Fuzzy Logic (Ασαφής Λογική) - Εισαγωγή

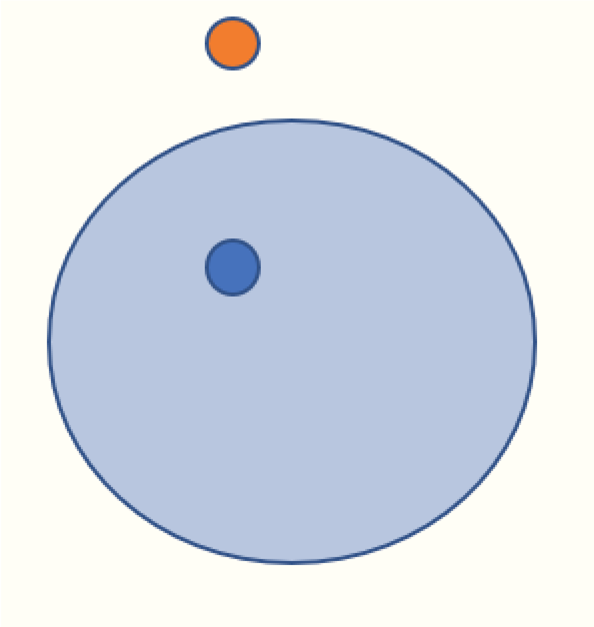
Ε.ΔΙ.Π. Δρ. Κωνσταντίνα Χρυσαφιάδη

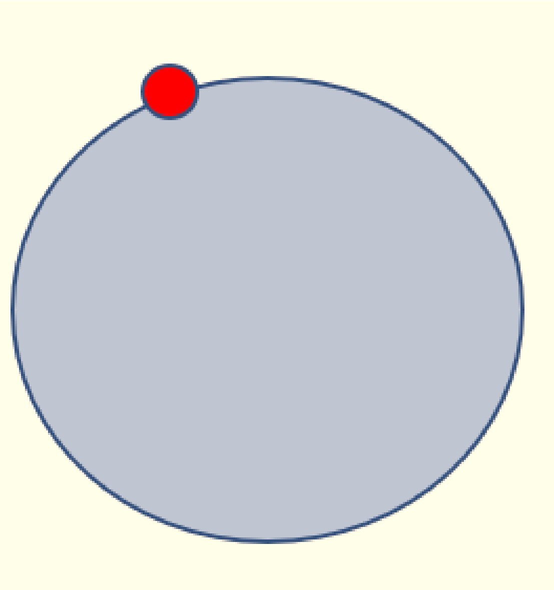
ΑΣΑΦΕΙΑ

- Μη ακριβή, υποκειμενικά δεδομένα
- Vagueness, Fuzziness, Uncertainty.
- Δεδομένα που δεν μπορούν να καθοριστούν με ακρίβεια.
  - Γνωστικό επίπεδο μαθητή
  - Ψηλός ή κοντός;
  - Μεγάλος ή μικρός;
  - Αποδοτικός ή όχι;
  - Ασφαλής ή όχι;

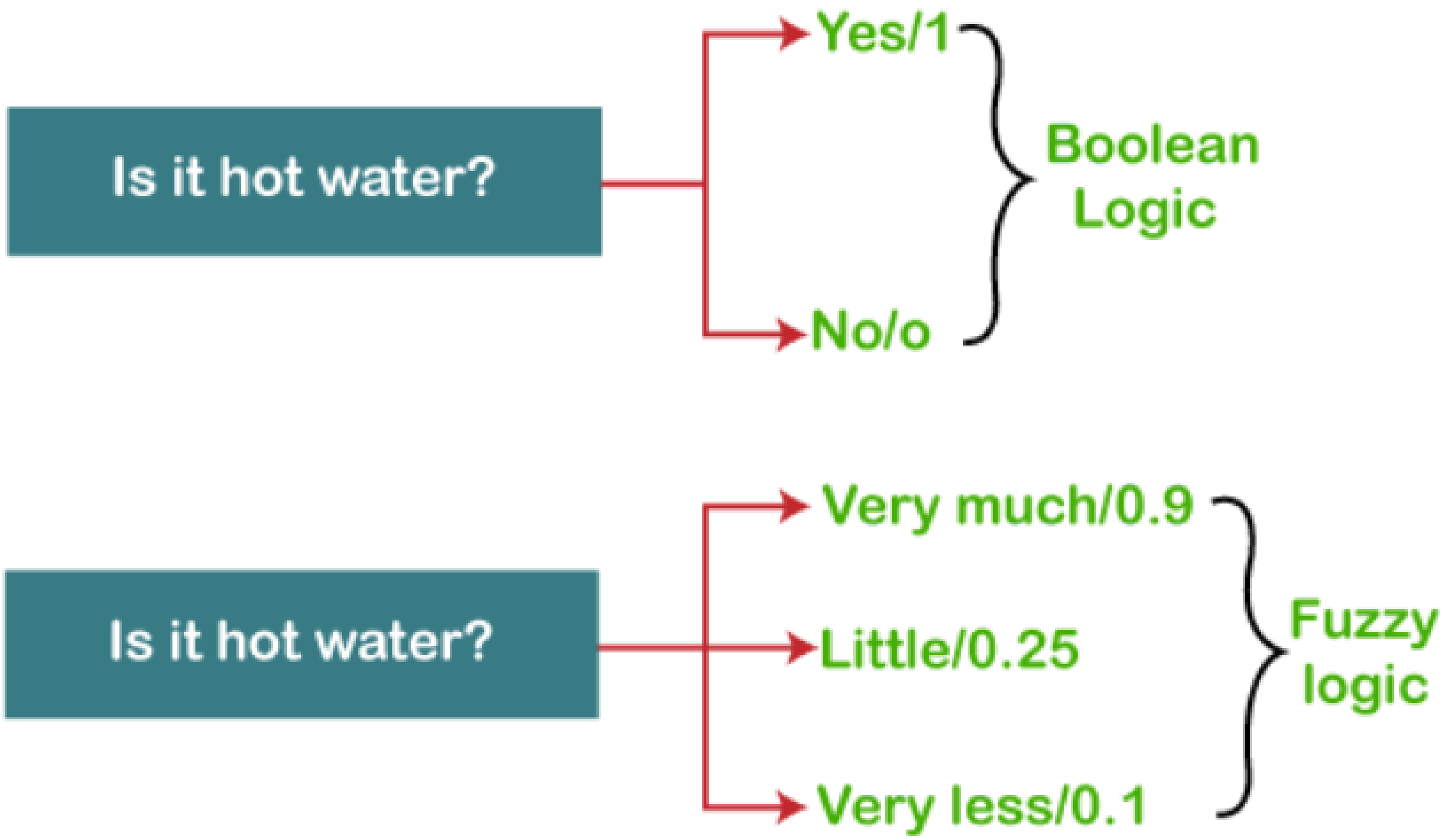
Δίτιμη Λογική vs Ασαφή Λογική (1/2)

- Το στοιχείο A ανήκει στο σύνολο S;
  - **Δίτιμη Λογική:** Ναι – 1 – Αληθές ή Όχι – 0 – Ψευδής
  - **Ασαφής Λογική:** Τα A μπορεί να ανήκει με κάποιο βαθμό στο S και σε κάποιο βαθμό όχι.





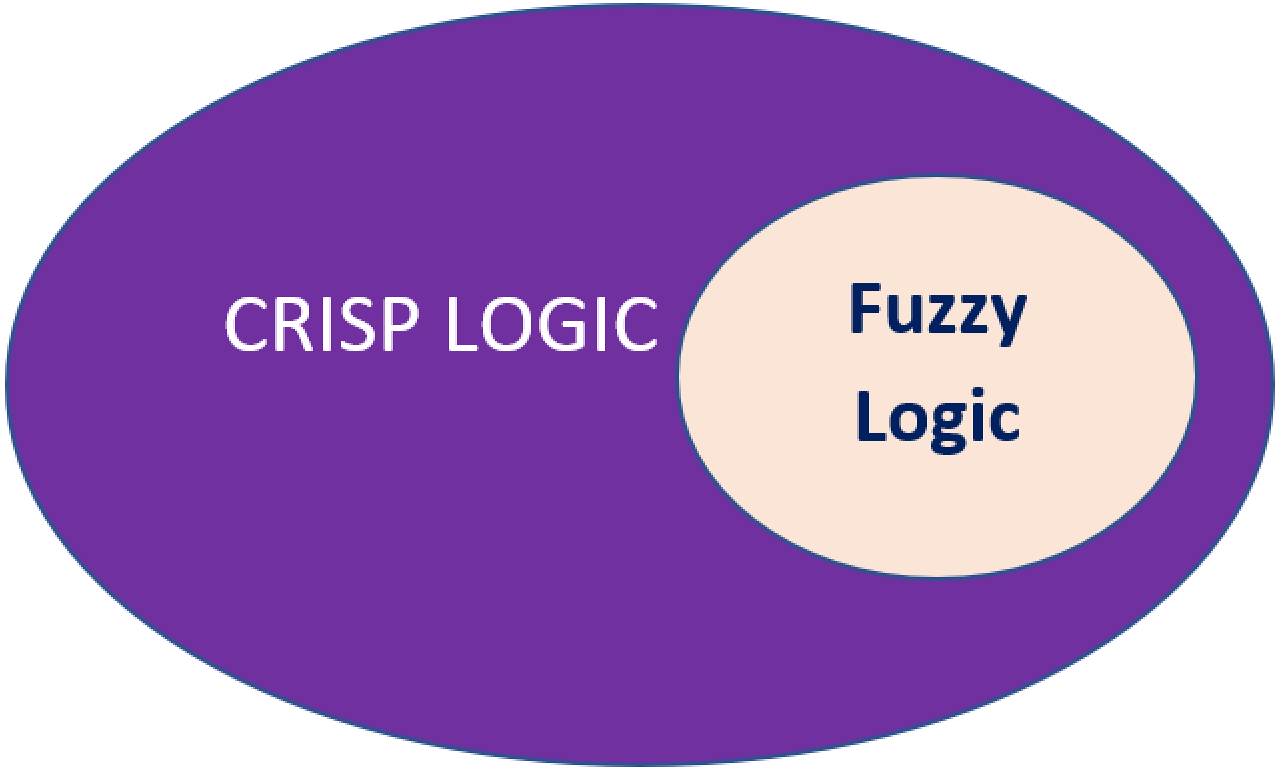
Δίτιμη Λογική vs Ασαφή Λογική (2/2)



Δίτιμη Λογική

- Ένα στοιχεία ανήκει σε ένα σύνολο ή όχι
- Υπάρχει σαφής διάκριση ανάμεσα σε στοιχεία που το ένα ανήκει σε ένα σύνολο και το άλλο δεν ανήκει.
- Μαθηματικοποίηση με χρήση της άλγεβρας Boole.
- Σύμφωνα με την άλγεβρα Boole, μια λογική πρόταση μπορεί να είναι είτε αληθής είτε ψευδής.
  - «Το δελφίνι είναι θηλαστικό» → ΑΛΗΘΗΣ
  - «Ο σκύλος πετάει» → ΨΕΥΔΗΣ
  - 2+3=5 → ΑΛΗΘΗΣ
  - 3*8=10 →ΨΕΥΔΗΣ

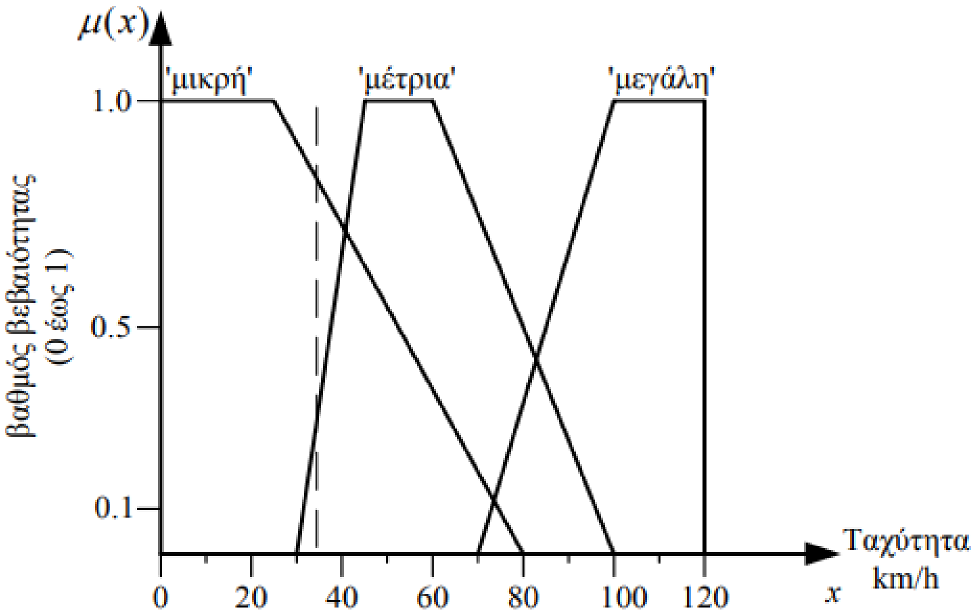
Ασαφής Λογική (1/4)

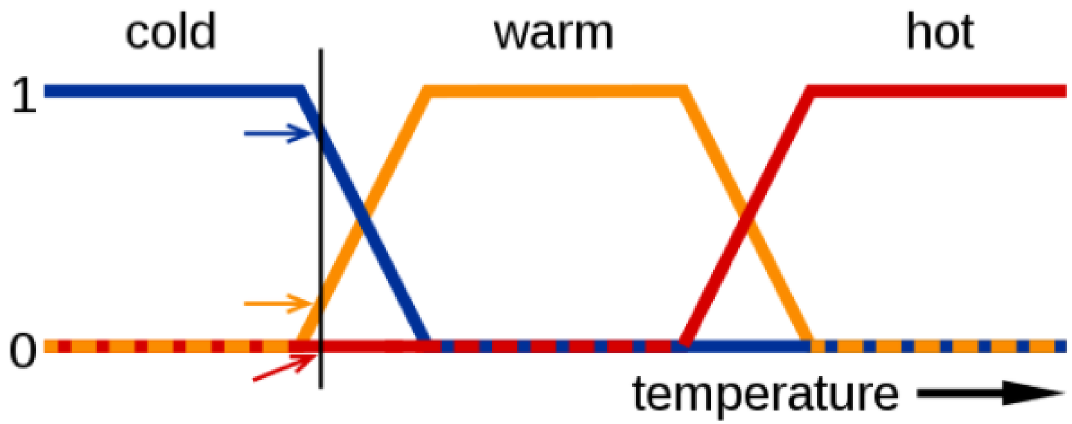


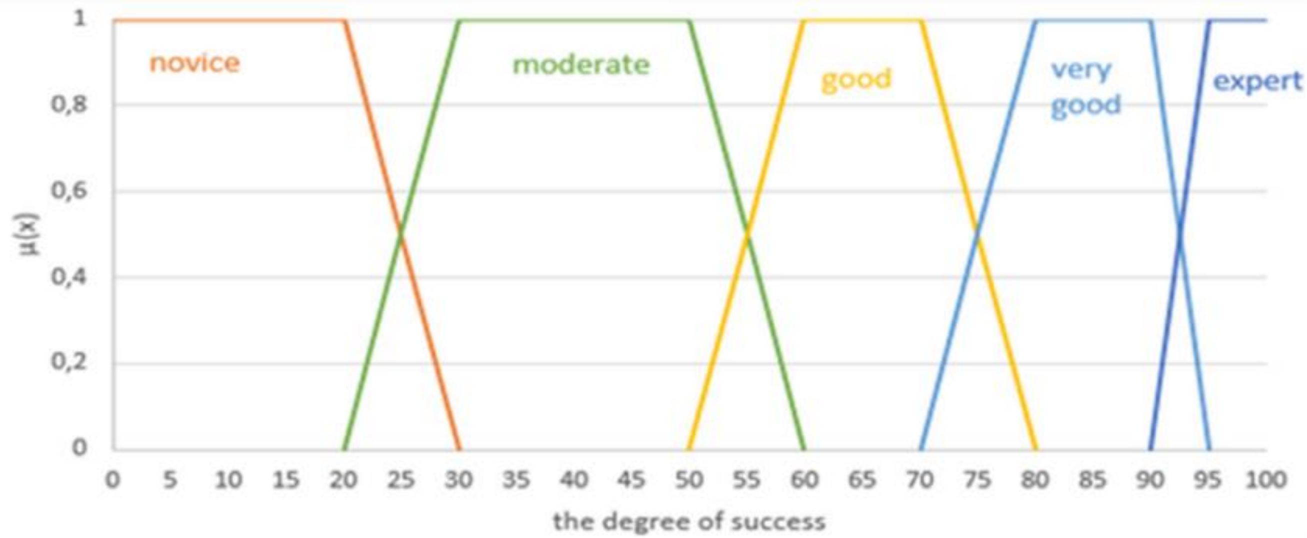
Ασαφής Λογική (2/4)

- Δεν είναι όλα άσπρα ή μαύρα, υπάρχει και το γκρι.
- Η ασαφής λογική (fuzzy logic) είναι μια επέκταση της κλασσικής αριστοτέλειας λογικής (δίτιμη λογική).
- Μια πρόταση μπορεί να είναι αληθής "με κάποιο βαθμό αληθείας", και όχι απλά αληθής ή ψευδής.
  - 15 ετών → 100% νέος
  - 35 ετών → 90% νέος 10% μεσήλικας
  - 68 ετών → 80% μεσήλικας & 20% ηλικιωμένος
- Λεκτικός προσδιορισμός μεγεθών.

Ασαφής Λογική (3/4)



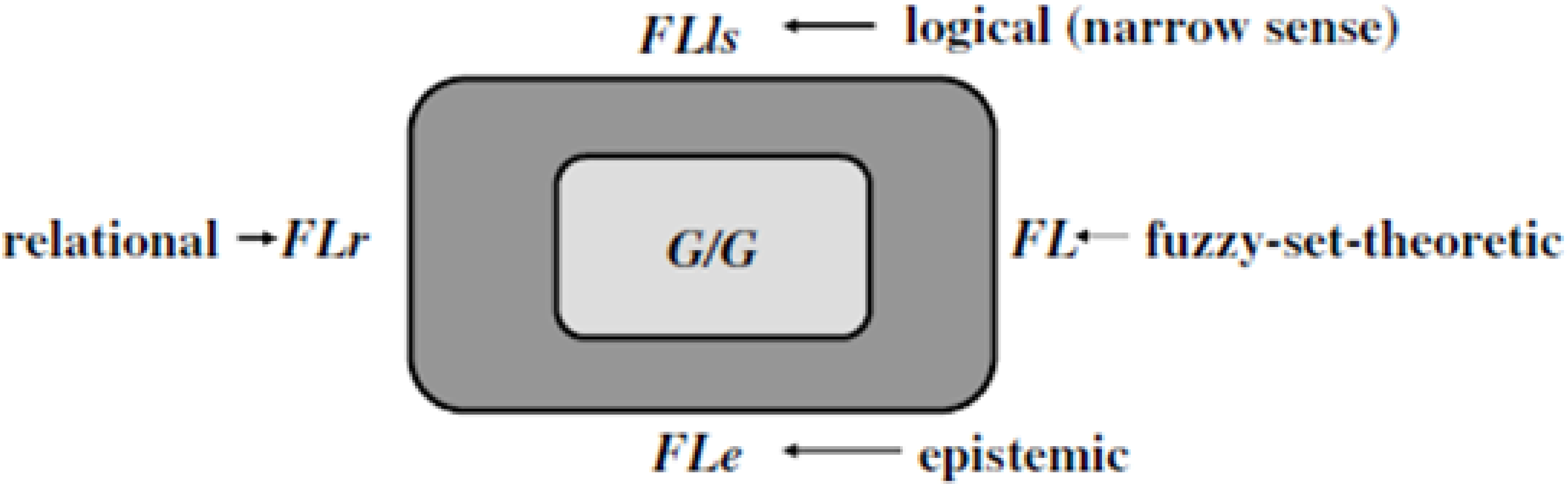




Ασαφής Λογική (4/4)

- Η ασαφής λογική μπορεί να θεωρηθεί ως μια προσπάθεια τυποποίησης/μηχανοποίησης δύο αξιοσημείωτων ανθρώπινων ικανοτήτων:
  - της ικανότητας αιτιολογίας και λήψης ορθολογικών αποφάσεων σε ένα περιβάλλον ανακρίβειας, αβεβαιότητας, με ελλιπή πληροφόρηση, αντικρουόμενες πληροφορίες και μεροληψία της αλήθειας,
  - της ικανότητας εκτέλεσης μιας μεγάλης ποικιλίας εργασιών χωρίς μετρήσεις και υπολογισμούς.

