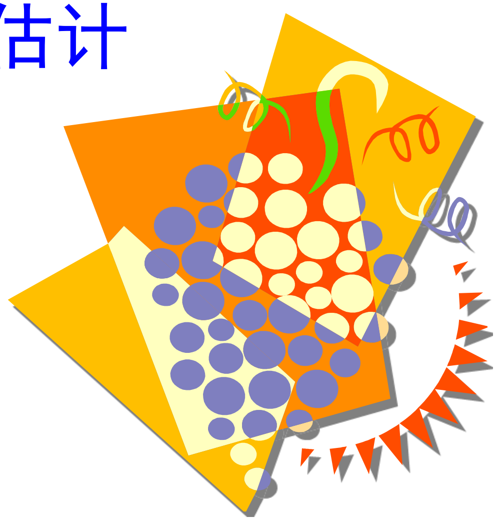
第七章　　参数估计



假定深圳大学学生月生活费用服从$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，估计$\mu$.

假定深圳大学学生月生活费用服从$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，估计$\mu$.

估计方案 从中抽取n个学生,生活费用分别为$X_1,\cdots,X_n$，其平均值$\bar{X}$，

假定深圳大学学生月生活费用服从$N\left(\mu,\sigma^2\right)$，估计$\mu$.

估计方案　从中抽取n个学生,生活费用分别为$X_1,\cdots,X_n$，其平均值$\bar{X}$，

实施结果　从中抽取n个学生,生活费用分别为$x_1,\cdots,x_n$，平均值为$\bar{x}$，

点估计问题的一般提法

设总体X的分布函数$F(x;\theta)$的形式为已知,θ是待估参数. $X_1, X_2, \cdots, X_n$是X的一个样本, $x_1, x_2, \cdots, x_n$为相应的一个样本值.

点估计问题的一般提法

设总体X的分布函数$F(x;\theta)$的形式为已知，θ是待估参数。$X_1, X_2, \cdots, X_n$是X的一个样本，$x_1, x_2, \cdots, x_n$为相应的一个样本值。

点估计问题就是要构造一个适当的统计量$\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，用它的观察值$\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$来估计未知参数$\theta$。

点估计问题的一般提法

设总体X的分布函数$F(x;\theta)$的形式为已知，θ是待估参数. $X_1,X_2,\cdots,X_n$是X的一个样本，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为相应的一个样本值.

点估计问题就是要构造一个适当的统计量$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$，用它的观察值$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$来估计未知参数$\theta$.

$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$称为$\theta$的估计量.

$\hat{\theta}(x_1,x_2,\cdots,x_n)$称为$\theta$的估计值.

点估计问题的一般提法

设总体 X 的分布函数 $F(x;\theta)$ 的形式为已知, θ 是待估参数. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个样本, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为相应的一个样本值.

点估计问题就是要构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$, 用它的观察值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 来估计未知参数 θ.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\text{称为}\theta\text{的估计量.}\\[2ex] \hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)\text{称为}\theta\text{的估计值.}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{通称估计,}\\ \text{简记为}\hat{\theta}.\end{array}$$

点估计涉及的两个问题

- 其一 是如何给出估计，即估计的方法问题；

点估计涉及的两个问题

- 其一 是如何给出估计，即估计的*方法问题*;
- 其二 是如何对不同的估计进行评价，即估计的*好坏判断标准。*

一、 矩估计法

- 用样本矩去替换相应的总体矩
- 用样本矩的连续函数去替换相应的总体矩的连续函数

一、 <u>矩估计法</u>

- 用样本矩去*<u>替换</u>*相应的总体矩
- 用样本矩的连续函数去*<u>替换</u>*相应的总体矩的连续函数

通常采用原点矩

例1 设总体X服从$[0,\theta]$上的均匀分布,即密度函数

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}, & 0<x<\theta\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

其中θ未知,$X_1,X_2,\cdots,X_n$是一个样本,求θ的矩估计量

练习：设总体X服从$[\theta,\theta+1]$上的均匀分布，

其中θ未知，$X_1, X_2, \ldots, X_n$是一个样本，求θ的矩估计量

练习　设总体X的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\theta x^{-(\theta+1)}, & x>1\\ 0, & 其他\end{cases}$$

其中$\theta>1$未知，$X_1,X_2,\cdots,X_n$是一个样本，求θ的矩估计量

样本矩依概率收敛于相应的总体矩P140

$$A_l = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^l \xrightarrow{p} E\left(X^l\right) = \mu_l$$

样本矩的连续函数依概率收敛于相应的总体矩的连续函数.

$$g\left(A_1, \cdots, A_k\right) \xrightarrow{p} g\left(\mu_1, \cdots, \mu_k\right)$$

例3 设总体X的均值μ和方差σ^2都存在，且有$\sigma^2 > 0$，但μ和σ^2均为未知，又设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是一个样本，求μ和σ^2的矩估计量

例3 设总体X的均值μ和方差σ^2都存在，且有$\sigma^2 > 0$，但μ和σ^2均为未知，又设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是一个样本，求μ和σ^2的矩估计量

$$\hat{\mu} = A_1 = \overline{X},$$

$$\hat{\sigma}^2 = A_2 - A_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - \overline{X}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

例3 设总体X的均值μ和方差σ^2都存在，且有$\sigma^2>0$，但μ和σ^2均为未知，又设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是一个样本，求μ和σ^2的矩估计量

$$\hat{\mu}=A_1=\overline{X},$$

$$\hat{\sigma}^2=A_2-A_1^{\ 2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^{\ 2}-\overline{X}^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$$

总体均值与方差的矩估计量的表达式不因不同的总体分布而异.

例2 设总体 X 在 a, b 上服从均匀分布，a, b未知，又设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本，求a和b的矩估计量.

矩估计法的优缺点

矩估计法的优缺点

- 矩估计法的优点：简单易行，不需要知道总体的分布形式，只需要知道总体若干阶矩的形式；

矩估计法的优缺点

- 矩估计法的优点：简单易行，不需要知道总体的分布形式，只需要知道总体若干阶矩的形式；
- 矩估计法的缺点：总体分布形式已知的情形下，矩估计法不能够充分利用总体分布提供的信息。

二、 最大似然估计法

它是在总体类型已知条件下使用的一种参数估计方法 .

它首先是由德国数学家高斯在1821年提出的 . 然而,这个方法常归功于英国统计学家费歇 .

费歇在1922年重新发现了这一方法，并首先研究了这种方法的一些性质 .

A同学和一位猎人一起外出打猎。

一只野兔从前方窜出，只听一声枪响，野兔应声倒地.请推断：是谁开枪？

A同学和一位猎人一起外出打猎。

一只野兔从前方窜出，只听一声枪响，野兔应声倒地.请推断：是谁开枪？

看谁最有可能产生观察结果；

A同学和一位猎人一起外出打猎。

一只野兔从前方窜出，只听一声枪响，野兔应声倒地.请推断：是谁开枪？

看谁最有可能产生观察结果；

或者说，看谁使得观察结果出现的概率最大.

最大似然原理

A同学和一位猎人一起外出打猎。

一只野兔从前方窜出，只听一声枪响，野兔应声倒地.请推断：是谁开枪？

在参数空间中，**看谁最有可能产生观察结果；**

或者说，看谁使得观察结果出现的概率最大.

最大似然原理

(1) 设总体 X 属离散型

设分布律 $P\{X = x\} = p(x;\theta)$, θ 为待估参数, $\theta \in \Theta$,

$X_1, X_2, \cdots, X_n$**是来自总体X的样本,**

设$x_1,x_2,\ldots,x_n$是相应的一个样本值.

观察结果

则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 取到观察值$x_1, x_2, \cdots, x_n$的概率,

即事件$X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n$发生的概率为

设$x_1,x_2,\dots,x_n$是相应的一个样本值.

观察结果

则样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 取到观察值$x_1,x_2,\cdots,x_n$的概率,

即事件$X_1=x_1,X_2=x_2,\cdots,X_n=x_n$发生的概率为

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}p(x_i;\theta),\ \theta\in\Theta,$$

样本的似然函数

如果 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 使得

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

称 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 θ 的最大似然估计值 **(Maximum Likelihood Estimate)**；

称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 θ 的最大似然估计量 **(Maximum Likelihood Estimator).**

例4 设 $X \sim B(1,p)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的一个样本,求p的最大似然估计量.

例4 设 $X \sim B(1, p)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的一个样本,求p的最大似然估计量.

解 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为相应于样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的一个样本值,

X的分布律为 $P\{X = x\} = p^x(1-p)^{1-x}, x = 0,1$

似然函数

例4 设 $X \sim B(1, p)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的一个样本,求p的最大似然估计量.

解 设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为相应于样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的一个样本值,

X的分布律为 $P\{X = x\} = p^x (1-p)^{1-x}, x = 0,1$

似然函数 $L(p) = \prod_{i=1}^{n} p^{x_i} (1-p)^{1-x_i}$

$$= p^{\sum_{i=1}^{n} x_i} (1-p)^{n - \sum_{i=1}^{n} x_i},$$

$$\ln L(p)=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln p+\left(n-\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\ln(1-p),$$

令 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\ln L(p)=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{p}-\dfrac{n-\sum_{i=1}^{n}x_i}{1-p}=0,$

解得 p 的最大似然估计值 $\hat{p}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}.$

p 的最大似然估计量为 $\hat{p}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}.$

例4 设 $X \sim B(1, p)$, $X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自X的一个样本,求p的最大似然估计量.

