- 随机变量统计规律的描述

  分布函数

  分布律 （离散型） 概率密度（连续型）

- 随机变量统计规律的描述

  分布函数

  分布律 （离散型） 概率密度（连续型）
- 特点：全面、详细、完整
- 缺点：复杂、重点不突出

问题：怎样粗线条地描述随机变量的特性？

要求：简单明了、特征鲜明、直观实用

问题：怎样粗线条地描述随机变量的特性？

要求：简单明了、特征鲜明、直观实用

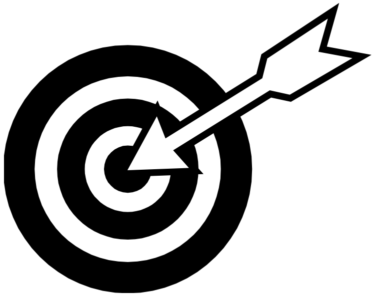
第四章　随机变量的数字特征

- 由随机变量的分布所确定的，能刻画随机变量某一方面特征的常数统称为**数字特征**。

第四章　随机变量的数字特征

引例 射击问题

某射击手在同样的条件下,瞄准靶子相继射击90次,(每次命中环数X是一个随机变量).射中次数记录如下:



命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30

试问:该射手射击平均命中靶多少环?

引例　射击问题

某射击手在同样的条件下,瞄准靶子相继射击90次,(每次命中环数X是一个随机变量).射中次数记录如下:

命中环数 k	0	1	2	3	4	5
命中次数 n_k	2	13	15	10	20	30
频率 $\frac{n_k}{n}$	$\frac{2}{90}$	$\frac{13}{90}$	$\frac{15}{90}$	$\frac{10}{90}$	$\frac{20}{90}$	$\frac{30}{90}$

试问:该射手射击平均命中靶多少环?

1. 离散型随机变量的数学期望

定 义 设离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1,2,\cdots.$$

若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$. 即

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

2.连续型随机变量数学期望的定义

设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 若积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x$$

绝对收敛, 则称积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x$ 的值为随机变量 X 的数学期望, 记为 $E(X)$. 即

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) \mathrm{d} x.$$

分赌本问题

“期望”在我们日常生活中常指心中期盼的愿望，而在概率论中，数学期望源于历史上一个著名的分赌本问题.

例 2.2.1（分赌本问题） 17 世纪中叶，一位赌徒向法国数学家帕斯卡（Pascal，1623—1662）提出一个使他苦恼长久的分赌本问题：甲、乙两赌徒赌技不相上下，各出赌注 50 法郎，每局中无平局.他们约定，谁先赢三局，则得全部赌本 100 法郎.当甲赢了二局、乙赢了一局时，因故（国王召见）要中止赌博.现问这 100 法郎如何分才算公平？

- **1654年帕斯卡提出如下的分法：设想再赌下去，则甲最终所得*X*为一个随机变量，其可能取值为0或100.**

- **1654年帕斯卡提出如下的分法：设想再赌下去，则甲最终所得*X*为一个随机变量，其可能取值为0或100.**

X	0	100
P	0.25	0.75

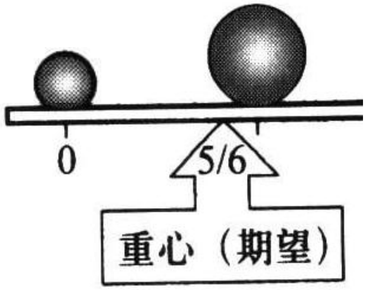
经上述分析，帕斯卡认为，甲的“期望”所得应为：$0\times0.25+100\times0.75=75$（法郎）. 即甲得 75 法郎，乙得 25 法郎. 这种分法不仅考虑了已赌局数，而且还包括了对再赌下去的一种“期望”，

数学期望 $E(X)$ 的物理解释是重心.若把概率 $p(x_i)=P(X=x_i)$ 看作点 x_i 上的质量,概率分布看作质量在 x 轴上的分布,则 X 的数学期望 $E(X)$ 就是该质量分布的重心所在位置

X	0	1
p_k	1/6	5/6

数学期望 $E(X)$ 的物理解释是重心.若把概率 $p(x_i)=P(X=x_i)$ 看作点 x_i 上的质量,概率分布看作质量在 x 轴上的分布,则 X 的数学期望 $E(X)$ 就是该质量分布的重心所在位置

1/6 *5/6*



X	0	1
p_k	1/6	5/6

数学期望 $E(X)$ 的物理解释是重心.若把概率 $p(x_i)=P(X=x_i)$ 看作点 x_i 上的质量,概率分布看作质量在 x 轴上的分布,则 X 的数学期望 $E(X)$ 就是该质量分布的重心所在位置,详见图 2.2.1.

