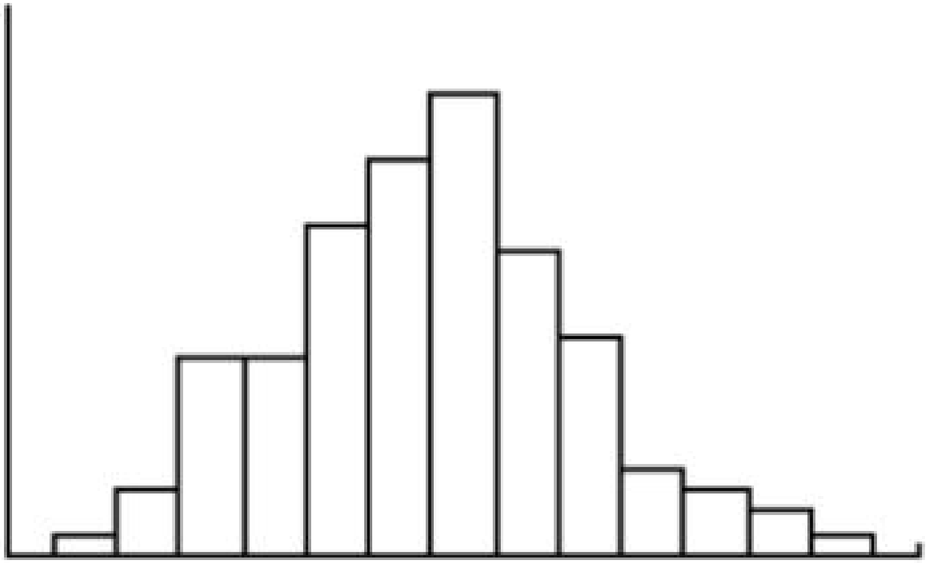

0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
频率
0.
0.90 0.92
0.94
0.96
0.98
1
1.02
1.04
1.06
1.08
1.10

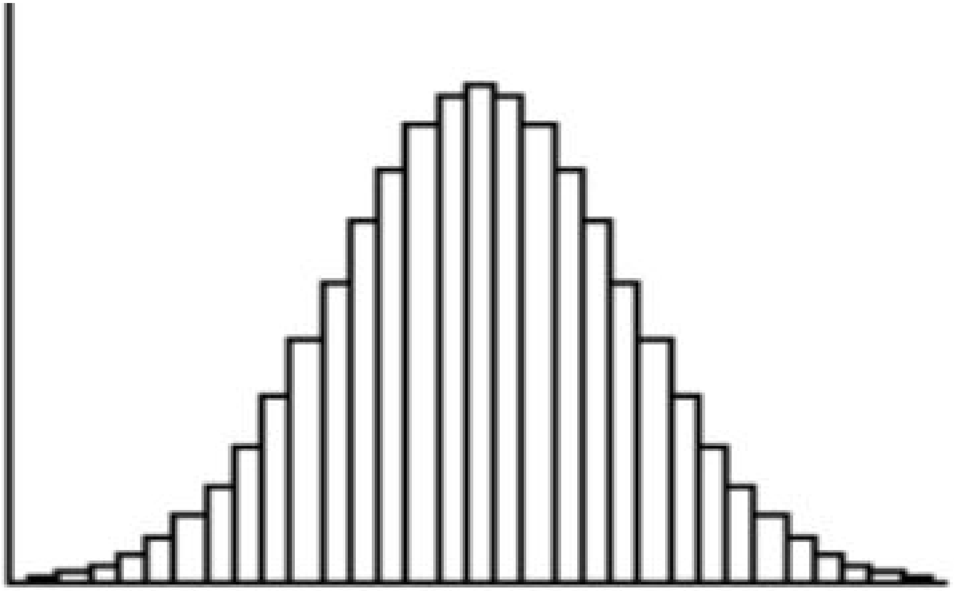

0. 3
0. 25
0. 2
0. 15
0. 1
0. 05
0
频率
0.
0.90 0.92 0.94 0.96 0.98 1 1.02 1.04 1.06 1.08 1.10


14
12
10
8
6
4
2
0
单位长度上的频率
0.
0.90 0.92 0.94 0.96 0.98 1 1.02 1.04 1.06 1.08 1.10









对于随机变量 X, 如果存在非负可积函数 $f(x)$,

$x \in (-\infty, +\infty)$,使得对任意实数 x ， 有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

则称 X为连续型随机变量, 称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数，简称为概率密度 .

对于随机变量 X, 如果存在非负可积函数 $f(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$,使得对任意实数 x ， 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

则称 X为连续型随机变量, 称 $f(x)$ 为 X 的概率密度函数，简称为概率密度 .

连续型随机变量的分布函数在R上连续.

请注意:

(1) 连续型*r.v*取任一指定实数值*a* 的概率均为0. 即

$$P\{X=a\}=0.$$

请注意:

(1) 连续型*r.v.*取任一指定实数值a 的概率均为0. 即

$$P\{X=a\}=0\,.$$

这是因为连续型*r.v.*的分布函数$F(x)$ 是连续的，且

$$0\le P\{X=a\}\le P\{a-\Delta x<X\le a\}=F(a)-F(a-\Delta x)$$

当 $\Delta x\to 0^{+}$ 时，得到

$$P\{X=a\}=0\,.$$

请注意:

(1) 连续型*r.v.*取任一指定实数值*a* 的概率均为0. 即

$$P\{X=a\}=0.$$

由此可以得到如下结论:

由*P*(*A*)=0, 不能推出 $A=\varnothing$

请注意:

(1) 连续型*r.v.*取任一指定实数值*a* 的概率均为0. 即

$$P\{X=a\}=0\,.$$

由此可以得到如下结论:

由$P(A)=0$, 不能推出 $A=\varnothing$

由$P(B)=1$, 不能推出 $B=S$

(2) 对连续型 $r.v.\ X$，有

$$P(a \le X \le b) = P(a < X \le b)$$

$$= P(a \le X < b)$$

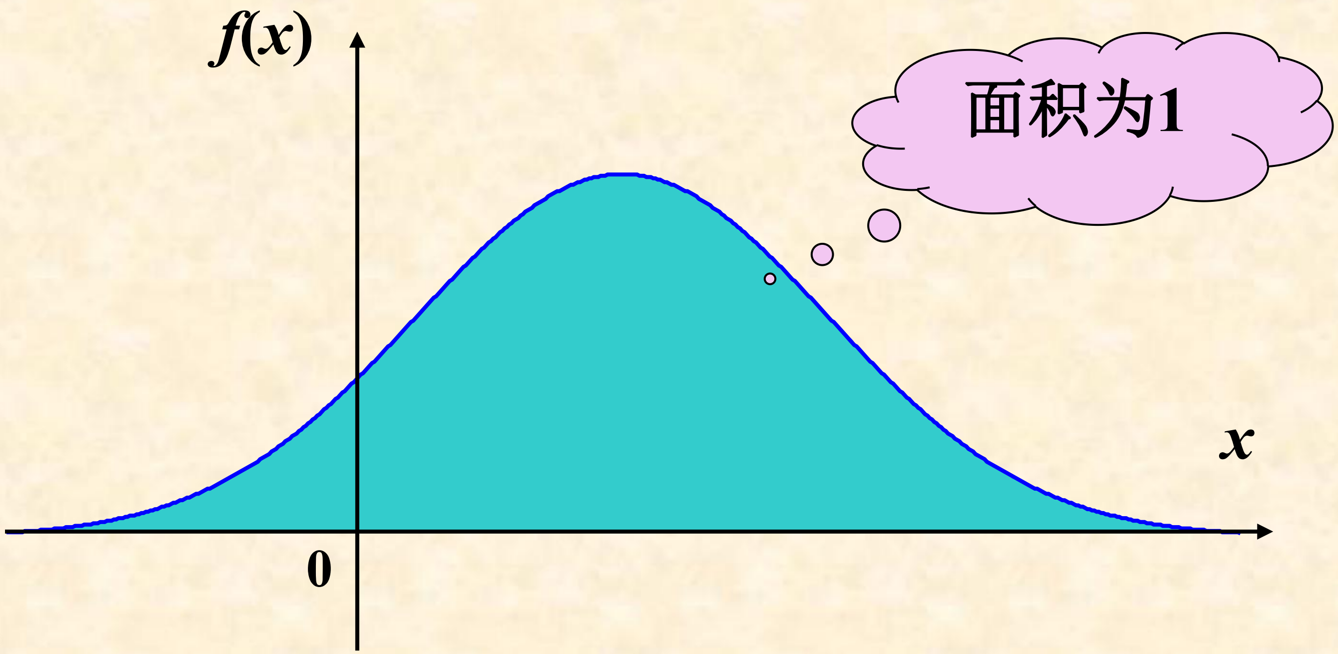
$$= P(a < X < b)$$

计算连续型随机变量取值落在某一区间的概率时，可以不必区分该区间或闭区间或半闭区间.