解

解得p的最大似然估计值 $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}$.

p的最大似然估计量为 $\hat{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}$.

例 设总体X服从参数为λ的泊松分布，$x_1, x_2, \cdots, x_n$为一样本值，求参数λ的最大似然估计

例 设总体X服从参数为λ的泊松分布，$x_1, x_2, \cdots, x_n$为一样本值，求参数λ的最大似然估计

解 似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n} P(X=x_i)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}e^{-\lambda}\right)=\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n} x_i}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i!)}e^{-n\lambda}$$

$$\ln(L(\lambda))=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln(\lambda)-n\lambda-\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i!)$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln L(\lambda)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{\lambda}-n=0,$$

解得λ的最大似然估计值 $\lambda=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x},$

λ的最大似然估计量为 $\hat{\lambda}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i=\bar{X}.$

求最大似然估计值的一般步骤:

(一) 写出似然函数

$$L(\theta)=L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)$$

(二) 取对数

$$\ln L(\theta)$$

(三) 对 θ 求导 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}$, 并令 $\dfrac{\mathrm{d}\ln L(\theta)}{\mathrm{d}\theta}=0,$

解方程即得未知参数θ的最大似然估计值$\hat{\theta}$.

(2) 设总体 X 属连续型

设概率密度为$f(x;\theta)$, θ为待估参数, $\theta \in \Theta$,

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的样本,

设$x_1,x_2,\ldots,x_n$是相应的一个样本值.

观察结果

则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 取到观察值$x_1, x_2, \cdots, x_n$的概率,

即事件$X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n$发生的概率为

设$x_1,x_2,\ldots,x_n$是相应的一个样本值.

观察结果

则样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 取到观察值$x_1, x_2, \cdots, x_n$的概率,

即事件$X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n$发生的概率为

0

设$x_1,x_2,\ldots,x_n$是相应的一个样本值.

观察结果

则随机点$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$落在点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的邻域（边长分别为$dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$的n维立方体）内的概率近似地为

设$x_1,x_2,\ldots,x_n$是相应的一个样本值.

观察结果

则随机点$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$落在点$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的邻域（边长分别为$dx_1, dx_2, \cdots, dx_n$的n维立方体）内的概率近似地为

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)dx_i$$

$$=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\theta)\left(\prod_{i=1}^{n} dx_i\right)$$

$$L(\theta) = L(x_1, x_2, \cdots, x_n; \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i; \theta), \theta \in \Theta,$$

样本的似然函数

如果 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 使得

$$L(\hat{\theta}) = \max_{\theta \in \Theta} L(\theta)$$

称 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 θ 的最大似然估计值 **(Maximum Likelihood Estimate)；**

称 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 θ 的最大似然估计量 **(Maximum Likelihood Estimator).**

例 设$X_1,X_2,\ldots X_n$是取自总体X的一个样本,

设$x_1,x_2,\ldots,x_n$是相应的一个样本值.

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\theta x^{-(\theta+1)}, & 1<x \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $\theta>1$,

求 θ的最大似然估计值.

解　似然函数为

例 设$X_1,X_2,\dots X_n$是取自总体X的一个样本,
设$x_1,x_2,\dots,x_n$是相应的一个样本值.

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\theta x^{-(\theta+1)}, & 1<x \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

其中 $\theta>1$,

求 θ的最大似然估计值.

解　　似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{-\theta-1}=\theta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-\theta-1}$$

例 设$X_1,X_2,\ldots X_n$是取自总体X的一个样本，设$x_1,x_2,\ldots,x_n$是相应的一个样本值.

$$X \sim f(x)=\begin{cases}\theta x^{-(\theta+1)}, & 1<x \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$ 其中 $\theta>1$,

求 θ的最大似然估计值.

解　似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}\theta x_i^{-\theta-1}=\theta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{-\theta-1}$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=n\ln\theta+(-\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta) = n \ln \theta + (-\theta - 1)\sum_{i=1}^{n} \ln x_i$$

求导并令其为**0**

$$\frac{d \ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} \ln x_i \ \mathbf{=0}$$

从中解得

$$\boldsymbol{\theta = n \Big/ \sum_{i=1}^{n} \ln x_i}$$

即为 θ 的最大似然估计值 .

最大似然估计法也适用于分布中含有多个未知参数的情况. 此时只需令

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \theta_i} \ln L = 0, \qquad i = 1,2,\cdots,k.}$$

对数似然方程组

解出由 k 个方程组成的方程组,即可得各未知参数 $\theta_i\ (i = 1,2,\cdots,k)$ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}_i$.

例5 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2为未知参数, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是来自X的一个样本值, 求μ和σ^2的最大似然估计量.

解 X的概率密度为 $$f(x;\mu,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

似然函数为 $$L(\mu,\sigma^2)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2)=-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-\frac{n}{2}\ln\sigma^2-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

$$\ln L(\mu,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2,$$

令 $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\mu}\ln L(\mu,\sigma^2) = 0, \\ \dfrac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln L(\mu,\sigma^2) = 0, \end{cases}$$

最大似然估计值 $$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{x}, \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2. \end{cases}$$

最大似然估计量 $$\begin{cases} \hat{\mu} = \bar{X}, \\ \hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2. \end{cases}$$

例6 设总体 X 在 $[a,b]$ 上服从均匀分布，其中 a，b 未知，$x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是来自总体 X 的一个样本值，求 a,b 的最大似然估计量.

例6 设总体X在$[a,b]$上服从均匀分布,其中a,b未知, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是来自总体X的一个样本值,求a,b的最大似然估计量.

解

X的概率密度为

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

例6 设总体X在$[a,b]$上服从均匀分布,其中a,b未知, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是来自总体X的一个样本值,求a,b的最大似然估计量.

解 记 $x_{(1)} = \min(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

$x_{(n)} = \max(x_1, x_2, \cdots, x_n)$,

X的概率密度为

$$f(x; a, b) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

因为$a \le x_1, x_2, \cdots, x_n \le b$等价于$a \le x_{(1)}, x_{(n)} \le b$,

作为a, b的函数的似然函数为

$$L(a,b)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^n}, & a \le x_{(1)},\ b \ge x_{(n)} \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

于是对于满足条件 $a \le x_{(1)},\ b \ge x_{(n)}$的任意$a,b$有

$$L(a,b)=\frac{1}{(b-a)^n} \le \frac{1}{(x_{(n)}-x_{(1)})^n},$$

即似然函数 $L(a,b)$ 在 $a=x_{(1)}$，$b=x_{(n)}$ 时

取到最大值 $(x_{(n)}-x_{(1)})^{-n}$，

a,b 的最大似然估计值

$\hat{a}=x_{(1)}=\min\limits_{1\le i\le n} x_i$，　$\hat{b}=x_{(n)}=\max\limits_{1\le i\le n} x_i$，

a,b 的最大似然估计量

$$\hat{a}=\min_{1\le i\le n} X_i,\qquad \hat{b}=\max_{1\le i\le n} X_i .$$

例5 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$, μ,σ^2为未知参数, $x_1,x_2,\cdots,x_n$是来自X的一个样本值, 求μ和σ^2的最大似然估计量.

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$ 是σ^2的最大似然估计；

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}$$ 是 σ 的最大似然估计?

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$ 是 σ^2 的最大似然估计；

$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2}$ 是 σ 的最大似然估计?

$\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计,

$u\left(\hat{\theta}\right)$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计?

最大似然估计的不变性:

设 θ 的函数 $u=u(\theta), \theta\in\Theta$ 具有单值反函数 $\theta=\theta(u), u\in \mathrm{U}$. 又设 $\hat{\theta}$ 是 X 的概率密度函数 $f(x;\theta)$ (f 形式已知) 中的参数 θ 的最大似然估计, 则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计.

例　设 X 服从参数为 $\lambda\,(\lambda>0)$ 的泊松分布, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自 X 的一个样本, 求 λ 的最大似然估计量. 以及 $p=P(X=0)$ 的最大似然估计量。

解　因为 X 的分布律为

$$P\{X=x\}=\frac{\lambda^x}{x!}\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad (x=0,1,2,\cdots,n)$$

所以 λ 的似然函数为

$$L(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}\mathrm{e}^{-\lambda}\right)=\mathrm{e}^{-n\lambda}\frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{n}x_i}}{\prod_{i=1}^{n}(x_i!)},$$

$$\ln L(\lambda) = -n\lambda + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\ln\lambda - \sum_{i=1}^{n}(x_i!),$$

令 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\ln L(\lambda) = -n + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\lambda} = 0,$$

解得λ的最大似然估计值 $\lambda = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x},$

λ的最大似然估计量为 $\hat{\lambda} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \bar{X}.$

因为$P(X=0) = e^{-\lambda}$是λ 的单调函数，所以，

$p=P(X=0)$的最大似然估计量为$\hat{p} = e^{-\bar{X}}$

作业：

- P173　　2；3

例6 设总体X在$[a,b]$上服从均匀分布,其中a, b未知, $x_1, x_2, \cdots, x_n$是来自总体X的一个样本值,求a,b的最大似然估计量.

解 a, b的最大似然估计量

$$\hat{a} = \min_{1 \le i \le n} X_i, \qquad \hat{b} = \max_{1 \le i \le n} X_i \ .$$

第三节　估计量的评选标准

(1)对于同一个参数究竟采用哪一个估计量好?

