深圳大学期末考试卷

开/闭卷 闭卷　　　　A/B 卷 A

课程编号 1300530001 课序号 01-10 课程名称 概率论与数理统计 学分 3

命题人(签字)__________ 审题人(签字)__________ ____年____月____日

题号	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	基本题总分	附加题
得分												
评卷人												

学院____ 专业____ 姓名____ 学号____ 座号____

（密封线内不答题）密 封 线

一、　选择题（4 分×6）

1. 对于任意两事件A和B,若有$P(AB)=0$, 则下列命题正确的是（ D ）。

(A) A与B不相关

(B) A与B相互独立

(C) $P(A)=0$，或$P(B)=0$

(D) $P(A-B)=P(A)$

2. 设X,Y为随机变量,若$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$，则有(B)

(A) $D(XY)=D(X)D(Y)$

(B) $E(XY)=E(X)E(Y)$

(C) X和Y相互独立

(D) X和Y不独立

3. 设随机变量X具有对称的概率密度，即$f(x)=f(-x)$, 其分布函数为$F(x)$ ，则 $P\{|X|<a\}=$ (B)。

(A) $2[1-F(a)]$

(B) $2F(a)-1$

(C) $2-F(a)$

(D) $1-2F(a)$

4. 掷一颗质地均匀的骰子，在出现偶数点的条件下出现 2 点或 4 点的概率为(B)。

(A) 1/6

(B) 2/3

(C) 1/3

(D) 1/2

5. 设 $X_1,X_2,\dots,X_{16}$ 是总体 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本。若$c\sum_{i=1}^{15}(X_{i+1}-X_i)^2$ 是 σ^2 的无偏估计量，则 $c=$ （ C ）。

(A) 1/15

(B) 1/16

(C) 1/30

(D) 1/32

6. 设随机变量 $X\sim t(n)$，$(n>1)$，$Y=\frac{1}{X^2}$ ，则（　　D　　）。

(A) $Y\sim\chi^2(n)$
(B) $Y\sim\chi^2(n-1)$
(C) $Y\sim F(1,n)$
(D) $Y\sim F(n,1)$

二、　综合题（本大题共 6 小题，共 76 分）。

1. （10 分）已知 9 只产品中有 3 只次品，从其中取 2 次，每次任取 1 只。产品取出后不放回。求下列事件的概率：
（1）一只是正品，一只是次品；（2 分）
（2）第二次才取得次品；（2 分）
（3）第二次取出的是次品。（6 分）

解：

（1）一只是正品一只是次品的概率为：$\frac{C_6^1C_3^1}{C_9^2}=\frac{6\times3}{36}=\frac{1}{2}$　　　　（2 分）

（2）第二次才取得次品的概率为：$\frac{C_6^1C_3^1}{A_9^2}=\frac{6\times3}{9\times8}=\frac{1}{4}$　　　　（2 分）

（3）令A_1表示“第一次取出的是正品”，
A_2表示“第一次取出的是次品”，
B表示“第二次取出的是次品”，　　　　（2 分）
第二次取出的是次品的概率为：

$$P(B)=P(B|A_1)P(A_1)+P(B|A_2)P(A_2)=\frac{3}{8}\times\frac{6}{9}+\frac{2}{8}\times\frac{3}{9}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}$$　　（4 分）

2. （13 分）已知一批产品中 90%是合格品，检查时，一个合格品被误认为是次品的概率为 0.05，一个次品被误认为是合格品的概率为 0.02，求：
（1）一个产品经检查后被认为是合格品的概率；（6 分）
（2）一个经检查后被认为是合格品的产品确是合格品的概率。（7 分）

解：设事件 A={任取一只产品，经检验认为是合格品}，（2 分）
事件 B={任取一只产品，确实是合格品}。（2 分）
有
（1）$P(A)=P(B)P(A|B)+P(\bar{B})P(A|\bar{B})=0.9\times0.95+0.1\times0.02=0.857$　（2 分）

（2）$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A|B)P(B)}{P(A)}$　　　　（3 分）

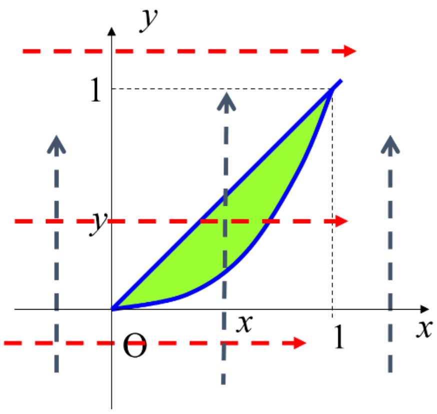
$=\frac{0.9\times0.95}{0.857}=0.9977$　　　　（4 分）