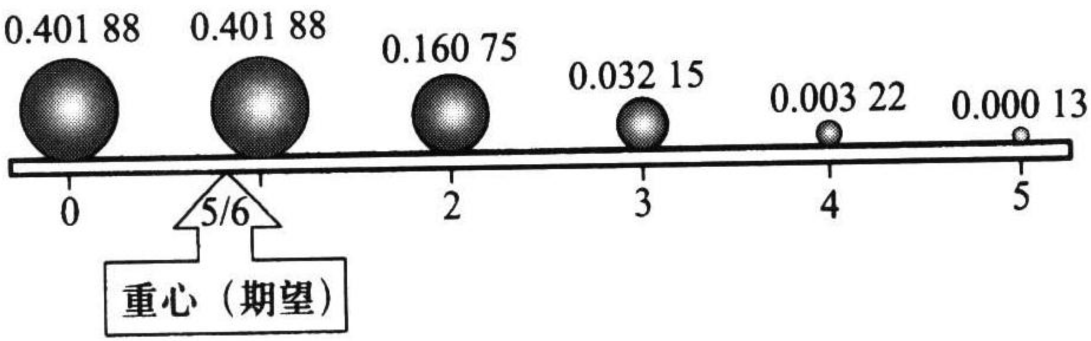


图 2.2.1　概率质量模型:同时抛五颗骰子,6 点出现个数 X 的数学期望 $E(X)=5/6$ 就是重心所在的位置

两点分布的数学期望

X	0	1
p_k	$1-p$	p

两点分布的数学期望

X	0	1
p_k	$1-p$	p

则 $E(X)=p$

例6　泊松分布的数学期望

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\ldots, \lambda>0$$

例6　泊松分布的数学期望

$$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},k=0,1,2,\ldots,\lambda>0$$

则$E(X)=\lambda$

例5　分组验血

在一个人数很多的团体中普查某种疾病,为此要抽验 N 个人的血,可以用两种方法进行.

(i) 将每个人的血分别去化验,这就需化验 N 次.

(ii) 按 k 个人一组进行分组,把从 k 个人抽来的血混合在一起进行化验,如果这混合血液呈阴性反应,就说明 k 个人的血都呈阴性反应,这样,这 k 个人的血就只需验一次.若呈阳性,则再对这 k 个人的血液分别进行化验,这样,k 个人的血共最多需化验 $k+1$ 次.

假设每个人化验呈阳性的概率为p，且这些人的试验反应是相互独立的.

试说明当p较小时，选取适当的k，按第二种方法可以减少化验的次数。

解　设以k个人为一组时，组内每人化验的次数为X

例7　均匀分布的数学期望

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

例7　均匀分布的数学期望

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x<b\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

$$E(X)=\frac{a+b}{2}$$

P103例5 设随机变量X服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$，求$E(X)$，$D(X)$

P103例5　设随机变量X服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$，求$E(X)$，$D(X)$

解　$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$

常用的分布		期望
两点分布	$X \sim b(1,p)$	p
二项分布	$X \sim b(n,p)$	?
泊松分布	$X \sim \pi(\lambda)$	λ
均匀分布	$X \sim U(a, b)$	$(a+b)/2$
指数分布	$X \sim E(\theta)$	θ
正态分布	$X \sim N(\mu,\sigma^2)$	?

- 已知圆轴截面直径的分布，需要求截面面积的数学期望。

$$S = \frac{1}{8}\pi D^2$$

- 已知风速V的分布，需要求飞机机翼受到压力的数学期望。

$$W = kV^2$$

- ……

- 已知圆轴截面直径的分布，需要求截面面积的数学期望。

$$S = \frac{1}{8}\pi D^2$$

- 已知风速V的分布，需要求飞机机翼受到压力的数学期望。

$$W = kV^2$$

- ……

? X的分布已知，如何计算$g(X)$的期望？

例2.2.6 已知随机变量 X 的分布列如下：

X	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

求 $Y = X^2$ 的数学期望

例2.2.6　已知随机变量 X 的分布列如下：

X	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

要求 $Y = X^2$ 的数学期望，为此要分两步进行：

定理　　设Y是X的函数, $Y=g(X)$(g是连续函数).