(2)评价估计量的标准是什么?

（一）无偏性

若估计量$\hat{\theta}=\theta(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的数学期望$E(\hat{\theta})$存在，且对于任意$\theta\in\Theta$有$E(\hat{\theta})=\theta$，则称$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计量.

（一）无偏性

若估计量$\hat{\theta}=\theta(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的数学期望$E(\hat{\theta})$存在,且对于任意$\theta\in\Theta$有$E(\hat{\theta})=\theta$, 则称$\hat{\theta}$是$\theta$的无偏估计量.

无偏估计的实际意义： 无系统误差.

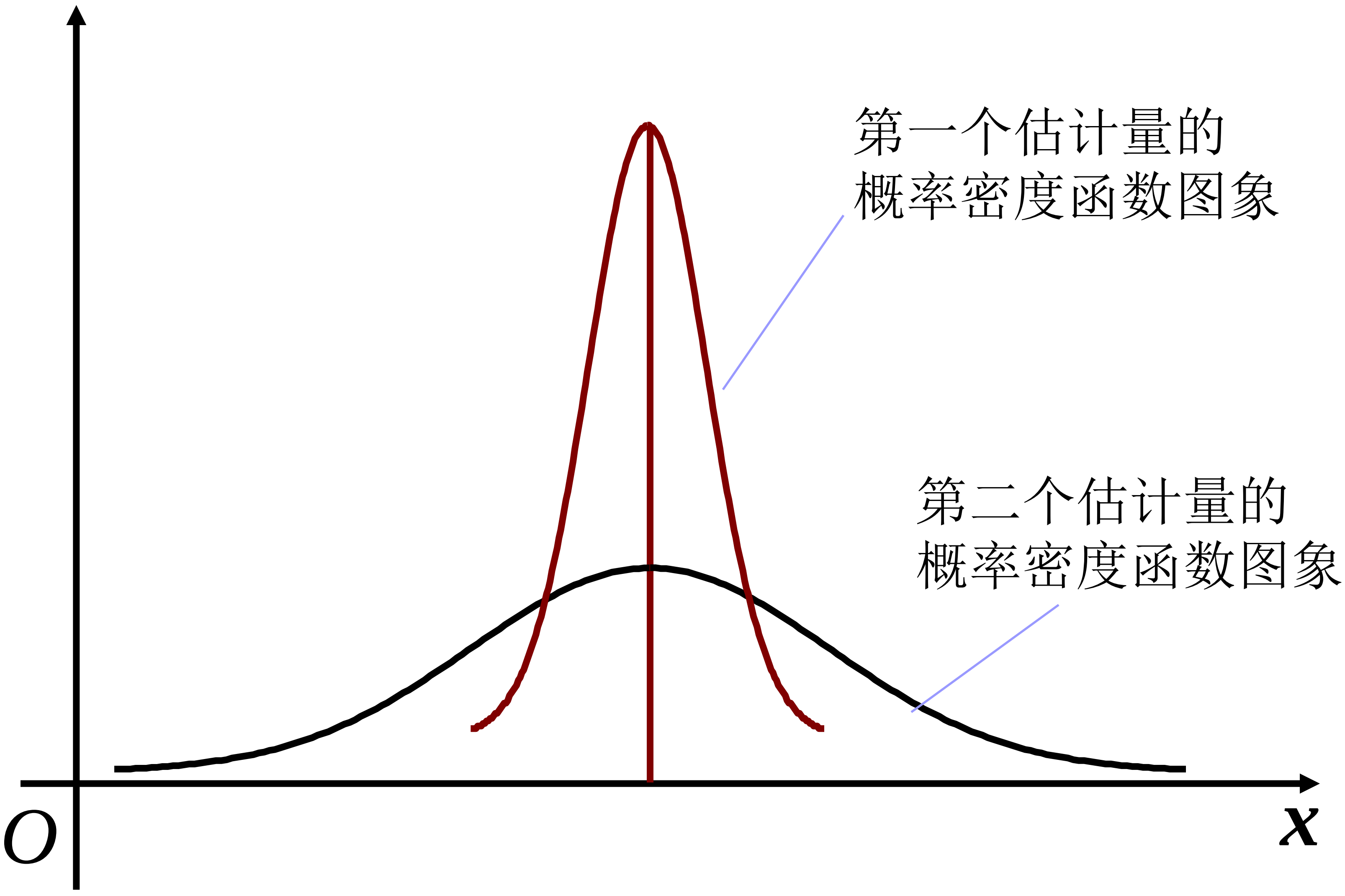
例 设总体 X 的均值为μ, 方差为σ^2, $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的随机样本，记 $\overline{X}$ 与 S^2分别为样本均值与样本方差，即

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\quad S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2.$$

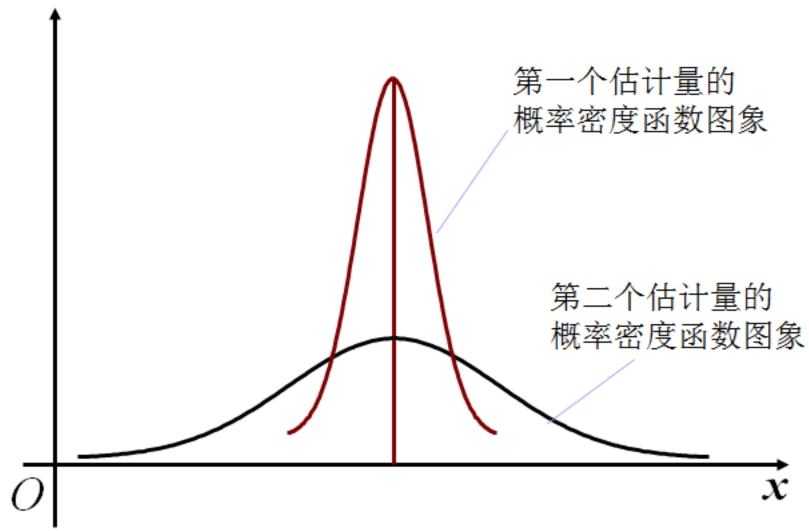
则 $E(\overline{X})=\mu$, $E(S^2)=\sigma^2$.

例1 设总体X的k阶矩$\mu_k = E(X^k)\ (k \geq 1)$存在，又设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是$X$的一个样本，试证明不论总体服从什么分布，$k$阶样本矩$A_k = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k$是$k$阶总体矩$\mu_k$的无偏估计.

思考：总体均值μ还有没有其他的无偏估计量？


第一个估计量的
概率密度函数图象
第二个估计量的
概率密度函数图象
O
x

（二）有效性



设 $\hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 与 $\hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 都是 θ 的无偏估计量，若有 $D(\hat{\theta}_1) \le D(\hat{\theta}_2)$，

则称 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

（三）相合性

（三）相合性

若$\hat{\theta}=\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为参数$\theta$的估计量，若对于任意$\theta\in\Theta$，当$n\to\infty$时，$\hat{\theta}(X_1,X_2,\cdots,X_n)$依概率收敛于$\theta$，则称$\hat{\theta}$为$\theta$的相合估计量.