概率密度的性质

1° $f(x) \geq 0$

2° $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

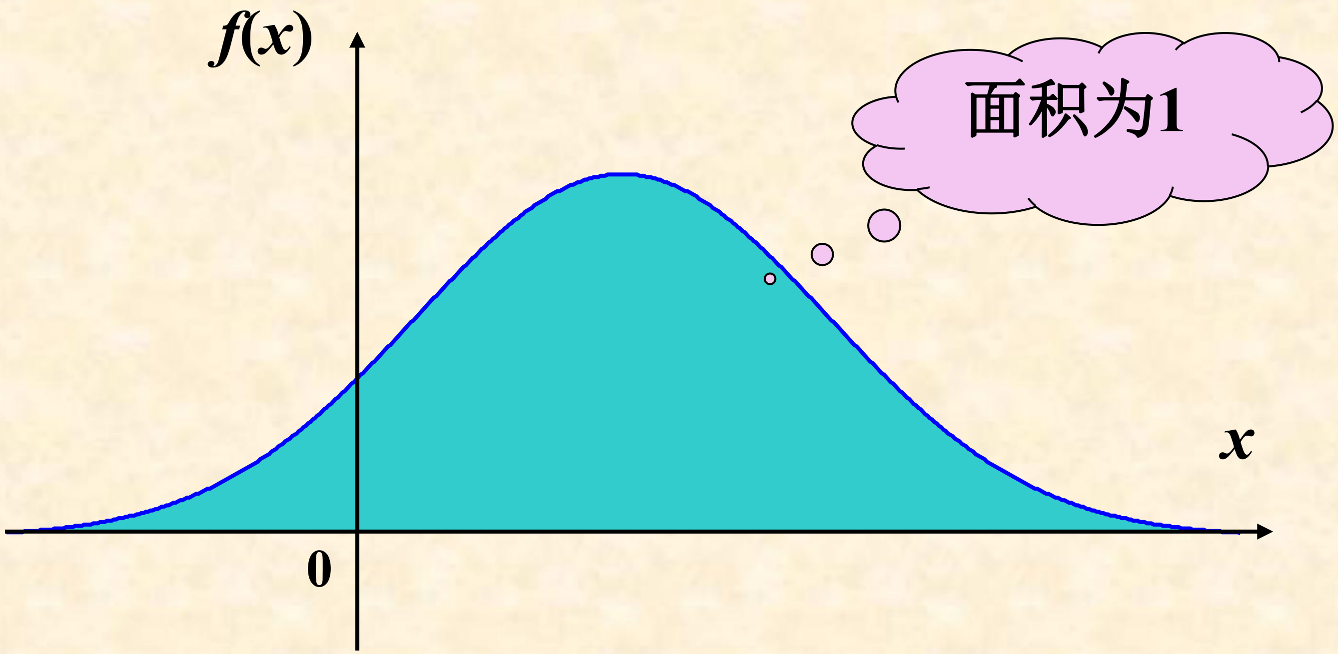


概率密度的性质

1 o $\quad f(x) \geq 0$

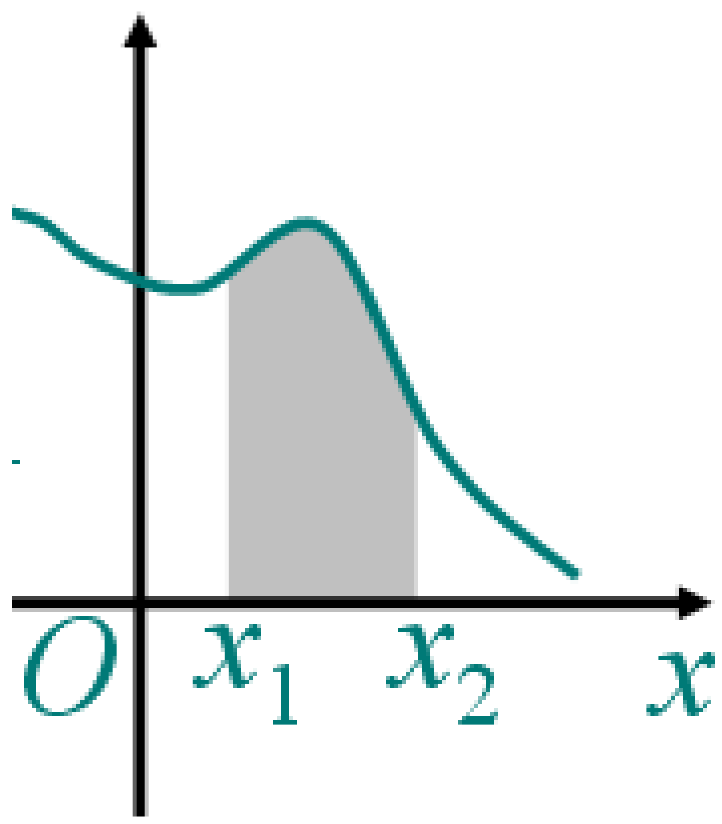
2 o $\quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

【注】这两条性质是判定一个函数 $f(x)$ 是否为某 $r.v\ X$ 的概率密度的充要条件



3, 对于任意实数$x_1, x_2, (x_1 \le x_2)$,

$$P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$



4, 若$f(x)$在点x连续，则有$F'(x)=f(x)$.

4, 若$f(x)$在点x连续, 则有$F'(x)=f(x)$.

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{P(x<X\le x+\Delta x)}{\Delta x}. \qquad (4.2)$$

4, 若$f(x)$在点x连续, 则有$F'(x)=f(x)$.

$$f(x)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{P(x<X\le x+\Delta x)}{\Delta x}. \qquad (4.2)$$

故 X的密度 $f(x)$ 在 x 这一点的值，恰好是X 落在区间 $(x, x+\Delta x]$ 上的概率与区间长度 Δx 之比的极限. 这里，如果把概率理解为质量，$f(x)$ 相当于线密度.

若不计高阶无穷小，有

$$P\{x < X \le x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x$$

表示随机变量 X 取值于 $(x, x+\Delta x]$ 的概率近似等于 $f(x)\Delta x$.

若不计高阶无穷小，有

$$P\{x < X \le x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x$$

表示随机变量 X 取值于 $(x, x + \Delta x]$ 的概率近似等于 $f(x)\Delta x$.

密度函数 $f(x)$ 在某点a处的高度越大，则 X 取 a 附近的值的概率就越大.

若不计高阶无穷小，有

$$P\{x < X \le x + \Delta x\} \approx f(x)\Delta x$$

表示随机变量 **X** 取值于 $(x, x+\Delta x]$ 的概率近似等于 $f(x)\Delta x$.

$f(x)\Delta x$ 在连续型 随机变量 理论中所起的作用与 $P(X = x_k) = p_k$ 在离散型 随机变量 理论中所起的作用相类似.

例1 设随机变量X具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases} kx, & 0 \le x < 3, \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3 \le x \le 4, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

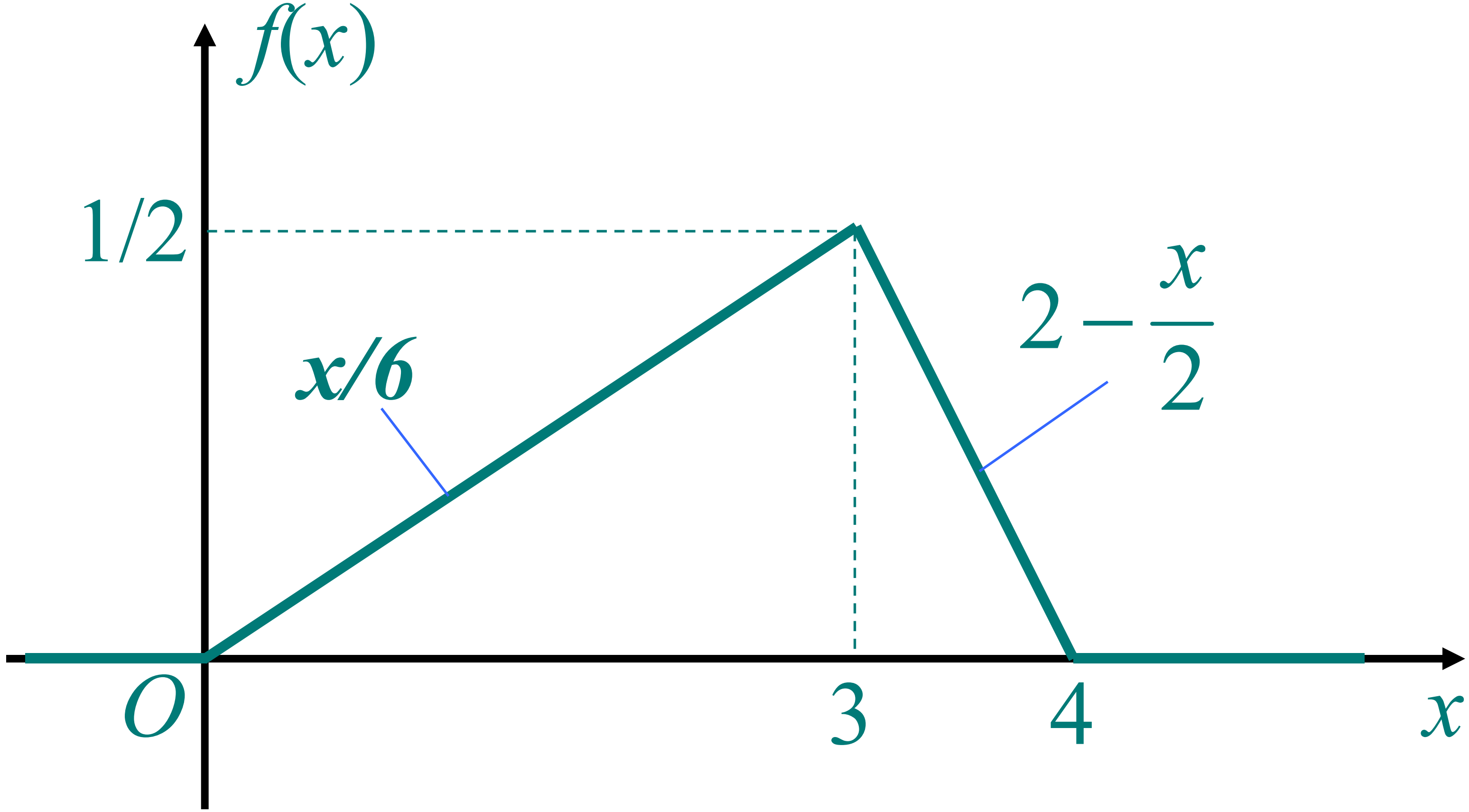
(1)确定常数k;(2)求X的分布函数$F(x)$;

(3)求$P\{1 < X \le \dfrac{7}{2}\}$.