Οι βασικές αρχές της ασαφούς λογικής



G/G: Graduation/ Granulation

Graduation: αναλογική διαίρεση σε διαβαθμισμένη κλίμακα – διαχωρισμός σε βαθμούς

Granulation: διαίρεση σε κόκκους/ κοκκοποίηση

Παράδειγμα: Λειτουργία κλιματιστικού

- θ: θερμοκρασία δωματίου & ΔΘ: διαφορά θερμοκρασίας δωματίου με ρύθμιση θερμοκρασίας.
- Κανόνες λειτουργίας:
  - Αν $\theta > 35^oC$ & $\Delta\Theta > 10^oC$ ➔ λειτουργία ανεμιστήρα στο ΔΥΝΑΤΟ
  - Αν $30^oC < \theta \leq 35^oC$ & $\Delta\Theta < 10^oC$ ➔ λειτουργία ανεμιστήρα στο ΜΕΣΑΙΟ
  - Αν $25^oC < \theta \leq 30^oC$ & $\Delta\Theta < 5^oC$ ➔ λειτουργία ανεμιστήρα στο ΧΑΜΗΛΟ
  - Αν $25^oC < \theta \leq 30^oC$ & $\Delta\Theta < 2^oC$ ➔ λειτουργία ανεμιστήρα σε ΑΝΑΜΟΝΗ

Incompatibility Principle – Αρχή του Ασυμβίβαστου

- "As the complexity of a system increases, our ability to make precise and yet significant statements about its behaviour diminishes until a threshold is reached beyond which precision and significance (or relevance) become almost mutually exclusive characteristics." [Z Zadeh, L. A., 1973, Outline of a new approach to the analysis complex systems and decision processes, IEEE Trans. Syst. Man. Cybernet. 3:28-44.]
- «Καθώς η πολυπλοκότητα ενός συστήματος αυξάνει, η ικανότητα μας να προβαίνουμε σε ακριβείς και σημαντικές δηλώσεις για τη συμπεριφορά του μειώνεται μέχρι που να φθάσουμε σε ένα όριο πέρα του οποίου ακρίβεια και σημαντικότητα καθίστανται σχεδόν αμοιβαίως αποκλειόμενα χαρακτηριστικά»

Ιστορική αναδρομή (1/5)

- Η εισαγωγή της Ασαφούς Λογικής έγινε από τον Περσικής καταγωγής, Καθηγητή του Πανεπιστημίου του Berkeley, Lotfi Zadeh.
- Η ιδέα του δημοσιεύτηκε το 1965 στην εργασία του: «Fuzzy Sets. Information and Control, 8 (1965) 338 - 353.»
- Οι πρώτες αντιδράσεις της επιστημονικής κοινότητας απέναντι στην ασαφή θεωρία ήταν αρνητικές.
  - Θεωρήθηκε ότι η «ασάφεια» ήταν είτε αντίθετη στις βασικές επιστημονικές αρχές.
  - Υπήρχε η άποψη ότι η θεωρία πιθανοτήτων ήταν σε θέση να επιλύσει οποιοδήποτε πρόβλημα επέλυε η ασαφής θεωρία κατά τρόπο εξίσου επαρκή, εάν όχι επαρκέστερο.

Ιστορική αναδρομή (2/5)

- 1968: έννοια του ασαφούς αλγορίθμου (fuzzy algorithm)
- 1970: έννοια των ασαφούς λήψης αποφάσεων (fuzzy decision making)
- 1971: ασαφή διάταξη (fuzzy ordering)
- 1973: λεκτική μεταβλητή (linguistic variable)
- 1975: ασαφείς κανόνες (fuzzy if–then rules).

Ιστορική αναδρομή (3/5)

- 1975: ασαφής ελεγκτής για έλεγχο ατμομηχανής, Mamdani και Assilian, Αγγλία.
- 1976: ασαφής ελεγκτής στη διαδικασία παραγωγής χάλυβα, Tong, Αγγλία.
- 1978: ασαφής ελεγκτής για κάμινο τσιμέντου, Holmblad και Østergaard, Δανία.
- 1980: ασαφής ελεγκτής για εργοστάσιο καθαρισμού υδάτων, Michio Sugeno, Ιαπωνία.
- 1983 & 1985: εφαρμογές στη ρομποτική και τη βιομηχανία οχημάτων.

Ιστορική αναδρομή (4/5)

- Το 1983 οι Yasunobu και Miyamoto από την εταιρεία Hitachi ανέπτυξαν στην Ιαπωνική πόλη Sandai ένα σύστημα ελέγχου του μετρό.
  - Ελεγκτής σταθερής ταχύτητας: ξεκινά το τρένο και το κρατά σε σταθερή ταχύτητα κάτω από ένα όριο ασφαλείας.
  - Ελεγκτής αυτόματης πέδησης: ελέγχει την ταχύτητα του τρένου έτσι ώστε να σταματήσει σε ένα προκαθορισμένο σημείο.
  - Η διαδρομή κατέστη τόσο άνετη ώστε οι επιβάτες δεν αισθάνονταν την ανάγκη να κρατηθούν από τις χειρολαβές.
  - 70% λιγότερα σφάλματα στην επιτάχυνση και την πέδηση σε σχέση με τους ανθρώπινους χειριστές.

Ιστορική αναδρομή (5/5)

- Το 1990 η εταιρεία Matsushita & το 1996 η Siemens κατασκεύασαν πλυντήρια βασισμένα στην ασαφή λογική.
  - Αισθητήρες ανίχνευαν το χρώμα και το είδος της βρωμιάς των ρούχων, όπως επίσης και τον όγκο της πλύσης.
  - Ασαφείς κανόνες για την αυτόματη επιλογή του κατάλληλου κύκλου πλύσης.
- Mitsubishi: ασαφές κλιματιστικό μηχάνημα.
- Sanyo: κάμερα με ασαφή ελεγκτή για καλύτερη εστίαση και σταθεροποίηση της εικόνας.
- Αρχή 21^{ου} αιώνα: ασαφείς αλγόριθμοι στο διαδίκτυο για την κατασκευή προφίλ χρηστών και τη διαχείριση των μεταδεδομένων.

Βασικές Έννοιες Ασαφών Συνόλων

- Ασαφές Σύνολο (fuzzy set) Α: ένα σύνολο διατεταγμένων ζευγών **(x, $\mu_A(x)$)** όπου **x є X** και **$\mu_A(x)$ є [0,1].**
- X αποτελεί ένα ευρύτερο σύνολο αναφοράς που έστω αποτελείται από n στοιχεία: $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$.
- **μ_A:** συνάρτηση συμμετοχής (membership function)
- **$\mu_A(x)$:** βαθμός συμμετοχής (degree of membership) ή βαθμός αληθείας (degree of truth)
  - $\mu_A(x) = 0$: το x δεν ανήκει καθόλου στο σύνολο Α.
  - $\mu_A(x) = 1$: το x ανήκει εξ' ολοκλήρου (πλήρως) στο σύνολο Α.
  - $0 < \mu_A(x) < 1$: το x ανήκει μερικώς (κατά κάποιο βαθμό) στο σύνολο Α.

Παραδείγματα Ασαφών Συνόλων

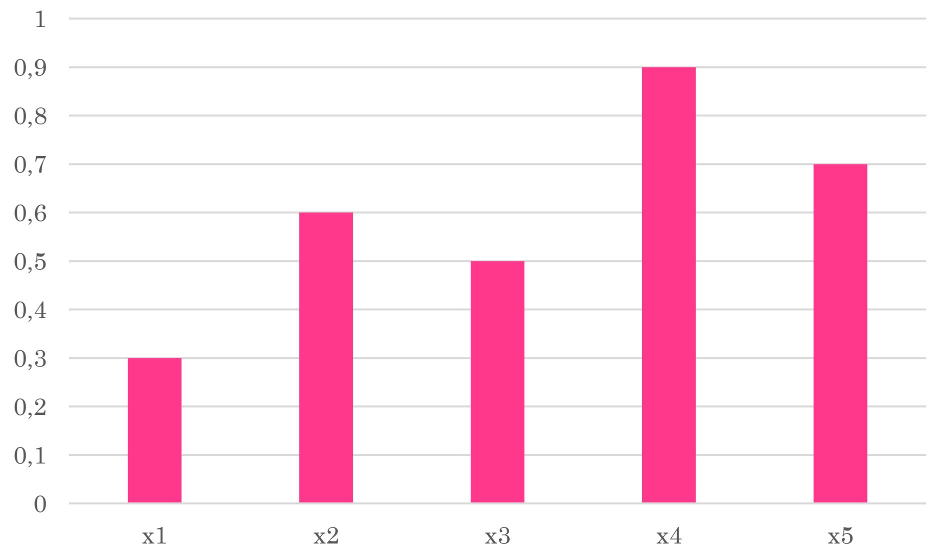
- Ζέστη ={(5, 0), (10, 0.1), (15, 0.5), (20, 0.7), (25, 0.8), (30, 1)}
- Νέος = {(1,0), (5, 0.2), (10, 0.5), (15, 0.8), (20, 1), (25, 1), (30, 0.8), (35, 0.7), (40, 0.5), (45, 0.3), (50, 0)}
- Καλό γνωστικό επίπεδο = {(0,0), (20, 0), (50, 0), (60, 0.3), (70, 0.6), (80, 1), (85, 0.8), (90, 0), (100, 0)}

Διακριτά Ασαφή Σύνολα

- Διακριτά πεδία ορισμού
- Ασυνεχείς συναρτήσεις συμμετοχής
- Πεδίο ορισμού X={x_1, x_2, …, x_n}
- Ασαφές σύνολο Α={$\frac{\mu_A(x_1)}{x_1} + \frac{\mu_A(x_2)}{x_2} + \ldots \frac{\mu_A(x_n)}{x_n}$}
  - +: όχι σύμβολο πρόσθεσης, αλλά συμβολίζει την ένωση
  - —: όχι σύμβολο της διαίρεσης, αλλά χρησιμοποιείται ως διαχωριστής για να συμβολίσει το διατεταγμένο ζεύγος (τιμή/βαθμός συμμετοχής).
  - Τα στοιχεία του 'πεδίου ορισμού με μηδενικό βαθμό συμμετοχής συνήθως παραλείπονται.

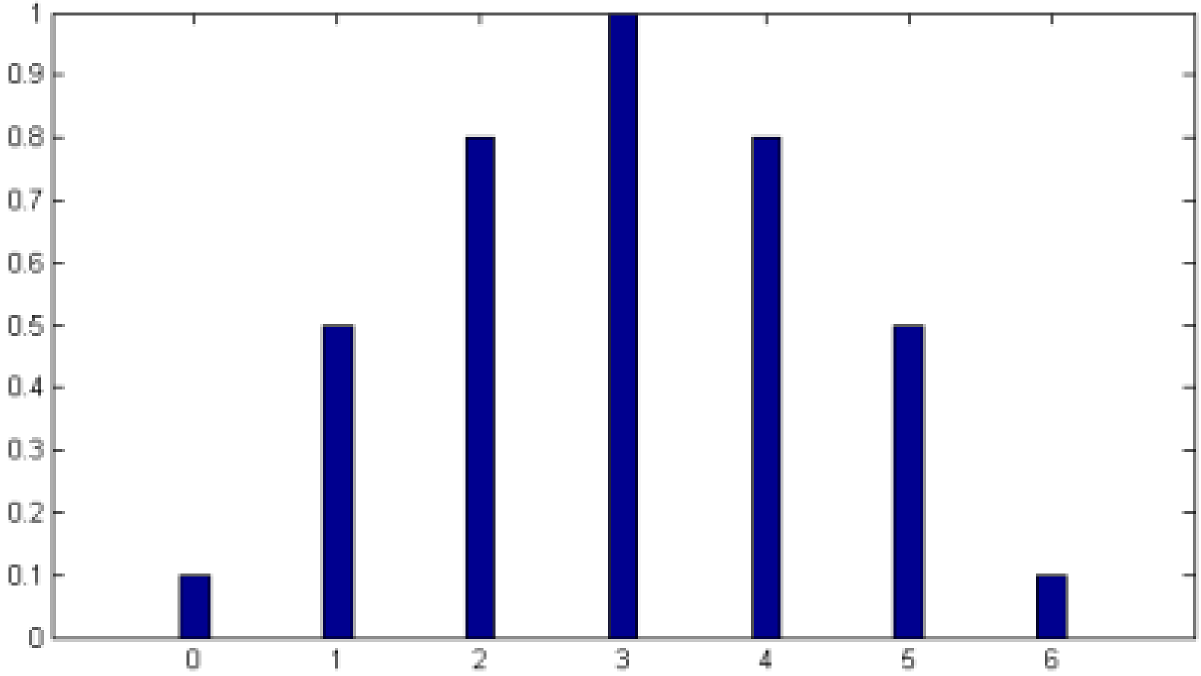
Διακριτά Ασαφή Σύνολα – Παράδειγμα 1

- Πεδίο ορισμού Χρώματα = {Κόκκινο, Μπλε, Άσπρο, Μαύρο, Γκρι-Ασημί}
  - X=Χρώματα={x_1, x_2, x_3, x_4, x_5}
  - Όπου x_1 = Κόκκινο, x_2 = Μπλε, x_3 = Άσπρο, x_4 = Μαύρο, x_5 = Γκρι-Ασημί
- Ασαφές σύνολο Α: «καλύτερο χρώμα για αυτοκίνητο».
  - $A=\{\frac{0.3}{x_1} + \frac{0.6}{x_2}+\frac{0.5}{x_3} + \frac{0.9}{x_4}+ \frac{0.7}{x_5}\}$
  - Οι τιμές καθορίζονται βάση δημοσκοπήσεων



Διακριτά Ασαφή Σύνολα – Παράδειγμα 2

- Πεδίο ορισμού X = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
- Ασαφές σύνολο A: «αριθμοί κοντά στο 3».
  - $A=\{\frac{0.1}{0}+\frac{0.5}{1}+\frac{0.8}{2}+\frac{1}{3}+\frac{0.8}{4}+\frac{0.5}{5}+\frac{0.1}{6}\}$



Συνεχή Ασαφή Σύνολα

- Συνεχή πεδία ορισμού.
- Συνεχείς συναρτήσεις συμμετοχής.
- $A = \int \frac{\mu_A(x)}{x}$
  - $\int$: όχι σύμβολο ολοκληρώματος, αλλά συμβολίζει την ένωση

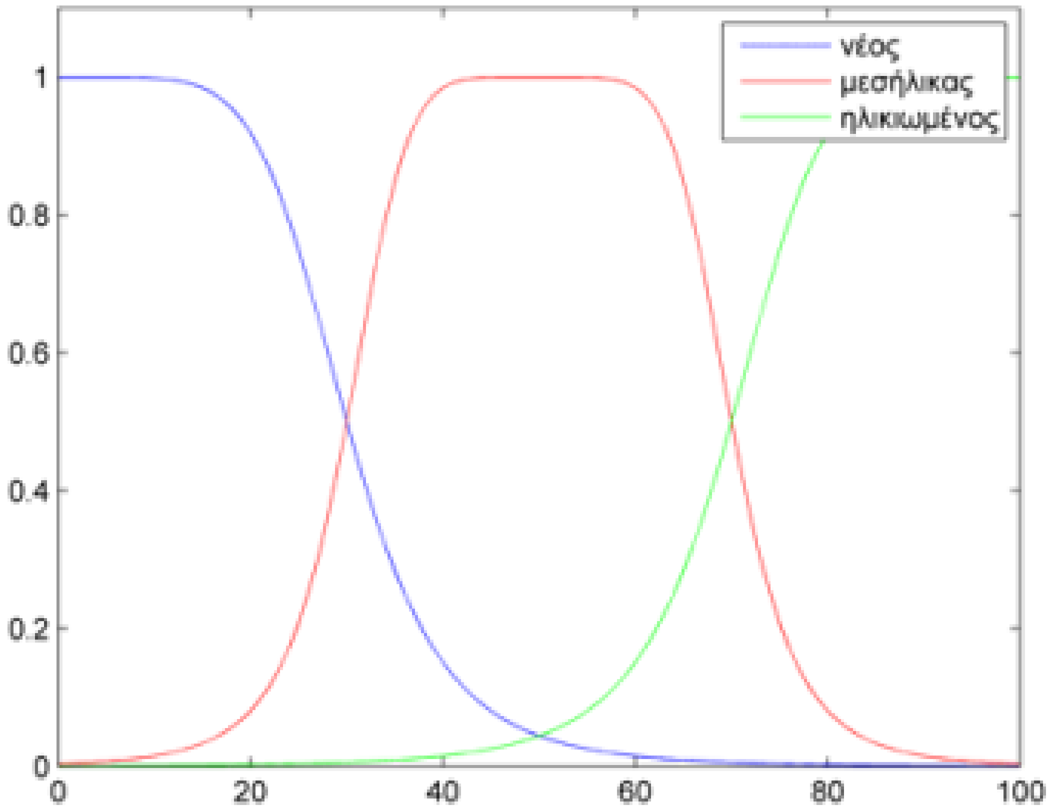
Συνεχή Ασαφή Σύνολα – Παράδειγμα 1

- Πεδίο ορισμού X=[0,100] – περιγράφει ηλικίες
- Τρία ασαφή σύνολα:

$$\boldsymbol{A} = \text{«νέος»} = \{(x,\mu_A(x)) \mid x \in \boldsymbol{U}\},\ \mu_A(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{30}\right)^6}$$

$$\boldsymbol{B} = \text{«μεσήλικας»} = \{(x,\mu_B(x)) \mid x \in \boldsymbol{U}\},\ \mu_B(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-50}{20}\right)^6}$$

$$\boldsymbol{C} = \text{«ηλικιωμένος»} = \{(x,\mu_C(x)) \mid x \in \boldsymbol{U}\},\ \mu_C(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-100}{30}\right)^6}$$



Συνεχή Ασαφή Σύνολα – Παράδειγμα 2

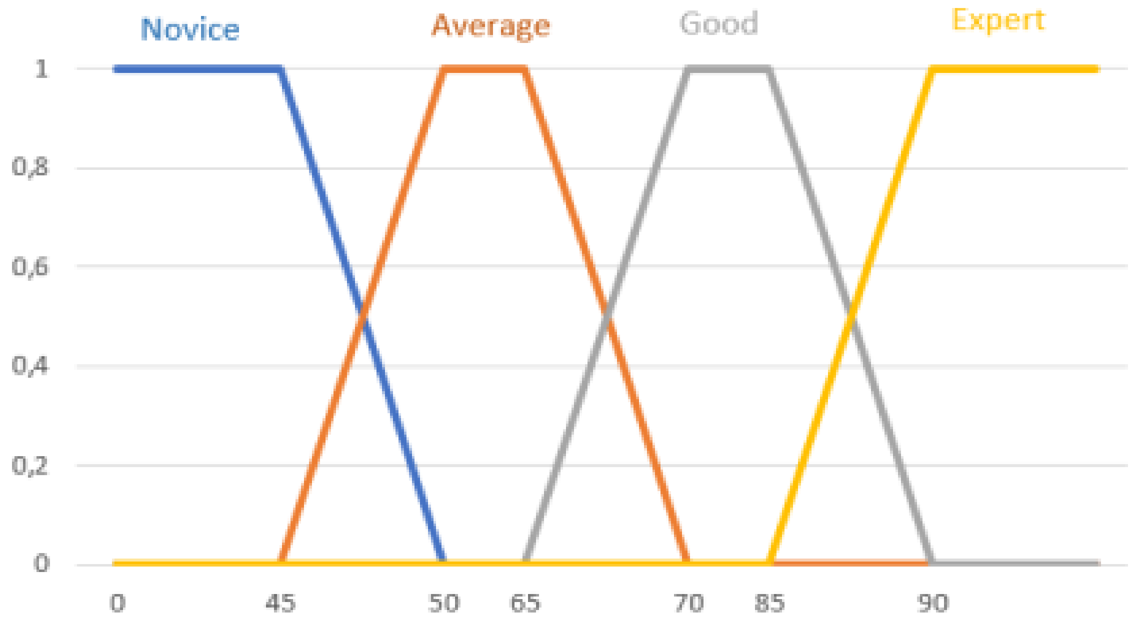
- Πεδίο ορισμού X=[0,100] – βαθμοί επιτυχίας σε τεστ
- Ασαφή σύνολα: Beginner (B), Moderate (M), Good(G), Expert (E).