估计量的评价标准

- 无偏性
- 有效性
- 相合性

作业：

- P175　　9；12；14
- 思考　　13

第四节　　区间估计

用空空导弹击落敌机的两种模式

1、导弹直接命中敌机将其击毁

要求精确估计敌机位置

第四节　区间估计

用空空导弹击落敌机的两种模式

1、导弹直接命中敌机将其击毁

要求精确估计敌机位置

2、导弹接近敌机时引爆，依靠高速飞行的弹片将其击毁

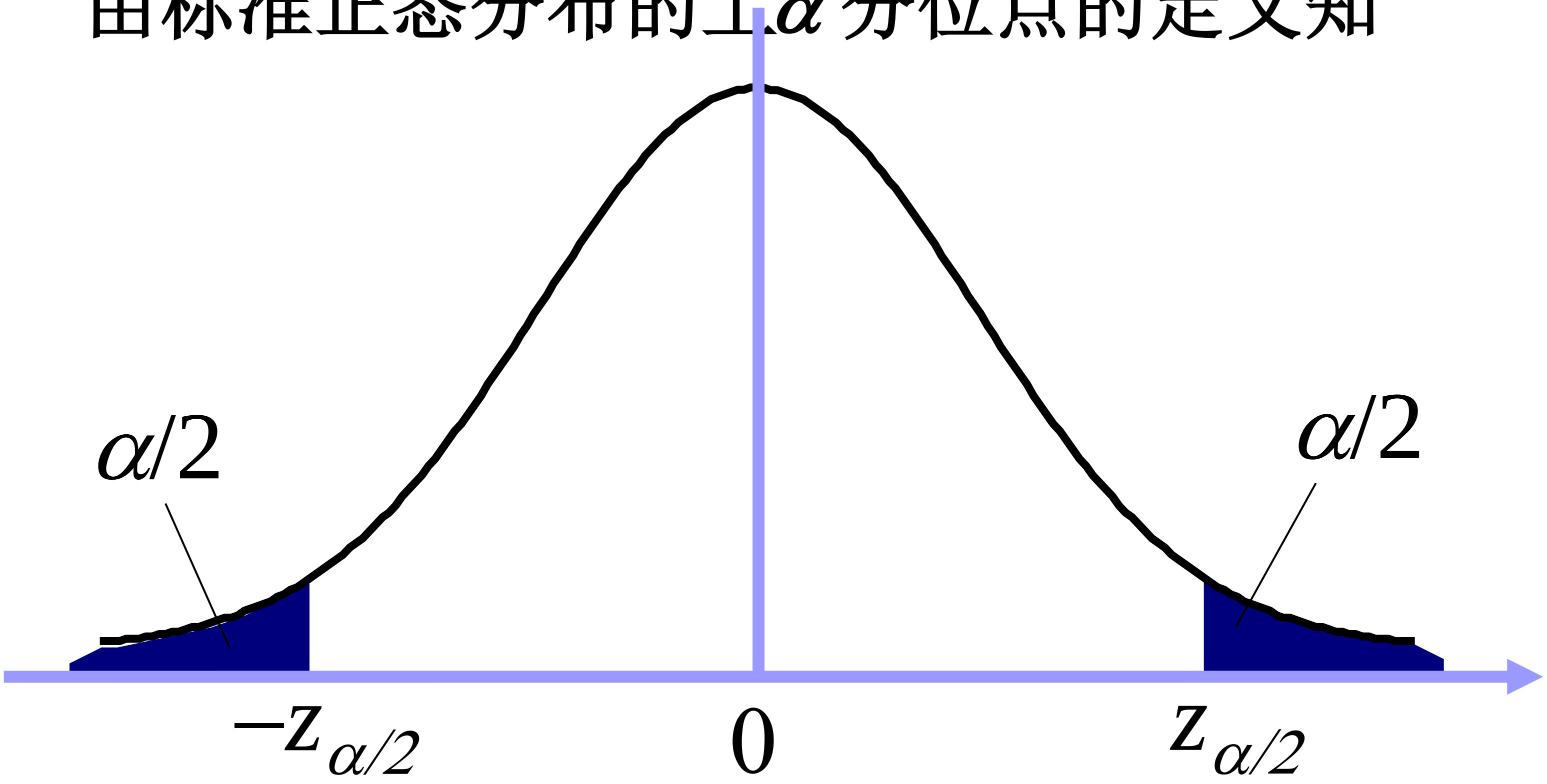
不需要估计敌机精确位置，
只需要判断敌机范围，

例1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 其中 σ^2 为已知, μ 为未知, 求 μ 的矩估计量.

例1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的样本, 其中 σ^2 为已知, μ 为未知, 求 μ 的矩估计量.

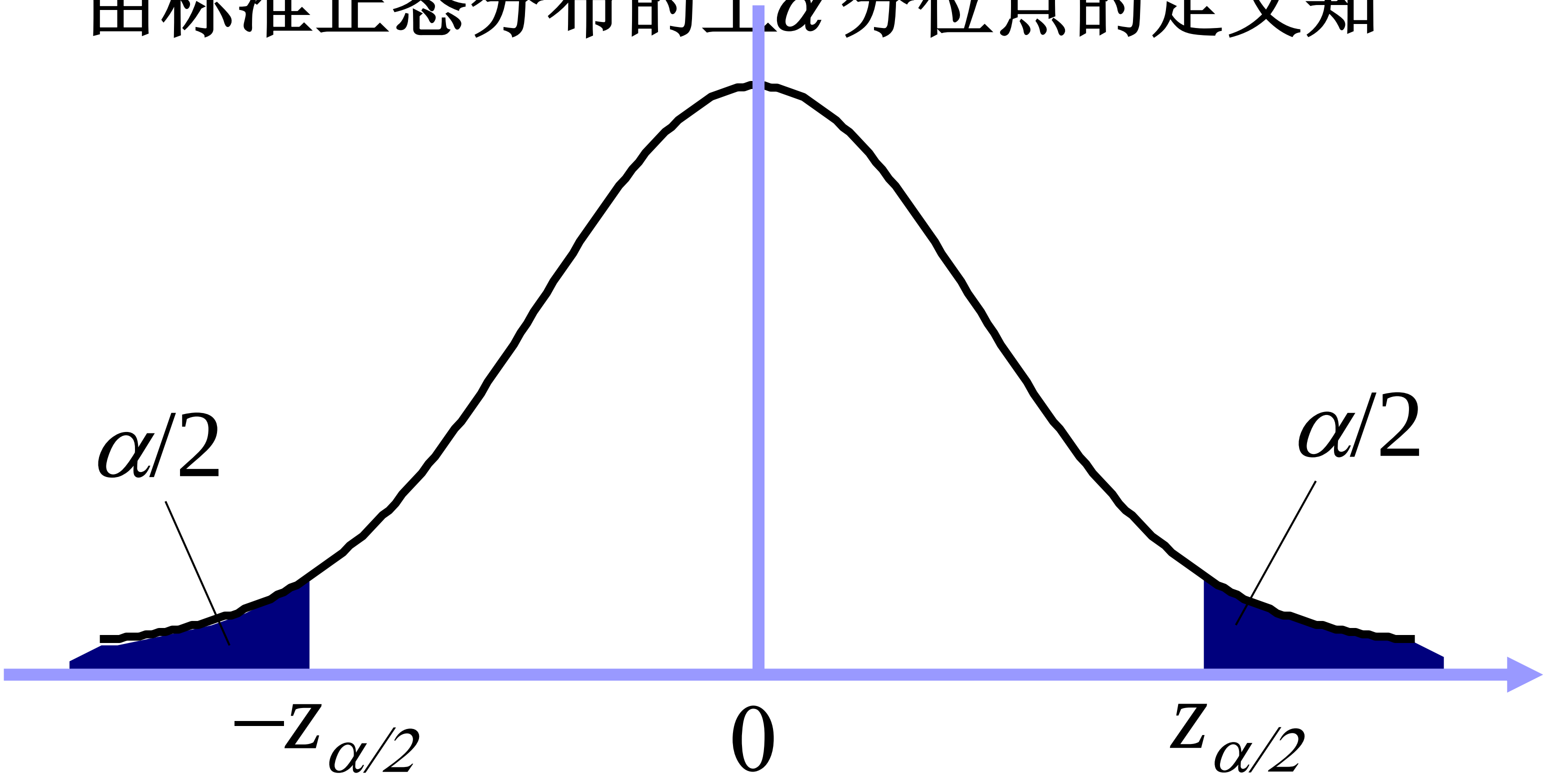
$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$ **是不依赖于任何未知参数的,**

由标准正态分布的上α分位点的定义知



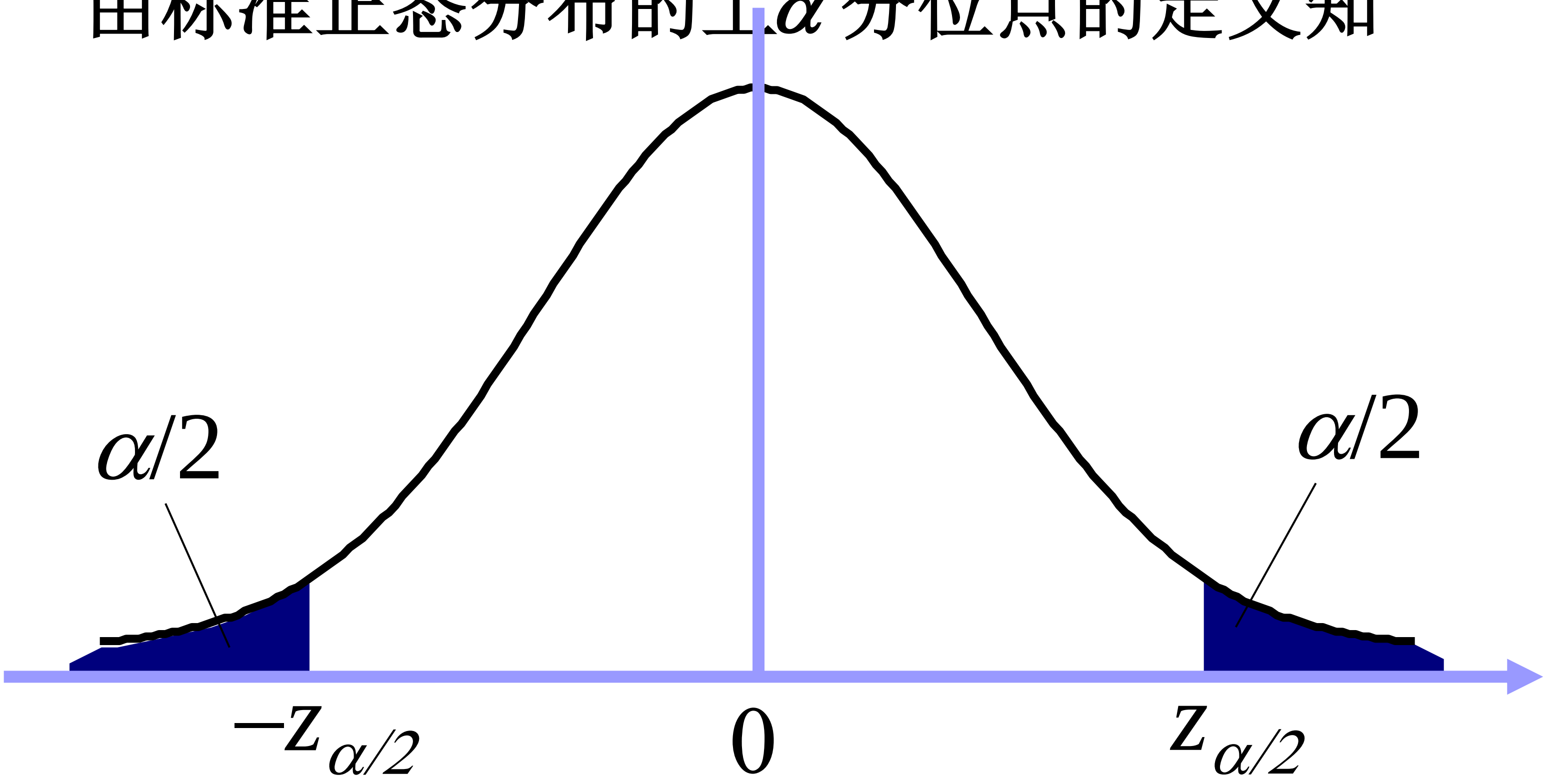
$$P\left\{\left|\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}=$$

由标准正态分布的上α分位点的定义知



$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}= \qquad 1-\alpha \quad ,$$

由标准正态分布的上α分位点的定义知



$$P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right|<z_{\alpha/2}\right\}=1\text{-}\alpha,$$

即 $$P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

1. 估计要尽量可靠， 即区间包含μ的可能性很大,

2. 估计的精度要尽可能的高. 如要求区间长度

尽可能短.