(1) X是离散型, 分布律为$P\{X=x_k\}=p_k$, $k=1,2,\ldots$,

若$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$绝对收敛,则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k. \qquad (1.3)$$

$$E(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

定理　　设Y是X的函数, $Y=g(X)$(g是连续函数).

(1) X是离散型, 分布律为$P\{X=x_k\}=p_k$, $k=1,2,\dots$,

若$\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k$绝对收敛,则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k. \qquad (1.3)$$

(2) X是连续型, 概率密度为$f(x)$.

$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x$绝对收敛,则有

$$E(Y)=E[g(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (1.4)$$

例2.2.6 已知随机变量 X 的分布列如下：

X	-2	-1	0	1	2
P	0.2	0.1	0.1	0.3	0.3

求 $Y = X^2$ 的数学期望

例8 设风速X在$(0,a)$上服从均匀分布,即具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & 0<x<a\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

又设飞机机翼受到的正压力Y是X的函数:$Y=X^2$

求Y的数学期望.

例8 设风速X在$(0,a)$上服从均匀分布,即具有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{a} & 0<x<a\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

又设飞机机翼受到的正压力Y是X的函数:$Y=X^2$

求Y的数学期望.

解： 由上面的公式

$$E(Y)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2 f(x)dx=\int_0^a x^2\frac{1}{a}dx=\frac{1}{3}a^2$$

二维随机变量函数的数学期望

设$Z=g(X,Y)$(g是连续函数)

- 若(X,Y)的分布律$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$, $i,j=1,2\ldots$

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

二维随机变量函数的数学期望

设$Z=g(X,Y)$(g是连续函数)

◆若(X,Y)的分布律$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}$, $i,j=1,2\ldots$

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i,y_j)p_{ij}$$

◆若(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$, 则有

$$E(Z)=E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

课堂练习

- **P116　8题**

设 (X, Y) 的分布律为

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0.2	0.1	0
0	0.1	0	0.3
1	0.1	0.1	0.1

求: $E(X)$, $E(Y)$, $E(Y/X)$, $E[(X-Y)^2]$.

例9 设随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{3}{2x^3y^2}, & \dfrac{1}{x}<y<x, x>1.\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

求数学期望$E(Y), E\left(\dfrac{1}{XY}\right)$.

例2 有2个相互独立工作的电子装置,它们的寿命X_k $(k=1,2)$服从同一指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0,\end{cases}\qquad \theta>0$$

若将这两个电子装置串联连接组成整机,求整机寿命(以小时计) N 的数学期望.

例2 有2个相互独立工作的电子装置,它们的寿命X_k $(k=1,2)$服从同一指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0,\\ 0 & x\le 0,\end{cases}\qquad \theta>0$$

若将这两个电子装置串联连接组成整机,求整机寿命(以小时计) N 的数学期望.

解 $X_k(k=1,2)$的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$N=\min(X_1,X_2)$ 的分布函数为

$$F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^2=\begin{cases}1-e^{-\frac{2x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

于是N的概率密度为

$$f_{\min}(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\theta}e^{-\frac{2x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

$N = \min(X_1, X_2)$ 的分布函数为

$$F_{\min}(x) = 1 - [1 - F(x)]^2 = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{2x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

于是N的概率密度为

$$f_{\min}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\theta} e^{-\frac{2x}{\theta}} & x > 0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$$

$$E(N) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{\min}(x) dx = \int_{0}^{\infty} \frac{2x}{\theta} e^{-\frac{2x}{\theta}} dx = \frac{\theta}{2}$$

数学期望的性质

数学期望的性质

性质1. 设 C 是常数, 则有 $E(C)=C$.

数学期望的性质

性质1. 设 C 是常数, 则有 $E(C)=C$.

性质2. 设 X 是一个随机变量,C 是常数, 则有

$$E(CX)=CE(X).$$

性质3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

性质3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

此性质可推广到任意有限个随机变量之和的情况..

性质3. 设 X, Y 是两个随机变量, 则有

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y).$$

此性质可推广到任意有限个随机变量之和的情况..

性质4. 设 X, Y 是相互独立的随机变量, 则有

$$E(XY)=E(X)E(Y).$$

此性质可推广到任意有限个相互独立的随机变量之积的情况.