解 $f(x)=\begin{cases} kx, & 0\le x<3 \\ 2-\dfrac{x}{2}, & 3\le x\le 4 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

(1) 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1$ 得 $k=\dfrac{1}{6}$

$f(x)$的曲线形状如图所示



(2) X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{12}, & 0\le x<3,\\ -3+2x-\dfrac{x^2}{4}, & 3\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$$

(3) $\boldsymbol{P\left\{1<X\le\frac{7}{2}\right\}=F\left(\frac{7}{2}\right)-F(1)=\frac{41}{48}}$

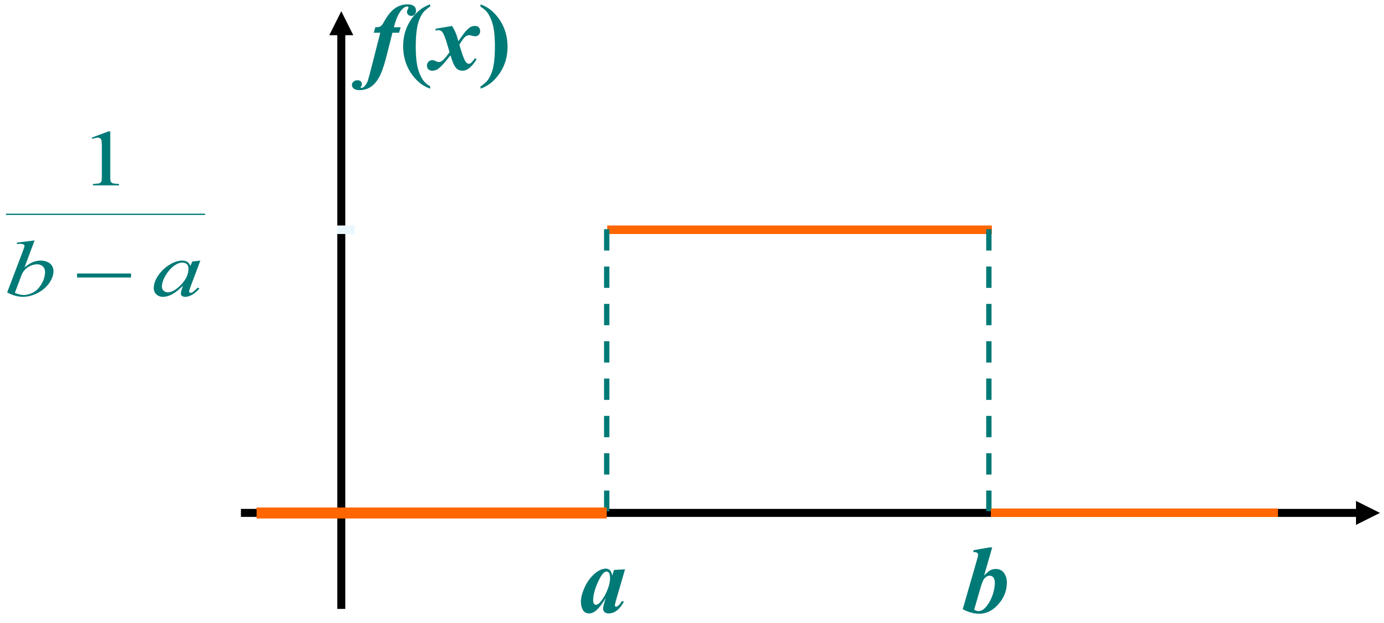
常见的连续型随机变量

(一)均匀分布

设连续型随机变量*X*具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b,\\ 0, \text{其它}, & \end{cases} \qquad (4.5)$$

则称*X*在区间(*a*,*b*)上服从均匀分布, 记为 *X*~*U*(*a*,*b*).



$f(x)$
$\frac{1}{b-a}$
a
b

- 一个半径为r的汽车轮胎，因为轮胎圆周上的任一点接触地面的可能性是相同的，所以轮胎圆周接触地面的位置X服从（$\mathbf{0,2\pi r}$）上的均匀分布；

- 一个半径为r的汽车轮胎，因为轮胎圆周上的任一点接触地面的可能性是相同的，所以轮胎圆周接触地面的位置X服从（$0,2\pi r$）上的均匀分布；
- 在数值计算中，由于舍入最靠近它的整数时产生的误差，可看作服从均匀分布。

若$X \sim U(a,b)$,

1°.对于长度l为的区间$(c,c+l), a \le c < c+l \le b$,有

$$P\{c < X \le c+l\} = \int_{c}^{c+l} \frac{1}{b-a} dx = \frac{l}{b-a}$$

若$X \sim U(a,b)$,

1°.对于长度l为的区间$(c,c+l)$, $a \le c < c+l \le b$,有

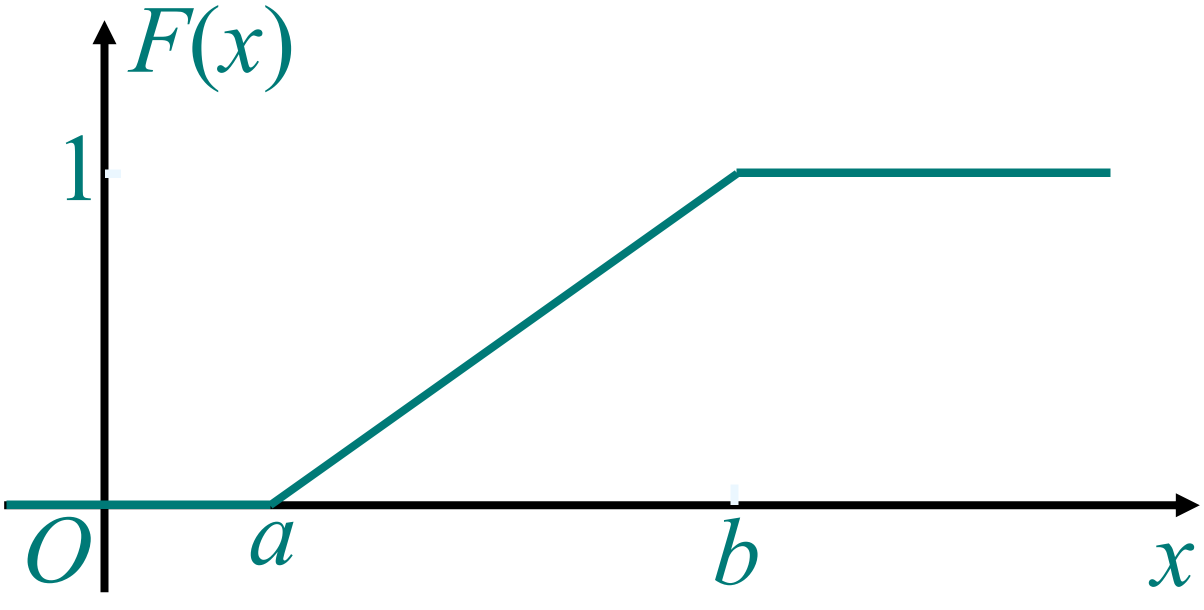
$$P\{c < X \le c+l\} = \int_{c}^{c+l} \frac{1}{b-a} dx = \frac{l}{b-a}$$

2°.X的分布函数为：

$$F(x) = P\{X \le x\} = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x < b, \\ 1, & x \ge b.\end{cases} \qquad (4.6)$$



引例 如果某设备在任何长度为t的时间[0，t]内发生故障的次数N（t）服从参数λt的泊松分布，求相继两次故障之间间隔T的分布函数.

(二) 指数分布

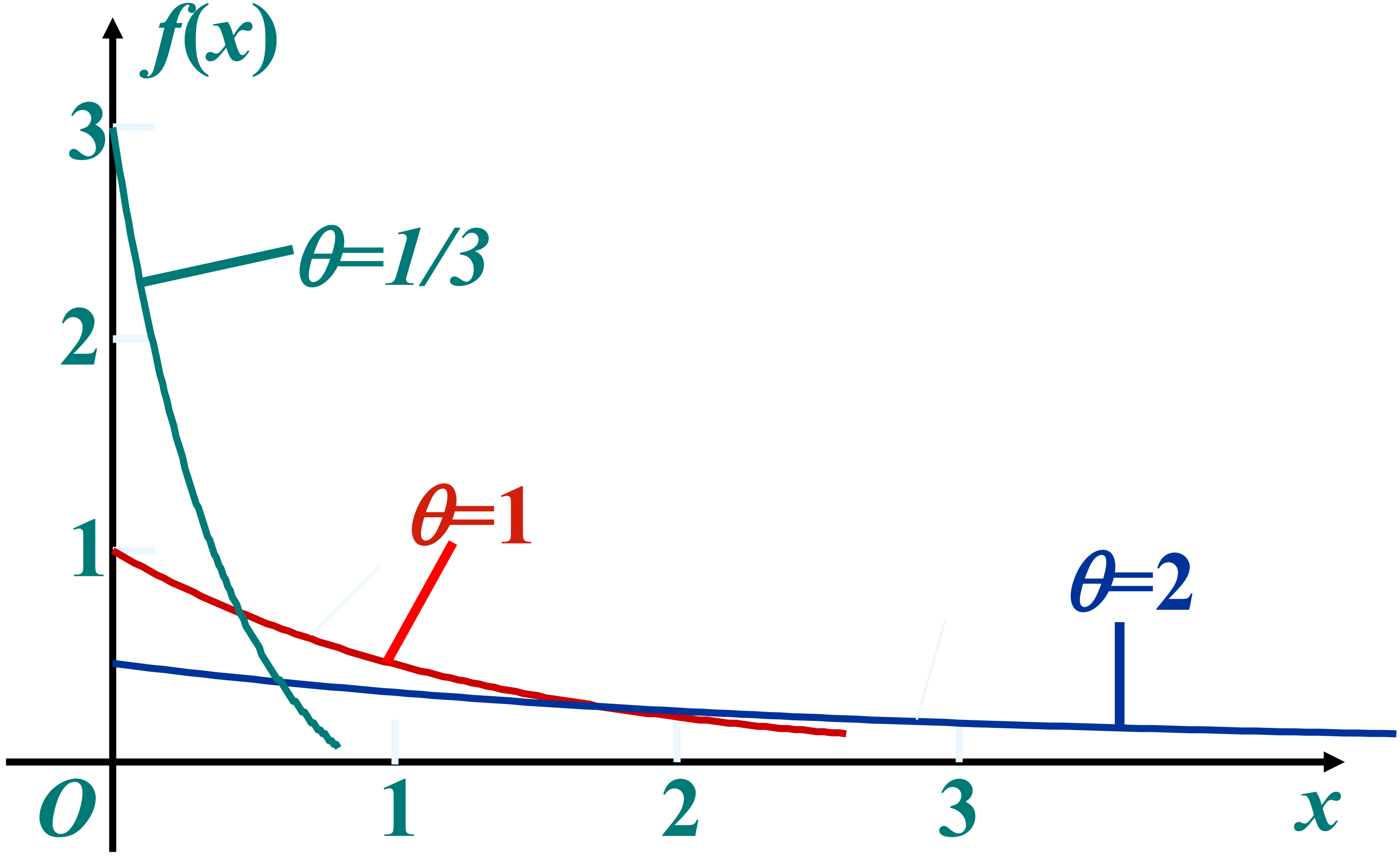
设连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0, \\ 0, & \text{其它},\end{cases} \qquad (4.7)$$

其中$\theta>0$为常数, 则称X服从参数为θ的指数分布.