即 $P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$

1. 估计要尽量可靠， 即区间包含μ的可能性很大,

2. 估计的精度要尽可能的高. 如要求区间长度尽可能短.

可靠度与精度是一对矛盾，一般是在保证可靠度的条件下尽可能提高精度.

即 $$P\left\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

1. 置信区间的定义

设总体X的分布函数$F(x;\theta)$含有一个未知参数θ, 对于给定值α $(0<\alpha<1)$, 若由样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$确定的两个统计量

$\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$和$\overline{\theta}=\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 满足

$$\boxed{P\{\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\theta<\overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}\geq 1-\alpha,}$$

则称随机区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间, $\underline{\theta}$ 和 $\overline{\theta}$分别称为置信水平为$1-\alpha$的双侧置信区间的置信下限和置信上限, $1-\alpha$称为置信水平.

即 $P\left\{\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$

置信下限

置信上限

于是得μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$$

这样的置信区间常写成 $\left(\overline{X}\pm\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right).$

$$\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right).$$

取 $n = 16$, $\sigma = 1$, $\alpha = 0.05$, $z_{\alpha/2} = z_{0.025} = 1.96$,

得一个置信水平为0.95的置信区间 $\left(\overline{X} \pm \frac{1}{\sqrt{16}} \times 1.96\right)$

由一个样本值算得样本均值的观察值 $\overline{x} = 5.20$,

则置信区间为 (5.20 ± 0.49), 即 $(4.71, 5.69)$.

不是随机区间

$$P\left\{\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}<\mu<\bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\alpha/2}\right\}=1-\alpha,$$

若反复抽样多次(各次得到的样本容量相等,都是*n*)

每次可确定一个区间

每个这样的区间要么包含 μ 的真值,

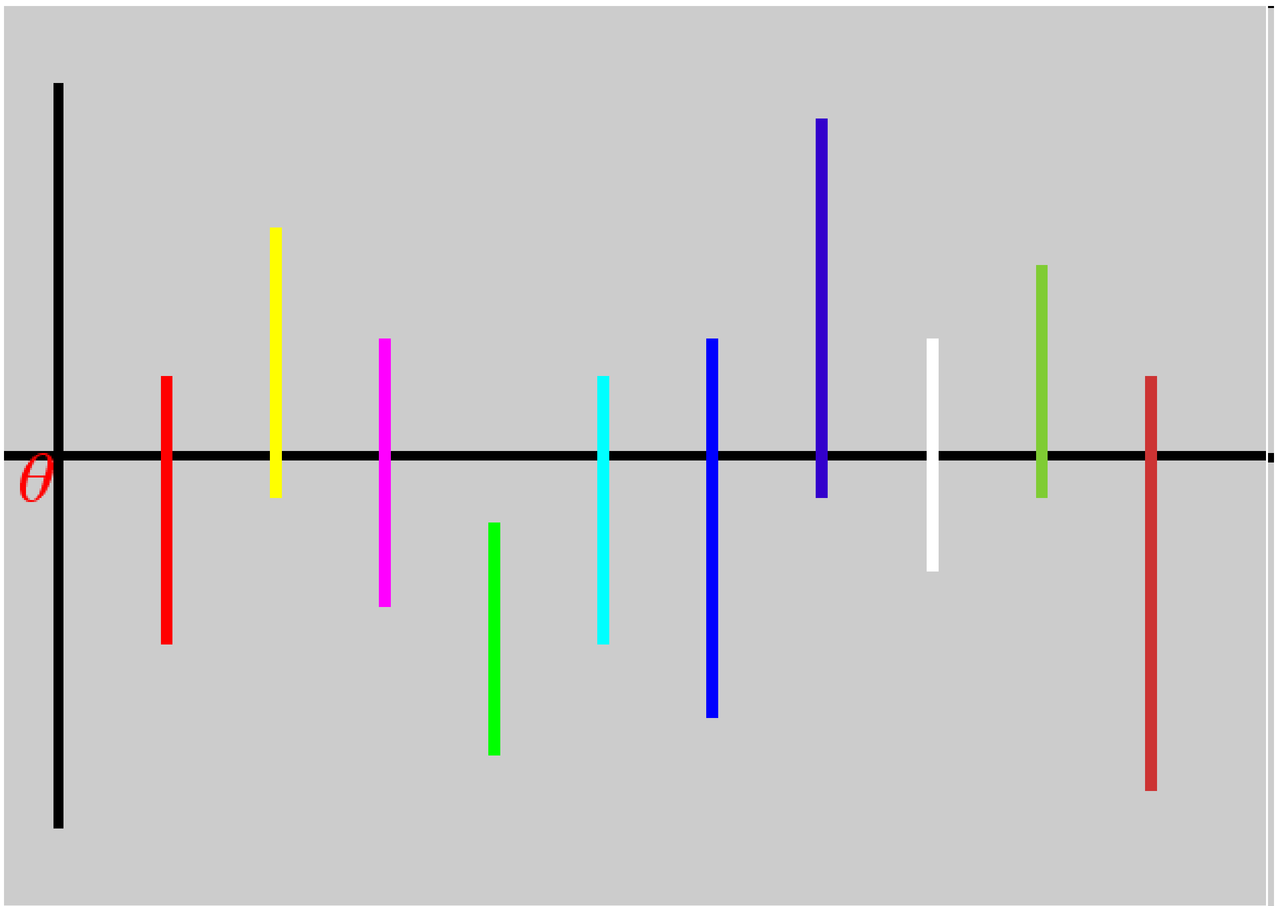
要么不包含 μ 的真值,

按频率稳定于概率, 在这样多的区间中,

包含μ真值的约占$(1-\alpha)$, 不包含μ的约占α.

例如 若 $\alpha = 0.05$, 反复抽样 1000 次,

则得到的 1000 个区间中包含 μ真值的约为950个.