小结

第一节　　数学期望

1. 数学期望的定义
2. 随机变量函数的数学期望
3. 数学期望的性质

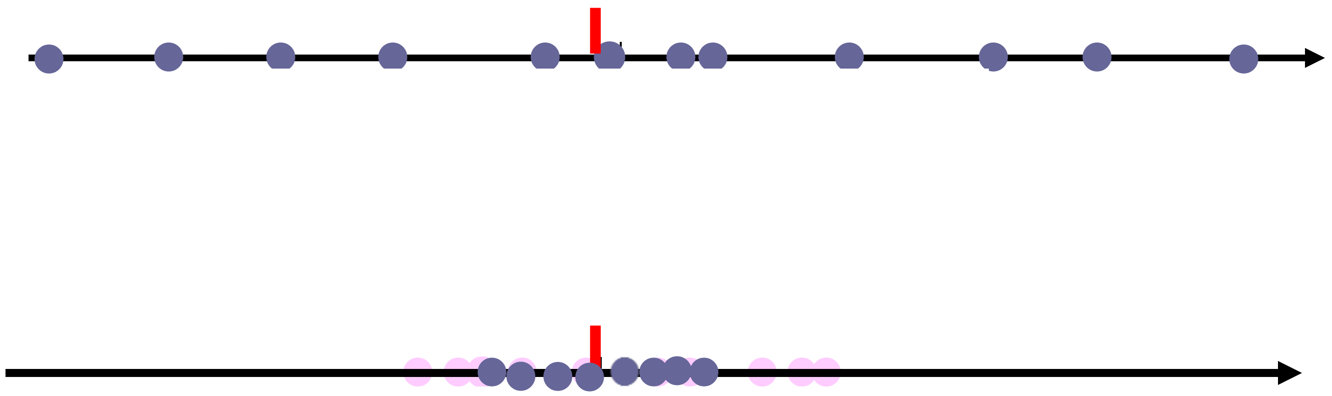
作业

- **P115:　　6(1); 7; 9(1)**

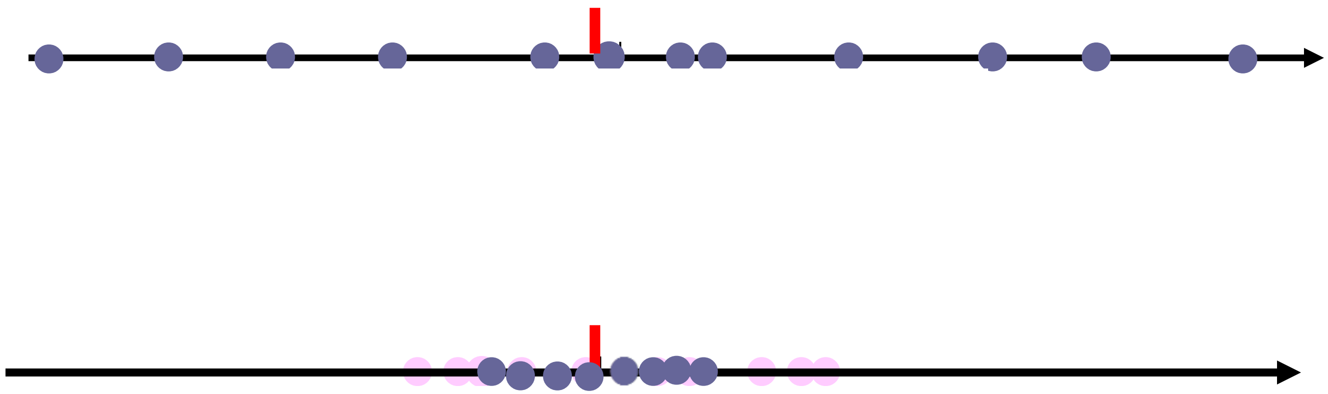
数学期望体现了随机变量取值的平均水平，是随机变量的重要的数字特征.

但在一些场合，仅仅知道平均值是不够的，还需了解其他数字特征.

有两批灯泡,其平均寿命都是 $E(X)$=10000小时.



有两批灯泡,其平均寿命都是 $E(X)$=10000小时.



因为第二批灯泡的质量比较稳定.

为此需要引进另一个数字特征，用它来度量随机变量取值与其均值的偏离程度（或者度量随机变量取值的分散程度）.