指数分布常用于可靠性统计研究中，如元件的寿命.

$f(x)$的图形:



$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}\mathrm{e}^{-x/\theta}, & x>0,\\ 0, & \text{其它},\end{cases} \tag{4.7}$$

(1) $\boldsymbol{f(x)\geq 0}$ **;**

(2) $\boldsymbol{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1}$ **;**

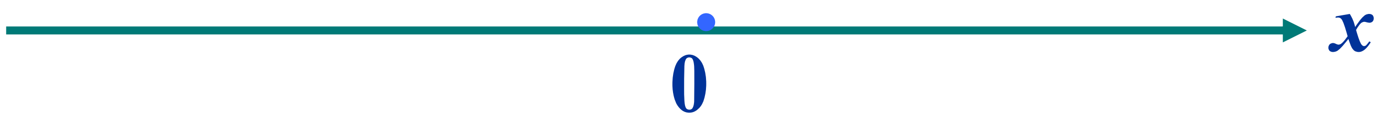
若X服从参数为θ 的指数分布, 则其分布函数为

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}1-e^{-x/\theta}, & x>0\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

事实上,

当 $x\le 0$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{x} 0dt$

当 $x>0$ 时, $F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int_{-\infty}^{0} 0dt+\int_{0}^{x}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{t}{\theta}}dt$



X服从指数分布, 则任给$s,t>0$, 有

$$P\{X>s+t \mid X>s\}=P\{X>t\} \tag{4.9}$$

性质(4.9)称为无记忆性.

（三）正态分布

若连续型 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

其中 μ 和 σ (σ>0)都是常数, 则称 X 服从参数为 μ,σ 的正态分布或高斯分布.记作 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

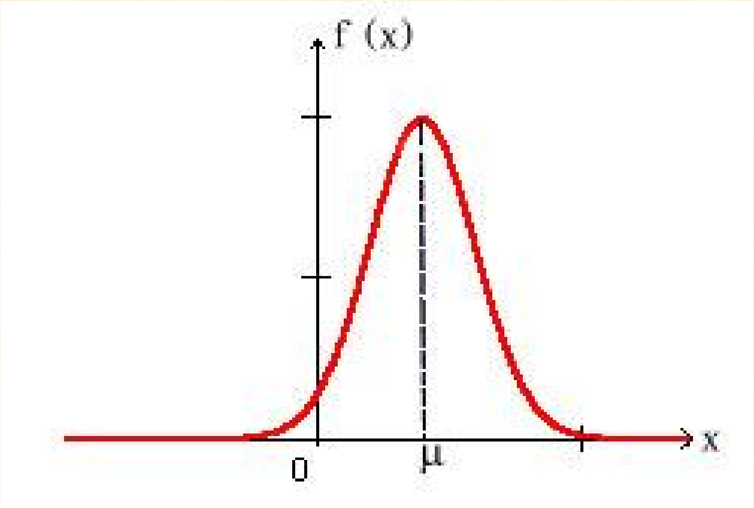
在自然界和社会现象中，大量随机变量都服从或近似服从正态分布.

- 一个地区的男性成年人的身高，
- 测量某零件长度的误差，
- 海洋波浪的高度，
- 半导体器件的热噪音电流或电压等

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

(1) $f(x)\geq 0$;

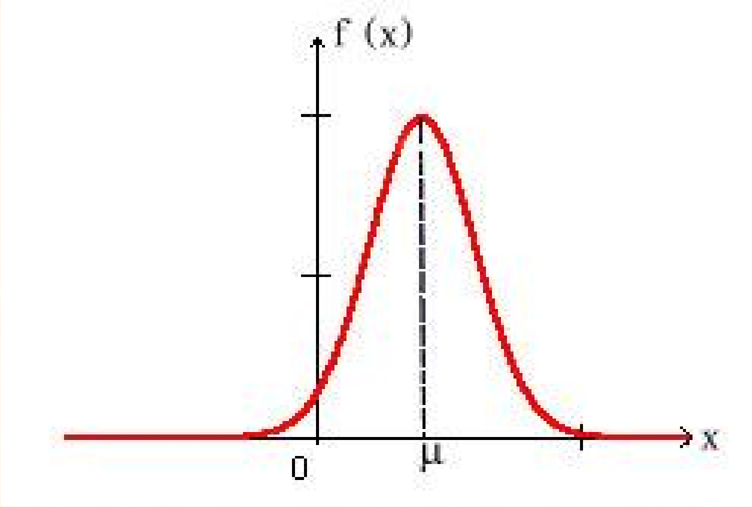
(2) $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$;



$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

具有以下性质：

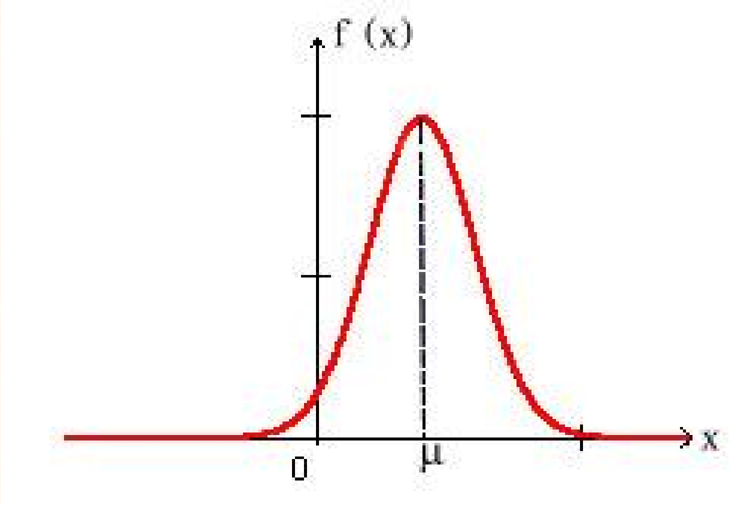
1.曲线关于 $x=\mu$ 对称.



$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

2. 函数 $f(x)$在 $(-\infty,\mu]$ 上单调增加, 在 $[\mu,+\infty)$ 上单调减少, 在 $x=\mu$取得最大值;

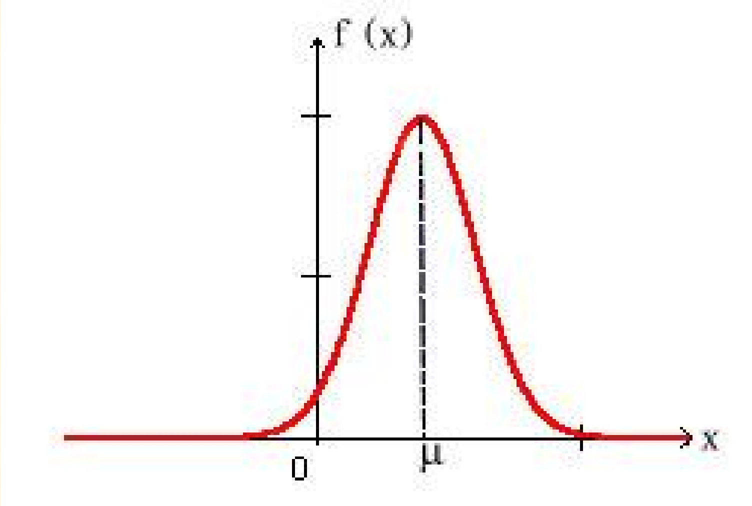
$$f'(x)=\frac{\mu-x}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < \infty$$

3. $x=\mu\pm\sigma$为$f(x)$的两个拐点的横坐标;

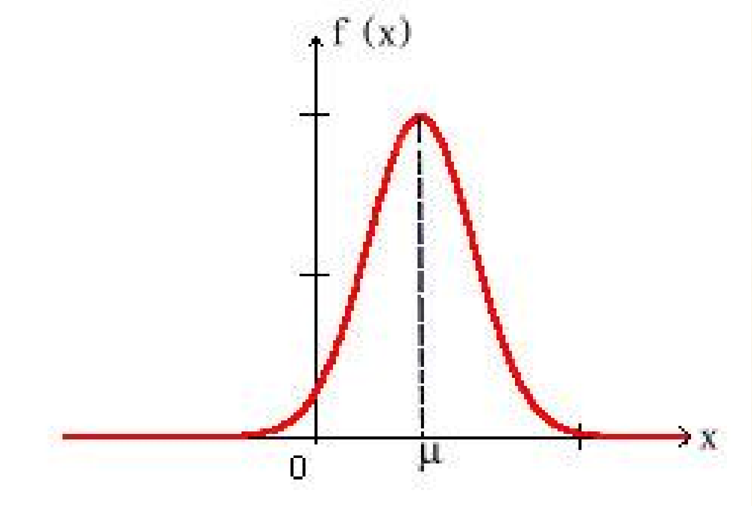
$$f''(x)=\frac{(x-\mu)^2-\sigma^2}{\sqrt{2\pi}\sigma^3}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$