$$\mu_N(x) = \left\{ \begin{array}{lr} 1, & x < 45 \\ 1 - \frac{x-45}{5}, & 45 < x < 50 \\ 0, & x \geq 50 \end{array} \right\}$$

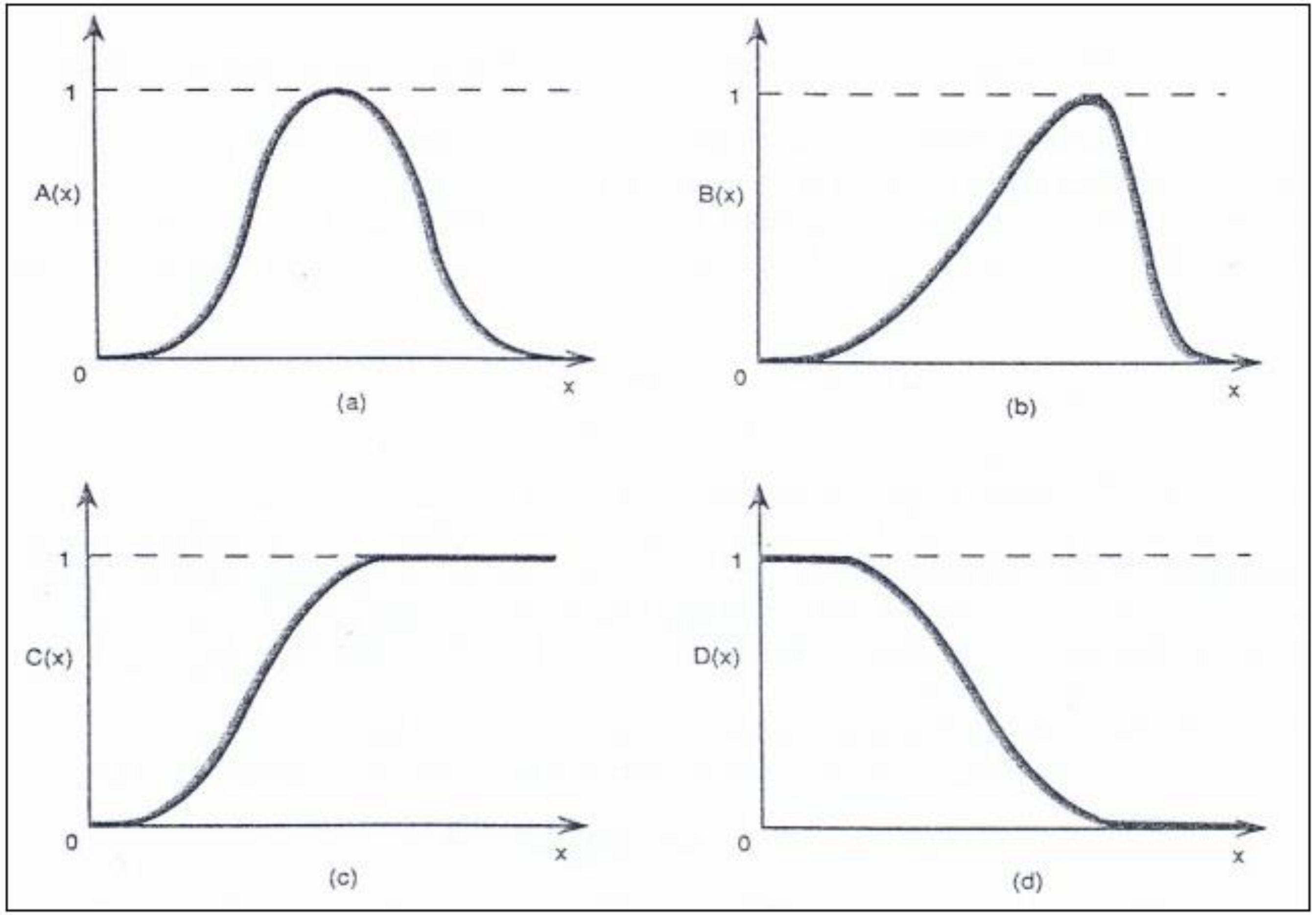
$$\mu_A(x) = \left\{ \begin{array}{lr} \frac{x-45}{5}, & 45 < x < 50 \\ 1, & 50 \leq x \leq 65 \\ 1 - \frac{x-65}{5}, & 65 < x < 70 \\ 0, & x \leq 45, x \geq 70 \end{array} \right\}$$

$$\mu_G(x) = \left\{ \begin{array}{lr} \frac{x-65}{5}, & 65 < x < 70 \\ 1, & 70 \leq x \leq 85 \\ 1 - \frac{x-85}{5}, & 85 < x < 90 \\ 0, & x \leq 65, x \geq 90 \end{array} \right\}$$

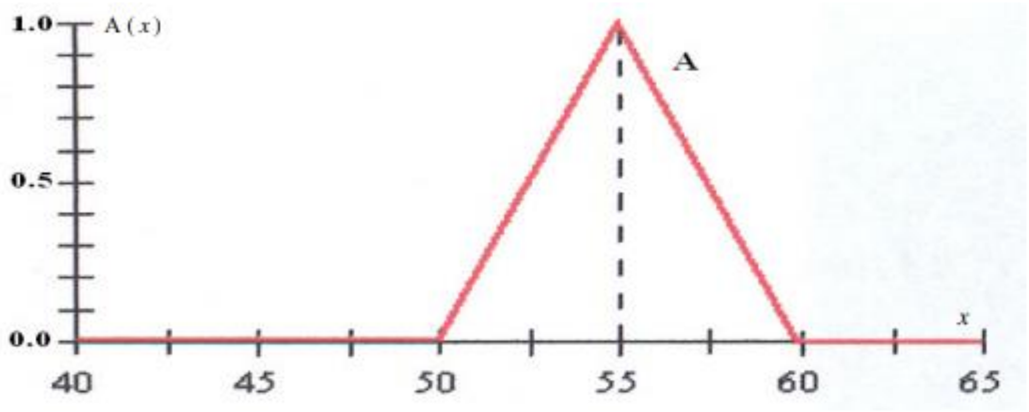
$$\mu_E(x) = \left\{ \begin{array}{lr} \frac{x-85}{5}, & 85 < x < 90 \\ 1, & 90 \leq x \leq 100 \\ 0, & x \leq 85 \end{array} \right\}$$

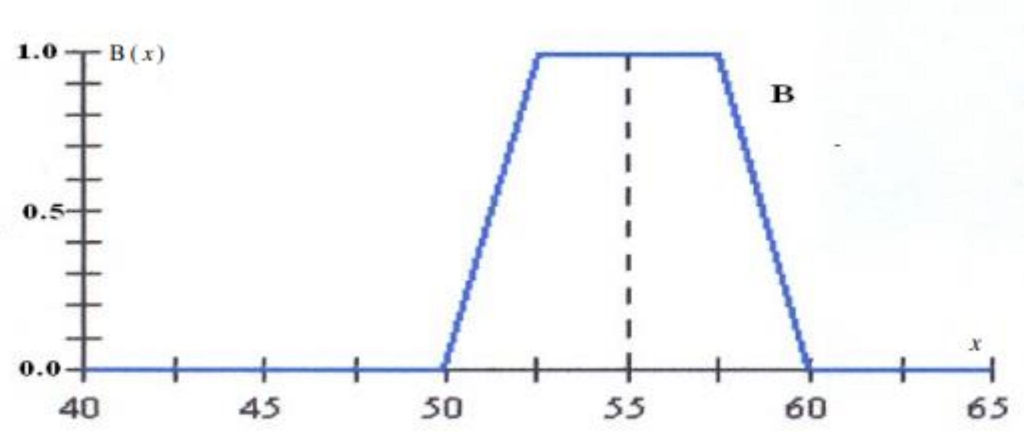


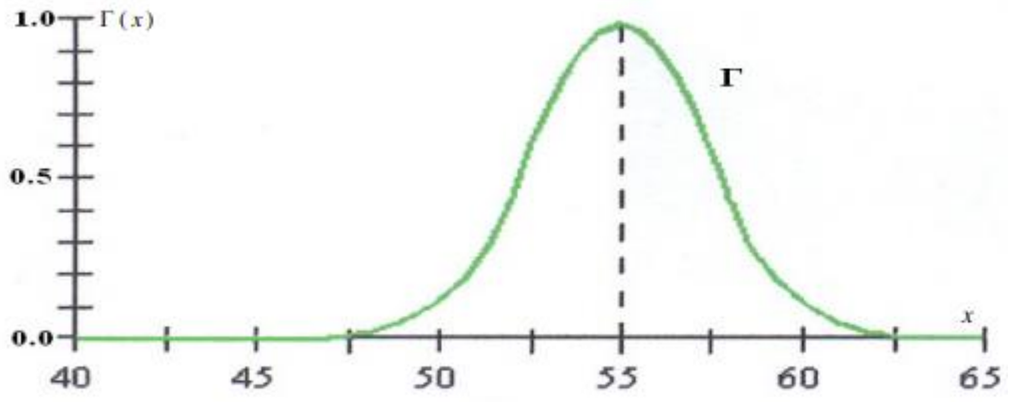
Είδη Συνεχών Ασαφών Συνόλων (1/2)



Είδη Συνεχών Ασαφών Συνόλων (2/2)





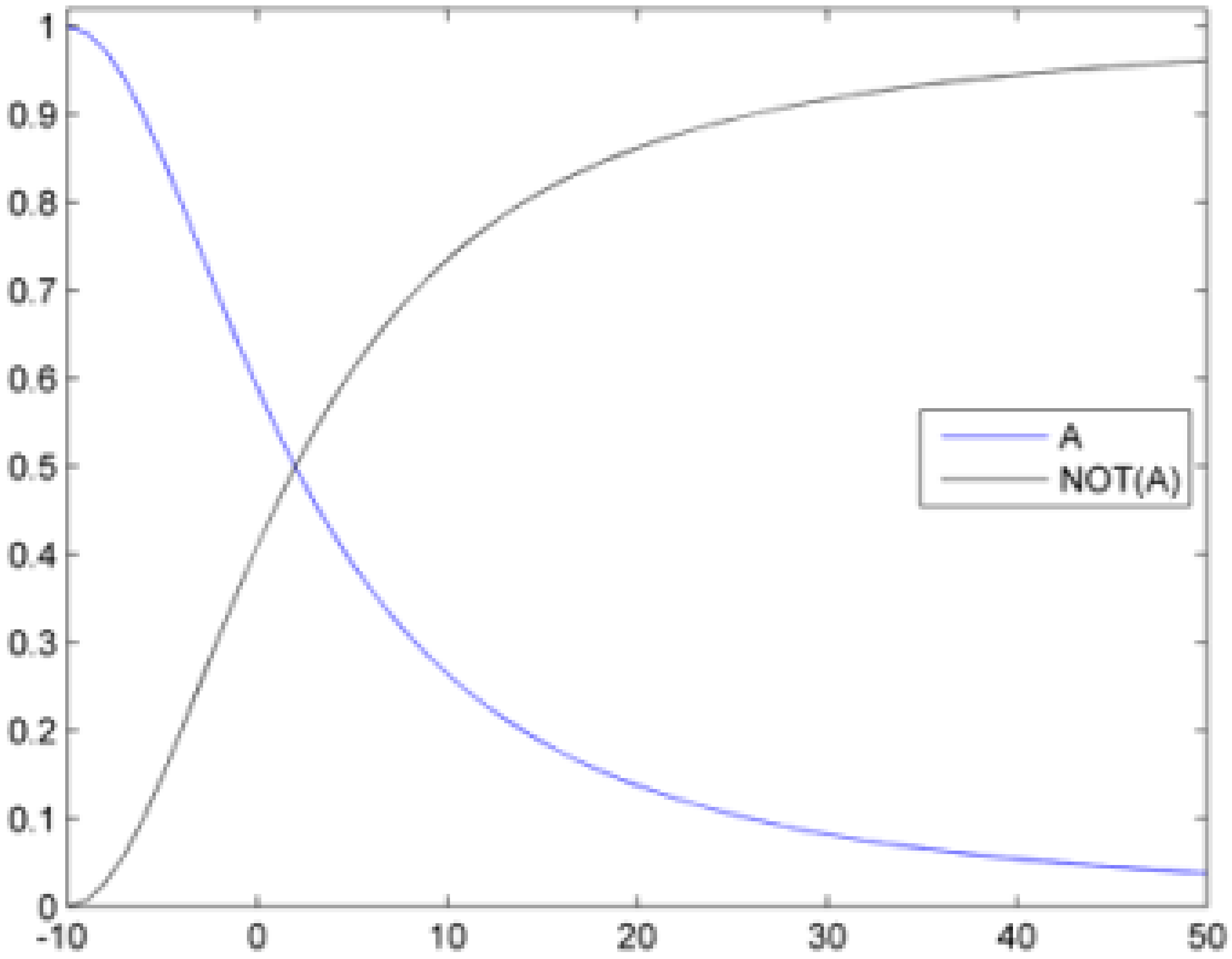


Βασικές πράξεις επί των Ασαφών Συνόλων

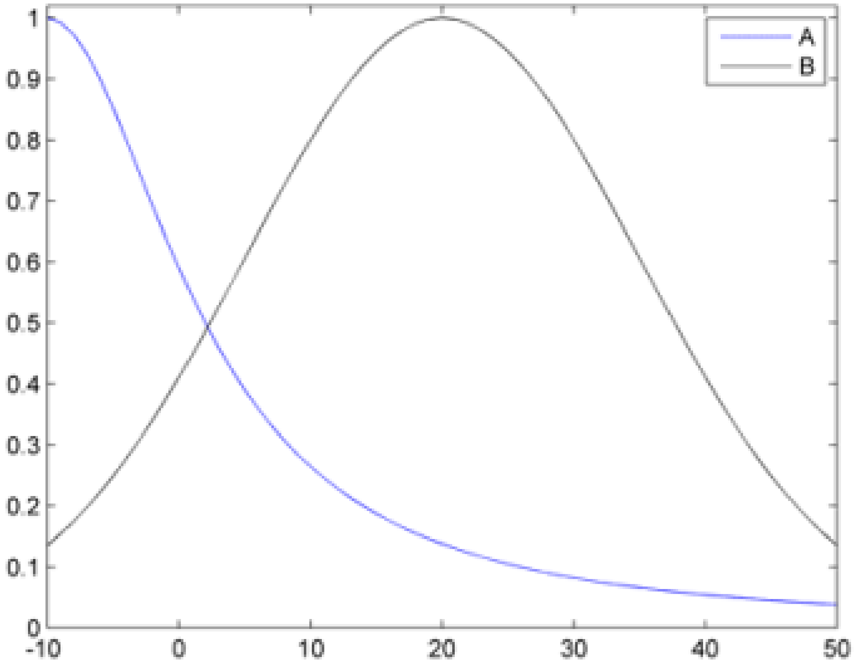
Έστω 2 ασαφή σύνολα $A=(x, \mu_A(x))$, $\mu_A(x) \in [0,1]$. και $B=(x, \mu_B(x))$, $\mu_B(x) \in [0,1]$

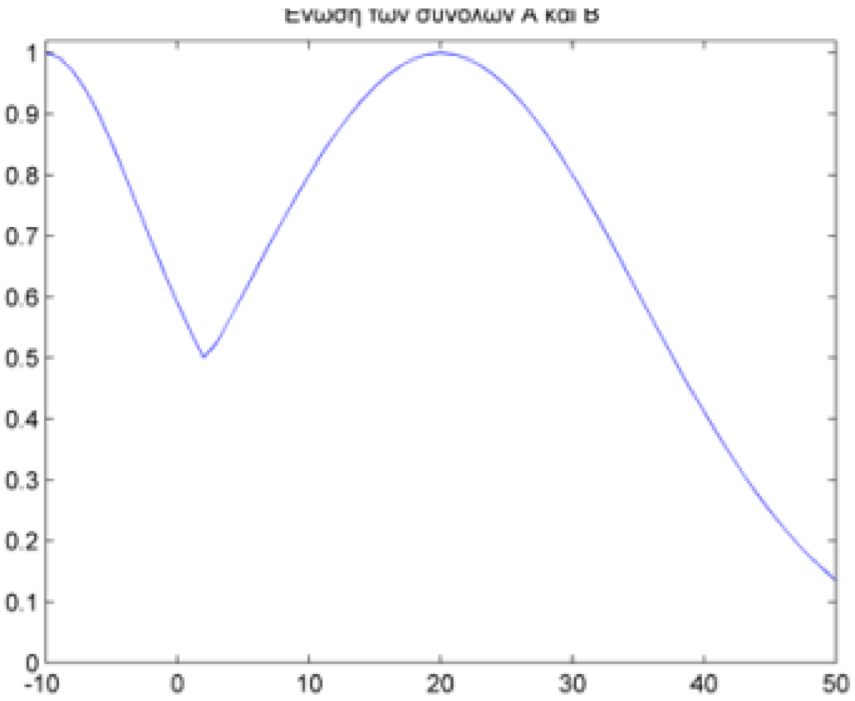
- Συμπλήρωμα $\tilde{A}$ του A
  - $\mu_{\tilde{A}}(x) = 1- \mu_A(x), \forall\, x \in X$
- Ένωση A U B
  - $\mu_{AUB}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall\, x \in X$
- Τομή $A \cap B$
  - $\mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x)), \forall\, x \in X$
- Καρτεσιανό Γινόμενο AxB
  - $\mu_{AxB}(x_1, x_2) = \min(\mu_A(x_1), \mu_B(x_2))$, $x_1 \in X_1$(πεδίο ορισμού του A) και $x_2 \in X_2$ (πεδίο ορισμού του B)

Συμπλήρωμα Ασαφούς Συνόλου

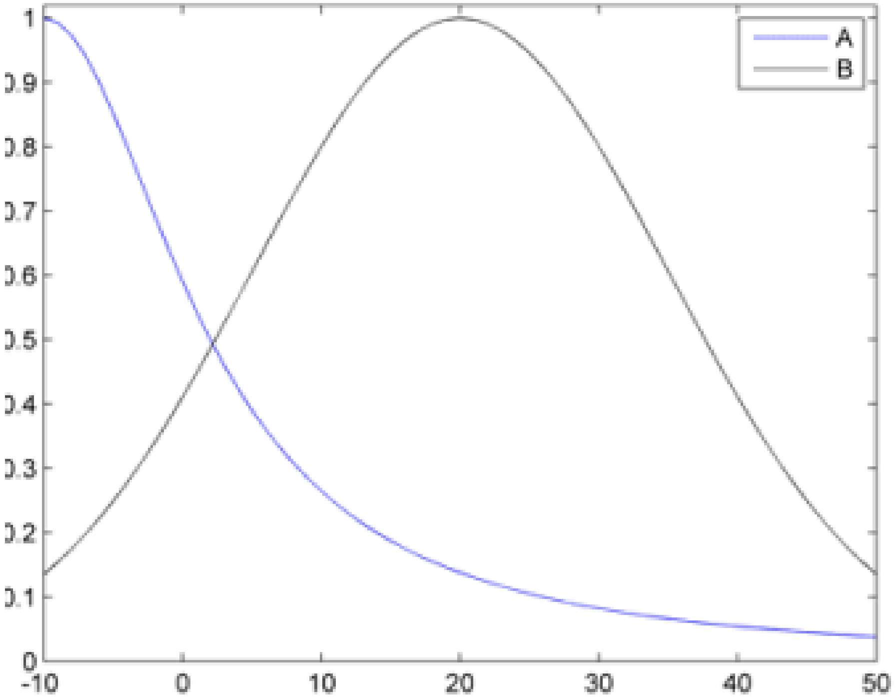


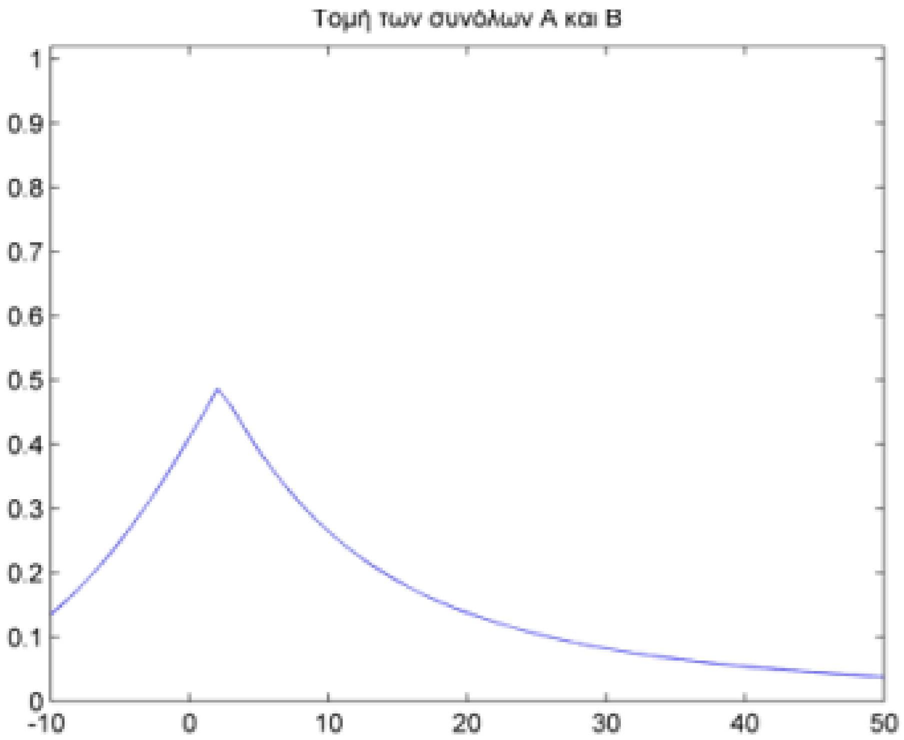
A U B


A
B
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-10
0
10
20
30
40
50


Ενωση των συνολων Α και Β
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
-10
0
10
20
30
40
50