第四章　随机变量的数字特征

第一节　数学期望

第二节　方差

第三节　协方差与相关系数

第四节　矩 协方差矩阵

方差的定义

设 X 是一个随机变量,若$E\{[X-E(X)]^2\}$存在,则称 $E\{[X-E(X)]^2\}$ 为 X 的方差, 记为 $D(X)$ 或 $\mathrm{Var}(X)$, 即$\cdots$

$$D(X)=\mathrm{Var}(X)=E\{[X-E(X)]^2\}.$$

称 $\sqrt{D(X)}$ 为标准差或均方差, 记为$\sigma(X)$.

方差的意义

方差是一个常用来体现随机变量 X 取值分散程度的量. 如果 $D(X)$ 值大, 表示 X 取值分散程度大, $E(X)$ 的代表性差; 而如果 $D(X)$ 值小, 则表示X 的取值比较集中, 以 $E(X)$ 作为随机变量的代表性好.

由定义知，方差是随机变量X的函数$g(X)=[X-E(X)]^2$的数学期望．

X为离散型，$P\{X=x_k\}=p_k$

$$D(X)=\begin{cases} \\ \\ \end{cases}$$

X为连续型，$f(x)$为概率密度

计算方差的简便公式

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

计算方差的简便公式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2.$$

证明 $D(X)=E\{[X-E(X)]^2\}$

$$=E\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\}$$

$$=E(X^2)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2$$

$$=E(X^2)-[E(X)]^2$$

例1 设随机变量X具有数学期望$E(X)=\mu$, 方差$D(X)=\sigma^2\neq 0$.

$$X^* = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

称X^*为X的标准化变量.

例2 设随机变量X具有(0-1)分布, 其分布律为

$P\{X=0\}=1-p$, $P\{X=1\}=p$.求$D(X)$.

例2 设随机变量X具有(0-1)分布，其分布律为

$P\{X=0\}=1-p$, $P\{X=1\}=p$.求$D(X)$.

解 $E(X)=0\times(1-p)+1\times p=p$,

$$E(X^2)=0^2\times(1-p)+1^2\times p=p.$$

由(2.4)式

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=p-p^2=p(1-p).$$

例3 设$X \sim \pi(\lambda)$, 求$D(X)$.

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k \mathrm{e}^{-\lambda}}{k!},$$

$$k=0,1,2,\cdots, \quad \lambda>0.$$

$$E(X^2) = E[X(X-1) + X]$$

$$= E[X(X-1)] + E(X)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} + \lambda$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + \lambda$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} e^{\lambda} + \lambda = \lambda^2 + \lambda$$

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\lambda$$

因此,泊松分布

$$E(X)=\lambda, D(X)=\lambda$$

由此可知，泊松分布的数学期望与方差相等，等于λ. 泊松分布的分布律中只含一个参数λ,只要知道λ,泊松分布就被确定了.

例4 设 $X \sim U(a,b)$，求 $D(X)$.

解 X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

例4 设 $X \sim U(a,b)$，求 $D(X)$.

解 X的概率密度为
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a} & a<x<b\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

$$D(X)=E(X^2)-E(X)^2$$
$$=\int_a^b x^2\frac{1}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}$$

因此,均匀分布

$$E(X)=\frac{a+b}{2},D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$$

例5 设随机变量X服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$，求$E(X)$，$D(X)$

解

例5 设随机变量X服从指数分布,其概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

其中$\theta>0$，求$E(X)$，$D(X)$

解 $$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=\theta$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=\int_{0}^{+\infty}x^2\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}dx=2\theta^2$$

因此$D(X)=\theta^2$

由此可知,指数分布 $E（X）=\theta$，$D（X）=\theta^2$

方差的性质

(1) 设 C 是常数, 则有$D(C)=0$.

方差的性质

(1) 设 C 是常数, 则有$D(C) = 0$.

(2) 设 X 是一个随机变量, C 是常数, 则有

$$D(CX) = C^2 D(X)$$

$$D(X + C) = D(X)$$

(3)对任意两个随机变量X,Y,

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} \quad (2.5)$$

(3)对任意两个随机变量X,Y,

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} \quad (2.5)$$

特别, 若X,Y相互独立, 则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y) \quad (2.6)$$

(3)对任意两个随机变量X,Y,

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)$$
$$+2E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\} \quad (2.5)$$

特别, 若X,Y相互独立, 则

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y) \quad (2.6)$$

推广 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立,则有

$$D(X_1 \pm X_2 \pm \cdots \pm X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \cdots + D(X_n).$$

(4) $D(X)=0$的充要条件是 X 以概率1取常数EX,即

$$P\{X=EX\}=1.$$

例6　$X \sim b(n,p)$,求$E(X)$, $D(X)$.