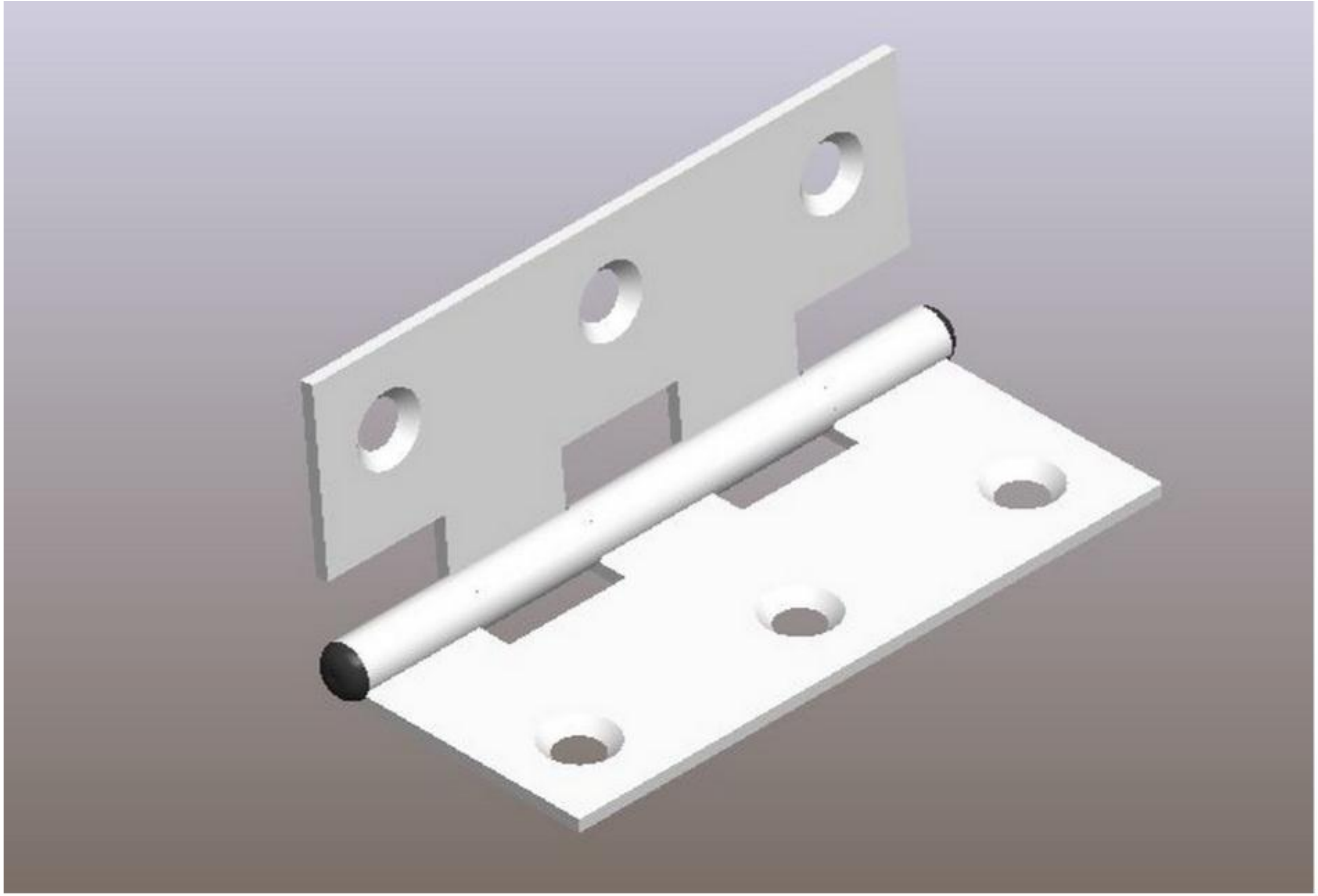
求置信区间的一般步骤

(1) 寻求一个样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的函数:

$$W = W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$$ **枢轴量**

其中仅包含待估参数 θ, 并且 W 的分布已知且不依赖于任何未知参数.

枢轴



求置信区间的一般步骤

(1) 寻求一个样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的函数:

$$W = W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta)$$ **枢轴量**

其中仅包含待估参数 θ, 并且 W 的分布已知且不依赖于任何未知参数.

(2) 对于给定的置信水平 $1-\alpha$, 定出两个常数 a, b, 使 $P\{a < W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b\} = 1-\alpha$.

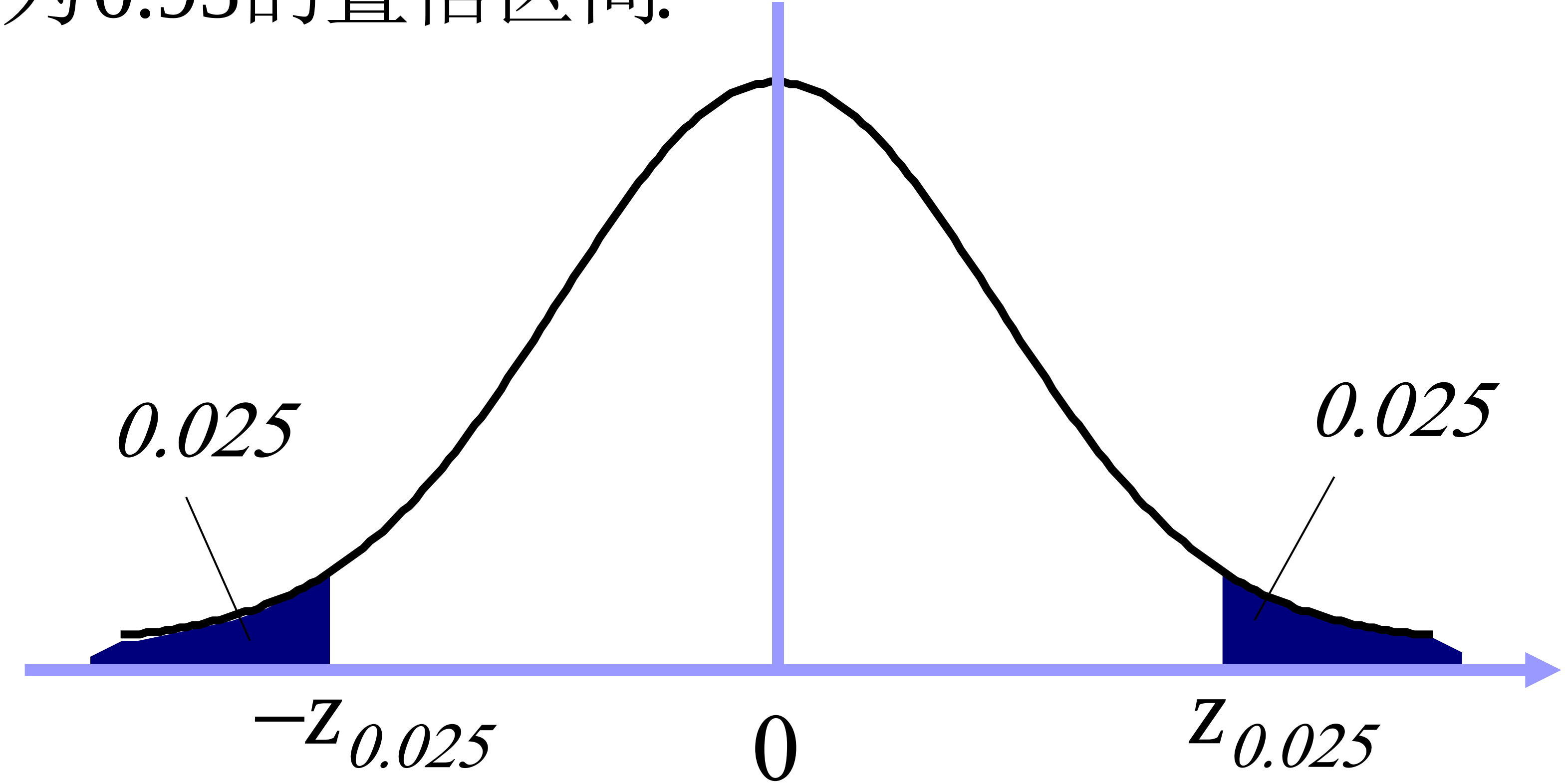
(3) 从 $a < W(X_1, X_2, \cdots, X_n; \theta) < b$ 得到等价的不等式 $\underline{\theta} < \theta < \overline{\theta}$,

关于置信区间的构造有两点说明：

- 关键在于构造枢轴量，一般从θ 的点估计出发。
- 满足置信度要求的a与b通常不唯一。

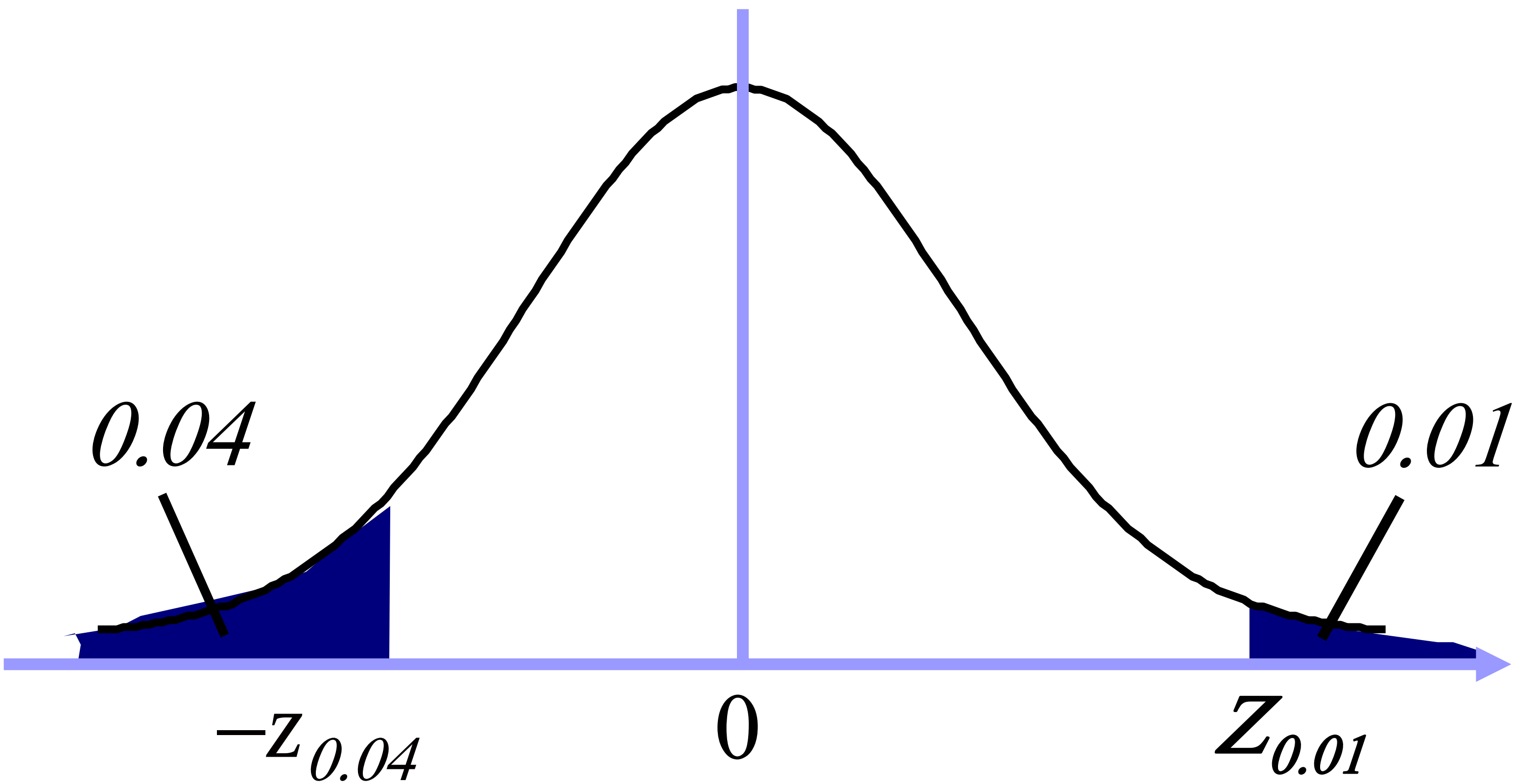
给定 $\alpha = 0.05$, 则有 $P\left\{-z_{0.025} < \dfrac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.025}\right\} = 0.95$,

故 $\left(\bar{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025},\ \bar{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.025}\right)$ 是 μ 的置信水平为0.95的置信区间.