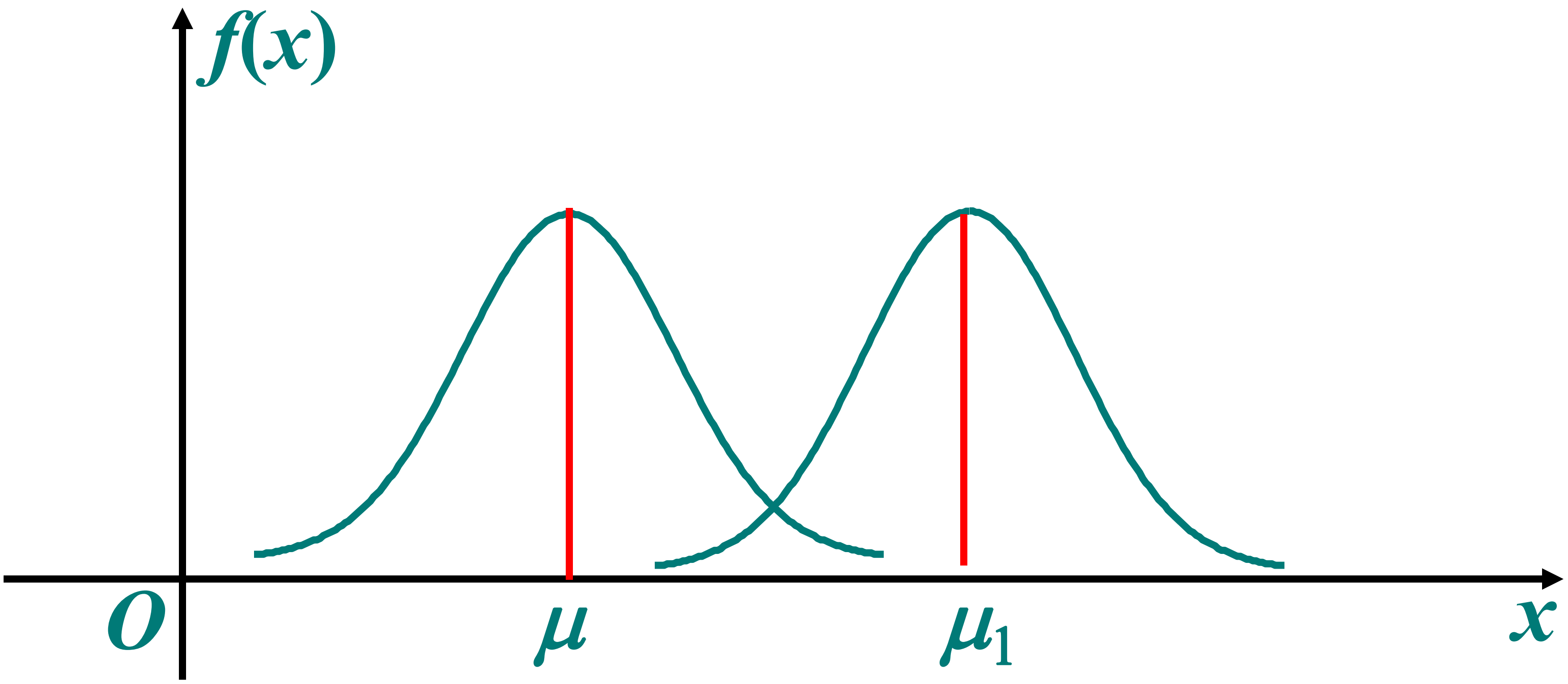
$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<\infty$$

4. $f(x)$ 以 x 轴为渐近线

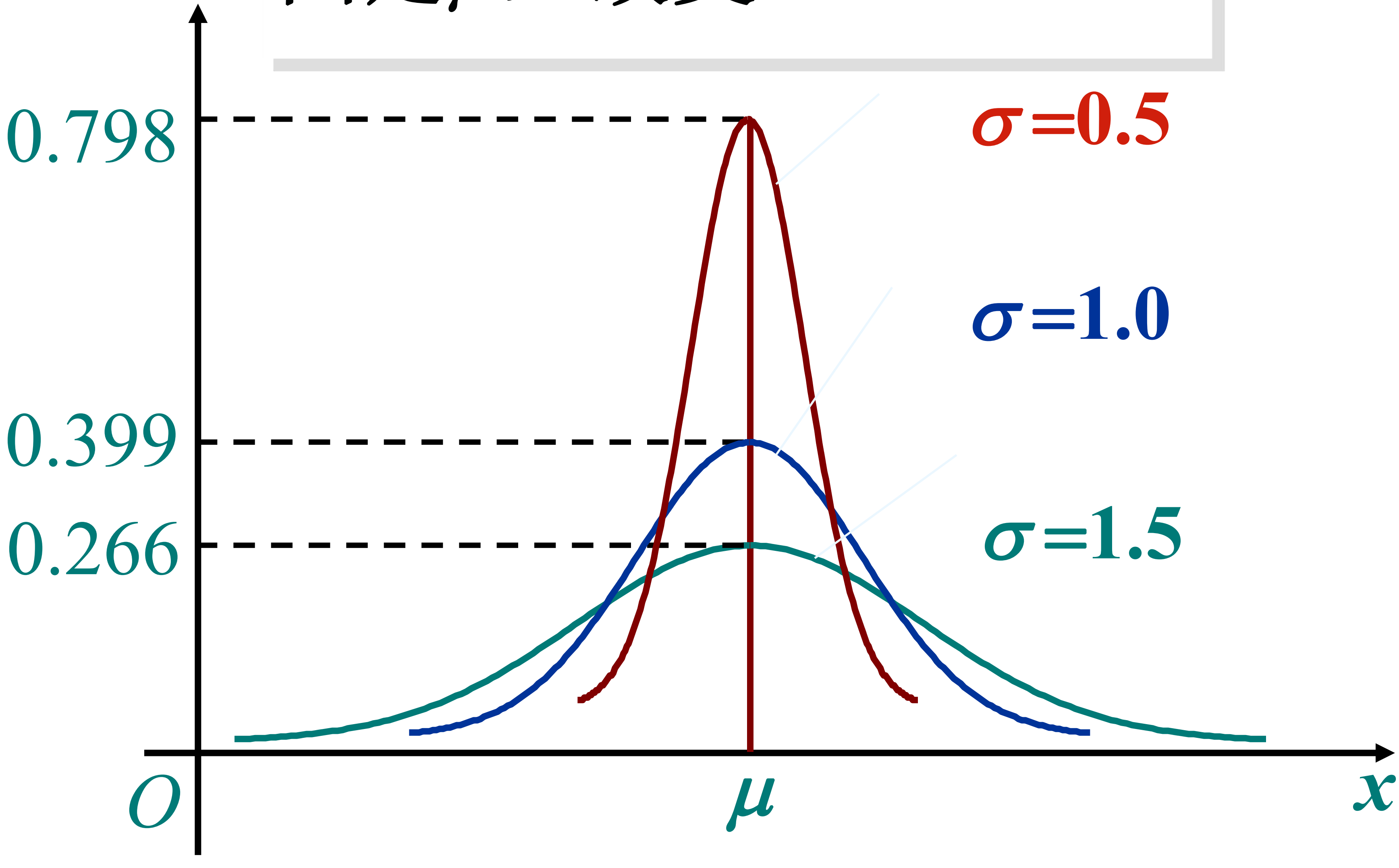
当$x\to\infty$时，$f(x)\to 0.$



固定σ，改变μ

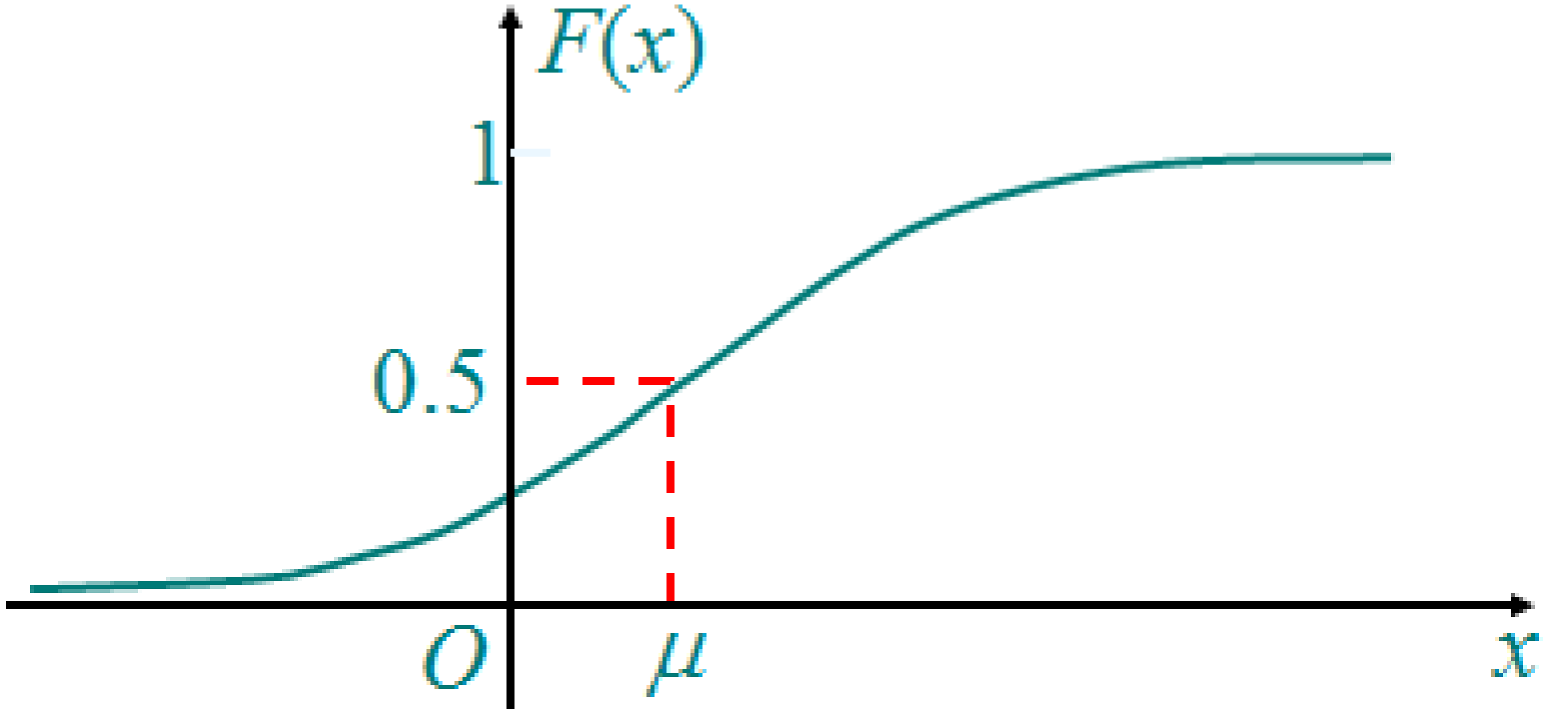


固定μ，改变σ



由(4.10)式得X的分布函数为

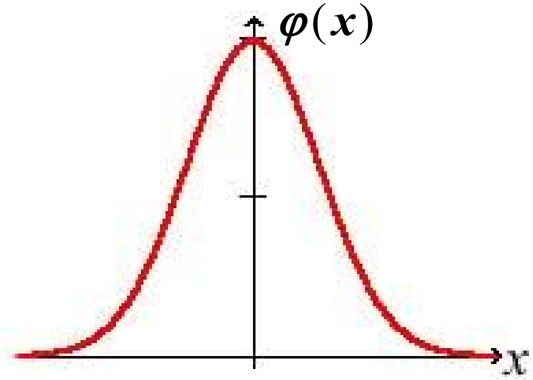
$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\mathrm{d}t, \qquad (4.12)$$