例6 $X \sim b(n,p)$,求$E(X)$, $D(X)$.

随机变量X是n重伯努利试验中事件A发生的次数, 且在每次试验中A发生的概率为p.

例6 $X \sim b(n,p)$,求$E(X)$, $D(X)$.

随机变量X是n重伯努利试验中事件A发生的次数, 且在每次试验中A发生的概率为p.

$$X_k = \begin{cases} 1, & A\text{在第}k\text{次试验发生}, \\ 0, & A\text{在第}k\text{次试验不发生}, \end{cases} \quad k = 1,2,\cdots n.$$

例6 $X \sim b(n,p)$,求$E(X)$, $D(X)$.

随机变量X是n重伯努利试验中事件A发生的次数, 且在每次试验中A发生的概率为p.

$$X_k = \begin{cases} 1, & A\text{在第}k\text{次试验发生}, \\ 0, & A\text{在第}k\text{次试验不发生}, \end{cases} \quad k = 1,2,\cdots n.$$

易知 $\quad X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

例7 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,求$E(X)$, $D(X)$.

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i=1,2,\ldots,n$, 且它们相互独立,

则$C_1X_1+C_2X_2+\ldots+C_nX_n$仍然服从正态分布

($C_1, C_2, \ldots, C_n$是不全为0的常数). *P79*

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$, $i=1,2,\ldots,n$, 且它们相互独立,

则$C_1X_1+C_2X_2+\ldots+C_nX_n$仍然服从正态分布

($C_1,C_2,\ldots,C_n$是不全为0的常数). *P79*

$$C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \sim N\left(\sum_{i=1}^{n} C_i\mu_i, \sum_{i=1}^{n} C_i^2\sigma_i^2\right). \tag{2.8}$$

例如， 若 $X \sim N(1,3)$，$Y \sim N(2,4)$，且 X 和 Y 相互独立，

则 $Z = 2X - 3Y$ 也服从正态分布.

例如, 若$X \sim N(1,3), Y \sim N(2,4)$,且$X$和$Y$相互独立,

则$Z = 2X - 3Y$也服从正态分布.

而$E(Z) = -4, D(X) = 48$,故有$Z \sim N(-4, 48)$

例8 设活塞的直径(以cm计)$X \sim N(22.40, 0.03^2)$,气缸的直径$Y \sim N(22.50, 0.04^2)$, X, Y 相互独立.任取一只活塞,任取一只气缸,求活塞能装入气缸的概率.

分　布	参数	数学期望	方差
两点分布	$0<p<1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$n\geq 1,$ $0<p<1$	np	$np(1-p)$
泊松分布	$\lambda>0$	λ	λ
均匀分布	$a<b$	$(a+b)/2$	$(b-a)^2/12$
指数分布	$\theta>0$	θ	θ^2
正态分布	$\mu,\sigma>0$	μ	σ^2

切比雪夫不等式

切比雪夫不等式

定理 设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $D(X)=\sigma^2$,则对于任意正数 ε, 不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

成立.

切比雪夫不等式

定理　设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$，方差 $D(X)=\sigma^2$，则对于任意正数 ε，不等式

$$P\{|X-\mu|\geq\varepsilon\}\leq\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

成立.

$$\Leftrightarrow P\{|X-\mu|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}.$$

第二节　　方差

- 方差的定义
- 方差的计算
- 方差的性质
- 切比雪夫不等式

P117作业:

13，（借助于常用分布的期望方差）

14，（借助于常用分布的期望方差）

22(2)（借助于常用分布的期望方差）

对于二维随机变量(X,Y),

- 仅讨论X与Y的期望和方差是不够的,
- 还需要讨论X与Y的相互关系.

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\underline{E[X-E(X)][Y-E(Y)]}$$

$$E(XY)-E(X)E(Y)$$

◆当X与Y独立时，$E[X-E(X)][Y-E(Y)]=0.$

$$D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\underline{E[X-E(X)][Y-E(Y)]}$$

$$E(XY)-E(X)E(Y)$$

◆当X与Y独立时，$E[X-E(X)][Y-E(Y)]=0.$

◆若$E[X-E(X)][Y-E(Y)]$不为 0，

则X与Y存在某种关系.