3. （14 分）设 (X,Y) 的联合概率密度如下

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy, & x^2\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$ 和 $f_{X|Y}(x|y)$。

解：



变量 X 的边缘概率密度函数为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{x}24xy\,dy, & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}=\begin{cases}12x^3(1-x^2), & 0\le x\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（3 分）

在$0<x<1$下，X的条件概率密度为：

$$f_{Y|X}(y|x)=\frac{f(x,y)}{f_X(x)}=\begin{cases}\dfrac{2y}{x^2(1-x^2)}, & x^2\le y\le x\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（4 分）

变量 Y 的边缘概率密度函数为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}12y(y-y^2), & 0\le y\le 1\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（3 分）

在$0<y<1$下，Y的条件概率密度为：

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{2x}{y-y^2}, & y\le x\le\sqrt{y}\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

（4 分）

4. （13 分）设随机变量X和Y的相关系数为 0.5，$E(X)=E(Y)=0$，$E(X^2)=E(Y^2)=2$。求：

（1）随机变量X和Y的$D(X),D(Y)$。（4 分）

（2）$E(XY)$。（4 分）

（3）$E[(X+Y)^2]$。（5 分）

解：

（1）$D(X)=E(X^2)-E(X)^2=2$，

（2 分）

同理 $D(Y)=2$。

（2 分）

（2）$\rho(X,Y)=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}=\frac{E(XY)-E(X)E(Y)}{\sqrt{D(X)\cdot D(Y)}}=\frac{E(XY)}{2}=0.5$

（2 分）

得 $E(XY)=1$。

（2 分）

（3）$E[(X+Y)^2]=E(X^2)+E(Y^2)+2E(XY)$

（3 分）

$=2+2+2=6$

（2 分）

5. （13 分）一保险公司有 10,000 人投保，每人每年付 12 元保险费，已知一年内投保人死亡率为 0.6%。若死亡，保险公司将赔付给家属 1000 元。求：

（1）保险公司年利润为 0 的概率；（6 分）

（2）保险公司年利润大于 60,000 元的概率。提示：结果可用标准正态分布函数$\Phi(\cdot)$来表示。（7 分）

解：

（1）设 X 为投保的 10,000 人中一年死亡的人数，则 X 服从二项分布，即 $X\sim B(10000,0.006)$

$$E(X)=10000\times 0.006=60,\qquad D(X)=10000\times 0.006\times(1-0.006)=59.64$$

（2 分）

设保险公司年利润为 Y，则令当死亡人数 $X=x$ 时，保险公司的利润为 0。

$$Y=10000\times 120-1000\cdot x=0$$

（2 分）

则 $x=12$，

$$P\{Y=0\}=P\{X=12\}=C_{10000}^{120}0.006^{120}\cdot 0.994^{99880}$$

（2 分）

（2）由中心极限定理，得

$$P\{Y>60000\}=P\{10000\times 12-1000\cdot X>60000\}=P\{0<X<60\}$$

（2 分）

令$Z=\frac{X-60}{\sqrt{59.64}}$，则上式

$$=P\left\{\frac{0-60}{\sqrt{59.64}}<\frac{X-60}{\sqrt{59.64}}<\frac{60-60}{\sqrt{59.64}}\right\}=P\left\{-\frac{60}{\sqrt{59.64}}<Z<0\right\}$$

（3 分）

已知 $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$，则上式

$$=P\left\{0<Z<\frac{60}{\sqrt{59.64}}\right\}=\Phi\left(\frac{60}{\sqrt{59.64}}\right)-0.5$$

（2 分）

6. （13 分）设总体X的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}2e^{-2(x-\theta)}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$

其中，$\theta>0$ 是未知参数。$X_1,X_2,\dots,X_n$ 是来自X的样本。求θ的最大似然估计量, 并判断它们是θ的无偏估计量。

解：似然函数

$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}2e^{-2(x_i-\theta)}=2^n\cdot e^{-2\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot e^{2n\theta}$，$\theta<x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$

（2 分）

要寻找 θ 使似然函数取得最大值，即

$$L(\hat{\theta})=\max_{\theta<x_1,x_2,\dots,x_n}2^n\cdot e^{-2\sum_{i=1}^{n}x_i}\cdot e^{2n\theta}$$