A ∩ B

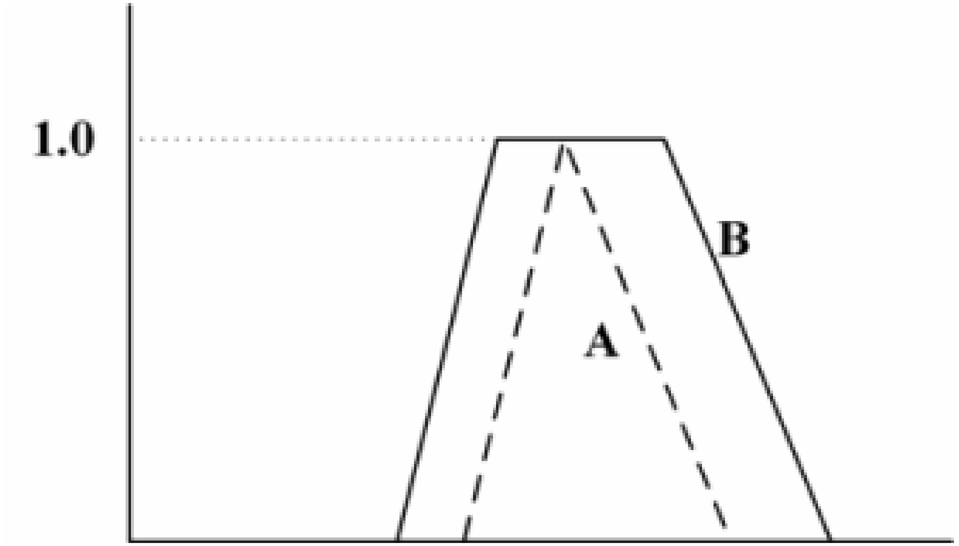




Σχέσεις Ασαφών Συνόλων

Έστω 2 ασαφή σύνολα A=(x, $\mu_A(x)$), $\mu_A(x)$ є [0,1] και B=(x, $\mu_B(x)$), $\mu_B(x)$ є [0,1]

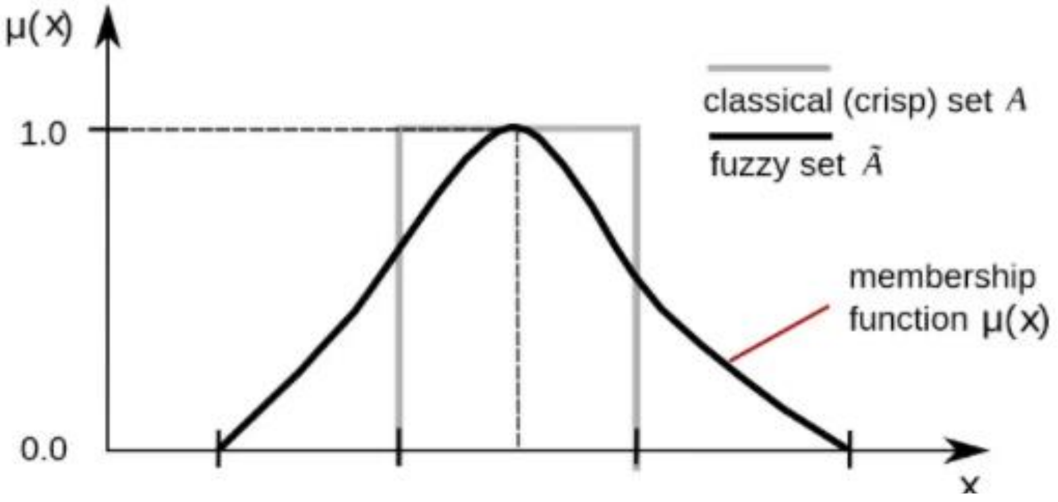
- Ισότητα
  - A =B όταν $\mu_A(x) = \mu_B(x)$, $\forall$ x $\in X$
  - Μέτρο ομοιότητας: $E(A,B)=\frac{|A \cap B|}{|AUB|} = E(B, A)$
  - E(A,B)=1 αν A=B
- Υποσύνολο
  - A υποσύνολο του B (A περιέχεται στο B) όταν $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, $\forall$ x $\in X$
  - Μέτρο γειτονιάς (βαθμός που το A περιέχεται στο B): $S(A, B)= \frac{|A \cap B|}{|A|}$

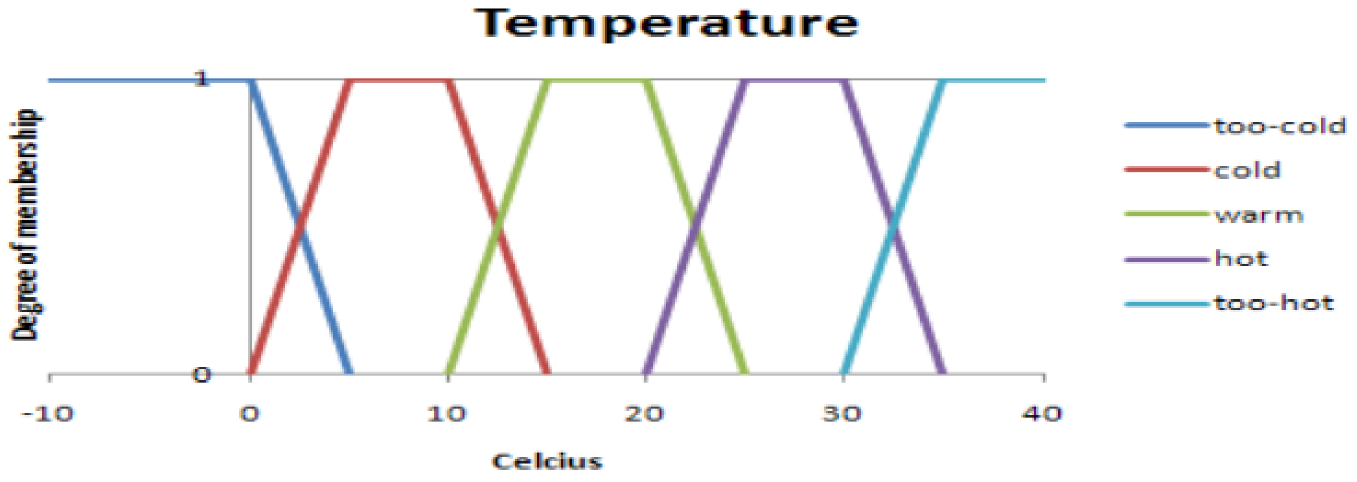


Συνάρτηση Συμμετοχής

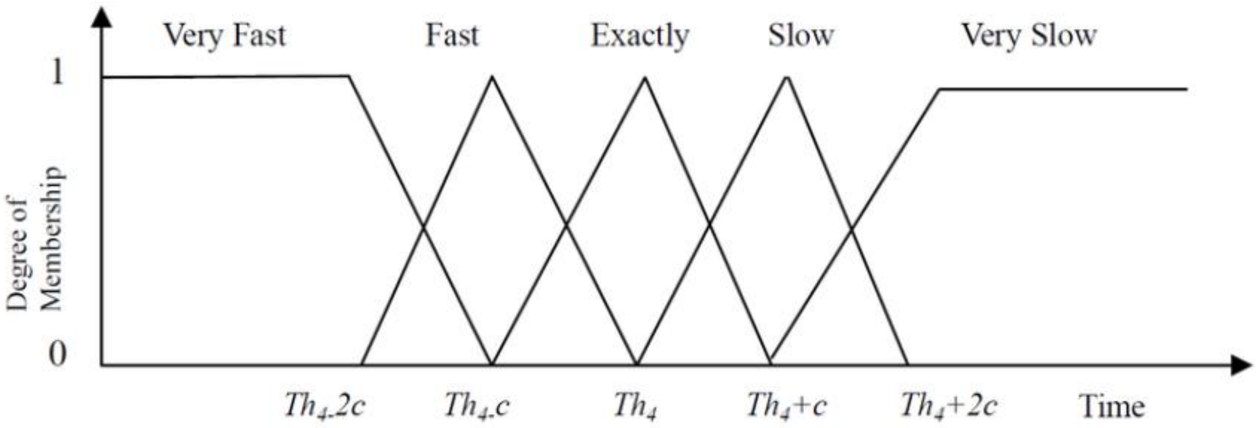
- Υπολογίζει τον βαθμό συμμετοχής κάθε στοιχείου του πεδίου ορισμού στο ασαφές σύνολο.
- Παίρνει τιμές από το 0 (καθόλου συμμετοχή) έως και το 1 (πλήρης συμμετοχή).
- **Οριζόντιος άξονας:** όλα τα πιθανά μέλη του συνόλου (τιμές πεδίου ορισμού).
- **Κάθετος άξονας:** τιμή συμμετοχής από 0 (καθόλου) έως 1 (πλήρως).

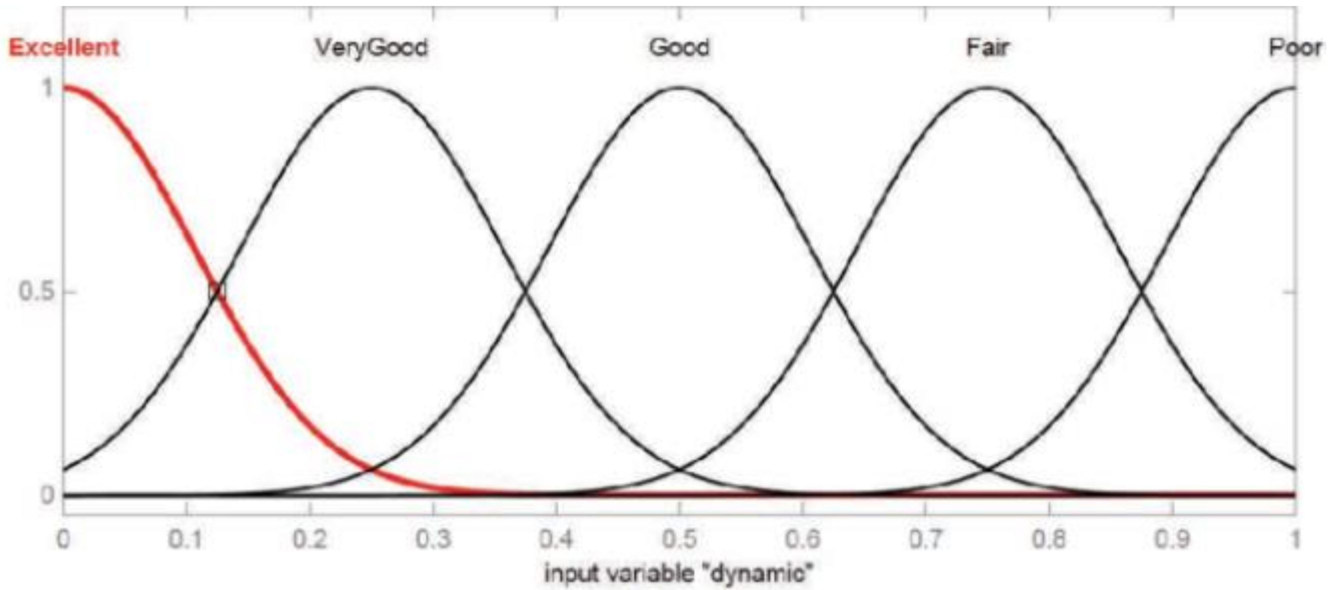
Παραδείγματα Συναρτήσεων Συμμετοχής (1/3)



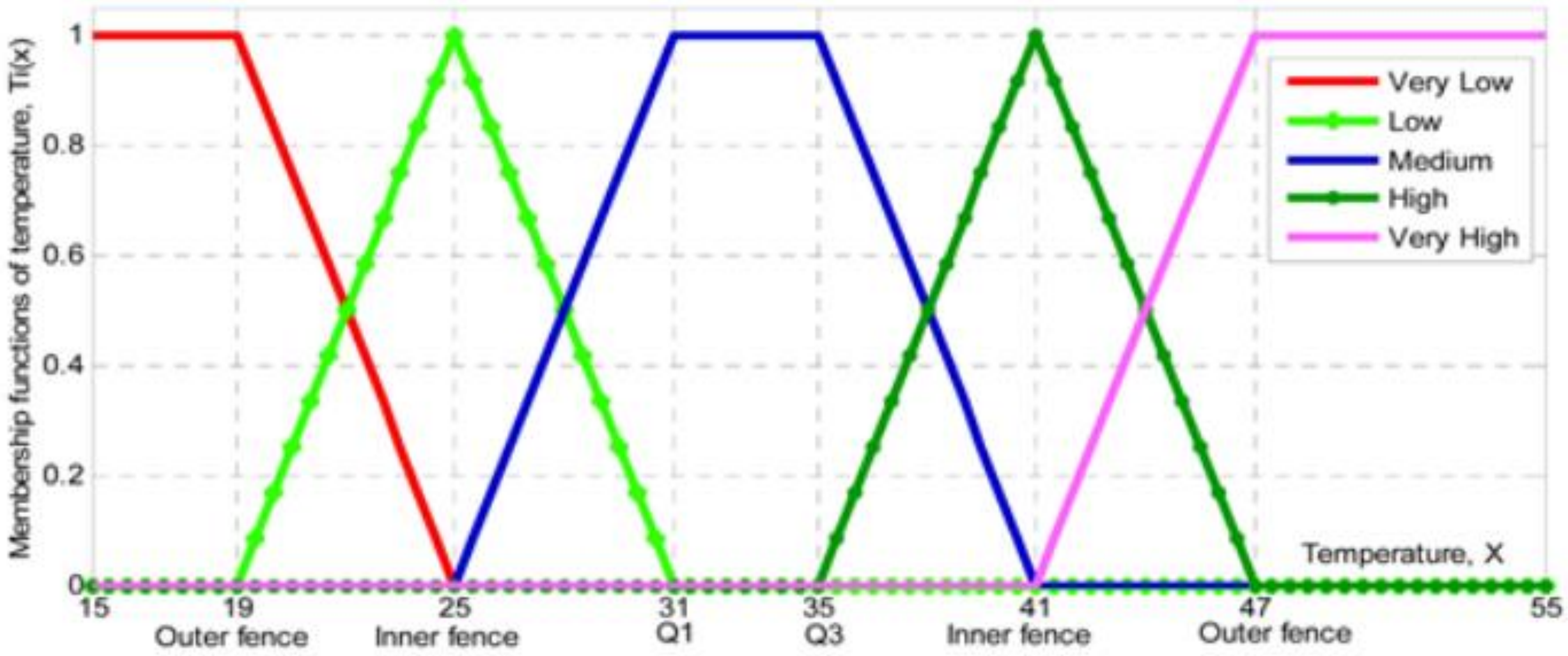


Παραδείγματα Συναρτήσεων Συμμετοχής (2/3)



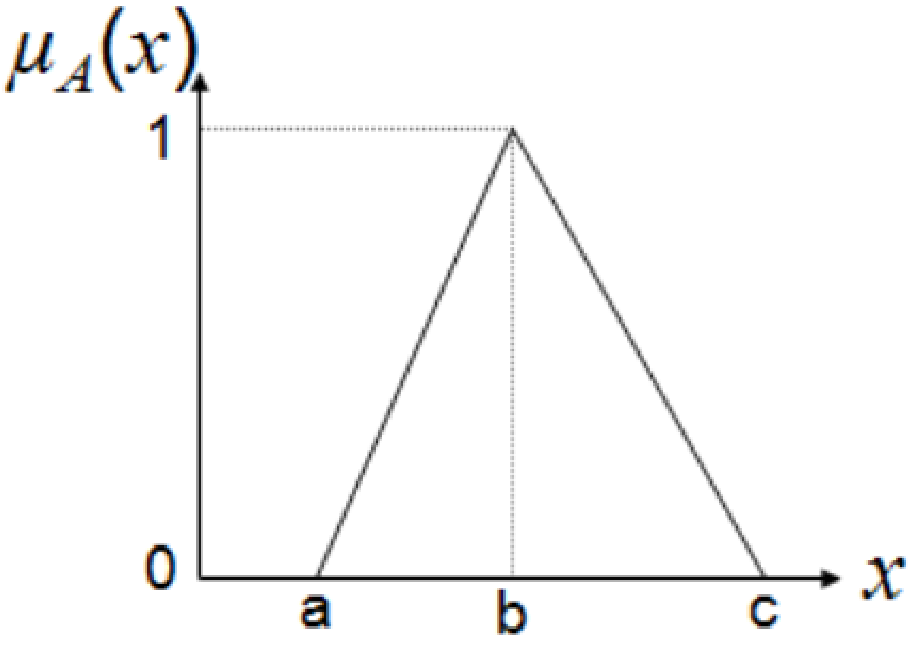


Παραδείγματα Συναρτήσεων Συμμετοχής (3/3)



Τριγωνική Συνάρτηση Συμμετοχής

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{if } a \le x \le b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{if } b \le x \le c \\ 0 & \text{if } x \ge c \end{cases}$$



Τριγωνική Συνάρτηση Συμμετοχής – Παράδειγμα (1/3)

- Σύνολο τιμών: x ε [0, 24]
- Ασαφή Σύνολα: {morning, noon, afternoon, evening, midnight}

	Morning	Noon	Afternoon	Evening	Midnight
0	0	0	0	0	1
6	0,75	0	0	0	0,25
8	1	0	0	0	0
10	0,67	0,33	0	0	0
12	0,33	0,67	0	0	0
14	0	1	0	0	0
16	0	0,5	0,5	0	0
18	0	0	1	0	0
19	0	0	0,5	0,5	0
20	0	0	0	1	0
22	0	0	0	0,5	0,5
24	0	0	0	0	1

Τριγωνική Συνάρτηση Συμμετοχής – Παράδειγμα (2/3)