第四章　随机变量的数字特征

定义

量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差. 记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, 即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

定义

量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差. 记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, 即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$ $\quad$ $\mathrm{Cov}(X,X)=Var(X)$;

定义

量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差. 记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, 即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$ $\quad \mathrm{Cov}(X,X)=Var(X)$;

(2) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

定义

量 $E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}$ 称为随机变量 X 与 Y 的协方差. 记为 $\mathrm{Cov}(X,Y)$, 即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E\{[X-E(X)][Y-E(Y)]\}.$$

(1) $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)\quad \mathrm{Cov}(X,X)=Var(X)$;

(2) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)+2\mathrm{Cov}(X,Y)$.

(3) $\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$;

运算性质

(1) $\operatorname{Cov}(aX, bY) = ab\operatorname{Cov}(X, Y)$， a, b 为常数;

(2) $\operatorname{Cov}(X_1 + X_2, Y) = \operatorname{Cov}(X_1, Y) + \operatorname{Cov}(X_2, Y)$.

运算性质

$$(1)\ \mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)\ ,\quad a, b \text{ 为常数};$$

协方差的大小在一定程度上反映了X和Y相互间的关系，但它还受X与Y本身度量单位的影响.

运算性质

(1) $\mathrm{Cov}(aX, bY) = ab\,\mathrm{Cov}(X, Y)$， a, b 为常数;

而 $$\rho_{XY} = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \cdot \sqrt{D(Y)}}$$

称为随机变量 X 与 Y 的相关系数.

相关系数性质

$(1)\ |\rho_{XY}| \leq 1$；

相关系数性质

(1) $|\rho_{XY}| \le 1$；

的充要条件是，存在常数a,b使

$$P\{Y=a+bX\}=1$$

当$|\rho_{XY}|$较大时，X,Y的线性相关程度较高.

当$|\rho_{XY}|$较小时，X,Y的线性相关程度较差.

当$\rho_{XY}=0$时，X和Y不相关.

相关系数性质

(1) $|\rho_{XY}| \le 1$;

(2) $|\rho_{XY}| = 1$ **的充要条件是，存在常数*a*,*b*使**

$$P\{Y = a + bX\} = 1$$

X与Y以概率1存在线性关系

相关系数性质

(1) $|\rho_{XY}| \le 1$;

(2) $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是，存在常数 a,b 使

$$P\{Y = a + bX\} = 1$$

思考：$Y=2+X$ 与 X 的相关系数是多少？

相关系数性质

(1) $|\rho_{XY}| \le 1$；

(2) $|\rho_{XY}| = 1$ 的充要条件是，存在常数 a,b 使

$$P\{Y = a + bX\} = 1$$

思考：$Y=2+X$ 与 X 的相关系数是多少？

$Y=2-X$ 与 X 的相关系数是多少？

若 $\rho_{XY}=0$ ，称***X***和***Y***不相关.

若随机变量*X*与*Y*的方差都存在，且均不为零；则下列四个命题是等价的.

（1） $\rho_{XY}=0$；

（2）Cov(*X* ,*Y*) = 0;

（3）*E*(*XY*)=*EXEY*; *P99*

（4）*D*(*X* ±*Y*)=*DX*+*DY*. *P104*

例1 验证X和Y不相关，即$\rho_{XY}=0$；
验证X和Y不是相互独立的.

Y \ X	−2	−1	1	2	$P(Y=j)$
1	0	0. 25	0. 25	0	0. 5
4	0. 25	0	0	0. 25	0. 5
$P(X=i)$	0. 25	0. 25	0. 25	0. 25	1

例2 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,试求 X 与 Y 的相关系数.

结论

(1) 二维正态分布密度函数中,参数 ρ 代表了X 与 Y 的相关系数;

例2 设$(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$,试求 X 与 Y 的相关系数.

结论

(1) 二维正态分布密度函数中,参数 ρ 代表了X与 Y 的相关系数;

(2) 二维正态随机变量 X 与 Y 相关系数为零等价于 X 与 Y 相互独立.

P75

小结

(1)这一节我们介绍了协方差、相关系数;

相关系数是刻划两个变量间线性相关程度的一个重要的数字特征.

(2)注意“独立”与“不相关”并不等价.

当(X,Y)服从二维正态分布时，有

$$X\text{ 与 }Y\text{ 独立} \Leftrightarrow X\text{ 与 }Y\text{ 不相关}$$

作业

- **P117： 29，31 ， 33**

第四节　矩、协方差矩阵

定义：

设X是随机变量，若$E(X^k)$ 存在(k =1, 2, …)，则称其为X 的 k 阶原点矩；

$E(X)$ 是 X 的一阶原点矩；

第四节　矩、协方差矩阵

定义：

设X是随机变量，若$E(X^k)$ 存在(k =1, 2, …)，则称其为X 的 k 阶原点矩；

$E(X)$ 是 X 的一阶原点矩；

若 $E\{[X-E(X)]^k\}$ 存在(k = 2, 3,…)，则称其为X的 k 阶中心矩；

$\mathrm{Var}(X)$ 是 X 的二阶中心矩.