由 θ 的定义域得 $\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

（2 分）

$f(x)=\begin{cases}2e^{-2e(x-\theta)}, x>\theta\\ 0, \quad x\le\theta\end{cases}$，其分布函数为 $F(x)=\begin{cases}1-e^{-2e(x-\theta)}, x>\theta\\ 0, \quad x\le\theta\end{cases}$

（2 分）

则对于最大似然估计量$\hat{\theta}=\min(x_1,x_2,\dots,x_n)$，其分布函数为

$$F(\hat{\theta})=F(\min(x_1,x_2,\dots,x_n))=1-[1-F(x)]^n=1-e^{-2n(\hat{\theta}-\theta)},\ x>\theta$$

$$f(\hat{\theta})=F'(\hat{\theta})=\begin{cases}2n\cdot e^{-2n(\hat{\theta}-\theta)}, \hat{\theta}>\theta\\ 0, \quad \hat{\theta}\le\theta\end{cases}$$

（2 分）

$E(\hat{\theta})=\int_{\theta}^{\infty}\hat{\theta}\cdot 2n\cdot e^{-2n(\hat{\theta}-\theta)}d\hat{\theta}$

（2 分）

$=2ne^{2n\theta}\int_{\theta}^{\infty}\hat{\theta}e^{-2n\hat{\theta}}d\hat{\theta}=2ne^{2n\theta}\cdot\left[\frac{\hat{\theta}}{-2n}-\frac{1}{4n^2}\right]e^{-2n\hat{\theta}}\Big|_{\theta}^{\infty}=\theta+\frac{1}{2n}\neq\theta$

（2 分）

所以θ的最大似然估计量不是θ的无偏估计。

（1 分）

四、附加题（30 分）

1. （15 分）证明：随机变量X的方差$D(X)=0$的充要条件$P(X=a)=1$,其中a为常数。提示：必要性可利用切比雪夫不等式来证明。

证明：

充分性：因$P(X=a)=1, E(X)=a, P(X^2=a^2)=1$, 故$E(X^2)=a^2$, （3 分）

$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = a^2 - a^2 = 0$。（4 分）

必要性：$D(X) = 0$，对于任意正数ε，有$0 \le P(|X - E(X)| \ge \varepsilon) \le \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 0$。（4 分）

由于ε的任意性，$P\big(X \ne E(X)\big) = 0$，从而$P\big(X = E(X)\big) = 1$，其中的常数$a$即为$E(X)$。（4 分）

2. （15 分）若随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\Lambda(\alpha)}(\beta x)^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

则称 X 服从参数为 α,β 的 Γ 分布。记为 $X \sim \Gamma(\alpha,\beta)$。其中，$\alpha > 0$，$\beta > 0$，$\Lambda(\alpha) = \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}dt$。试证明 Γ 分布的性质：若$X_1 \sim \Gamma(\alpha_1,\beta)$，$X_2 \sim \Gamma(\alpha_2,\beta)$，且相互独立，则 $X_1 + X_2 \sim \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2,\beta)$。

证明：

（1）令 $Z > 0$，

$f_Z(z) = f(X_1 + X_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x)\,dx$

（2 分）

$= \int_0^z \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)}(\beta x)^{\alpha_1-1}e^{-\beta x}\ \frac{\beta}{\Gamma(\alpha_2)}[\beta(z-x)]^{\alpha_2-1}e^{-\beta(z-x)}dx$

（2 分）

$= \frac{\beta^{\alpha_1+\alpha_2}e^{-\beta z}}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}\int_0^z x^{\alpha_1-1}(z-x)^{\alpha_2-1}dx$，令 $x = zt$，

（2 分）

$= (\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\beta z}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\alpha_2)}\int_0^z t^{\alpha_1-1}(1-t)^{\alpha_2-1}dt = A$

（2 分）

$= (\beta z)^{\alpha_1+\alpha_2-1}e^{-\beta z}\frac{\beta}{\Gamma(\alpha_1)+\Gamma(\alpha_2)}$

（3 分）

（2）而当 $Z < 0$ 时，由于 $X_1 + X_2 > 0$，则 $f_Z(z) = f(X_1 + X_2) = 0$

（2 分）

综合（1）和（2）两种情况，可得 $Z = X_1 + X_2$ 服从参数为 $\alpha_1 + \alpha_2$和 β 的 Γ 分布。
（2 分）