给定 $\alpha = 0.05$, 则又有 $P\left\{-z_{0.04} < \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} < z_{0.01}\right\} = 0.95$,

故 $\left(\overline{X} - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.01},\ \overline{X} + \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{0.04}\right)$ 也是 μ 的置信水平为0.95的置信区间.



比较两个置信区间的长度(长度短表示估计的精度高)

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025},\ \ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}\right)$$

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.01},\ \ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.04}\right)$$

比较两个置信区间的长度(长度短表示估计的精度高)

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}\right)\quad L_1=2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}=3.92\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.01},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.04}\right)\quad L_2=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04}+z_{0.01})=4.08\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

显然 $L_1 < L_2$.

比较两个置信区间的长度(长度短表示估计的精度高)

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}\right)\quad L_1=2\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.025}=3.92\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

$$\left(\bar{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.01},\ \bar{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{0.04}\right)\quad L_2=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}(z_{0.04}+z_{0.01})=4.08\times\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

显然 $L_1 < L_2$.

象$N(0,1)$分布那样其概率密度的图形是单峰且对称的情况, 当n固定时, 以形如(4.5)那样的区间其长度为最短.

关于置信区间的构造有两点说明：

- 关键在于构造枢轴量，一般从θ 的点估计出发。
- 满足置信度要求的a与b通常不唯一。若有可能，应选平均长度$E\left(\underline{\theta} - \overline{\theta}\right)$达到最短的$a$与$b$。这往往很难实现。

因此，常这样选择 a与b，使得两个尾部概率各为$\alpha/2$，即$P(W<a)=P(W>b)=\alpha/2$，这样的置信区间称为等尾置信区间。

第五节　正态总体均值与方差的区间估计

一、单个总体的情况

二、两个总体的情况

一、单个总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的情况

设给定置信水平为$1-\alpha$, 并设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本, $\overline{X}, S^2$ 分别是样本均值和样本方差.

1. 均值 μ 的置信区间

(1) σ^2为已知,

μ的一个置信水平为$1-\alpha$的置信区间 $\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$.

(2) σ^2为未知,

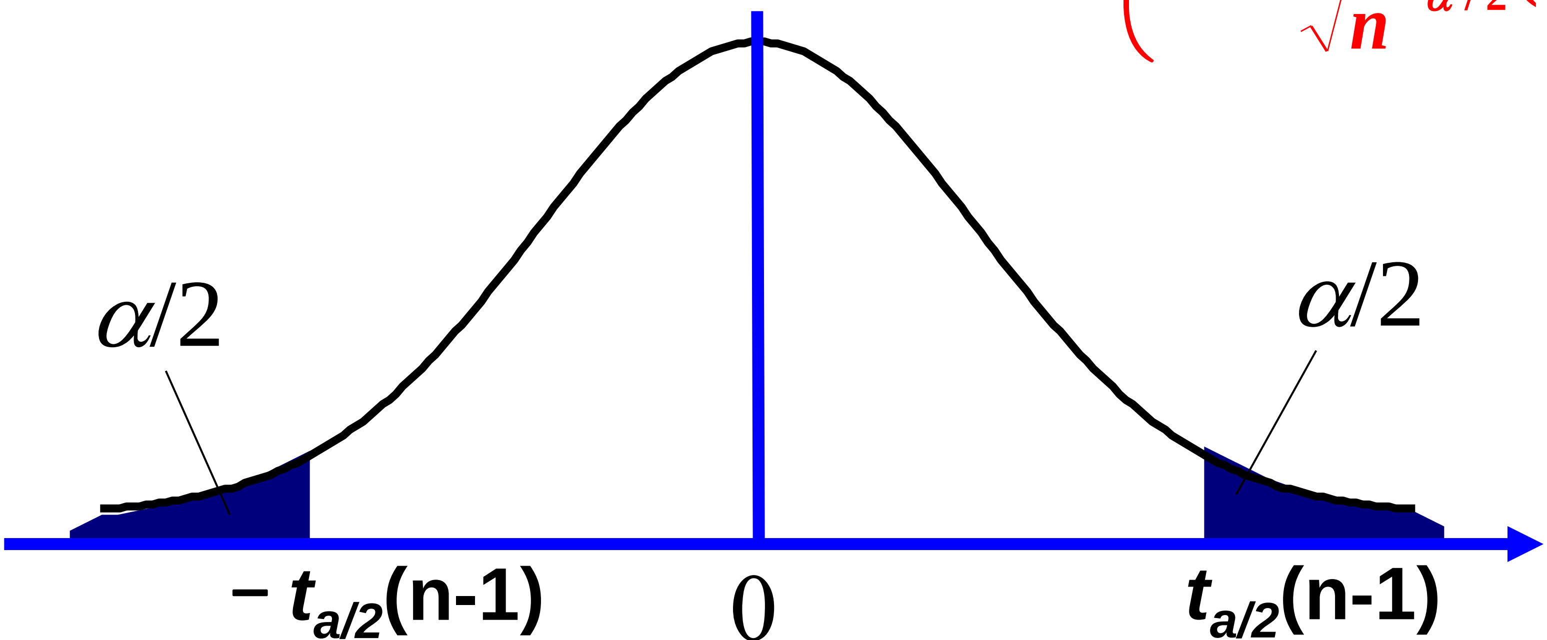
由于区间$\left(\overline{X} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{\alpha/2}\right)$中含有未知参数$\sigma$,不能直接使用此区间,

又根据第六章定理三知 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

则 $P\left\{-t_{\alpha/2}(n-1) < \dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1) < \mu < \overline{X} + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

于是得 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间 $\left(\overline{X} \pm \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1)\right)$.



例1 有一大批糖果,现从中随机地取16袋, 称得重量(克)如下:

506	508	499	503	504	510	497	512
514	505	493	496	506	502	509	496

设袋装糖果的重量服从正态分布, 试求总体均值 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间.

解 $\alpha = 0.05,\quad n-1=15,$

查 $t(n-1)$ 分布表可知: $t_{0.025}(15) = 2.1315,$

计算得 $\bar{x} = 503.75,\quad s = 6.2022,$

得μ的置信水平为 95% 的置信区间

$$\left(503.75 \pm \frac{6.2022}{\sqrt{16}} \times 2.1315\right) \text{即} \quad (500.4, \quad 507.1).$$

就是说估计袋装糖果重量的均值在500.4克与507.1克之间, 这个估计的可信程度为95%.

2. 方差 σ^2 的置信区间

根据实际需要, 只介绍 μ 未知的情况.

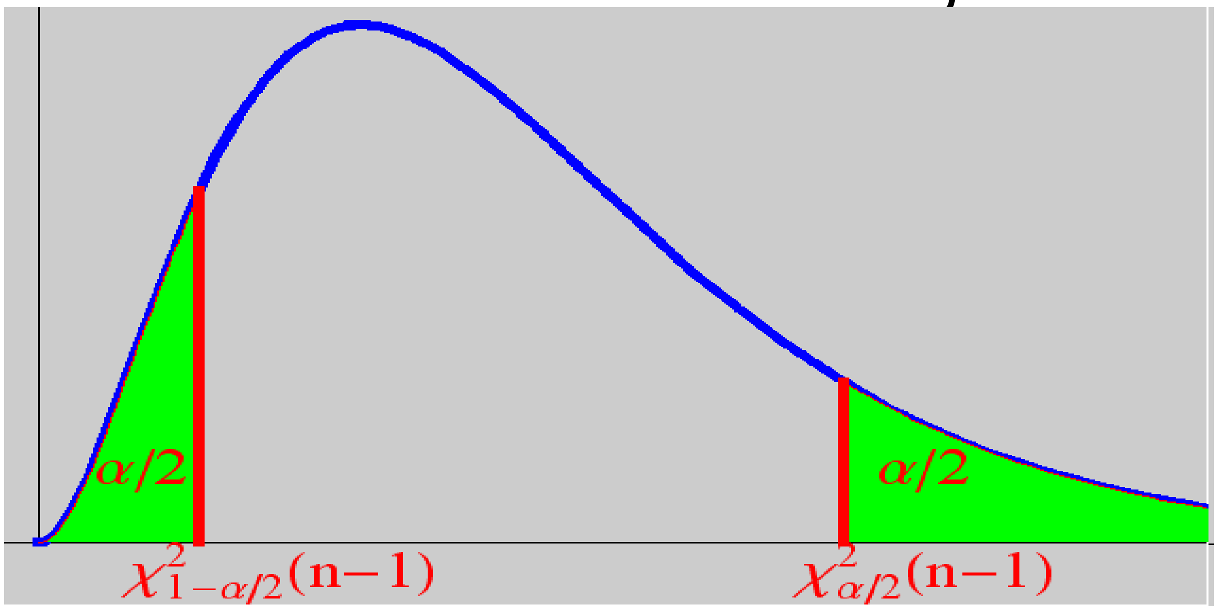
2. 方差 σ^2 的置信区间

根据实际需要，只介绍 μ 未知的情况.