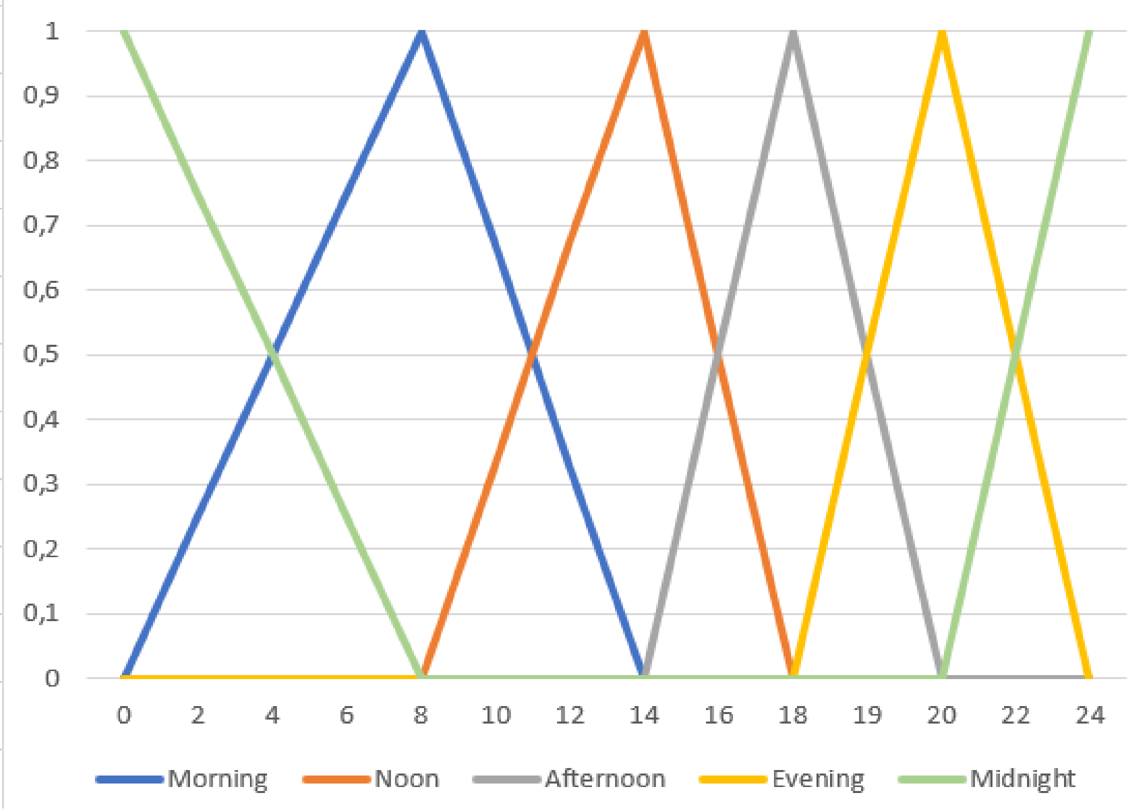
$$\mu_{morning} = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ή } x \geq 14 \\ \frac{x}{8}, & 0 \leq x \leq 8 \\ \frac{14-x}{6} & ,8 \leq x \leq 14 \end{cases}$$

$$\mu_{noon} = \begin{cases} 0, & x \leq 8 \text{ ή } x \geq 18 \\ \frac{x-8}{6}, & 8 \leq x \leq 14 \\ \frac{18-x}{4} & ,14 \leq x \leq 18 \end{cases}$$

$$\mu_{afternoon} = \begin{cases} 0, & x \leq 14 \text{ ή } x \geq 20 \\ \frac{x-14}{4}, & 14 \leq x \leq 18 \\ \frac{20-x}{2} & ,18 \leq x \leq 20 \end{cases}$$

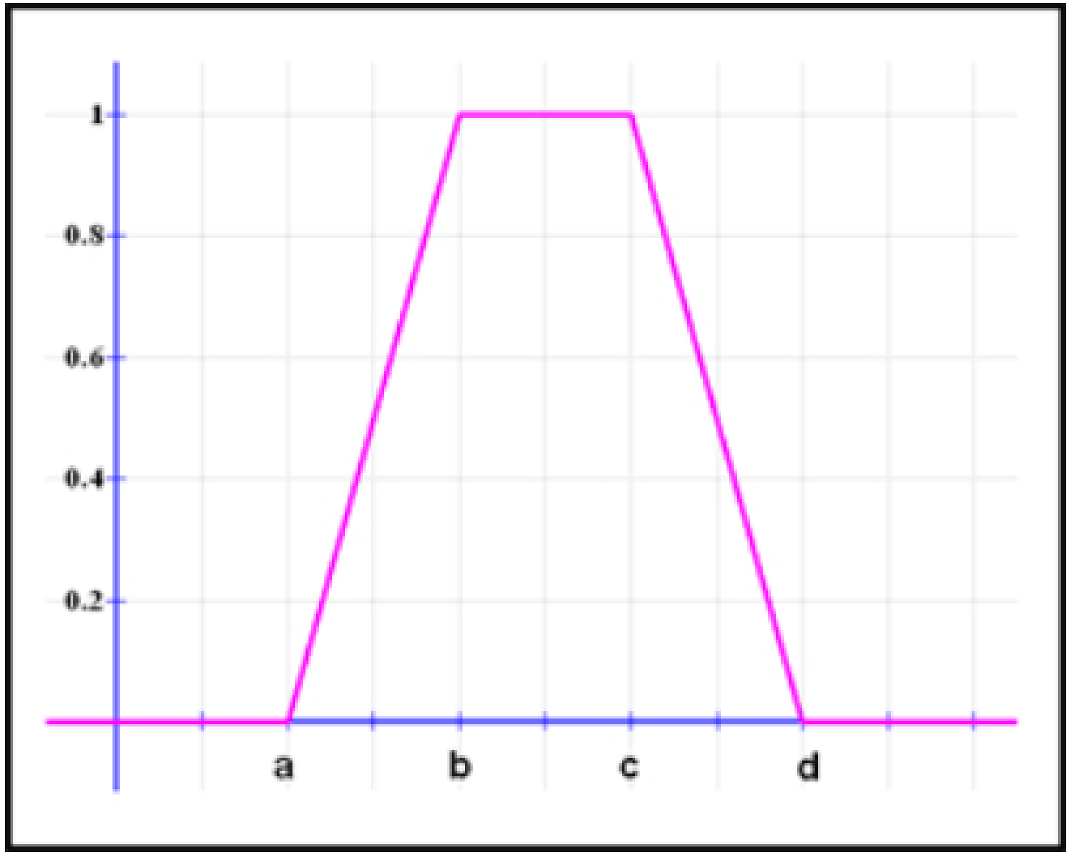
$$\mu_{evening} = \begin{cases} 0, & x \leq 18 \text{ ή } x = 24 \\ \frac{x-18}{2}, & 18 \leq x \leq 20 \\ \frac{24-x}{4} & ,20 \leq x \leq 24 \end{cases}$$

$$\mu_{midnight} = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ή } x = 24 \\ \frac{x-20}{4}, & 20 \leq x \leq 24 \\ \frac{8-x}{8} & ,0 \leq x \leq 8 \end{cases}$$



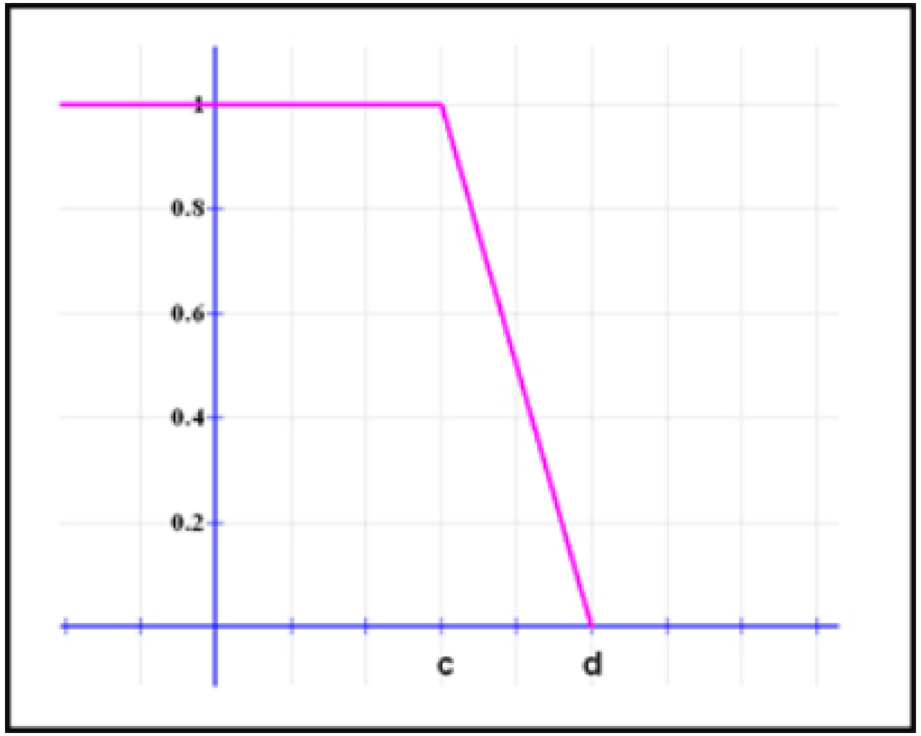
Τραπεζοειδής Συνάρτηση Συμμετοχής

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & b \le x \le c \\ \frac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d \\ 0, & x \ge d \end{cases}$$



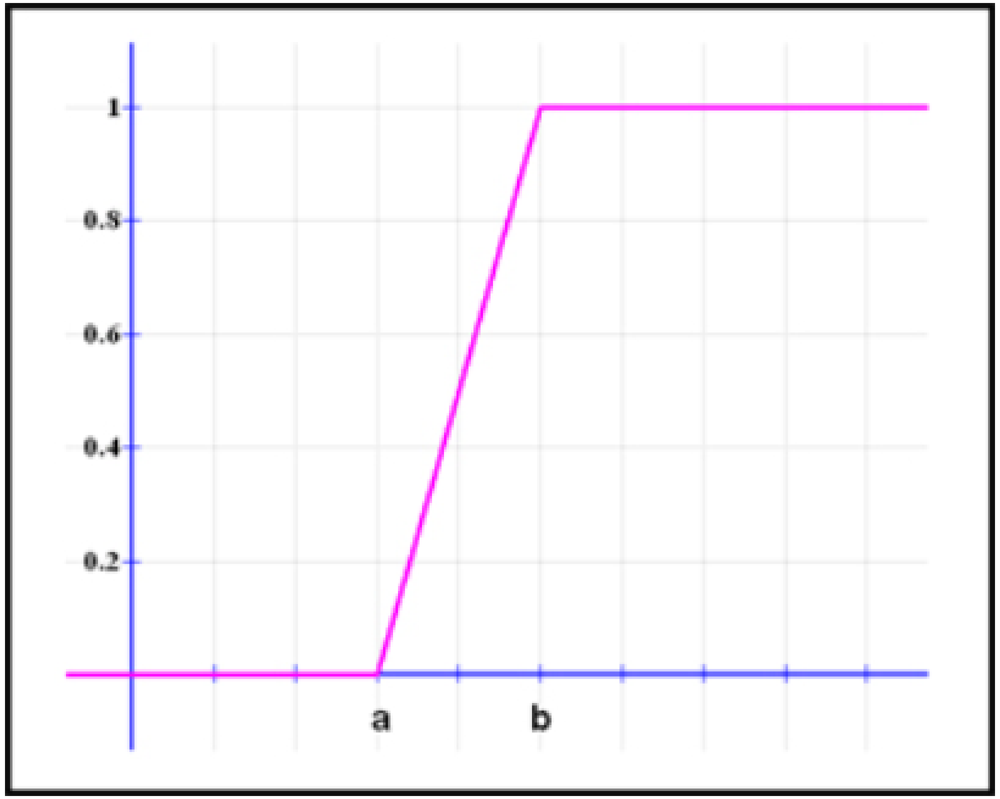
Τραπεζοειδής Συνάρτηση Συμμετοχής – R-functions

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x > d \\ \dfrac{d-x}{d-c}, & c \le x \le d \\ 1, & x < c \end{cases}$$



Τραπεζοειδής Συνάρτηση Συμμετοχής – L-functions

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b \\ 1, & x > b \end{cases}$$



Τραπεζοειδής Συνάρτηση Συμμετοχής – Παράδειγμα (1/2)

- Σύνολο τιμών: x ε [0, 110]
- Ασαφή Σύνολα: {infant, child, young, middle-aged, senior}

	infant	child	young	middle-aged	senior
0	0	0	0	0	0
2	0,67	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0
5	1	0	0	0	0
6	0,5	0,5	0	0	0
7	0	1	0	0	0
12	0	1	0	0	0
15	0	0,5	0,5	0	0
18	0	0	1	0	0
30	0	0	1	0	0
35	0	0	1	0	0
40	0	0	0,67	0,33	0
45	0	0	0,33	0,67	0
50	0	0	0	1	0
65	0	0	0	1	0
70	0	0	0	0,67	0,33
75	0	0	0	0,33	0,67
80	0	0	0	0	1
95	0	0	0	0	1
100	0	0	0	0	1
110	0	0	0	0	1

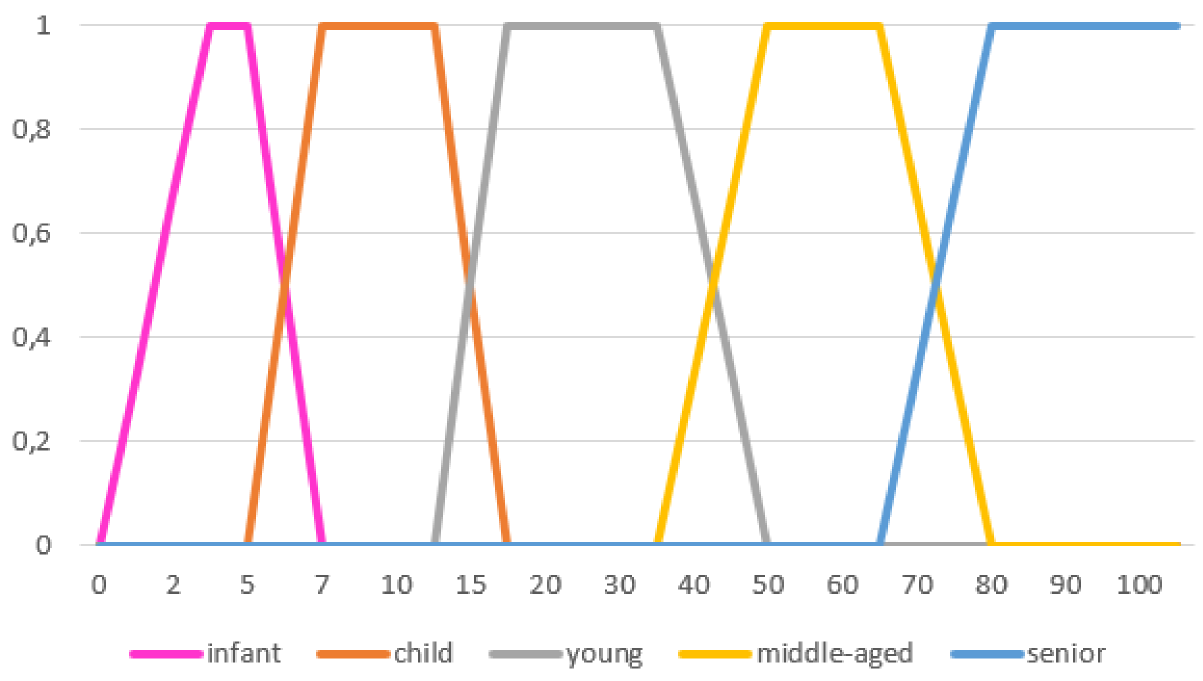
Τραπεζοειδής Συνάρτηση Συμμετοχής – Παράδειγμα (2/2)

$$\mu_{infant} = \begin{cases} 0, & x \geq 7 \\ \frac{x}{3}, & x \leq 3 \\ \frac{7-x}{2} & ,5 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

$$\mu_{child} = \begin{cases} 0, & x \leq 5 \text{ ή } x \geq 18 \\ \frac{x-5}{2}, & 5 \leq x \leq 7 \\ 1, & 7 \leq x \leq 12 \\ \frac{18-x}{4} & ,14 \leq x \leq 18 \end{cases}$$

$$\mu_{young} = \begin{cases} 0, & x \leq 12 \text{ ή } x \geq 50 \\ \frac{x-12}{6}, & 12 \leq x \leq 18 \\ 1, & 18 \leq x \leq 35 \\ \frac{50-x}{15} & ,35 \leq x \leq 50 \end{cases}$$

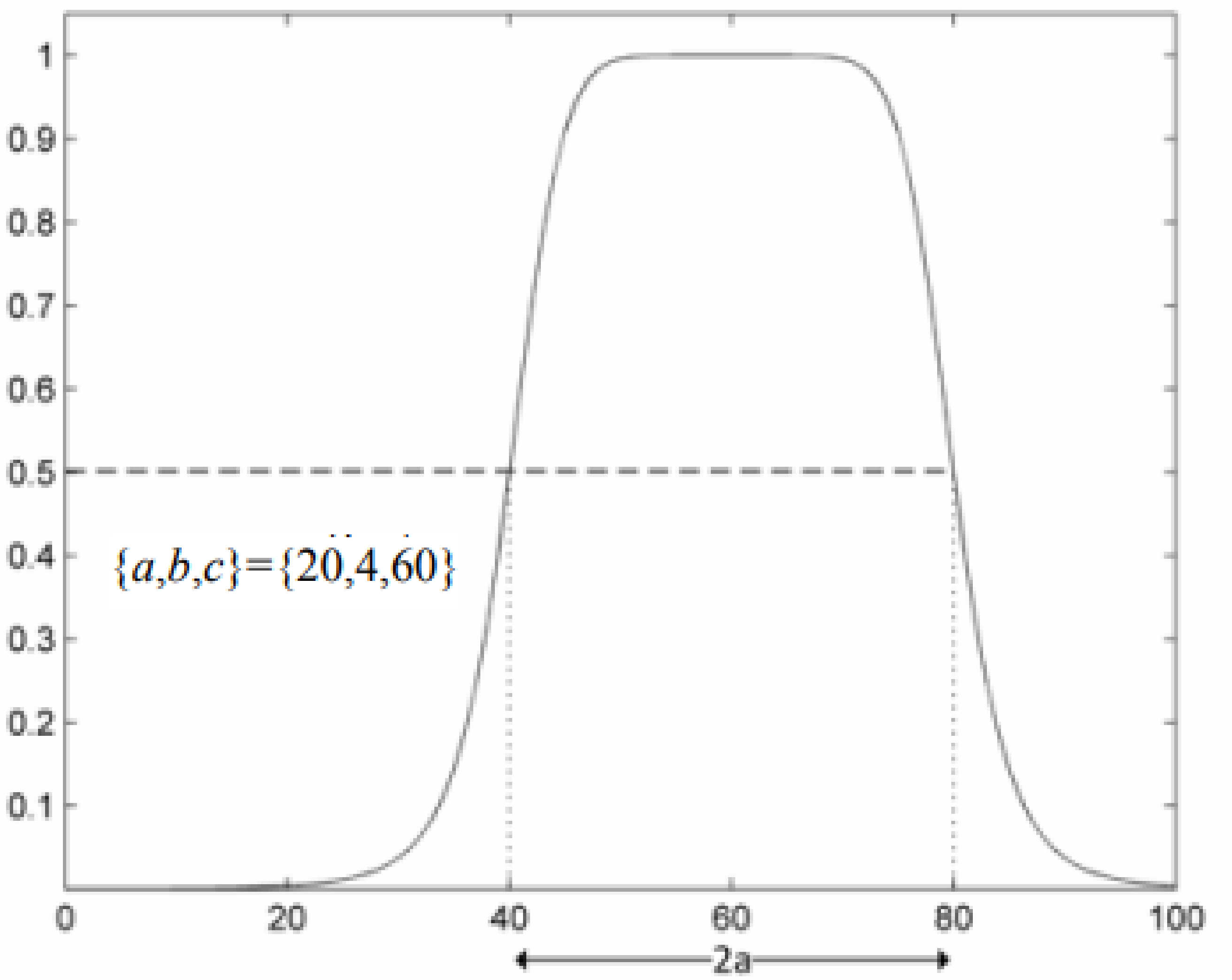
$$\mu_{middle-aged} = \begin{cases} 0, & x \leq 35 \text{ ή } x = 80 \\ \frac{x-35}{15}, & 35 \leq x \leq 50 \\ 1, & 50 \leq x \leq 65 \\ \frac{80-x}{15} & ,65 \leq x \leq 80 \end{cases}$$



$$\mu_{senior} = \begin{cases} 0, & x \leq 65 \\ \frac{x-65}{15}, & 65 \leq x \leq 80 \\ 1\ , & x \geq 80 \end{cases}$$