定义：设X和Y是随机变量，

若 $E(X^kY^l)$ 存在$(k, l=1, 2,\ldots)$，

则称其为X与Y的 $k+l$ 阶混合原点矩；

定义：设X和Y是随机变量，

若 $E(X^k Y^l)$ 存在$(k, l=1, 2,\ldots)$，

则称其为X与Y的 $k+l$ 阶混合原点矩；

若 $E\{[X-E(X)]^k\,[Y-E(Y)]^l\}$存在$(k, l=1,2,\ldots)$

则称其为X与Y的 $k+l$ 阶混合中心矩.

Cov(X,Y)是X和Y的二阶混合中心矩.

将随机向量 (X_1, X_2) 的二阶中心矩

$$c_{11} = E\{[X_1 - E(X_1)]^2\},$$

$$c_{12} = E\{[X_1 - E(X_1)][X_2 - E(X_2)]\},$$

$$c_{21} = E\{[X_2 - E(X_2)][X_1 - E(X_1)]\},$$

$$c_{22} = E\{[X_2 - E(X_2)]^2\}$$

排成一个2×2矩阵 $\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$,

则称此矩阵为(X_1, X_2)的协方差矩阵.

设 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的二阶混合中心矩

$$c_{ij} = \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = E\{[X_i - E(X_i)][X_j - E(X_j)]\}$$

$$i, j = 1, 2, \cdots, n$$

都存在，则称矩阵

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

为 n 维随机变量的**协方差矩阵**.

由于 $c_{ij}=c_{ji}\ (i,j=1,2,\cdots,n)$,所以协方差矩阵为对称的非负定矩阵.

协方差矩阵的应用

一般多维随机变量的分布是不知道的，可通过协方差矩阵达到对多维随机变量的研究.

介绍n 元正态分布的概率密度

思路：

先将二维正态随机变量的概率密度改写成另一种形式，然后推广到n维随机变量的场合。

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot \exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$f(x_1, x_2)$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{2/2}(\det C)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)' C^{-1}(X-\mu)\right\}.$$

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$\cdot\exp\left\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

$$f(x_1,x_2)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{2/2}(\det C)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)\right\}.$$

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det C)^{1/2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(X-\mu)^T C^{-1}(X-\mu)\right\}.$$

n 元正态分布的概率密度

设$X'=(X_1,X_2,\ldots,X_n)$是一个n维随机向量，若它的概率密度为

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|C|^{1/2}}\exp\{-\frac{1}{2}(X-\mu)'C^{-1}(X-\mu)\}$$

则称 X 服从 n 元正态分布.

其中C是$(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ 的协方差矩阵.

$|C|$是它的行列式，C^{-}表示C的逆矩阵，

X 和 μ是 n 维列向量，X'表示X 的转置.

n元正态分布的几条重要性质：

(1). n维正态随机变量（$X_1, X_2, \cdots, X_n$) 的每一个分量都是正态随机变量；反之，若$X_1, X_2, \ldots, X_n$都是正态随机变量，且相互独立，则（$X_1, X_2, \ldots, X_n$) 是n维正态随机变量。

2. n 维随机变量$(X_1, X_2,\cdots, X_n)$服从 n 维正态分布的充要条件是 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的任意的线性组合 $l_1X_1+l_2X_2+\cdots+l_nX_n$ 服从一维正态分布(其中 $l_1,l_2,\cdots,l_n$ 不全为零).

(3). 若 $X=(X_1,X_2,\cdots,X_n)'$服从n 元正态分布，

$Y_1,Y_2,\cdots,Y_k$ 是 $X_j\,(j=1,2,\cdots,n)$的线性组合,

则$(Y_1,Y_2,\cdots,Y_k)'$服从k 元正态分布。

这一性质称为正态变量的线性变换不变性。

(4). 设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$服从n元正态分布，则

“$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立” 等价于

“$X_1,X_2,\cdots,X_n$两两不相关”。

第四章　随机变量的数字特征

第一节　数学期望

第二节　方差

第三节　协方差与相关系数

第四节　矩　协方差矩阵