因为 S^2 是 σ^2 的无偏估计,

根据第六章第二节定理二知 $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

则 $P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,



则 $$P\left\{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1) < \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} < \chi^2_{\alpha/2}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$$

即 $$P\left\{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$$

于是得方差σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}\right).$$

标 准 差 σ 的 一 个 置 信 水 平 为 $1-\alpha$ 的 置 信 区 间

$$\left(\frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}}, \quad \frac{\sqrt{n-1}S}{\sqrt{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}}\right).$$

例2 (续例1) 求例1中总体标准差 σ 的置信水平为0.95的置信区间.

解 $\dfrac{\alpha}{2}=0.025,\quad 1-\dfrac{\alpha}{2}=0.975,\quad n-1=15,$

查 $\chi^2(n-1)$ 分布表可知:

$\chi^2_{0.025}(15)=27.488,\quad \chi^2_{0.975}(15)=6.262,$

计算得 $s=6.2022,$

代入公式得标准差的置信区间 $(4.58,\ 9.60)$.

二、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

设甲厂产品的某质量指标 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

设乙厂产品的某质量指标 $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

为了比较产品质量指标，需要考虑

$\mu_1-\mu_2$，σ_1^2/σ_2^2 **的统计推断问题。**

二、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

设产品的某质量指标 $X \sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$

由于原材料的改变、或设备条件发生变化、或技术革新等因素的影响，使得产品质量指标可能发生变化，此时产品的质量指标为 $Y \sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$

为了了解产品质量指标有多大的变化，需要考虑 $\mu_1-\mu_2$, σ_1^2/σ_2^2 **的统计推断问题**

二、两个总体 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 的情况

给定置信水平为$1-\alpha$, 并设 $X_1, X_2, \cdots, X_{n_1}$ 为第一个总体$N(\mu_1,\sigma_1{}^2)$的样本, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_{n_2}$ 为第二个总体$N(\mu_2,\sigma_2{}^2)$的样本, $\bar{X}, \bar{Y}$分别是第一、二个总体的样本均值, $S_1{}^2, S_2{}^2$分别是第一、二个总体的样本方差.

两个总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信区间（方差已知）

两个总体均值差$\mu_1-\mu_2$的置信区间（方差已知）

由$\bar{X}, \bar{Y}$的独立性及 $\bar{X} \sim N\left(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}\right)$, $\bar{Y} \sim N\left(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$,

可知 $\bar{X}-\bar{Y} \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}\right)$,

或 $\dfrac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1}+\dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)$,

于是得 $\mu_1-\mu_2$的一个置信水平为 $1-\alpha$的置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right).$$

$\sigma_1^{\ 2} = \sigma_2^{\ 2} = \sigma^2$, 但 σ^2 为未知,(方差未知但相等)

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y})-(\mu_1-\mu_2)}{S_w\sqrt{\dfrac{1}{n_1}+\dfrac{1}{n_2}}} \sim t(n_1+n_2-2),$$

$\mu_1-\mu_2$的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\bar{X}-\bar{Y} \pm t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)S_w\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}\right).$$

其中 $S_w^{\ 2} = \dfrac{(n_1-1)S_1^{\ 2}+(n_2-1)S_2^{\ 2}}{n_1+n_2-2}$, $\quad S_w = \sqrt{S_w^{\ 2}}$.

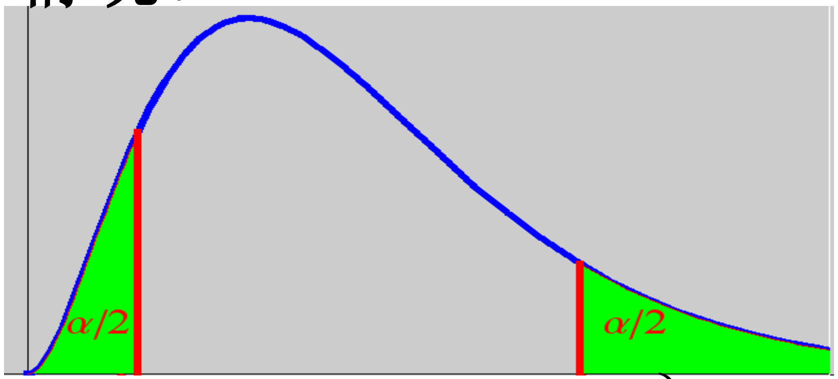
例3 为比较I, II两种型号步枪子弹的枪口速度，随机地取I型子弹10发，得到枪口速度的平均值为 $\bar{x}_1 = 500(\text{m/s})$，标准差 $s_1 = 1.10(\text{m/s})$，随机地取II型子弹20发，得枪口速度平均值为 $\bar{x}_2 = 496(\text{m/s})$，标准差 $s_2 = 1.20(\text{m/s})$，假设两总体都可认为近似地服从正态分布，且由生产过程可认为它们的方差相等，求两总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的置信水平为 0.95的置信区间.

2.两个总体方差比$\dfrac{\sigma_1^{\ 2}}{\sigma_2^{\ 2}}$的置信区间

仅讨论总体均值 μ_1, μ_2 为未知的情况.

2.两个总体方差比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信区间

仅讨论总体均值 μ_1, μ_2 为未知的情况.



$$\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1),$$

$$P\left\{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1) < \frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} < F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)\right\} = 1-\alpha$$

于是得 $\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}, \ \frac{S_1^2}{S_2^2}\frac{1}{F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)}\right).$$

例5 研究由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径, 随机抽取机器 A 生产的管子 18 只, 测得样本方差为 $s_1^2 = 0.34(\mathrm{mm}^2)$; 抽取机器$B$生产的管子 13 只，测得样本方差为 $s_2^2 = 0.29(\mathrm{mm}^2)$. 设两样本相互独立,且设由机器 A 和机器 B 生产的钢管内径分别服从正态分布 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\mu_i, \sigma_i^2 (i = 1,2)$ 均未知, 求方差比 σ_1^2 / σ_2^2 的置信度为 0.90 的置信区间.

P175

- 作业：

16;18;21;22;23

第七节　单侧置信区间

一、问题的引入

二、基本概念

三、典型例题

四、小结

一、问题的引入

在以上各节的讨论中,对于未知参数θ,我们给出两个统计量$\underline{\theta}$, $\overline{\theta}$,得到θ的双侧置信区间$(\underline{\theta}, \overline{\theta})$.

但在某些实际问题中, 例如, 对于设备、元件的寿命来说, 平均寿命长是我们希望的, 我们关心的是平均寿命 θ的“下限”; 与之相反, 在考虑产品的废品率 p时, 我们常关心参数 p的“上限”, 这就引出了单侧置信区间的概念.

二、基本概念

1. 单侧置信区间的定义

对于给定值α $(0<\alpha<1)$，若由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的统计量 $\underline{\theta}=\underline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，对于任意$\theta \in \Theta$满足

$$P\{\theta > \underline{\theta}\} \geq 1-\alpha,$$

则称随机区间$(\underline{\theta}, +\infty)$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间，$\underline{\theta}$称为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限.

又如果统计量 $\overline{\theta} = \overline{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，对于任意$\theta \in \Theta$满足

$$P\{\theta < \overline{\theta}\} \geq 1 - \alpha,$$

则称随机区间$(-\infty, \overline{\theta})$是$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信区间，$\overline{\theta}$称为$\theta$的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信上限.

2. 正态总体均值与方差的单侧置信区间

设正态总体 X 的均值是μ, 方差是σ^2 (均为未知),

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一个样本,

由 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$,

有 $P\left\{\dfrac{\overline{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} < t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\mu > \overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\mu > \overline{X} - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1)\right\} = 1-\alpha,$

于是得 μ 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1), +\infty\right),$$

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信下限

$$\underline{\mu} = \overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1).$$

又根据$\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$,

有 $P\left\{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} > \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha$,

即 $P\left\{\sigma^2 < \dfrac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right\} = 1-\alpha,$

于是得 σ^2 的一个置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信区间

$$\left(0,\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}\right),$$

σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的单侧置信上限

$$\overline{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}.$$

三、典型例题

例1 设从一批灯泡中, 随机地取5只作寿命试验, 测得寿命(以小时计)为 1050, 1100, 1120, 1250, 1280, 设灯泡寿命服从正态分布, 求灯泡寿命平均值的置信水平为 0.95 的单侧置信下限.

解 $1-\alpha = 0.95, \quad n = 5, \quad \bar{x} = 1160, \ s^2 = 9950,$

$$t_\alpha(n-1) = t_{0.05}(4) = 2.1318,$$

μ 的置信水平为0.95的置信下限

$$\underline{\mu} = \bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1) = 1065.$$

第七章　　参数估计

第一节　点估计

第三节　估计量的评选标准

第四节　区间估计

第五节　正态总体均值与方差的区间估计

第六节　（0-1）分布参数的区间估计

第七节　单侧置信区间