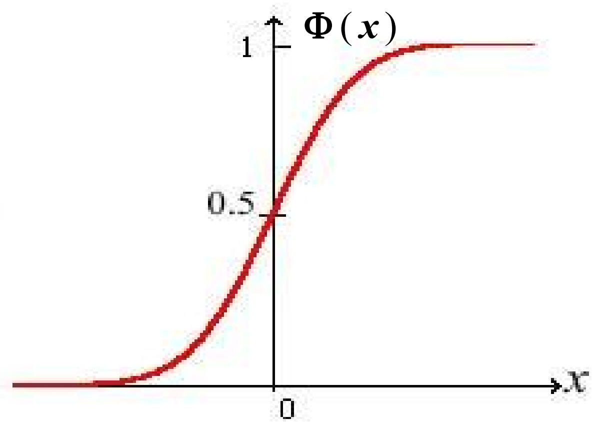
$\mu = 0, \sigma = 1$ 的正态分布称为标准正态分布.

其密度函数和分布函数常用$\varphi(x)$和$\Phi(x)$表示：

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad , -\infty < x < \infty$$



$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad , -\infty < x < \infty$$



引理 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则 $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

标准正态分布的重要性在于，任何一个一般的正态分布都可以通过线性变换转化为标准正态分布.

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow F_X(x) = P\{X \leq x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow F_X(x) = P\{X \le x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow P\left\{x_1 < X \le x_2\right\} = P\left\{\frac{x_1-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

$$X \sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$$

$$\Rightarrow F_X(x) = P\{X \le x\} = P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x-\mu}{\sigma}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$\Rightarrow P\{x_1 < X \le x_2\} = P\left\{\frac{x_1-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{x_2-\mu}{\sigma}\right\}$$

$$= \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right)$$

只要将标准正态分布的分布函数制成表，就可以解决一般正态分布的概率计算问题.

书末P382附有标准正态分布函数数值表，

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\mathrm{d}\,t.$$

标准正态分布表

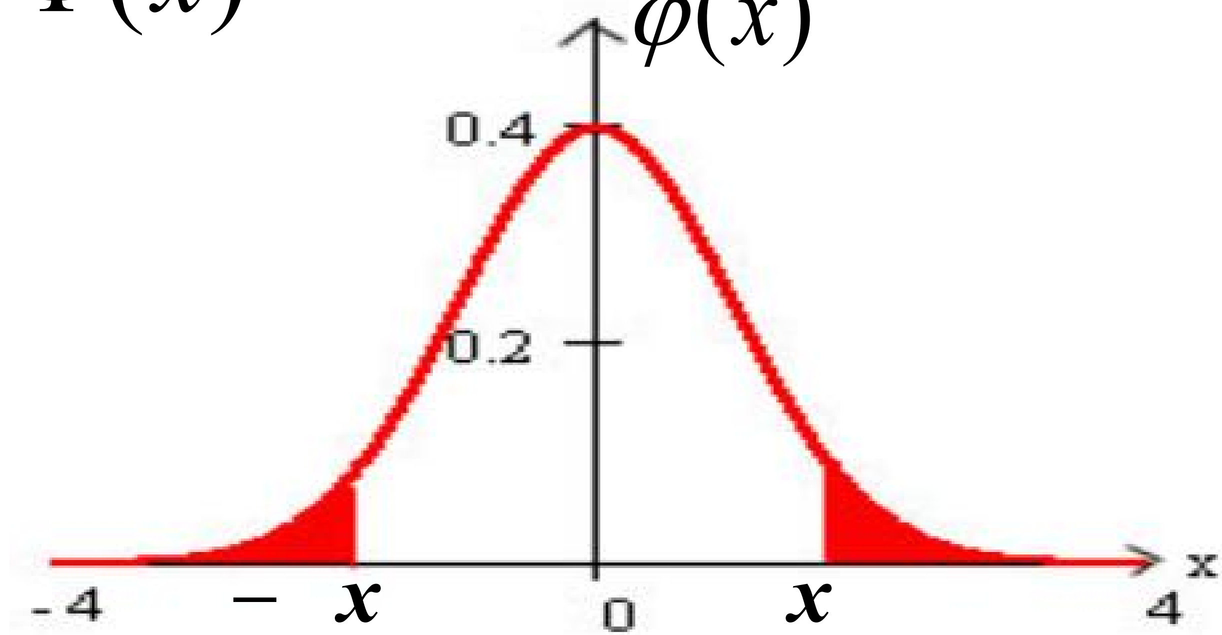
z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	[illegible]	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9846	0.9850	0.9854	0.9858
2.2	0.9861	0.9864	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