Γενικευμένη Καμπανοειδής Συνάρτηση Συμμετοχής (1/4)

- $\mu_{\mathrm{A}}(x) = \frac{1}{1+(\frac{x-c}{a})^{2b}}$



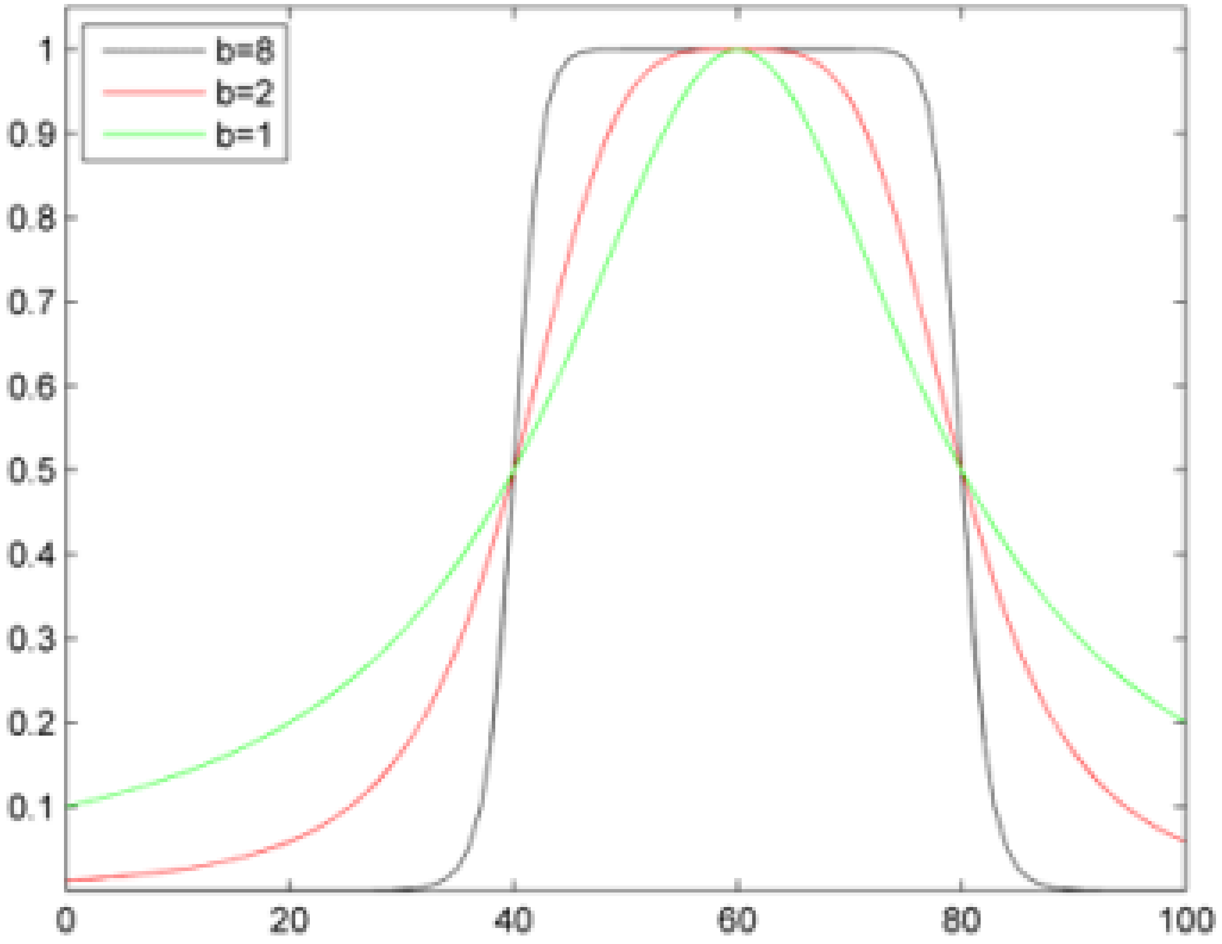
Γενικευμένη Καμπανοειδής Συνάρτηση Συμμετοχής (2/4)

- Η συνάρτηση συμμετοχής είναι συμμετρική, με κέντρο συμμετρίας την τιμή της παραμέτρου c.
- Η συνάρτηση συμμετοχής έχει δύο σημεία καμπής στις θέσεις c+a, c-a . Κατά συνέπεια, η παράμετρος a ελέγχει το «εύρος» της συνάρτησης, καθώς όσο το a αυξάνει τόσο αυξάνει το «εύρος» της συνάρτησης συμμετοχής.
- Η παράμετρος b ελέγχει την κλίση της συνάρτησης συμμετοχής στον ανερχόμενο (αριστερό) και τον κατερχόμενο (δεξιό) κλάδο. Η κλίση στα σημεία καμπής είναι $-\frac{b}{2a}$
- Κατά συνέπεια, η παράμετρος b ελέγχει τον ρυθμό πτώσης της συνάρτησης από τη μονάδα στο μηδέν.

Γενικευμένη Καμπανοειδής Συνάρτηση Συμμετοχής (3/4)

- Όσο αυξάνει το b τόσο αυξάνει ο ρυθμός πτώσης και η μετάβαση από τους υψηλούς βαθμούς συμμετοχής στους χαμηλούς βαθμούς συμμετοχής γίνεται πιο απότομη.
- Για μεγάλες τιμές του b το ασαφές σύνολο παρουσιάζει μεγάλες τιμές συμμετοχής (κοντά στην μονάδα) για όλα τα στοιχεία του συνόλου υποστήριξης και το ασαφές σύνολο τείνει να γίνει σαφές.
- Συμπερασματικά, η παράμετρος b ελέγχει τον βαθμό «ασάφειας» του ασαφούς συνόλου και γι' αυτό θεωρείται και ως «ασαφοποιητής» (fuzzifier).
- Μικρές τιμές του b προσδίδουν μεγάλη ασάφεια, ενώ μεγάλες τιμές του b προσδίδουν μικρή ασάφεια στα ασαφή σύνολα.

Γενικευμένη Καμπανοειδής Συνάρτηση Συμμετοχής (4/4) – Η επίδραση της b

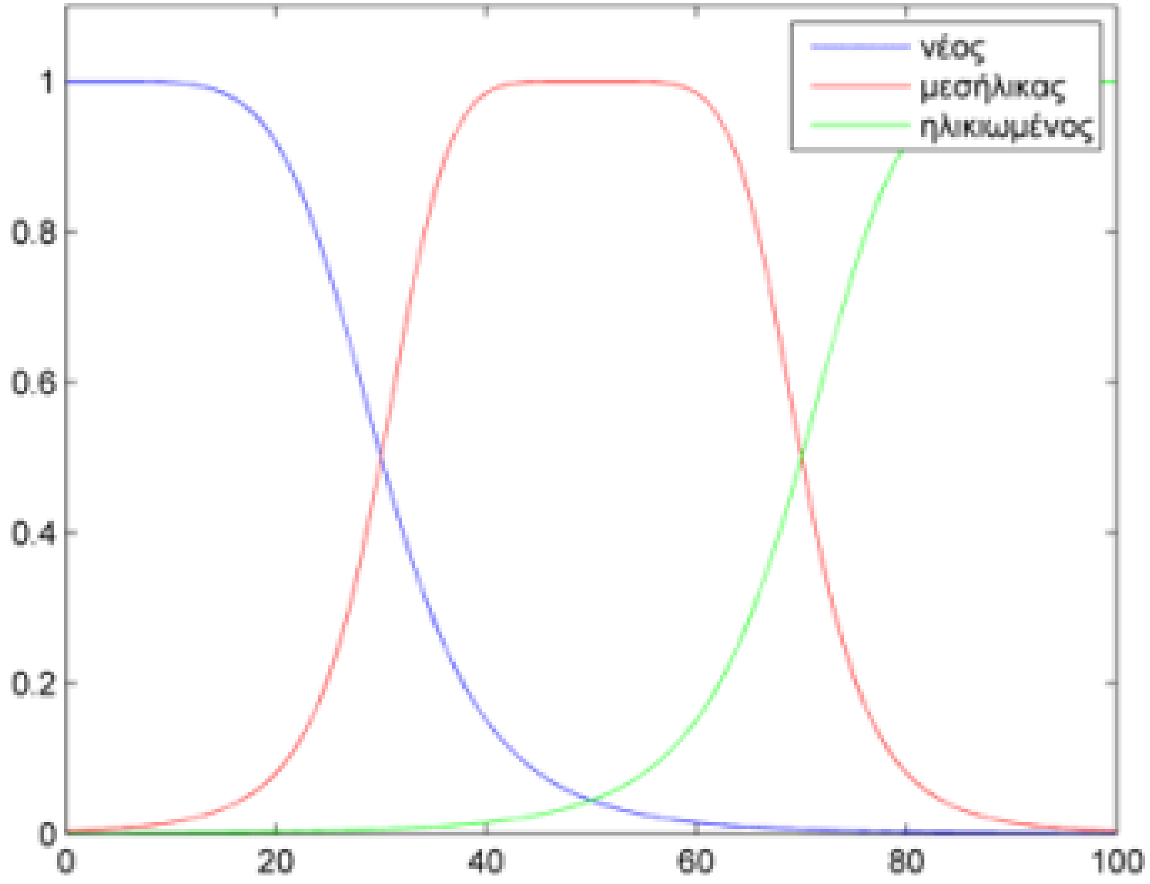


Γενικευμένη Καμπανοειδής Συνάρτηση Συμμετοχής – Παράδειγματα (1/3)

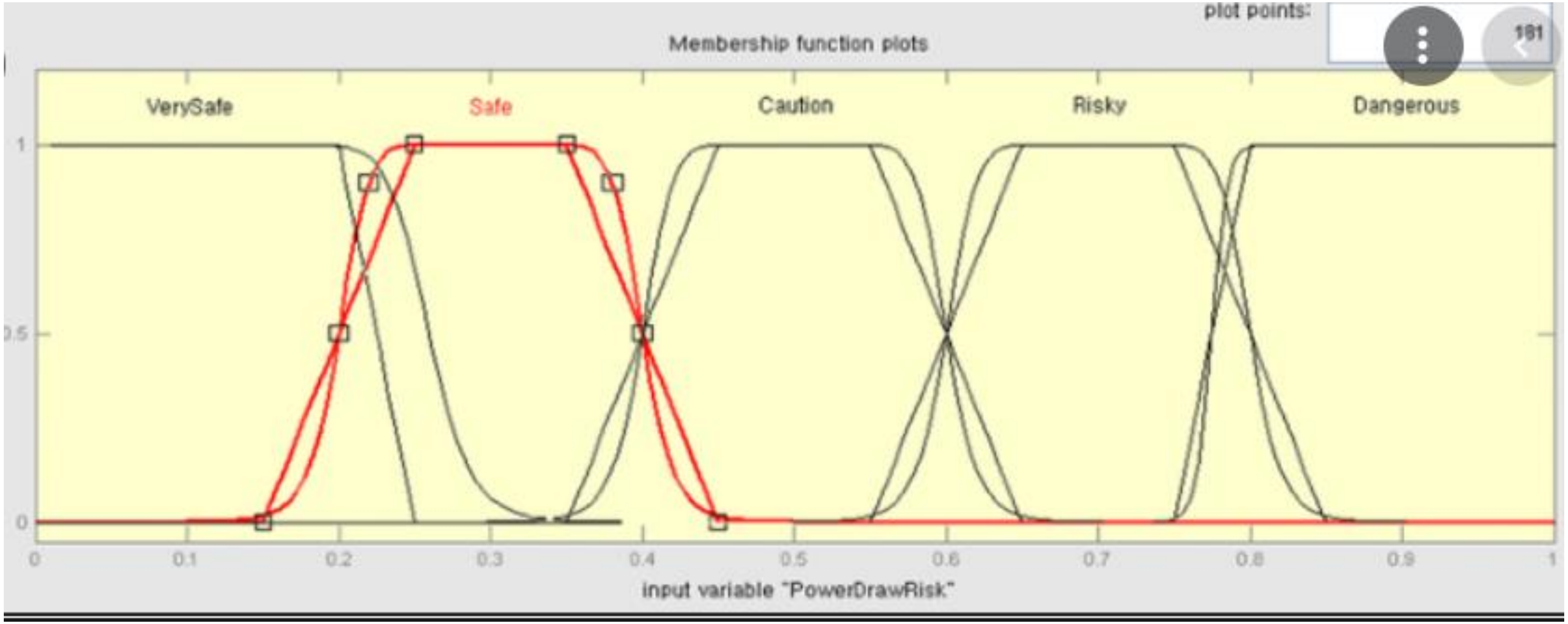
$$\boldsymbol{A} = «νέος» = \{(x,\mu_A(x)) | x \in \boldsymbol{U}\},\ \mu_A(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{30}\right)^6}$$

$$\boldsymbol{B} = «μεσήλικας» = \{(x,\mu_B(x)) | x \in \boldsymbol{U}\},\ \mu_B(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-50}{20}\right)^6}$$

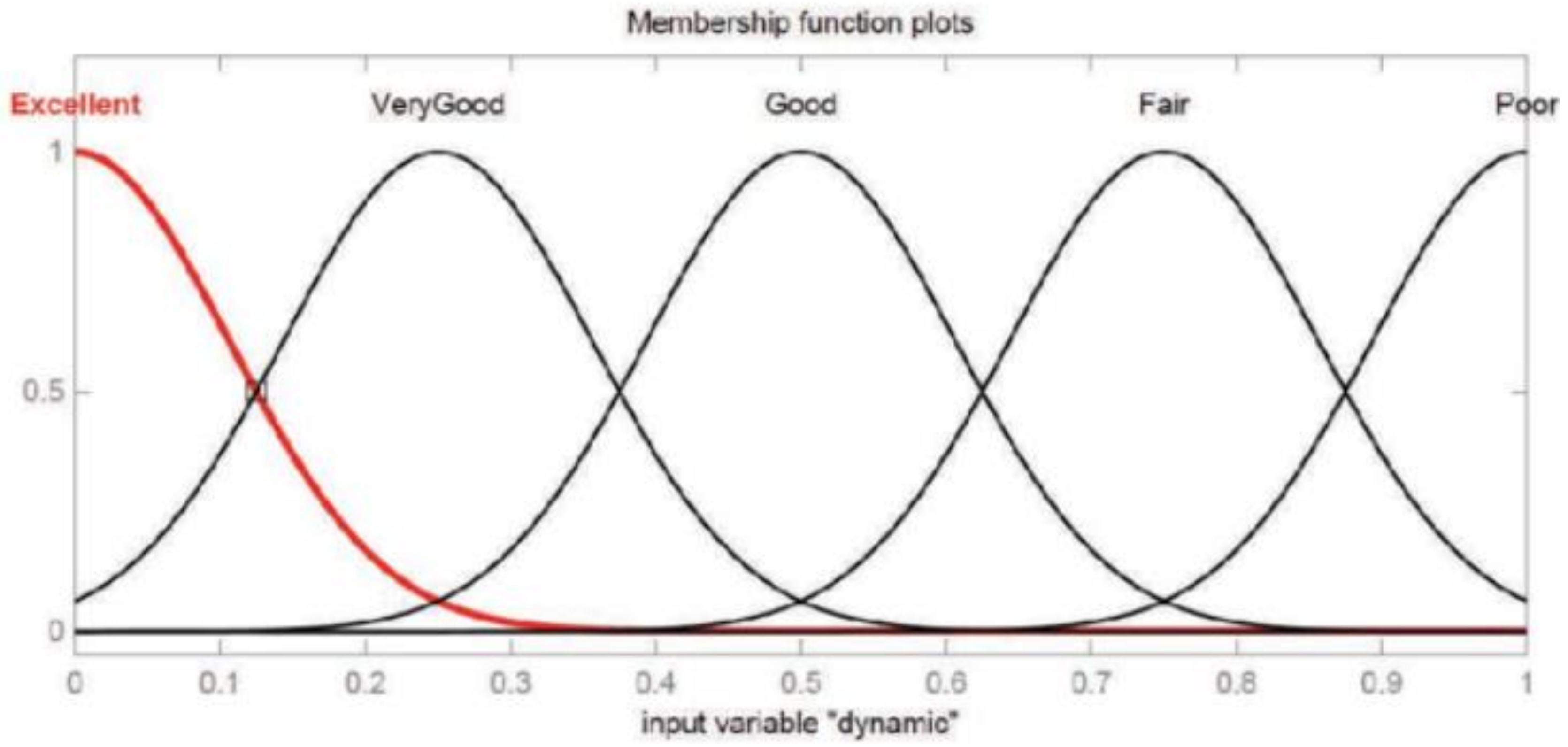
$$\boldsymbol{C} = «ηλικιωμένος» = \{(x,\mu_C(x)) | x \in \boldsymbol{U}\},\ \mu_C(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x-100}{30}\right)^6}$$



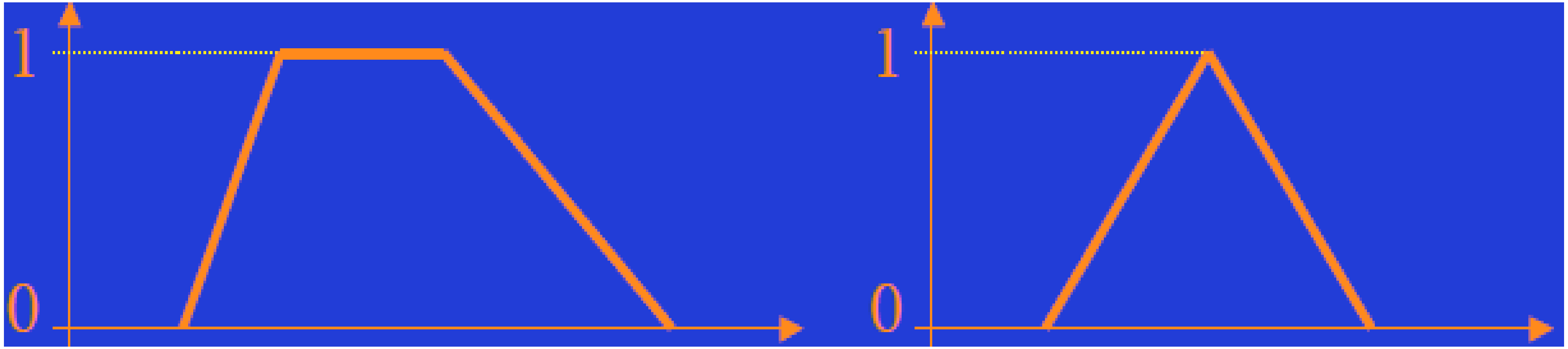
Γενικευμένη Καμπανοειδής Συνάρτηση Συμμετοχής – Παράδειγματα (2/3)



Γενικευμένη Καμπανοειδής Συνάρτηση Συμμετοχής – Παράδειγματα (3/3)



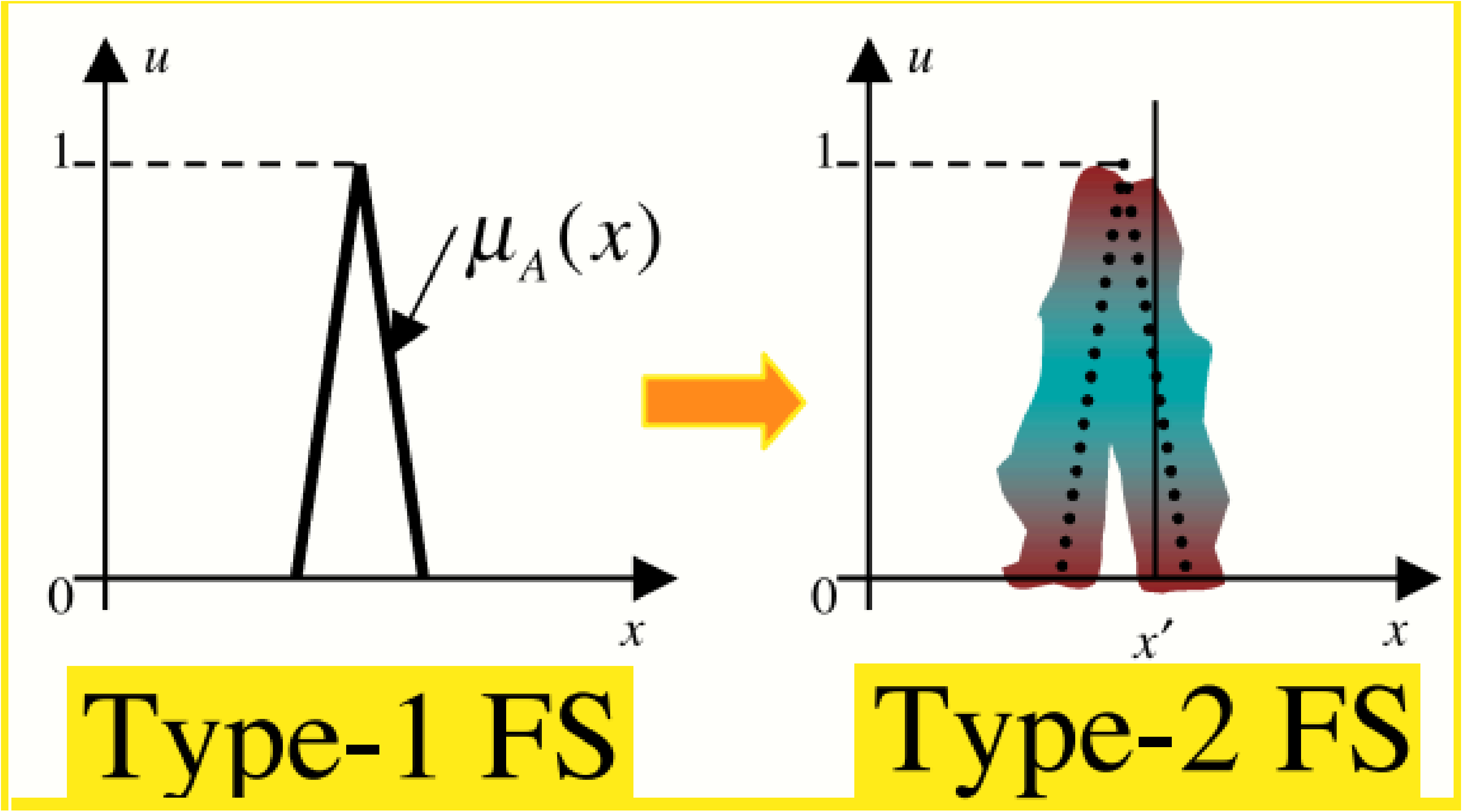
Type-1 fuzzy sets



Αμφισβήτηση των Type-1 Ασαφών Συνόλων

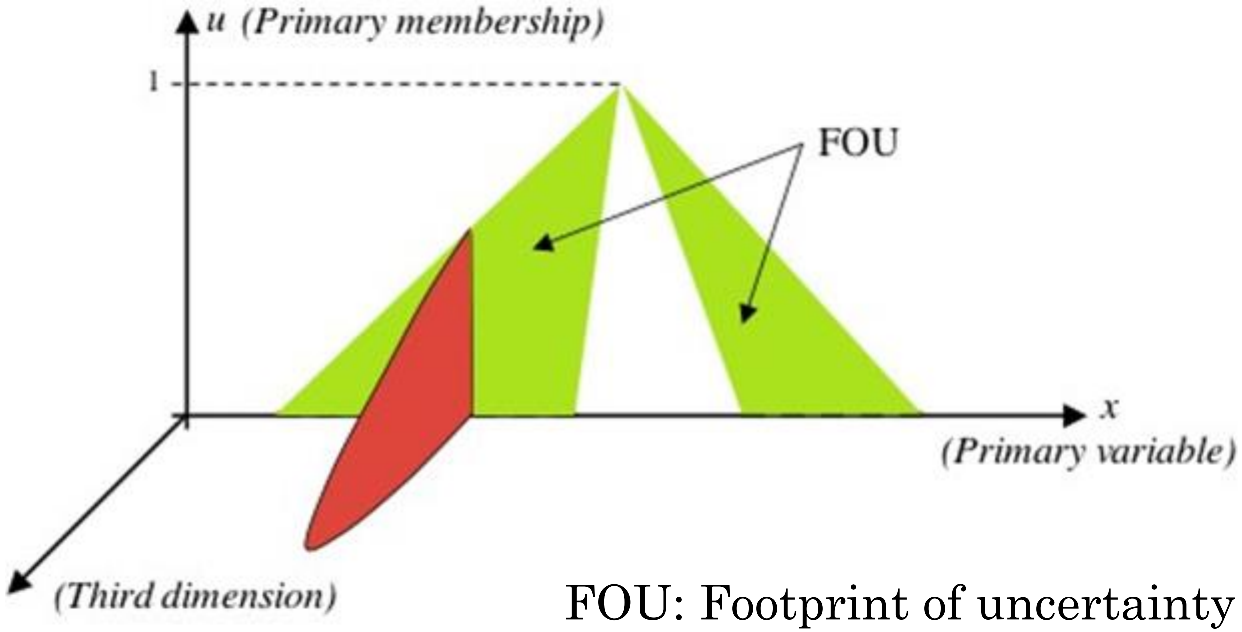
- Ένα ασαφές σύνολο για μια λέξη είναι ένα καλά καθορισμένο τύπου-1 ασαφές σύνολο που είναι απολύτως βέβαιο, καθώς από την αρχή καθορίζονται οι παράμετροί του
- Οι λέξεις σημαίνουν διαφορετικά πράγματα για διαφορετικούς ανθρώπους. Επομένως υπάρχει αβεβαιότητα σε αυτές.
- Είναι αντίφαση να πει κανείς ότι κάτι βέβαιο μπορεί να μοντελοποιήσει κάτι αβέβαιο.

Type-1 vs Type-2 Fuzzy Sets



Interval type-2 fuzzy sets

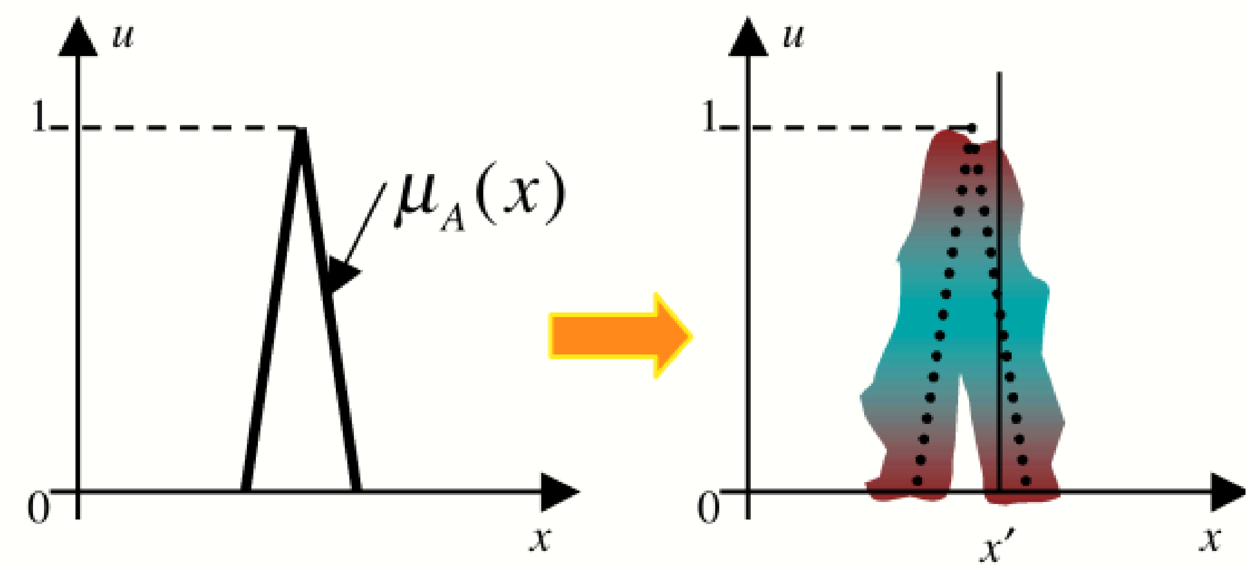
- Μια επέκταση των type-1 fuzzy sets.
- Η συνάρτηση μέλους ενός ασαφούς συνόλου τύπου-2 είναι τρισδιάστατη.
- Τα ασαφή σύνολα τύπου-2 έχουν βαθμούς συμμετοχής που είναι τα ίδια ασαφή.



FOU: Footprint of uncertainty

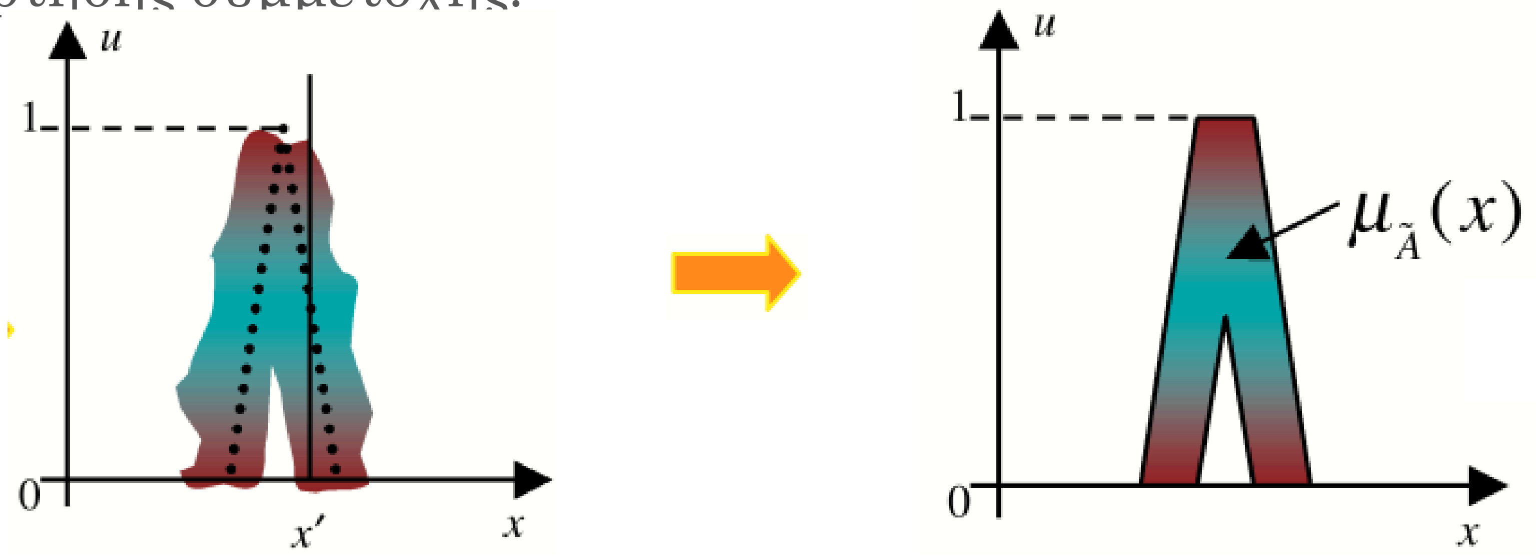
Μετατροπή από Type-1 σε Type-2 Ασαφή Σύνολα (1/3)

- «Θόλωμα» των ορίων ενός Type-1 ασαφούς συνόλου.
- Εκχώρηση πιθανότητας, η οποία μπορεί να είναι ανομοιόμορφη.



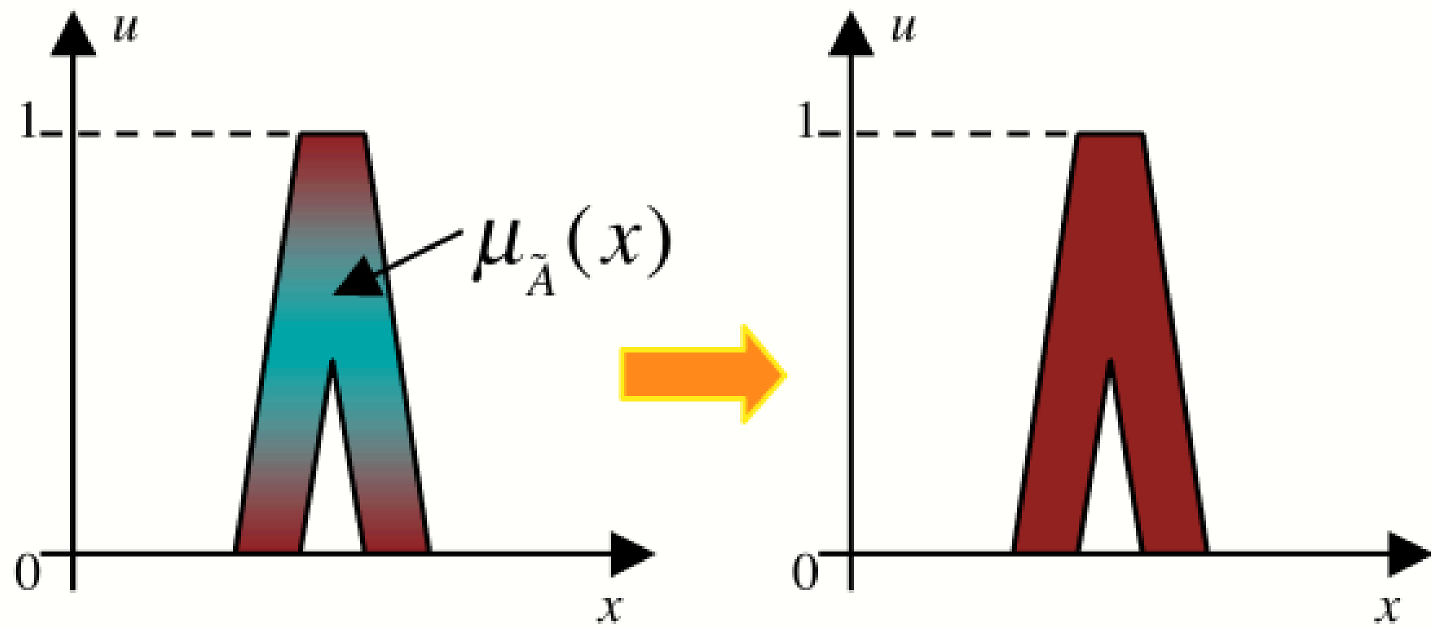
Μετατροπή από Type-1 σε Type-2 Ασαφή Σύνολα (2/3)

- «Καθαρισμός θολούρας»
- Χρήση καλά καθορισμένων γεωμετρικών σχημάτων για τα επάνω και κάτω όρια της «θαμπής» συνάρτησης συμμετοχής.
- Στο παράδειγμα, χρησιμοποιείται ένα τραπεζοειδές για να «καθαρίσουμε» το πάνω μέρος και ένα τρίγωνο για να «καθαρίσουμε» το κάτω μέρος της συνάρτησης συμμετοχής.



Μετατροπή από Type-1 σε Type-2 Ασαφή Σύνολα (3/3)

- Χρήση ομοιόμορφων πιθανοτήτων

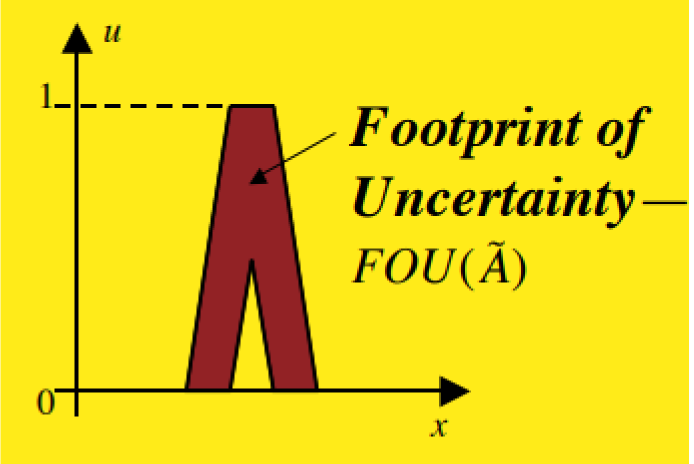


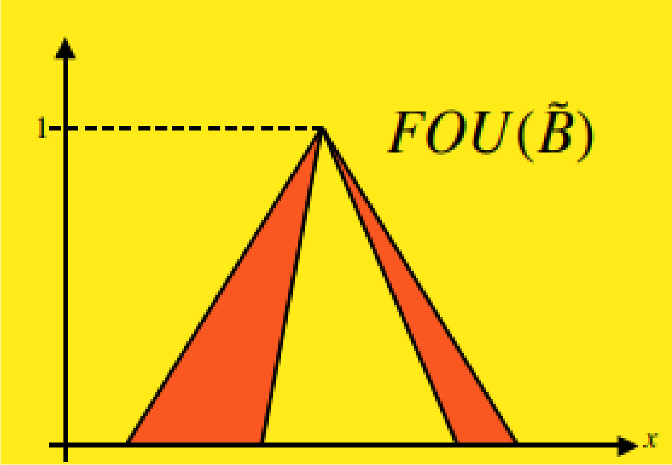
FOU: Footprint of uncertainty (1/2)

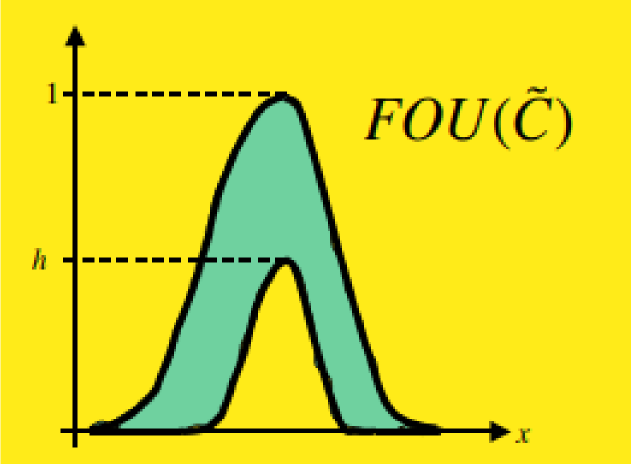
- FOU (αποτύπωμα αβεβαιότητας): η τρίτη διάσταση ενός type-2 fuzzy set.
  - Η τιμή της συνάρτησης συμμετοχής σε κάθε σημείο του δισδιάστατου πεδίου της.
- Το «αποτύπωμα αβεβαιότητας» (FOU) αναπαριστάνει το θόλωμα μιας type-1 συνάρτησης συμμετοχής.
- Όσο μεγαλύτερη είναι η περιοχή του FOU, τόσο μεγαλύτερη είναι η αβεβαιότητα.
- Όσο μικρότερη είναι η περιοχή του FOU, τόσο μικρότερη είναι η αβεβαιότητα.

FOU: Footprint of uncertainty (2/2)

- Το FOU είναι η σκιασμένη περιοχή.
- Οι περιοχές αυτές μπορεί να έχουν διαφορετικά γεωμετρικά σχήματα.