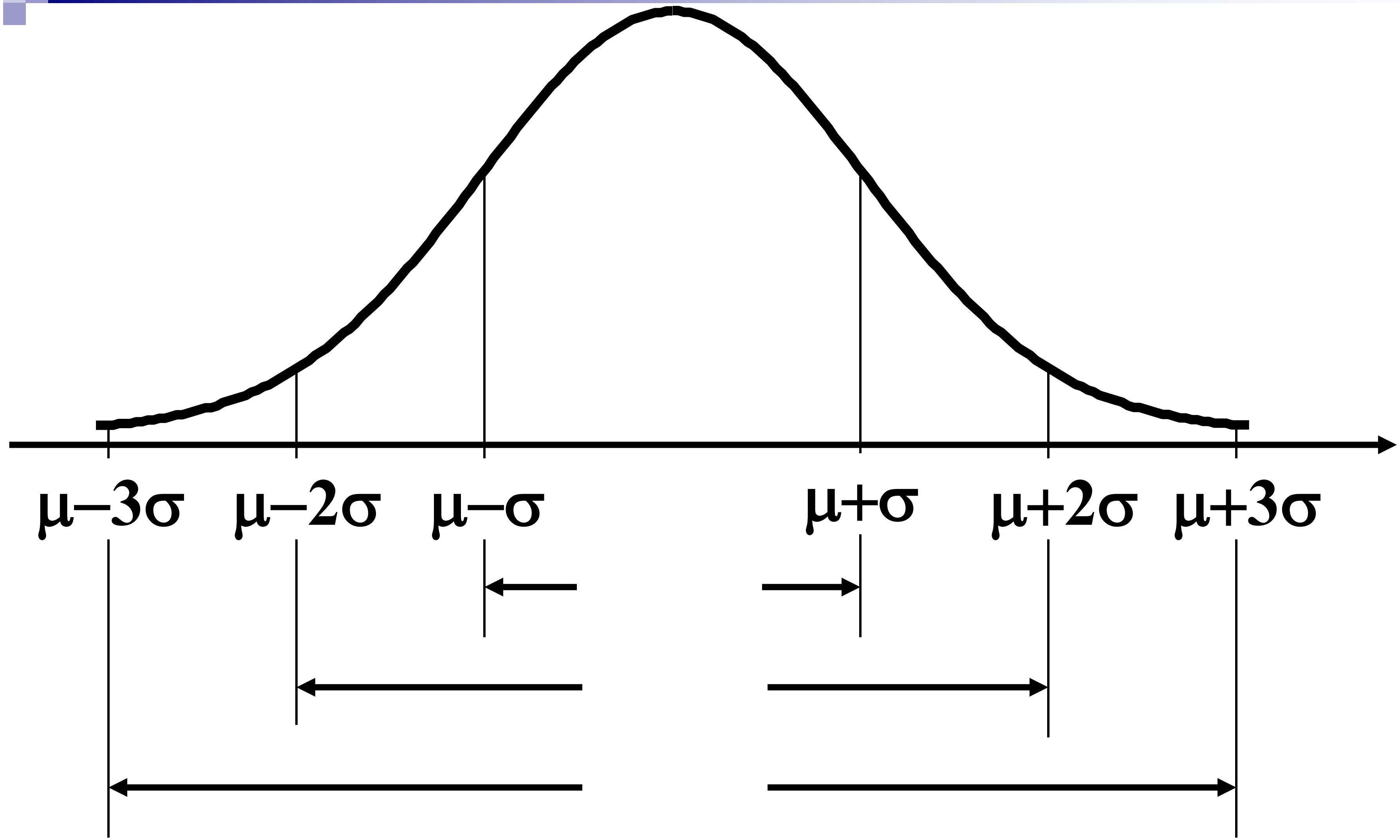
$\boxed{1.96}$

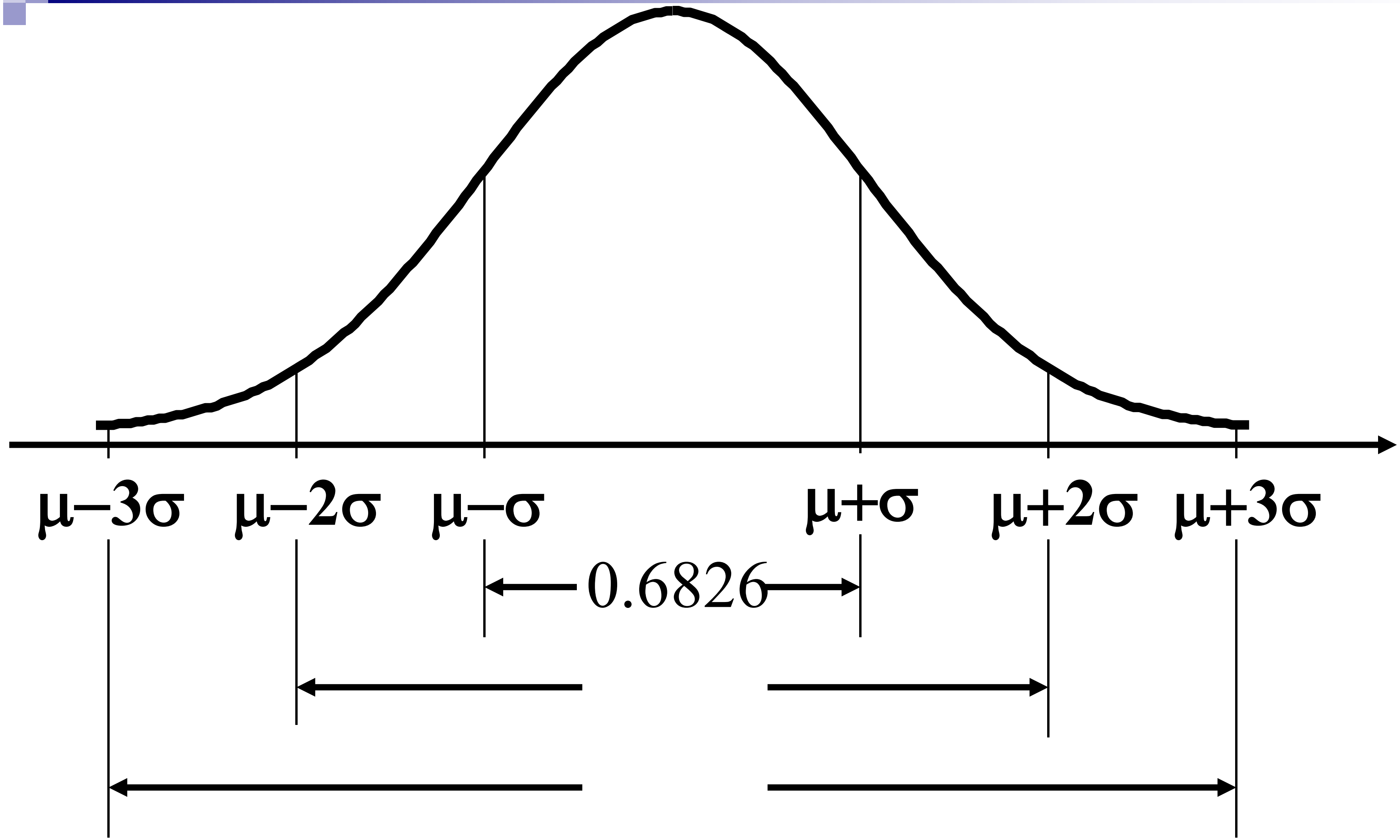
书末P397附有标准正态分布函数数值表，

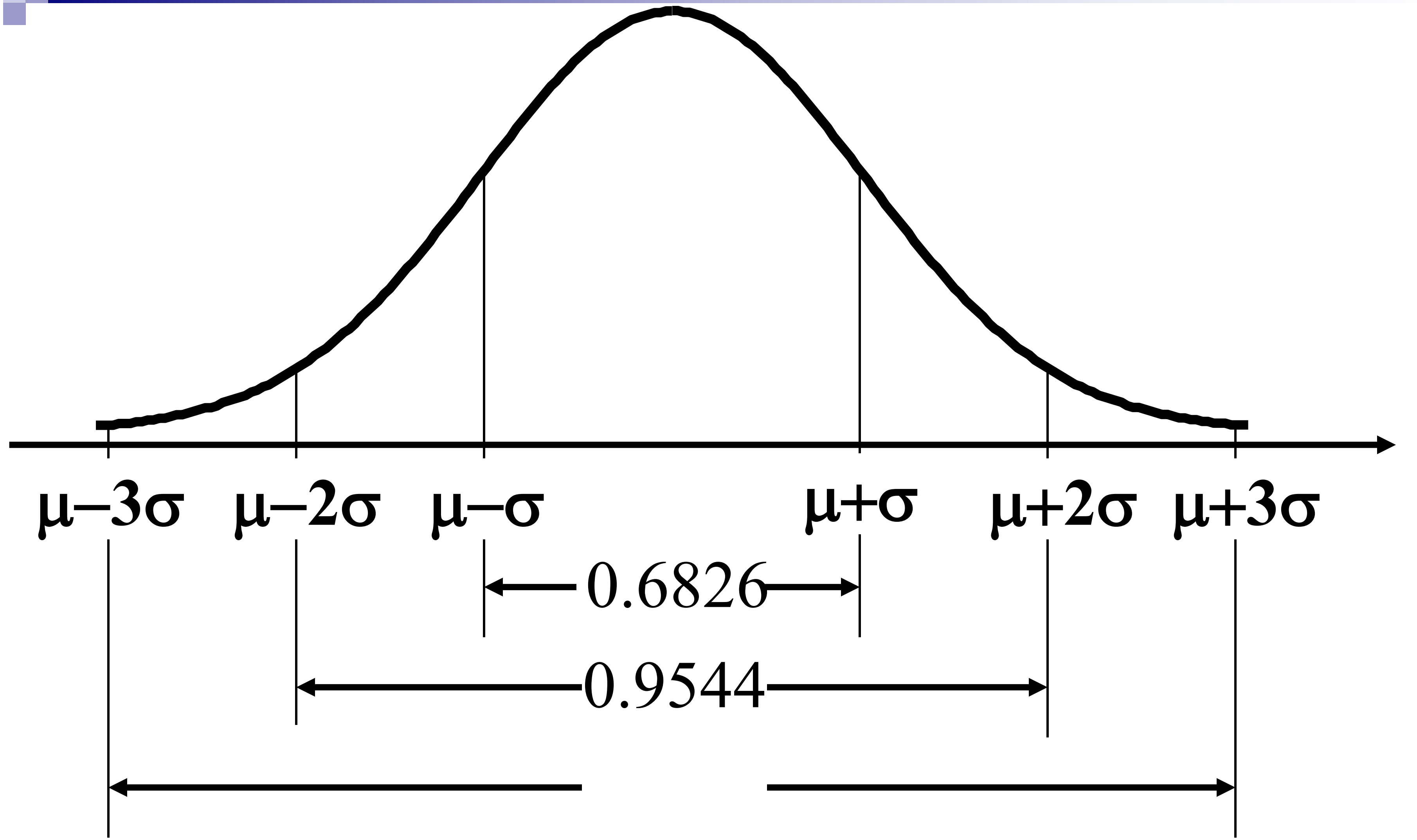
$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-t^2/2}\mathrm{d}\,t.$$

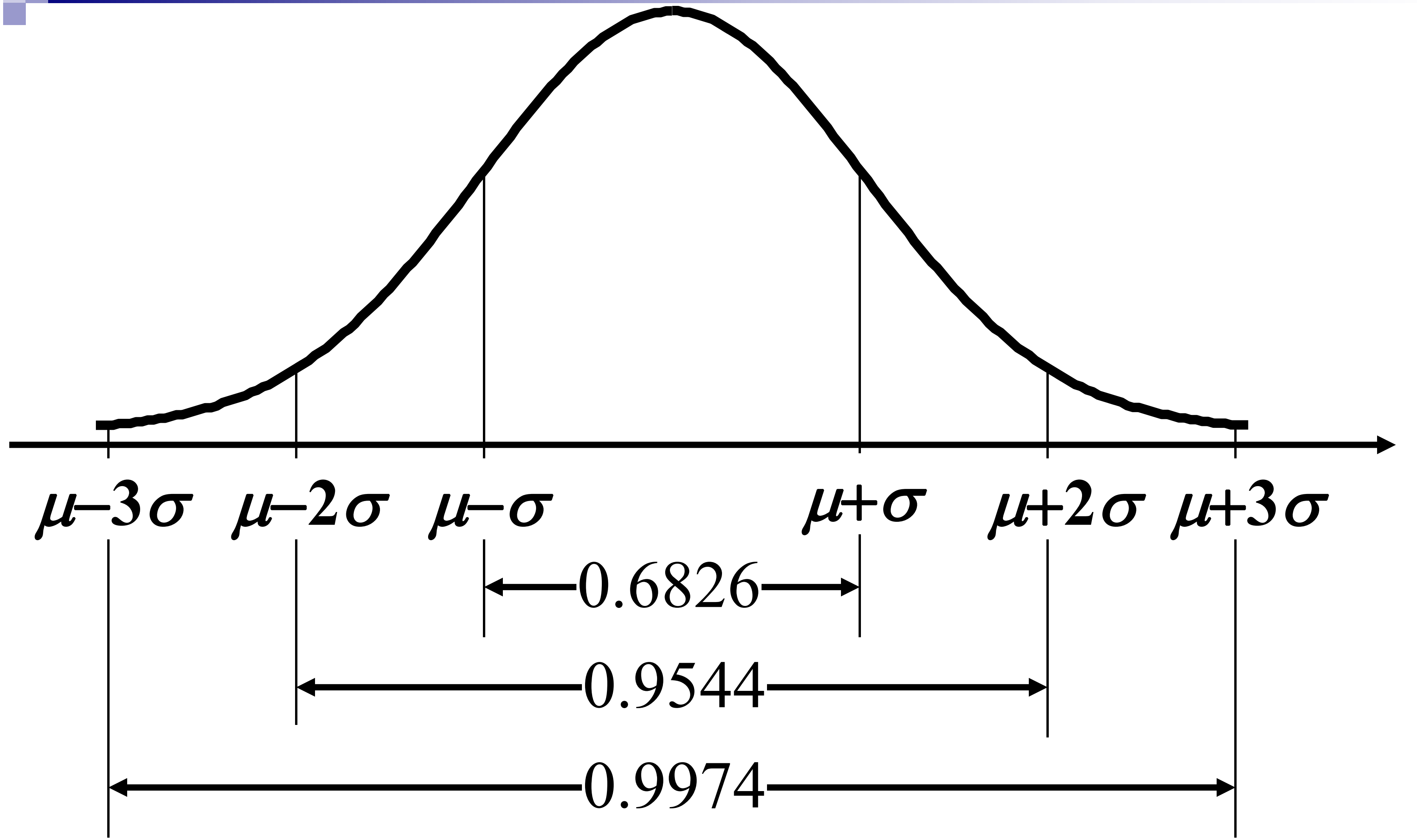
$$\Phi(-x)=1-\Phi(x)$$




μ–3σ
μ–2σ
μ–σ
μ+σ
μ+2σ
μ+3σ


μ–3σ
μ–2σ
μ–σ
μ+σ
μ+2σ
μ+3σ
0.6826


μ–3σ
μ–2σ
μ–σ
μ+σ
μ+2σ
μ+3σ
0.6826
0.9544



$\mu-3\sigma$
$\mu-2\sigma$
$\mu-\sigma$
$\mu+\sigma$
$\mu+2\sigma$
$\mu+3\sigma$
0.6826
0.9544
0.9974

【例 3】 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内。调节器整定在$d^{\circ}C$,液体的温度X(以$^{\circ}C$计)是一个随机变量,且$X \sim N(d, 0.5^2)$.

(1)若$d = 90$,求X小于 89 的概率.

【例 3】 将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内。调节器整定在d°C,液体的温度X(以°C计)是一个随机变量,且$X \sim N(d,0.5^2)$.

(1)若$d=90$,求X小于 89 的概率.

(2)若要求保持液体的温度至少为 80 的概率不低于 0.975，问d至少为多少？

标准正态分布表

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.[illegible]515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.97[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.98[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9858
2.2	0.9861	0.9864	0.98[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.98[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

1.96

【例 3】将一温度调节器放置在贮存着某种液体的容器内。调节器整定在d°C,液体的温度X(以°C计)是一个随机变量,且$X \sim N(d, 0.5^2)$.

(1)若$d = 90$,求X小于 89 的概率.

(2)若要求保持液体的温度至少为 80 的概率不低于 0.99，问d至少为多少？

标准正态分布表

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9648	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9700	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9762	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9858
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9871	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9990	0.9993	0.9995	0.9997	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	1.0000

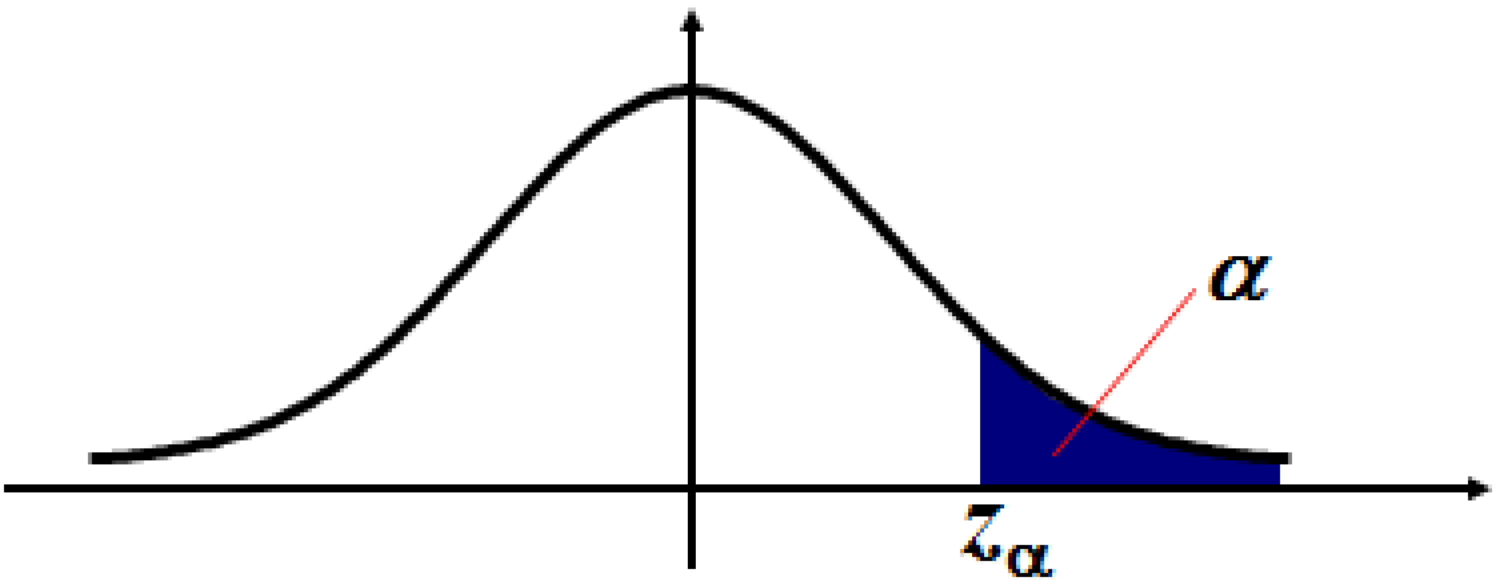
2.327

设$X\sim N(0,1)$, 若z_α满足条件

$$P\{X>z_\alpha\}=\alpha,\quad 0<\alpha<1, \qquad (4.18)$$

则称点z_α为标准正态分布的上α分位点.

由$\varphi(x)$的对称性知$z_{1-\alpha}=-z_\alpha$



总结

第四节　连续型随机变量及其概率密度

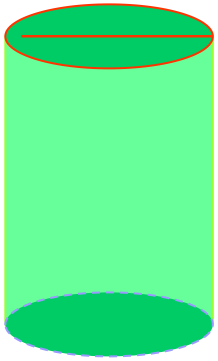
1.连续型随机变量及其概率密度的定义
2.概率密度的性质
3.三种重要的连续型随机变量

- 作业
- **57页　20; 21（1）; 24 ; 26**

在实际中，有时对随机变量的函数更感兴趣.

游戏规则：掷色子，得奖券，所得奖券金额为色子点数再乘以10.

在实际中，有时对随机变量的函数更感兴趣.



测量某企业产品的圆轴截面直径**d**,

关心截面面积 $A = \pi d^2 / 4$.

问题：已知随机变量 X 的概率分布，

如何求$Y=g(X)$ (设 g 是连续函数) 的概率分布？

§ 2.5　随机变量的函数的分布

- 问题的提出
- 离散型随机变量的函数的分布律
- 连续型随机变量的函数的概率密度

例1　设随机变量 X 有如下分布律：

X	-1	0	1	2
p_k	0.2	0.3	0.1	0.4

求 $Y=(X-1)^2$ 的分布律.

离散型随机变量的函数的分布

一般地，如果 X 是离散型随机变量，其函数 $Y=g(X)$ 也是离散型随机变量. 若 X 的分布律为

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_k	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

则 $Y=g(X)$的分布律为

$Y=g(X)$	$g(x_1)$	$g(x_2)$	$\cdots$	$g(x_k)$	$\cdots$
p_k	p_1	p_2	$\cdots$	p_k	$\cdots$

若 $g(x_k)$中有值相同的,应将相应的 p_k 合并.

课堂练习 设随机变量 X 有如下分布律：

X	-1	0	1
p_k	0.3	0.6	0.1

求 $Y = X^2$ 的分布律.

例2 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=2X+8$ 的概率密度.

例2 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=2X+8$ 的概率密度 .

求随机变量 $Y=\ln\left(X+2\right)$的概率密度.

定理1　设随机变量 X 的具有概率密度 $f_X(x)$, 其中 $-\infty < x < +\infty$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导, 且恒有 $g'(x) > 0$, 则 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]h'(y), & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha = g(-\infty), \beta = g(+\infty)$

$h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

定理2　设随机变量 X 的具有概率密度 $f_X(x)$, 其中 $-\infty < x < +\infty$, 又设函数 $g(x)$ 处处可导, 且恒有 $g'(x) < 0$, 则称 $Y = g(X)$ 是连续型随机变量, 其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} -f_X[h(y)]h'(y), & \alpha < y < \beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

其中 $\alpha = g(+\infty), \beta = g(-\infty)$

$h(y)$ 是 $g(x)$ 的反函数.

定理　设随机变量X的具有概率密度$f_X(x)$，其中$-\infty < x < +\infty$，又设函数$g(x)$处处可导，且恒有$g'(x) > 0$(或恒有$g'(x) < 0$)，则称$Y = g(X)$是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X[h(y)]\left|h'(y)\right|, \alpha < y < \beta, \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$$

其中$\alpha = \min(g(-\infty), g(+\infty)), \beta = \max(g(-\infty), g(+\infty))$，

$h(y)$是$g(x)$的反函数

我们再从直观的角度分析理解定理 6 的结论：因为 $g(x)$ 在随机变量 X 的取值范围内严格单调，故 X 的值与 $Y=g(X)$ 的值一一对应，从而"$\{X\in(x-\mathrm{d}x,x)\}$ 的概率"与"$\{Y\in(y-\mathrm{d}y,y)\}$ 的概率"相等，即有

$$f_X(x)\,|\mathrm{d}x|=f_Y(y)\,|\mathrm{d}y|.$$

又由于 $x=h(y)$，$\left|\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|=|h'(y)|$，从而公式(2.34)成立.

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\underline{|h'(y)|}, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

课堂练习 设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{8}, & 0<x<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

求随机变量 $Y=2X+8$ 的概率密度 .

例4 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b\ (a \neq 0)$ 也服从正态分布.

得 $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$

例4 设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 试证明 X 的线性函数 $Y = aX + b \ (a \neq 0)$ 也服从正态分布.

得 $Y = aX + b \sim N(a\mu + b, (a\sigma)^2)$

$$a = \frac{1}{\sigma}, b = -\frac{\mu}{\sigma}$$

得 $Y = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0,1)$

例3： 设 随机变量X 具有概率密度 $f_X(x)$，求$Y=X^2$的密度.

小结

- 离散型随机变量的函数的分布律
- 连续型随机变量的函数的概率密度

对于连续型随机变量，在求 $Y = g(X)$ 的分布时，关键的一步是把事件 $\{ g(X) \le y \}$ 转化为X在一定范围内取值的形式，从而可以利用 X 的分布来求 $P\{ g(X) \le y \}$.

- 作业P59　　33; 34; 35(2)

第二章　一维随机变量及其分布

第一节　　随机变量

第二节　　离散型随机变量及其分布律

第三节　　随机变量的分布函数

第四节　　连续型随机变量及其概率密度

第五节　　随机变量的函数的分布