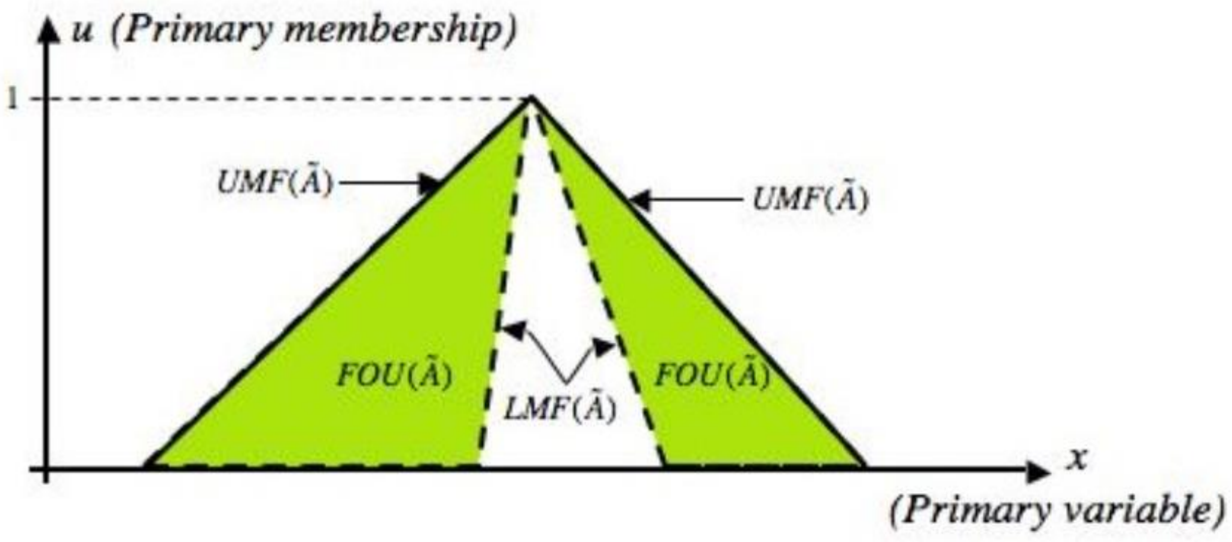


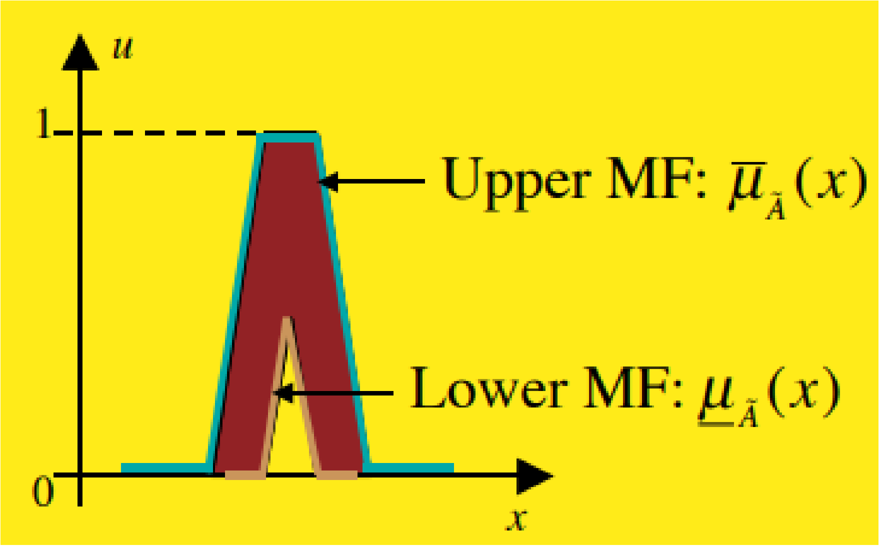




Ανώτερο και κατώτερο όριο

- Κάθε FOU έχει ένα άνω και ένα κάτω όριο.
- Αυτά τα όρια χρησιμοποιούνται στα μαθηματικά για τα Type-2 Fuzzy sets.



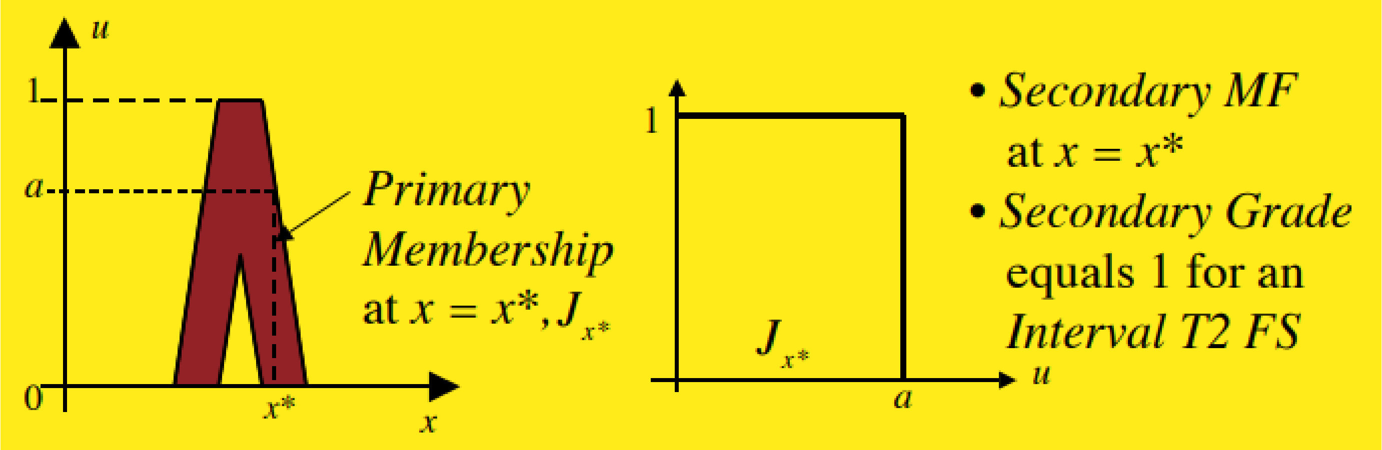


Δευτερεύων Συνάρτηση Συμμετοχής (1/3)

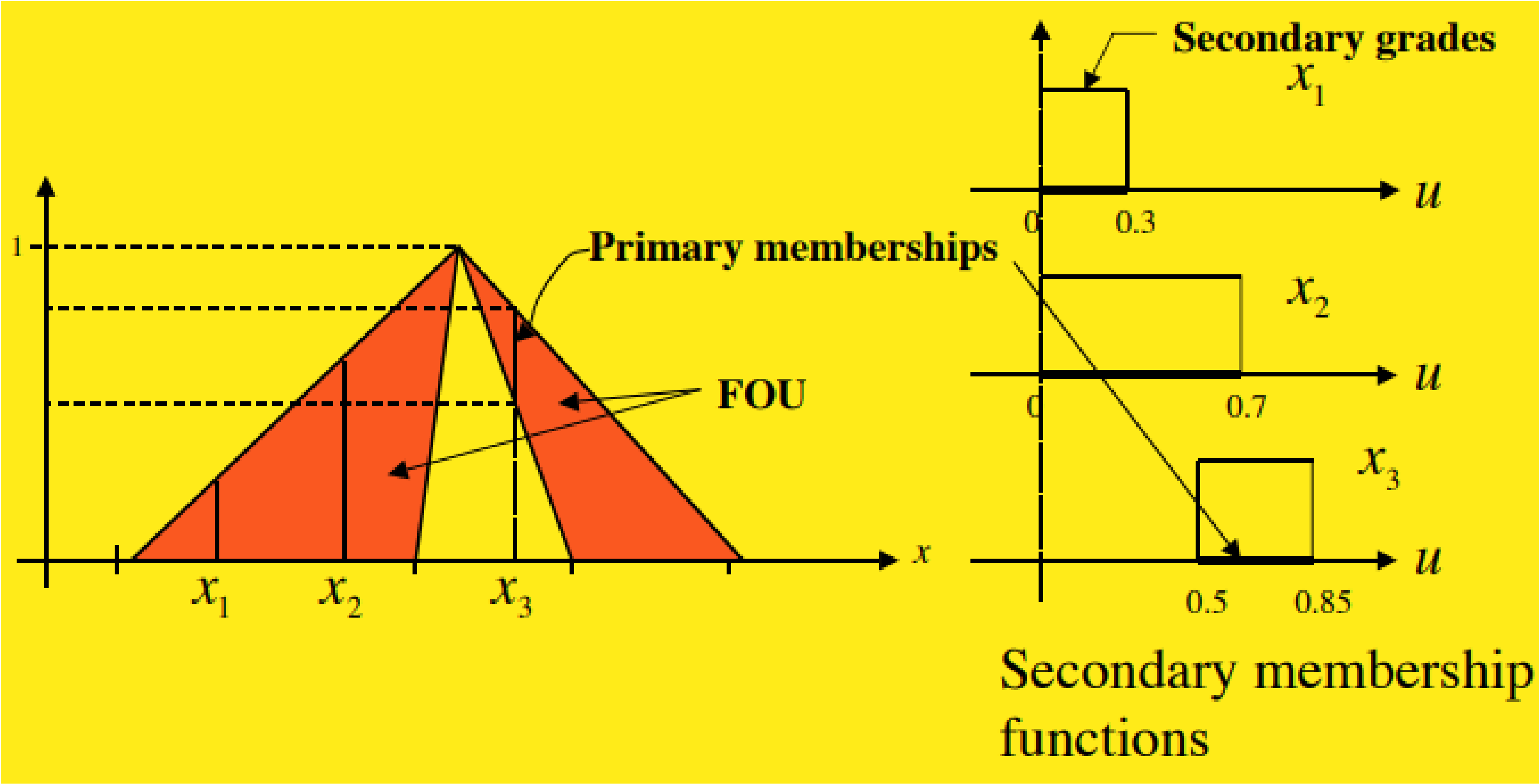
- Σε κάθε τιμή της κύριας μεταβλητής x, η συνάρτηση συμμετοχής:
  - δεν είναι ένα σημείο
  - Είναι μια συνάρτηση, που ονομάζεται «πρωτεύον συνάρτηση συμμετοχής»
- Η κατανομή που βρίσκεται στην κορυφή της πρωτεύοντος συνάρτησης συμμετοχής ονομάζεται «δευτερογενής συνάρτηση συμμετοχής».
- Το εύρος της δευτερογενούς συνάρτηση συμμετοχής ονομάζεται «δευτερογενής βαθμός»

Δευτερεύων Συνάρτηση Συμμετοχής (2/3)

- Για ένα interval type-2 fuzzy set, ο δευτερογενής βαθμός ισούται με 1 για το σύνολο του FOU.
- Επομένως, η 3η διάσταση ενός type-2 fuzzy set δεν μεταφέρει κάποια νέα πληροφορία.
- Άρα, το FOU χαρακτηρίζει πλήρως ένα interval type-2 fuzzy set.



Δευτερεύων Συνάρτηση Συμμετοχής (3/3)



Εφαρμογές Type-2 Fuzzy Sets

- Type-2 sets and FLSs have been used in decision making , solving fuzzy relation equations, survey processing, time-series forecasting , function approximation, timevarying channel equalization , control of mobile robots , etc.
- Στη λήψη αποφάσεων.
- Στην επίλυση εξισώσεων ασαφών σχέσεων.
- Στην επεξεργασία ερευνών.
- Στην πρόβλεψη χρονοσειρών.
- Στην προσέγγιση συναρτήσεων.
- Στον έλεγχο των κινητών ρομπότ κ.λπ.

Παράδειγμα – Interval Type-2 Fuzzy Sets

Ορισμός - Υπόθεση

- Ας υποθέσουμε ότι η μεταβλητή που μας ενδιαφέρει είναι η οπτική επαφή, την οποία συμβολίζουμε ως x.
- Ας βάλουμε την οπτική επαφή σε μια κλίμακα τιμών 0-10.
- Ένας από τους όρους που μπορεί να χαρακτηρίσουν την αντιληπτή οπτική επαφή (π.χ. κατά τη διάρκεια του φλερτ) είναι "κάποια οπτική επαφή".
- Ας υποθέσουμε ότι ερευνήσαμε 100 άνδρες και γυναίκες και τους ζητήσαμε να εντοπίσουν τα άκρα ενός διαστήματος για "κάποια οπτική επαφή" στην κλίμακα 0-10.
- Σίγουρα, δεν θα έχουμε τα ίδια αποτελέσματα από όλα αυτά, γιατί οι λέξεις σημαίνουν διαφορετικά πράγματα για διαφορετικούς ανθρώπους.

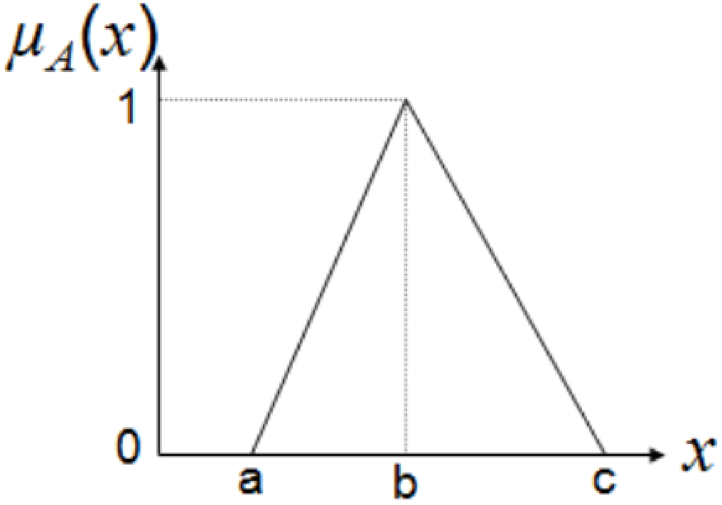
$1^η$ προσέγγιση (1/2)

- Υπολογισμός του μέσου όρου των 100 σετς των δύο τελικών σημείων (end-points) και χρήση του για τον καθορισμό του διαστήματος που σχετίζεται με το «κάποια οπτική επαφή».
- Κατασκευή μιας τριγωνικής (θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν και άλλα σχήματα) συνάρτησης συμμετοχής.
  - Τιμές στον άξονα x καθορίζονται από τις δύο μέσες τιμές των τελικών σημείων.
  - Η κορυφή βρίσκεται στο μέσον μεταξύ των δύο τελικών σημείων.

1η προσέγγιση (2/2)

- Η σχεδιασμένη τριγωνική συνάρτηση συμμετοχής είναι type-1 και χρησιμοποιεί δύο διαστάσεις.
- Η προσέγγιση αυτή αγνοεί εντελώς τις αβεβαιότητες που σχετίζονται με τα δύο τελικά σημεία.

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{if } a \leq x \leq b \\ \dfrac{c-x}{c-b} & \text{if } b \leq x \leq c \\ 0 & \text{if } x \geq c \end{cases}$$

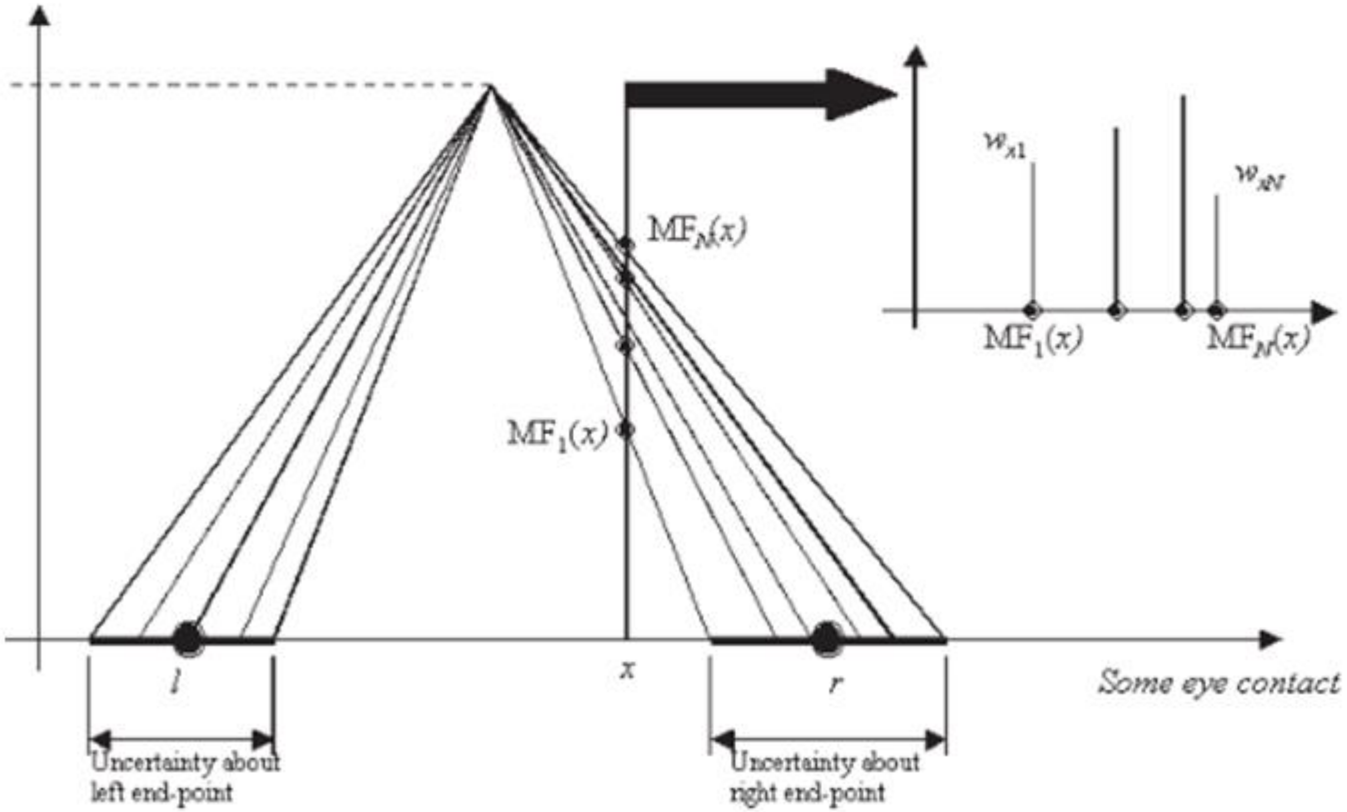


2η προσέγγιση (1/3)

- Εύρεση των μέσων τιμών και των τυπικών αποκλίσεων για τα δύο τελικά σημεία.
- Με τον τρόπο αυτό, «θολώνουμε» τη θέση των δύο τελικών σημείων κατά μήκος του άξονα x.
- Εντοπισμός τριγώνων, των οποίων τα βασικά τελικά σημεία μπορούν να βρίσκονται οπουδήποτε στα διαστήματα κατά μήκος του άξονα x που σχετίζονται με τις «θολές» μέσες τιμές των τελικών σημείων.
- Με αυτό τον τρόπο, δημιουργείται μια συνέχεια τριγωνικών συναρτήσεων συμμετοχής που βρίσκονται στον άξονα x.

$2^η$ προσέγγιση (1/3)

- Απεικόνιση μιας ολόκληρης δέσμης τριγώνων που έχουν όλα το ίδιο σημείο κορυφής αλλά διαφορετικά σημεία βάσης στον άξονα x.



2η προσέγγιση (3/3)

- Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ακριβώς N = 100 τέτοια τρίγωνα.
- Σε κάθε τιμή του x, μπορεί να υπάρχουν έως και N συναρτήσεις συμμετοχής: MF1(x), MF2(x),..., MFN(x).
- Αντιστοιχίζουμε ένα βάρος (wx1, wx2,..., wxN) σε καθεμία από τις MF.
  - Βάρη: οι πιθανότητες να εμφανιστεί το κάθε τρίγωνο.
- Έτσι έχουμε τα ζεύγη (MFi(x), wxi), όπου i=1, ..., N. Για κάθε x → δευτερογενής συνάρτηση συμμετοχής.
- Επομένως, έχουμε Type-2 Fuzzy set.

Πηγές (1/2)

- https://www.slideshare.net/stratosgoumas/fuzzy-logic-air-condition-matlab-2013
- https://eclass.upatras.gr/modules/document/file.php/EE846/fuzzy_logic.pdf
- https://docplayer.gr/34470412-Asafis-logiki-fuzzy-logic.html
- https://dione.lib.unipi.gr/xmlui/bitstream/handle/unipi/4457/Karampela.pdf?sequence=2&isAllowed=y
- https://people.iee.ihu.gr/~adamidis/IntelSys/FS_notes.pdf
- file:///C:/Users/x.konstantina/Downloads/INTRODUCTIONtoFUZZYLOGICA-1_.pdf

Πηγές (2/2)

- file:///C:/Users/x.konstantina/Downloads/02_chapter_01.pdf
- https://en.wikipedia.org/wiki/Fuzzy_logic
- https://www.javatpoint.com/fuzzy-logic
- https://www.slideserve.com/sunee/fuzzy-logic
- http://eclass.teipir.gr/openeclass/modules/document/file.php/AUTO114/II.%20%CE%91%CF%83%CE%B1%CF%86%CE%AE%20%CE%A3%CF%8D%CE%BD%CE%BF%CE%BB%CE%B1.pdf
- https://repository.kallipos.gr/bitstream/11419/5958/2/02_chapter_01.pdf
- J. M. Mendel, "Type-2 Fuzzy Sets: Some Questions and Answers," IEEE Connections, Newsletter of the IEEE Neural Networks Society, vol. 1, Aug. 2003, pp. 10-13.
- J. M. Mendel and R. I. John, " Type-2 Fuzzy Sets Made Simple," IEEE Trans. on Fuzzy Systems, vol. 10, pp. 117-127, April 2002.